Subespacios Vectoriales

Def.

Sea $\overline{V}$ un espacio vectorial y $\overline{W}$ un subconjunto no vacío de $\overline{V}$. Si $\overline{W}$ es un espacio vectorial con respecto de las operaciones $\oplus$ y $\odot$ de $\overline{V}$, entonces $\overline{W}$ es un subespacio de $\overline{V}$.

Para identificar subespacios tenemos el siguiente criterio:

Teorema

Supongamos que $\overline{W}$ es un subconjunto $\neq \phi$ de un espacio vectorial $\overline{V}$. Entonces, $\overline{W}$ es un subespacio de $\overline{V}$ si y solo si se cumple lo siguiente:

i) $\bar{0} \in \overline{W}$, ii) $\overline{W}$ es cerrado bajo la suma, es decir si $\bar{u}$ y $\bar{v}$ están en $\overline{W} \Rightarrow \bar{u} \oplus \bar{v} \in \overline{W}$

iii) $\overline{W}$ es cerrado bajo $\odot$ por un escalar, es decir, si $u \in \overline{W}$ y c es escalar, por lo tanto $c \odot \bar{u} \in \overline{W}$.

Dem

$\Rightarrow$) Supongamos que $\overline{W}$ es un subespacio de $\overline{V}$, $\Rightarrow$ cada elemento en $\overline{W}$ es elemento de un espacio vectorial $\overline{V}$, por lo tanto, cada elemento (vector) de $\overline{W}$ cumple con los axiomas del grupo A y B para ser espacio vectorial.

En particular:

Si $\bar{u}$ y $\bar{v} \in \overline{W} \Rightarrow \bar{u} \oplus v \in \overline{W} \Rightarrow$ se cumple ii)

Como $\lambda\bar{v} \in \overline{W}$ con λ escalar $\Rightarrow$ se cumple iii)

Y como $\overline{W}$ es a la vez un espacio vectorial $\Rightarrow$ tiene al vector $\bar{0}$, entonces se cumple i). Por lo tanto, queda demostrado.

$\Leftarrow$) Por hipótesis sabemos que $\mathbb{W}$ es un subconjunto de $\mathbb{V}$ (esp. vect.) que cumple con las condiciones i), ii) y iii). P.d que $\mathbb{W}$ tambien es espacio y entonces será subespacio de $\mathbb{V}$.

Por hipótesis $\mathbb{W}$ cumple con que es cerrado bajo la soma $\oplus$ y producto $\odot$ para poder ser espacio vectorial.

Además, las propiedades A a), A b), A c)
B a), B b), B c), B d)
se cumplen, ya que todos los vectores de $\mathbb{W}$ son elementos de un espacio $\mathbb{V}$, esto es, podemos decir que $\mathbb{W}$ hereda estas mismas propiedades de $\mathbb{V}$.

Pero, falta demostrar A d), la que dice

"Para cada $u \in \mathbb{W}$ $\exists$ un $-u \in \mathbb{W}$ tal que $\bar{u} \oplus -\bar{u} = \bar{0}$" (inverso aditivo)

Ahora, tomamos $\bar{u} \in \mathbb{W}$ y con $\lambda = -1$, entonces el producto $(-1) \odot \bar{u}$ también está en $\mathbb{W}$, ya que usamos iii) de la hipótesis. Además, por d) del teorema anterior $(-1) \odot \bar{u} = -u$, entonces, sí existe el inverso aditivo y por lo tanto se cumple A d)

Entonces $\mathbb{W}$ cumple con ser espacio vectorial con la misma $\oplus$ y $\odot$ de $\mathbb{V}$, $\Rightarrow$ $\mathbb{W}$ es subespacio vectorial de $\mathbb{V}$.