Notas para el curso de Geometría Analítica I

Oscar Palmas - Alberto Lazcano - Stefano Sánchez

21 de enero de 2025

Índice general

Prólogo

Este primer curso de geometría analítica tiene varias intenciones. Por un lado, se recuerdan varios conceptos de geometría euclidiana y trigonometría, así como la parte básica de geometría analítica del plano, ecuaciones de líneas rectas, circunferencias y las cónicas, entre otros conceptos. Por otro lado, se aprovecha este curso para introducir algunas ideas del álgebra matricial y el Álgebra Lineal, como introducción a cursos de esta última materia y para manejar un lenguaje vectorial en la geometría analítica del plano y el espacio.

Los dos primeros capítulos, sobre geometría euclidiana y trigonometría, son una especie de repaso, en el cual trataremos de reducir a un mínimo los conocimientos que, suponemos, los estudiantes han adquirido en cursos y niveles anteriores. Por eso algunas secciones se verán como una especie de resumen.

Una de las intenciones del primer capítulo es insistir que muchas situaciones geométricas se pueden abordar sin coordenadas y que el uso de éstas debe ayudar a plantear y resolver un problema, más que complicarlo. Es por ello que empezamos a introducir las coordenadas apenas en el capítulo III.

Posteriormente, en el capítulo IV, empezamos a introducir el lenguaje de los espacios vectoriales, aunque en este curso nos limitaremos a sólo algunos de estos espacios, destacadamente $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ y algunos espacios de matrices. En este mismo capítulo introducimos los productos escalar (producto punto, producto interior) en $\mathbb{R}^n$ y el producto cruz (producto vectorial) en $\mathbb{R}^3$. La idea es contar con un lenguaje y notación comunes que podamos usar en los casos $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, en particular para dar las ecuaciones vectoriales de rectas y planos en el capítulo V.

Para finalizar este primer curso, analizaremos varios aspectos de las cónicas en el plano. Éste será en realidad el capítulo más extenso, pues comenzaremos dando las definiciones de las cónicas, sus ecuaciones y algunas de sus propiedades, para finalizar dando una primera idea de la manera de reducir la ecuación de una cónica a su forma más simple, la llamada forma canónica. En un segundo curso, se usarán y generalizarán estas ideas al caso de las superficies cuádricas en $\mathbb{R}^3$ y en general de los objetos dados por ecuaciones de segundo grado en $\mathbb{R}^n$.

No está de más insistir en que el lector debe tratar de resolver todos los ejercicios que aparecen al final de cada capítulo. Algunos de ellos son rutinarios y simplemente tratan de medir si los conceptos e ideas básicas del curso se han aprendido. Pero hemos querido incluir algunos ejercicios y problemas no estándar, que sean un poco más retadores y que llamen al estudiante a la reflexión e integración de los diversos conceptos que aquí se han plasmado. De la misma forma, llamamos al lector para que intente resolver los problemas de diversas maneras, no sólo con métodos de geometría euclidiana o analítica, sino con otros conocimientos que haya adquirido en su propia experiencia, como el Cálculo o la propia Álgebra Lineal.

Agradecemos a los lectores, estudiantes de cursos pasados y presentes, cualquier observación y sugerencia acerca del contenido de estas notas, que por supuesto se pueden ampliar (o reducir) en versiones posteriores. Para esto, pueden contactarnos por medio de nuestro correo institucional.

Oscar Palmas, Alberto Lazcano y Stefano Sánchez
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias UNAM

Episodio I

La amenaza euclidiana

Estamos suponiendo que el lector tiene conocimientos básicos de geometría euclidiana; de cualquier forma, incluiremos un resumen de los conocimientos necesarios y la notación usual del área. A modo de repaso, en la sección 1.2 plantearemos algunos problemas que se pueden resolver con técnicas básicas de geometría euclidiana.

1.1. Conceptos básicos

1.1.1. Distancia y simetría

Los puntos del plano (o del espacio) se denotan por lo general mediante letras mayúsculas $A, B, C, \ldots$ Los segmentos se denotan mediante sus extremos, con una barra horizontal sobre ellos; por ejemplo, $\overline{AB}$, $\overline{DE}$, etcétera, mientras que las longitudes de los segmentos se denotan bien con letras minúsculas $a, b, c, \ldots$ o mediante los extremos del segmento, sin la barra horizontal; por ejemplo, AB, DE, etcétera. Finalmente, los ángulos se denotarán con letras griegas $\alpha, \beta, \gamma, \ldots,$ o bien con el símbolo $\angle$ y tres letras, donde la letra intermedia es el vértice del ángulo y las otras dos indican puntos sobre las semirrectas que definen al ángulo; por ejemplo, $\angle AOB$. Para denotar la medida de un ángulo, usaremos el símbolo $\measuredangle$; por ejemplo, $\measuredangle AOB = 35°$. Los triángulos serán denotados usando el símbolo $\triangle$ y sus tres vértices.

Recordemos que la distancia entre dos puntos A, B en el plano (o el espacio) está dada justamente por la longitud AB del segmento entre ellos. En otros cursos modificaremos este concepto, pero durante todo este curso usaremos ésta, la llamada *distancia euclidiana*.

Esta distancia, que podemos denotar por $d(A, B)$ tiene varias propiedades que simplemente enunciaremos como sigue, en el caso del plano, aunque también se cumplirán propiedades análogas para la distancia en el espacio.

Teorema 1.1: Propiedades de la distancia

La distancia euclidiana satisface las siguientes propiedades.

- Para cualesquiera puntos A, B en el plano, $d(A, B) \geq 0$, y $d(A, B) = 0$ si y sólo si $A = B$.
- *Simetría.* Para cualesquiera puntos A, B en el plano, $d(A, B) = d(B, A)$.
- *Desigualdad del triángulo.* Para cualesquiera puntos A, B, C en el plano,

$$d(A, B) \leq d(A, C) + d(C.B)$$

.

Pospondremos la demostración de esta proposición. Sólo diremos que una vez introducidas las coordenadas, la prueba consistirá en una serie de cálculos sencillos.

La distancia euclidiana nos permite definir la *distancia entre conjuntos*. Como éste es un concepto bastante general, sólo daremos la definición en un caso muy particular.

Definición 1.1: Distancia de un punto a una recta

Sean P un punto del plano y L una recta. Entonces la distancia de P a L es el mínimo de las distancias de P a los puntos de L. En símbolos,

$$d(P, L) = \min_{Q \in L} d(P, Q).$$

De manera análoga se definirá la distancia de un punto a un plano. Con la ayuda del teorema de Pitágoras, se puede ver la siguiente caracterización de esta distancia.

Proposición 1.1

Sean P un punto del plano y L una recta. Sea Q el pie de la perpendicular de P a L. Entonces

$$d(P, L) = d(P, Q).$$

Otro de los conceptos básicos que podemos presentar desde ahora es el concepto de simetría. De nuevo, enunciamos este concepto sólo para el caso del plano, siendo completamente análogas las definiciones para el caso del espacio.

Definición 1.2: Simetría

Sean O, A, A' puntos, L una recta y $\mathcal{C}$ un conjunto en el plano.

- A' es el *simétrico* de A con respecto de O si A, O, A' son colineales y O es el punto medio del segmento $\overline{AA'}$ (o $AO = OA'$).
- El conjunto $\mathcal{C}$ es *simétrico* con respecto de un punto O si siempre que un punto A esté en $\mathcal{C}$, su simétrico A' con respecto de O también está en $\mathcal{C}$. En este caso, decimos que O es el *centro de simetría* del conjunto $\mathcal{C}$.
- A' es el *simétrico* de A con respecto de L si el segmento $\overline{AA'}$ es perpendicular a L y L corta a $\overline{AA'}$ en su punto medio.
- El conjunto $\mathcal{C}$ es *simétrico* con respecto de una recta L si siempre que un punto A esté en $\mathcal{C}$, su simétrico A' con respecto de L también está en $\mathcal{C}$. En este caso, decimos que L es el *eje de simetría* de A y A'.

1.1.2. Congruencia y semejanza de triángulos

Dos segmentos son *congruentes* si tienen la misma longitud; análogamente, dos ángulos son *congruentes* si tienen la misma medida. Recordemos que dos triángulos son *congruentes* si se puede establecer una correspondencia entre sus vértices de modo que los lados y ángulos correspondientes sean congruentes. Por otro lado, dos triángulos son *semejantes* si es posible establecer una correspondencia entre sus vértices de modo que los lados correspondientes sean proporcionales y los ángulos correspondientes sean congruentes. Para denotar estos conceptos usaremos los símbolos $\cong$ y $\simeq$ para denotar congruencia y semejanza, respectivamente, donde hemos utilizado las instrucciones `\cong` y `\simeq` de LaTeX.

En este curso usaremos libremente los criterios de congruencia y semejanza de triángulos que enunciaremos a continuación, sin demostración.

Teorema 1.2: Congruencia de triángulos

Sean $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ dos triángulos en el plano. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- *(Criterio LLL)* Los lados correspondientes son congruentes; es decir,
$$\begin{aligned} AB &= A'B', \\ BC &= B'C', \\ CA &= C'A'. \end{aligned}$$
- *(Criterio LAL)* Dos lados y el ángulo entre ellos en uno de los triángulos son congruentes a dos lados y el ángulo entre ellos del otro triángulo; es decir,
$$\begin{aligned} AB &= A'B', \\ BC &= B'C', \\ \measuredangle ABC &= \measuredangle A'B'C'. \end{aligned}$$
- *(Criterio ALA)* Dos ángulos y el lado entre ellos en uno de los triángulos son congruentes a dos ángulos y el lado entre ellos del otro triángulo; es decir,
$$\begin{aligned} \measuredangle ABC &= \measuredangle A'B'C', \\ \measuredangle BCA &= \measuredangle B'C'A', \\ BC &= B'C'. \end{aligned}$$
- $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$;

Teorema 1.3: Semejanza de triángulos

Sean $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ dos triángulos en el plano. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- $\triangle ABC \simeq \triangle A'B'C'$;
- *(LLL)* Los lados correspondientes son proporcionales; es decir,
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'};$$
- *(LAL)* Dos lados y el ángulo entre ellos en uno de los triángulos son proporcionales y congruente, respectivamente, a dos lados y el ángulo entre ellos en el otro triángulo; es decir,
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} \quad \text{y} \quad \measuredangle ABC = \measuredangle A'B'C'.$$
- *(AAA)* Los ángulos correspondientes son congruentes; es decir,
$$\begin{aligned} \measuredangle ABC &= \measuredangle A'B'C', \\ \measuredangle BCA &= \measuredangle B'C'A', \\ \measuredangle CAB &= \measuredangle C'A'B'. \end{aligned}$$
- *(AA)* Dos ángulos correspondientes son congruentes; es decir,
$$\begin{aligned} \measuredangle ABC &= \measuredangle A'B'C', \\ \measuredangle BCA &= \measuredangle B'C'A'. \end{aligned}$$

El lector puede revisar estos criterios, por ejemplo, en [1].

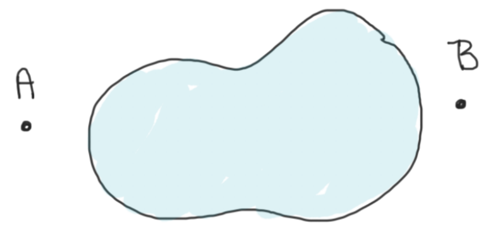
1.1.3. Teorema de Pitágoras

Sin duda, el teorema de Pitágoras es uno de los resultados más bellos y conocidos de todas las matemáticas. No menos interesantes son sus centenares de demostraciones, a cual más de ingeniosa. El lector puede revisar varias de ellas en el sitio `https://www.geogebra.org/m/jFFERBdd` y elegir su preferida o, por qué no, agregar la suya propia.

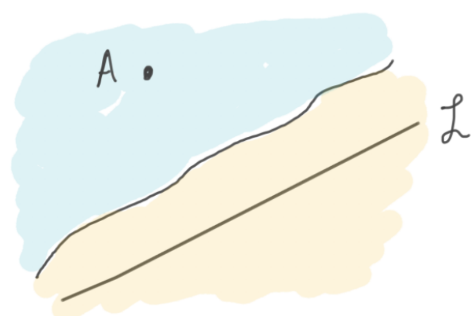
1.2. Cálculo de distancias

Una de las intenciones de este capítulo es hacer geometría *sin coordenadas*, pues agregaremos éstas un poco más adelante. Por ejemplo, tenemos la siguiente lista de problemas, que ha sido extraída de [**unpoco**] y [6]. El lector puede intentar resolverlos antes de pasar a la siguiente sección.

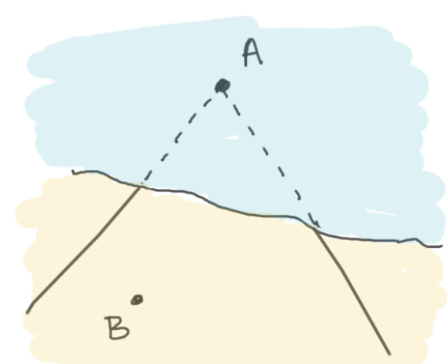
1. Calcular la distancia entre dos puntos, si hay un obstáculo que impide medirla de manera directa; por ejemplo, un lago.



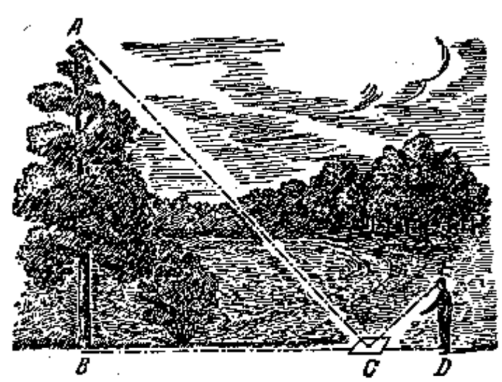
2. Calcular la distancia de un punto visible, pero inaccesible, a una recta. Por ejemplo, la distancia de un barco a la playa.



3. Un punto inaccesible e invisible A está dado por la intersección de dos rectas. Calcular su distancia a un punto accesible B.



4. Calcular la altura de un árbol con un espejo.



5. Sean A, B dos puntos en orillas opuestas de un río, como se muestra en la figura. ¿Dónde debemos construir un puente perpendicular al río para que el camino de A a B sea el más corto?

1.3. Puntos y rectas notables de un triángulo

Aquí recordaremos (o introduciremos, dependiendo de los conocimientos del lector) algunas nociones geométricas ligadas a los triángulos.

Definición 1.3: Mediatriz

La *mediatriz* de un segmento $\overline{AB}$ es la recta perpendicular a $\overline{AB}$ que pasa por su punto medio.

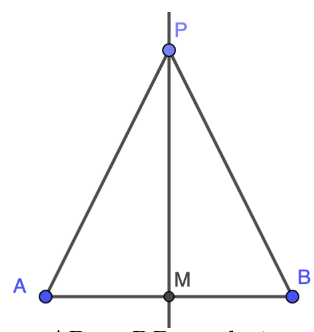
Una manera equivalente de definir a la mediatriz está dada por el siguiente resultado.

Proposición 1.2

La mediatriz de $\overline{AB}$ es el conjunto de puntos que equidistan de A y de B.

Demostración. Sean L la mediatriz de $\overline{AB}$, M el punto medio de L y $P \in L$. Si nos fijamos en los triángulos APM y MPB, tenemos:

$$\begin{aligned} AM &= MB; \\ MP &\text{ es un lado común;} \\ \measuredangle AMP &= \measuredangle PMB = 90°; \end{aligned}$$



Entonces $\triangle APM \cong \triangle MPB$, lo que implica que $AP = PB$; es decir, cualquier punto sobre la mediatriz equidista de los extremos del segmento.

Recíprocamente, sea P tal que $AP = PB$, y de nuevo, M es el punto medio de $\overline{AB}$. Si nos fijamos en los triángulos APM y MPB, tenemos:

$$\begin{aligned} AP &= PB; \\ AM &= MB; \\ MP &\text{ es un lado común.} \end{aligned}$$

Esto implica que $\triangle AMP \cong \triangle MPB$, lo que a su vez implica que $\measuredangle AMP = \measuredangle PMB$. Como

$$\measuredangle AMP + \measuredangle PMB = 180°,$$

tenemos $\measuredangle AMP = \measuredangle PMB = 90°$; por tanto, P está en la mediatriz de $\overline{AB}$. $\square$

Ahora usaremos este resultado, de la manera siguiente.

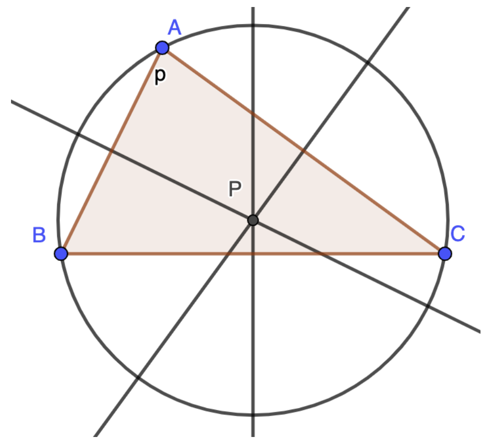
Proposición 1.3

Las tres mediatrices de los lados de un triángulo ABC son concurrentes.

Demostración. Sea P el punto de intersección de las mediatrices de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$. Como P está en la mediatriz de $\overline{AB}$, se tiene que $PA = PB$, y como P está en la mediatriz de $\overline{BC}$, $PB = PC$. Esto implica que $PA = PC$, de modo que P está en la mediatriz del segmento $\overline{AC}$. □

Definición 1.4: Circuncentro

El punto de intersección de las mediatrices se conoce como el *circuncentro* del triángulo $\triangle ABC$ y es el centro de la circunferencia circunscrita a dicho triángulo.



El segundo tipo de rectas notables en un triángulo serán las bisectrices. Recordemos que dos rectas que se cortan forman cuatro ángulos. Si fijamos uno de estos ángulos, cada uno de los ángulos adyacentes es suplementario al primero (es decir, sus medidas suman 180°), mientras que el ángulo restante es congruente con el original.

Definición 1.5: Bisectriz

Una *bisectriz* de un ángulo $\angle ABC$ es una recta que divide a $\angle ABC$ en dos ángulos iguales.

En otras palabras, una bisectriz es un eje de simetría de la figura formada por dos rectas que se cortan. Observemos que dicha figura tiene dos bisectrices, que podemos caracterizar como sigue.

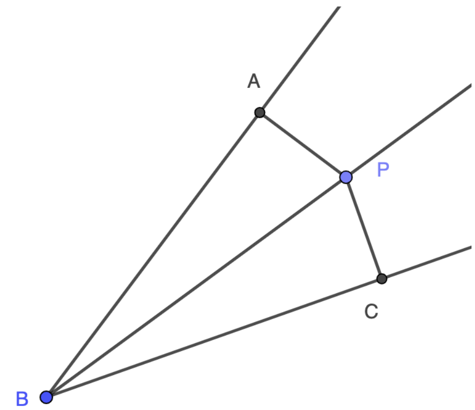
Proposición 1.4

Los puntos de una bisectriz de un ángulo equidistan de los lados del ángulo.

Demostración. Sea P un punto en una bisectriz del ángulo $\angle ABC$, donde A y C son los pies de las perpendiculares a los lados del ángulo. Nos fijamos en los triángulos ABP y PBC: Como

$$\measuredangle ABP = \measuredangle PBC \quad \text{y} \quad \measuredangle BAP = \measuredangle BCP = 90^\circ,$$

se tiene que $\measuredangle APB = \measuredangle BPC$; además, BP es un lado común a ambos triángulos, de modo que $\triangle ABP \cong \triangle BPC$, y por tanto $PA = PC$.



Recíprocamente, sea P un punto que equidista de los lados del ángulo; es decir, si A y C son los pies de las perpendiculares desde P a los lados del ángulo, entonces $PA = PC$. Por el teorema de Pitágoras,

$$AB = \sqrt{(PB)^2 - (PA)^2} = \sqrt{(PB)^2 - (PC)^2} = BC,$$

lo que implica que $\triangle ABP \cong \triangle BPC$ y por tanto $\measuredangle ABP = \measuredangle PBC$. □

En un triángulo ABC, usualmente se hace la distinción entre las bisectrices interiores y exteriores de los ángulos formados por los lados del triángulo. Las primeras son aquellas que cortan al interior del triángulo, mientras que las segundas no cortan a dicho interior.[1]

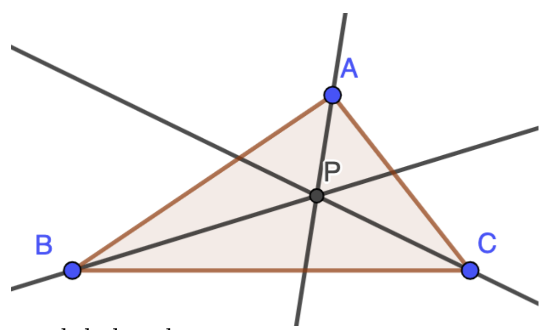
Proposición 1.5

Las bisectrices interiores de un triángulo son concurrentes.

Demostración. Sea P el punto de intersección de las bisectrices interiores de los ángulos BAC y CBA. Además, sean D, E y F los pies de las perpendiculares de P a $\overline{AC}$, $\overline{CB}$ y $\overline{BA}$, respectivamente. Como P está en la bisectriz de $\angle BAC$, $PD = PE$. Como P está en la bisectriz de $\angle CBA$, se tiene que $PD = PF$, de donde $PE = PF$, lo que nos dice que P está en la bisectriz de $\angle ACB$. Por lo tanto, las bisectrices del triángulo ABC concurren en P. □

Definición 1.6: Incentro

El punto de intersección de las bisectrices se conoce como el *incentro* del triángulo $\triangle ABC$ y es el centro de la circunferencia inscrita a dicho triángulo.



El tercer grupo de rectas notables que analizaremos es el de las alturas.

Definición 1.7: Altura

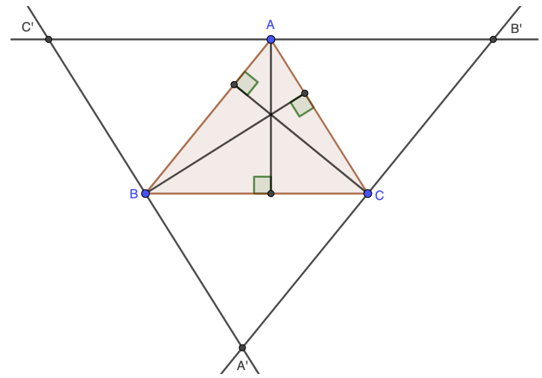
Una *altura* de un triángulo es una recta perpendicular a uno de los lados del triángulo que pasa por el vértice opuesto a dicho lado.

[1] Esta observación realmente no es precisa, pero servirá para nuestros fines.

Proposición 1.6

Las alturas de un triángulo son concurrentes.

Demostración. Para cada vértice del triángulo, construimos una recta que pase por él y sea paralela al lado opuesto al vértice. Esto nos produce un nuevo triángulo $A'B'C'$. El lector podrá demostrar con facilidad que al hacer esta construcción, las alturas del triángulo ABC son también las mediatrices del triángulo $A'B'C'$. Como ya mostramos que las mediatrices de un triángulo concurren, tenemos que las alturas del triángulo ABC concurren. □



Definición 1.8: Ortocentro

El punto de intersección de las alturas de un triángulo se conoce como el *ortocentro* del triángulo.

Finalmente, analizaremos a las medianas.

Definición 1.9: Mediana

Una *mediana* de un triángulo es un segmento que va de un vértice del triángulo al punto medio del lado opuesto a dicho vértice.

Proposición 1.7

Las tres medianas de un triángulo concurren.

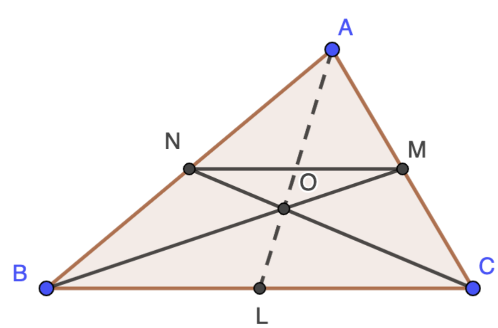
Demostración. Sean L, M y N los puntos medios de los segmentos $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$, respectivamente. De este modo, las medianas son los segmentos $\overline{AL}$, $\overline{BM}$ y $\overline{CN}$.

Demostraremos que $\overline{AL}$ corta a $\overline{BM}$ en un punto O tal que $BO = 2OM$. Con un razonamiento completamente análogo, se tendrá que $\overline{CN}$ corta a $\overline{BM}$ en un punto O' tal que $BO' = 2O'M$. Pero esto quiere decir que $O = O'$, de modo que O es justamente el punto de intersección de las tres medianas.

Para ver que $BO = 2OM$, trazamos el segmento $\overline{NM}$. Como

$$\begin{aligned} AN = NB &\Rightarrow 2AN = AB, \\ AM = MC &\Rightarrow 2AM = AC, \\ \measuredangle NAM &= \measuredangle BAC. \end{aligned}$$

Por el criterio LAL, los triángulos ANM y ABC son semejantes, lo que implica que $2NM = BC$ y que $\overline{NM}$ es paralelo a $\overline{BC}$.



Nos fijamos ahora en los triángulos OMN y OBC. Como $\overline{NM} \parallel \overline{BC}$,

$$\measuredangle OMN = \measuredangle OBC,$$
$$\measuredangle MNO = \measuredangle BCO,$$

de modo que por el criterio AA los triángulos OMN y OBC son semejantes y por tanto sus lados son proporcionales. Como ya vimos que $2NM = BC$, tenemos $2OM = BO$, que es lo queríamos mostrar. □

Definición 1.10: Baricentro

El punto de intersección de las medianas se llama *baricentro* o *gravicentro*.

1.4. Circunferencias

En esta sección veremos algunas propiedades de las circunferencias en el plano. Recordemos primero una definición.

Definición 1.11: Ángulo central

Un *ángulo central* de una circunferencia es el formado por dos semirrectas, con vértice en el centro de la circunferencia. Un *ángulo inscrito* en una circunferencia es aquel formado por dos semirrectas secantes, de modo que el vértice está sobre la circunferencia.

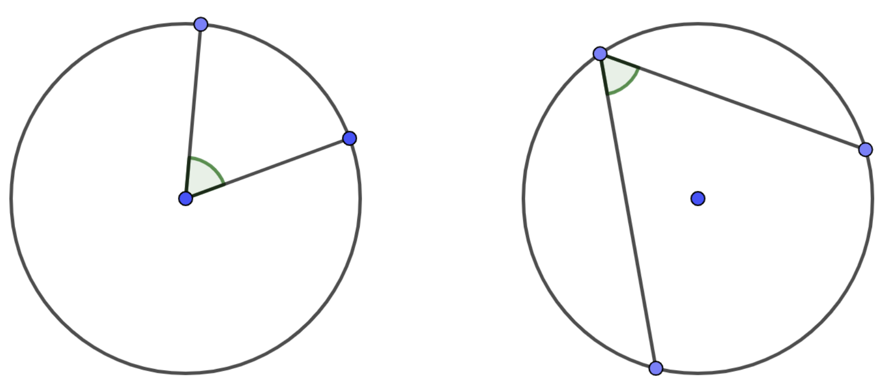


Figura 1.1: Ángulo inscrito y ángulo central

En los cursos de geometría elemental se muestra que dos ángulos centrales miden lo mismo si y sólo si subtienden el mismo arco de circunferencia. Ahora mostraremos una propiedad similar para los ángulos inscritos, pero antes veremos la relación entre las medidas de un ángulo central y un ángulo inscrito que subtienden el mismo arco.

Proposición 1.8

Un ángulo inscrito en una circunferencia mide la mitad que un ángulo central que subtiende el mismo arco.

Para mostrar esta proposición, veremos primero un caso particular que nos será de utilidad, en el caso que el ángulo central mide 180°:

Proposición 1.9

Un ángulo inscrito en una circunferencia que subtiende un diámetro es recto.

Demostración. En la figura, queremos mostrar que el ángulo BAC es recto.

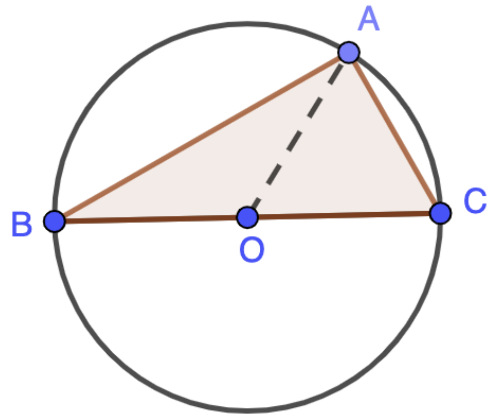
Observemos que los triángulos ABO y AOC son isósceles, pues dos de sus lados son radios de la circunferencia. Esto dice que

$$\measuredangle ABO = \measuredangle OAB,$$
$$\measuredangle CAO = \measuredangle OCA,$$

pero como la suma de los ángulos internos del triángulo ABC es 180°,

$$2\measuredangle OAB + 2\measuredangle CAO = 180°,$$

de donde se sigue lo afirmado. □



Podemos enunciar el resultado anterior como sigue: Si uno de los lados de un triángulo inscrito en una circunferencia es un diámetro, entonces el triángulo es rectángulo.

Con la misma figura anterior podemos mostrar otro caso particular de la proposición 1.8.

Proposición 1.10

La proposición 1.8 es válida cuando uno de los lados del ángulo central está alineado con uno de los lados del ángulo inscrito.

Demostración. Usaremos la propiedad de que un ángulo externo de un triángulo mide la suma de los dos ángulos internos no contiguos. Aplicando este resultado al triángulo ABO de la figura en la prueba de la proposición 1.9, tenemos que $\measuredangle AOC = \measuredangle OAB + \measuredangle ABO$; pero como $\triangle ABO$ es isósceles, tenemos que

$$\measuredangle AOC = 2\measuredangle ABO,$$

lo que demuestra la proposición 1.8 en este caso. □

Con este resultado ya podemos mostrar la relación general entre los ángulos centrales y los inscritos.

Demostración de la proposición 1.8. Dividiremos los casos faltantes en dos.

- Supongamos que O, el centro de la circunferencia, cae dentro del $\angle ABC$. Trazamos el diámetro $\overline{BD}$.

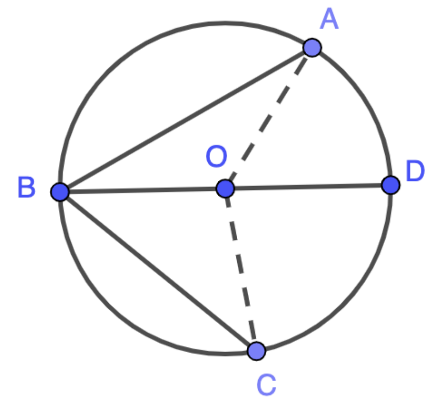
Por el caso particular anterior,

$$2\measuredangle ABD = \measuredangle AOD,$$
$$2\measuredangle DBC = \measuredangle DOC;$$

al sumar tenemos

$$2\measuredangle ABC = \measuredangle AOC,$$

lo que muestra el resultado en este caso.



- Ahora supongamos que O cae fuera de $\angle ABC$. El razonamiento es análogo; trazamos primero el diámetro $\overline{BD}$.

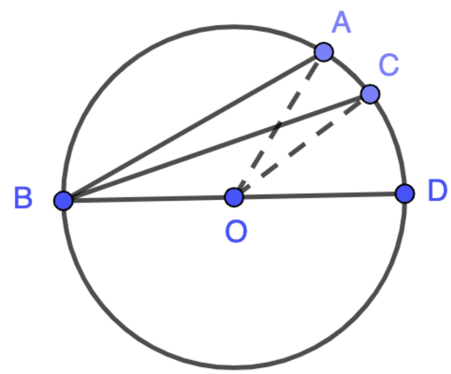
Por el caso particular anterior,

$$2\measuredangle ABD = \measuredangle AOD,$$
$$2\measuredangle CBD = \measuredangle COD;$$

al restar tenemos

$$2\measuredangle ABC = \measuredangle AOC,$$

lo que muestra el resultado en este último caso.



