Métrica Riemanniana

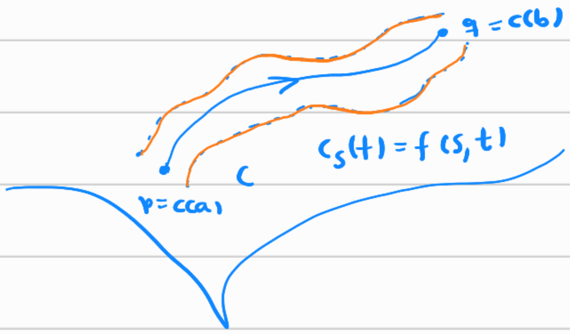
$\downarrow$

Conexão de Levi-Civita

$\swarrow \quad \searrow$

Geodésicas | Curvatura

Primeira Variação do Comprimento



(M^n, g) variedade Riemanniana

$c : [a,b] \to M$ diferenciável p.c.a

$f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a,b] \to M$ diferenciável

f é uma variação de c : $f(0,t) = c(t) \quad \forall t \in [a,b]$.

Isso nos dá uma família a um parâmetro de curvas diferenciáveis na variedade tal que no tempo $t=0$, recuperamos a curva original c.

Queremos calcular $\left.\dfrac{d}{ds}\ell(c_s)\right|_{s=0}$. As geodésicas são precisamente as curvas para as quais esta 1ª derivada é zero, ou seja, são um ponto crítico do comprimento.

$$\frac{d}{ds}\ell(c_s) = \frac{d}{ds}\int_a^b \langle c_s'(t), c_s'(t)\rangle^{1/2} dt.$$

Denotando por $\dfrac{\partial f}{\partial s} = df(1,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial t} = df(0,1)$ (campos variacionais), $\dfrac{\partial f}{\partial s}$ é a direção na qual a curva está variando, enquanto $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ é o vetor velocidade e são vetores tangentes a M em cada ponto. Logo $c_s'(t) = \dfrac{\partial f}{\partial t}$ e obtemos

$$\frac{d}{ds}\ell(c_s) = \frac{d}{ds}\int_a^b \left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t}\right\rangle^{1/2} dt$$

$$\overset{(\text{Leibniz})}{=} \int_a^b \frac{\partial}{\partial s}\left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t}\right\rangle^{1/2} dt$$

$$= \int_a^b \frac{1}{2}\left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t}\right\rangle^{-1/2} \frac{\partial}{\partial s}\left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t}\right\rangle dt$$

$$= \int_a^b \left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t}\right\rangle^{-1/2} \left\langle \nabla_{\frac{\partial f}{\partial s}} \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t}\right\rangle dt$$

(Fixando t e variando s, obtemos uma curva cujo vetor velocidade é $\frac{\partial f}{\partial s}$, por isso, obtivemos a derivada covariante na direção de $\frac{\partial f}{\partial s}$.)

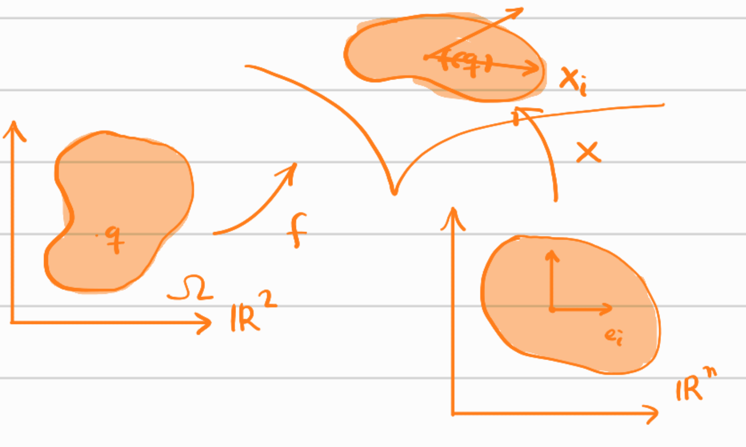
Usando que c está parametrizada pelo comprimento de arco, em $s=0$, $\left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t}\right\rangle = 1$ e

$$\frac{d}{ds} \ell(c_s)\Big|_{s=0} = \int_a^b \left\langle \nabla_{\frac{\partial f}{\partial s}} \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t}\right\rangle\Big|_{s=0} dt.$$

<u>Lema de simetria</u> Se $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to M$ diferenciável, onde Ω é um aberto conexo, então

$$\nabla_{\frac{\partial f}{\partial s}} \frac{\partial f}{\partial t} = \nabla_{\frac{\partial f}{\partial t}} \frac{\partial f}{\partial s}. \qquad (\nabla \text{ é simétrica})$$

<u>Dem:</u> É suficiente mostrar o resultado localmente. Seja $q \in \Omega$ e escolha um sistema de coordenadas $(x_1, \dots, x_n)$ em torno de $f(q) \in M$.



