Combinaciones Lineales y espacios generados

Definición

Sean vectores en un espacio vectorial V. Un vector v en V es una combinación lineal de $v_1, v_2, \ldots, v_k$ si

$$v = c_1 \odot v_1 \oplus c_2 \odot v_2 \oplus \ldots \oplus c_k \odot v_k$$

para algunos escalares c_i.

Definición

Al espacio que resulta de la combinación lineal de los vectores del conjunto $S = \{v_1, \ldots, v_r\}$ se le llama espacio generado de S y se denota por ***genS***.

Teorema

i) El conjunto $\neq \emptyset$ de todas las combinaciones lineales de un conjunto $S = \{v_1, \ldots, v_r\}$ de vectores en V (espacio vectorial) en un subespacio de Vque contiene a S. Dicho en otras palabras, se tiene que demostrar que el $genS$ es un subespacio de V.

ii) Si Wes un subespacio de V que contiene a $S \Rightarrow genS \subseteq W$.

Demostración

i) Sea el conjunto $S = \{v_1, \ldots, v_r\} \neq \emptyset$, entonces para $v_k \in S$ se tiene que $1 \odot v_k = v_k$ entonces pasa que $v_k \in genS \Rightarrow S \subseteq genS \Rightarrow genS \neq \emptyset$.

Supongamos ahora que $v, w \in genS$, entonces[1]

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_r v_r$$

$$w = b_1 v_1 + \cdots b_r v_r,$$

para $v_i \in S$ y a_i, b_i escalares

$$\Rightarrow v + w = a_1 v_1 + \cdots + a_r v_r + b_1 v_1 + \cdots b_r v_r$$

$$\Rightarrow v + w = (a_1 + b_1) v_1 + (a_2 + b_2) v_1 + \cdots + (a_r + b_r) v_r$$

Por lo tanto $v + w$, que es la suma de dos combinaciones es a la vez una combinación lineal, es decir la suma de combinaciones es una operación cerrada.

Para un k escalar

$kv = k(a_1 v_1 + \cdots + a_r v_r) = k a_1 v_1 + k a_2 v_2 + \cdots + k a_r v_r$ y esta combinación pertenecen al $genS$. Por lo tanto, el producto de una combinación por un escalar es una operación cerrada.

Finalmente, se tiene que

---

[1] Nota: los vectores son las combinaciones lineales, es decir, cada combinación es un vector.

$$\overline{\mathbf{0}} = 0v_1 + \cdots + 0v_m = \overline{\mathbf{0}} + \cdots + \overline{\mathbf{0}}$$

(se utilizó la propiedad a) de las complementarias)

es una combinación lineal de S, es decir, existe el vector cero que es una combinación lineal.

Con esto se concluye que el $genS$ es un subespacio de V.

ii) Ahora supongamos que Wes un subespacio de Vque contiene a S, y $v_1, \dots, v_r \in S \subseteq W$. Entonces, como Wes un subespacio V que contiene a S, sucede que el producto λv_i (λ escalar) $\in W$, por lo tanto, cualesquiera dos productos también perteneces a W, es decir, $\lambda_1 v_1$ y $\lambda_2 v_2$ pertenecen a W.

Por otro lado, como W es subespacio entonces la suma de dos vectores pertenece a W, entonces $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in W$. Ahora, bajo este razonamiento, se puede extender la suma para llegar a que $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_1 v_r \in W$.

Entonces se tiene que Wcontiene a todas las combinaciones lineales de $S \Rightarrow genS \subseteq W$.

Dependencia lineal

Dependencia lineal

Definición

Se dice que un vector $v_i \in \{v_1, \dots, v_m\}$ es ***linealmente dependiente*** del conjunto de vectores $\{v_1, \dots, v_m\}$ si v_i es una combinación lineal de las que restan, es decir v_i es combinación lineal de $\{v_1, \dots v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_m\}$. Dicho de otra manera, v_i es linealmente dependiente si

$$v_i \in gen\{v_1, \dots v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_m\}.$$

Definición

Sea V un espacio vectorial. Se dice que $v_1, \dots, v_m \in V$ son linealmente dependientes, si existen escalares $a_1, \dots a_n$ no todos cero tal que

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_m v_m = \overline{0}.$$

Nota:

Cuando la relación anterior se cumple sólo si todos los $a_i = 0$, entonces decimos que los vectores $v_1, \dots, v_m$ son ***linealmente independientes***.

