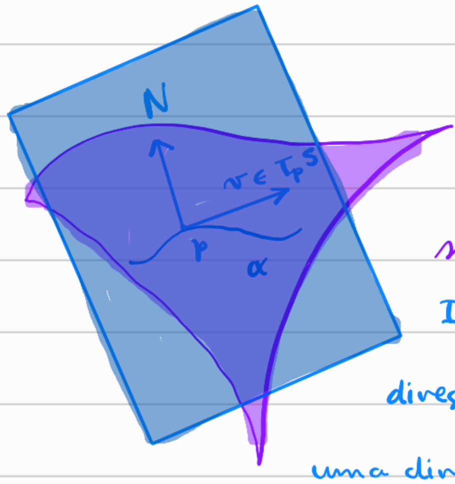
Geometria Riemanniana

Referências: 1) "Geometria Riemanniana" - Manfredo.
2) "Riemannian Geometry" - Petersen

Motivação:



$S \subset \mathbb{R}^3$ superfície regular

Dado um ponto p, escolhemos uma direção perpendicular N a superfície em p, uma direção tangente v, e a cortamos pelo plano tangente contendo v, o que nos dá uma curva α, a qual podemos determinar a curvatura κ, e dizemos que esta é a curvatura da superfície na direção v.

Girando o vetor v, tomamos a maior e menor curvaturas κ_1 e κ_2, chamadas curvaturas principais. Associadas a superfície S, existem dois conceitos de curvatura em p, que são a curvatura média H e Gaussiana K:

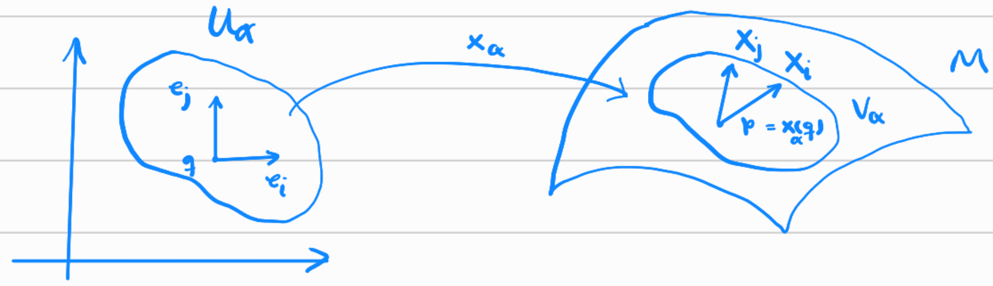
$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} \qquad K = \kappa_1 \cdot \kappa_2 .$$

(Gauss, 1827) K é uma noção intrínseca (invariante sob isometrias locais) $\boxed{\text{Teorema Egregium de Gauss}}$

(Riemann, 1854) "Geometrização de variedades diferenciáveis"
Introduz a noção de curvaturas em espaços de dimensão superior, dando início a Geometria Riemanniana.

Em Geometria de Superfícies, a Primeira Forma Fundamental $I_p(u,v) = \langle u, v \rangle_{\mathbb{R}^3}$, $u, v \in T_pS$, nos permite calcular comprimento e ângulo entre vetores.

Notação:



$$X_i = \partial/\partial x_\alpha^i \Big|_p = d(x_\alpha)_q(e_i), \quad i = 1, \dots, n \quad \text{(campo coordenado)}$$

$\{X_1, \dots, X_n\}$ é uma base para T_pM.

<u>Def:</u> Seja M uma variedade diferenciável. Uma <u>métrica Riemanniana</u> g em M é uma atribuição:

$$p \in M \longmapsto g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$$

produto interno não degenerado ($g_p(u,u) > 0$ se $u \neq 0$)

tal que $g_{ij} : U \to \mathbb{R}$, $g_{ij}(x) = g(X_i, X_j)$ é C^∞ $\forall\ 1 \leq i,j \leq n$ e $\forall$ carta $x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \to M$. Isto é, uma vez fixada uma carta, obtemos uma matriz $n \times n$ cujos coeficientes são g_{ij}, e pedimos que estes sejam suaves para todos i, j.