Em coordenadas, $f(s,t) = (f^1(s,t), \dots, f^n(s,t))$, daí

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial s} X_i,$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f^j}{\partial t} X_j.$$

Portanto,

$$\nabla_{\frac{\partial f}{\partial s}} \frac{\partial f}{\partial t} = \nabla_{\sum_i \frac{\partial f^i}{\partial s} X_i} \left(\sum_j \frac{\partial f^j}{\partial t} X_j \right)$$

$$= \sum_j \left(\sum_i \frac{\partial f^i}{\partial s} X_i \right)\left(\frac{\partial f^j}{\partial t} \right) X_j + \sum_{i,j} \frac{\partial f^i}{\partial s} \cdot \frac{\partial f^j}{\partial t} \nabla_{X_j} X_i$$

$$= \sum_j \frac{\partial^2 f^j}{\partial s \partial t} X_j + \sum_{i,j,k} \Gamma^k_{ij} \frac{\partial f^i}{\partial s} \frac{\partial f^j}{\partial t} X_k$$

Por outro lado,

$$\nabla_{\frac{\partial f}{\partial t}} \frac{\partial f}{\partial s} = \nabla_{\sum_i \frac{\partial f^i}{\partial t} X_i} \left(\sum_j \frac{\partial f^j}{\partial s} X_j \right)$$

$$= \sum_j \left(\sum_i \frac{\partial f^i}{\partial t} X_i \right)\left(\frac{\partial f^j}{\partial s} \right) X_j + \sum_{i,j} \frac{\partial f^i}{\partial t} \cdot \frac{\partial f^j}{\partial s} \nabla_{X_j} X_i$$

$$= \sum_j \frac{\partial^2 f^j}{\partial t \partial s} X_j + \sum_{i,j,k} \Gamma^k_{ij} \frac{\partial f^i}{\partial t} \frac{\partial f^j}{\partial s} X_k$$

usando que $\frac{\partial^2 f^j}{\partial s \partial t} = \frac{\partial^2 f^j}{\partial t \partial s}$ e trocando os papéis de i,j (∇ é simétrica), concluímos que

$$\nabla_{\frac{\partial f}{\partial s}} \frac{\partial f}{\partial t} = \nabla_{\frac{\partial f}{\partial t}} \frac{\partial f}{\partial s}. \qquad \square$$

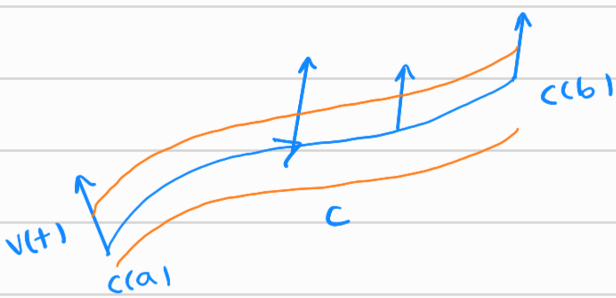
Aplicando o lema no cálculo anterior,

$$\frac{d}{ds} \ell(c_s) \Big|_{s=0} = \int_a^b \left\langle \nabla_{\frac{\partial f}{\partial t}} \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle dt$$

$$\overset{(\nabla \text{ riemanniana})}{=} \int_a^b \partial/_{\partial t} \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \nabla_{\frac{\partial f}{\partial s}} \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle dt.$$

$$= \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle(b) - \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle(a) - \int_a^b \left\langle \nabla_{\frac{\partial f}{\partial t}} \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle dt$$

