$M^n$ variedade diferenciável.

$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ conexão afim é um conceito local.

$\nabla : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \to \mathfrak{X}(U)$ conexão afim ($U \subset M$ aberto)

$(\nabla_Y X)|_U = \nabla_{Y|_U} X|_U$.

Em coordenadas,

$$\nabla_Y X = \nabla_{\sum_j y_j X_j} \sum_i x_i X_i = \sum_j y_j \sum_i \left( X_j(x_i) X_i + x_i \nabla_{X_j} X_i \right)$$

Def. Os <u>símbolos de Christoffel</u> $\Gamma_{ij}^k$, $1 \le i,j,k \le n$, de $\nabla$ nas coordenadas $(x_1, \dots, x_n)$ são tais que

$$\nabla_{X_j} X_i = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k .$$

Então

$$\nabla_Y X = \sum_{i,j} y_j \left( X_j(x_i) X_i + x_i \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k \right)$$

$$= \sum_k \Big( \underbrace{\sum_j y_j X_j(x_k)}_{Y(x_k)} + \sum_{i,j} x_i y_j \Gamma_{ij}^k \Big) X_k$$

Conclusão: $\nabla_Y X(p)$ depende apenas de $Y(p)$ e dos valores de $X$ ao longo de alguma curva $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, tal que $c(0) = p$ e $c'(0) = Y$.

<u>Proposição 2.</u> Dada uma conexão afim $\nabla$ em $M$, existe uma única operação $V \longmapsto \frac{DV}{dt}$ (derivada covariante) tal que:

(1) $\frac{D}{dt}(V+W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$

(2) $\frac{D}{dt}(fV) = f\frac{DV}{dt} + \frac{df}{dt} \cdot V$ $\quad (f : I \to \mathbb{R})$

(3) Se existe um campo $Y \in \mathfrak{X}(U)$, $c(t) \in U$, tal que $V(t) = Y(c(t))$, então $\frac{DV}{dt} = \nabla_{c'(t)} Y$.

Dem: (Unicidade)

Escolhemos um sistema de coordenadas $(x_1, \ldots, x_k)$ em uma vizinhança do ponto p e expressamos o campo $V(t)$ nessas coordenadas:

$$V(t) = \sum_i{}' v_i(t) X_i(c(t))$$

e aplicamos as operações: Se $V \mapsto \frac{DV}{dt}$ existe, então

$$\frac{DV}{dt} = \frac{D}{dt}\Big(\sum_i{}' v_i X_i\Big) \overset{(1),(2)}{=} \sum_i{}' \Big(\frac{dv_i}{dt} X_i + v_i \frac{DX_i}{dt}\Big)$$

$$\overset{(3)}{=} \sum_i \Big(\frac{dv_i}{dt} X_i + v_i \nabla_{c'(t)} X_i\Big) \quad (*)$$

e esta representação em coordenadas é única.

(Existência) Defina a operação em coordenadas pela fórmula $(*)$. Se $(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_k)$ é outro sistema de coordenadas em torno de p, na interseção das vizinhanças temos que

$$V(t) = \sum_i{}' v_i(t) X_i(c(t)) = \sum_j{}' \tilde{v}_j(t) \tilde{X}_j(c(t))$$

onde $\tilde{X}_j = \partial/\partial\tilde{x}_j$. Pela fórmula $(*)$, vem que

$$\frac{DV}{dt} = \sum_i{}' \Big(\frac{dv_i}{dt} X_i + v_i \cdot \nabla_{c'(t)} X_i\Big) \overset{\text{(unicidade)}}{=} \sum_j{}' \Big(\frac{d\tilde{v}_j}{dt} \tilde{X}_j + \tilde{v}_j \cdot \nabla_{c'(t)} \tilde{X}_j\Big) \quad (!)$$

Logo a definição não depende de coordenadas e claramente satisfaz as propriedades (1)-(3) pois é uma derivação. $\square$

Seja $M^n$ variedade diferenciável, $\nabla$ conexão afim em M, $c: I \to M$ curva diferenciável.

