Propiedades complementarias de Espacios Vectoriales

Teorema

Si Ves un espacio vectorial con $\oplus$ y $\odot$, entonces

a) $0 \odot u = \overline{\mathbf{0}} \quad \forall\, u \in V.$

b) $c \odot \overline{\mathbf{0}} = \overline{\mathbf{0}} \quad \forall$ escalar c

c) Si $c \odot u = \overline{\mathbf{0}} \Rightarrow c = 0$ ó $u = \overline{\mathbf{0}}, \quad \forall\, u \in V$

d) $(-1) \odot u = -u$ para cada u en V

Demostración:

a) Tenemos que

$\overline{\mathbf{0}} = (0 \odot u) \oplus \big(-(0 \odot u)\big) =$ se aplica propiedad Ad)

$= \big((0+0) \odot u\big) \oplus \big(-(0 \odot u)\big) =$ propiedad de los reales para el cero

$= (0 \odot u \oplus 0 \odot u) \oplus \big(-(0 \odot u)\big) =$ se aplica Bb)

$= 0 \odot u \oplus \big(0 \odot u \oplus (-0 \odot u)\big) =$ se aplica Ab)

$= (0 \odot u) \oplus \overline{\mathbf{0}} = 0 \odot u$ por la propidad Ad) y Ac)

a') Tenemos que $0 + 0 = 0 \Rightarrow$

$$0 \odot u = (0+0) \odot u$$
$$= 0 \odot u \oplus 0 \odot u,$$

Por lo tanto, $0 \odot u = 0 \odot u \oplus 0 \odot u$

sumando de ambos lados $(-0 \odot u)$

tenemos

$$0 \odot u \oplus (-0 \odot u) = 0 \odot u \oplus \big(0 \odot u \oplus (-0 \odot u)\big)$$
$$\overline{\mathbf{0}} = 0 \odot u \oplus \overline{\mathbf{0}} = 0 \odot u$$

a'') $(0 \odot u) \oplus u = 0 \odot u \oplus 1 \odot u = (0+1) \odot u = 1 \odot u = u$

por lo tanto $(0 \odot u) \oplus u = u$

si se suma de ambos lados $-u$, entonces se tiene que

$(0 \odot u) \oplus (u \oplus -u) = u \oplus -u$

$0 \odot u \oplus \overline{\mathbf{0}} = \overline{\mathbf{0}}$, pero $0 \odot u \oplus \overline{\mathbf{0}} = 0 \odot u$

por lo tanto $\quad 0 \odot u = \overline{\mathbf{0}}$

b) Como $\overline{\mathbf{0}} = \overline{\mathbf{0}} \oplus \overline{\mathbf{0}}$, entonces si multiplicamos por el escalar c tenemos esto

$$c \odot \overline{\mathbf{0}} = c \odot \left(\overline{\mathbf{0}} + \overline{\mathbf{0}}\right) = c \odot \overline{\mathbf{0}} \oplus c \odot \overline{\mathbf{0}},$$

por lo tanto $c \odot \overline{\mathbf{0}} = c \odot \overline{\mathbf{0}} \oplus c \odot \overline{\mathbf{0}}$,

si restamos de ambos lados $-c \odot \overline{\mathbf{0}}$, entonces

$$c \odot \overline{\mathbf{0}} \oplus \left(-c \odot \overline{\mathbf{0}}\right) = c \odot \overline{\mathbf{0}} \oplus \left(c \odot \overline{\mathbf{0}} \oplus \left(-c \odot \overline{\mathbf{0}}\right)\right)$$

$$\overline{\mathbf{0}} = c \odot \overline{\mathbf{0}} \oplus \overline{\mathbf{0}} = c \odot \overline{\mathbf{0}}.$$

Por lo tanto $\qquad c \odot \overline{\mathbf{0}} = \overline{\mathbf{0}}.$

c) Suponemos que $c \odot u = \overline{\mathbf{0}}$ donde $c \neq 0$, ya que si c es $0 \Rightarrow$ tenemos el caso a) que ya se vio que sí cumple. Entonces, como suponemos que $c \neq 0$, ahora tenemos que demostrar $u = \overline{\mathbf{0}}$,

$$u = 1 \odot u = \left(\frac{1}{c}c\right) \odot u = \frac{1}{c} \odot (c \odot u) = \frac{1}{c} \odot \overline{\mathbf{0}} = \overline{\mathbf{0}}.$$

d) P. d. $-1 \odot u = -u, \quad \forall\, u$ en V

Tenemos que

$$((-1) \odot u) \oplus u = ((-1) \odot u) \oplus (1 \odot u) = (-1 + 1) \odot u = 0 \odot u = \overline{\mathbf{0}}$$

$$\Rightarrow \left((-1) \odot u\right) \oplus u = \overline{\mathbf{0}},$$

entonces el inverso aditivo de u tiene que ser $(-1) \odot u$,

por lo tanto $\quad (-1) \odot u = -u$

Subespacios vectoriales

Definición

Sea V un espacio vectorial y W un subconjunto no vacío de V. Si Wes un espacio vectorial con respecto de las operaciones $\oplus$ y $\odot$ de V, entonces W es un subespacio de V.

Para identificar subespacios tenemos el siguiente criterio

Teorema
Supongamos que Wes un subconjunto no vacío de un espacio vectorial V. Entonces Wes un subespacio de V si y sólo si se cumple lo siguiente:

i) $\overline{\mathbf{0}} \in W$

ii) W es cerrado bajo la suma, es decir, si u y v está en W, por lo tanto $u + v$ está en W

iii) W es cerrado bajo el producto por un escalar, es decir, si u está en W y c es un escalar, por lo tanto $c \odot u$ está en W.

Demostración

Para la clase