Álgebra
Tarea 1-Grupo 8064

We are merely explorers of infinity
in the pursuit of absolute perfection.

The man who knew infinity (film)

1. Una regla de inferencia es una serie de afirmaciones

$$p_1, \dots, p_n, q$$

tal que la afirmación compuesta $p_1 \wedge \cdots \wedge p_n \implies q$ es una tautología. A las proposiciones $p_1, \dots, p_n$ se les llama *premisas*, *hipótesis*, o *antecedentes*, y a q se le llama *conclusión*, *tesis*, o *consecuente*.

Una forma común de esquematizar una regla de inferencia es la siguiente:

$$\begin{array}{c} p_1 \\ \vdots \\ p_n \\ \hline \therefore q \end{array}.$$

Demuestre que los siguientes casos son reglas de inferencia:

a) **Conjunción**

$$\begin{array}{c} p \\ q \\ \hline \therefore p \wedge q \end{array}.$$

b) **Idempotencia**

i) $\dfrac{p}{\therefore p \wedge p}$, *ii*) $\dfrac{p \wedge p}{\therefore p}$, *iii*) $\dfrac{p}{\therefore p \vee p}$, *iv*) $\dfrac{p \vee p}{\therefore p}$.

c) **Simplificación**

i) $\dfrac{p \wedge q}{\therefore p}$, *ii*) $\dfrac{p \wedge q}{\therefore q}$.

d) **Adición**

$$\frac{p}{\therefore p \vee q}.$$

e) **Modus ponens**

$$\begin{array}{c} p \\ p \implies q \\ \hline \therefore q \end{array}.$$

f) **Tollendo ponens**

$$\frac{\begin{array}{c} p \vee q \\ \neg q \end{array}}{\therefore p}.$$

g) **Dilema**

i) constructivo:

$$\frac{\begin{array}{c} (p \implies q) \vee (r \implies s) \\ p \\ r \end{array}}{\therefore q \vee s},$$

ii) destructivo:

$$\frac{\begin{array}{c} (p \implies q) \vee (r \implies s) \\ \neg q \\ \neg s \end{array}}{\therefore \neg p \vee \neg r}.$$

2. Demuestre las siguientes equivalencias lógicas:

a) **Contraposición:**

$$(p \implies q) \equiv (\neg q \implies \neg p)\,.$$

b) **Distributividad de $\implies$ sobre si misma**:

$$[p \implies (q \implies r)] \equiv [(p \implies q) \implies (p \Rightarrow r)]\,.$$

c) **Exportación**:

$$[p \implies (q \implies r)] \equiv [(p \wedge q) \implies r]\,.$$

d) **Distributividad de $\implies$ sobre** $\vee$:

$$[p \implies (q \vee r)] \equiv [(p \implies q) \vee (p \implies r)]\,.$$

e) **Distributividad de $\implies$ sobre** $\wedge$:

$$[p \implies (q \wedge r)] \equiv [(p \implies q) \wedge (p \implies r)]\,.$$

f) **Negación de la implicación**:

$$\neg\,(p \implies q) \equiv (p \wedge \neg q)\,.$$

g) **Reducción al absurdo**:

$$(p \implies q) \equiv [(p \wedge \neg q) \implies \bot]\,.$$

3. Muestre que los siguientes argumentos no son válidos:

a)

$$\frac{\begin{array}{c} p \implies q \\ q \end{array}}{\therefore p},$$

b)

$$\frac{\begin{array}{c} p \implies q \\ s \implies (p \implies r) \\ r \vee \neg q \\ s \implies p \end{array}}{\therefore r}.$$

4. Escriba cada uno de los siguientes conjuntos en forma extensiva (comprensiva) si este está escrito en forma comprensiva (extensiva):

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid (x < 6) \wedge (x \text{ es impar})\}$,
b) $B = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2\}$,
c) $C = \{y \in \mathbb{Z} \,|y \geq -3\}$,
d) $D = \{-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6\}$,
e) $E = \left\{z \in \mathbb{N} \mid -\frac{6}{5} \leq z \leq \frac{15}{4}\right\}$,
f) $F = \{\ldots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots\}$,
g) $G = \{w \in \mathbb{Z} \mid -1 < w < 1\}$,
h) $H = \{0, 3, 6, 9, \ldots\}$,
i) $I = \{x \,|x \in \mathbb{N} \wedge x > 3\}$.

5. Sean A, B, y C subconjuntos de X. Demuestre que $A \cap B \subseteq C$ si y sólo si $A \subseteq (X - B) \cup C$.

6. Demuestre que son equivalentes

   a) $C \subseteq A$
   b) $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$ para cualquier conjunto B.

7. Demuestre las siguientes identidades:

   a) $2^A \cap 2^B = 2^{A \cap B}$,
   b) $(A \cup B) \times P = (A \times P) \cup (B \times P)$,
   c) $(A \cap B) \times (P \cap Q) = (A \times P) \cap (B \times Q)$,
   d) $(A - B) \times P = (A \times P) - (B \times P)$.

8. Considere $B \subseteq X$ un conjunto arbitrario y $A_i \subseteq X$, para cada $i \in I$, con I un conjunto no vacío de índices. Demuestre lo siguiente:

   a) $\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i \in I} (A_i \cap B)$,
   b) $\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \cup B = \bigcap_{i \in I} (A_i \cup B)$,
   c) $X - \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} (X - A_i)$,
   d) $X - \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} (X - A_i)$.

9. Demuestre que si $\mathcal{C}$ es una familia arbitraria de conjuntos, entonces

   a) $\bigcap_{X \in \mathcal{C}} 2^X = 2^{\bigcap \mathcal{C}}$,
   b) $\bigcup_{X \in \mathcal{C}} 2^X \subseteq 2^{\bigcup \mathcal{C}}$. ¿Por qué no se cumple la otra contención?

10. Sean A, B, y C conjuntos.

    a) Si $A \subseteq B$, entonces $A \cap C \subseteq B \cap C$.
    b) Si $C \subseteq A$ y $C \subseteq B$, entonces $C \subseteq A \cap B$.

11. (**Punto extra**) Sean A, B, C, y D conjuntos. Demuestre lo siguiente:

    a) $A - B = A - (A \cap B)$,
    b) $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$,
    c) $A \subseteq B \iff \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$,
    d) $A = B \iff \mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$,
    e) $A \times A = B \times B \iff A = B$,
    f) $A \times B = \emptyset \iff A = \emptyset$ o $B = \emptyset$.

Nota: el punto extra no es obligatorio, únicamente tiene como propósito subir un punto sobre calificación en la tarea.