□

Como aplicación de la Proposición 1.8, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 1.1

Dos ángulos inscritos que subtienden el mismo arco miden lo mismo.

Demostración. Consideremos dos ángulos inscritos que subtienden el mismo arco. Entonces, cada uno de ellos mide la mitad del ángulo central que subtiende el mismo arco. Pero es claro que estos ángulos centrales son iguales y por tanto, miden lo mismo. La conclusión se obtiene de inmediato. □

Como una segunda consecuencia de lo anterior, consideremos un cuadrilátero $ABCD$. Decimos que el cuadrilátero es *cíclico* si sus cuatro vértices están en una misma circunferencia. En general, un polígono es cíclico si todos sus vértices pertenecen a una misma circunferencia. Un cuadrilátero es *convexo* si sus lados "no se cruzan"; en otras palabras, si los segmentos que forman sus lados sólo se pueden intersecar en vértices del cuadrilátero.

Proposición 1.11

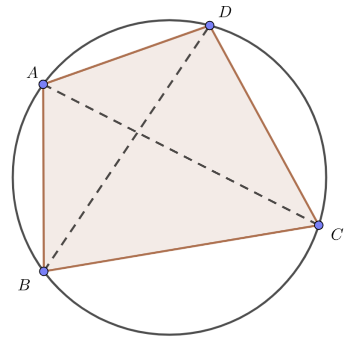
La suma de ángulos opuestos en un cuadrilátero cíclico convexo es $180°$.

Demostración. Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico convexo, donde los vértices se recorren en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Mostraremos que una pareja de ángulos opuestos suma 180° y la demostración será análoga para la otra pareja.

Queremos mostrar que $\measuredangle CDA + \measuredangle ABC = 180°$.
$\measuredangle BDA = \measuredangle BCA$ pues subtienden al arco AB.
$\measuredangle CDB = \measuredangle CAB$ pues subtienden al arco BC.
Por tanto,

$$\begin{aligned}\measuredangle CDA + \measuredangle ABC &= (\measuredangle CDB + \measuredangle BDA) + \measuredangle ABC\\ &= (\measuredangle CAB + \measuredangle BCA) + \measuredangle ABC\\ &= 180°,\end{aligned}$$

pues tenemos la suma de los ángulos internos del $\triangle ABC$. □



Para finalizar este capítulo, definiremos la potencia de un punto con respecto de una circunferencia.

Definición 1.12: Potencia de un punto

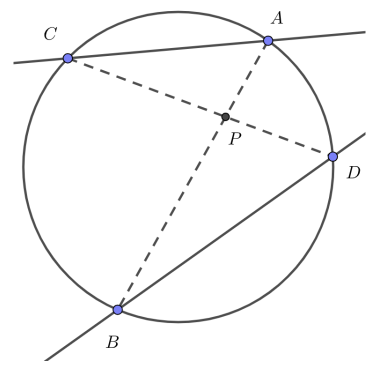
Consideremos una circunferencia y P un punto del plano. Sea L una línea recta que pasa por P y corta a la circunferencia en los puntos A y B. Entonces la *potencia* de P con respecto de la circunferencia es el producto de las longitudes PA y PB.

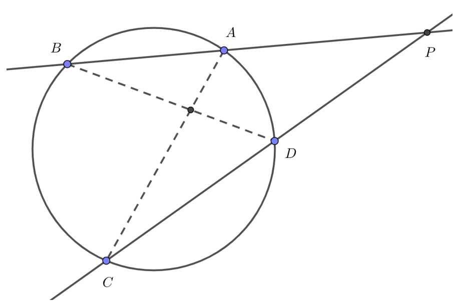
Para justificar esta definición, debemos mostrar que no depende de la recta que pasa por P; es decir, si nos fijamos en los puntos de intersección C y D de otra recta que pasa por P y la circunferencia, debemos mostrar que $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

Supongamos primero que el punto P está dentro de la circunferencia. En este caso, $\measuredangle ACD = \measuredangle ABD$, pues subtienden AD, mientras que $\measuredangle CPA = \measuredangle DPB$, pues son opuestos por el vértice.
Esto implica que los triángulos $\triangle PAC$ y $\triangle PBD$ son semejantes, de modo que

$$\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB},$$

de donde $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.





Por otro lado, si P está fuera de la circunferencia, entonces $\measuredangle ABD = \measuredangle ACD$, pues ambos abarcan el arco AD; además, $\angle BPC$ es común a los triángulos $\triangle ACP$ y $\triangle BPD$. Por lo tanto, los triángulos $\triangle ACP$ y $\triangle BPD$ son semejantes, de modo que $\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB}$, lo que implica que $PA \cdot PC = PB \cdot PD$.

El lector habrá observado que al definir la potencia de un punto P exterior a la circunferencia hay un "caso límite", a saber, cuando la recta que pasa por P es tangente a la circunferencia. En este caso, si T es el punto de tangencia de la recta, la potencia será igual a PT^2; invitamos al lector a que verifique que si tomamos cualquier otra recta que corte en dos puntos (distintos) A y B a la circunferencia, entonces $PA \cdot PB = PT^2$.

Episodio II

El ataque de las funciones trigonométricas

2.1. Funciones trigonométricas de ángulos agudos

Definición 2.1: Cateto Opuesto, Cateto Adyacente e Hipotenusa

Sea $\triangle ABC$ un triángulo rectángulo, y sea α cualquier ángulo agudo de $\triangle ABC$; por ejemplo, $\alpha = \angle BAC$. Diremos que

- El *cateto opuesto a* α es el lado que forma el ángulo recto y opuesto al ángulo α. Se denota por $c.o.$
- El *cateto adyacente a* α es el lado que forma el ángulo recto y es adyacente al ángulo α. Se denota por $c.a.$
- La *hipotenusa* es el lado mayor del triángulo opuesto al ángulo recto y se denota por h. Es importante notar que la hipotenusa no depende de la elección del ángulo.

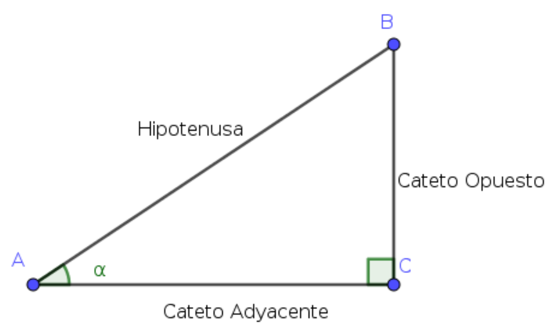


Figura 2.1

Una vez dada esta definición podemos preguntarnos qué relación hay entre los lados de un triángulo rectángulo. Es de nuestro interés estudiar los cocientes de dichos lados, conocidos con el nombre de funciones trigonométricas, las cuales se definen a continuación.

Definición 2.2: Funciones trigonométricas

Sea $\triangle ABC$ un triángulo rectángulo, y sea α cualquier ángulo agudo de $\triangle ABC$ (por ejemplo, $\alpha = \angle BCA$). Las *funciones trigonométricas* de α están dadas por

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\alpha &= \frac{c.o}{h}, & \csc\alpha &= \frac{h}{c.o}, \\ \cos\alpha &= \frac{c.a}{h}, & \sec\alpha &= \frac{h}{c.a}, \\ \tan\alpha &= \frac{c.o}{c.a}, & \csc\alpha &= \frac{c.a}{c.o}. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.1

Por ejemplo, en el triángulo de la figura 2.2 podemos considerar a los ángulos α y β y dar las funciones trigonométricas correspondientes a cada uno, como sigue.

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\alpha &= \frac{a}{c}, \ \cot\alpha = \frac{b}{a}, & \operatorname{sen}\beta &= \frac{b}{c}, \ \cot\beta = \frac{a}{b}, \\ \cos\alpha &= \frac{b}{c}, \ \sec\alpha = \frac{c}{b}, & \cos\beta &= \frac{a}{c}, \ \sec\beta = \frac{c}{a}, \\ \tan\alpha &= \frac{a}{b}, \ \csc\alpha = \frac{c}{a}, & \tan\beta &= \frac{b}{a}, \ \csc\beta = \frac{c}{b}. \end{aligned}$$

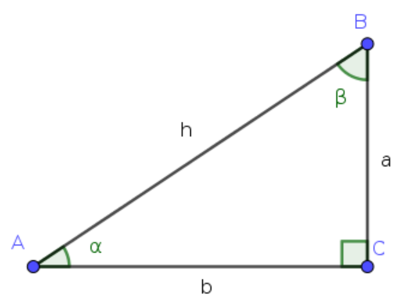


Figura 2.2

Podemos notar que hay una relación entre las funciones trigonométricas de α y de β. Éstas son algunas de las *identidades trigonométricas* que veremos más adelante.

2.1.1. Ángulos notables

Ahora que tenemos las definiciones de cada una de las funciones trigonométricas, podemos preguntarnos cómo calcular el seno de un ángulo particular. La respuesta no es tan sencilla, pero podemos comenzar con un determinado conjunto de ángulos a los cuales llamaremos *ángulos notables*, es decir los ángulos de $30°$, $45°$ y $60°$.

Para las funciones de los ángulos de $30°$ y $60°$, sea $\triangle ABC$ un triángulo equilátero cuyos lados son de magnitud igual a 2; al ser un triángulo equilátero también se tiene que sus ángulos son iguales a $60°$. Sea D el pie de la perpendicular que pasa por A. El segmento $\overline{AD}$ parte al triángulo $\triangle ABC$ en dos triángulos congruentes, como se muestra en la figura 2.3.

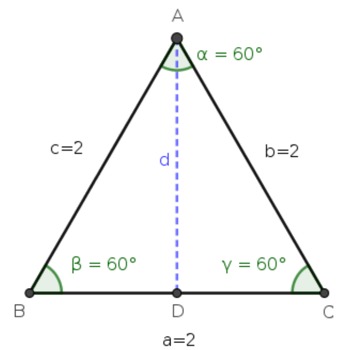


Figura 2.3

Para nuestro análisis consideremos sólo el triángulo $\triangle ABD$ en la figura 2.4. Por el teorema de Pitágoras se tiene que $d = \sqrt{3}$, así,

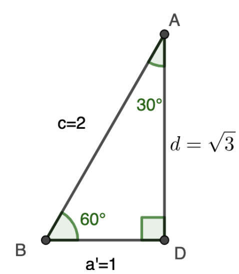


Figura 2.4

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 30^\circ &= \frac{1}{2}, & \operatorname{sen} 60^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos 30^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{2}, & \cos 60^\circ &= \frac{1}{2}, \\ \tan 30^\circ &= \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, & \tan 60^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Para las funciones trigonométricas del ángulo de 45°, sea $\triangle ABC$ el triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos miden 1. Por el teorema de Pitágoras se tiene que $c = \sqrt{2}$, como se muestra en la figura 2.5. Así,

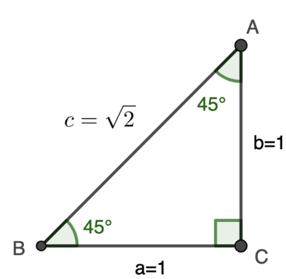


Figura 2.5

$$\operatorname{sen} 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \tan 45^\circ = \frac{1}{1} = 1.$$

Con las construcciones hechas en las figuras 2.4 y 2.5 será fácil para el lector obtener el resto de las funciones trigonométricas de los ángulos notables. Aunque en el análisis usamos ángulos medidos en grados, lo recomendable es el uso de *radianes*, pues es una forma más natural (y la más usada) de representar ángulos.

2.1.2. Radianes

Sea G un ángulo expresado en grados (sistema sexagesimal) y R el mismo ángulo expresado en radianes (sistema cíclico). La relación entre G y R está dada por

$$\frac{G}{180^\circ} = \frac{R}{\pi}. \tag{2.1}$$

Así, para convertir un ángulo de grados a radianes, basta despejar R en (2.1), de tal forma que

$$R = \frac{G}{180^\circ}\pi. \tag{2.2}$$

Previamente calculamos las funciones trigonométricas de los ángulos notables 30°, 45° y 60°. Como mencionamos anteriormente, será de nuestro interés expresar los ángulos en radianes. Comenzaremos expresando los ángulos notables en radianes.

$$\begin{aligned} G = 30^\circ \quad &\Rightarrow \quad R = \frac{30^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{\pi}{6}. \\ G = 45^\circ \quad &\Rightarrow \quad R = \frac{45^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{\pi}{4}. \\ G = 60^\circ \quad &\Rightarrow \quad R = \frac{60^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Es importante recomendar al lector comience a familiarizarse con el uso de esta notación ya que le será de mucha utilidad a lo largo de su formación académica.

2.2. Identidades trigonométricas

Las identidades trigonométricas se clasifican en varios tipos dependiendo de su forma. Es importante aclarar que estas identidades no se cumplen para todo número real y se debe tener cuidado al hacer uso de ellas. A continuación daremos la clasificación y demostración de ellas.

Proposición 2.1: Identidades reciprocas

Las funciones trigonométricas se pueden expresar como el recíproco de funciones trigonométricas que están en función del mismo ángulo. Dichas identidades son las siguientes:

a) $\operatorname{sen} x \cdot \csc x = 1$.

b) $\cos x \cdot \sec x = 1$.

c) $\tan x \cdot \cot x = 1$.

Demostración. Por definición se tiene que $\operatorname{sen} x = \frac{c.o.}{h}$ y $\csc x = \frac{h}{c.o}$. Sabemos que $co \cdot h \neq 0$ por lo que

$$\operatorname{sen} x \cdot \csc x = \frac{c.o.}{h} \cdot \frac{h}{c.o} = 1.$$

La prueba de b) y c) es análoga. $\square$

Proposición 2.2: Identidades cociente

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}; \quad \cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}.$$

Demostración. Para la tangente se tiene que

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{\frac{c.o.}{h}}{\frac{c.a.}{h}} = \frac{(c.o.)(h)}{(c.a.)(h)}$$

Como $(c.a.)(h) \neq 0$ (lo que implica a su vez que $h \neq 0$), entonces

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{c.o.}{c.a.} = \tan x.$$

Para la cotangente la prueba se puede hacer de manera análoga o bien podemos usar el hecho que $\cot x = \frac{1}{\tan x}$; así,

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}} = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}.$$ □

Proposición 2.3: Identidades Pitagóricas

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1; \quad \tan^2 x + 1 = \sec^2 x; \quad \cot^2 x + 1 = \csc^2 x.$$

Demostración. Sea $\mathcal{C}$ la circunferencia con centro en el origen O y radio igual a 1 (a partir de ahora será llamada *circunferencia unitaria*) y sea P un punto sobre $\mathcal{C}$. Notemos que el segmento $\overline{OP}$ tiene magnitud igual a 1. Sea también D el pie de la altura que pasa por P sobre el eje de las abscisas.

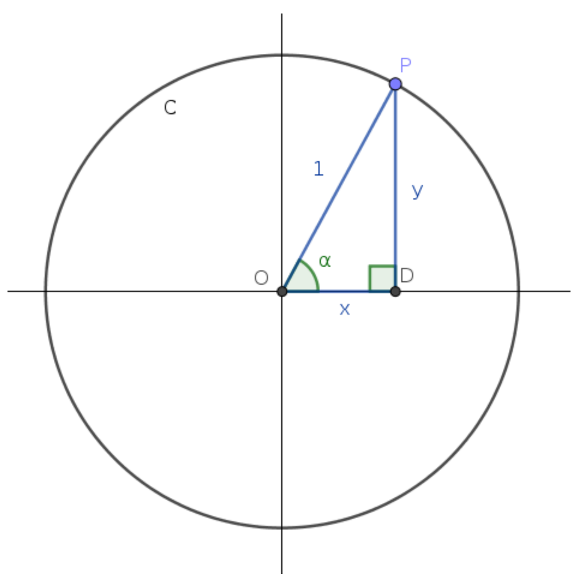


Figura 2.6

Con esta construcción se genera el triángulo rectángulo $\triangle POD$, donde $\alpha = \angle POD$. En este triángulo se tiene lo siguiente:

$$\operatorname{sen} \alpha = y, \quad \cos \alpha = x. \tag{2.3}$$

Por otro lado, por el teorema de Pitágoras se tiene que

$$x^2 + y^2 = 1, \tag{2.4}$$

Sustituyendo (2.3) en (2.4) se tiene que

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \tag{2.5}$$

Es importante aclarar que esta construcción funciona para cualquier ángulo, no necesariamente agudo. Más adelante hablaremos de lo que sucede cuando α está en cualquiera de los cuatro cuadrantes.

Ahora, tomemos la ecuación (2.5) y multipliquemos ambos lados por $\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 \alpha}$:

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \alpha}\left(\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha\right) = 1\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \alpha}\right),$$
$$\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \alpha}.$$

Por las identidades recíprocas y de cociente tenemos que

$$\tan^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha. \tag{2.6}$$

De manera análoga se muestra que

$$\cot^2 \alpha + 1 = \csc^2 \alpha. \tag{2.7}$$

La prueba se deja al lector. □

Una de las características más importantes de las funciones trigonométricas es el hecho que estas funciones no son *transformaciones lineales* (concepto que más adelante definiremos), es decir, dados dos ángulos α y β, puede ocurrir que

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) \neq \operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta.$$

¿Cómo se puede determinar el seno de la suma (o resta) de ángulos? Para responder esta pregunta consideremos la figura 2.7, donde

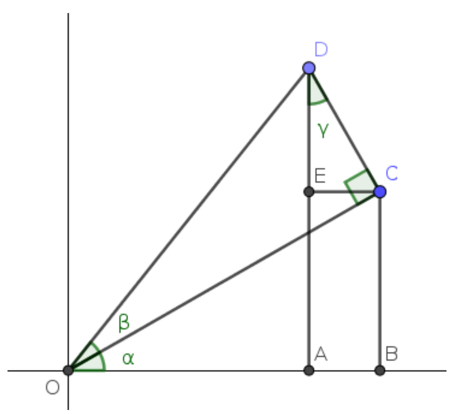


Figura 2.7

- $\overline{OB} \perp \overline{BC}$ y $\overline{OC} \perp \overline{DC}$.
- $\overline{AD} \perp \overline{OA}$.
- $\overline{DE} \perp \overline{CE}$.

- $\overline{AE} = \overline{BC}$ y $\overline{AB} = \overline{CE}$.

Por un lado tenemos que

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \frac{\overline{AE}+\overline{ED}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{OD}} + \frac{\overline{ED}}{\overline{OD}}.$$

Por otro lado podemos calcular las funciones trigonométricas de α y β. Para ello se dejará al lector probar que en la figura 2.7, $\gamma = \alpha$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\alpha &= \frac{\overline{BC}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{CD}}; && \text{la última igualdad se da ya que } \gamma=\alpha;\\
\cos\alpha &= \frac{\overline{OB}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{CD}}; && \text{la última igualdad se da ya que } \gamma=\alpha;\\
\operatorname{sen}\beta &= \frac{\overline{CD}}{\overline{OD}};\\
\cos\beta &= \frac{\overline{OC}}{\overline{OD}}.
\end{aligned}$$

Ahora calculemos las expresiones de $\operatorname{sen}\alpha\cos\beta$ y $\operatorname{sen}\beta\cos\alpha$:

$$\begin{aligned}
(\operatorname{sen}\alpha)(\cos\beta) &= \left(\frac{\overline{AE}}{\overline{OC}}\right)\left(\frac{\overline{OC}}{\overline{OD}}\right) = \frac{\overline{AE}}{\overline{OD}},\\
(\operatorname{sen}\beta)(\cos\alpha) &= \left(\frac{\overline{CD}}{\overline{OD}}\right)\left(\frac{\overline{ED}}{\overline{CD}}\right) = \frac{\overline{ED}}{\overline{OD}}.
\end{aligned}$$

Sumando estas expresiones se tiene que

$$\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha = \frac{\overline{AE}}{\overline{OD}} + \frac{\overline{ED}}{\overline{OD}}.$$

Es decir

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha. \tag{2.8}$$

Usando la construcción de la figura 2.7, se puede probar de manera análoga que

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta. \tag{2.9}$$

Una vez hecho esto, podemos enunciar el siguiente teorema

Teorema 2.1: Suma y diferencia de ángulos

ean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, el seno y el coseno de la suma o diferencia de ángulos están dados por las siguientes expresiones:

$$\operatorname{sen}(\alpha\pm\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta \pm \operatorname{sen}\beta\cos\alpha. \tag{2.10}$$
$$\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta. \tag{2.11}$$

La prueba de las expresiones $\operatorname{sen}(\alpha-\beta)$ y $\cos(\alpha-\beta)$ se dejan al lector.

Corolario 2.1: Identidades de doble ángulo

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces sucede que

$$\operatorname{sen}(2\alpha) = 2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha; \tag{2.12}$$
$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha; \tag{2.13}$$
$$\operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha; \tag{2.14}$$
$$\cos^2\alpha = 1 - \operatorname{sen}^2\alpha. \tag{2.15}$$

Demostración. Consideremos la ecuación (2.8) y hagamos $\beta = \alpha$, entonces

$$\operatorname{sen}(\alpha + \alpha) = \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha.$$

Así

$$\operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha.$$

Si ahora consideramos la ecuación (2.9) y también hacemos $\alpha = \beta$

$$\cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\alpha,$$

por lo que

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha.$$

Una vez dadas estas identidades, podemos "jugar" un poco más con ellas. Tomemos la ecuación (2.5) y despejemos de la siguiente manera:

$$\operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha;$$
$$\cos^2\alpha = 1 - \operatorname{sen}^2\alpha.$$

Sustituyendo (2.14) en (2.13) se tiene que

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \left(1 - \cos^2\alpha\right) = 2\cos^2\alpha - 1;$$

despejando,

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\alpha).$$

Si ahora sustituimos (2.15) en (2.13), de manera análoga se obtiene

$$\operatorname{sen}^2\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\alpha).$$

□

2.3. Triángulos oblicuángulos

2.3.1. Ley de senos

Hasta ahora hemos definido y usado las funciones trigonométricas sobre triángulos rectángulos, pero el uso de estas funciones no se restringe sólo a estos triángulos. Podemos aplicar las funciones trigonométricas para la resolución de triángulos oblicuángulos, es decir, aquellos que no son rectángulos.

Sea $\triangle ABC$ un triángulo oblicuángulo como se muestra en la figura 2.8 y sea D el pie de la altura sobre el lado $\overline{BC}$. Los triángulos $\triangle ABD$ y $\triangle ADC$ son rectángulos, entonces

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{d}{c} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\gamma = \frac{d}{b}.$$

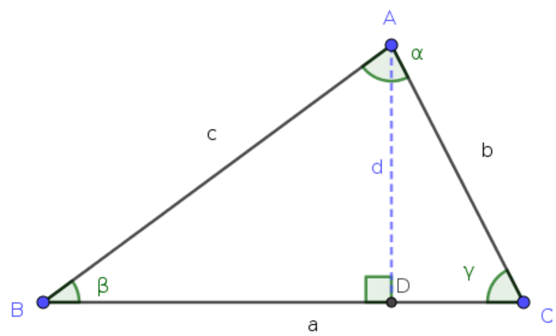


Figura 2.8

Despejando d de ambas expresiones e igualando se tiene que

$$c \operatorname{sen} \beta = b \operatorname{sen} \gamma,$$

es decir

$$\frac{\operatorname{sen} \beta}{b} = \frac{\operatorname{sen} \gamma}{c}. \tag{2.16}$$

Si trazamos la altura sobre el lado $\overline{AB}$, de manera análoga tendremos que

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{b}. \tag{2.17}$$

Así, por (2.16) y (2.17) se tiene que

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{b} = \frac{\operatorname{sen} \gamma}{c}. \tag{2.18}$$

A (2.18) se le conoce como la *ley de senos*. Es importante notar que para poder usar la ley de senos debemos conocer dos ángulos y un lado que sea opuesto a uno de los ángulos o bien, un ángulo y dos lados tal que uno de ellos sea opuesto al ángulo.

Pero ¿qué pasa en el caso que no se cumplan las condiciones anteriores en un triángulo oblicuángulo? Por ejemplo, si conocemos sus tres lados pero no sus ángulos. Evidentemente la ley de senos no nos será de ayuda.

2.3.2. Ley de cosenos

Sea $\triangle ABC$ un triángulo oblicuángulo y sea D el pie de la altura sobre el lado $\overline{BC}$; llamemos x al segmento $\overline{DC}$ y por tanto, el segmento $\overline{BD}$ será igual a $a - x$ como se muestra en la figura 2.9. Entonces, por el teorema de Pitágoras en el triángulo $\triangle ABD$ se tiene que

$$c^2 = d^2 + (a - x)^2,$$

desarrollando

$$c^2 = d^2 + a^2 + x^2 - 2ax. \tag{2.19}$$

Por otro lado, en el triángulo $\triangle ADC$ se tiene que

$$x^2 = b^2 - d^2. \tag{2.20}$$

Sustituyendo (2.20) en (2.19) se tiene que

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ax. \tag{2.21}$$

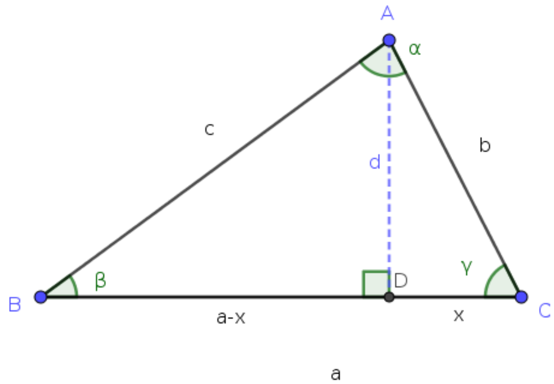


Figura 2.9

Finalmente del triángulo $\triangle ADC$ se obtiene que

$$x = b\cos\gamma \tag{2.22}$$

Así

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma. \tag{2.23}$$

De manera análoga se puede mostrar que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha;$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta.$$

Esto último se deja como ejercicio al lector. Las tres identidades anteriores se conocen como la *ley de cosenos*.

2.4. Resumen

- Definición de las funciones trigonométricas

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{c.o}{h}, \qquad \csc\alpha = \frac{h}{c.o},$$
$$\cos\alpha = \frac{c.a}{h}, \qquad \sec\alpha = \frac{h}{c.a},$$
$$\tan\alpha = \frac{c.o}{c.a}, \qquad \csc\alpha = \frac{c.a}{c.o}.$$

- Grados y radianes

$$\frac{G}{180^\circ} = \frac{R}{\pi}.$$

- Identidades trigonométricas
  - Recíprocas

$$\operatorname{sen}x \cdot \csc x = 1.$$
$$\cos x \cdot \sec x = 1.$$
$$\tan x \cdot \cot x = 1.$$

  - De cociente

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}; \quad \cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}.$$

  - Pitagóricas

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$
$$\tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha.$$
$$\cot^2\alpha + 1 = \csc^2\alpha.$$

  - Suma y resta de ángulos

$$\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta \pm \operatorname{sen}\beta\cos\alpha.$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta.$$

- Doble ángulo

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(2\alpha) &= 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha. \\ \cos(2\alpha) &= \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2\alpha &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\alpha). \\ \cos^2\alpha &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\alpha). \end{aligned}$$

- Ley de senos

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c}.$$

- Ley de cosenos

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha. \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta. \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma. \end{aligned}$$

Episodio III

La venganza de los sistemas de coordenadas

Es relativamente conocido que uno de los grandes triunfos de la geometría analítica es el uso de coordenadas, para transformar problemas geométricos en problemas analítico-algebraicos. En este capítulo presentaremos los sistemas de coordenadas más usuales en el plano y el espacio, usándolos para describir diversos conjuntos en estos ambientes.

3.1. Coordenadas cartesianas en el plano

En esta primera sección recordamos el sistema de coordenadas más conocido, el de las coordenadas cartesianas en el plano. Aprovechamos para expresar algunos conceptos geométricos en este sistema.

Consideramos dos copias de la recta numérica real, perpendiculares entre sí, de modo que los orígenes coincidan. Para cada punto P en el plano, consideramos sus proyecciones ortogonales sobre cada una de estas rectas, obteniendo así las *coordenadas cartesianas* (x, y). Puesto que el lector debe conocerlas, no haremos un estudio más detallado de éstas por el momento.

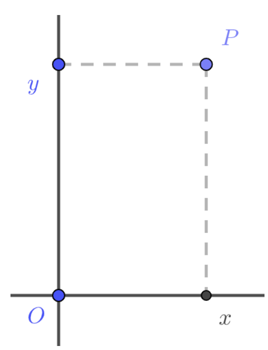


Figura 3.1: Coordenadas cartesianas en el plano.

Recordemos que en el capítulo I presentamos dos conceptos geométricos, a saber, la distancia euclidiana y el de simetría. Ahora los expresaremos en coordenadas cartesianas.

Definición 3.1: Distancia Euclidiana

Sean A y B dos puntos en el plano. Si sus coordenadas cartesianas son (x_1, y_1) y (x_2, y_2), respectivamente, entonces la *distancia euclidiana* $d(A, B)$ está dada por

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{3.1}$$

Ahora podemos demostrar el teorema 1.1 que enunciamos antes.

Teorema 3.1: Propiedades de la distancia

La distancia euclidiana satisface las siguientes propiedades.

- Para cualesquiera puntos A, B en el plano, $d(A, B) \geq 0$, y $d(A, B) = 0$ si y sólo si $A = B$.
- *Simetría.* Para cualesquiera puntos A, B en el plano, $d(A, B) = d(B, A)$.
- *Desigualdad del triángulo.* Para cualesquiera puntos A, B, C en el plano,

$$d(A, B) \leq d(A, C) + d(C.B). \tag{3.2}$$

Demostración. Demostraremos cada inciso por separado.

Como $d(A.B)$ está definida en términos de una raíz, tenemos que $d(A, B) \geq 0$. SI $d(A, B) = 0$, entonces tenemos que

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = 0;$$

pero como ambas cantidades están elevadas al cuadrado, deben ser positivas o cero. Si alguna de ellas fuese positiva, entonces toda la suma sería positiva. Entonces $x_2 - x_1 = y_2 - y_1 = 0$, lo que implica que las coordenadas de A son iguales a las coordenadas de B, de donde $A = B$.

- Tenemos las siguientes igualdades:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = d(B, A).$$

- La parte delicada es precisamente mostrar la desigualdad del triángulo. Denotamos las coordenadas cartesianas de C por (x_3, y_3). Además, para abreviar la notación, emplearemos x_{12} para denotar la diferencia $(x_1 - x_2)$, x_{13} para $(x_1 - x_3)$ y en general x_{ij} para $(x_i - x_j)$. Así, por ejemplo,

$$d(A, B) = \sqrt{x_{12}^2 + y_{12}^2},$$

Demostrar (3.2) es equivalente a mostrar que

$$\sqrt{x_{12}^2 + y_{12}^2} \leq \sqrt{x_{13}^2 + y_{13}^2} + \sqrt{x_{32}^2 + y_{32}^2}.$$

Elevamos una primera vez al cuadrado, obteniendo

$$x_{12}^2 + y_{12}^2 \leq x_{13}^2 + y_{13}^2 + 2\sqrt{x_{13}^2 + y_{13}^2}\sqrt{x_{32}^2 + y_{32}^2} + x_{32}^2 + y_{32}^2.$$

Escribimos las diferencias del lado izquierdo como $x_{12} = x_{13}+x_{32}$ y $y_{12} = y_{13}+y_{32}$; desarrollamos los cuadrados del lado izquierdo y eliminamos los términos que aparecen a ambos lados de la desigualdad para obtener

$$x_{13}x_{32} + y_{13}y_{32} \leq \sqrt{x_{13}^2 + y_{13}^2}\sqrt{x_{32}^2 + y_{32}^2}.$$

Elevamos una segunda vez al cuadrado y de nuevo eliminamos los términos que aparece a ambos lados, de donde

$$2x_{13}x_{32}y_{13}y_{32} \leq x_{13}^2 y_{32}^2 + x_{32}^2 y_{13}^2.$$

Para finalizar la demostración, pasamos el término del lado izquierdo al derecho y observamos que la expresión resultante es un cuadrado perfecto:

$$x_{13}^2 y_{32}^2 - 2x_{13}x_{32}y_{13}y_{32} + x_{32}^2 y_{13}^2 = (x_{13}y_{32} - x_{32}y_{13})^2,$$

que siempre es no negativa. Cada uno de los pasos que realizamos es reversible, de modo que en efecto se cumple la desigualdad (3.2). □

También en el capítulo I vimos los conceptos de punto simétrico de otro, con respecto de una recta o con respecto de un punto. En coordenadas cartesianas, esto se ve como sigue:

Ejemplo 3.1

Consideremos un punto P con coordenadas (x, y). Entonces

- El simétrico de P con respecto del eje x es el punto con coordenadas $(x, -y)$.
- El simétrico de P con respecto del eje y es el punto con coordenadas $(-x, y)$.
- El simétrico de P con respecto del origen O es el punto con coordenadas $(-x, -y)$.

