Notas para el curso de Geometría Analítica II

Oscar Palmas - Alberto Lazcano - Stefano Sánchez

21 de enero de 2025

Índice general

Episodio VII

Superficies

En este capítulo daremos una introducción a estos objetos, con énfasis en las llamadas superficies cuádricas, es decir, aquellas superficies dadas por ecuaciones de segundo grado. Pero antes de pasar a este importante caso particular, daremos una primera discusión sobre la definición general.

7.1. Introducción

Hay al menos dos maneras de definir una superficie. Primero mencionaremos la definición de superficie parametrizada.

Definición 7.1: Superficie parametrizada

Una *superficie parametrizada* es la imagen de una transformación. $F : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.

Ejemplo 7.1: Superficies parametrizadas

Los conjuntos siguientes son superficies parametrizadas:

- El plano xy en $\mathbb{R}^3$ se puede ver como la imagen de $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $F(x, y) = (x, y, 0)$.
- El plano xz en $\mathbb{R}^3$ es la imagen de $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $F(x, z) = (x, 0, z)$.
- El plano $x = y$ es la imagen de $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $F(x, z) = (x, x, z)$.
- El hemisferio superior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, es decir, el subconjunto de la esfera donde $z > 0$, se puede ver como una superficie parametrizada, de la manera siguiente: Si despejamos z en la ecuación de la esfera, obtenemos

  $$z = \pm\sqrt{1 - (x^2 + y^2)},$$

  de donde nos interesa sólo el caso del signo $+$. Así, podemos ver al hemisferio superior como la imagen de $F(x, y) = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$ donde $x^2 + y^2 \leq 1$, es decir, el dominio de F es

  $$U = \{\ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\ \}.$$

Otra manera de parametrizar a la esfera utiliza la idea de las coordenadas esféricas:

$$x = \operatorname{sen}\varphi\cos\theta,$$
$$y = \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta,$$
$$z = \cos\varphi,$$

Es decir, consideramos la imagen de la transformación

$$F(\theta,\varphi) = (\operatorname{sen}\varphi\cos\theta, \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta, \cos\varphi)$$

definida en el conjunto

$$U = \{\ (\theta,\varphi) \mid 0 \le \theta < 2\pi, 0 \le \varphi < \pi\ \}.$$

Ahora presentaremos una segunda forma de definir a las superficies, fijándonos de nuevo en los ejemplos canónicos: planos y esferas. Observemos que en ambos casos, podemos describir estos conjuntos en términos de las coordenadas cartesianas, mediante ecuaciones del tipo

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 - r^2 = 0 \quad \text{o} \quad Ax + By + Cz + D = 0$$

Hemos escrito estas ecuaciones en la forma $F(x,y,z) = 0$, donde $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es una función. Por razones *oscuras*[1], cualquier superficie se podrá ver, al menos "por pedazos", como un *conjunto de nivel* $F(x,y,z) = 0$.

7.2. Graficación de una superficie

¿Cómo podemos hacernos una idea de la forma de una superficie? En realidad, hay una variedad de técnicas que se pueden aplicar para esto. Aquí mencionaremos unas cuantas:

- Determinar las intersecciones con los ejes.
- Determinar las intersecciones con los planos coordenados.
- Analizar la simetría con respecto de (1) los planos coordenados, (2) los ejes, (3) el origen.
- Determinar los cortes con planos paralelos a los planos coordenados.
- Analizar la extensión de la superficie.

Veamos los detalles de cada técnica, aplicados a una superficie general S con ecuación $F(x,y,z) = 0$.

- **Intersecciones de S con los ejes**. Hacemos lo siguiente:
  - Para el eje x, hacemos $y = z = 0$ en nuestra ecuación; la intersección estará dada por la ecuación $F(x,0,0) = 0$.
  - Para el eje y, hacemos $x = z = 0$ en nuestra ecuación; la intersección estará dada por la ecuación $F(0,y,0) = 0$.
  - Para el eje z, hacemos $x = y = 0$ en nuestra ecuación; la intersección estará dada por la ecuación $F(0,0,z) = 0$.
- **Intersecciones de S con los planos coordenados**. Hacemos lo siguiente:
  - Para el plano xy, hacemos $z = 0$ en nuestra ecuación. La intersección estará dada por la ecuación $F(x,y,0) = 0$.

[1] Es decir, por resultados que se verán en otros cursos, a saber, el teorema de la función implícita y el teorema de Sard.

- Para el plano xz, hacemos $y = 0$ en nuestra ecuación. La intersección estará dada por la ecuación $F(x, 0, z) = 0$.
- Para el plano yz, hacemos $x = 0$ en nuestra ecuación. La intersección estará dada por la ecuación $F(0, y, z) = 0$.

- **Simetrías**
  - S es simétrica con respecto del plano xy si siempre que un punto (x, y, z) esté en S, entonces $(x, y, -z)$ también estará en S. En términos de la ecuación $F(x, y, z) = 0$, buscamos que al sustituir z por $-z$ se siga cumpliendo la ecuación; es decir, $F(x, y, z) = 0$ si y sólo si $F(x, y, -z) = 0$.
  - S es simétrica con respecto del plano xz si siempre que $F(x, y, z)0$ también se cumple que $F(x, -y, z) = 0$.
  - S es simétrica con respecto del plano yz si siempre que $F(x, y, z) = 0$ también se cumple que $F(-x, y, z) = 0$.
  - S es simétrica con respecto del eje x si siempre que $F(x, y, z) = 0$ también se cumple que $F(x, -y, -z) = 0$.
  - S es simétrica con respecto del eje y si siempre que $F(x, y, z) = 0$ también se cumple que $F(-x, y, -z) = 0$.
  - S es simétrica con respecto del eje z si siempre que $F(x, y, z) = 0$ también se cumple que $F(-x, -y, z) = 0$.
  - Finalmente, S es simétrica con respecto del origen si siempre que $F(x, y, z) = 0$ también se cumple que $F(-x, -y, -z) = 0$.

- **Cortes de S con planos paralelos a los planos coordenados**. Observemos que el caso de las intersecciones con los planos coordenados es en realidad un caso particular de éste.
  - Para determinar las intersecciones de S con planos paralelos al plano xy, hacemos $z = k$ (donde k representa una constante) en nuestra ecuación. La intersección estará dada por la ecuación $F(x, y, k) = 0$.
  - Para determinar las intersecciones de S con planos paralelos al plano xz, hacemos $y = k$ en nuestra ecuación. La intersección estará dada por la ecuación $F(x, k, z) = 0$.
  - Para determinar las intersecciones de S con planos paralelos al plano yz, hacemos $x = k$ en nuestra ecuación. La intersección estará dada por la ecuación $F(k, y, z) = 0$.