O par (M, g), onde M é uma variedade diferenciável e g é uma métrica Riemanniana em M é dito uma <u>variedade Riemanniana</u>.

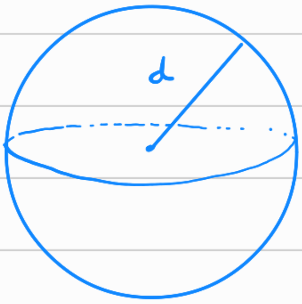
<u>Exemplos:</u>

1. (quase trivial) O espaço Euclideano $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n})$.
2. (subvariedades imersas) M^n variedade diferenciável, $f : M^n \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}^m$ imersão suave ($df_p : T_pM \to \mathbb{R}^n$ é injetiva $\forall p \in M$), podemos definir uma métrica em M via f, chamada a <u>métrica induzida</u>:

$$g_p(u,v) := \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{\mathbb{R}^m}.$$

Nash provou que toda variedade M com métrica g admite uma f tal que g é obtida da maneira acima. (Teorema do Mergulho de Nash).

3. (Esfera)



$S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, com a métrica obtida pela restrição do produto interno Euclideano.

4. (Métrica Produto) $(M_1^{n_1}, g_1)$ e $(M_2^{n_2}, g_2)$ variedades Riemannianas.

Então a variedade produto $M^{n_1+n_2} = M_1 \times M_2$, com projeções $\pi_1 : M \to M_1$ e $\pi_2 : M \to M_2$ admite uma métrica Riemanniana

$$g_{(p,q)}(u,v) = (g_1)_p(d\pi_1(u), d\pi_1(v)) + (g_2)_q(d\pi_2(u), d\pi_2(v))$$

Exercício: Verificar que nestes exemplos, a métrica é $\mathcal{C}^\infty$ e positiva definida.

(Toro plano) $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ é o círculo unitário com a métrica induzida de $\mathbb{R}^2$, então o toro plano é a variedade produto $T^n = \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{n \text{ vezes}}$.

<u>Proposição 1.</u> Toda variedade diferenciável admite uma métrica Riemanniana.

<u>Dem:</u> Seja $\{\varphi_\alpha : M \to \mathbb{R}\}$ uma partição da unidade, i.e:

1) $0 \leq \varphi_\alpha \leq 1$

2) $\operatorname{supp} \varphi_\alpha \subseteq V_\alpha = x_\alpha(U_\alpha)$, $x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \to M$ carta

3) $\{V_\alpha\}$ é uma cobertura por abertos de M localmente finita.

4) $\sum_\alpha \varphi_\alpha \equiv 1$ em M.

Dado $p \in V_\alpha = x_\alpha(U_\alpha)$ e para todos $u, v \in T_pM$, definimos

$$\langle u,v\rangle_\alpha = \langle (dx_\alpha)_p^{-1}(u), (dx_\alpha)_p^{-1}(v)\rangle_{\mathbb{R}^n}$$

Isto nos dá uma métrica Riemanniana $\mathcal{C}^\infty$ em V_α. Finalmente, definimos, para $u, v \in T_pM$:

$$\langle u,v\rangle_p = \sum_\alpha \varphi_\alpha(p) \cdot \langle u,v\rangle_\alpha$$

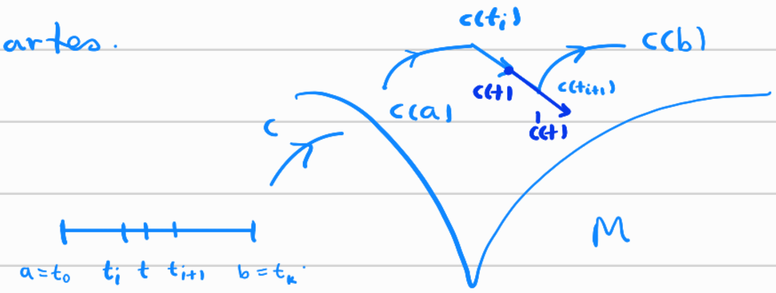
É uma métrica Riemanniana definida em toda a variedade M. $\square$