**Def.** O campo $t \mapsto V(t) \in T_{c(t)}M$ é dito paralelo com respeito a $\nabla$ se $\frac{DV}{dt}(t) = 0 \quad \forall t \in I$.

Em coordenadas $(x_1, \dots, x_n)$, $c(t) = X(x_1(t), \dots, x_n(t))$

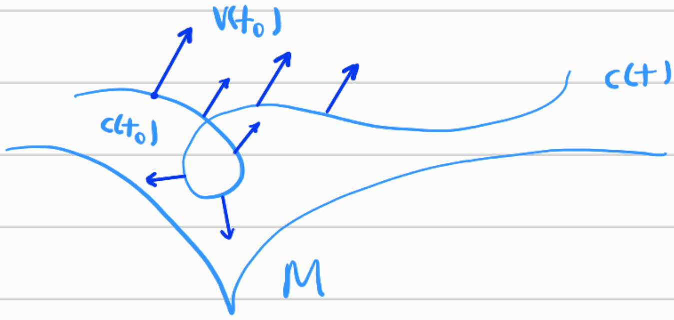
$$\frac{DV}{dt} = \sum_i \left( \frac{dv_i}{dt} X_i + v_i \nabla_{\sum_j x_j'(t) X_j} X_i \right) = \sum_i \left( v_i'(t) X_i + \sum_j v_i x_j' \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k \right)$$

$$= \sum_k \left( v_k'(t) + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k (x(t)) \, x_j'(t) v_i(t) \right) X_k$$

V é paralelo se e somente se

$$v_k'(t) + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k (x(t)) \, x_j'(t) v_i(t) = 0 \quad \forall 1 \leq k \leq n. \qquad (*)$$

Isto é um sistema linear de EDO's de primeira ordem, e dado o valor do campo em algum ponto, podemos usar o Teorema de Existência e Unicidade para encontrar um único campo que satisfaz o sistema linear acima em algum sistema de coordenadas em torno do ponto. Este campo é chamado o transporte paralelo do campo V.




**Proposição 3.** Dada uma curva $c: I \to M$, um ponto $t_0 \in I$ e $v \in T_{c(t_0)}M$, então existe um único campo paralelo $t \in I \mapsto V(t) \in T_{c(t)}M$ tal que $V(t_0) = v$.

**Dem.** Segue do Teorema de Existência e Unicidade para EDO's lineares para a equação $(*)$. Cubra $c(I)$ com um número finito de cartas e use a unicidade da solução na interseção dos domínios. (!) $\square$

$(M^n, g)$ variedade Riemanniana.

Pergunta: Como construir conexões afins?

Def. A conexão afim $\nabla$ é Riemanniana (ou compatível com $g$) se

(1) $$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle, \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

Equivalentemente, se $c: I \to M$ é uma curva e $V(t), W(t) \in T_{c(t)}M \ \forall t \in I$,

(2) $$\frac{d}{dt}\langle V(t), W(t)\rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W\right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt}\right\rangle$$

Do mesmo modo, se vale a propriedade que

(3) $t \in I \mapsto \langle P_1, P_2\rangle(t)$ é constante $\forall\ P_1, P_2$ campos paralelos ao longo da curva

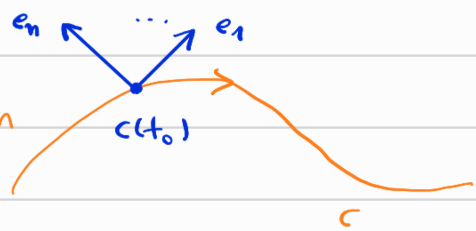
Vamos provar que as definições são de fato equivalentes:

(2) $\Rightarrow$ (3): Se $V, W$ são campos paralelos ao longo da curva, por definição $\frac{DV}{dt} = 0 = \frac{DW}{dt}$, donde por (2)

$$\frac{d}{dt}\langle V(t), W(t)\rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W\right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt}\right\rangle = \langle 0, W\rangle + \langle V, 0\rangle = 0 \quad \forall t \in I$$

portanto $t \in I \mapsto \langle V(t), W(t)\rangle$ é constante porque $I$ é conexo.