- **Extensión**. Aquí nos referimos al hecho de que la superficie S esté (o no) restringida a una cierta región del espacio. Por ejemplo, si al analizar una ecuación $F(x, y, z) = 0$ se llega a la conclusión de que $z \geq 0$, entonces esto querrá decir que S está contenida en el llamado semi-espacio superior. O bien, por ejemplo, si tenemos que $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, tendremos que S está contenida dentro de la esfera unitaria de $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 7.2

Consideremos el conjunto de puntos en el espacio tales que $z = x^2 + y^2$. Usaremos algunas de las técnicas anteriores para hacernos una idea de la gráfica de este conjunto.

- **Extensión**. Como $x^2 + y^2 \geq 0$, entonces $z \geq 0$, de modo que el conjunto está contenido en el semiplano superior.
- **Intersección con planos paralelos al plano xy**. En nuestra ecuación, hacemos $z = k$, k constante, de modo que la intersección con el plano correspondiente daría $x^2 + y^2 = k$, lo cual es una circunferencia cuando $k > 0$, un punto cuando $k = 0$, y el vacío cuando $k < 0$. Observemos que las circunferencias obtenidas con $k > 0$ tienen centro en el origen.

Para hacernos una idea de cómo van variando las circunferencias del punto anterior, tomaremos la intersección de nuestro conjunto con los planos coordenados.

- Al hacer $z = 0$, obtenemos $x^2 + y^2 = 0$. Esto nos dice que el origen es la única intersección de nuestro conjunto con el plano xy es el origen.
- Al hacer $y = 0$ en la ecuación, obtenemos $z = x^2$; es decir, la intersección de nuestro conjunto con el plano xz es una parábola que abre hacia arriba. (Con esto ya podríamos saber de qué tipo de conjunto se trata.)
- Al hacer $x = 0$ en la ecuación, obtenemos $z = y^2$; es decir, la intersección de nuestro conjunto con el plano yz es una parábola que abre hacia arriba.

Con esta información, ya podemos hacernos una idea de que nuestro conjunto es en realidad una superficie S, llamada en este caso un *paraboloide de revolución*, el cual se muestra en la figura 7.1.

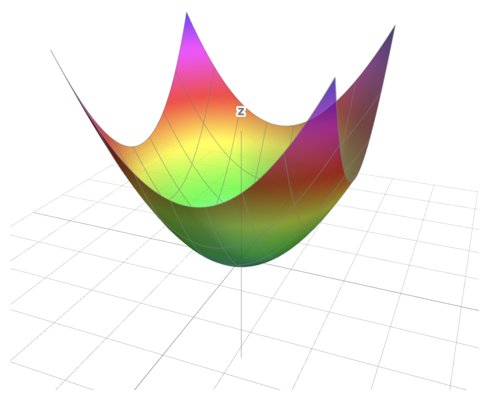


Figura 7.1: El paraboloide de revolución con ecuación $z = x^2 + y^2$.

Ejemplo 7.3

Analicemos ahora el conjunto dado por la ecuación $z = x^2 - y^2$.

- **Intersección con planos paralelos al plano xy.** Al hacer $z = k$ en la ecuación, obtenemos $x^2 - y^2 = k$, lo que nos da (1) una hipérbola que abre hacia el eje x, cuando $k > 0$; (2) el par de rectas $y = \pm x$, cuando $k = 0$; (3) una hiperbola que abre hacia el eje y, cuando $k < 0$.
- **Intersección con los planos coordenados**. Ya vimos cuál es la intersección con el plano xy. La intersección del conjunto con el plano xz está dada por la ecuación $z = x^2$, que es una parábola que abre hacia arriba. Por otro lado, la intersección con el plano yz está dada por la ecuación $z = -y^2$, que es una parábola que abre hacia abajo.

Obtenemos entonces una superficie que se muestra en la figura 7.2, llamada *paraboloide hiperbólico*, o también conocido popular mente como una *silla de montar*.

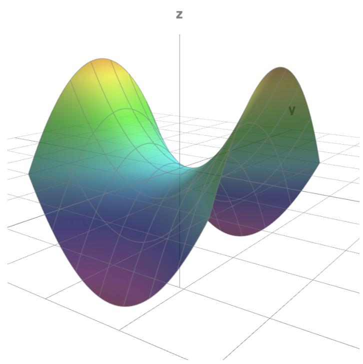


Figura 7.2: El paraboloide hiperbólico, con ecuación $z = x^2 - y^2$.

7.3. Ejemplos de superficies y sus parametrizaciones

En esta sección veremos diversos ejemplos de superficies, definidos de manera geométrica, para después ver algunos casos más concretos y sus parametrizaciones en términos de dos parámetros.

7.3.1. Cilindros

Consideremos una curva C en $\mathbb{R}^3$ y un vector fijo $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Para cada punto $p \in C$, consideramos los puntos $p+tv$ de la recta que pasa por p con vector de dirección v. Estas rectas generan una *superficie cilíndrica* S. Decimos que la curva C es una *directriz* y cada recta es una *generatriz* de este cilindro S.

Podemos simplificar el análisis de la situación anterior si consideramos la intersección del cilindro con un plano, de modo que podamos suponer que C sea una curva plana. Por otro lado, para dar una parametrización de la curva, supondremos que la curva está contenida en alguno de los planos coordenados.

Pensemos entonces que la curva está contenida en el plano xy y que tiene por ecuación[2] $f(x, y) = 0$. Si el vector de dirección v no es vertical, decimos que nuestro cilindro es *obtuso*, mientras que si ocurre lo primero, diremos que nuestro cilindro es *recto*.

¿Cómo obtener la ecuación de un cilindro? En el caso de un cilindro recto tal como lo definimos arriba, la cuestión es sencilla: Simplemente vemos a la ecuación $f(x, y) = 0$ como una ecuación *en tres variables*. En este caso, como z no aparece en la ecuación, tenemos que si un punto (x, y, z) satisface la ecuación, entonces también lo hará cualquier punto (x, y, z'). En este caso, claro, cualquier generatriz será vertical.

En el caso de un cilindro obtuso, el procedimiento es el siguiente. Consideremos un punto (x_0, y_0) en el plano x, y, que podemos identificar con el punto $(x_0, y_0, 0)$ en $\mathbb{R}^3$. Si este punto está sobre la directriz del cilindro, entonces $f(x_0, y_0) = 0$. Ahora consideremos la ecuación paramétrica de la recta que pasa por $(x_0, y_0, 0)$ con vector de dirección v. Si $P = (x, y, z)$, $P_0 = (x_0, y_0, 0)$ y $t \in \mathbb{R}$. Si $v = (v_1, v_2, v_3)$, tenemos

$$x - x_0 = tv_1, \quad y - y_0 = tv_2, \quad z = tv_3.$$

Si $v_3 \neq 0$ (¿Qué pasa si $v_3 = 0$?), entonces podemos despejar t y sustituir en las otras dos ecuaciones para obtener

$$x_0 = x - \frac{v_1}{v_3} z, \quad y_0 = y - \frac{v_2}{v_3} z.$$

Al sustituir estos valores en la ecuación $f(x_0, y_0) = 0$, obtenemos la ecuación del cilindro:

$$f\left(x - \frac{v_1}{v_3} z, y - \frac{v_2}{v_3} z\right) = 0. \tag{7.1}$$

[2]De nuevo, usamos el teorema de la función implícita para tener que una ecuación del tipo $f(x, y) = 0$ representa en general una curva.