Recordemos que una figura en el plano es simétrica con respecto de una recta L (o con respecto de un punto O) si para cada punto P en la figura, su simétrico P' con respecto de L (o con respecto del punto O) está también en la figura. En coordenadas cartesianas, tenemos lo siguiente.

Proposición 3.1

Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^2$ es

- simétrico con respecto del eje x si para cada $(x, y) \in A$ se tiene que $(x, -y) \in A$.
- simétrico con respecto del eje y si para cada $(x, y) \in A$ se tiene que $(-x - y) \in A$.
- simétrico con respecto del origen O si para cada $(x, y) \in A$ se tiene que $(-x, -y) \in A$.

El lector puede demostrar fácilmente esta proposición a partir de la definición 1.2. A continuación veremos algunos ejemplos de cómo verificar, usando coordenadas, si un conjunto es simétrico con respecto de algún eje, o con respecto del origen.

Ejemplo 3.2

Consideremos una parábola en el plano cartesiano; en forma explícita, sea

$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 \}.$$

Es fácil verificar que el conjunto A no es simétrico con respecto del eje x; por ejemplo, si consideramos el punto $(1, 1)$, entonces $(1, 1) \in A$, pero su simétrico con respecto del eje x, es decir, el punto $(1, -1)$, no pertenece a A. De manera análoga, tampoco es simétrico con respecto del origen, pues si tomamos el mismo punto $(1, 1)$, su simétrico $(-1, -1)$ con respecto del origen no está en A.
Por otro lado, para ver si A es simétrico con respecto del eje y, consideramos un punto arbitrario $(x, y) \in A$ y nos fijamos en su simétrico con respecto del eje y, a saber, el punto $(-x, y)$. Entonces

$$(-x, y) \in A \Leftrightarrow y = (-x)^2 \Leftrightarrow y = x^2,$$

pero esto último se cumple porque hemos supuesto que $(x, y) \in A$. Como el punto era arbitrario, A es simétrico con respecto del eje y.

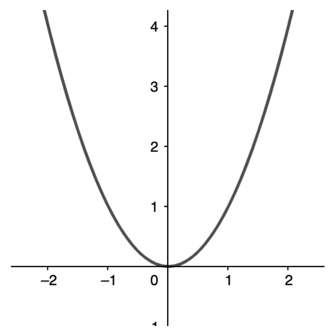


Figura 3.2: Esta parábola es simétrica con respecto del eje y.

Ejemplo 3.3

Consideremos la gráfica de la función seno, es decir,

$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \operatorname{sen} x \}.$$

Comprobemos que esta gráfica es simétrica con respecto del origen. Para esto, consideramos $(x, y) \in A$ y su simétrico con respecto del origen, $(-x, -y)$. Entonces

$$(-x, -y) \in A \Leftrightarrow -y = \operatorname{sen}(-x);$$

pero la función seno satisface $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$; de modo que lo anterior se cumple si y sólo si $y = \operatorname{sen} x$. Pero esto último es cierto, porque habíamos supuesto que $(x, y) \in A$.

3.2. Coordenadas polares

Ahora introduciremos otro sistema de coordenadas en el plano. Aunque es probable que algunos de ustedes ya las conozcan, será importante profundizar en su estudio.

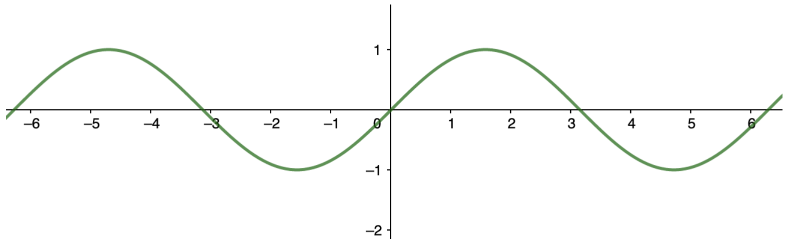


Figura 3.3: La gráfica de la función seno.

Definición 3.2: Coordenadas polares

Fijemos un punto en el plano, que se llamará el *polo*. Tracemos una semirrecta que parte del polo, a la cual llamaremos el *eje polar*. Dado un punto P en el plano, sus *coordenadas polares* (r, θ) están dadas como sigue:

- r es la distancia del punto P al polo;
- θ es el ángulo que forma la semirrecta que va del polo a P con el eje polar. Los ángulos positivos se medirán en el sentido *antihorario*; es decir, en la dirección contraria a la que giran las manecillas del reloj, mientras que los ángulos negativos se medirán en sentido *horario*.

Observación 3.1

Aunque en la definición hemos establecido que r es una distancia, de modo que $r \geq 0$, por el momento, y sobre todo al estudiar ecuaciones en coordenadas polares, también permitiremos el uso de signos negativos en la coordenada r, midiendo estas coordenadas en el sentido contrario al que apunta una semirrecta que forma el ángulo θ con el eje polar.

Ejemplo 3.4

Veamos varios ejemplos de puntos en el plano, con su representación en coordenadas polares.

- El polo de este sistema de coordenadas se puede representar como $(0, \theta)$, donde θ puede tomar cualquier valor real.
- El punto con coordenadas polares $(1, 0)$ está a una unidad de distancia del polo, sobre el eje polar. Observemos que este punto también se puede representar como $(1, 2\pi)$, $(1, 4\pi)$ o, en general, como $(1, 2\pi k)$, donde $k \in \mathbb{Z}$. Para ilustrar el uso de r negativos, observe que el mismo punto se puede representar como $(-1, \pi)$, o en general, como $(-1, \pi + 2\pi k)$ con $k \in \mathbb{Z}$.
- En la figura anexa representamos los puntos $(\pm 2, \pm\frac{\pi}{3})$ para todas las combinaciones de signos.

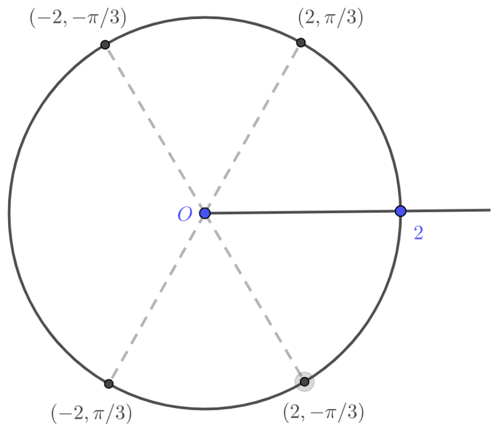


Figura 3.4: Los puntos $(\pm 2, \pm\frac{\pi}{3})$ en un sistema de coordenadas polares.

Los ejemplos que hemos visto muestran un pequeño problema de las coordenadas polares. Recordemos que, en el caso de las coordenadas cartesianas, a cada punto del plano le corresponde un único par de coordenadas (x, y) y, recíprocamente, a cada par de coordenadas le corresponde un único punto en el plano. Aunque cada par de coordenadas (r, θ) representa un único punto, cada punto queda representado por una infinidad de parejas de coordenadas. Incluso restringiendo r a los reales no negativos, esta situación persiste. En ocasiones, esto puede representar un problema, de modo que tendríamos que restringir los valores de (r, θ) de manera adecuada. Pero como veremos al estudiar algunas curvas en coordenadas polares, esta libertad hasta nos puede ayudar en algunos casos.

Ejemplo 3.5

Veremos ahora algunos ejemplos de conjuntos en el plano, representados en coordenadas polares:

- $A = \{\ (r, \theta) \mid |r| < 2\ \}$.
- $B = \{\ (r, \theta) \mid |r| \leq 2\ \}$.
- $C = \{\ (r, \theta) \mid |r| > 3\ \}$.
- $D = \{\ (r, \theta) \mid |r| \geq 3\ \}$.

En todos los casos, observemos que sólo estamos poniendo restricciones a los valores de la coordenada r y no a la coordenada θ.
En el caso del conjunto A, recordemos que $|r| < 2$ si y sólo si $-2 < r < 2$, de modo que para cada θ fija, nos fijamos en los puntos que están a distancia menor que 2 del polo, sin incluir a los puntos que están justo a distancia 2 del polo. Esto lo indicaremos por medio de una línea punteada.
Para B, la única diferencia con A es que ahora sí incluimos los puntos de la circunferencia $|r| = 2$, lo que indicamos por medio de una línea continua.
Para C, ahora nos fijamos en los puntos que están a una distancia mayor que 3 del polo. De nuevo, indicamos que esto no incluye a los puntos de la circunferencia $|r| = 3$ por medio de una línea punteada.
Finalmente, D es similar a C, pero ahora incluyendo los puntos de la circunferencia.
La figura 3.5 ilustra cada uno de estos conjuntos.

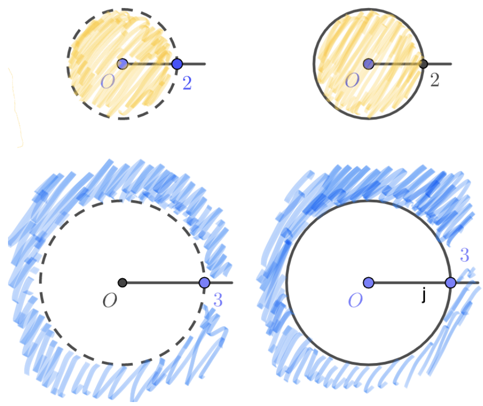


Figura 3.5: Los conjuntos del ejemplo 3.5.

Ejemplo 3.6

Veamos ahora algunos ejemplos con diversas condiciones sobre las coordenadas.

- $E = \{ \ (r, \theta) \mid r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \pi \ \}$.
- $F = \{ \ (r, \theta) \mid \frac{\pi}{6} < \theta \leq \frac{\pi}{3} \ \}$.
- $G = \{ \ (r, \theta) \mid r > 0, \theta = 0 \ \}$.
- $H = \{ \ (r, \theta) \mid r \geq 0, 0 < \theta < 2\pi \ \}$.

El conjunto E se puede describir como los puntos que están en el llamado semiplano superior, incluyendo los puntos de su orilla (o "frontera", como le llamaremos de manera más formal).
Observemos que para el conjunto F estamos permitiendo que r tome valores tanto positivos como negativos y que estamos considerando el ángulo $\frac{\pi}{3}$, no así el ángulo $\frac{\pi}{6}$.
G no es otra cosa que la parte positiva del eje polar; es decir, sin considerar el polo.
Finalmente, H es precisamente el complemento de G.
El lector puede ver estos conjuntos en la figura 3.6..

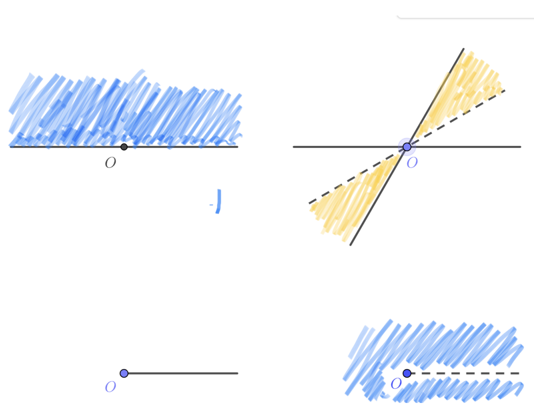


Figura 3.6: Los conjuntos del ejemplo 3.6.

Ahora revisaremos los conceptos de distancia y simetría que vimos en el caso de las coordenadas cartesianas, en el contexto de las coordenadas polares.

Proposición 3.2: Distancia polar

Sean A y B dos puntos en el plano. Si sus coordenadas polares son (r_1, θ_1) y (r_2, θ_2), respectivamente, entonces la distancia euclidiana $d(A, B)$ está dada por

$$d(A, B) = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)} \tag{3.3}$$

Demostración. El lector notará el parecido de la expresión en (3.3) con la ley de los cosenos. De hecho, la demostración consiste precisamente en aplicar este resultado al triángulo formado por el polo O y los puntos A y B en cuestión. Ver figura 3.7. La ley de los cosenos implica que

$$d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1),$$

de donde se sigue (3.3). □

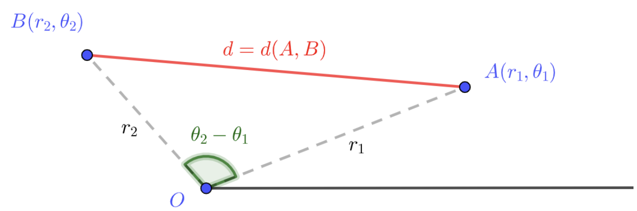


Figura 3.7: La distancia euclidiana expresada en coordenadas polares.

La cuestión de la simetría en términos de coordenadas polares es un poco más sutil. Pensemos, para fijar ideas, que un punto P tiene coordenadas polares (r, θ). Entonces, su simétrico P' con respecto del eje polar tiene coordenadas polares $(r, -\theta)$. Pero como hemos visto, ésta no es la única representación de P' en estas coordenadas. Por ejemplo, también podemos representar a P' con las coordenadas $(-r, -\theta + \pi)$. Esto hace que nuestra noción de conjunto simétrico se vea un poco más rara en coordenadas polares.

Para presentar las tres simetrías análogas a las que dimos en el caso de las coordenadas cartesianas, debemos definir el *eje transversal*, que es la recta perpendicular al eje polar que pasa por el polo.

Proposición 3.3

Un conjunto A en el plano es

- *simétrico con respecto del eje polar* si para cada punto $(r, \theta) \in A$ se tiene que $(r, -\theta)$ u otra de sus representaciones en coordenadas está en A.
- *simétrico con respecto del eje transversal* si para cada punto $(r, \theta) \in A$ se tiene que $(r, \pi - \theta)$ u otra de sus representaciones en coordenadas está en A.
- *simétrico con respecto del polo* si para cada punto $(r, \theta) \in A$ se tiene que $(-r, \theta)$ u otra de sus representaciones en coordenadas está en A.

La demostración se deja de nuevo al lector.

Ejemplo 3.7

Consideremos el siguiente conjunto en el plano:

$$A = \{\ (r, \theta) \mid r = \theta\ \}.$$

Para hacern os una idea de la forma de este conjunto, podemos hacer primero una tabla de valores. En este caso, la tabla es muy sencilla:

r	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$
θ	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$

Luego localizamos cada uno de estos puntos en el plano y nos hacemos una idea de la forma de la curva, que aparece en la figura 3.8.
La figura sugiere que el conjunto A es simétrico con respecto del eje transversal. Pero si el punto P con coordenadas (r, θ) está en A, esto nos dice que $r = \theta$. Ahora, si consideramos el simétrico P' de P con las coordenadas $(r, \pi - \theta)$, claramente este par de coordenadas no son iguales entre sí. Pero no todo está perdido: Observemos que P' también se puede escribir con las coordenadas $(-r, -\theta)$, que sí satisfacen la ecuación. Por tanto, A es simétrico con respecto del eje transversal.

Ejemplo 3.8

Consideremos ahora

$$A = \{\ (r, \theta) \mid r = \cos(3\theta)\ \}.$$

De nuevo, podemos hacer una tabla de valores: Como el coseno es una función periódica de periodo 2π, basta fijarnos en los valores en el intervalo $[0, \frac{2\pi}{3}]$.

r	$\cos(3\theta)$
0	1
$\frac{\pi}{18}$	$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{9}$	$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{6}$	$\cos\frac{\pi}{2} = 0$
$\frac{\pi}{3}$	$\cos\pi = -1$
$\frac{\pi}{2}$	$\cos\frac{3\pi}{2} = 0$

Al calcular algunos puntos más, nos hacemos una idea de cómo se ve esta curva, llamada *curva trébol*, que aparece en la Figura 3.9.
La figura sugiere que esta curva es simétrica con respecto del eje polar. Si P es un punto con coordenadas (r, θ) tales que $r = \cos(3\theta)$, entonces el punto con coordenadas $(r, -\theta)$ también satisface esta ecuación, pues $\cos(-3\theta) = \cos(3\theta)$. Así, la curva trébol con esta ecuación es simétrica con respecto del eje polar.

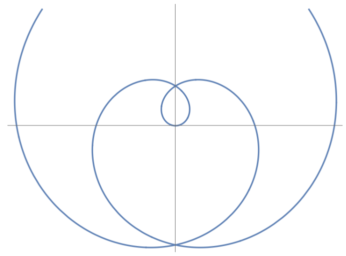


Figura 3.8: El conjunto de puntos (r, θ) tales que $r = \theta$.

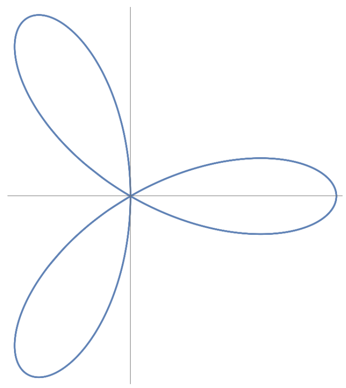


Figura 3.9: La curva trébol $r = \cos(3\theta)$.

Cada uno de los sistemas de coordenadas tiene su propio interés y utilidad. Sin embargo, en ocasiones es importante poder traducir lo que ocurre en un sistema en lo que ocurre en otro. Por ejemplo, puede ocurrir que un conjunto se vea más sencillo en coordenadas polares que en cartesianas. Para hacer esta traducción, los sistemas se pueden colocar uno sobre el otro, de manera completamente arbitraria, pero para que las ecuaciones resultantes sean más sencillas, conviene colocarlos de la manera siguiente:

- El origen del sistema de coordenadas cartesianas coincide con el polo del sistema de coordenadas polares.
- La parte positiva del eje x coincide con el eje polar.

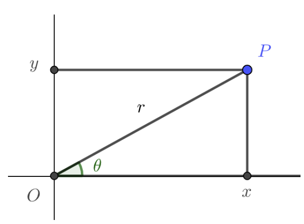


Figura 3.10: Relación entre los sistemas de coordenadas cartesianas y polares.

La figura 3.10 nos muestra las relaciones entre ambos sistemas de coordenadas. Dado un punto P, para pasar de las coordenadas polares a las coordenadas cartesianas, tenemos

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta, \tag{3.4}$$

mientras que para pasar de las coordenadas cartesianas a las coordenadas polares de P, tenemos que

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan\theta = \frac{y}{x}. \tag{3.5}$$

Recordemos que la función tangente tiene muchas posibles inversas, lo que se corresponde con las diferentes representaciones del punto P en coordenadas polares.

Ejemplo 3.9

Usando las relaciones (3.4), es fácil obtener las ecuaciones de las rectas horizontales y verticales en coordenadas polares. Por ejemplo, la ecuación $r\cos\theta$ = constante representa una recta vertical, mientras que $r\operatorname{sen}\theta$ = constante representa una recta horizontal.

Ejemplo 3.10

El uso de uno u otro sistema de coordenadas dependerá en buena medida del tipo de problemas y conjuntos en consideración. Por ejemplo, la espiral del ejemplo 3.7 tiene una ecuación muy sencilla en coordenadas polares, mientras que en coordenadas cartesianas tiene la ecuación

$$\sqrt{x^2+y^2} = \arctan\frac{y}{x}.$$

que puede ser un poco más difícil de manejar.

3.3. Curvas parametrizadas en $\mathbb{R}^2$

Hasta el momento, hemos visto algunas curvas en coordenadas cartesianas (o polares) definidas por una relación entre x y y (o bien entre r y θ). En muchas ocasiones, es conveniente pensar a las coordenadas como funciones de una variable adicional, que para destacarse se le llama un *parámetro*. Esto es útil, por ejemplo, para representar trayectorias de partículas, que se van moviendo en función del tiempo. Aunque este tipo de objetos será estudiado con mayor profundidad en cursos posteriores, los presentamos aquí con el fin de que el lector se vaya familiarizando con ellos.

Definición 3.3: Curva parametrizada

Una *curva parametrizada* en $\mathbb{R}^2$ (o $\mathbb{R}^3$) es la imagen de una transformación (o función) $\alpha\colon I\to\mathbb{R}^2$ (o bien $\alpha\colon I\to\mathbb{R}^3$), donde $I\subset\mathbb{R}$ es un intervalo en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 3.1

Invitamos al lector para que grafique las siguientes curvas:

- $\alpha_1\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, $\alpha_1(t)=(t,t)$.
- $\alpha_2\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, $\alpha_2(t)=(t^3,t^3)$.
- $\alpha_3\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, $\alpha_3(t)=(t^4,t^4)$.
- $\alpha_4\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, $\alpha_4(t)=(t+1,t+1)=t(1,1)+(1,1)$.
- $\alpha_5\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, $\alpha_5(t)=t(a,a)+(b,b)$, $a,b\in\mathbb{R}$ y $a\neq 0$.

Ejemplo 3.11

Procedamos ahora dando primero el conjunto, y veamos si lo podemos expresar como una curva parametrizada. Consideremos la circunferencia unitaria, definida por

$$A = \{ \ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \ \}.$$

Veamos distintas formas de parametrizar a esta curva. Todas las funciones a continuación tienen como dominio a $\mathbb{R}$.

- $\alpha_1(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$. Esta parametrización recorre la circunferencia en el sentido antihorario, es decir, contrario al de las manecillas del reloj.
- $\alpha_2(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t)$.
- $\alpha_3(t) = (\cos_2 t, \operatorname{sen}_2 t)$. Recorre la circunferencia con el doble de la velocidad de α_1.

Ejemplo 3.12

Hagamos algo similar, ahora para una elipse[a] con ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Si despejamos y en términos de x, obtenemos

$$y = \pm\sqrt{b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)},$$

de modo que

$$\alpha_1(t) = \left(t, +\sqrt{b^2\left(1 - \frac{t^2}{a^2}\right)}\right)$$

parametriza la parte superior de la elipse. En este caso, como $1 - \frac{t^2}{a^2}$ aparece dentro de la raíz, debe ser no negativo, lo cual ocurre si y sólo si $|t| \le a$; es decir, el dominio de α_1 es el intervalo $[-a, a]$. Otra manera de parametrizar a la elipse, también de mucha utilidad, es mediante la transformación $\alpha_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\alpha_2(t) = (a \cos t, b \operatorname{sen} t).$$

[a] Aunque más adelante veremos la deducción de la ecuación canónica de una elipse, confiamos en que el lector conozca esta ecuación desde el bachillerato.

3.4. Coordenadas en el espacio

Ahora pasemos a estudiar los sistemas de coordenadas en el espacio. En primer lugar, tenemos las coordenadas cartesianas usuales, denotadas por (x, y, z), determinadas mediante tres ejes perpendiculares entre sí. Determinamos la dirección positiva de cada eje de modo que se cumpla la llamada *regla de la mano derecha*, que recuerda al movimiento de un tornillo: Al ir del eje x al eje y, en el sentido de las manecillas del reloj, avanzamos en la dirección de z. La manera más común de representar los ejes con esta convención aparece en la siguiente figura.

Pero al igual que en el plano, éstas no son las únicas coordenadas útiles en el espacio. Por ejemplo, en el plano horizontal, en vez de considerar las coordenadas polares, podemos fijarnos en las coordenadas polares, lo que nos lleva a otro sistema de coordenadas.

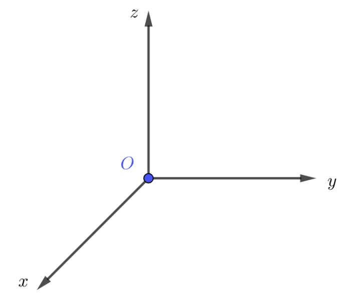


Figura 3.11: El sistema de coordenadas cartesianas en el espacio.

Definición 3.4: Coordenadas cilíndricas

El *sistema de coordenadas cilíndricas* en $\mathbb{R}^3$ es el sistema de coordenadas (r, θ, z), donde para cada punto P en el espacio, (r, θ) son las coordenadas polares de su proyección sobre el plano horizontal y z es su altura con respecto de dicho plano.

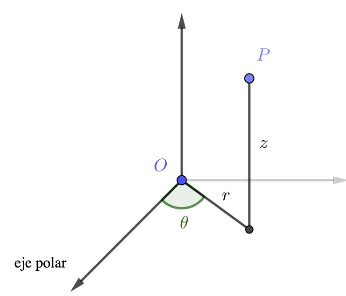


Figura 3.12: Coordenadas cilíndricas.

Como antes, podemos hacer el cambio de coordenadas cartesianas a cilíndricas y viceversa sobreponiendo ambos sistemas. La manera más sencilla consiste en hacer coincidir el origen de uno con el polo del otro, el eje x con el eje polar, el eje y con el eje transversal y el eje z consigo mismo, de modo que la transformación de coordenadas está dada por

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\operatorname{sen}\theta, \quad z = z,$$

o en la dirección contraria,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan\frac{y}{x}, \quad z = z.$$

Hay un tercer sistema de coordenadas de uso frecuente, que definimos a continuación.

Definición 3.5: Coordenadas esféricas

El *sistema de coordenadas esféricas* en $\mathbb{R}^3$ es aquel donde se fija un punto como el origen, un plano horizontal y un eje perpendicular a dicho plano, de modo que para cada punto P en el espacio,

- La coordenada ρ es la distancia de P al origen.
- La coordenada θ es el ángulo que forma un eje en el plano horizontal con la semirrecta que va del origen a la proyección de P en el plano.
- La coordenada φ, llamada la *colatitud*, es el ángulo que forma el eje vertical con la semirrecta que va del origen al punto P.

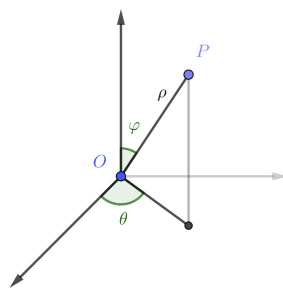


Figura 3.13: Coordenadas esféricas.

Observación 3.2

Como en el caso de las coordenadas polares, un punto puede tener muchas representaciones en coordenadas cilíndricas y esféricas. Por tal razón, con frecuencia se prefiere restringir los valores de las coordenadas; así,

- En las coordenadas cilíndricas, se acostumbra pedir que

$$r \geq 0 \quad \text{y} \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

- En las coordenadas esféricas, se pide que

$$\rho \geq 0, \quad \theta \in [0, 2\pi) \quad \text{y} \quad \varphi \in [0, \pi].$$

Observación 3.3

Una variante de las coordenadas esféricas utiliza no la colatitud φ, sino la *latitud* dada por $\pi/2 - \varphi$, de modo que los puntos por encima del plano horizontal de referencia tienen latitud positiva (“latitud norte”) y los que están por debajo tienen latitud negativa (“latitud sur”).

Como en el caso de las coordenadas cartesianas y polares en el plano, el uso de uno u otro sistema de coordenadas depende en gran medida del problema a estudiar. Por ejemplo, es claro que las coordenadas esféricas simplifican mucho las ecuaciones de las esferas con centro en el origen, pues las ecuaciones son de la forma $\rho =$ constante, o las cilíndricas simplifican el las ecuaciones de cilindros ($r =$ constante).

Ahora veremos las fórmulas para transformar el sistema de coordenadas esféricas en los otros dos, y viceversa. Para esto, nuevamente sobreponemos los tres sistemas como en la figura 3.14.

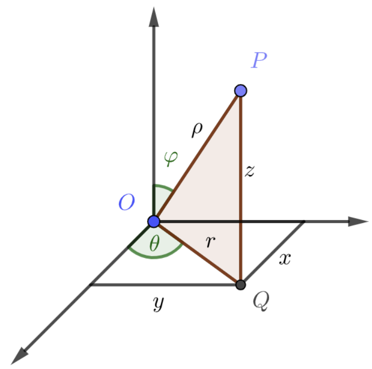


Figura 3.14: Figura que ilustra los cambios de coordenadas.

Veamos cómo pasar de las coordenadas cartesianas a las esféricas. Haciendo referencia a la figura, observemos que $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y que el triángulo OPQ es rectángulo, de modo que por el teorema de Pitágoras,

$$\rho = \sqrt{r^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Para calcular θ, observamos que

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Por último, como el segmento $\overline{PQ}$ y el eje z son paralelos, tenemos que $\measuredangle APQ = \varphi$ y, usando de nuevo que $\triangle OPQ$ es rectángulo,

$$\cos\varphi = \frac{z}{\rho} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Para pasar de las coordenadas esféricas a las cartesianas, primero observemos, usando el triángulo OPQ, que $r = \rho \operatorname{sen}\varphi$. de modo que

$$\begin{aligned} x &= \rho \operatorname{sen}\varphi \cdot \cos\theta, \\ y &= \rho \operatorname{sen}\varphi \cdot \operatorname{sen}\theta, \\ z &= \rho \cos\varphi. \end{aligned}$$

Dejaremos al lector que establezca las fórmulas para los cambios de coordenadas restantes.

Episodio IV

Una nueva esperanza: Espacios vectoriales

Presentamos el concepto de espacio vectorial como un concepto central en matemáticas, presente en muchas áreas como el álgebra, el análisis, etcétera. Aunque en realidad en el curso de Analítica nos centraremos en los casos visibles de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, es un concepto tan importante que conviene irlo presentando en varios cursos, incluyendo éste.

4.1. Definiciones básicas

Un *espacio vectorial sobre* $\mathbb{R}$ es un conjunto V no vacío, en el cual tenemos definidas dos operaciones, llamadas *suma* y *producto por un escalar*[1], que satisfacen las siguientes diez propiedades básicas, que precisaremos más adelante.

- Cerradura de la suma.
- Conmutatividad de la suma.
- Asociatividad de la suma.
- Existencia del neutro para la suma.
- Existencia del inverso para la suma.
- Cerradura del producto por un escalar.
- "Asociatividad" del producto por un escalar.
- Propiedad del neutro multiplicativo de $\mathbb{R}$.
- Distributividad "uno".
- Distributividad "dos".

Aunque en este curso sólo consideraremos espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$, esta noción tiene sentido asociada a un campo $\mathbb{K}$. Conviene incluir entonces las siguientes definiciones.

[1] No confundir con un concepto que definiremos más adelante, el de *producto escalar*.

Definición 4.1: Campo

Un conjunto $\mathbb{K}$ es un *campo* si tiene definidas dos operaciones llamadas *suma* y *producto*, que satisfacen las propiedades siguientes:

(C 1) **Cerradura**: Para cada par de elementos $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, su suma $\lambda + \mu$ y su producto $\lambda\mu$ son elementos de $\mathbb{K}$.

(C 2) **Conmutatividad**: Para cualesquiera $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

$$\lambda + \mu = \mu + \lambda \quad \text{y} \quad \lambda\mu = \mu\lambda.$$

(C 3) **Asociatividad**: Para cualesquiera $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{K}$,

$$\lambda + (\mu + \nu) = (\lambda + \mu) + \nu \quad \text{y} \quad \lambda(\mu\nu) = (\lambda\mu)\nu.$$

(C 4) **Existencia de neutros**: Existen elementos en $\mathbb{K}$ denotados por $0_{\mathbb{K}}, 1_{\mathbb{K}}$, distintos entre sí, talesl que para todo $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\lambda + 0_{\mathbb{K}} = \lambda \quad \text{y} \quad 1_{\mathbb{K}}\lambda = \lambda.$$

En particular, $K \neq \varnothing$.