(3) $\Rightarrow$ (2): Seja $c: I \to M$ uma curva dif. e fixe um instante $c(t_0)$.




Tomamos uma base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $T_{c(t_0)}M$ e pela proposição anterior, existem campos paralelos $P_1(t), \dots, P_n(t)$ tais que $P_i(t_0) = e_i$. Assumindo que vale (3),

$\forall t$, $\{P_1(t), \dots, P_n(t)\}$ é base ortonormal de $T_{c(t)}M$. Em particular, se $V$ e $W$ são campos tangentes ao longo da curva, escrevemos

$$V(t) = \sum_i v_i(t) P_i(t), \quad W(t) = \sum_j w_j(t) P_j(t)$$

de onde obtemos:

$$\frac{d}{dt}\langle V, W\rangle = \frac{d}{dt}\Big(\sum_i v_i(t) w_i(t)\Big) = \sum_i \Big(\frac{dv_i}{dt} w_i + v_i \frac{dw_i}{dt}\Big).$$

Por outro lado, o lado direito se reescreve

$$\Big\langle \frac{DV}{dt}, W\Big\rangle + \Big\langle V, \frac{DW}{dt}\Big\rangle = \Big\langle \frac{D}{dt}\Big(\sum_i v_i P_i\Big), W\Big\rangle + \Big\langle V, \frac{D}{dt}\Big(\sum_j w_j P_j\Big)\Big\rangle$$

$$= \Big\langle \sum_i \Big(\frac{dv_i}{dt} P_i + v_i \underbrace{\frac{DP_i}{dt}}_{0}\Big), W\Big\rangle + \Big\langle V, \sum_j \Big(\frac{dw_j}{dt} P_j + w_j \underbrace{\frac{DP_j}{dt}}_{0}\Big)\Big\rangle$$

$$= \sum_{i,j} \Big(\frac{dv_i}{dt} w_j + v_i \frac{dw_j}{dt}\Big) \underbrace{\langle P_i, P_j\rangle(t)}_{\delta_{ij}}.$$

$$= \sum_i \Big(\frac{dv_i}{dt} w_i + v_i \frac{dw_i}{dt}\Big).$$

(2) $\Rightarrow$ (1) Dado um ponto $p \in M$ e qualquer curva $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ tal que $c(0) = p$ e $c'(0) = X$, então

$$X\langle Y, Z\rangle = \frac{d}{dt}\langle Y, Z\rangle_{c(t)}\Big|_{t=0} \overset{(2)}{=} \Big\langle \frac{DY}{dt}, Z\Big\rangle + \Big\langle Y, \frac{DZ}{dt}\Big\rangle = \langle \nabla_{c'(0)} Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_{c'(0)} Z\rangle$$
$$= \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$$

como o ponto $p \in M$ é arbitrário, vale (1). Analogamente, (1) $\Rightarrow$ (2). $\square$

**Def.** A conexão afim $\nabla$ é *simétrica* se

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Equivalentemente, se vale em qualquer sistema de coordenadas que

$$\nabla_{X_i} X_j = \nabla_{X_j} X_i \quad \text{ou} \quad \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k \quad \forall\, 1 \leq i,j,k \leq n.$$

<u>Def.</u> $f: M \to \mathbb{R}$ diferenciável. A <u>Hessiana</u> de $f$ é dada por:

$$\mathrm{Hess}f(X,Y) = X(Y(f)) - (\nabla_X Y)(f).$$

Exercício: Verifique que $\mathrm{Hess}f(X,Y)(p)$ só depende de $X(p), Y(p)$ e dos valores de $f$ em alguma vizinhança de $p$.