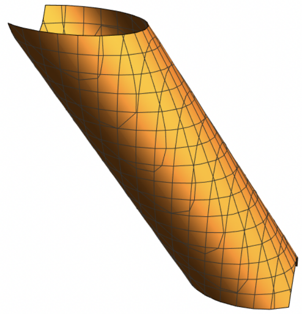


Figura 7.3: Un cilindro obtuso sobre una elipse.

Ejemplo 7.4

Consideremos una elipse en el plano xy con ecuación canónica

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Si consideramos esta ecuación como una ecuación en las tres variables (x, y, z), obtenemos un *cilindro elíptico recto*. Por otro lado, tomemos un vector de dirección que no sea vertical; digamos, el vector $(1, -2, 3)$. Entonces la ecuación del cilindro correspondiente es

$$\frac{\left(x - \frac{1}{3}z\right)^2}{a^2} + \frac{\left(y + \frac{2}{3}z\right)^2}{b^2} = 1.$$

Esta superficie aparece en la figura 7.3.

Ahora cambiaremos el punto de vista para utilizar otra técnica bastante útil. En vez de pensar a una curva en términos de una ecuación $f(x, y) = 0$ si la curva está contenida en el plano xy, la pensaremos como una *función* $\alpha\colon (a, b) \to \mathbb{R}^2$, donde (a, b) es un intervalo en $\mathbb{R}$. Por ejemplo, sabemos que la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ en el plano xy se puede describir mediante la función $\alpha(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0)$

Ahora, para obtener el cilindro recto sobre esta circunferencia, por cada punto de la circunferencia tomamos la recta que pasa por ese punto y que tiene como vector de dirección a un vector vertical. Esto nos produce una función *de dos variables*, como sigue:

$$\varphi(t, s) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0) + s(0, 0, 1).$$

Luego, para obtener un cilindro obtuso sobre la misma circunferencia, simplemente cambiamos $(0, 0, 1)$ por un vector inclinado de cierta manera. Por ejemplo,

$$\psi(t, s) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0) + s(1, 1, 1).$$

Observemos que hemos cambiado la letra φ por ψ, pues estamos hablando de funciones diferentes.

Definición 7.2: Cilindro

Sea $\alpha\colon (a,b) \to \mathbb{R}^3$ una curva en $\mathbb{R}^3$ y $v_0 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ un vector fijo. Entonces el *cilindro con directriz α y vector de dirección v_0* está dado por

$$\varphi(t,s) = \alpha(t) + sv_0.$$

La curva α se llama *directriz* del cilindro, mientras que para cada t fijo, la recta dada por los puntos $P = \alpha(t) + sv_0$ es una *generatriz* del cilindro.

7.3.2. Conos

Consideremos ahora una curva C en $\mathbb{R}^3$ y un punto V que no esté sobre C. Al tomar las rectas que pasan por V y todos los puntos de C, obtenemos una figura llamada *cono*. Como en el caso del cilindro, la curva C se llama la *directriz*, el punto V es el *vértice* y las rectas son las *generatrices* del cono.

La deducción de una ecuación para un cono se puede hacer de manera similar a la situación del cilindro. Supongamos que la directriz es una curva contenida en el plano xy, dada por la ecuación $f(x,y) = 0$, mientras que el vértice tiene coordenadas (a,b,c). Como antes, sea $(x_0,y_0,0)$ un punto sobre la directriz, de modo que $f(x_0,y_0) = 0$. Un vector de dirección de la recta que une $(x_0,y_0,0)$ con el vértice es $(x_0-a, y_0-b, -c)$ y si $P = (x,y,z)$ es un punto de esta recta, entonces

$$x - x_0 = t(x_0 - a), \quad y - y_0 = t(y_0 - b), \quad z = -tc.$$

Supongamos que $c \neq 0$, lo que nos dice geométricamente que el vértice V no está en el plano xy. (¿Qué pasa si $c = 0$?). Entonces $t = -z/c$ y podemos sustituir este valor en las ecuaciones anteriores para obtener

$$x - x_0 = -\frac{z}{c}(x_0 - a), \quad y - y_0 = -\frac{z}{c}(y_0 - b),$$

de donde podemos despejar x_0 y y_0, para sustituir estos valores en la ecuación $f(x_0,y_0) = 0$ para obtener

$$f\left(\frac{cx+az}{c-z}, \frac{cy+bz}{c-z}\right) = 0, \tag{7.2}$$

que es la ecuación del cono.

Ejemplo 7.5

Consideremos la circunferencia unitaria $x^2+y^2 = 1$, $z = 0$, en el plano xy y tomemos al punto $V = (0,0,1)$ como el vértice. Así, $(a,b,c) = (0,0,1)$ y $f(x,y) = x^2+y^2-1$, de modo que la ecuación del cono (7.2) queda en este caso como

$$\left(\frac{x}{1-z}\right)^2 + \left(\frac{y}{1-z}\right)^2 - 1 = 0,$$

o de manera equivalente, $x^2+y^2-z^2+2z+1 = 0$.

Como en el caso del cilindro, podemos pensar a los conos de una manera distinta. Supongamos que la directriz está dada mediante una curva $\alpha\colon (a,b) \to \mathbb{R}^3$ que no pasa por el punto v, que queremos sea el vértice del cono.[3] Entonces, para cada $t \in (a,b)$, sabemos que los puntos de la forma $\alpha(t) + s(V - \alpha(t))$, con s variando en $\mathbb{R}$, son precisamente los puntos de la recta que pasa por $\alpha(t)$ y V.

[3] Ahora denotamos al vértice con una letra minúscula, pensándolo como un punto en $\mathbb{R}^3$.

Definición 7.3: Cono

Sea $\alpha\colon (a,b) \to \mathbb{R}^3$ una curva en $\mathbb{R}^3$ y $v \in \mathbb{R}^3$ un punto que no está en la imagen de α. Entonces el *cono con directriz α y vértice v* está dado por

$$\psi(t,s) = \alpha(t) + s(v - \alpha(t)).$$

La curva α se llama *directriz* del cono, mientras que para cada t fijo, la recta dada por los puntos $P = \alpha(t) + s(v - \alpha(t))$ es una *generatriz* del cono.

7.3.3. Superficies regladas

En realidad, los cilindros y los conos son casos particulares de una situación un poco más general, la de las *superficies regladas*. En ambos casos, partimos de una curva C como directriz y por cada punto de ésta hacemos pasar una línea recta. En el caso de los cilindros, imponemos la condición de que todas las generatrices sean paralelas, mientras que en el caso de los conos, pedimos que todas las generatrices pasen por un mismo punto. En el caso general de las superficies regladas, permitimos que las generatrices varíen de una manera más libre, aunque satisfaciendo algunas condiciones mínimas, para que realmente obtengamos una superficie.