(C 5) **Existencia de inversos**: Para cada $\lambda \in \mathbb{K}$ existe un elemento en $\mathbb{K}$, denotado $-\lambda$ tal que

$$\lambda + (-\lambda) = 0_{\mathbb{K}}.$$

Además, si $\lambda \neq 0_{\mathbb{K}}$, existe un elemento en $\mathbb{K}$, denotado λ^{-1}, tal que

$$\lambda\lambda^{-1} = 1_{\mathbb{K}}.$$

(C 6) **Distributividad del producto con respecto de la suma**: Para cualesquiera $\lambda, \mu, \nu \in K$, se tiene

$$\lambda(\mu + \nu) = \lambda\mu + \lambda\nu.$$

Ahora podemos dar la definición general de espacio vectorial.

Definición 4.2: Espacio vectorial

Sea $\mathbb{K}$ un campo. Un *espacio vectorial* V sobre un campo $\mathbb{K}$ es un conjunto que tiene definidas dos operaciones, llamadas *suma* y *producto por un escalar*, que cumplen las siguientes condiciones:

(EV 1) **Cerradura de la suma**: Para cualesquiera $u, v \in \mathsf{V}$, su suma $u + v$ es un elemento de V.

(EV 2) **Conmutatividad de la suma**: Para cualesquiera $u, v \in \mathsf{V}$,

$$u + v = v + u.$$

(EV 3) **Asociatividad de la suma**: Para cualesquiera $u, v, w \in \mathsf{V}$,

$$u + (v + w) = (u + v) + w.$$

(EV 4) **Existencia del neutro aditivo**: Existe un elemento en V denotado por 0_{V} tal que para todo $u \in \mathsf{V}$,

$$u + 0 = u.$$

(EV 5) **Existencia del inverso aditivo**: Para cada $u \in \mathsf{V}$ existe un elemento en V, denotado $-u$ tal que

$$u + (-u) = 0_{\mathsf{V}}.$$

(EV 6) **Cerradura del producto por un escalar**: Para todo $u \in \mathsf{V}$ y todo $\lambda \in \mathbb{K}$ su producto λu es un elemento de V.

(EV 7) **Propiedad del neutro multiplicativo de** $\mathbb{K}$: Para todo $u \in \mathsf{V}$,

$$1_{\mathbb{K}} u = u.$$

(EV 8) Para cualesquiera $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ y todo $u \in \mathsf{V}$,

$$(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u).$$

(EV 9) **Distributividad**: Para cada $\lambda \in \mathbb{K}$ y cualesquiera $u, v \in \mathsf{V}$,

$$\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v.$$

(EV 10) **Distributividad**: Para cualesquiera $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ y cada $u \in \mathsf{V}$,

$$(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u.$$

Algunos comentarios en torno a la definición anterior:

- Aunque trabajaremos con el campo de los números reales, conviene mencionar dos campos más:
    - El campo $\mathbb{Z}_n$ dado como el conjunto de los residuos de divisiones de enteros entre el número n; este conjunto sòlo es campo cuando n es un número primo.
    - Un campo $\mathbb{K}$ siempre es un espacio vectorial sobre sí mismo.
- La propiedad (EV10) implica tres operaciones: $(\lambda+\mu)$ indica la suma de elementos en $\mathbb{K}$, mientras que el símbolo de suma en $\lambda u + \mu u$ indica la suma de vectores en V. Por supuesto, expresiones como λu indican el producto de un escalar por un vector.
- Unas cuantas palabras sobre la notación. En algunos cursos y libros, se acostumbra distinguir de alguna manera tipográfica entre los escalares (los elementos del campo) y los vectores (los elementos de V); por ejemplo, colocando una barra sobre la letra que representa al vector ($\bar{u}$), una flecha ($\overrightarrow{u}$), negritas ($\mathbf{u}$) y otras. Nosotros trataremos de mantener una notación sencilla, que se entenderá del contexto.
- Las propiedades de cerradura (EV 1) y (EV 6) suelen enunciarse también por separado de las otras. La idea es que lo más malo que le puede ocurrir a una mala definición es que falle desde un principio; por ejemplo, cuando la definición de suma de dos vectores en un espacio V no nos da un vector en V.
- En el caso de la propiedad (EV 8), observemos que no podemos llamarle asociatividad, porque en realidad estamos hablando de dos productos distintos: En la expresión $\lambda\nu$ nos referimos al producto en el campo, pero en μu nos referimos al producto por un escalar.
- Puesto que la suma de vectores es una operación binaria, la propiedad asociativa (EV 3) nos dice que al sumar tres elementos en el orden u, v, w, no nos importa cómo los agrupemos, el resultado será el mismo. Así, podemos escribir $u + v + w$ sin riesgo de confusión. Por inducción, podemos escribir $u_1 + \cdots + u_n$ sin paréntesis ni confusiones.

4.2. Ejemplos

Antes de pasar a los ejemplos, conviene notar que para demostrar que un conjunto es un espacio vectorial, hay que comprobar que valen las diez propiedades indicadas en la definición 4.2. En los siguientes ejemplos se muestra esto con detalle.

Ejemplo 4.1: El espacio de matrices de $m \times n$

Una *matriz* no es más que un conjunto de elementos organizados por columnas y renglones. Así, si $m, n \in \mathbb{N}$, decimos que una *matriz de m renglones y n columnas* con coeficientes en un campo $\mathbb{K}$ es un arreglo de la forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

donde cada $a_{ij} \in \mathbb{K}$. Decimos que a_{ij} es el elemento que está en el i-ésimo renglón y j-ésima columna. Para abreviar la notación, escribiremos $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, etcétera, para denotar matrices de este tipo. En este ejemplo también usaremos la notación $[A]_{ij}$ para denotar al elemento a_{ij} de una matriz dada.
Diremos que dos matrices A, B son iguales si:

- A y B tienen el mismo número de renglones (digamos, m), así como el mismo número de columnas (digamos, n).
- $a_{ij} = b_{ij}$ para todos los índices $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

Denotaremos por $\mathsf{M}_{m\times n}(K)$ al conjunto de matrices de m renglones y n columnas con coeficientes en $\mathbb{K}$. Dadas dos matrices $A, B \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, definimos su suma $A + B$ como la matriz tal que

$$[A + B]_{ij} = a_{ij} + b_{ij};$$

intuitivamente, definimos la suma "entrada por entrada". De manera similar, si $A \in \mathsf{M}_{m\times n}(K)$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, definimos el producto λA como la matriz tal que

$$[\lambda A]_{ij} = \lambda a_{ij}.$$

Proposición 4.1

Con las operaciones arriba definidas, $\mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

Demostración. Para mostrar nuestra afirmación, comprobaremos las propiedades en la definición 4.2:

(EV 1) Por la definición de la suma, si $A, B \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, entonces su suma $A + B \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.

(EV 2) Sean $A, B \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Entonces, para cualesquiera $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$,

$$\begin{aligned} [A + B]_{ij} &= a_{ij} + b_{ij}, && \text{definición de suma;} \\ &= b_{ij} + a_{ij}, && \text{conmutatividad en } \mathbb{K}; \\ &= [B + A]_{ij}. && \text{definición de suma.} \end{aligned}$$

Así, $[A+B]_{ij} = [B+A]_{ij}$ para todo $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, de modo que $A + B = B + A$.

(EV 3) Sean $A, B, C \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$; entonces para cualesquiera $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$,

$$\begin{aligned}
[A + (B + C)]_{ij} &= [A]_{ij} + [B + C]_{ij}, && \text{definición de suma;}\\
&= a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}), && \text{definición de suma;}\\
&= (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}, && \text{asociatividad en } \mathbb{K};\\
&= [A + B]_{ij} + [C]_{ij}, && \text{definición de suma;}\\
&= [(A + B) + C]_{ij}, && \text{definición de suma.}
\end{aligned}$$

Así, $[A + (B + C)]_{ij} = [(A + B) + C]_{ij}$ para todo $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ y por tanto $A + (B + C) = (A + B) + C$.

(EV 4) Definamos $0_{\mathsf{M}} \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ como la matriz tal que $[0_{\mathsf{M}}]_{ij} = 0_{\mathbb{K}}$ para todo $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$. Sea $A \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$; entonces para todo $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$,

$$\begin{aligned}
[A + 0_{\mathsf{M}}]_{ij} &= [A]_{ij} + [0_{\mathsf{M}}]_{ij}, && \text{definición de suma;}\\
&= a_{ij} + 0_{\mathbb{K}}, && \text{definición de la matriz } 0_{\mathsf{M}};\\
&= a_{ij} = [A]_{ij}, && \text{propiedad del neutro aditivo en } \mathbb{K}.
\end{aligned}$$

Así, $[A + 0_{\mathsf{M}}]_{ij} = [A]_{ij}$ para todo $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ y por tanto $A + 0_{\mathsf{M}} = A$.

(EV 5) Sea $A \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Definimos $-A$ como la matriz en $\mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ dada por $[-A]_{ij} = -a_{ij}$; es decir, como la matriz que a cada $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ le asocia el inverso aditivo de a_{ij} en K. Para $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ se tiene

$$\begin{aligned}
[A + (-A)]_{ij} &= [A]_{ij} + [-A]_{ij}, && \text{definición de suma;}\\
&= a_{ij} + (-a_{ij}), && \text{definición de } -A;\\
&= 0_{\mathbb{K}}, && \text{inverso aditivo en } \mathbb{K};\\
&= [0_{\mathsf{M}}]_{ij}, && \text{definición de la matriz } 0_{\mathsf{M}}.
\end{aligned}$$

Así $[A + (-A)]_{ij} = [0_{\mathsf{M}}]_{ij}$ para todo $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ y por tanto $A + (-A) = 0_{\mathsf{M}}$.

(EV 6) Por la definición del producto por un escalar, λA es un elemento de $\mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.

(EV 7) Sea $A \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$; entonces para toda $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$,

$$\begin{aligned}
[1 \cdot A]_{ij} &= 1 \cdot a_{ij}, && \text{definición del producto por un escalar,}\\
&= a_{ij} = [A]_{ij}, && \text{propiedad del neutro multiplicativo en } \mathbb{K}.
\end{aligned}$$

Así, $[1 \cdot A]_{ij} = [A]_{ij}$ para todo $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ y por tanto $1 \cdot A = A$.

(EV 8) Sean $\lambda, \mu \in K$ y $A \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Entonces para toda $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$,

$$\begin{aligned}
[(\lambda\mu)A]_{ij} &= (\lambda\mu)a_{ij}, && \text{definición del producto por un escalar;}\\
&= \lambda(\mu a_{ij}), && \text{asociatividad del producto en } \mathbb{K};\\
&= \lambda[\mu A]_{ij}, && \text{definición del producto por un escalar;}\\
&= [\lambda(\mu A)]_{ij}, && \text{definición del producto por un escalar.}
\end{aligned}$$

Así, $[(\lambda\mu)A]_{ij} = [\lambda(\mu A)]_{ij}$ para todo $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ y por tanto $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$.

(EV 9) Sean $\lambda \in \mathbb{K}$ y $A, B \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Entonces para toda $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$,

$$\begin{aligned}
[\lambda(A + B)]_{ij} &= \lambda[A + B]_{ij}, && \text{definición del producto;}\\
&= \lambda(a_{ij} + b_{ij}), && \text{definición de suma;}\\
&= \lambda a_{ij} + \lambda b_{ij}, && \text{distributividad en } \mathbb{K};\\
&= [\lambda A]_{ij} + [\lambda B]_{ij}, && \text{definición de producto;}\\
&= [\lambda A + \lambda B]_{ij}, && \text{definición de suma.}
\end{aligned}$$

Así, $[\lambda(A+B)]_{ij} = [\lambda A + \lambda B]_{ij}$ para todo $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ y por tanto

$$\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$$

.

(EV 10) Sean $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ y $A \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Entonces para toda $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$,

$$\begin{aligned}
[(\lambda+\mu)A]_{ij} &= (\lambda+\mu)a_{ij} && \text{definición del producto;}\\
&= \lambda a_{ij} + \mu a_{ij} && \text{distributividad en } \mathbb{K};\\
&= [\lambda A]_{ij} + [\mu A]_{ij}, && \text{definición del producto;}\\
&= [\lambda A + \mu A]_{ij} && \text{definición de suma.}
\end{aligned}$$

Así, $[(\lambda+\mu)A]_{ij} = [\lambda A + \mu A]_{ij}$ para todo $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ y por tanto

$$(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$$

.

Por lo tanto, $\mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ cumple todas las propiedades de la definición 4.2 y es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. □

Ejemplo 4.2: El espacio de funciones

Sean S un conjunto no vacío, $\mathbb{K}$ un campo y $\mathcal{F}(S,K)$ el conjunto de todas las funciones que van de S a $\mathbb{K}$, denotado por

$$\mathcal{F}(S,\mathbb{K})\colon = \{\, f\colon S \to \mathbb{K} \mid f \text{ es una función} \,\}.$$

Recordemos que dos funciones $f, g \in \mathcal{F}(S,\mathbb{K})$ son *iguales* si $f(s) = g(s)$ para toda $s \in S$. Veremos que el conjunto $\mathcal{F}(S,\mathbb{K})$ es un espacio vectorial con las operaciones de suma y producto por un escalar definidas por

$$(f+g)(s) = f(s) + g(s) \quad \text{y} \quad (\lambda f)(s) = \lambda(f(s)),$$

donde $f, g \in \mathcal{F}(S,\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$ y $s \in S$.

Es importante notar que los elementos $f(s)+g(s)$ y $\lambda f(s)$ viven en el campo $\mathbb{K}$; por ende, podemos usar todas las propiedades de campo que ya conocemos.

Demostración. Para mostrar que $\mathcal{F}(S,\mathbb{K})$ es un espacio vectorial, debemos comprobar las propiedades enunciadas en la definición 4.2.

(EV 1) Por la definición de la suma, $f+g$ es un elemento de $\mathcal{F}(S,\mathbb{K})$.

(EV 2) Sean $f, g \in \mathcal{F}(S,\mathbb{K})$; entonces para toda $s \in S$,

$$\begin{aligned}
(f+g)(s) &= f(s) + g(s), && \text{definición de suma;}\\
&= g(s) + f(s), && \text{conmutatividad en } \mathbb{K};\\
&= (g+f)(s). && \text{definición de suma.}
\end{aligned}$$

Así, $(f+g)(s) = (g+f)(s)$ para todo $s \in S$ y por tanto $f+g = g+f$.

(EV 3) Sean $f, g, h \in \mathcal{F}(S,\mathbb{K})$; entonces para toda $s \in S$,

$$\begin{aligned}
(f+(g+h))(s) &= f(s) + (g+h)(s), && \text{definición de suma;}\\
&= f(s) + (g(s)+h(s)), && \text{definición de suma;}\\
&= (f(s)+g(s)) + h(s), && \text{asociatividad en } \mathbb{K};\\
&= (f+g)(s) + h(s), && \text{definición de suma;}\\
&= ((f+g)+h)(s), && \text{definición de suma.}
\end{aligned}$$

Así, $(f+(g+h))(s) = ((f+g)+h)(s)$ para todo $s \in S$ y por tanto $f+(g+h) = (f+g)+h$.

(EV 4) Definamos $0_{\mathcal{F}} \in \mathcal{F}(S,\mathbb{K})$ como $0_{\mathcal{F}}(s) = 0_{\mathbb{K}}$ para todo $s \in S$. Sea $f \in \mathcal{F}(S,\mathbb{K})$, entonces para $s \in S$,

$$\begin{aligned}
(f+0_{\mathcal{F}})(s) &= f(s) + 0_{\mathcal{F}}(s), && \text{definición de suma;}\\
&= f(s) + 0_{\mathbb{K}}, && \text{definición de } 0_{\mathbb{K}};\\
&= f(s), && \text{propiedad del neutro aditivo en } \mathbb{K}.
\end{aligned}$$

Así, $(f+0_{\mathcal{F}})(s) = f(s)$ para todo $s \in S$ y por tanto $f + 0_{\mathcal{F}} = f$.

(EV 5) Sea $f \in \mathcal{F}(S,\mathbb{K})$. Entonces definimos $-f$ como la función en $\mathcal{F}(S,\mathbb{K})$ dada por $(-f)(s) = -f(s)$; es decir, como la función que a cada s le asocia el inverso aditivo de $f(s)$ en $\mathbb{K}$. Para cada $s \in S$ se tiene

$$\begin{aligned}
(f+(-f))(s) &= f(s) + (-f)(s), && \text{definición de suma;}\\
&= f(s) + (-f(s)) && \text{definición de } -f;\\
&= 0_{\mathbb{K}}, && \text{inverso aditivo en } K;\\
&= 0_{\mathcal{F}}(s), && \text{definición de } 0.
\end{aligned}$$

Así $(f+(-f))(s) = 0_{\mathcal{F}}(s)$ para todo $s \in S$ y por tanto $f + (-f) = 0_{\mathcal{F}}$.

(EV 6) Por la definición del producto por un escalar, λf es un elemento de $\mathcal{F}(S,\mathbb{K})$.

(EV 7) Sea $f \in \mathcal{F}(S,\mathbb{K})$; entonces para toda $s \in S$,

$$\begin{aligned}
(1f)(s) &= 1(f(s)), && \text{definición del producto por un escalar,}\\
&= f(s), && \text{propiedad del neutro multiplicativo en } \mathbb{K}.
\end{aligned}$$

Así, $(1f)(s) = f(s)$ para todo $s \in S$ y por tanto $1f = f$.

(EV 8) Sean $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ y $f \in \mathcal{F}(S,\mathbb{K})$. Entonces para toda $s \in S$,

$$\begin{aligned}
((\lambda\mu)f)(s) &= (\lambda\mu)f(s), && \text{definición del producto por un escalar;}\\
&= \lambda(\mu f(s)), && \text{asociatividad del producto en } \mathbb{K};\\
&= \lambda(\mu f)(s), && \text{definición del producto por un escalar;}\\
&= (\lambda(\mu f))(s), && \text{definición del producto por un escalar.}
\end{aligned}$$

Así, $((\lambda\mu)f)(s) = (\lambda(\mu f))(s)$ para todo $s \in S$ y por tanto $(\lambda\mu)f = \lambda(\mu f)$.

(EV 9) Sean $\lambda \in \mathbb{K}$ y $f, g \in \mathcal{F}(S,\mathbb{K})$. Entonces para toda $s \in S$,

$$\begin{aligned}
(\lambda(f+g))(s) &= \lambda(f+g)(s), && \text{definición del producto;}\\
&= \lambda(f(s)+g(s)), && \text{definición de suma;}\\
&= \lambda f(s) + \lambda g(s), && \text{distributividad en } \mathbb{K};\\
&= (\lambda f)(s) + (\lambda g)(s), && \text{definición del producto.}\\
&= (\lambda f + \lambda g)(s), && \text{definición de suma.}
\end{aligned}$$

Así, $(\lambda(f+g))(s) = (\lambda f + \lambda g)(s)$ para todo $s \in S$ y por tanto $\lambda(f+g) = \lambda f + \lambda g$.

(EV 10) Sean $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ y $f \in \mathcal{F}(S,\mathbb{K})$. Entonces para toda $s \in S$,

$$\begin{aligned}
((\lambda+\mu)f)(s) &= (\lambda+\mu)f(s) && \text{definición del producto;}\\
&= \lambda f(s) + \mu f(s) && \text{distributividad en } \mathbb{K};\\
&= (\lambda f)(s) + (\mu f)(s) && \text{definición del producto.}\\
&= (\lambda f + \mu f)(s) && \text{definición de suma.}
\end{aligned}$$

Así, $((\lambda+\mu)f)(s) = (\lambda f + \mu f)(s)$ para todo $s \in S$ y por tanto $(\lambda+\mu)f = \lambda f + \mu f$.

Por lo tanto, $\mathcal{F}(S, \mathbb{K})$ cumple todas las propiedades de la definición 4.2 y es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. $\square$

Ejemplo 4.3: El espacio de las funciones pares

Una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una *función par* si $f(-t) = f(t)$ para cada número real t. Veremos que el conjunto de las funciones reales pares con las operaciones definidas como en el ejemplo anterior, es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Demostración. Sea E el conjunto de las funciones pares; observemos que

$$E = \{\, f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(-t) = f(t) \text{ para todo } t \in \mathbb{R} \,\}.$$

Es decir, E es un subconjunto de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Como ya probamos que un conjunto del tipo $\mathcal{F}(S, K)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, entonces E hereda varias de las propiedades enunciadas en la definición 4.2. El lector podrá verificar que sólo hay que probar lo que veremos a continuación.

1. **Cerradura de la suma**: Si $f, g \in E$, veamos que $f + g$ es una función par. Si $t \in \mathbb{R}$,

$$(f + g)(-t) = f(-t) + g(-t) = f(t) + g(t) = (f + g)(t).$$

   Así, $f + g \in E$.

2. **Existencia del neutro aditivo**: Ya sabemos que la función 0 es un neutro para todas las funciones en $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Veamos que ésta es una función par. Para toda $t \in \mathbb{R}$,

$$0(-t) = 0 = 0(t).$$

   Así, $0 \in E$. Como ya dijimos, sabemos que $f + 0 = f$ para cualquier función en $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, y en particular para cualquier función en E.

3. **Existencia del inverso aditivo**: Sea $f \in E$. Por el ejemplo anterior, sabemos que existe $-f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tal que $f + (-f) = 0$. Veamos que $-f \in E$. Si $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
(-f)(-t) &= -f(-t) && \text{definición de } -f; \\
&= -f(t) && \text{pues } f \in E; \\
&= (-f)(t) && \text{definición de } -f.
\end{aligned}$$

   Así, $-f \in E$.

4. **Cerradura del producto por un escalar**: Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $f \in E$, debemos ver que λf también está en E; si $t \in \mathbb{R}$,

$$(\lambda f)(-t) = \lambda(f(-t)) = \lambda(f(t)) = (\lambda f)(t),$$

   lo que muestra que $\lambda f \in E$.

Dejaremos al lector que verifique el resto de las propiedades, para concluir que E es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. $\square$

Ejemplo 4.4: El espacio de sucesiones

Sea V el conjunto de todas las sucesiones $\{a_n\}$ en un campo $\mathbb{K}$ (es decir, $a_n \in \mathbb{K}$ para todo $n \in \mathbb{N}$) que tienen un número finito de elementos distintos de cero. Si $\{a_n\}, \{b_n\} \in V$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, definimos su suma y producto por un escalar por

$$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\} \quad \text{y} \quad \lambda\{a_n\} = \{\lambda a_n\}.$$

Veremos que con estas operaciones V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

Demostración. Sabemos que debemos verificar las diez propiedades de la definición 4.2.

(EV 1) Por la definición de la suma, $\{a_n\}+\{b_n\}$ es de nuevo una sucesión. Además, como $\{a_n\},\{b_n\} \in \mathsf{V}$, existen $p,q \in \mathbb{N}$ tales que $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ tienen p y q elementos distintos de cero. Entonces $\{a_n\}+\{b_n\}$ tiene a lo más $p+q$ elementos distintos de cero. Así $\{a_n\}+\{b_n\}$ es un elemento de V.

(EV 2) Sean $\{a_n\},\{b_n\} \in \mathsf{V}$. Entonces,

$$\underbrace{\{a_n\}+\{b_n\}}_{(*)} = \{\underbrace{a_n+b_n}_{(**)}\} = \{b_n+a_n\} = \{b_n\}+\{a_n\}.$$

(*) Como sucesiones, aún no podemos conmutarlas.

(**) Como elementos del campo, sí podemos conmutarlos.

(EV 3) Sean $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\} \in \mathsf{V}$. Entonces

$$\begin{aligned}\{a_n\}+(\{b_n\}+\{c_n\}) &= \{a_n\}+\{b_n+c_n\} = \{a_n+(b_n+c_n)\}\\ &= \{(a_n+b_n)+c_n\} = \{a_n+b_n\}+\{c_n\}\\ &= (\{a_n\}+\{b_n\})+\{c_n\}.\end{aligned}$$

(EV 4) Consideremos la sucesión $\{c_n\}$ en la cual todas sus entradas son iguales a cero; es decir, $c_n=0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Notemos que esta sucesión no tiene elementos distintos de cero, lo que nos dice que tiene un número finito de elementos distintos de cero, de modo que esta sucesión es un elemento de V. Si $\{a_n\} \in \mathsf{V}$, entonces

$$\{a_n\}+\{c_n\} = \{a_n+0\} = \{a_n\},$$

de modo que la sucesión $\{c_n\}$ es el neutro aditivo en V. En adelante, denotaremos esta sucesión como $\{0\}$.

(EV 5) Sea $\{a_n\} \in \mathsf{V}$, supongamos que $\{a_n\}$ tiene p elementos distintos de cero. Entonces la sucesión $-\{a_n\}$ definida por $-\{a_n\}=\{-a_n\}$ también tiene p elementos distintos de cero, por lo que $-\{a_n\} \in \mathsf{V}$. Luego

$$\{a_n\}+(-\{a_n\}) = \{a_n+(-a_n)\} = \{0\}.$$

(EV 6) Por la definición del producto por un escalar, $\lambda\{a_n\}$ de nuevo es una sucesión. Observemos que si $\lambda=0$, la sucesión $0\{a_n\}=\{0\,a_n\}=\{0\}$ tiene un número finito (¡ninguno!) de elementos distintos de cero. Si $\lambda \neq 0$ y $\{a_n\}$ tiene p elementos distintos de cero, entonces la sucesión $\lambda\{a_n\}$ también tiene p elementos distintos de cero, por lo que $\lambda\{a_n\} \in \mathsf{V}$. Así, en cualquier caso, $\lambda\{a_n\} \in \mathsf{V}$.

(EV 7) Sea $\{a_n\} \in \mathsf{V}$. Por definición del producto por un escalar,

$$1\{a_n\} = \{1(a_n)\} = \{a_n\}.$$

(EV 8) Sean $\lambda,\mu \in \mathbb{K}$ y $\{a_n\} \in \mathsf{V}$. Entonces

$$(\lambda\mu)\{a_n\} = \{(\lambda\mu)a_n\} = \{\lambda(\mu\,a_n)\} = \lambda\{\mu\,a_n\} = \lambda\,(\mu\{a_n\})\,.$$

(EV 9) Sean $\lambda \in \mathbb{K}$ y $\{a_n\},\{b_n\}$. Entonces

$$\begin{aligned}\lambda\,(\{a_n\}+\{b_n\}) &= \lambda\{a_n+b_n\} = \{\lambda(a_n+b_n)\} = \{\lambda a_n+\lambda b_n\}\\ &= \{\lambda a_n\}+\{\lambda b_n\} = \lambda\{a_n\}+\lambda\{b_n\}.\end{aligned}$$

(EV 10) Sean $\lambda,\mu \in K$ y $\{a_n\} \in \mathsf{V}$. Entonces

$$\begin{aligned}(\lambda+\mu)\{a_n\} &= \{(\lambda+\mu)a_n\} = \{\lambda a_n+\mu a_n\}\\ &= \{\lambda a_n\}+\{\mu a_n\} = \lambda\{a_n\}+\mu\{a_n\}.\end{aligned}$$

Así, hemos verificado todas las propiedades de la definición y por lo tanto V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. □

4.3. Propiedades de los espacios vectoriales

Aquí veremos algunas propiedades generales de los espacios vectoriales, que se deducen de las propiedades básicas dadas en su definición.

Teorema 4.1: Ley de cancelación

Sea V un espacio vectorial y sean $u, v, w \in \mathsf{V}$ tales que $u + w = v + w$. Entonces $u = v$.

Demostración. Como $w \in \mathsf{V}$, existe $-w \in \mathsf{V}$ tal que $w + (-w) = 0$. Así,

$$\begin{aligned} u + w &= v + w, && \text{hipótesis;} \\ (u + w) + (-w) &= (v + w) + (-w), && \text{sumando } (-w); \\ u + (w + (-w)) &= v + (w + (-w)), && \text{asociatividad en } \mathsf{V}; \\ u + 0 &= v + 0, && \text{inverso aditivo en } \mathsf{V}; \\ u &= v, && \text{neutro aditivo en} \mathsf{V}, \end{aligned}$$

que es lo que se quería demostrar. □

Corolario 4.1: Unicidad del neutro aditivo

En un espacio vectorial V, el neutro aditivo es único.

Demostración. Supongamos que existe $0' \in \mathsf{V}$ tal que $u + 0' = u$ para toda $u \in \mathsf{V}$. Por la existencia del neutro aditivo 0 en V, sabemos que $u + 0 = u$ para toda $u \in \mathsf{V}$. Así, para toda $u \in \mathsf{V}$,

$$\begin{aligned} u + 0' &= u + 0, && \text{transitividad;} \\ 0' + u &= 0 + u, && \text{conmutatividad en } \mathsf{V}. \end{aligned}$$

Por el teorema 4.1, se concluye que $0' = 0$. □

Corolario 4.2: Unicidad de los inversos aditivos

En un espacio vectorial V, el inverso aditivo de cada elemento es único.

Demostración. Sea $u \in \mathsf{V}$, sabemos que existe $-u \in \mathsf{V}$ tal que $u + (-u) = 0$. Supongamos que existe otro elemento $u' \in \mathsf{V}$ tal que $u + u' = 0$. Entonces

$$\begin{aligned} u + (-u) &= 0 = u + u', && \text{hipótesis;} \\ (-u) + u &= u' + u, && \text{conmutatividad en } \mathsf{V}. \end{aligned}$$

Por el teorema 4.1, se concluye que $(-u) = u'$. □

Teorema 4.2

Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$. Se cumplen las siguientes propiedades:

a) $0u = 0$, para toda $u \in \mathsf{V}$.

b) Para toda $\lambda \in K$ y para toda $u \in \mathsf{V}$,

$$(-\lambda)u = -(\lambda u) = \lambda(-u);$$

en particular,

$$(-1)u = -u \quad \text{y} \quad -(-u) = u.$$

c) $\lambda 0 = 0$, para toda $\lambda \in \mathbb{K}$, con $0 \in \mathsf{V}$.

Demostración. Antes de comenzar la prueba, es importante aclarar que en el inciso a) se hace uso del cero del campo y el cero del espacio vectorial.

a) Sea $u \in \mathsf{V}$, entonces

$$\begin{aligned} 0u + 0u &= (0+0)u, && \text{distributividad;} \\ &= 0u, && \text{neutro aditivo en } \mathbb{K}; \\ &= 0u + 0, && \text{neutro aditivo en } \mathsf{V}. \end{aligned}$$

Así, por el teorema 4.1, $0u = 0$.

b) Por el corolario 4.2, el vector $-(\lambda u)$ es el único elemento en V tal que $\lambda u + (-(\lambda u)) = 0$. Por otro lado, por el inciso a), se tiene que

$$\lambda u + (-\lambda)u = (\lambda + (-\lambda))\, u = 0u = 0.$$

Por la unicidad del inverso aditivo, $-(\lambda u) = (-\lambda)u$. En particular se tiene que $-u = (-1)u$. Por la asociatividad,

$$\lambda(-u) = \lambda\left((-1)u\right) = (\lambda(-1))\, u = (-\lambda)u.$$

Así, $-(\lambda u) = (-\lambda)u = \lambda(-u)$. En particular si $\lambda = 1$ se tiene que $u = -(-u)$.

c) Sean $\lambda \in \mathbb{K}$, $u \in \mathsf{V}$ y consideremos el vector $0 \in \mathsf{V}$, entonces

$$\begin{aligned} \lambda 0 + \lambda u &= \lambda(0+u), && \text{distributividad;} \\ &= \lambda u, && \text{neutro aditivo en } \mathsf{V}; \\ &= 0 + \lambda u, && \text{neutro aditivo en } \mathsf{V}. \end{aligned}$$

Por el teorema 4.1, $\lambda 0 = 0$. □

4.4. Subespacios vectoriales

La idea del concepto de subespacio vectorial es en realidad muy simple: Se trata de un subconjunto de un espacio vectorial que a su vez es un espacio vectorial. La definición es la siguiente:

Definición 4.3: Subespacio Vectorial

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Un *subespacio vectorial* de V es un subconjunto $\mathsf{W} \subseteq \mathsf{V}$ tal que es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, con las operaciones de V restringidas a W.