Dada uma métrica Riemanniana g, como ficam os coeficientes g_{ij} em uma carta local $x_\alpha : U_\alpha \to M$? Ora, por definição dos coeficientes, para $p = x_\alpha(q) \in x_\alpha(U_\alpha)$,

$$
\begin{aligned}
g_{ij} = \langle X_i(p), X_j(p) \rangle_\alpha &= \langle d(x_\alpha)_q(e_i), d(x_\alpha)_q(e_j) \rangle_\alpha \\
&= \langle (dx_\alpha)^{-1}_p (d(x_\alpha)_q(e_i)), (dx_\alpha)^{-1}_p (d(x_\alpha)_q(e_j)) \rangle_{\mathbb{R}^n} \\
&= \langle e_i, e_j \rangle_{\mathbb{R}^n} \\
&= \delta_{ij}.
\end{aligned}
$$

Isto é, a métrica nos abertos coordenados é dada pela matriz identidade.

Dada uma variedade Riemanniana (M^n, g) e $c : [a,b] \subset \mathbb{R} \to M$ uma curva diferenciável por partes.



Def: O <u>comprimento</u> de c é dado por

$$\ell(c) = \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{g_{c(t)}(c'(t), c'(t))}\, dt.$$

Dados dois pontos $p, q \in M$, a <u>distância</u> de p a q é

$$d_g(p,q) = \inf_{c \in \Lambda_{p,q}} \ell(c)$$

onde $c \in \Lambda_{p,q}$ se $c : [a,b] \to M$ é uma curva diferenciável por partes ligando p a q.

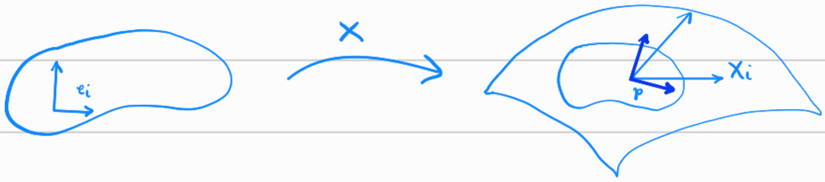
<u>Obs:</u> (M, d_g) é um espaço métrico, isto é, para todos $p, q \in M$

- $d_g(p,q) = d_g(q,p)$
- $d_g(p,q) \leq d_g(p,r) + d_g(r,q)$
- $d_g(p,q) = 0 \iff p = q$

Exercício: Verificar as propriedades acima.

A topologia induzida pela métrica coincide com a topologia de M.

Volume



$\{X_1(p), \dots, X_n(p)\}$ é uma base para $(T_pM, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Tomamos uma base ortonormal $\{f_1, \dots, f_n\}$ e escrevemos

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j, \quad i = 1, \dots, n.$$

$(T_pM, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ é um espaço vetorial, então escolhendo uma orientação, temos uma forma de volume associada a ela (geometricamente, é o volume de um paralelepípedo), daí

$$\begin{aligned} vol(X_1, \dots, X_n) &= \det(a) \cdot vol(f_1, \dots, f_n), \quad a = (a_{ij}). \\ &= \det(a). \end{aligned}$$

Em termos dos coeficientes da métrica g,

$$\begin{aligned} g_{ik} = \langle X_i, X_k \rangle &= \Big\langle \sum_j a_{ij} f_j, \sum_\ell a_{k\ell} f_\ell \Big\rangle \\ &= \sum_{j,\ell} a_{ij} a_{k\ell} \langle f_j, f_\ell \rangle \\ &= \sum_{j,\ell} a_{ij} a_{k\ell} \delta_{j\ell}. \\ &= \sum_j a_{ij} a_{kj}. \\ &= (a a^T)_{ik}. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \det g = \det(a a^T) &= \det a \cdot \det a^T \\ &= (\det(a))^2 \\ &= (vol(X_1, \dots, X_n))^2 \end{aligned}$$

O volume (sem sinal) do paralelepípedo gerado pelos vetores coordenados $X_1, \dots, X_n$ é $\sqrt{\det(g_{ij}(x))}$.

Def. $R \subset x(U)$ região, o volume do R é dado por

$$\mathrm{vol}_g(R) = \int_{x^{-1}(R)} \sqrt{\det g_{ij}(x)}\, dx.$$

Exercício: Verifique que essa definição é boa, isto é, não depende da carta x.