De nuevo partimos de una curva, que volveremos a pensar como una función $\alpha\colon (a,b) \to \mathbb{R}^3$. La diferencia será que ahora, para cada punto $\alpha(t)$, daremos un vector de dirección variable $v(t)$. La definición es la siguiente.

Definición 7.4: Superficie Reglada

Sea $\alpha\colon (a,b) \to \mathbb{R}^3$ una curva en $\mathbb{R}^3$ y $v\colon (a,b) \to \mathbb{R}^3$ una función con valores en $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Entonces la *superficie reglada con directriz α y generatrices $v(t)$* está dado por

$$\phi(t,s) = \alpha(t) + s\,v(t).$$

La curva α se llama *directriz* de la superficie, mientras que para cada t fijo, la recta dada por los puntos $P = \alpha(t) + s\,v(t)$ es una *generatriz* de la superficie.

Observación 7.1

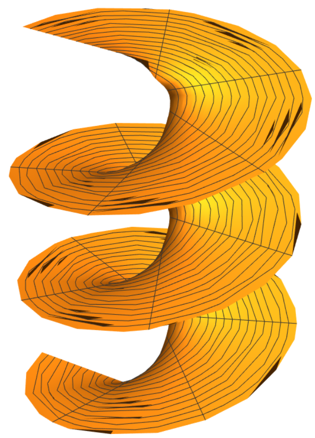
Por lo general, pediremos ciertas condiciones mínimas para que lo anterior realmente genere una superficie. Por ejemplo, será conveniente que todas las funciones implicadas sean continuas. Por el momento no insistiremos mucho en este tipo de cuestiones, que serán tratadas en cursos más avanzados.

Ejemplo 7.6

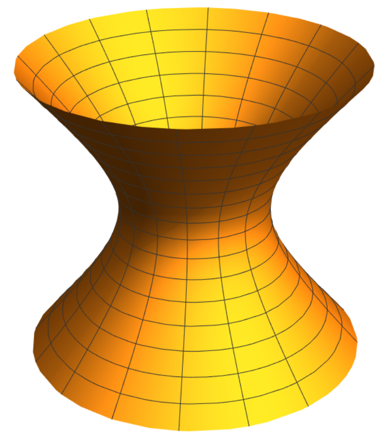
Consideremos un plano que pasa por un punto P_0, generado por los vectores (fijos) u, v. ¿Cómo podemos ver a este plano como una superficie reglada? Podemos tomar como directriz a la recta que pasa por P_0 con vector de dirección u, y luego, para cada punto de esta recta, tomar la recta que pasa por el punto, con vector de dirección v. Así, la función

$$f(t,s) = (P_0 + tu) + sv$$

describe al plano como una superficie reglada, con $\alpha(t) = P_0 + tu$ y $v(t) = v$ (constante).



(a) El helicoide.



(b) El hiperboloide de una hoja.

Figura 7.4

Ejemplo 7.7: Helicoide

Consideremos al eje z como directriz de una superficie reglada. En términos de una función, sea $\alpha(t) = (0, 0, t)$, $t \in \mathbb{R}$. Luego, para cada punto $\alpha(t)$ del eje, tomamos una recta horizontal que pase por dicho punto y gire un ángulo t con respecto del eje z. En otras palabras, tomemos

$$\varphi(t, s) = (s \cos t, s \operatorname{sen} t, t), \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

La superficie descrita recibe el nombre de *helicoide* y está representada en la figura 7.4a.

Ejemplo 7.8

Consideremos ahora la superficie dada por la ecuación

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1, \tag{7.3}$$

conocida como el *hiperboloide de una hoja*, que aparece en la figura 7.4b. Aunque no lo parezca a simple vista, este hiperboloide es una superficie reglada. De hecho, mostraremos que es una superficie *doblemente reglada.*

Proposición 7.1

Por cada punto del hiperboloide dado por la ecuación (7.3) pasan dos líneas rectas totalmente contenidas en la superficie.

Demostración. Sea (x_0, y_0, z_0) un punto del hiperboloide. Buscamos una recta que pase por (x_0, y_0, z_0) totalmente contenida en el hiperboloide. Si llamamos $v = (v_1, v_2, v_3)$ al vector de dirección de esta recta, entonces los puntos

$$(x_0, y_0, z_0) + s(v_1, v_2, v_3) = (x_0 + sv_1, y_0 + sv_2, z_0 + sv_3)$$

deben satisfacer la ecuación (7.3); es decir, para todo $s \in \mathbb{R}$ debemos tener

$$(x_0 + sv_1)^2 + (y_0 + sv_2)^2 - (z_0 + sv_3)^2 = 1.$$

Usando que $x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 = 1$ y simplificando, obtenemos

$$(2v_1x_0 + 2v_2y_0 - 2v_3z_0) + s(v_1^2 + v_2^2 - v_3^2) = 0,$$

que podemos escribir como $A + s(v_1^2 + v_2^2 - v_3^2) = 0$, donde A no depende de s. Como esta expresión debe anularse para cualquier valor de s, entonces $v_1^2 + v_2^2 - v_3^2 = 0$, y obtenemos $v_3 = \pm\sqrt{v_1^2 + v_2^2}$, de modo que existen dos vectores de dirección que satisfacen las condiciones. Por tanto, el hiperboloide es una superficie doblemente reglada. □

7.3.4. Superficies de revolución

Una tercera forma usual para la construcción de una superficie es la de girar una curva C en torno de una recta, obteniendo lo que se llama una superficie de revolución. La recta se llama el *eje de rotación*, mientras que la curva C se llama una *generatriz*. Será usual pedir que la curva no corte al eje de rotación. (¿Por qué crees que se pida esto?)

Para obtener una ecuación de una superficie de revolución, pensemos que el eje de rotación es uno de los ejes coordenados. Para fijar ideas, pensemos que es el eje z. Además, pensemos que una generatriz de la superficie está contenida en el plano xz, dada por una ecuación del tipo $f(x, z) = 0$. Como hemos dicho que en general supondremos que lageneratriz no corta al eje de rotación, supondremos que $x \neq 0$; más precisamente, supondremos que $x > 0$ para todos los puntos de la generatriz.

Pensemos en un punto $(x_0, 0, z_0)$ de la generatriz. Al girar este punto en torno del eje de rotación, digamos un ángulo θ obtenemos un nuevo punto con coordenadas (x, y, z). Veamos cuál es la relación entre las coordenadas de este punto y el punto original. Lo primero que podemos observar es que $z = z_0$, pues al girar un punto en torno del eje z, su altura se conserva. En segundo lugar, la distancia al eje de rotación también se mantiene; es decir,

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x_0^2} = |x_0| = x_0,$$

como el lector podrá verificar haciendo un dibujo de la situación. Recordemos que hemos supuesto que $x_0 > 0$, de donde se obtiene la última igualdad. Como $f(x_0, z_0) = 0$, tenemos que

$$f\left(\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0 \tag{7.4}$$

es la ecuación de este tipo de superficie de revolución. Un análisis similar muestra que:

- Si giramos una curva $f(x, y) = 0$, $y > 0$, en torno del eje x, entonces

  $$f\left(x, \sqrt{y^2 + z^2}\right) = 0$$

  es la ecuación de la superficie de revolución obtenida.