El punto sutil de la definición es que no podemos fijarnos en un subconjunto W de V e "inventarle" unas nuevas operaciones de modo que sea un espacio vectorial; para ser subespacio, debemos considerar las mismas operaciones definidas en el espacio grande V.

Ejemplo 4.5: Subespacios vectoriales

En cualquier espacio vectorial V, los conjuntos $\{0\}$ y V mismo son siempre subespacios vectoriales de V. Por otro lado, mencionamos un hecho que probaremos más adelante: Para comprobar que un subconjunto W es subespacio vectorial sólo hay que fijarse en tres de las diez propiedades básicas de los espacios vectoriales: La cerradura de la suma, la cerradura del producto por un escalar y que el cero de V también es un elemento de W. (Inclusive podremos reducirlo a un solo enunciado, cosa que también veremos.)
Con base en ese hecho, vimos tres ejemplos no triviales (es decir, diferentes de $\{0\}$ y V) de subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^2$:

- El eje x, es decir, $\mathsf{W}_1 = \{\,(x,0) :\ x \in \mathbb{R}\,\}$; observando que:
  - Si $(x_1,0)$ y $(x_2,0)$ están en W_1, su suma es de la forma $(x_1+x_2,0)$ y también está en W_1;
  - Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $(x,0)$ está en W_2, su producto $\lambda(x,0) = (\lambda x, 0)$ también está en W; y
  - El cero de $\mathbb{R}^2$, es decir, $(0,0)$, es un elemento de W;
    concluimos que W_1 es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.
- La recta $y = x$, es decir, $\mathsf{W}_2 = \{\,(x,x) :\ x \in \mathbb{R}\,\}$:
  - Si (x_1,x_1) y (x_2,x_2) están en W_2, su suma es de la forma (x_1+x_2, x_1+x_2) y también está en W_2;
  - Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y (x,x) está en W_2, su producto $\lambda(x,x) = (\lambda x, \lambda x)$ también está en W_2; y
  - El cero de $\mathbb{R}^2$ también tiene la forma $y = x$ y por tanto es un elemento de W_2;
    concluimos que W_2 es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.
- En general, consideramos cualquier recta por el origen. Nos fijamos que una recta de éstas se puede caracterizar mediante un vector v_0, pues es justamente el conjunto de todos los múltiplos de un vector de este tipo; en otras palabras, consideramos

  $$\mathsf{W}_3 = \{\,\lambda v_0 :\ \lambda \in \mathbb{R}\,\};$$

  y de nuevo, verificamos que se cumplen las tres propiedades mencionadas:
  - Si $\lambda v_0, \mu v_0 \in \mathsf{W}_3$, entonces su suma cumple

    $$\lambda v_0 + \mu v_0 = (\lambda + \mu) v_0,$$

    por la propiedad distributiva, de modo que la suma de estos elementos vuelve a caer en W_3.
  - Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\mu v_0 \in \mathsf{W}_3$, entonces

    $$\lambda(\mu v_0) = (\lambda\mu) v_0$$

    por la asociatividad; la expresión del lado derecho es un elemento de W_3.
  - Finalmente, usando el Teorema 4.2, observamos que el cero de $\mathbb{R}^2$ se puede escribir como $0 = 0\, v_0$, de modo que también está en W_3.

  Así, tenemos que W_3 es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.

Veamos ahora más formalmente cómo decidir si un subconjunto W de un espacio vectorial es un subespacio vectorial. En principio, debemos verificar que W cumple las diez propiedades de la definición 4.2. Sin embargo, podemos observar que algunas de estas diez propiedades simplemente se heredan a W. Por ejemplo, consideremos la propiedad distributiva (EV 10): Para cualesquiera $\lambda, \mu \in K$ y cada $u \in V$,

$$(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u.$$

Así, dado que esta propiedad se cumple para cualquier $u \in \mathsf{V}$, en particular se cumple para los elementos de cualquier subconjunto W. Recordemos las diez propiedades, de nuevo, sólo usando su nombre:

- Cerradura de la suma.
- Conmutatividad de la suma.
- Asociatividad de la suma.
- Existencia del neutro para la suma.
- Existencia del inverso para la suma.
- Cerradura del producto por un escalar.
- "Asociatividad" del producto por un escalar.
- Propiedad del neutro multiplicativo de $\mathbb{R}$.
- Distributividad "uno".
- Distributividad "dos".

¿Cuáles de estas propiedades se heredan, y cuáles no? Veamos qué ocurre con la cerradura de la suma: Si $u, v \in \mathsf{W}$, sabemos que su suma está en V, pues la suma es cerrada en V. Sin embargo, no podemos afirmar que $u + v$ esté en W. Así, esta propiedad no se hereda y debemos verificarla si queremos probar que W sea un espacio vectorial.

Pueden verificar fácilmente que las siguientes propiedades de V se heredan a cualquier subconjunto $\mathsf{W} \subseteq \mathsf{V}$:

- Conmutatividad de la suma.
- Asociatividad de la suma.
- "Asociatividad" del producto por un escalar.
- Propiedad del neutro multiplicativo de $\mathbb{R}$.
- Distributividad "uno".
- Distributividad "dos".

Analicemos las cuatro propiedades restantes, una a una.

- **Cerradura de la suma**: Como ya dijimos arriba, debemos verificar que si $u, v \in \mathsf{W}$, entonces $u + v \in \mathsf{W}$.
- **Existencia del neutro para la suma**: Para que W sea un subespacio, debe tener un elemento neutro para la suma. Supongamos por el momento que W satisface esta propiedad y denotemos por 0_{V} y 0_{W} a los elementos neutros de V y W, respectivamente. Veremos que en realidad deben ser el mismo: Sea $u \in W$ arbitrario. Entonces

  $$u + 0_{\mathsf{V}} = u + 0_{\mathsf{W}},$$

  lo que implica, por cancelación, que $0_{\mathsf{V}} = 0_{\mathsf{W}}$. Es decir, W cumple la propiedad del elemento neutro si y sólo si $0_{\mathsf{V}} \in \mathsf{W}$.

- **Existencia del inverso para la suma**: Este caso es similar, inclusive más fácil, que el anterior. Si $u \in \mathsf{W}$, entonces sabemos que hay un elemento $-u \in V$ tal que $u + (-u) = 0$. Como vimos en el Corolario 4.2, este inverso debe ser único, de modo que para que se cumpla esta propiedad debemos garantizar que para todo $u \in \mathsf{W}$, el elemento $-u$ también debe estar en W.

- **Cerradura del producto por un escalar**: Como en el caso de la cerradura de la suma, también debemos verificar que se cumple la cerradura de esta operación en W; es decir, que para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y todo $u \in \mathsf{W}$ se cumple que $\lambda u \in \mathsf{W}$.

En suma, para ver si un subconjunto W es un subespacio vectorial de V, sólo debemos verificar las cuatro propiedades anteriores. Una mejor noticia es que esta verificación se puede compactar todavía más. Ése es el contenido del siguiente resultado.

Teorema 4.3

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y $\mathsf{W} \subseteq \mathsf{V}$ un subconjunto de V. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. W es un subespacio vectorial de V; es decir, satisface las diez propiedades de la definición 4.2 con las operaciones heredadas de V;
2. W satisface las propiedades de cerradura de la suma, existencia del neutro para la suma, existencia del inverso para la suma y la cerradura del producto por un escalar;
3. $\mathsf{W} \neq \varnothing$ y W satisface las propiedades de cerradura de la suma y cerradura del producto por un escalar;
4. $\mathsf{W} \neq \varnothing$ y para cualesquiera $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y $u, v \in \mathsf{W}$, se tiene que $\lambda u + \mu v \in \mathsf{W}$;
5. $\mathsf{W} \neq \varnothing$ y para cualesquiera $\lambda \in \mathbb{R}$ y $u, v \in \mathsf{W}$, se tiene que $\lambda u + v \in \mathsf{W}$.

Demostración. Las implicaciones (1) $\Rightarrow$ (2) y (2) $\Rightarrow$ (3) son sencillas, pues en cada inciso es un caso particular del anterior.

- (3) $\Rightarrow$ (4)
  Sean λ, μ y u, v como en el enunciado de (4). Por hipótesis, el producto por un escalar es una operación cerrada en W, de modo que λu y μv son elementos de W. Finalmente, como la suma es una operación cerrada en W, tenemos que $\lambda u + \mu v$ también es elemento de W.

- (4) $\Rightarrow$ (5)
  Hacemos $\mu = 1$ y usamos el hecho de que $1\,v = v$.

- (5) $\Rightarrow$ (2)
  Por nuestra discusión anterior a la proposición, basta ver ahora esta implicación, pues sabemos que W hereda las demás propiedades de V.

- Para ver que W es cerrado bajo la suma, sean $u, v \in \mathsf{W}$. Haciendo $\lambda = 1$ en (5), tenemos que $\lambda u + v = 1 \cdot u + v = u + v \in W$.

- Para ver que $0 \in \mathsf{W}$, hacemos $u = v$ y $\lambda = -1$. Por el Teorema 4.2, tenemos que

  $$\lambda u + u = (-1)u + u = (-u) + u = 0,$$

  de modo que en efecto, $0 \in \mathsf{W}$.

- Para ver que el inverso aditivo de cualquier elemento de W está en W, sea $u \in \mathsf{W}$ y hagamos $\lambda = -1$ y $v = 0$. Entonces,

  $$\lambda u + v = (-1)u + 0 = -u,$$

  de modo que $-u \in \mathsf{W}$.

- Finalmente, para verificar la cerradura del producto por un escalar, sean $\lambda \in \mathbb{R}$ y $u \in \mathsf{W}$. Haciendo $v = 0$, tenemos
$$\lambda u + v = \lambda u + 0 = \lambda u,$$
y $\lambda u \in \mathsf{W}$.

Esto muestra que (5) $\Rightarrow$ (2) y tenemos que todas nuestras afirmaciones son equivalentes. □

Ahora que disponemos de esta proposición, podemos utilizar cualquiera de estos cinco criterios para mostrar que un conjunto es subespacio vectorial de otro. Por supuesto, las formas preferidas para las demostraciones serán (4) y (5), por ser más concisas: basta verificar una sola propiedad. Ahora veremos algunos ejemplos.

Ejemplo 4.6: Matrices triangulares

Por definición, una *matriz triangular superior* es una matriz cuadrada cuyos elementos por debajo de la diagonal son iguales a cero. Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

son matrices triangulares. Consideremos una matriz 3×3, de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Entonces $A = (a_{ij})$ es triangular superior si $a_{ij} = 0$ siempre que $i > j$. (Análogamente se definen las matrices triangulares inferiores.) Sabemos que el conjunto de matrices 3×3 con entradas reales, denotado por $\mathsf{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Ahora veremos que el conjunto W de matrices triangulares superiores es un subespacio vectorial de $\mathsf{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, verificando la condición (4) de la Proposición 4.3. Sean $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ matrices triangulares superiores y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Entonces la matriz $\lambda A + \mu B$ tiene las entradas

$$[\lambda A + \mu B]_{ij} = \lambda a_{ij} + \mu b_{ij}.$$

Si $i > j$, entonces el lado derecho de esta expresión se anula, lo que nos dice a su vez que la matriz $\lambda A + \mu B$ es triangular superior; es decir, $\lambda A + \mu B \in \mathsf{W}$ y W es un subespacio vectorial de $\mathsf{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

Ejemplo 4.7: Subespacio Generado

En el ejemplo 4.5 consideramos algunos casos de manera intuitiva. Al final consideramos el conjunto W_3 de múltiplos de un vector $v_0 \in \mathbb{R}^2$. Ahora veremos que ésta es una situación general. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, $v_0 \in \mathsf{V}$ un vector fijo y

$$\mathsf{W} = \{\, \lambda v_0 \mid \lambda \in \mathbb{R} \,\};$$

usaremos la condición (5) de la Proposición 4.3 para ver que W es un subespacio vectorial de V. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $u = \lambda_1 v_0$, $v = \lambda_2 v_0$ son elementos de W, entonces

$$\lambda_3 u + v = \lambda_3(\lambda_1 v_0) + \lambda_2 v_0 = (\lambda_3\lambda_1 + \lambda_2)v_0,$$

que es un elemento de la forma λv_0 y por tanto está en W. Llamamos a W el *subespacio generado por v_0*.

Este último ejemplo es también un caso particular de una situación más general. Para explicarlo, introduciremos una notación.

Definición 4.4: Combinación Lineal

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y sean $v_1, \ldots, v_n \in \mathsf{V}$. Una *combinación lineal* de $v_1, \ldots, v_n$ es una expresión de la forma

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n,$$

donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

Ahora podemos dar un ejemplo muy importante de subespacio vectorial.

Definición 4.5: Subespacio generado

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y $A \subseteq \mathsf{V}$ un subconjunto arbitrario. El *subespacio generado por* A, denotado $\operatorname{span}(A)$ o $\langle A \rangle$, es el conjunto de todas las combinaciones lineales *finitas* de elementos de A; en símbolos,

$$\operatorname{span}(A) = \{\, \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n \,|\, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R} \text{ y } v_1, \ldots, v_n \in A \,\}.$$

Si $A = \varnothing$, definimos $\operatorname{span}(A) = \{0\}$.

Proposición 4.2

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y $A \subseteq \mathsf{V}$ un subconjunto arbitrario. $\operatorname{span}(A)$ es un subespacio vectorial de V.

Demostración. Si $A = \varnothing$, entonces $\operatorname{span}(\varnothing) = \{0\}$, que es un subespacio, así que podemos suponer que $A \neq \varnothing$. Usaremos la condición (5) de la Proposición 4.3: Si $u, v \in \operatorname{span}(A)$, entonces u, v se pueden escribir como combinaciones lineales finitas de elementos de A; es decir, existen elementos $u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n \in A$ tales que

$$u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n \quad \text{y} \quad v = \lambda'_1 v_1 + \cdots + \lambda'_m v_m;$$

observemos que los elementos que generan a u, v pueden ser distintos entre sí. Ahora, si $\lambda \in \mathbb{R}$, tenemos que

$$\begin{aligned} \lambda u + v &= \lambda(\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n) + \lambda'_1 v_1 + \cdots + \lambda'_m v_m \\ &= (\lambda\lambda_1) u_1 + \cdots + (\lambda\lambda_n) u_n + \lambda'_1 v_1 + \cdots + \lambda'_m v_m, \end{aligned}$$

que de nuevo es una combinación lineal finita de elementos de A. Por lo tanto, $\lambda u + v \in \operatorname{span}(A)$ y $\operatorname{span}(A)$ es un subespacio de V. □

En el siguiente resultado damos una caracterización un poco más intuitiva de $\operatorname{span}(A)$ como el subespacio vectorial más pequeño que contiene a A.

Proposición 4.3

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y A un subconjunto arbitrario. Si W es un subespacio vectorial de V que contiene a todos los elementos de A, entonces $\operatorname{span}(A) \subseteq \mathsf{W}$.

Demostración. Sean A, W como en el enunciado de la proposición. Si $A = \varnothing$, entonces $\operatorname{span}(\varnothing) = \{0\}$, que está contenido en W, de modo que podemos suponer que $A \neq \varnothing$. Debemos ver que $\operatorname{span}(A) \subseteq \mathsf{W}$, de modo que consideramos $u \in \operatorname{span}(A)$. Esto quiere decir que

$$u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n$$

para ciertos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ y $u_1, \ldots, u_n \in A$. Como A está contenido en W y W es un subespacio vectorial de V, los productos $\lambda_1 u_1, \ldots, \lambda_n u_n$ están en W. Usando de nuevo que W es subespacio vectorial de V, tenemos que $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n \in \mathsf{W}$, de modo que $\operatorname{span}(A) \subseteq \mathsf{W}$. □

Corolario 4.3

Sea V un espacio vectorial y $\mathsf{W} \subseteq \mathsf{V}$. W es un subespacio vectorial de V si y sólo si $\operatorname{span}(\mathsf{W}) = \mathsf{W}$.

Demostración. Supongamos primero que W es un subespacio vectorial de V. En general, sabemos que para cualquier conjunto A, tenemos que $A \subseteq \operatorname{span}(\mathsf{W})$, de modo que tenemos la contención $\mathsf{W} \subseteq \operatorname{span}(A)$. Por otro lado, podemos usar la proposición anterior, pues W es un subespacio que contiene a todos los elementos de él mismo, de modo que $\operatorname{span}(\mathsf{W}) \subseteq \mathsf{W}$. Por tanto, $\operatorname{span}(\mathsf{W}) \subseteq \mathsf{W}$.

4.5. Conjunto generador, base, dimensión

Definición 4.6: Conjunto Generador

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, W un subespacio vectorial de V y A un conjunto contenido en V. Decimos que A es un *conjunto generador de* W si y sólo si $\operatorname{span}(A) = \mathsf{W}$.

En general, un subespacio $\mathsf{W} \neq \{0\}$ tiene una infinidad de conjuntos generadores, como se muestra en los siguientes ejemplos.

Por otro lado, la proposición 4.2 nos dice que $\operatorname{span}(\mathsf{W})$ es un subespacio vectorial, de modo que si suponemos que $\operatorname{span}(\mathsf{W}) \subseteq \mathsf{W}$, entonces W es un subespacio vectorial de V. □

Ejemplo 4.8

Si A es un conjunto generador de W, entonces cualquier conjunto B tal que $A \subseteq B \subseteq \mathsf{W}$ también genera a W. La demostración de esta afirmación es sencilla y se deja como ejercicio al lector.

Ejemplo 4.9

Si A es un conjunto generador de W y $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, entonces el conjunto

$$\lambda A := \{\, \lambda u \mid u \in A \,\}$$

también genera a W. Para demostrar esto, sea $u \in \mathsf{W}$. Como A genera a W, existen vectores $u_1, \ldots, u_n \in A$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n,$$

lo que podemos escribir de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} u &= 1 \cdot (\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n) \\ &= \lambda^{-1}\lambda(\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n) \\ &= (\lambda^{-1}\lambda_1)(\lambda u_1) + \cdots + (\lambda^{-1}\lambda_n)(\lambda u_n), \end{aligned}$$

que es una combinación lineal de elementos de λA. Por lo tanto, $\mathsf{W} \subseteq \lambda A$. Por otro lado, como $A \subseteq \mathsf{W}$, entonces $\lambda A \subseteq \mathsf{W}$, por ser W subespacio. Por la misma razón, $\operatorname{span}(\lambda A) \subseteq \mathsf{W}$.

Veamos un ejemplo más concreto de dos conjuntos generadores diferentes.

Ejemplo 4.10

Sean $e_1 = (1, 0)$ y $e_2 = (0, 1)$ vectores en $\mathbb{R}^2$. Entonces $A = \{e_1, e_2\}$ es un conjunto generador de $\mathbb{R}^2$, pues cualquier vector $u = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ se puede escribir como

$$u = (x_0, y_0) = x_0 e_1 + y_0 e_2.$$

Ahora, consideremos el conjunto $A' = \{e_1 + e_2, e_1 - e_2\}$. Afirmamos que A' también es un conjunto generador de $\mathbb{R}^2$. Para mostrar esta afirmación, consideremos un vector arbitrario $u = (x_0, y_0)$ y veamos si podemos escribirlo como una combinación lineal de los elementos de A', es decir, ver si existen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tales que

$$(x_0, y_0) = \lambda(e_1 + e_2) + \mu(e_1 - e_2) = (\lambda, \lambda) + (\mu, -\mu) = (\lambda + \mu, \lambda - \mu).$$

Al igualar las coordenadas de ambos lados, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones para λ, μ:

$$\begin{aligned} x_0 &= \lambda + \mu, \\ y_0 &= \lambda - \mu, \end{aligned}$$

cuya solución es

$$\lambda = \frac{x_0 + y_0}{2}, \quad \mu = \frac{x_0 - y_0}{2},$$

es decir, (x_0, y_0) se escribe como

$$(x_0, y_0) = \frac{x_0 + y_0}{2}(e_1 + e_2) + \frac{x_0 - y_0}{2}(e_1 - e_2),$$

lo que muestra que A' es un conjunto generador de $\mathbb{R}^2$.

Un punto a destacar del corolario 4.3 es que no es útil considerar a un subespacio W como el generado por él mismo. En muchas instancias importantes, será mucho mejor encontrar un conjunto pequeño A que genere a un subespacio dado W.

Ejemplo 4.11

Consideremos los siguientes vectores en $\mathbb{R}^3$:

$$e_1 = (1,0,0), \quad e_2 = (0,1,0), \quad e_3 = (0,0,1).$$

Afirmamos que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{span}(\{e_1, e_2, e_3\})$. Como $\mathrm{span}(\{e_1, e_2, e_3\}) \subseteq \mathbb{R}^3$, sólo hay que mostrar que cualquier vector $u \in \mathbb{R}^3$ se puede escribir como combinación lineal de e_1, e_2, e_3. Pero esto es sencillo: Si escribimos $u = (u_1, u_2, u_3)$, entonces

$$u = u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3,$$

y con ello mostramos nuestra afirmación. ¿Puede haber un subconjunto de $\{e_1, e_2, e_3\}$ que genere a $\mathbb{R}^3$? En este caso, es fácil convencerse de que la respuesta es no. Por ejemplo, si quitamos a e_3, no podemos generar a los vectores cuya última coordenada es distinta de cero, y así con los otros vectores.
En el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$, podemos considerar los vectores e_i, $i = 1, \dots, n$, donde e_i es el vector que tiene un 1 en la i-ésima coordenada y 0 en las demás. Dado un vector $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ arbitrario, tenemos que

$$u = u_1 e_1 + \cdots + u_n e_n = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i,$$

de modo que $\mathbb{R}^n = \mathrm{span}(\{e_1, \dots, e_n\})$. El conjunto $\{e_1, \dots, e_n\}$ se llama la *base canónica* de $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 4.12

Consideremos las siguientes matrices en $\mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$:

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Afirmamos que $\mathrm{span}(\{E_{11}, E_{12}, E_{21}\})$ es el subespacio de las matrices triangulares superiores en $\mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Primero observemos que cualquier combinación de estas matrices es una matriz triangular superior:

$$\lambda E_{11} + \mu E_{12} + \nu E_{21} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \nu \end{pmatrix}.$$

Recíprocamente, cualquier matriz triangular superior se puede escribir como combinación lineal de estas matrices:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{21} \end{pmatrix} = a_{11} E_{11} + a_{12} E_{12} + a_{21} E_{21},$$

lo que completa la prueba de nuestra afirmación.

Ejemplo 4.13

Consideremos ahora el conjunto $P(\mathbb{R})$ de polinomios en una variable, con coeficientes en $\mathbb{R}$. Dejaremos como ejercicio verificar que éste es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con las operaciones usuales de suma y producto por un escalar. ¿Cuál podría ser un conjunto generador? Es fácil convencerse de que el conjunto (infinito)

$$A = \{\, 1, x, x^2, \dots, x^n, \dots \,\} = \{\, x^k \mid k \in \mathbb{N} \,\}$$

es uno de tales conjuntos generadores. En efecto, si P es un polinomio, digamos, de grado m, entonces P se escribe como

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m;$$

pero esto nos dice precisamente que P es una combinación lineal finita de elementos de A.

Dado un espacio vectorial V, ¿cómo podemos determinar si un conjunto dado A lo genera? Como veremos, esta pregunta tiene una relación directa con los sistemas de ecuaciones lineales.

Ejemplo 4.14

Sea $A = \{(1,2),(2,4)\} \subset \mathbb{R}^2$. ¿Es A un conjunto generador de $\mathbb{R}^2$? De nuevo, consideremos un vector arbitrario $u = (x_0, y_0)$ de $\mathbb{R}^2$. Nos preguntamos este vector se puede escribir como combinación lineal de los vectores de A, es decir, si existen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tales que

$$u = (x_0, y_0) = \lambda(1,2) + \mu(2,4) = (\lambda + 2\mu, 2\lambda + 4\mu),$$

lo que nos lleva al sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x_0 &= \lambda + 2\mu, \\ y_0 &= 2\lambda + 4\mu, \end{aligned}$$

que en general no tendrá solución. Una forma de justificar esto es viendo que $2x_0 = 2\lambda + 4\mu = y_0$. De esta forma, los vectores tales que $2x_0 \neq y_0$ no pueden ser expresados como combinación lineal de los elementos de A y por tanto A no genera a todo $\mathbb{R}^2$.

Fijemos un espacio vectorial V (piensen, por ejemplo, en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$) y un conjunto generador A. Pensemos que A no es un conjunto *óptimo*, en el sentido de que puede contener *demasiados* vectores. ¿Qué tipo de cosas ocurren? Trataremos de precisar esta idea por medio de un ejemplo.

Ejemplo 4.15

Ya hemos visto que la base canónica $\{e_1, e_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ es un conjunto generador. También vimos que si le quitamos uno o más elementos, este conjunto ya no es generador de $\mathbb{R}^2$. Por otro lado, también vimos que si le agregamos cualquier conjunto de vectores, el conjunto resultante también será generador. Por ejemplo, agreguemos un vector cualquiera, $(1, -1)$. Ahora, si $u = (x_0, y_0)$ es un vector de $\mathbb{R}^2$, sabemos que existen números λ, μ, ν tales que

$$u = (x_0, y_0) = \lambda(1, 0) + \mu(0, 1) + \nu(1, -1),$$

lo que nos lleva al sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x_0 &= \lambda + \nu, \\ y_0 &= \mu - \nu, \end{aligned}$$

que tiene la solución $\lambda = x_0$, $\mu = y_0$ y $\nu = 0$, que es en esencia la que habíamos obtenido antes. Pero existen otras soluciones; por ejemplo,

$$\lambda = 0, \quad \mu = x_0 + y_0, \quad \nu = x_0,$$

o bien

$$\lambda = x_0 + y_0, \quad \mu = 0, \quad \nu = -y_0.$$

De hecho, el lector puede verificar que el sistema de ecuaciones tiene una infinidad de soluciones, para cualquier (x_0, y_0) elegido. En particular, si $(x_0, y_0) = (0, 0)$ (en lenguaje de ecuaciones, consideramos el sistema homogéneo), las soluciones del sistema satisfacen

$$\lambda = -\nu, \quad \mu = \nu,$$

y ν puede tomar cualquier valor en $\mathbb{R}$. La teoría de ecuaciones lineales nos dice que *cualquier solución de un sistema no homogéneo es la suma de una solución particular del sistema no homogéneo más una solución del sistema homogéneo asociado*. En nuestro caso, lo que estamos diciendo es que si el cero de nuestro espacio vectorial se puede escribir de una infinidad de maneras como combinación lineal de elementos de un conjunto A, entonces cualquier vector también se puede escribir de una infinidad de maneras.

Esta idea nos sugiere fijarnos en los conjuntos de vectores tales que el cero de V se puede escribir de manera única como combinación lineal de ellos. Precisaremos esta idea en la definición siguiente:

Definición 4.7: Combinación lineal trivial

Sea V un espacio vectorial. Si $u_1, \ldots, u_n \in \mathsf{V}$, llamamos a

$$0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + \cdots + 0 \cdot u_n$$

la *combinación lineal trivial* de $u_1, \ldots, u_n \in \mathsf{V}$.

Definición 4.8: Independencia lineal

Sea A un subconjunto de V. Decimos que A es un *conjunto linealmente independiente*, o bien que los vectores de A son *linealmente independientes*, si la única manera de escribir a $0 \in \mathsf{V}$ como combinación lineal de elementos de A es la combinación lineal trivial. En otras palabras, si

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n = 0,$$

entonces $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Ejemplo 4.16

Veremos que los vectores de la base canónica $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ es un conjunto de vectores linealmente independientes. Supongamos que

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n = 0;$$

entonces el lado izquierdo es el vector $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$; como estamos suponiendo que esta combinación es igual al vector cero, tenemos que las coordenadas de ambos vectores coinciden, de modo que $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Ejemplo 4.17

En el ejemplo 4.12 consideramos las matrices

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Veamos que estas matrices son linealmente independientes. Consideremos la condición

$$\lambda_{11} E_{11} + \lambda_{12} E_{12} + \lambda_{22} E_{22} = 0,$$

donde hemos etiquetado a los números λ de una manera adaptada a este problema. En forma matricial, esta ecuación nos dice que

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ 0 & \lambda_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

lo que implica de inmediato que $\lambda_{11} = \lambda_{12} = \lambda_{22} = 0$, de modo que las matrices son linealmente independientes.

En los dos ejemplos anteriores fue más o menos fácil mostrar la independencia lineal de los vectores. Sin embargo, puede haber ejemplos que no sean tan claros y haya que recurrir a otros tipos técnicas.

Ejemplo 4.18

Consideremos $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, el conjunto de funciones $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Mostraremos que las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \cos x$ son linealmente independientes. Supongamos entonces que

$$\lambda f + \mu g = 0,$$

donde el cero del lado derecho indica a la función cero. Debemos interpretar esta ecuación como

$$\lambda \operatorname{sen} x + \mu \cos x = 0,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Como esta ecuación vale para todo x, podemos sustituir valores adecuados en vez de x. Por ejemplo, si $x = 0$, entonces tenemos que

$$\lambda \operatorname{sen} 0 + \mu \cos 0 = 0, \quad \text{o bien} \quad \mu = 0,$$

lo que nos dice que $\lambda \operatorname{sen} x = 0$ para todo x. Si ahora consideramos $x = \pi/2$, tenemos que

$$\lambda \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 0, \quad \text{o bien} \quad \lambda = 0,$$

con lo que podemos concluir la independencia lineal de estas funciones.

Podemos ahora establecer un concepto fundamental de la teoría de espacios vectoriales.

Definición 4.9: Base de un espacio vectorial

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Una *base* de V es un conjunto generador de V de vectores linealmente independientes.

Ejemplo 4.19

En vista de los ejemplos desarrollados hasta ahora, podemos decir que la base canónica $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$ en el sentido de la definición anterior. Por otro lado, las matrices E_{11}, E_{12}, E_{22} forman una base para las matrices triangulares 2×2; ver el ejemplo 4.12.

En este momento, debemos hacer un alto en el camino. No porque no podamos seguir adelante, sino porque el material a partir de este punto *se sale de los objetivos del curso*, como dicen los clásicos. Daremos apenas un esbozo de lo que ocurre en esta teoría, que dejaremos para cursos posteriores.

En primer lugar, no es claro *a priori* que cualquier espacio vectorial tenga (al menos) una base. En algunas instancias será posible mostrar esto de manera sencilla, pero en otros contextos será particularmente difícil y habrá que echar mano de cuestiones como el axioma de elección y sus equivalentes. Nosotros nos conformaremos con dar por descontado este resultado y que, además, es evidente la existencia de una base para muchos de los espacios vectoriales con los que realmente estamos trabajando.

Otro resultado que no es sencillo de demostrar en un contexto general es el siguiente.

Teorema 4.4

Todas las bases de un mismo espacio vectorial tienen la misma cardinalidad.

Suponiendo este resultado, tiene sentido la siguiente definición.

Definición 4.10: Dimensión de un espacio vectorial

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. La *dimensión* de V es la cardinalidad de una base (y por tanto, la de cualquiera).

Nosotros usaremos sólo algunos espacios vectoriales que admiten una base finita y les llamaremos *espacios vectoriales de dimensión finita*. El ejemplo clásico es $\mathbb{R}^n$, que tiene dimensión n, como era de esperar. De hecho, un *spoiler* del curso de álgebra lineal es que en él se definirá el concepto de isomorfismo de espacios vectoriales y se mostrará, con cierta facilidad, lo siguiente.

Teorema 4.5

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{R}$. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que V es isomorfo a $\mathbb{R}^n$.