Conexão afim (derivação)

Def. Uma conexão afim é uma operação

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$
$$(X, Y) \longmapsto \nabla_X Y$$

satisfazendo as seguintes propriedades:

1) $\nabla_X(Y_1 + Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2$.

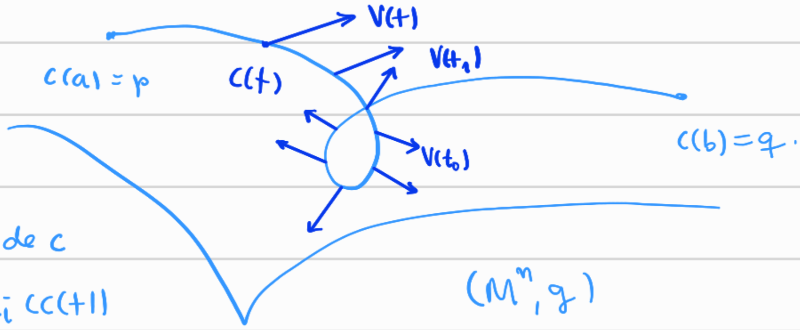
2) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + \underbrace{(Xf)}_{\text{derivada de } f \text{ na direção } X.}\cdot Y \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

3) $\nabla_{X_1+X_2} Y = \nabla_{X_1} Y + \nabla_{X_2} Y$.

4) $\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

Derivada Covariante

$c : I \to M$ curva diferenciável por partes



$t \in I \longmapsto V(t) \in T_{c(t)}M$

campo de vetores tangentes ao longo de c

(em coordenadas: $V(t) = \sum v_i(t) X_i(c(t))$

é tal que $v_i : I \to \mathbb{R}$ é diferenciável $\forall t \in I$).

Proposição 2. Dada uma conexão afim ∇ em M, existe uma única operação $V \longmapsto \frac{DV}{dt}$ (derivada covariante) tal que:

(1) $\frac{D}{dt}(V+W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$

(2) $\frac{D}{dt}(fV) = f\frac{DV}{dt} + \frac{df}{dt}\cdot V \quad (f: I \to \mathbb{R})$

(3) Se existe um campo $Y \in \mathfrak{X}(U)$, $c(t) \in U$, tal que $V(t) = Y(c(t))$, então

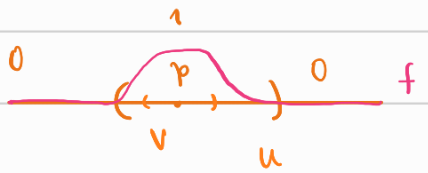
$$\frac{DV}{dt} = \nabla_{c'(t)} Y.$$

Obs: Conexão afim é um conceito local!

Se $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(U)$ são tais que $X_1 = X_2$ em U aberto em M e $Y \in \mathfrak{X}(M)$,

$\Rightarrow \nabla_Y X_1 = \nabla_Y X_2$ em U.

Dem: Seja $W = X_1 - X_2 \equiv 0$ em U. Queremos mostrar que $\nabla_Y W = 0$ em U.



Seja $p \in U$ e f uma função bump tal que $f \equiv 1$ em uma vizinhança $p \in V \subset U$ e $f \equiv 0$ em $M \setminus U$. Defina $\tilde{W} = fW$, então $\tilde{W} \equiv 0$ em M. Uma vez que para $Y \in \mathfrak{X}(M)$ qualquer, $\nabla_Y(\cdot)$ é uma transformação linear, temos que

$$0 = \nabla_Y \tilde{W} = \nabla_Y(fW) = f\nabla_Y W + (Yf)\cdot W$$

Calculando isto em p, temos por um lado que $f(p) = 1$ e por outro lado $W(p) = 0$, donde

$$0 = \nabla_Y W(p).$$

Como isto vale para todo $p \in U$, concluímos que $\nabla_Y W = 0$ em U. $\square$

Por causa dessa observação, a definição em (3) faz sentido, uma vez que dado um campo X definido apenas num aberto U de M, sempre existe um campo $\tilde{X}$ definido em toda a M que coincide com X em U, e pomos $\nabla_Y X(p) = \nabla_Y \tilde{X}(p)$.