- Si giramos una curva $f(y, z) = 0$, $y > 0$, en torno del eje z, entonces

  $$f\left(\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0$$

  es la ecuación de la superficie de revolución obtenida.

El lector podrá establecer con facilidad los demás casos.

Ejemplo 7.9: La esfera

Para obtener la esfera unitaria (es decir, la esfera de radio 1 con centro en el origen), podemos girar la circunferencia $x^2 + z^2 - 1 = 0$, $y = 0$, con respecto del eje z. Según el análisis anterior, la ecuación para la superficie de revolución es

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 + z^2 - 1 = 0, \quad \text{y} \quad x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0,$$

que es la ecuación esperada.

Ejemplo 7.10: El catenoide

Generemos una superficie un poco más complicada. Consideremos la gráfica de la función coseno hiperbólico en el plano yz, es decir, $y = \cosh z$ y girémosla en torno del eje z, obteniendo

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \cosh z;$$

Esta superficie es el *catenoide*, que aparece en la figura 7.5.

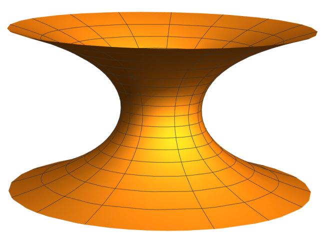


Figura 7.5: El catenoide.

7.4. Superficies cuádricas

En esta sección veremos el caso de las superficies dadas en coordenadas cartesianas por medio de un polinomio de segundo grado en x, y, z:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2(Dxy + Exz + Fyz) + Gx + Hy + Iz + J = 0. \tag{7.5}$$

Recordemos que una ecuación de este tipo podría *no* representar una superficie; por ejemplo, la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ sólo representa al origen. En este curso no discutiremos las condiciones bajo las cuales la ecuación (7.5) realmente representa una superficie. Por el momento, sólo consideraremos los casos en que no aparecen los términos mixtos; es decir, sólo analizaremos por el momento las ecuaciones de la forma

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Gx + Hy + Iz + J = 0. \tag{7.6}$$

Haremos una primera observación para simplificar nuestro análisis: Si el coeficiente de una variable es diferente de cero, entonces siempre podemos completar cuadrados y hacer una traslación para que el término lineal correspondiente a la misma variable desaparezca. Es más fácil explicar el procedimiento con un ejemplo.

Ejemplo 7.11

Consideremos la ecuación

$$x^2 - 2y^2 - 3x + 8y - z - 9 = 0.$$

Como el coeficiente de x^2 es $1 \neq 0$, podemos completar el cuadrado en x:

$$\left(x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2\right) - 2y^2 + 8y - z - 9 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 0$$

De manera similar, como el coeficiente de y^2 es $-2 \neq 0$, podemos completar el cuadrado en y:

$$\left(x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2\right) - 2\left(y^2 - 4y + 4\right) - z - 9 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 8 = 0.$$

Finalmente, hacemos una traslación de ejes de modo que

$$x' = x - \frac{3}{2}, \quad y' = y - 2, \quad z' = z + 9 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 8$$

y la ecuación queda como

$$(x')^2 - 2(y')^2 - z' = 0.$$

Podemos usar esto para dar una clasificación de las cuádricas representadas por ecuaciones del tipo (7.6). La gráfica de cada superficie se puede realizar como hemos visto en secciones anteriores.

7.4.1. Cilindros

Supongamos que una de las variables x, y, z no aparece en la ecuación (7.6). Por ejemplo, que los coeficientes de z en dicha ecuación satisfacen $C = I = 0$. Entonces la superficie obtenida es un cilindro recto sobre la curva en el plano xy dada por la ecuación

$$Ax^2 + By^2 + Gx + Hy + J = 0.$$

Observemos que en todos los casos de este tipo, donde no aparezca una variable, obtendremos un cilindro sobre una cónica, posiblemente degenerada. Como este tipo de superficies es relativamente sencillo, no abundaremos mucho sobre ellos.

7.4.2. Cuádricas centrales

Supongamos primero que los tres coeficientes A, B, C de la ecuación (7.6) son diferentes de cero. Entonces podemos reducir la ecuación a una de la forma

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + J = 0.$$

Las cuádricas de este tipo se llaman a veces *cuádricas centrales*, pues el origen del sistema de coordenadas es un centro de simetría de la figura. En otras palabras, si el punto (x, y, z) satisface la ecuación anterior, entonces el punto $(-x, -y, -z)$ también la satisface. Tenemos los siguientes casos de cuádricas centrales:

- A, B, C tienen el mismo signo. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $A, B, C > 0$. Entonces, si $J > 0$, el lugar geométrico es vacío, mientras que si $J = 0$, obtenemos sólo el origen de este sistema de coordenadas. El caso interesante ocurre cuando $J < 0$, que es cuando obtenemos un *elipsoide*, como el que se muestra en la figura 7.6.

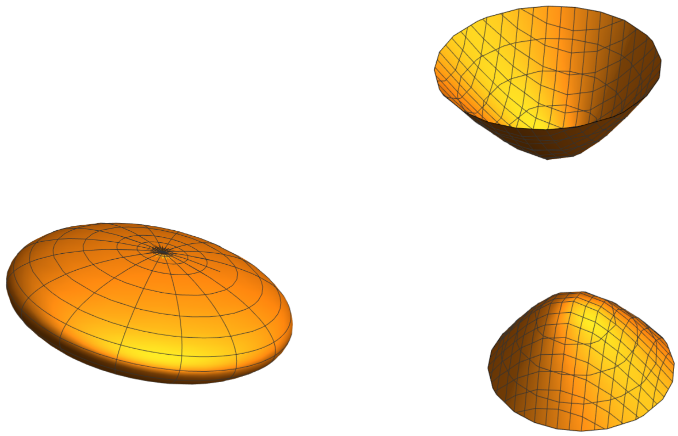


Figura 7.6: Izquierda: Un elipsoide. Derecha: Un hiperboloide de dos hojas.

- A, B tienen el mismo signo, mientras que C tiene signo opuesto al de los otros dos coeficientes. De nuevo, podemos suponer que $A, B > 0$. Si $J = 0$, obtenemos un cono, mientras que si $J \neq 0$, tenemos dos subcasos:
  - Si $J > 0$, obtenemos un *hiperboloide de una hoja*, como el que aparece en la figura 7.4b.
  - Si $J < 0$, obtenemos un *hiperboloide de dos hojas*, como el que se aparece en la figura 7.6.