Por el momento, debemos regresar a nuestro curso de geometría analítica. En las siguientes secciones analizaremos unas operaciones que tienen un profundo sentido geométrico.

4.6. Producto escalar y producto vectorial

En esta sección definiremos tres operaciones sobre vectores, que nos serán de gran utilidad en nuestro curso. Comenzaremos con el producto escalar.

Definición 4.11: Producto escalar

Sean $u, v \in \mathbb{R}^n$. El *producto escalar* (punto, interior o interno) de u y v se define como

$$u \cdot v = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n,$$

si $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ y $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$.

Es importante notar que:

1. El producto escalar es una función que va de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$, es decir, el producto escalar entre dos vectores *no es un vector*, sino un número real.
2. El producto escalar es sólo entre vectores de la misma dimensión.

Proposición 4.4: Propiedades del producto escalar

El producto escalar satisface las siguientes propiedades:

1. Bilinealidad: Para cualesquiera $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ se tiene

$$u \cdot (\lambda v + \mu w) = \lambda(u \cdot v) + \mu(u \cdot w),$$
$$(\lambda u + \mu v) \cdot w = \lambda(u \cdot w) + \mu(v \cdot w).$$

2. Simetría: Para cualesquiera $u, v \in \mathbb{R}^n$, $u \cdot v = v \cdot u$.
3. Positivo definido: Para cualquier $u \in \mathbb{R}^n$, $u \cdot u \geq 0$. Además, $u \cdot u = 0$ si y sólo si $u = 0$.

Demostración. Veamos qué ocurre en cada inciso.

1. Para el primer caso, recordemos que

$$\lambda v + \mu w = (\lambda v_1 + \mu w_1, \ldots, \lambda v_n + \mu w_n).$$

Luego, denotando por $(\lambda v + \mu w)_i$ a la i-ésima coordenada de $\lambda v + \mu w$,

$$\begin{aligned} u \cdot (\lambda v + \mu w) &= \sum_{i=1}^{n} u_i (\lambda v + \mu w)_i = \sum_{i=1}^{n} u_i(\lambda v_i + \mu w_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\lambda(u_i v_i) + \mu(u_i w_i)) = \lambda \sum_{i=1}^{n} u_i v_i + \mu \sum_{i=1}^{n} u_i w_i \\ &= \lambda(u \cdot v) + \mu u \cdot w. \end{aligned}$$

El segundo caso es similar.

2. Tenemos que

$$u \cdot v = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = \sum_{i=1}^{n} v_i u_i = u \cdot v.$$

3. Para probar la primera parte, como $u_i^2 \geq 0$ para todo i, tenemos

$$u \cdot u = \sum_{i=1}^{n} u_i^2 \geq 0.$$

Ahora probaremos que $u \cdot u = 0$ si y sólo si $u = 0$.

$$\begin{aligned} u \cdot u = 0 &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} u_i u_i = 0; \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} u_i^2 = 0; \\ &\Leftrightarrow u_i^2 = 0, \qquad \text{para todo } i = 1, 2, \ldots, n; \\ &\Leftrightarrow u_i = 0, \qquad \text{para todo } i = 1, 2, \ldots, n; \\ &\Leftrightarrow u = 0. \end{aligned}$$

□

Definición 4.12: Norma

Sea $u \in \mathbb{R}^n$. La *norma* o *magnitud* de u se define como

$$\|u\| = \sqrt{u \cdot u}.$$

Para aclarar la noción de norma, pensemos en el caso de $\mathbb{R}^2$. La expresión de la norma de un vector $u = (u_1, u_2)$,

$$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2},$$

es consecuencia directa del uso del teorema de Pitágoras como se aprecia en la figura 4.1.

Definición 4.13: Distancia entre dos vectores

Sean $u, v \in \mathbb{R}^n$. La distancia d entre u y v se define como la norma del vector $v - u$.

$$d(u, v) = \|v - u\|.$$

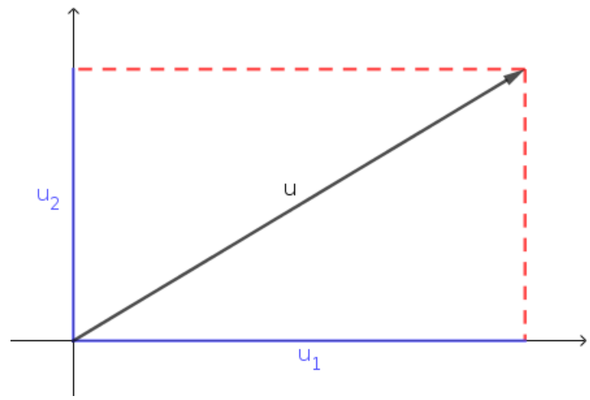


Figura 4.1: Norma de un vector en $\mathbb{R}^2$

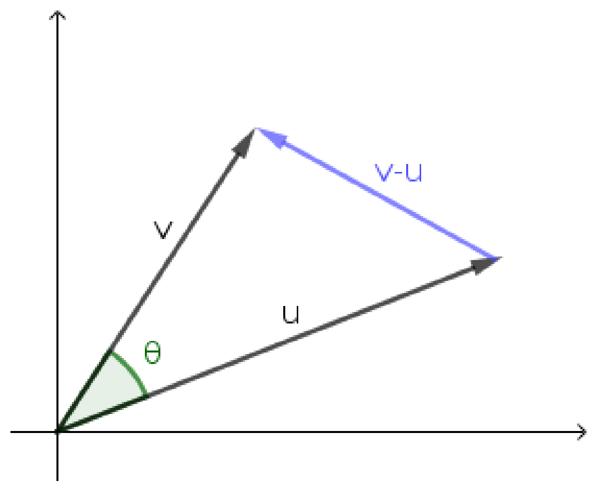


Figura 4.2: Ángulo entre dos vectores

Una vez dadas estas definiciones, podemos dar paso al siguiente teorema, el cual nos dará una noción más geométrica del uso del producto escalar.

Teorema 4.6: Ángulo entre vectores

Sean $u, v \in \mathbb{R}^n$ dos vectores y sea θ, donde $0 \leq \theta \leq \pi$, el ángulo que forman dichos vectores. Entonces

$$u \cdot v = \|u\|\|v\| \cos\theta.$$

Antes de dar la prueba, pensemos en el caso de $\mathbb{R}^2$. Como se aprecia en la figura 4.2, los vectores u, v y $v - u$ forman un triángulo, en el cual podemos usar la ley de cosenos. Para pensar en el caso de $\mathbb{R}^n$, podemos hacer uso de la misma figura, ya que dos vectores siempre forman un plano.

Demostración. Aplicando la ley de los cosenos al triángulo que tiene como lados adyacentes a los vectores u y v (como se muestra en la figura 4.2), se sigue que

$$\|v - u\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\| \cos\theta.$$

Desarrollando $\|v-u\|^2$,

$$\begin{aligned}\|v-u\|^2 &= (v-u)\cdot(v-u)\\ &= v\cdot(v-u) - u\cdot(v-u)\\ &= v\cdot v - v\cdot u - u\cdot v + u\cdot u\\ &= \|v\|^2 + \|u\|^2 - 2(u\cdot v).\end{aligned}$$

Así,

$$\|v\|^2 + \|u\|^2 - 2(u\cdot v) = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\|\cos\theta.$$

Esto es,

$$u\cdot v = \|u\|\|v\|\cos\theta.$$

□

Se deduce de la identidad anterior que si u y v son vectores distintos de cero, podemos expresar a θ como

$$\theta = \arccos\left(\frac{u\cdot v}{\|u\|\,\|v\|}\right).$$

Definición 4.14: Vectores ortogonales

Sean $u, v \in \mathbb{R}^n$. Decimos que u y v son *ortogonales* si $u\cdot v = 0$. Esto se denota por $u \perp v$.

Ahora pasaremos a otro operador importante, el producto vectorial o producto cruz.

Sean $u, v \in \mathbb{R}^n$ dos vectores dados. Queremos construir un vector $w \in \mathbb{R}^n$ tal que $w \perp u$ y $w \perp v$. El caso $n = 1$ es simple, pues el producto escalar en $\mathbb{R}$ no es más que el producto usual. Así, si $u \in \mathbb{R}$, entonces tenemos dos casos:

- Si $u = 0$, sabemos que $u\cdot v = 0\cdot v = 0$ para todo $v \in \mathbb{R}$. Decimos que el cero es ortogonal a todos los demás elementos de $\mathbb{R}$.
- Si $u \neq 0$, entonces la única manera para que $u\cdot v = 0$ es que $v = 0$.

Si $n = 2$ y $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, entonces buscamos $v = (v_1, v_2)$ tal que $u_1v_1 + u_2v_2 = 0$. Como en el caso $n = 1$, si $u = 0$, en realidad u es ortogonal a todos los vectores en $\mathbb{R}^2$, de modo que podemos suponer $u \neq 0$. En este caso, el lector se puede convencer fácilmente que si un vector v es ortogonal a u, entonces para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ el vector λv también es ortogonal a u. Así, hauy una infinidad de vectores que son ortogonales a u. Por razones que no serán evidentes por el momento, elegimos uno de estos vectores de manera particular: Si $u = (u_1, u_2)$, entonces denotamos por $u^\perp$ al vector $v = u^\perp = (-u_2, u_1)$, que claramente satisface $u\cdot u^\perp = 0$.

En general, la construcción de vectores ortogonales es un poco más complicada para el caso $n > 3$. Ahora nos centraremos en el caso $n = 3$.

Definición 4.15: Producto vectorial

Sean $u = (u_1, u_2, u_3)$ y $v = (v_1, v_2, v_3)$ en $\mathbb{R}^3$. El *producto vectorial* o *producto cruz* de u y v, denotado por $u \times v$, se define como el vector

$$u\times v = \begin{vmatrix} u_2 & u_3\\ v_2 & v_3\end{vmatrix}\hat\imath - \begin{vmatrix} u_1 & u_3\\ v_1 & v_3\end{vmatrix}\hat\jmath + \begin{vmatrix} u_1 & u_2\\ v_1 & v_2\end{vmatrix}\hat k.$$

Donde $\hat\imath, \hat\jmath, \hat k$ son los vectores unitarios en $\mathbb{R}^3$, dados por

$$\hat\imath = (1,0,0);\quad \hat\jmath = (0,1,0);\quad \hat k = (0,0,1).$$

Una forma más común de escribir al producto vectorial es la dada por el determinante de 3×3

$$u \times v = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

Observación 4.1

Si bien ésta es una notación cómoda, no es formalmente correcta, pues en un determinante no podemos escribir más de un vector por renglón, lo cual estamos "pasando por alto" en el primer renglón del determinante anterior.

Una vez dada la definición de producto vectorial, podemos dar algunas propiedades del mismo.

Teorema 4.7: Propiedades del producto cruz

El producto vectorial satisface las siguientes propiedades:

1. Bilinealidad: Para cualesquiera $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ se tiene

$$u \times (\lambda v + \mu w) = \lambda(u \times v) + \mu(u \times w),$$
$$(\lambda u + \mu v) \times w = \lambda(u \times w) + \mu(v \times w).$$

2. Antisimetría: Para cualesquiera $u, v \in \mathbb{R}^n$, $u \times v = -(v \times u)$.
3. $u \cdot (u \times v) = u \cdot (u \times v) = 0$. En otras palabras, el vector $u \times v$ es ortogonal a u y v.
4. $\|u \times v\| = \|u\| \cdot \|v\| \cdot |\operatorname{sen} \theta|$, donde $0 \leq \theta \leq \pi$ es el ángulo que forman dichos vectores.
5. $u \times v = 0$ si y sólo si u y v son linealmente dependientes.

Demostración. La prueba de las primeras dos afirmaciones es consecuencia directa de las propiedades de los determinantes; ver el Apéndice B.

Para probar la tercera afirmación, primero obtendremos una fórmula general para $u \cdot (v \times w)$. Para ello escribamos a $v \times w$ como

$$v \times w = \left(\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \right).$$

Así

$$u \cdot (v \times w) = u_1 \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}.$$

Este es el desarrollo "por menores" siguiendo la primera fila de un determinante de 3×3:

$$u \cdot (v \times w) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Usando esta fórmula, tenemos

$$u \cdot (u \times v) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix},$$

y como tenemos dos renglones iguales, este determinante se anula, de modo que $u \cdot (u \times v) = 0$. La afirmación $v \cdot (u \times v) = 0$ se prueba de forma similar.

Para probar la cuarta afirmación, comenzaremos calculando $\|u \times v\|^2$:

$$\begin{aligned}\|u \times v\|^2 &= \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}^2 \\ &= (u_2v_3 - u_3v_2)^2 + (u_1v_3 - u_3v_1)^2 + (u_1v_2 - u_2v_1)^2.\end{aligned}$$

Si desarrollamos los términos de la última expresión, podemos agruparlos para obtener

$$\begin{aligned}\|u \times v\|^2 &= \left(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2\right)\left(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2\right) - \left(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3\right)^2. \\ &= \|u\|^2\|v\|^2 - (u \cdot v)^2.\end{aligned}$$

Luego, usando el teorema 4.6 y el hecho de que $1 - \cos^2\theta = \operatorname{sen}^2\theta$ para toda $\theta \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\|u \times v\|^2 = \|u\|^2\|v\|^2 - \|u\|^2\|v\|^2\cos^2\theta = \|u\|^2\|v\|^2\operatorname{sen}^2\theta.$$

Finalmente,

$$\|u \times v\| = \|u\|\|v\|\left|\operatorname{sen}\theta\right|.$$

Usaremos esta expresión para probar la última afirmación. Primero observemos que si u, v son linealmente dependientes, entonces tenemos dos casos:

- Si alguno de los vectores es 0, entonces es fácil ver que el producto $u \times v$ se anula. (El determinante 3×3 tiene un renglón de ceros.)
- Si los vectores u, v son diferentes de cero, por ser linealmente dependientes existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $u = \lambda v$. Usando las propiedades de los determinantes, de nuevo es fácil ver que $u \times v = 0$.

Recíprocamente, si $u \times v = 0$, tenemos que $\|u\|\|v\|\left|\operatorname{sen}\theta\right| = 0$, de donde (a) alguno de los vectores es igual a cero, o bien (b) el seno del ángulo θ entre u y v es cero. Como estamos eligiendo $\theta \in [0, \pi]$, $\theta = 0$ o bien $\theta = \pi$, de donde obtenemos que los vectores son linealmente dependientes. □

La cuarta afirmación del teorema nos permite dar una interpretación geométrica del producto vectorial. Supongamos que $u, v \in \mathbb{R}^3$ son linealmente independientes y consideremos el paralelogramo generado por tales vectores. Entonces el área de dicha figura es $\|u\|\|v\|\left|\operatorname{sen}\theta\right|$. (¿Por qué?) Entonces, el producto vectorial de u, v es un vector ortogonal a ambos, cuya longitud es igual al área del paralelogramo generado por tales vectores.

Con la ayuda del producto escalar y el producto vectorial, ahora introduciremos un tercer tipo de producto.

Definición 4.16: Triple producto escalar

Sean $u, v, w \in \mathbb{R}^3$. El número real

$$u \cdot (v \times w)$$

se llama *triple producto escalar* de u, v y w (en ese orden) y se denota (u, v, w).

4.7. Epílogo

Hasta ahora hemos esbozado los principios básicos de la teoría de espacios vectoriales, exponiendo apenas lo necesario para dar a la geometría analítica un enfoque vectorial, el cual iniciaremos en el siguiente tema.

Como recordarán, al principio del curso hicimos un poco de geometría sin coordenadas. Para ser más precisos, hicimos (o recordamos) un poco de geometría euclidiana. Posteriormente, impusimos a nuestro plano o espacio euclidiano un sistema de coordenadas (de hecho, distintos sistemas), con el fin de expresar algunos conjuntos en el plano o el espacio de alguna manera algebraica. Algunos, o la mayoría de estos conjuntos eran ya conocidos por el lector.

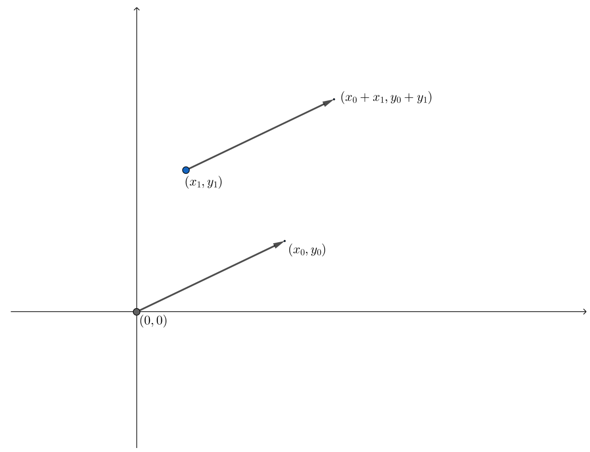


Figura 4.3: Fuerzas, o vectores, equivalentes en $\mathbb{R}^2$.

Ahora pasaremos a darle un nuevo carácter a nuestros elementos y a nuestros conjuntos: En el siguiente tema pensaremos más en vectores, y no en puntos. Una de las ventajas de este enfoque es que podemos generalizar muy fácilmente lo que ocurre en $\mathbb{R}^2$ a sus parientes cercanos, $\mathbb{R}^3$ y en general $\mathbb{R}^n$. En este curso no iremos mucho más allá, pero basta decir que mucho de lo que hagamos se podrá ver de manera completamente análoga en otros espacios vectoriales. Así, por ejemplo, podemos hablar de una línea recta en el espacio de matrices, de ortogonalidad en el espacio de polinomios, etcétera.

Unas palabras sobre la representación de los vectores en $\mathbb{R}^2$ (de nuevo, esto vale para $\mathbb{R}^n$ y otros casos). Cada punto en el plano se puede identificar de manera natural con un vector, pensando el vector como anclado en el origen; es decir, identificamos el punto (x_0, y_0) con el vector (x_0, y_0). Esto suele no causar mayor confusión. Pero también podemos hacer una analogía de los vectores como fuerzas que actúan en el plano, de modo que una fuerza aplicada en el origen corresponda a una fuerza aplicada en otro punto del plano si su efecto es exactamente el mismo.

Para hacernos una idea más precisa de cómo funciona esto, consideremos un vector (x_0, y_0) como una fuerza aplicada en el origen. Si queremos aplicarla en un punto (x_1, y_1) (observe que jugamos con este papel de los puntos-vectores), entonces anclamos (x_0, y_0) en (x_1, y_1), lo que nos da por resultado el vector suma $(x_0 + x_1, y_0 + y_1)$. Una observación simple, pero importante, es que

$$(x_0 + x_1, y_0 + y_1) - (x_1, y_1) = (x_0, y_0).$$

Así, podemos decir que una fuerza (x_2, y_2) anclada en un punto (x_1, y_1) es equivalente a la fuerza (x_0, y_0) anclada en $(0, 0)$ si y sólo si

$$(x_2, y_2) - (x_1, y_1) = (x_0, y_0).$$

Podemos precisar esta idea y dar una definición formal, si pensamos una fuerza como una pareja de puntos en $\mathbb{R}^2$ de la forma (P_I, P_F), donde pensamos a P_I como el punto inicial (donde se aplica la fuerza) y P_F como el punto final (adonde la fuerza lleva a P_I). Entonces, establecemos una relación entre parejas de este tipo; decimos que (P_I, P_F) y (P'_I, P'_F) están relacionadas, y escribimos $(P_I, P_F) \equiv (P'_I, P'_F)$, si y sólo si $P_F - P_I = P'_F - P'_I$ (como vectores). Por ejemplo, la pareja $\{(0, 0), (2, 1)\}$ es equivalente a la pareja $\{(2.5, 4), (4.5, 5)\}$, pues $(4.5, 5) - (2.5, 4) = (2, 1) - (0, 0)$. El lector observador notará que usamos esta “movilidad” de los vectores en la Figura 4.2, la cual usaremos de manera libre de aquí en adelante.

Episodio V

Las líneas rectas y planos contraatacan

Como dijimos al final del tema anterior, ahora usaremos el lenguaje de los espacios vectoriales para estudiar los objetos enunciados en el título, que como veremos, están asociados a ecuaciones y desigualdades lineales.

5.1. Líneas rectas en $\mathbb{R}^2$

Ejemplo 5.1

Comencemos con un ejemplo motivador. Sea $\mathcal{L}_1$ una recta en el plano, que pase por el origen y no sea vertical. Como sabemos, una ecuación para esta recta es de la forma $y = mx$. Es decir, como conjunto de puntos,

$$L_1 = \{ (x, y) \mid y = mx \}.$$

Otra manera de escribir a este conjunto sería la siguiente:

$$L_1 = \{ (x, mx) \mid x \in \mathbb{R} \}.$$

¿Cómo podemos expresar esto en forma vectorial? Observemos que, como vectores,

$$(x, mx) = x(1, m),$$

es decir, L es el conjunto de todos los vectores múltiplos de $(1, m)$. Decimos que $(1, m)$ es el *vector de dirección* de L. Observemos que esta descripción vectorial también nos sirve para el caso en que la recta sea vertical: Basta elegir como vector de dirección a uno vertical; por ejemplo, $(0, 1)$.

¿Qué ocurre con una recta L_2 que no pase por el origen? Sabemos que una de las formas de estas rectas es $y = mx + b$, con m, b fijos. En forma vectorial,

$$L_2 = \{ (x, mx + b) \mid x \in \mathbb{R} \} = \{ x(1, m) + (0, b) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Como antes, decimos que $(1, m)$ es el vector de dirección de L_2. ¿Cómo interpretamos al vector $(0, b)$. Sabemos que b es llamada la *ordenada al origen* de la recta; es justamente el punto donde L_2 interseca al eje y. En otros términos, $(0, b)$ es un punto por el que pasa la recta L_2 y justamente corresponde al caso en que $x = 0$.

Para dar la definición de una recta en forma vectorial, usaremos una notación más común, distinta a la del ejemplo.

Definición 5.1: Recta

Sean $P_0, v \in \mathbb{R}^2$, con $v \neq 0$. La *línea recta* que pasa por P_0 con vector de dirección v es el conjunto de puntos P tales que

$$P = P_0 + tv, \quad \text{con } t \in \mathbb{R}. \tag{5.1}$$

Observemos que si $v = 0$, entonces el único punto que satisface la ecuación $P = P_0 + tv$ es justamente P_0, de modo que necesitamos la condición $v \neq 0$ para realmente representar a una recta.

Ejemplo 5.2

El eje x se puede escribir en la forma (5.1) haciendo $P_0 = (0,0)$ y $v = (1,0)$. Por supuesto, ésta no es la única forma de escribirlo; otros ejemplos son:

- $P_0 = (0,0)$, $v = (4,0)$;
- $P_0 = (-1,0)$, $v = (-2,0)$.

Observación 5.1

Como ya hemos venido señalando, el uso de vectores nos permite hablar de diversos conceptos en cualquier espacio vectorial. Una línea recta en un espacio vectorial V no será más que un conjunto que satisface una ecuación de la forma (5.1). Así, por ejemplo, en el espacio $\mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, podemos pensar en el conjunto de matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t & 3 \\ 0 & 1+2t \end{pmatrix}$$

como una recta que pasa por la matriz identidad en $t = 0$.

La ecuación vectorial $P = P_0 + tv$ se puede separar en coordenadas como

$$x = x_0 + tv_1, \quad y = y_0 + tv_2;$$

suponiendo que $v_1, v_2 \neq 0$. Ésta es la llamada *forma paramétrica de la ecuación de la recta*. Además, podemos despejar t en ambas ecuaciones, obteniendo otra forma de la ecuación:

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2}.$$

Recordemos otras formas de las ecuaciones de las rectas en el plano, como la llamada ecuación general de primer grado:

$$ax + by + c = 0,$$

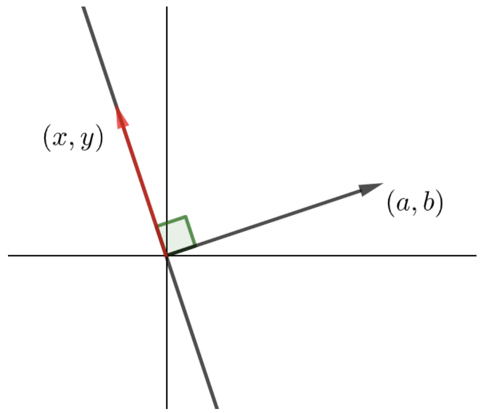
donde a, b, c son ciertas constantes. Comencemos con el caso $c = 0$. Esto ocurre cuando la recta pasa por el origen:

$$ax + by = 0.$$

Ahora podemos pensar esta ecuación en forma vectorial con la ayuda del producto escalar:

$$(a, b) \cdot (x, y) = 0.$$

¿Qué nos dice esta ecuación? Recordemos de la definición 4.14 que dos vectores son ortogonales si su producto escalar es igual a cero. Así, esta última ecuación nos dice que los vectores (a, b) y (x, y) son ortogonales. Podemos visualizar esto como en la figura 5.1.



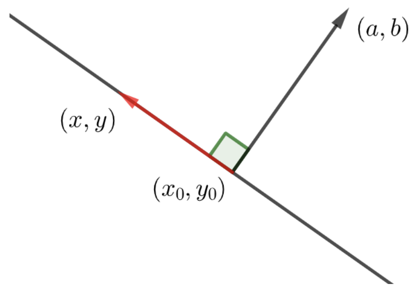


Figura 5.1: (a) Interpretación de $(a, b) \cdot (x, y) = 0$. Todos los vectores de la recta ortogonal a (a, b) satisfacen esta condición, incluyendo al vector (x, y), en rojo. (b) Interpretación de $(a, b) \cdot (x - x_0, y - y_0) = 0$.

Por otro lado, ¿cómo podemos interpretar la ecuación general $ax + by + c = 0$? Por supuesto, podemos interpretarla como $(a, b) \cdot (x, y) = -c$, pero la interpretación de esta ecuación puede ser algo complicada, de modo que procederemos de otra manera.

Puesto que ya hemos analizado qué ocurre cuando la recta en cuestión pasa por el origen, veamos ahora qué ocurre cuando la recta pasa por un punto $P_0 = (x_0, y_0)$ diferente del origen. En realidad, la situación será completamente análoga, a la figura 5.1, pero en vez de basarla en el origen, pensémosla basada en P_0. Ahora, lo que necesitamos es que el vector $P - P_0 = (x - x_0, y - y_0)$ sea ortogonal a (a, b); es decir, pedimos que

$$(a, b) \cdot (x - x_0, y - y_0) = 0,$$

lo que podemos escribir como

$$(P - P_0) \cdot w = 0, \quad \text{con } w = (a, b). \tag{5.2}$$

Una pequeña observación: Si w fuese el vector cero, entonces la ecuación anterior se satisfaría para cualquier P; es decir, la ecuación NO representaría a una recta. De este modo, supondremos todo el tiempo que $w \neq 0$.

¿Cómo pasar de esta forma a, digamos, la ecuación dada en la definición 5.1? Recordemos que allá definimos la línea recta como el conjunto tal que

$$P = P_0 + tv,$$

donde P_0 es un punto de la recta en cuestión, mientras que v es el vector de dirección. Para hacer la traducción a la nueva forma de la recta, consideremos un vector w que sea ortogonal a v; es decir, $v \cdot w = 0$. Entonces re-escribimos la ecuación de arriba como

$$P - P_0 = tv,$$

y hacemos el producto escalar con w:

$$(P - P_0) \cdot w = (tv) \cdot w = t(v \cdot w) = 0,$$

que es la ecuación (5.2). Recíprocamente, si tenemos la ecuación $(P - P_0) \cdot w = 0$, entonces afirmamos que existe un vector $v \neq 0$ tal que $v \cdot w = 0$ y que cualquier vector que sea ortogonal a w debe ser un múltiplo de v. Enseguida mostraremos este hecho, pero si lo damos por válido, entonces tenemos que $P - P_0$ debe ser múltiplo de v; es decir, $P - P_0 = tv$, de donde obtenemos la ecuación de la definición 5.1.

Lema 5.1

Sea $w \neq 0$ un vector de $\mathbb{R}^2$. Consideremos el conjunto de vectores ortogonales a w. Entonces existe un vector $v \neq 0$ que genera a dicho conjunto.

Demostración. Hagamos $w = (a, b)$ y sea (x, y) ortogonal a w. Entonces

$$(a, b) \cdot (x, y) = ax + by = 0.$$

Como $w \neq 0$, alguno de los números a, b es diferente de cero. Supongamos primero que $b \neq 0$. Entonces,

$$y = -\frac{a}{b}x,$$

lo que nos dice que el conjunto de vectores ortogonales a w cae en la recta con esta última ecuación. Como hemos visto, el conjunto de estos vectores se puede escribir como

$$(x, y) = \left(x, -\frac{a}{b}x\right) = x\left(1, -\frac{a}{b}\right),$$

de modo que podemos elegir al vector que buscamos como

$$v = \left(1, -\frac{a}{b}\right);$$

observando que $v \neq 0$. La demostración en el caso $a \neq 0$ es similar: De la ecuación $ax + by = 0$ obtenemos

$$x = -\frac{b}{a}y,$$

y un vector que genera al conjunto de los vectores ortogonales a w es

$$v = \left(-\frac{b}{a}, 1\right).$$

lo que concluye la demostración. □

Una inspección visual de las ecuaciones de las rectas permite extraer la información anterior de manera más sencilla. Sabemos que en la ecuación $ax + by + c = 0$ el vector $w = (a, b)$ juega el papel de un vector normal a la recta. Recordando que el vector $v = w^\perp = (-b, a)$ siempre es perpendicular a w, tenemos que v es un vector de dirección de la recta en cuestión. Así, por ejemplo, dada la recta

$$2x + 3y = 7,$$

tenemos que un vector ortogonal a la recta es $w = (2, 3)$, mientras que un vector de dirección es $v = (-3, 2)$.

5.2. Rectas

Podemos usar el lenguaje vectorial para expresar los conceptos geométricos ya conocidos, pero en lenguaje vectorial. De hecho, ya expresamos la norma y la distancia entre vectores de esta manera (Definiciones 4.12 y 4.13), respectivamente.

Veamos un concepto geométrico más, el de la distancia de un punto P_1 a una recta L. Recordemos que esta distancia es justamente la distancia de P_1 al pie de la perpendicular de P_1 a L, como en la figura 5.2.

Supongamos que el punto P_1 tiene coordenadas (x_1, y_1) y que el pie de la perpendicular es el punto $P_0 = (x_0, y_0)$. Si $w = (a, b)$ es un vector ortogonal a L, entonces podemos escribir la ecuación de L como

$$0 = (P - P_0) \cdot w = a(x - x_0) + b(y - y_0) = ax + by + c,$$

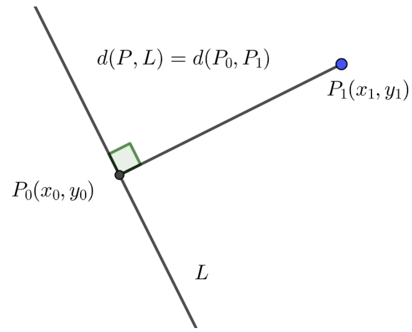


Figura 5.2: La distancia de un punto P a una recta L.

donde $P = (x, y)$ es un punto arbitrario de L y $c = -ax_0 - by_0$. Como el vector $P_1 - P_0$ es perpendicular a L, el ángulo θ entre este vector y w es $0 + 2\pi k$ ó $\pi + 2\pi k$; en cualquier caso, $\cos\theta = \pm 1$. Usando la expresión del teorema 4.6,

$$(P_1 - P_0) \cdot w = \|P_1 - P_0\| \cdot \|w\| \cos\theta = \pm d\|w\|,$$

donde d es la distancia por determinar. Entonces

$$d = \pm\frac{(P_1 - P_0) \cdot w}{\|w\|} = \pm\frac{ax_1 + by_1 - ax_0 - by_0}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \pm\frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Puesto que la distancia debe ser un número positivo, obtenemos el siguiente resultado:

Proposición 5.1: Distancia de un punto a una recta

Sean $P_1 = (x_1, y_1)$ un punto de $\mathbb{R}^2$ y L una recta con ecuación $ax + by + c = 0$. Entonces la distancia d de P_1 a L está dada por

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Ejemplo 5.3

Veamos primero un ejemplo sencillo. Es claro que la distancia entre un punto (x_1, y_1) y el eje x es igual al valor absoluto de su segunda coordenada. Verifiquemos esto por medio de la expresión recién obtenida. Puesto que una ecuación para el eje x es $y = 0$, tenemos que $a = 0$, $b = 1$ y $c = 0$. Entonces

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|y_1|}{1} = |y_1|,$$

como debía ocurrir.

