Espacios vectoriales

Todos han trabajado con vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, matrices, funciones, sucesiones construidas con números de Fibonacci, polinomios, etc. Lo que se ve que tienen en común es que se les pueden aplicar operaciones de suma entre sus elementos, producto por un escalar y resulta que cumplen con ciertas operaciones que les son comunes. Sucede que si las operaciones que conocemos entre vectores de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ o $\mathbb{R}^n$ también se cumplen para otros conjuntos, entonces por qué tenemos que pensar que los vectores siempre son las flechas asociadas con una magnitud, dirección y sentido, o sólo asociadas a una fuerza. ¿Por qué no plantearnos que los vectores pueden ser las matrices o los polinomios?

La idea amplia de espacio vectorial fue planteada por Hermann Grassmann en 1844 y quien la axiomatizó fue Giuseppe Peano en su libro *Calcolo Geometrico* publicado en 1888.

Ahora veamos lo que tiene que cumplir un conjunto para que sea un ***Espacio Vectorial.***

Definición.
Un conjunto V con dos operaciones definidas de suma $\oplus$ y producto $\odot$ por un escalar c, se dice que es un espacio vectorial si satisface las siguientes propiedades:

A. Si u y v son elementos cualesquiera de V, entonces $u \oplus v$ está en V (es decir, Ves cerrado bajo la operación $\oplus$)

   a) $u \oplus v = v \oplus u \quad \forall\, u, v \in V$ (conmutatividad)

   b) $u \oplus (v \oplus w) = (u \oplus v) \oplus w, \quad \forall\, u, v, w \in V$ (asociatividad)

   c) Existe un elemento $\overline{\mathbf{0}}$ en V tal que $u \oplus \overline{\mathbf{0}} = \overline{\mathbf{0}} \oplus u = u, \quad \forall\, u \in V$

   (existe un elemento neutro en la suma, llamado vector cero, el $\overline{\mathbf{0}}$)

   d) Para cada $u \in V$existe un elemento $-u$ en V tal que $u \oplus -u = \overline{\mathbf{0}}$.

   (existe un inverso aditivo)

B. Si u es cualquier elemento de V y c es un escalar, entonces $c \odot u$ está en V

   (es decir, V es cerrado bajo la operación $\odot$ por un escalar).

   a) $c \odot (u \oplus v) = c \odot u \oplus c \odot v, \quad \forall$ escalar c y $\forall\, u, v \in V$ (distributividad)

   b) $(c + d) \odot u = c \odot u \oplus d \odot u$ para todo par de escalares c y d y $\forall\, u \in V$.

   (distributividad)

   c) $c \odot (d \odot u) = (cd) \odot u, \quad \forall\, c, d$ en los escalares.

   d) $1 \odot u = u, \quad \forall u \in V$

Tienen que considerar que los escalares c no tienen que ser siempre reales, los escalares pueden ser números complejos, números dentro de $\mathbb{Z}_p$ o cualquier número que pertenezca a un conjunto que tenga las propiedades de **Campo**, pero en este curso usaremos sólo a los reales.

Ejemplos de Espacio Vectoriales.

Ejemplo 1
Sea V el conjunto de las tercias ordenadas de reales (x, y, z) con las siguientes operaciones de $\oplus$ y $\odot$

$$(x, y, z) \oplus (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$$
$$c \odot (x, y, z) = (cx, y, z)$$

Aquí se cumplen las propiedades de Aa) hasta Ad) y también Ba), para esto se toma al vector $\overline{\mathbf{0}}$ como $(0, 0, 0)$ y al negativo como $(-x, -y, -z)$. Por ejemplo, para verificar Ba) se tiene que

$$c \odot [(x, y, z) \oplus (x', y', z')] = c \odot (x + x', y + y', z + z') = (c(x + x'), y + y', z + z').$$

Por otro lado

$$c \odot (x, y, z) \oplus c \odot (x', y', z') =$$
$$(cx, y, z) \oplus (cx', y', z') =$$
$$(cx + cx', y + y', z + z')$$
$$(c(x + x'), y + y', z + z').$$

Por lo tanto $c \odot [(x, y, z) \oplus (x', y', z')] = (c(x + x'), y + y', z + z')$ y la propiedad Ba) se cumple.

Pareciera que todas las propiedades se van a cumplir para que sea espacio vectorial, pero ¡pero!, veamos lo siguiente.