7.4.3. Cuádricas no centrales

Ahora consideraremos las cuádricas que no caen en las dos categorías anteriores; es decir, que no son cilindros ni cuádricas centrales. Desde el punto de vista algebraico, al menos uno de los coeficientes A, B, C de la ecuación (7.6) es igual a cero, pero en ese caso el coeficiente de primer grado de la variable correspondiente es distinto de cero. Además, no permitimos el caso en que los tres coeficientes A, B, C se anulen. Esto nos deja con los siguientes casos:

- Exactamente dos de los coeficientes A, B, C son diferentes de cero, y el coeficiente de primer grado de la variable restante es distinto de cero:

  $$Ax^2 + By^2 + Gx + Hy + Iz + J = 0.$$

  Recordemos que podemos completar los cuadrados para obtener una ecuación del tipo

  $$A(x')^2 + B(y')^2 + Iz + J' = 0.$$

  donde J' es el término que se obtiene después de completar los cuadrados. Como $I \neq 0$, podemos hacer un último cambio $z' = z + \frac{J'}{I}$ para obtener

  $$A(x')^2 + B(y')^2 + Iz' = 0.$$

  Para saber de qué tipo de figura se trata, observemos que los cortes con planos paralelos al plano $x'z'$ o al plano $y'z'$ son parábolas. Por otro lado, si A, B tienen el mismo signo, los cortes con planos paralelos al plano $x'y'$ son elipses (circunferencias si $A = B$), mientras que si A, B tienen signos opuestos, obtendremos hipérbolas. En el primer caso, obtendremos un paraboloide ("elíptico") como el de la figura 7.1 y en el segundo caso un paraboloide hiperbólico, como en la Figura 7.2.

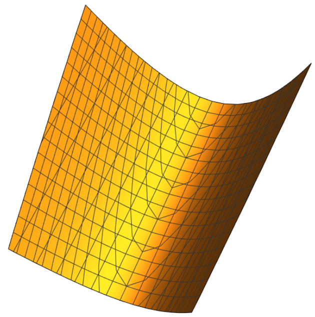


Figura 7.7: Un cilindro parabólico.

- Exactamente uno de los coeficientes A, B, C es diferente de cero, mientras que los coeficientes de primer grado de las variables restantes son diferentes de cero. Un ejemplo de este tipo de ecuación es:
$$Ax^2 + Hy + Iz + J = 0.$$
Como antes, podemos hacer una sustitución para eliminar el término independiente, de modo que basta analizar la ecuación
$$Ax^2 + Hy + Iz = 0. \tag{7.7}$$
Aunque no es claro por el momento, esta ecuación representa un cilindro. Para ver esto, hacemos un cambio de coordenadas en el plano yz. Sean
$$\begin{aligned} y &= \frac{H}{\sqrt{H^2+I^2}}y' - \frac{I}{\sqrt{H^2+I^2}}z', \\ z &= \frac{I}{\sqrt{H^2+I^2}}y' + \frac{H}{\sqrt{H^2+I^2}}z', \end{aligned}$$
que corresponde a una rotación de modo que los ejes queden en la dirección del vector (H, I) y su ortogonal. Esto transforma la ecuación (7.7) en
$$Ax^2 + \sqrt{H^2+I^2}\, y' = 0,$$
lo que representa un cilindro sobre una parábola; ver figura 7.7.

Con esto concluimos el breve análisis de las cuádricas representadas por polinomios de segundo grado en x, y, z sin términos mixtos. Más adelante completaremos nuestro análisis de la ecuación general de segundo grado.

7.5. Plano tangente a una superficie

Una característica que pediremos a una superficie es que ésta sea *suave*; es decir, que no tenga picos ni esquinas. En ese sentido, el vértice de un cono circular recto sería un punto problemático y tendríamos que eliminarlo de nuestros análisis. En general, pediremos que exista un único *plano tangente* a la superficie en cada uno de sus puntos. Tenemos que echar mano del Cálculo Diferencial para introducir las condiciones adecuadas que garanticen la existencia de dicho plano tangente. Necesitaremos un concepto previo y un resultado que no demostraremos en este curso.

Definición 7.5: Gradiente

Sean U un conjunto abierto en $\mathbb{R}^3$ y $F\colon U \to \mathbb{R}$ una función. Si $(x_0, y_0, z_0) \in U$ y existen las derivadas parciales de F en este punto, entonces el *gradiente* de F en (x_0, y_0, z_0) es el vector formado por dichas derivadas parciales:

$$\operatorname{grad} F_{(x_0,y_0,z_0)} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\right) \tag{7.8}$$

También es común usar la notación ∇F para el gradiente.

Ejemplo 7.12

Sea $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Gx + Hy + Iz + J;$$

entonces existen las derivadas parciales de F en todos los puntos de $\mathbb{R}^3$ y

$$\operatorname{grad} F_{(x_0,y_0,z_0)} = (2Ax + G, 2By + H, 2Cz + I)\,.$$

Ahora presentamos el resultado que no demostraremos.

Teorema 7.1

Sean U un conjunto abierto en $\mathbb{R}^3$ y $F\colon U \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1; es decir, que sus derivadas parciales existan y sean continuas en todo punto de U. Sea $(x_0, y_0, z_0) \in U$ y supongamos, sin pérdida de generalidad, que $F(x_0, y_0, z_0) = 0$. Si $\operatorname{grad} F_{(x_0,y_0,z_0)} \neq 0$, entonces:

- existe $r > 0$ tal que el conjunto

  $$\{\, (x, y, z) \in U \mid \|(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)\| < r \,\} \cap \{\, (x, y, z) \mid F(x, y, z) = 0 \,\}$$

  es una superficie y tiene un único plano tangente en cada punto del conjunto anterior.
- El gradiente de F en cada punto $(x, y, z) \in U$ es ortogonal al plano tangente mencionado en el inciso anterior.

Ejemplo 7.13: U

aremos el teorema anterior para encontrar la ecuación del plano tangente a cada punto de la esfera unitaria dada por $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Sea

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1,$$

de modo que un punto estará en la esfera si y sólo si $F(x, y, z) = 0$. Es fácil ver que

$$\operatorname{grad} F_{(x,y,z)} = (2x, 2y, 2z);$$

y que este gradiente es diferente de cero si y sólo si $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$. Así, en nuestro caso, el conjunto $F(x, y, z) = 0$ es una superficie. Si fijamos un punto (x_0, y_0, z_0) en la esfera, tenemos que un vector normal a la superficie es

$$\operatorname{grad} F = 2(x_0, y_0, z_0),$$

lo que geométricamente quiere decir que el vector radial es justamente el vector normal. Como ya tenemos un punto por el que pasa el plano y también tenemos el vector normal, la ecuación de este plano es

$$2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) + 2z_0(z - z_0) = 0.$$

o de manera equivalente,

$$x_0 x + y_0 y + z_0 z - (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2) = 0.$$

Usando el hecho de que el punto satisface la ecuación de la esfera, obtenemos finalmente

$$x_0 x + y_0 y + z_0 z = 1.$$

Ejemplo 7.14

Calculemos ahora el plano tangente al hiperboloide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

en el punto (x_0, y_0, z_0). Si consideramos

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1,$$

entonces el hiperboloide está dado por $F(x, y, z) = 0$. El gradiente de F es

$$\operatorname{grad} F_{(x_0,y_0,z_0)} = 2\left(\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}, -\frac{z_0}{c^2}\right).$$

y una ecuación para el plano tangente al hiperboloide en el punto (x_0, y_0, z_0) es

$$\frac{x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{y_0}{b^2}(y - y_0) - \frac{z_0}{c^2}(z - z_0) = 0.$$

Usando el hecho de que (x_0, y_0, z_0) está en el hiperboloide y por tanto sus coordenadas satisfacen la ecuación original, podemos reducir la ecuación a

$$\frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y - \frac{z_0}{c^2}z = 1.$$

Apéndice A

Grupos y campos

Aquí mencionaremos dos estructuras algebraicas importantes.