Ejercicio 5.1

Calcula la distancia de la recta $3x + 4y + 15 = 0$ al origen.

El lector podría preguntarse por qué se define de esta forma la distancia de un punto a una recta. Esto es un caso particular de una situación más general, la de la distancia de un punto a un conjunto.

Definición 5.2: Distancia de un punto a un conjunto

Sea P_1 un punto del plano y $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un conjunto no vacío. La *distancia* de P_1 a A se define como el ínfimo de las distancias de P_1 a los puntos de A:

$$d(P_1, A) = \inf_{Q \in A} d(P_1, Q).$$

No analizaremos con detalle este concepto; simplemente mostraremos que esta definición es coherente con la definición que dimos antes y con la proposición 5.1.

Proposición 5.2

Sea $P_1 = (x_1, y_1)$ un punto de $\mathbb{R}^2$ y L una recta en $\mathbb{R}^2$ y L una recta en $\mathbb{R}^2$ con ecuación $ax + by + c = 0$. Entonces

$$\inf_{Q \in L} d(P_1, Q) = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Demostración. Sea P_0 el pie de la perpendicular de P_1 a L, y Q cualquier punto de L distinto de P_0. Mostraremos que $d(P_1, Q) \geq d(P_1, P_0)$, pues sabemos que

$$d(P_1, P_0) = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Ver la figura 5.3.

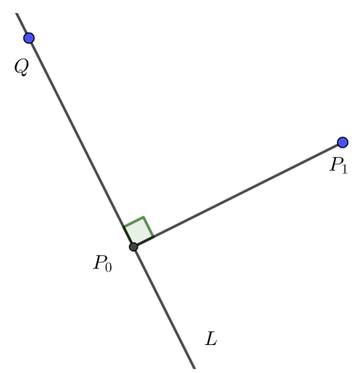


Figura 5.3: $d(P_1, Q) \geq d(P_1, P_0)$.

Como el triángulo $P_1 P_0 Q$ es rectángulo,

$$d(P_1, Q) = \sqrt{(d(P_1, P_0))^2 + (d(P_0, Q))^2} \geq \sqrt{(d(P_1, P_0))^2} = d(P_1, P_0),$$

donde hemos usado que todas las distancias son mayores o iguales a cero. Entonces

$$\inf_{Q \in L} d(P_1, Q) \geq d(P_1, P_0),$$

pero también

$$d(P_1, P_0) \geq \inf_{Q \in L} d(P_1, Q),$$

pues $P_0 \in L$; así tenemos la igualdad buscada. $\square$

Existe un concepto todavía más general, el de distancia entre conjuntos.

Definición 5.3: Distancia entre conjuntos

Sean A, B subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}^2$. La *distancia* entre A y B se define como el ínfimo de las distancias entre cualesquiera dos de sus puntos:

$$d(A,B) = \inf_{P\in A; Q\in B} d(P,Q).$$

Un ejemplo malísimo: Si $A \cap B \neq \varnothing$, entonces $d(A,B) = 0$.

Ejemplo 5.4

Sean L_1, L_2 rectas paralelas y distintas. Supongamos que una ecuación para L_1 es de la forma

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0.$$

Entonces (a_1, b_1) es un vector normal a L_1 y como L_2 es paralela a L_1, podemos considerar (a_1, b_1) como un normal a L_2, de modo que tendría una ecuación de la forma

$$a_1x + b_1y + c_2 = 0$$

con $c_1 \neq c_2$. (¿Qué pasa si $c_1 = c_2$?) Para calcular la distancia de L_1 a L_2, consideramos a un punto (x_0, y_0) en L_1 y aplicamos la expresión de la proposición 5.1:

$$d(P, L_2) = \frac{|a_1x_0 + b_1y_0 + c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

pero como P está en L_1, satisface la ecuación de esta recta, de modo que $a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = 0$ y podemos sustituir el valor de c_1 para obtener:

Proposición 5.3

Sean L_1, L_2 rectas paralelas con ecuaciones $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ y $a_1x + b_1y + c_2 = 0$. Entonces la distancia entre L_1 y L_2 está dada por

$$d(L_1, L_2) = \frac{|c_2 - c_1|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

5.3. Rectas y planos en $\mathbb{R}^3$

Ahora extenderemos lo visto anteriormente para el caso de $\mathbb{R}^3$. Primero analizaremos las ecuaciones obtenidas para rectas en $\mathbb{R}^2$ y veremos su generalización a $\mathbb{R}^3$.

Si tenemos un punto $P_0 \in \mathbb{R}^3$ y un vector $v \in \mathbb{R}^3$ distinto de cero, entonces la ecuación (ver la ecuación (5.1))

$$P = P_0 + tv$$

de nuevo representa una recta que pasa por P_0, con vector de dirección v. Esta forma vectorial se puede desarrollar en coordenadas como

$$\begin{aligned} x &= x_0 + tv_1 \\ y &= y_0 + tv_2 \\ z &= z_0 + tv_3, \end{aligned}$$

y si $v_1, v_2, v_3 \neq 0$, podemos despejar t en las tres ecuaciones anteriores y obtener otra forma de la ecuación de la recta:

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}.$$

Por otro lado, al considerar la ecuación (5.2),

$$(P - P_0) \cdot w = 0, \quad \text{con } w \neq 0,$$

debemos tener un poco más de cuidado. Supongamos que $P_0 = 0$, de modo que la ecuación anterior se escribe como $P \cdot w = 0$. Nos estamos fijando en todos los vectores que son perpendiculares a w. Geométricamente, esta ecuación (en $\mathbb{R}^3$) nos representa ahora un plano ortogonal a w, como muestra la figura 5.4.

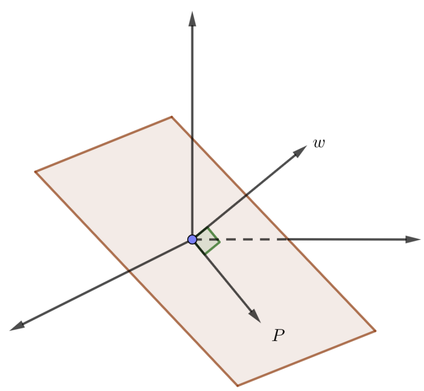


Figura 5.4: Los puntos tales que $P \cdot w = 0$ son ortogonales a w.

Decimos que w es el vector normal (ortogonal, perpendicular) al plano. Análogamente, la ecuación (5.3) representa ahora un plano que pasa por P_0 y tiene a w como vector normal, como en la figura 5.5.

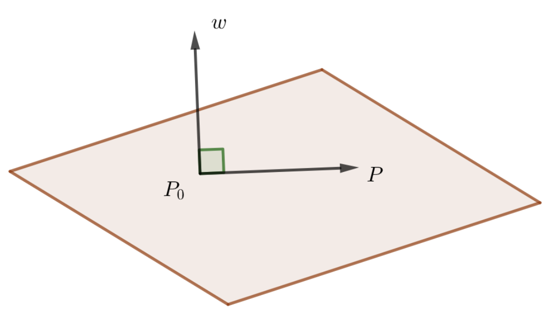


Figura 5.5: El plano $(P - P_0) \cdot w = 0$.

En el caso de un plano, es claro que la ecuación (5.3) no representa un plano, pero entonces, ¿cuál sería una ecuación para el caso de un plano?

Recordemos que anteriormente habíamos definido los conceptos de combinación lineal y de independencia lineal (definiciones 4.4 y 4.8, respectivamente). Así, consideremos dos vectores $v, w \in \mathbb{R}^3$ linealmente independientes y el conjunto de combinaciones lineales de éstos:

$$\{\, tv + sw \mid t, s \in \mathbb{R} \,\}.$$

Llamemos a este conjunto el *plano generado* por v, w. Ver la figura 5.6.

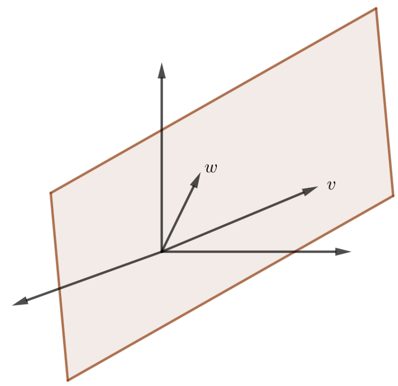


Figura 5.6: Plano generado por v y w.

Observación 5.2

Dado un plano en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen, éste puede ser generado por una infinidad de parejas de vectores: Cualquier par de vectores linealmente independientes que están en el plano nos sirve.

Definición 5.4: Plano

Sean $P_0 \in \mathbb{R}^3$ y $v, w \in \mathbb{R}^3$ vectores linealmente independientes. El plano que pasa por P_0 y es generado por v, w es el conjunto de puntos P tales que

$$P = P_0 + tv + sw, \quad t, s \in \mathbb{R}^3.$$

Con estas definiciones podemos estudiar la geometría de las líneas rectas y los planos en $\mathbb{R}^3$. Por ejemplo, podemos plantear y responder preguntas como las siguientes:

Ejemplo 5.5

Sean L una recta y Π un plano en $\mathbb{R}^3$. Usando sus expresiones vectoriales, ¿es posible determinar si (a) son paralelos, (b) se intersecan? (Ver figura 5.7.
Digamos que L se representa como

$$P = P_0 + tv$$

y Π por

$$Q = Q_0 + tw_1 + sw_2.$$

Entonces L será paralela a Π si su vector de dirección v "cae" en el plano generado por w_1 y w_2; en otras palabras, si v es combinación de estos vectores:

$$v = tw_1 + sw_2.$$

Recíprocamente, si v *no* se puede escribir de esta forma, entonces L será transversal a Π y tendrán una intersección no vacía. De hecho, la intersección deberá ser exactamente un punto.
Otra manera de plantear esta pregunta (y resolverla) usa el producto escalar y el producto vectorial. Recordemos que $w_1 \times w_2$ es un vector perpendicular a w_1 y w_2; es decir,

$$(w_1 \times w_2) \cdot w_1 = (w_1 \times w_2) \cdot w_2 = 0,$$

y que por las propiedades del producto vectorial, $w_1 \times w_2$ será ortogonal a cualquier combinación de w_1 y w_2; en símbolos,

$$(w_1 \times w_2)(tw_1 + sw_2) = 0, \text{para todo } t, s \in \mathbb{R}.$$

Así, si L es paralela a Π, por el análisis anterior deberá ocurrir que

$$(w_1 \times w_2) \cdot v = 0.$$

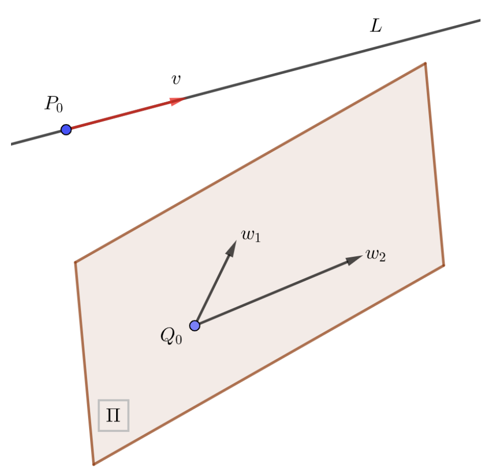


Figura 5.7: ¿Cuándo se intersecan L y Π?

Proposición 5.4

Sea L una recta con ecuación
$$P = P_0 + tv,$$
y Π un plano con ecuación
$$Q = Q_0 + tw_1 + sw_2$$
con w_1, w_2 linealmente independientes. Entonces L es paralela a Π si y sólo si
$$(w_1 \times w_2) \cdot v = 0.$$

Ejemplo 5.6

Sean Π_1, Π_2 planos representados por las ecuaciones
$$P = P_0 + tv_1 + sv_2,$$
$$Q = Q_0 + tw_1 + sw_2.$$

¿Cuándo son paralelos? ¿Cuándo se intersecan?
Lo primero que podemos hacer es analizar los planos paralelos a los ya dados, pero que pasen por el origen:
$$\Pi: \;\; P = tv_1 + sv_2,$$
$$\Pi': \;\; Q = tw_1 + sw_2.$$

Entonces, una primera respuesta puede ser la siguiente: Si w_1, w_2 pertenecen al primer plano, entonces los planos Π y Π' coinciden.
Pero una respuesta más concisa usa el producto vectorial: Sabemos que $v_1 \times v_2$ es ortogonal a Π y que $w_1 \times w_2$ es ortogonal a Π'. Entonces, los planos Π y Π' serán paralelos justamente cuando los productos vectoriales anteriores sean paralelos, es decir, uno múltiplo del otro. O dicho en términos del álgebra lineal, cuando $v_1 \times v_2$ y $w_1 \times w_2$ sean linealmente dependientes.

5.4. Distancia de un punto a un plano

En la sección 5.2 encontramos una expresión para calcular la distancia de un punto a una recta $\mathbb{R}^2$. Ahora seguiremos un procedimiento similar para calcular la distancia de un punto a un plano en $\mathbb{R}^3$, mostrando de paso que el enfoque vectorial nos permite generalizar fácilmente resultados de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ y posteriormente a $\mathbb{R}^n$. Recordemos brevemente la expresión del teorema 4.6:
$$u \cdot v = \|u\|\|v\| \cos\theta$$
que es válida para cualesquiera $u, v \in \mathbb{R}^n$, donde θ es el ángulo entre u y v. Con esto podemos probar nuestro resultado.

Proposición 5.5: Distancia de un punto a un plano

Sea $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ un punto en $\mathbb{R}^3$ y Π un plano con ecuación

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Entonces la distancia D de P_1 a Π está dada por

$$D = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

El lector notará la similitud con la expresión de la Proposición 5.1.

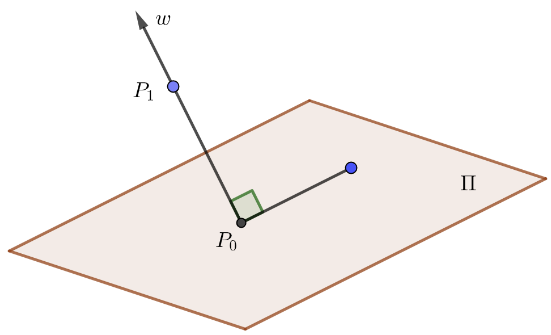


Figura 5.8: Distancia de un punto a un plano

Demostración. Sabemos que el vector $w = (a, b, c)$ es ortogonal al plano Π. Sea $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ el pie de la perpendicular de P_1 a Π; entonces podemos escribir la ecuación de Π como

$$0 = (P - P_0) \cdot w = a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = ax + by + cz + d,$$

donde $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$; la distancia buscada D es justamente la distancia de P_1 a P_0. Entonces

$$(P_1 - P_0) \cdot w = \|P_1 - P_0\| \|w\| \cos\theta,$$

donde $\theta = 2\pi k$ ó $\theta = \pi + 2\pi k$, con $k \in \mathbb{Z}$; en cualquier caso, $\cos\theta = \pm 1$. Entonces

$$(P_1 - P_0) \cdot w = \pm D\|w\|,$$

de donde D está dada por

$$\pm\frac{(P_1 - P_0) \cdot w}{\|w\|} = \pm\frac{ax_1 + by_1 + cz_1 - ax_0 - by_0 - cz_0}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Como D debe ser positiva o cero,

$$D = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

como queríamos. $\square$

5.5. Desigualdades lineales

En las secciones anteriores hemos estudiado a las rectas y planos, que en coordenadas cartesianas están definidas por ecuaciones lineales. Por ejemplo, una recta en $\mathbb{R}^2$ puede tener la ecuación lineal $ax+by+c=0$. Ahora nos dedicaremos a estudiar las desigualdades lineales; por ejemplo, $ax+by+c \geq 0$, y lo que representan en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

Comencemos con el caso más sencillo. Una desigualdad del tipo

$$ax + by \geq 0.$$

¿Qué puntos (x, y) satisfacen esta condición? Recordemos que la ecuación $ax + by = 0$ se puede interpretar por medio del producto escalar como

$$(a, b) \cdot (x, y) = 0,$$

de modo que los puntos (x, y) que satisfacen esta ecuación son ortogonales a (a, b). También recordemos que

$$(a, b) \cdot (x, y) = \|(a, b)\|\|(x, y)\| \cos\theta,$$

donde θ es el ángulo entre los vectores. Supongamos que los vectores (a, b), (x, y) son ortogonales y distintos de cero (¿qué pasa si alguno o ambos se anulan?). Entonces

$$0 = (a, b) \cdot (x, y) = \|(a, b)\|\|(x, y)\| \cos\theta \Leftrightarrow \cos\theta = 0;$$

de hecho, $\cos\theta = 0$ quiere decir justamente que los vectores son ortogonales. Ahora consideremos la desigualdad $ax + by \geq 0$, o

$$(a, b) \cdot (x, y) \geq 0.$$

Procediendo como antes, si los dos vectores son diferentes de cero, lo anterior es equivalente a

$$\cos\theta \geq 0.$$

Esto nos dice que el ángulo entre (a, b) y (x, y) es pequeño; más precisamente, si restringimos el valor del coseno a, digamos $(-\pi, \pi)$, entonces $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$:

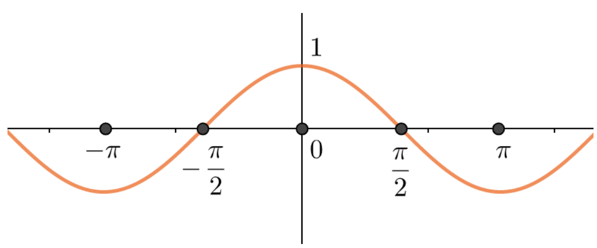


Figura 5.9: Gráfica del coseno de $-\pi$ a π.

Esto nos dice dónde debe estar el vector (x, y): El vector (a, b) determina una recta L por el origen, la cual a su vez determina dos regiones del plano, cada una de las cuales se llama un semiplano. Entonces (x, y) debe "apuntar" hacia el mismo semiplano hacia donde apunta (a, b).

Análogamente, si $(a, b) \cdot (x, y) \leq 0$ y ambos vectores son distintos de cero, esto es equivalente a $\cos\theta \leq 0$, lo cual nos dice que (x, y) debe apuntar hacia el semiplano contrario al que apunta (a, b), pues ahora $\cos\theta \leq 0$.

Este análisis se puede extender al caso de una desigualdad del tipo $ax+by+c \geq 0$ o $ax+by+c \leq 0$: Cada una se puede llevar a la forma vectorial

$$(P - P_0) \cdot w \geq 0 \quad \text{o} \quad (P - P_0) \cdot w \leq 0,$$

donde $w = (a, b)$. Ahora, se cumplirá cada desigualdad según si el vector $P - P_0$ apunta hacia el semiplano donde apunta w, o no, como se ve en la figura 5.11.

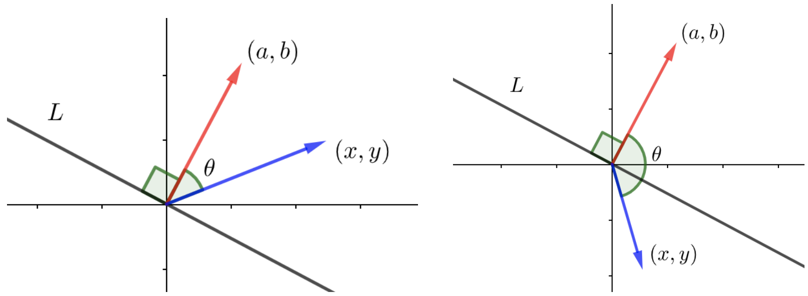


Figura 5.10: Izquierda: (x, y) apunta hacia el mismo semiplano que (a, b). Derecha: (x, y) apuntando en sentido contrario a (a, b).

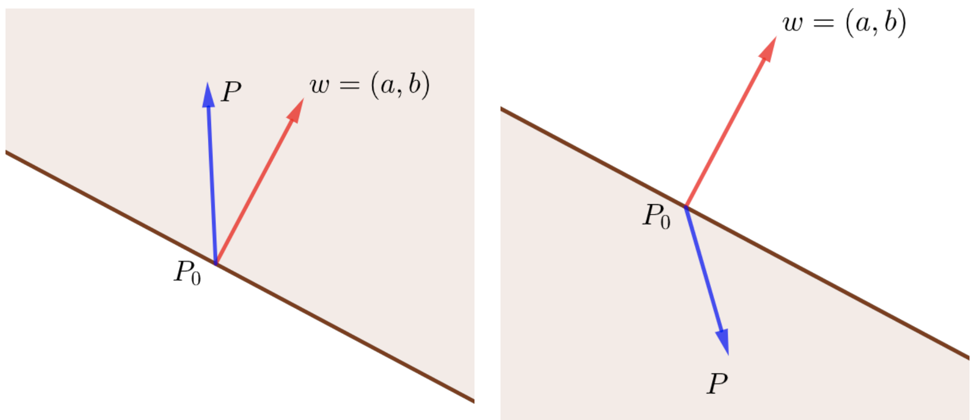


Figura 5.11: Izquierda: La región donde $(P - P_0) \cdot w \geq 0$. Derecha: La región donde $(P - P_0) \cdot w \leq 0$.

Hasta ahora, las desigualdades consideradas han sido del tipo $\leq$ ó $\geq$. En este caso, los puntos de la recta divisoria cumplen la desigualdad. En el caso de una desigualdad estricta, los puntos de la recta divisoria no serán tomados en cuenta.

Definición 5.5: Semiplano cerrado

Un *semiplano cerrado* de $\mathbb{R}^2$ es el conjunto de puntos tales que

$$(P - P_0) \cdot w \geq 0 \quad \text{o} \quad (P - P_0) \cdot w \leq 0,$$

con P_0, w fijos.
Un *semiplano abierto* de $\mathbb{R}^2$ es el conjunto de puntos tales que

$$(P - P_0) \cdot w > 0 \quad \text{o} \quad (P - P_0) \cdot w < 0,$$

con P_0, w fijos.

Ejemplo 5.7: Semiplano cerrado

Consideremos un ejemplo sencillo. Nos fijaremos en el semiplano cerrado formado por el primero y el segundo cuadrante del plano.
¿Podemos describir este semiplano en forma vectorial? Observemos que si $w = (0, 1)$ (y $P_0 = 0$), entonces

$$P \cdot w = (x, y) \cdot (0, 1) = y,$$

de modo que podemos describir este semiplano como $P \cdot w \geq 0$. Notemos también que si $w' = (0, -1)$, entonces el semiplano está dado por $P \cdot w' \leq 0$.

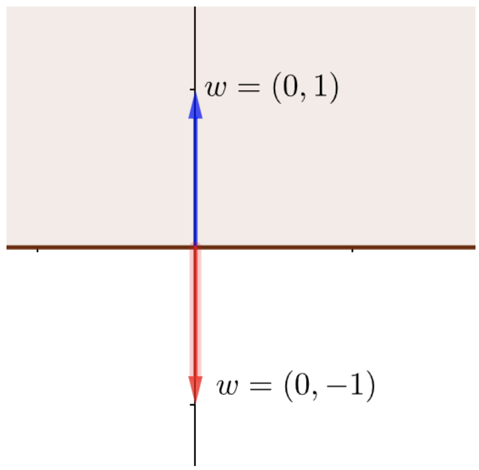


Figura 5.12: El semiplano superior.

Ejemplo 5.8: Semiplano abierto

Un ejemplo similar al anterior es el semiplano abierto que queda a la derecha de la recta $x = 1$; ver figura 5.13.
Sería natural elegir $P_0 = w = (1, 0)$, pero damos otros valores para no confundir el papel de cada uno; así, podemos elegir $P_0 = (1, 1)$ y $w = (4, 0)$. Si $P = (x, y)$,

$$(P - P_0) \cdot w = ((x, y) - (1, 1)) \cdot (4, 0) = 4(x - 1),$$

y el semiplano pedido está dado por

$$(P - P_0) \cdot w = 4(x - 1) > 0.$$

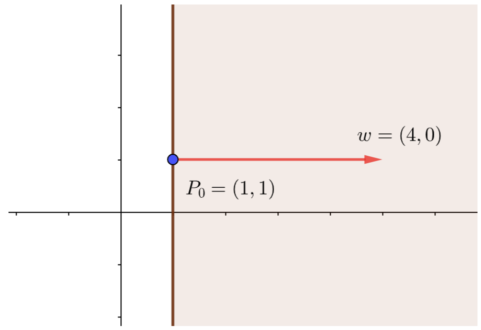


Figura 5.13: Semiplano a la derecha de $x = 1$.

Observación 5.3

La *programación lineal* es una rama de las matemáticas que estudia problemas definidos por un *sistema* de desigualdades lineales, aplicables a muchas situaciones. Veamos un ejemplo. Supongamos que tenemos cinco desigualdades del tipo

$$a_i x + b_i y + c_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, 5.$$

¿Cuáles son los puntos que satisfacen estas desigualdades en forma simultánea? Como el conjunto de puntos que satisface cada desigualdad se puede representar gráficamente como un semiplano, el conjunto de puntos que satisfacen estas desigualdades será la intersección de estos semiplanos, que en general se verá como un polígono; ver figura 5.14
Hablando de una manera muy vaga, la programación lineal estudia problemas de máximos y mínimos de ciertas funciones (lineales) definidas en conjuntos como éstos.

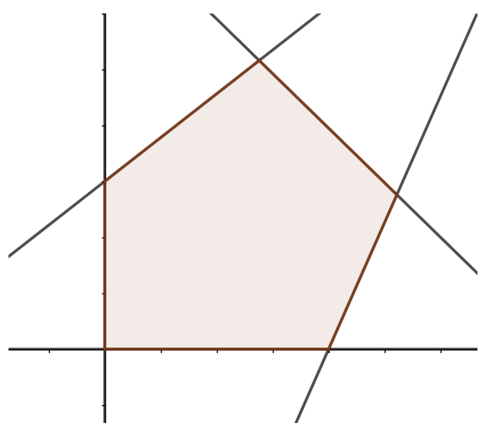


Figura 5.14: El conjunto de soluciones a un sistema de desigualdades lineales.

El análisis anterior se puede extender de una manera completamente análoga a $\mathbb{R}^3$. En este caso, si consideramos la desigualdad lineal del tipo

$$ax + by + cz + d \geq 0,$$

ésta se puede escribir en forma vectorial como

$$(P - P_0) \cdot w \geq 0 \quad \text{o} \quad (P - P_0) \cdot w \leq 0,$$

donde el conjunto de puntos P que satisface cada ecuación es el de aquellos puntos tales que el vector

$P - P_0$ apunta en la dirección hacia donde apunta w (en el primer caso) o bien en la dirección opuesta (en sel segundo caso).

Definición 5.6: Semiespacio cerrado

Un *semiespacio cerrado* de $\mathbb{R}^3$ es el conjunto de puntos tales que

$$(P - P_0) \cdot w \geq 0 \quad \text{o} \quad (P - P_0) \cdot w \leq 0,$$

con P_0, w fijos.
Un *semiespacio abierto* de $\mathbb{R}^3$ es el conjunto de puntos tales que

$$(P - P_0) \cdot w > 0 \quad \text{o} \quad (P - P_0) \cdot w < 0,$$

con P_0, w fijos.

Ejemplo 5.9

Grafiquemos el semiespacio cerrado dado por la desigualdad

$$2x + 3y + z - 1 \leq 0.$$

Lo primero que podemos hacer es determinar el plano $2x + 3y + z = 0$. Este plano pasa por el origen y es ortogonal al vector $(2, 3, 1)$.
El semiespacio $2x + 3y + z - 1 = 0$ será paralelo a este plano, de modo que para determinarlo basta hallar un punto por el que pase. Lo más sencillo es encontrar una solución de la ecuación del plano, haciendo varias variables iguales a cero. Así, si $x = y = 0$, entonces $z = 1$, de modo que el plano pasa por $P_0 = (0, 0, 1)$.

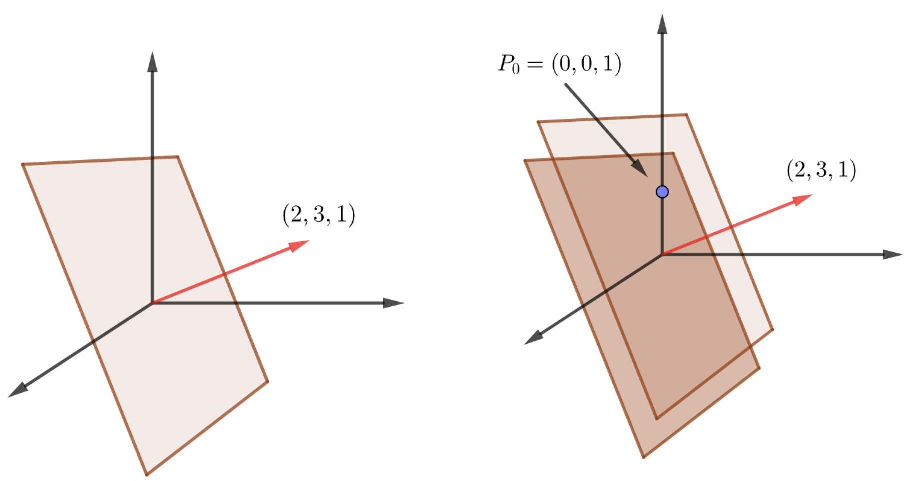


Figura 5.15: Izquierda: El plano $2x + 3y + z = 0$. Derecha: El plano $2x + 3y + z - 1 = 0$ (más oscuro).

5.6. Sistemas de ecuaciones lineales

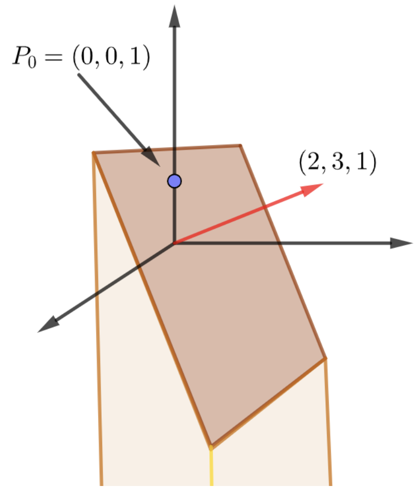


Figura 5.16: El conjunto dado por $2x + 3y + z - 1 \leq 0$.

5.6.1. Intersección de rectas

En cursos anteriores se menciona que la intersección $A \cap B$ de los conjuntos A y B se define como el conjunto de todos los elementos comunes a A y B. Una propiedad especial de los conjuntos de puntos que se llaman *rectas* es que, en el plano, la intersección de dos rectas *distintas* es o bien el conjunto vacío (si las rectas son paralelas) o bien consta sólo de un punto (si las rectas no son paralelas). Si L_1 y L_2 son la misma recta entonces L_1 y L_2 son paralelas y claramente su intersección es toda la recta.

Se puede determinar si dos rectas son paralelas o no, simplemente comparando los vectores de dirección, o lo que es equivalente, comparando vectores normales a las rectas.

Ejemplo 5.10

Si L_1 y L_2 son rectas determinadas por

$$L_1 = \{\,(x, y) :\ 3x - 4y - 5 = 0\,\} \quad \text{y} \quad L_2 = \{\,(x, y) :\ -6x + 8y + 9 = 0\,\},$$

¿cuál es el conjunto $L_1 \cap L_2$?