<u>Obs 1</u>: $X(Y(f))$ não depende só de $X(p), Y(p)$!

<u>Obs 2</u>: $\mathrm{Hess}f(X,Y) - \mathrm{Hess}f(Y,X) = X(Y(f)) - Y(X(f)) - (\nabla_X Y)(f) + (\nabla_Y X)(f)$

$$= ([X,Y] - \nabla_X Y + \nabla_Y X)(f)$$

e o lado direito é zero se $\nabla$ é simétrica.

<u>Teorema Fundamental da Geometria Riemanniana</u> (Levi-Civita)

$(M^n, g)$ variedade Riemanniana, então existe uma <u>única</u> conexão afim $\nabla$ tal que

1) $\nabla$ é Riemanniana; ($\nabla$ é chamada de conexão de Levi-Civita).
2) $\nabla$ é simétrica.

<u>Dem</u>: Sejam $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e suponha que $\nabla$ existe.
Queremos calcular $\langle \nabla_X Y, Z \rangle$.

Pela compatibilidade da conexão com a métrica,

$$X\langle Y,Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle \qquad (1)$$

Ora, permutando os campos de vetores na fórmula acima:

$$Y\langle Z,X\rangle = \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_Y X\rangle \qquad (2)$$

$$Z\langle X,Y\rangle = \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle \qquad (3)$$

Fazendo (1)+(2)-(3) obtemos

$$X\langle Y,Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle - Z\langle X,Y\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle \nabla_X Z - \nabla_Z X, Y\rangle + \langle \nabla_Y Z - \nabla_Z Y, X\rangle + \langle \nabla_Y X - \nabla_X Y, Z\rangle + \langle \nabla_X Y, Z\rangle$$

Usando que $\nabla$ é simétrica, o lado direito se torna

$$2\langle \nabla_X Y, Z\rangle - \langle X, [Y,Z]\rangle - \langle Y, [X,Z]\rangle + \langle Z, [X,Y]\rangle$$

Portanto obtemos a **Fórmula de Koszul**:

$$\langle \nabla_X Y, Z\rangle = \frac{1}{2}\Big(X\langle Y,Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle - Z\langle X,Y\rangle + \langle X,[Y,Z]\rangle + \langle Y,[X,Z]\rangle - \langle Z,[X,Y]\rangle\Big)$$

e o lado direito não depende de $\nabla$, de onde segue a unicidade.
Reciprocamente, definindo a conexão de modo que para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ ela satisfaz a fórmula acima, então é fácil verificar 1) e 2): trocando $Y$ por $Z$ acima e somando,

$$\langle Y, \nabla_X Z\rangle = \frac{1}{2}\Big(X\langle Y,Z\rangle + Z\langle X,Y\rangle - Y\langle Z,X\rangle - \langle X,[Y,Z]\rangle + \langle Z,[X,Y]\rangle - \langle Y,[X,Z]\rangle\Big)$$

$$\Rightarrow \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle = X\langle Y,Z\rangle$$

Logo $\nabla$ é Riemanniana. Por outro lado, trocando $X$ e $Y$ e subtraindo

$$\langle \nabla_Y X, Z\rangle = \frac{1}{2}\Big(Y\langle X,Z\rangle + X\langle Y,Z\rangle - Z\langle X,Y\rangle + \langle Y,[X,Z]\rangle + \langle X,[Y,Z]\rangle + \langle Z,[X,Y]\rangle\Big)$$

$$\Rightarrow \langle \nabla_Y X - \nabla_X Y, Z\rangle = \langle [X,Y], Z\rangle$$

$$\Rightarrow \quad \nabla_Y X - \nabla_Y X = [X,Y]$$

Donde $\nabla$ é simétrica. $\square$