Definición A.1: Grupo

Un conjunto G es un *grupo* si tiene definida una operación (usualmente denotada como el producto $\lambda\mu$ de $\lambda, \mu \in G$) que satisface las propiedades siguientes:

(G 1) **Cerradura**: Para cada par de elementos $\lambda, \mu \in G$, su producto $\lambda\mu$ es elemento de G.

(G 2) **Asociatividad**: Para cualesquiera $\lambda, \mu, \nu \in G$,

$$\lambda(\mu\nu) = (\lambda\mu)\nu.$$

(G 3) **Existencia del neutro**: Existe un elemento en G denotado por 1 o 1_G, tal que para todo $\lambda \in G$,

$$1\lambda = \lambda.$$

Además, si para cualesquiera $\lambda, \mu \in G$,

$$\lambda\mu = \mu\lambda,$$

se dice que el grupo es *conmutativo* o *abeliano*.

Otro concepto algebraico fundamental es el siguiente.

Definición A.2: Campo

Un conjunto $\mathbb{K}$ es un *campo* si tiene definidas dos operaciones llamadas *suma* y *producto*, que satisfacen las propiedades siguientes:

(C 1) **Cerradura**: Para cada par de elementos $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, su suma $\lambda + \mu$ y su producto $\lambda\mu$ son elementos de $\mathbb{K}$.

(C 2) **Conmutatividad**: Para cualesquiera $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

$$\lambda + \mu = \mu + \lambda \quad \text{y} \quad \lambda\mu = \mu\lambda.$$

(C 3) **Asociatividad**: Para cualesquiera $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{K}$,

$$\lambda + (\mu + \nu) = (\lambda + \mu) + \nu \quad \text{y} \quad \lambda(\mu\nu) = (\lambda\mu)\nu.$$

(C 4) **Existencia de neutros**: Existen elementos en $\mathbb{K}$ denotados por $0, 1$, distintos entre sí, tales que para todo $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\lambda + 0 = \lambda \quad \text{y} \quad 1\lambda = \lambda.$$

En particular, $K \neq \varnothing$.

(C 5) **Existencia de inversos**: Para cada $\lambda \in \mathbb{K}$ existe un elemento en $\mathbb{K}$, denotado $-\lambda$ tal que

$$\lambda + (-\lambda) = 0.$$

Además, si $\lambda \neq 0$, existe un elemento en $\mathbb{K}$, denotado λ^{-1}, tal que

$$\lambda\lambda^{-1} = 1.$$

(C 6) **Distributividad del producto con respecto de la suma**: Para cualesquiera $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{K}$, se tiene

$$\lambda(\mu + \nu) = \lambda\mu + \lambda\nu.$$

Ejemplos

1. El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, con las definiciones usuales de suma y multiplicación es un campo.

2. El conjunto de números racionales $\mathbb{Q}$, con las definiciones usuales de suma y multiplicación es un campo.

3. El conjunto de números reales de la forma $\lambda + \mu\sqrt{2}$ donde $\lambda, \mu \in \mathbb{Q}$, con la suma y multiplicación como en $\mathbb{R}$ es un campo.

4. El campo $\mathbb{Z}_2$ consiste de dos elementos 0 y 1 con las operaciones de suma y multiplicación definidas por las tablas

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

5. Ni el conjunto de números enteros positivos $\mathbb{Z}^+$ ni el conjunto de enteros $\mathbb{Z}$ con las definiciones usuales de suma y multiplicación son campos, pues la propiedad (C 5) no se cumple.

Los elementos neutros e inversos garantizados por (C 4) y (C 5) son únicos; esto es consecuencia del siguiente teorema.

Teorema A.1: Leyes de cancelación

Sea $\mathbb{K}$ un campo y $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{K}$. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

a) Si $\lambda + \mu = \nu + \mu$, entonces $\lambda = \nu$.

b) Si $\lambda \cdot \mu = \nu \cdot \mu$ y $\mu \neq 0$, entonces $\lambda = \nu$.

Demostración. La idea es similar en ambos incisos.

a) Como $\mu \in \mathbb{K}$, existe $(-\mu) \in K$ tal que $\mu + (-\mu) = 0$. Entonces

$$\begin{aligned}
\lambda + \mu &= \nu + \mu, && \text{hipótesis;}\\
(\lambda + \mu) + (-\mu) &= (\nu + \mu) + (-\mu), && \text{sumando } -\mu;\\
\lambda + (\mu + (-\mu)) &= \nu + (\mu + (-\mu)), && \text{asociatividad;}\\
\lambda + 0 &= \nu + 0; && \text{inverso aditivo;}\\
\lambda &= \nu, && \text{neutro aditivo.}
\end{aligned}$$

b) Como $\mu \neq 0$, existe $\mu^{-1} \in \mathbb{K}$ tal que $\mu\mu^{-1} = 1$. Entonces

$$\begin{aligned}
\lambda \cdot \mu &= \nu \cdot \mu, && \text{hipótesis;}\\
(\lambda\mu)\mu^{-1} &= (\nu \cdot \mu)\mu^{-1}, && \text{multiplicando por } \mu^{-1};\\
\lambda(\mu\mu^{-1}) &= \nu(\mu\mu^{-1}), && \text{asociatividad;}\\
\lambda(1) &= \nu(1), && \text{inverso multiplicativo;}\\
\lambda &= \nu, && \text{neutro multiplicativo.}
\end{aligned}$$

□

Corolario A.1

Los elementos neutros y los inversos, son únicos.

Demostración. Supongamos que existe otro elemento denotado por $0'$ que satisface que $0' + \lambda = \lambda$ para cada $\lambda \in \mathbb{K}$. Como $0 + \lambda = \lambda$ para cada $\lambda \in \mathbb{K}$, tenemos que $0' + \lambda = 0 + \lambda$ para cada $\lambda \in \mathbb{K}$. Entonces por el teorema (A.1), se tiene que $0' = 0$. Laa demás pruebas son análogas. □

Así cada elemento μ de un campo tiene un único inverso aditivo y, si $\mu \neq 0$, un único inverso multiplicativo. Notemos que $-(-\mu) = \mu$ y $\left(\mu^{-1}\right)^{-1} = \mu$.