Resulta que Bb) no se cumple, es decir, por un lado, tenemos que

$$(c + d) \odot (x, y, z) = \big((c + d)x, y, z\big),$$

Pero, por el otro lado se tiene que

$$c \odot (x, y, z) \oplus d \odot (x, y, z) = (cx, y, z) \oplus (dx, y, z) = \big((c + d)x, 2y, 2z\big).$$

Por lo tanto $\big((c + d)x, y, z\big)$ es diferente que $\big((c + d)x, 2y, 2z\big)$, y esta es la razón por la que Bb) no se cumple

Sin embargo, las propiedades Bc) y Bd) sí se cumplen.

Finalmente, V no es un espacio vectorial.

Ejemplo 2.
Tenemos al conjunto de todos los polinomios de grado $\leq n$ con coeficientes en los reales, junto con el polinomio cero.

Si $\quad p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$

$\qquad q(t) = b_n t^n + b_{n-1} t^{n-1} + \cdots + b_1 t + b_0,$

definimos a la suma $p(t) \oplus q(t)$como

$$p(t) \oplus q(t) = (a_n + b_n)t^n + (a_{n-1} + b_{n-1})t^{n-1} + \cdots + (a_1 + b_1) + (a_0 + b_0),$$

y al producto $c \odot p(t)$ como

$$c \odot p(t) = (ca_n)t^n + (ca_{n-1}t^{n-1}) + \cdots + (ca_1)t + (ca_0)$$

Ahora, demostraremos que P_n es un espacio vectorial, es decir se cumplen las propiedades de Aa) hasta Ad) y de Ba) hasta Bd).

Ejemplo 3

Sea V el conjunto de todas las funciones bien definidas en $\mathbb{R}$.
Definamos para todo par de funciones f y g en V y todo $c \in \mathbb{R}$ las siguientes operaciones.

$$(f \oplus g)(t) = f(t) + g(t)$$

$$c \odot f(t) \text{ como } (c \odot f)(t) = cf(t)$$

Primero se ve que se cumplen las propiedades aditivas del grupo A

a) Sean f y $g \in V$, Por demostrar que $(f \oplus g)(x) = (g \oplus f)(x)$
$\Rightarrow \ (f \oplus g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g \oplus f)(x)$

b) P.d. $(f \oplus g) \oplus h = f \oplus (g \oplus h)$

$$\big(f \oplus (g \oplus h)\big)(x) = f(x) + (g \oplus h)(x)$$
$$= f(x) + \big(g(x) + h(x)\big)$$

Pero como $f(x), g(x), h(x)$ son las imágenes de valores del dominio, entonces, $f(x), g(x), h(x)$ son escalares, por lo tanto

$$f(x) + \big(g(x) + h(x)\big) = \big(f(x) + g(x)\big) + h(x) =$$

$$=(f \oplus g)(x) + h(x) = ((f \oplus g) \oplus h)(x).$$

Por lo tanto, $\big(f \oplus (g \oplus h)\big)(x) = \ ((f \oplus g) \oplus h)(x)$.

Finalmente $(f \oplus g) \oplus h = f \oplus (g \oplus h)$

c) Existe un elemento neutro (vector) cero $\overline{\mathbf{0}}$ en V que es una función constante f_0 igual a cero, es decir $f_0(x) = 0$ para toda x en el dominio. Por lo tanto

$$f \oplus \overline{\mathbf{0}} = \overline{\mathbf{0}} \oplus f = f, \forall f \in V$$

También podemos denotar al vector cero como función $\overline{\mathbf{0}}(x) = 0, \ \forall x$ en el intervalo de definición.
Así, $\big(f \oplus \overline{\mathbf{0}}\big)(x) = f(x) + \overline{\mathbf{0}}(x) = f(x) + 0 = f(x)$

d) Para cada f en V existe $-f$ en V tal que $f \oplus -f = \overline{\mathbf{0}}$, y esto es por la formación del producto de que $(-1 \odot f)(x) = -f(x)$, . Entonces se tiene que $(-f)(x) = -f(x)$

$$\Rightarrow (f \oplus -f)(x) = f(x) + (-f)(x) = f(x) - f(x) = \overline{\mathbf{0}}(x).$$

Les dejamos completar las propiedades multiplicativas del grupo B.

Ejemplos para pensar

1. Sea V el conjunto de los Reales con las siguientes operaciones:

$$u \oplus v = u - v,$$

$$c \odot u = cu$$

¿Es un espacio vectorial?

2. El conjunto de ternas ordenadas en $\mathbb{R}^3$ con las operaciones

$$(x, y, z) \oplus (x', y', z') = (x', y + y', z')$$

$$c \odot (x, y, z) = (cx, cy, cz)$$

¿Es un espacio vectorial?