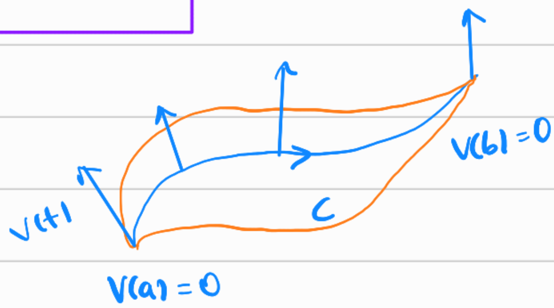
$V(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(0,t)$ campo variacional



$L(s) = \ell(c_s)$,

Fórmula

$$\boxed{L'(0) = \langle V, c' \rangle \Big|_a^b - \int_a^b \langle \nabla_{c'} c', V \rangle \, dt}$$



Se $V(a) = V(b) = 0$ (variação própria), então

$$\boxed{L'(0) = -\int_a^b \langle \boxed{\nabla_{c'} c'}, V \rangle \, dt}$$

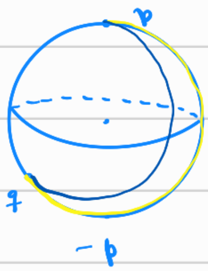
aceleração

Obs: $L'(0) = 0 \ \forall$ variação própria $\iff \nabla_{c'} c' = 0$.

Def. Dizemos que $c: I \to M$ é uma geodésica se $\nabla_{c'} c'(t) = 0 \ \forall t \in I$

aceleração nula

Exercício: As geodésicas da esfera S^2 são os grandes círculos, i.e., interseções da esfera com os planos que passam pela origem.



Dado um ponto p, um grande círculo passando por p deixa de ser minimizante uma vez que ele passa pelo ponto antípoda $-p$.

$$\boxed{\text{Geodésicas são localmente minimizantes.}}$$

As geodésicas são pontos críticos do funcional comprimento no espaço das curvas com as mesmas extremidades.

Obs. c geodésica $\Rightarrow |c'(t)|$ é constante.

Com efeito, $\frac{d}{dt}\langle c', c' \rangle = 2\langle \nabla_{c'} c', c' \rangle = 0$.

Logo geodésicas estão sempre parametrizadas proporcionalmente ao comprimento de arco.

Existência e Unicidade de Geodésicas.

Em coordenadas $(x_1, \dots, x_n)$, $c(t) = X(x_1(t), \dots, x_n(t))$ e

$$\nabla_{c'} c' = \nabla_{\sum_i x_i'(t) X_i}\left(\sum_j x_j'(t) X_j\right) = \sum_j x_j''(t) X_j + \sum_{i,j} x_i' x_j' \underbrace{\nabla_{X_i} X_j}_{\sum_k \Gamma_{ij}^k X_k}$$

$$= \sum_k \left(x_k''(t) + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(x(t))\, x_i'(t) x_j'(t)\right) X_k.$$

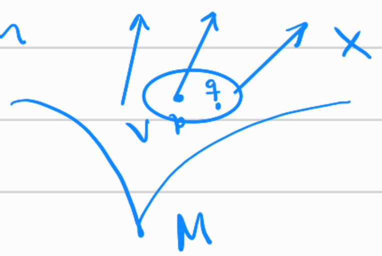
Portanto c é geodésica se e somente se

$$(*) \quad x_k''(t) + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(x(t))\, x_i'(t) x_j'(t) = 0 \quad \forall\, k = 1, \dots, n \text{ (Equação das Geodésicas).}$$

em qualquer sistema de coordenadas. Note que este é um sistema não linear de EDO's de 2^a ordem, então para determinar a existência e unicidade de geodésicas, devemos usar o Teorema de Existência e Unicidade de EDO's, uma vez que forem dados a posição e velocidade do ponto na curva.

Teorema de Existência e Unicidade de EDOs:

M variedade diferenciável, X campo de vetores diferenciável. Dado qualquer ponto $p \in M$, existem $\delta > 0$ e $V \subset M$ vizinhança de p e uma aplicação $\varphi : (-\delta, \delta) \times V \to M$ diferenciável tais que $t \mapsto \varphi(t, q)$, $q \in V$, é a única solução de



$$\begin{cases} x'(t) = X(x(t)) \\ x(0) = q \end{cases}$$

$\varphi : (-\delta, \delta) \times V \to M$ aplicação de fluxo

$\varphi_t(q) = \varphi(t, q).$

Para resolver o sistema (*), introduzimos $y_i = x_i'$ e resolver (*) é equivalente a resolver

$$(*') \begin{cases} x_k' = y_k \\ y_k' = -\sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(x_1, \dots, x_n)\, y_i y_j . \end{cases}$$

As condições iniciais são um ponto e um vetor tangente à variedade naquele ponto, logo é um elemento do fibrado tangente.