Algunas de las propiedades conocidas del producto de números reales son ciertas en un campo cualquiera, como el siguiente teorema muestra.

Teorema A.2

Sean λ y μ elementos arbitrarios en un campo $\mathbb{K}$. Entonces cada una de las siguientes propiedades es cierta.

a) $\lambda 0 = 0$.

b) $(-\lambda)\mu = \lambda(-\mu) = -(\lambda\mu)$.

c) $(-\lambda)(-\mu) = \lambda\mu$.

Demostración. Veamos qué ocurre en cada inciso.

a) Como $0+0=0$,
$$0+\lambda 0=\lambda 0=\lambda(0+0)=\lambda 0+\lambda 0.$$
Por el teorema (A.1) se tiene que $\lambda 0=0$.

b) Por definición, $-(\lambda\mu)$ es el único elemento de $\mathbb{K}$ tal que $\lambda\mu+(-(\lambda\mu))=0$. Pero
$$\lambda\mu+(-\lambda)\mu=(\lambda+(-\lambda))\mu=0\mu=0.$$
Así, por unicidad se tiene que $-(\lambda\mu)=(-\lambda)\mu$. Análogamente, $-(\lambda\mu)=\lambda(-\mu)$.

c) Basta aplicar el inciso anterior dos veces
$$(-\lambda)(-\mu)=-[\lambda(-\mu)]=-[-(\lambda\mu)]=\lambda\mu.$$
□

Corolario A.2

El neutro aditivo de un campo no tiene inverso multiplicativo.

Apéndice B

Determinantes

B.1. Matrices

Una *matriz* A de orden $m \times n$ es un arreglo de escalares (que pueden estar en $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ o cualquier campo K) a_{ij} llamados *elementos*, arreglados en m renglones y n columnas, y que por lo general se denota como sigue:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

o, en forma abreviada, por (a_{ij}) con $i = 1, 2, \dots, m$ y $j = 1, 2, \dots, n$. Si $m = n$ la matriz es *cuadrada* de orden n o simplemente matriz de orden n. Si $m = 1$, es una *matriz renglón* o *vector renglón*; si $n = 1$, es una *matriz columna* o *vector columna*.

Una matriz cuadrada A de orden n es llamada *matriz diagonal* si $a_{ij} = 0$ siempre que $i \neq j$. Si además $a_{ii} = 1$ para toda $i = 1, 2, \dots, n$, entonces la matriz es llamada *matriz identidad* y se denota por I.

Una *matriz nula*, que se denota por O, es aquella cuyos elementos son todos iguales a cero.

En este curso nos interesa el caso en el que los elementos de la matriz son números reales. Denotaremos el conjunto de todas las matrices de orden $m \times n$ con entradas en los reales por $\mathfrak{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

B.2. Determinantes

Una herramienta importante en el estudio de las matrices cuadradas es el *determinante* que en general se define de una forma "complicada". En este apéndice vamos a centrar nuestra atención en los casos $n = 2, 3$, cuya dafinición es un poco más sencilla.

Definición B.1: Determinante de 2×2

Sea $A \in \mathfrak{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ dada por

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

El *determinante* de A denotado[a] por $\det A$, se define como

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

[a]También puede ser denotado por $|A|$, $|a_{ij}|$ o $\det(a_{ij})$.

Ejemplo B.1

Sean $A, B, C \in \mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ dadas por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \qquad C = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -7 & -8 \end{pmatrix}.$$

El determinante de cada matriz es

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (1)(1) - (1)(1) = 0:$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (1)(4) - (2)(3) = 4 - 6 = -2;$$

$$\det C = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -7 & -8 \end{vmatrix} = (5)(-8) - (6)(-7) = -40 + 42 = 2.$$

Una vez dada esta definición, podemos definir el determinante de una matriz de 3×3, pues para ello, requerimos usar determinantes de 2×2.

Definición B.2: Determinante de 3×3

Sea $A \in \mathsf{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ dada por

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

El determinante de A se define como

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Sería difícil memorizar la fórmula anterior sin algún recurso mnemotécnico. La regla que hay que aprender es que recorremos la primera fila multiplicando a_{1j} por el determinante de la matriz de 2×2 que resulta de eliminar el primer renglón y la j-ésima columna, y después sumamos todo, recordando poner un signo de resta delante del término a_{12}.

Una forma "gráfica" de ver esta regla es la siguiente: Para calcular

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

nos fijamos en

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ \cancel{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & a_{12} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & \cancel{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & \cancel{a_{32}} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \cancel{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & \cancel{a_{33}} \end{vmatrix}.$$

Así,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Ejemplo B.2

Calculemos el determinante de la matriz identidad de 3×3.

$$\det I_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

Ejemplo B.3

Calculemos el determinante de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} &= 1 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\ &= -3 + 12 - 9 = 0 \end{aligned}$$

B.3. Propiedades de los determinantes

Una propiedad importante es que el signo de un determinante cambia al intercambiar dos filas o dos columnas. Para determinantes de 2×2 esto es consecuencia de la definición:

- Para las filas tenemos

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = -(a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22}) = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}$$

- Para las columnas

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -(a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}) = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}$$

Se dejará al lector probar esta propiedad para el caso 3×3.

Otra propiedad fundamental de los determinantes es que podemos *sacar como factor común escalares de cualquier fila o columna*. Para determinantes de 2×2, esto significa

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \alpha a_{11} & a_{12} \\ \alpha a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \alpha a_{12} \\ a_{21} & \alpha a_{22} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{vmatrix} &= \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

De manera análoga para determinantes de 3×3 tenemos

$$\begin{vmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & a\alpha_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \alpha a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \alpha a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & \alpha a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

y así sucesivamente. Estos resultados se deducen de las definiciones. En particular si cualquier fila o columna contiene únicamente ceros, el valor del determinante es cero.

Un tercer hecho fundamental acerca de los determinantes es el siguiente: *Podemos abrir las sumas renglón por renglón, o bien, columna por columna.* Esto significa:

- Para el caso 2×2

$$\begin{vmatrix} a_1 + c_1 & a_2 + c_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \qquad \text{por renglón}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 + c_1 & a_2 \\ b_1 + d_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & a_2 \\ d_1 & b_2 \end{vmatrix} \qquad \text{por columna}$$

- Para el caso 3×3, podemos separar por renglón así:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 + d_1 & b_2 + d_2 & b_3 + d_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

  o por columna, así:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 + d_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 + e_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 + f_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & d_3 \\ d_1 & d_2 & e_3 \\ c_1 & c_2 & f_3 \end{vmatrix}.$$

Estrechamente ligado a estas propiedades está el hecho de que *podemos desarrollar un determinante de* 3×3 *recorriendo cualquier renglón o columna* usando los signos del siguiente patrón:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

Por ejemplo, podemos desarrollar "por menores" el determinante del ejemplo (**??**) recorriendo el segundo renglón

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= (-4)(-6) + (5)(-12) + (-6)(-6) = 0.$$