Propiedades.

1) Un conjunto infinito S de vectores es linealmente dependiente si existe un subconjunto de vectores $v_1, \dots, v_t$ en S que lo son.

2) Si entre uno de los vectores $v_1, \dots, v_m$ supongamos $v_1 = \overline{0}$, entonces el conjunto completo se considera que es linealmente dependiente, ya que
$$1 \odot v_1 + \overline{0} \odot v_2 + \cdots + \overline{0} \odot v_m = 1 \odot \overline{0} + \overline{0} + \overline{0} + \cdots + \overline{0} = \overline{0}$$
y el coeficiente de v_1 es diferente de cero.

3) Cualquier vector $v \neq \overline{0}$ es linealmente independiente, y esto sucede ya que si
$$kv = \overline{0} \ (k \text{ escala}) \text{ y además } v \neq \overline{0},$$
$$\text{entonces } k = 0.$$

Lo que pasa es que todo vector $\neq \overline{0}$ puede generar al vector $\overline{0}$ con una combinación lineal que sólo tiene escalar cero.

4) Si dos vectores no ambos $\overline{0}$ en $v_1, \dots, v_m$ son iguales o uno es múltiplo escalar de otro, es decir, $v_1 = kv_2$, entonces los vectores son linealmente dependientes puesto que

$$v_1 - kv_2 + 0v_3 + \cdots + 0v_n = \overline{0},$$

y el coeficiente de v_1 es diferente de cero.

5) Si un conjunto S de vectores es linealmente independiente necesariamente lo es cualquier subconjunto de S. Alternativamente, si S contiene un subconjunto linealmente dependiente, S es linealmente dependiente.

Teorema

Supongamos que dos o más vectores no nulos son linealmente dependientes.
Entonces uno de los vectores es combinación lineal de los otros

Demostración

Como los $v_1, \dots, v_m$ son linealmente dependientes

$$\Rightarrow b_1 v_1 + \cdots + b_j v_j + \cdots + b_m v_m = \overline{0}$$

donde no todos la b_i son 0

Supongamos que $b_i \neq 0$ y $v_i \neq \overline{0} \Rightarrow$

$$b_i v_i = -b_i v_1 - b_2 v_2 - \cdots b_{i-1} v_{i-1} - b_{i+1} v_{i+1} - \cdots - b_m v_m$$

$$\Rightarrow v_j = -\frac{b_1}{b_i} v_1 - \frac{b_2}{b_i} v_2 - \cdots - \frac{b_m}{b_i} v_m.$$

■

Es un $\Leftrightarrow$

Base y dimensión

Definición

Un conjunto $S = \{u_1, \dots, u_n\}$ de vectores en V es una base de V si se cumple que

1) $u_1, \dots, u_n$ son linealmente independientes
2) $u_1, \dots, u_n$ generan a V

Base y dimensión

Definición

Un conjunto $S = \{u_1, \dots, u_n\}$ de vectores en Ves una base de Vsi se cumple que:

1) $u_1, \dots, u_n$ son linealmente independientes.
2) $u_1, \dots, u_n$ generan a V.

Definición

Un conjunto $S = \{u_1, \dots, u_n\}$ de vectores es una base de Vsi todo vector $v \in V$ puede escribirse de forma única como combinación lineal de los vectores de S.

Nota: un espacio vectorial V puede tener más de una base.

Definición

Un espacio vectorial V es de dimensión finita n $(dimV = n)$ si V tiene una base con n elementos.

Teorema

Si $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ es una base para un espacio vectorial V y $T = \{w_1, \dots, w_r\}$ es un conjunto linealmente independiente de vectores en V, entonces $r \leqslant n$.

Demostración

Sea $T_1 = \{w_1, v_1, \dots, v_n\}$ (que es una extensión de la base de V), y como S genera a V, entonces T_1 también genera a V (aunque T_1 ya no sea linealmente independiente). Además, como $w_1 \in genS \Rightarrow T_1$es linealmente dependiente $\Rightarrow w_1$es combinación lineal de los v_i, es decir, existe al menos una v_i que generan a w_1

$$\Rightarrow \qquad w_1 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_i v_i + \cdots + \lambda_n v_n$$

con escalar $\lambda_i \neq 0$.

