Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
Geometría Analítica II

Tarea 1

Fecha de examen: Viernes 28 de febrero

---

1. Realiza un esbozo de la gráfica de los conjuntos dados por las siguientes ecuaciones en coordenadas cartesianas; justifica tu gráfica mencionando
   - Intersecciones con los ejes coordenados;
   - Intersecciones con los planos coordenados;
   - Simetrías;
   - Intersecciones con los planos $z = k$.

   a) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{16} + \dfrac{z^2}{4} = 1;$

   b) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} + \dfrac{z^2}{4} = 1;$

   c) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{z^2}{9} = 1;$

   d) $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{9} = \dfrac{z}{2}.$

   e) $\dfrac{z^2}{9} - x^2 - y^2 = 1$

2. Dados los puntos $F_1(-c, 0, 0)$ y $F_2(c, 0, 0)$, determina la ecuación del conjunto de puntos $P(x, y, z)$ tales que la suma de las distancias de P a F_1 y F_2 es una constante $2a$, suponiendo que $a > c > 0$. ¿Qué sucede si $a = c$? ¿Y si $0 < a < c$?

3. Dado el punto $A(2, -6, 5)$ se han trazado todos los segmentos que van de A al plano xy. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos medios de estos segmentos?

4. Sean A, B dos puntos fijos en $\mathbb{R}^3$. Determina el lugar geométrico de los puntos $P \in \mathbb{R}^3$ tales que
$$(P - A) \cdot (P - B) = 0.$$

5. Considera la superficie de revolución (en $\mathbb{R}^3$) generada al hacer girar una circunferencia de radio b con centro en $(a, 0, 0)$ y $b < a$, al rededor del eje z. Escribe una parametrización $\varphi\colon A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ para dicha superficie y grafica tanto al conjunto A como a la superficie.

6. Da una parametrización $\varphi\colon A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ de las superficies descritas en los incisos 1*a* y 1*b* y en cada uno y grafica tanto al conjunto A como a la superficie.

7. Sean $a, b, c > 0$ tales que $a > b, c$. Da una parametrización $\varphi\colon A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ de la superficie generada al girar la elipse
$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad x = 0,$$
en torno al eje y. Considera los casos cuando $b > c$ y $c > b$. Grafica al conjunto A y la superficie en ambos casos.

8. Determina una parametrización para las siguientes superficies, esbozando tanto el dominio como la superficie

   a) Cilindro con directriz $x = y^2$ y generatrices paralelas a la recta $x = y = z$.

   b) Cilindro con directriz $9x^2 + 16z^2 - 144 = 0$ y generatriz el vector $u = (1, 1, , -1)$.

   c) Cilindro con directriz $z^2 - y^2 = 1$ y generatriz el vector $u = (1, -2, 3)$.

   d) Cono con directriz $x^2 + y^2 = 1$ y vértice en $V(0, 0, 1)$.

   e) Cono con directriz $9x^2 + 16z^2 - 144 = 0$ y vértice $V(1, 1, , -1)$.

   f) Cono con directriz $y^2 + z^2 = 1$ y vértice $V = (1, -2, 3)$.

9. Encuentra la ecuaciones cartesianas de las superficies descritas en los incisos $8a$, $8b$ y $8d$

10. Halla la ecuación del cono cuyo vértice es el origen, si las ecuaciones de la directriz son

$$\begin{cases} x^2 - 2z + 1 = 0, \\ \\ y^2 - z + 1 = 0. \end{cases}$$

11. Calcula la distancia más corta del punto $A(9, -4, -3)$ a la esfera con ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 + 14x - 16y - 24z + 241 = 0.$$

12. Dado el punto $A(-2, 0, 1)$ sobre la superficie dada por la ecuación

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = z.$$

    Muestra que esta superficie contiene dos rectas que pasan por A. Encuentra además el valor del ángulo agudo formado por estas rectas. Por último grafica la superficie y las rectas.

13. Demuestra que el hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ es una superficie doblemente reglada.

14. Demuestra que el paraboliode hiperbólico $z = y^2 - x^2$ es una superficie doblemente regalda.