<u>Proposição:</u> (M, g) variedade Riemanniana

Então existe um único campo de vetores $G \in \mathfrak{X}(TM)$ diferenciável cujas órbitas são da forma $t \longmapsto (\gamma(t), \gamma'(t)) \in TM$ para alguma geodésica $\gamma : I \to M$. G é chamado <u>campo geodésico</u> e o fluxo φ_t associado a G é chamado de <u>fluxo geodésico</u>.

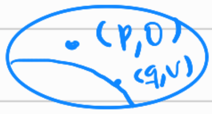
<u>Dem:</u> A unicidade segue porque as coordenadas do campo G em torno do ponto $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ são dadas por

$$\begin{cases} x_k' = y_k \\ y_k' = -\sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(x_1, \dots, x_n)\, y_i y_j \end{cases}$$

Para mostrar a existência, basta definir a expressão de G em coordenadas como no sistema acima. Se for dado outro sistema de coordenadas, eles coincidem na interseção das vizinhanças porque as órbitas são da forma $t \mapsto (\gamma(t), \gamma'(t))$ para alguma geodésica γ. $\square$

<u>Teorema:</u> (M, g) variedade Riemanniana e tome $(p, 0) \in TM$.

Então existem $\delta > 0$ e $\mathcal{U} = \{(q, v) : q \in V$ vizinhança de p, $|v| < \delta\}$ vizinhança da condição inicial $(p,0)$ e $\varphi : (-\delta,\delta)\times U \to TM$ tais que $t \mapsto \varphi(t, \underbrace{(q,v)}_{\in U})$ é a única solução de



$$\begin{cases} x'(t) = G(x(t)) \\ x(0) = (q,v) \end{cases}$$

e $\gamma = \pi \circ \varphi : (-\delta,\delta)\times U \to M$ é tal que $t \in (-\delta,\delta) \mapsto \gamma(t,(q,v))$ a única geodésica $\gamma(t)$ de M com $\gamma(0) = q$ e $\gamma'(0) = v$.

Homogeneidade de Geodésicas

$\gamma(t,q,v)$ geodésica definida em $(-\delta,\delta)$, então

$\gamma(t,q,av) = \gamma(at,q,v)$ é uma geodésica definida em $(-\frac{\delta}{a}, \frac{\delta}{a})$.

Dem: Defina $h(t) = \gamma(at,q,v)$, $t \in (-\frac{\delta}{a}, \delta/a)$. Então $h'(t) = a\gamma'(at,q,v)$, portanto $h(0) = \gamma(0,q,v) = q$ e $h'(0) = a\cdot\gamma'(0,q,v) = av$, logo h tem as condições iniciais desejadas. Por fim, para mostrar que h é geodésica, note que

$$\nabla_{h'} h' = \nabla_{a\gamma'} a\gamma' = a^2 \nabla_{\gamma'}\gamma' \overset{\gamma \text{ geodésica}}{=} a^2 \cdot 0 = 0.$$

Pela unicidade das geodésicas, $h(t) = \gamma(t,q,av)$. $\square$

Corolário (M,g) variedade Riemanniana, $p \in M$. Então existem $\varepsilon > 0$, V vizinhança de p em M, $\gamma : (-2,2) \to M$ diferenciável onde $U = \{(q,v) \in TM, |v| < \varepsilon\}$ tais que $t \mapsto \gamma(t,q,v)$ é a única geodésica tal que $\gamma(0,q,v) = q$ e $\gamma'(0,q,v) = v$.

Def. A aplicação exponencial em p é dada por

$$\exp_p(v) = \gamma(1,q,v) \quad \text{(se estiver definida)}$$

Por homogeneidade, $\gamma(1,q,v) = \gamma(|v|, q, \frac{v}{|v|})$. Uma vez que neste caso $\gamma'(1,q,v) = \frac{v}{|v|}$ tem norma 1,