Por otro lado, se puede escribir a v_i como combinación lineal de los otros vectores,

$$v_i = \varepsilon w_1 - \lambda'_1 v_1 - \lambda'_2 v_2 - \cdots - \lambda'_n v_n + \cdots - \lambda'_{i-1} v_{i-1} - \lambda'_{i+1} v_{i+1} - \cdots - \lambda'_n v_n$$

donde $\varepsilon = \frac{1}{\lambda_i}$, $\lambda'_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_i}, \lambda'_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_i}, \dots\dots.., \lambda'_n = \frac{\lambda_n}{\lambda_i}$.

Ahora, sea $S_1 = \{w_1, v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n\}$ y resulta que S_1 genera a V, veamos por qué pasa esto.

Como T_1 genera a V, entonces para $u \in V$ existe una combinación lineal tal que

$$u = \beta_0 w_1 + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_i v_i + \cdots + \beta_n v_n$$

pero como v_i es combinación lineal de los vectores de $T_1 - \{v_i\}$, entonces se sustituye esa combinación de v_i en la combinación lineal de u, es decir

$$v_i = \varepsilon w_1 - \lambda'_1 v_1 - \lambda'_2 v_2 - \cdots - \lambda'_n v_n + \cdots - \lambda'_{i-1} v_{i-1} - \lambda'_{i+1} v_{i+1} - \cdots - \lambda'_n v_n$$

se sustituye en

$$u = \beta_0 w_1 + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_i v_i + \cdots + \beta_n v_n.$$

Por lo tanto

$$u = \beta_0 w_1 + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_i \left[\varepsilon w_1 - \lambda'_1 v_1 - \lambda'_2 v_2 - \cdots - \lambda'_n v_n + \cdots - \lambda'_{i-1} v_{i-1} - \lambda'_{i+1} v_{i+1} - \cdots - \lambda'_n v_n\right] + \cdots + \beta_n v_n$$

$$u = (\varepsilon + 1) w_1 + (\beta_1 - \lambda'_1) v_1 + \cdots + (\beta_{i-1} - \lambda'_{i-1}) v_{i-1} + (\beta_{i+1} - \lambda'_{i+1}) v_{i+1} + \cdots + (\beta_n - \lambda'_n) v_n.$$

Si renombramos a los coeficientes entonces

$$u = \Gamma_0 w_1 + \Gamma_1 v_1 + \cdots + \Gamma_{i-1} v_{i-1} + \Gamma_{i+1} v_{i+1} + \cdots + \Gamma_n v_n.$$

Por lo tanto u es una combinación lineal de $\{w_1, v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n\} = S_1$

Por lo tanto $S_1 = \{w_1, v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n\}$ genera V.

Ahora sea $\qquad T_2 = \{w_2, w_1, v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n\}$

(que es una extensión de S_1)

Por lo tanto w_2 es combinación lineal de los restantes, pero no puede ser sólo de w_1 porque entonces T ya no sería linealmente independiente, por lo tanto, existe por lo menos una v_j con coeficiente $\neq 0$ para que w_2 sea combinación lineal de los vectores de T_2.

Entonces

$$w_2 = \xi w_1 + \eta_1 v_1 + \eta_2 v_2 + \cdots + \eta_j v_j + \cdots + \eta_{i-1} v_{i-1} + \eta_{i+1} v_{i+1} + \cdots + \eta_n v_n.$$

con escalar $\eta_j \neq 0$.

Por otro lado, se despeja a v_j para que quede expresado como combinación lineal de los vectores $w_2, w_1, v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n$.

Ahora, sea $\qquad S_2 = \{w_1, w_2, v_1, v_2, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n\}$

(notar que se está quitando a v_j de conjunto T_2)

y se tendrá que este conjunto S_2 también genera a V.

Así se sigue el proceso, y si se quitan todas las v_i antes de terminar con las w_j, entonces el conjunto de las w_j, que es un subconjunto de T, será linealmente dependiente, lo cual implica que T es linealmente dependiente ¡¡¡y esto es una contradicción!!!

Por lo tanto, los w_j se terminan antes o igual de que se terminen las v_i

$$\Rightarrow r \leq n$$

Corolario

Si $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y $T = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ son bases para un espacio vectorial V entonces $n = m$.

Demostración

Como Tes un conjunto linealmente independiente de vectores $\Rightarrow m \leq n$. Y como S es un conjunto linealmente independiente de vectores $\Rightarrow n \leq m$

Por lo tanto $m = n$.

8