Solución. Por inspección de las ecuaciones dadas se ve que $v_1 = (3, -4)$ es un vector normal a L_1 y que $v_2 = (-6, 8) = -2(3, -4)$ es un vector normal a L_2. Por lo tanto, L_1 y L_2 son paralelas.

Para calcular las coordenadas (x, y) de un punto P sobre L_1 basta asignar un valor arbitrario a x y despejar a y en la ecuación de L_1. Por ejemplo, si $x = 3$ entonces

$$y = -\frac{1}{4}(5 - 3(3)) = 1,$$

y $P = (3, 1)$ es un punto de L_1. Sustituyendo las coordenadas de P es la ecuación de L_2, se tiene que

$$-6x + 8y + 9 = -6(3) + 8(1) + 9 = -1 \neq 0.$$

Por lo tanto P no está sobre L_2 y $L_1 \cap L_2 = \varnothing$. □

Al estudiar álgebra se ve que se pueden emplear métodos cartesianos para demostrar que las rectas no paralelas se intersecan en un solo punto. Se pueden emplear también métodos vectoriales para demostrar que este resultado es válido. Considere la figura 5.17 en la que se muestran dos rectas, la recta L_1 que pasa por los puntos $Q = (-3, -2)$ y $R = (0, 2)$ y la recta L_2 que pasa por los puntos $S = (5, 0)$ y $T = (6, -3)$. En esta figura se ve que L_1 y L_2 se intersecan en un solo punto. Para demostrar que esto es así, hay que demostrar analíticamente que:

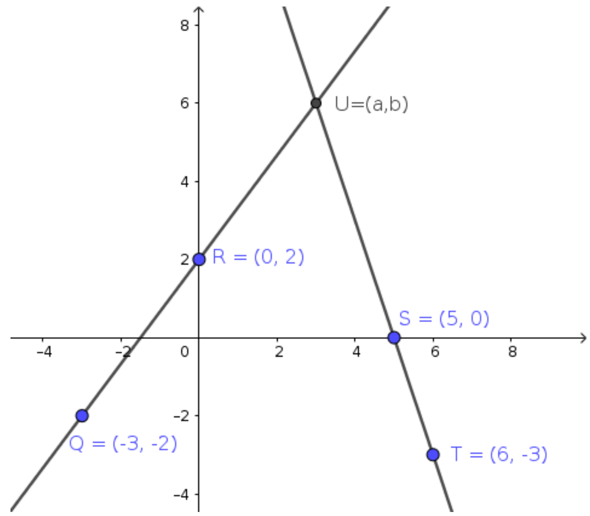


Figura 5.17: Análisis de la intersección de L_1 y L_2.

- Hay un solo punto que puede estar en ambas rectas.
- Este punto está sobre ambas rectas.

De la información dada se tiene que una ecuación paramétrica vectorial de L_1 es

$$(x, y) = (-3, -2) + r_1 \left[(0, 2) - (-3, -2)\right], \quad r_1 \in \mathbb{R},$$

o bien

$$(x, y) = (-3, -2) + r_1(3, 4), \quad r_1 \in \mathbb{R};$$

y que una ecuación paramétrica vectorial de L_2 es

$$(x, y) = (5, 0) + r_2 \left[(6, -3) - (5, 0)\right], \quad r_2 \in \mathbb{R},$$

o bien

$$(x, y) = (5, 0) + r_2(1, -3), \quad r_2 \in \mathbb{R}.$$

Supongamos que $U = (a, b)$ es un punto que está sobre ambas rectas. Debemos demostrar que

$$(a, b) = (-3, -2) + r_1(3, 4) \quad \text{y} \quad (a, b) = (5, 0) + r_2(1, -3),$$

de modo que

$$(-3, -2) + r_1(3, 4) = (5, 0) + r_2(1, -3). \tag{5.3}$$

De la ecuación (5.3) se puede despejar a r_1 y r_2 como sigue: Hagamos el producto punto en la ecuación (5.3) por el vector $v_1 = (-4, 3)$; así

$$\begin{aligned} (-3, -2) \cdot (-4, 3) + r_1(3, 4) \cdot (-4, 3) &= (5, 0) \cdot (-4, 3) + r_2(1, -3) \cdot (-4, 3), \\ 6 + r_1(0) &= -20 + r_2(-13), \\ 26 &= -13r_2, \\ r_2 &= -2. \end{aligned}$$

De manera análoga podemos eliminar r_2 tomando el producto escalar de cada miembro de la ecuación (5.3) con el vector $v_2 = (3, 1)$. Se obtiene

$$\begin{aligned} (-3, -2) \cdot (3, 1) + r_1(3, 4) \cdot (3, 1) &= (5, 0) \cdot (3, 1) + r_2(1, -3) \cdot (3, 1), \\ -11 + r_1(13) &= 15 + r_2(0), \\ 13r_1 &= 26, \\ r_1 &= 2. \end{aligned}$$

Luego existe un punto $U = (a, b)$ que esté sobre ambas rectas, entonces para ese punto se debe tener $r_1 = 2$ y $r_2 = -2$. Sustituyendo estos valores en las ecuaciones de L_1 y L_2 se obtiene respectivamente

$$\begin{aligned} L_1: &\quad (a, b) = (-3, -2) + 2(3, 4) = (-3, -2) + (6, 8) = (3, 6) \\ L_2: &\quad (a, b) = (5, 0) - 2(1, -3) = (5, 0) + (-2, 6) = (3, 6). \end{aligned}$$

Por lo tanto L_1 y L_2 se intersecan en el punto $U = (3, 6)$ únicamente. Puesto que este método se puede emplear para cualquier par de rectas no paralelas dadas, se concluye que dos rectas no paralelas en el plano se intersecan en un punto exactamente.

Dos rectas en el plano están dadas por un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y su punto de intersección se puede calcular resolviendo las dos ecuaciones simultáneamente,. En cursos de álgebra se menciona que dos ecuaciones lineales con dos incógnitas se puede resolver por sustitución o por eliminación de una incógnita, método que a veces se llama "método de combinación lineal". Ambas técnicas, así como el método vectorial que es semejante al de eliminación, se ilustran en las soluciones del siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.11

Resolveremos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$3x + 5y = 1, \tag{5.4}$$

$$4x + 3y = 11. \tag{5.5}$$

Solución por sustitución. Despejamos a y en la ecuación (5.4):

$$y = \frac{3}{5}x - \frac{1}{5}. \tag{5.6}$$

Luego sustituimos este valor de y en la ecuación (5.5) y despejamos a x de la ecuación resultante:

$$\begin{aligned} 4x + 3\left(\frac{3}{5}x - \frac{1}{5}\right) &= 11, \\ x &= 2. \end{aligned}$$

Sustituyendo este valor de x en la ecuación (5.6), se tiene

$$y = \frac{3}{5}(2) - \frac{1}{5} = 1.$$

Por lo tanto, la única solución del sistema es $(x, y) = (2, 1)$. Para comprobar que ésta es la solución del sistema, se sustituyen estos valores en las ecuaciones originales. $\square$

Solución por eliminación. Multiplicamos ambos miembros de la ecuación (5.4) por 3 y ambos miembros de la ecuación (5.5) por 5 para obtener

$$\begin{aligned} 9x - 15y &= 3 \\ 20x + 15y &= 55 \end{aligned}$$

Sumamos ambas ecuaciones; se tiene

$$\begin{aligned} 29x &= 58, \\ x &= 2. \end{aligned}$$

Ahora sustituimos $x = 2$ en una de las ecuaciones originales (la que sea) y despejamos el valor de y, tal como se hizo en la *solución por sustitución*; o bien, regresando a las ecuaciones originales, eliminamos x

de la siguiente manera: Multiplicamos ambos miembros de la ecuación (5.4) por -4 y ambos miembros de la ecuación (5.5) por 3 para obtener el sistema equivalente[1]

$$\begin{aligned} -12x + 20y &= -4 \\ 12x + 9y &= 33 \end{aligned}$$

Sumando ambas ecuaciones se tiene que

$$\begin{aligned} 29y &= 29, \\ y &= 1. \end{aligned}$$

Como antes, la única solución posible del sistema es $(x, y) = (2, 1)$. Se deja al lector hacer la comprobación. $\square$

Solución vectorial. El sistema descrito por las ecuaciones (5.4) y (5.5) es equivalente a la ecuación vectorial

$$(3x - 5y, 4x + 3y) = (1, 11),$$

que a su vez es equivalente a

$$x(3, 4) - y(5, -3) = (1, 11). \tag{5.7}$$

Esta ecuación se puede resolver empleando el método descrito en el ejemplo 5.10. Es decir, se elimina a y haciendo el producto escalar de ambos miembros de la ecuación (5.7) por $v_1 = (3, 5)$. Se obtiene

$$\begin{aligned} x(3, 4) \cdot (3, 5) - y(5, -3) \cdot (3, 5) &= (1, 11) \cdot (3, 5), \\ 29x - 0y &= 58, \\ x &= 2. \end{aligned}$$

Se puede eliminar a x tomando el producto escalar de ambos miembros con $v_2 = (-4, 3)$. Se tiene

$$\begin{aligned} x(3, 4) \cdot (-4, 3) - y(5, -3) \cdot (-4, 3) &= (1, 11) \cdot (-4, 3), \\ 0x + 29y &= 29, \\ y &= 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto la única solución del sistema es $(x, y) = (2, 1)$, y como en los casos anteriores se puede comprobar que, en efecto, ésta es la única solución. $\square$

Si se compara la solución por eliminación con la solución vectorial se ve inmediatamente que son equivalentes. La ecuación vectorial (5.7) es equivalente a las ecuaciones cartesianas (5.4) y (5.5). Para eliminar a y, multiplicamos ambos miembros de la ecuación (5.4) por 3 y ambos miembros de (5.5) por 5, sumamos las ecuaciones resultantes, o o que es lo mismo, tomamos el producto escalar de ambos miembros de (5.7) con $(3, 5)$. Análogamente, para eliminar x multiplicamos ambos miembros de (5.4) y (5.5) por -4 y 3 respectivamente, y sumamos; o en forma equivalente, tomamos el producto escalar de ambos miembros de (5.7) por $(-4, 3)$.

5.6.2. La regla de Cramer

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Supondremos que las rectas asociadas no son paralelas, de modo que debe existir un único punto en el que se intersecan.

[1]Este sistema describe las mismas rectas que el sistema de ecuaciones original.

Como vimos en la *solución vectorial*, este sistema se puede expresar como

$$(a_1x + b_1y, a_2x + b_2y) = (c_1, c_2),$$

que a su vez es equivalente a

$$x(a_1, a_2) + y(b_1, b_2) = (c_1, c_2). \tag{5.9}$$

Eliminemos primero a x. Para ello hagamos el producto escalar de ambos miembros de (5.9) por el vector $v_1 = (-a_2, a_1)$. Así

$$\begin{aligned} x(a_1, a_2)\cdot(-a_2, a_1) + y(b_1, b_2)\cdot(-a_2, a_1) &= (c_1, c_2)\cdot(-a_2, a_1), \\ y(-a_2b_1 + a_1b_2) &= -a_2c_1 + a_1c_2. \\ y &= \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}. \end{aligned}$$

De manera análoga tenemos que

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

Así, la solución al sistema de ecuaciones es única y es igual a

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad \text{y} \quad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

Observemos que para que esto tenga sentido, el denominador $a_1b_2 - a_2b_1$ debe ser distinto de 0. Esta solución se puede escribir mediante determinantes como

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_1 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_1 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

Sea ahora la matriz $A \in \mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ dada por

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

formada por los coeficientes de x y y, y sea $D = \det A$. Notemos que los determinantes que aparecen en los numeradores, que llamaremos D_x y D_y respectivamente, son los determinantes de las matrices que se obtienen de A remplazando los coeficientes de las variables x y y respectivamente en el sistema (5.8), por los términos constantes c_1 y c_2. Por lo tanto si $D \neq 0$, entonces el sistema de ecuaciones (5.8) tiene una única solución dada por

$$x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D}.$$

Para cualquier entero n se puede extender este patrón para expresar la única solución de cualquier sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas, para el cual el determinante D de la matriz A formada por los coeficientes de las variables sea no nulo. Esta forma de expresar la solución mediante determinantes recibe el nombre de *Regla de Cramer*.

En particular para un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas,

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}$$

se tiene

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix},$$

y si $D \neq 0$, entonces la solución es única y está dada por

$$x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D}, \quad z = \frac{D_z}{D}.$$

Episodio VI

El regreso de las Cónicas

6.1. Introducción

A pesar de lo corto del nombre, en este tema veremos varios aspectos importantes de la geometría, tomando como pretexto el estudio de las cónicas.

En un primer momento haremos un resumen de las definiciones de las cónicas, sus propiedades básicas y, sobre todo, de las ecuaciones que representan, tanto en coordenadas cartesianas como en coordenadas polares. Veremos en particular que cualquier cónica queda representada en las coordenadas cartesianas (x, y) por una ecuacion de segundo grado. Más adelante veremos bajo qué condiciones una ecuación de segundo grado con la forma general

$$A^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

representa una cónica. Para esto, volveremos a usar el lenguaje de las matrices y el álgebra líneal. Esa será nuestra intención oculta, pero ya lo iremos viendo con calma.

6.2. Secciones de un cono

Las cónicas tienen una larguísima historia, al menos desda la Grecia antigua han sido estudiadas extensamente y uno o dos cursos de Geometría Analítica no puede cubrir todas las propiedades que se conocen de ellos. Aquí sólo tocaremos la superficie de estos temas.

Partamos de la definición más intuitiva posible. Convengamos primero en que un *cono* es la figura que se obtiene al girar una recta L en torno de otra recta llamada *eje de rotación*, con la condición de que $L \cap L' \neq \varnothing$.

Descartaremos de entrada el caso en que $L = L'$, pues en este caso obtendremos a la propia L, o, si así se quiere llamar, obtendremos un *cono degenerado*.

Así, supondremos que $L \cap L'$ es un solo punto llamado *vértice* del cono. Si le quitamos el vértice al cono, lo separaremos en dos partes, usualmente llamadas *hojas* o *mantos*. Cualquiera de las posiciones de L al girar sirve para generar al cono, razón por la cual se llama *generatriz*.

De las cónicas no degeneradas, algunas serán curvas cerradas, las llamadas *elipses*, y otras serán curvas que se extienden indefinidamente. De éstas últimas, distinguiremos dos casos: Cuando el plano Π corte sólo una de las hojas del cono, obteniendo una *parábola*; y cuando Π corte las dos hojas, obteniendo una *hipérbola*.

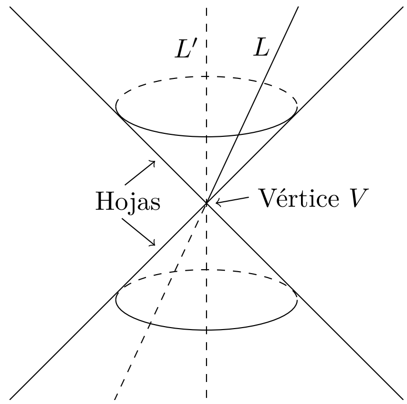


Figura 6.1: El cono y sus partes.

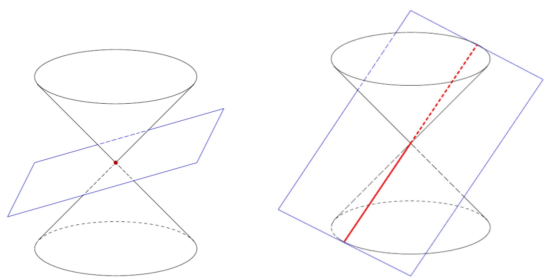


Figura 6.2: Cónicas degeneradas.

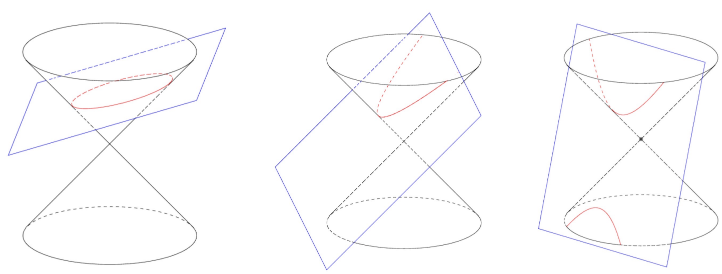


Figura 6.3: Las cónicas no degeneradas: elipse, parábola e hipérbola.

6.3. Definición, trazado y nomenclatura

Ahora pasaremos al estudio más sistemático de las cónicas y sus elementos.

6.3.1. La elipse

Aunque en las secciones anteriores ya usamos de alguna manera la definición y propiedades básicas de la elipse, daremos ahora una definición formal.

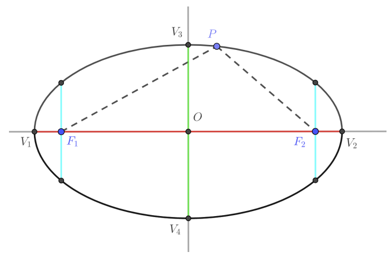


Figura 6.4: Trazado y elementos de una elipse.

Definición 6.1: Elipse

Una elipse es el lugar geométrico de los puntos P del plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos denotados por F_1 y F_2 es una constante. Si denotamos la constante como $2a$, tenemos que

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a. \tag{6.1}$$

Los elementos básicos asociados a la elipse son los siguientes. Usaremos la notación de la figura 6.4.

- Los *focos* F_1 y F_2; la recta que los une es el *eje focal*.
- La mediatriz del segmento F_1F_2 es el *eje conjugado*.
- La intersección del eje focal y el eje conjugado es el *centro O de la elipse*.
- El segmento del eje focal $\overline{V_1V_2}$ contenido en la elipse es el *eje mayor*. Los extremos de este segmento se llaman *vértices*.
- El segmento del eje conjugado $\overline{V_3V_4}$ contenido en la elipse es el *eje menor*. Sus extremos también son *vértices* de la elipse.
- Finalmente, se denomina *lado recto* de la elipse a cualquiera de los dos segmentos perpendiculares al eje focal por uno de los focos, contenido en la elipse. En la figura, los segmentos están señalados con color azul.

Proposición 6.1

La elipse es simétrica respecto a cada uno de sus ejes, y en consecuencia también respecto a su centro.

Demostración. Mostraremos que la elipse es simétrica con respecto del eje focal; el lector podrá completar la prueba de la simetría con respecto del eje conjugado.

Consideremos un punto P sobre la elipse y sea P' el simétrico de P con respecto del eje focal. Debemos mostrar que P' también está sobre la elipse. Sea M el punto medio del segmento $\overline{PP'}$. Entonces los triángulos F_1MP y $F_1P'M$ son congruentes, al igual que los triángulos F_2PM y F_2MP'. Esto implica que

$$d(P', F_1) + d(P', F_2) = d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a,$$

de modo que P' está sobre la elipse. □

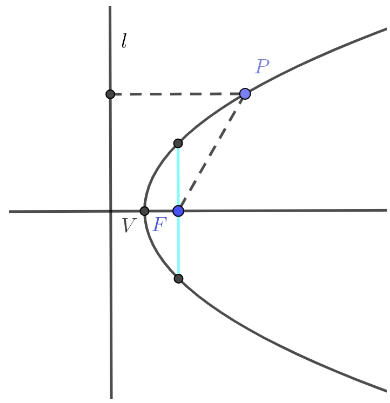


Figura 6.5: Elementos de una parábola.

6.3.2. La parábola

En este caso la definición es la siguiente

Definición 6.2: Parábola

Una *parábola* es el lugar geométrico de los puntos del plano equidistantes de una recta fija l y un punto fijo F que no está en l. Es decir,

$$d(P, l) = d(P, F). \tag{6.2}$$

Los elementos asociados a una parábola son los siguientes. Hacemos referencia a la figura 6.5.

- La recta fija l es la *directriz* y el punto fijo F es el *foco* de la parábola.
- La recta perpendicular a la directriz que pasa por F es el *eje de la parábola*. El punto medio del segmento de la perpendicular al foco es el *vértice de la parábola*.
- El *lado recto* es el segmento contenido en la parábola, de la perpendicular al eje focal que pasa por el foco. En la figura, está señalado con color azul.

Como en el caso de la elipse, es fácil ver de la definición que el eje de la parábola es un eje de simetría de la misma.

6.3.3. La hipérbola

La definición en este caso es la siguiente.

Definición 6.3: Hipérbola

Una *hipérbola* es el lugar geométrico de los puntos P del plano tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos es constante. Si denotamos a los puntos fijos por F_1 y F_2 y a la constante por $2a$, entonces podemos escribir

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a. \tag{6.3}$$

Los elementos asociados a la hipérbola son los siguientes; ver la figura 6.6.

- Los puntos F_1 y F_2 son los *focos*; la recta determinada por ellos es el *eje focal*.
- La mediatriz del segmento F_1F_2 es el *eje conjugado*.

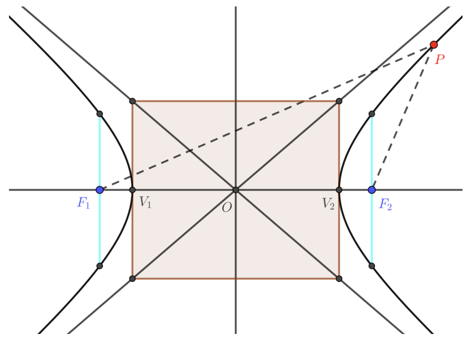


Figura 6.6: Trazado y elementos de una hipérbola.

- El punto de intersección de ambos ejes de denomina *centro* de la hipérbola.
- Los puntos V_1 y V_2 donde la hipérbola corta al eje focal se denominan *vértices* de la hipérbola.
- Los segmentos de las perpendiculares al eje focal por cada uno de los focos, comprendidos en cada una de las ramas se denominan *lados rectos*. En la figura están marcados con color azul.
- Explicaremos el significado del rectángulo sombreado y las *asíntotas* de la hipérbola un poco más adelante

De nuevo, es fácil ver que la hipérbola es simétrica respecto a sus dos ejes, y que el centro de la hipérbola es un centro de simetría.

6.4. Ecuaciones canónicas de las cónicas

Las ecuaciones obtenidas al desarrollar las expresiones 6.1, (6.2) y 6.3 se llaman las *ecuaciones canónicas* cuando introducimos un sistema coordenado "conveniente" a cada caso. Estas ecuaciones permiten fácilmente obtener propiedades muy útiles de las cónicas.

Siempre que no haya un sistema coordenado dado, uno tiene la libertad de elegir un sistema apropiado, de tal forma que las cuentas sean más "sencillas".

6.4.1. La elipse

Para el caso de la elipse, hagamos coincidir uno de los ejes coordenados con el eje focal, el otro con el eje conjugado, y por tanto el origen coincidirá con el centro de la elipse, lo que nos facilitará el trabajo. Ver la figura 6.7.

Denotaremos la distancia entre los focos por $2c$; observemos que debemos tener que $2a > 2c$. (¿Por qué?) Así, las coordenadas de los focos son

$$F_1(c, 0) \quad \text{y} \quad F_2(-c, 0).$$

Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera sobre la elipse. Luego, las distancias de P a los focos están dadas por

$$d(P, F_1) = \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$
$$d(P, F_2) = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

Sustituyendo en la expresión (6.1) se tiene

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a.$$

Despejando una de las raíces se tiene

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

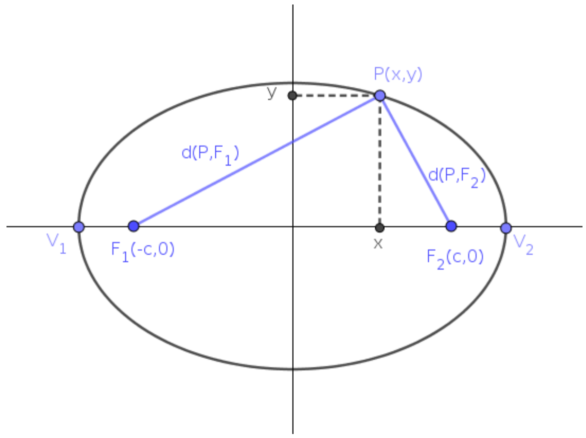


Figura 6.7: Elipse con centro en el origen.

Elevando al cuadrado ambos términos,

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 + (x+c)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

Desarrollando los binomios fuera de la raíz,

$$\begin{aligned} x^2 - 2cx + c^2 + y^2 &= 4a^2 + x^2 + 2cx + c^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \\ 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 4a^2 + 4cx. \end{aligned}$$

Dividiendo ambos lados de la ecuación entre 4,

$$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx.$$

Elevando al cuadrado nuevamente, desarrollando los binomios y reduciendo términos,

$$\begin{aligned} a^2(x+c)^2 + a^2y^2 &= (a^2 + cx)^2, \\ a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 &= a^4 + 2a^2cx + c^2x^2, \\ \left(a^2 - c^2\right)x^2 + a^2y^2 &= \left(a^2 - c^2\right)a^2. \end{aligned}$$

Como $a > c > 0$, podemos escribir $b^2 = a^2 - c^2 > 0$, dividir entre a^2b^2 para obtener

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{6.4}$$

Si en un principio hubiéramos hecho coincidir el eje focal con el eje de las ordenadas, la ecuación sería de la forma

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

La prueba se deja al lector.

6.4.2. La parábola

Para el caso de la parábola, hacemos coincidir el eje de la parábola con el eje de las ordenadas y el vértice de la parábola con el origen, como se muestra en la figura 6.8.

Sean $P(x, y)$ un punto cualquiera sobre la parábola y $F(0, a)$ el foco de la parábola, entonces la ecuación de la directriz l es $y = -a$. Luego las distancias del punto P al foco y a la directriz son

$$\begin{aligned} d(P, F) &= \sqrt{(x-0)^2 + (y-a)^2} = \sqrt{x^2 + (y-a)^2}. \\ d(P, l) &= \frac{|0x + 1y + a|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = |y + a|. \end{aligned}$$

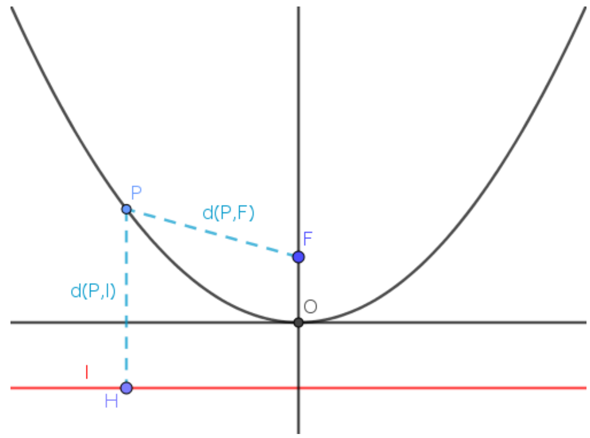


Figura 6.8: Parábola vertical con vértice en el origen.

Sustituyendo estas expresiones en (6.2) se tiene

$$\sqrt{x^2 + (y-a)^2} = |y+a|.$$

Elevando al cuadrado ambos lados de la expresión, desarrollando los binomios y reduciendo se tiene

$$\begin{aligned} x^2 + (y-a)^2 &= (y+a)^2 \\ x^2 + y^2 - 2ay + a^2 &= y^2 + 2ay + a^2 \\ x^2 &= 4ay. \end{aligned}$$

Es decir, la ecuación de la parábola vertical con vértice en el origen es

$$x^2 = 4ay. \tag{6.5}$$

Si en un principio hubiéramos hecho coincidir el eje de la parábola con el eje de las abscisas, la ecuación sería de la forma

$$y^2 = 4ax.$$

Algunos autores denotan por p a la distancia focal en lugar de a.

6.4.3. La hipérbola

Para el caso de la hipérbola, nuevamente hagamos coincidir el eje focal con el eje de las abscisas y al centro de la hipérbola con el origen, como se muestra en la figura 6.9.

Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera sobre la hipérbola. Al igual que en la elipse, se denota por $2c$ la distancia entre sus focos, pero en este caso se tiene que $2a < 2c$; así, sean $F_1(c, 0)$ y $F_2(-c, 0)$ los focos de la hipérbola. Las distancias del punto P a los focos están dadas por

$$\begin{aligned} d(P, F_1) &= \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \\ d(P, F_2) &= \sqrt{(x+c)^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación (6.3) se tiene

$$\left| \sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \right| = 2a.$$

Elevando al cuadrado ambos lados de la ecuación,

$$\left(\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \right)^2 = 4a^2.$$

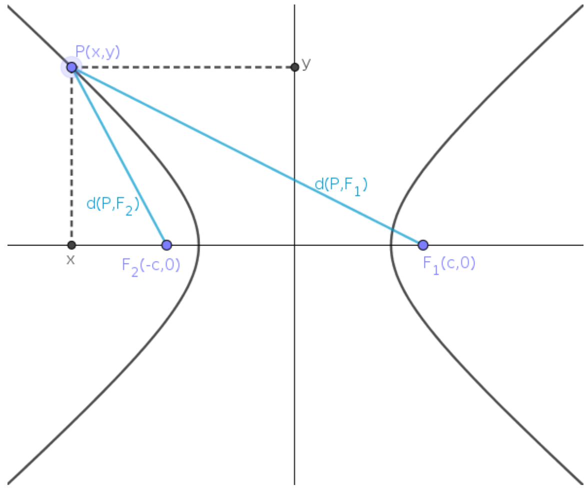


Figura 6.9: Hipérbola con centro en el origen.

Desarrollando el binomio del lado izquierdo

$$\big((x-c^2)+y^2\big)+\big((x-c^2)+y^2\big)-2\sqrt{(x-c)^2+y^2}\sqrt{(x+c)^2+y^2}=4a^2.$$

Despejando las raíces de un lado de la ecuación,

$$2x^2+2y^2+2c^2-4a^2=2\sqrt{(x-c)^2+y^2}\sqrt{(x+c)^2+y^2}.$$

Elevando al cuadrado esta expresión y reduciendo se tiene

$$c^2x^2-a^2x^2-a^2y^2=a^2c^2-a^2.$$

Factorizando,

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2);$$

como $c>a>0$, entonces podemos denotar $b^2=c^2-a^2>0$ y dividir entre a^2b^2. Así,

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{6.6}$$

Si en un principio hubiéramos hecho coincidir el eje focal con el eje de las ordenadas, la ecuación sería de la forma

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1;$$

de nuevo, dejamos la prueba al lector.

Usaremos la ecuación (6.6) para completar la descripción geométrica de la hipérbola. Al despejar y de esta ecuación, obtenemos

$$y=\pm\sqrt{b^2\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right)}=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}.$$

Las rectas $y=\pm\frac{b}{a}x$ son las *asíntotas* de la hipérbola. Consideremos una de ellas, digamos, con el signo $+$. Usando la ecuación anterior, observemos que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}}{\frac{b}{a}x}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}=1,$$

lo que podemos interpretar geométricamente diciendo que, cuando tomamos $x,y>0$ y $x\to\infty$, la hipérbola se va acercando cada vez más a la recta $y=\frac{b}{a}x$.

Observación 6.1

Para trazar la hipérbola con ecuación (6.6) podemos dibujar un rectángulo con centro en el origen, lados paralelos a los ejes de coordenadas y que pase por el vértice $(a, 0)$ y el punto $(0, b)$, como en la figura 6.6. Entonces, las rectas que pasan por el origen y los vértices de este rectángulo son precisamente las asíntotas.

6.5. Excentricidad y ecuaciones polares

En las dos secciones anteriores usamos definiciones de las cónicas un tanto independientes entre sí. Sin embargo, es de sospechar que, al ser todas secciones de conos, exista alguna definición común que agrupe a las tres. Ahora veremos que es posible definir la elipse y la hipérbola en términos de las distancias a un punto y una recta fijos, tal como se hizo en el caso de la parábola.

Consideremos una elipse con centro en el origen, un foco en $F_1(c, 0)$, y un vértice en $V_1(a, 0)$, con $0 < c < a$, como se muestra en la figura 6.10. La distancia $d(P, F_1)$ de cada punto P de la elipse al foco F_1 está dada por

$$d(P, F_1) = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \tag{6.7}$$

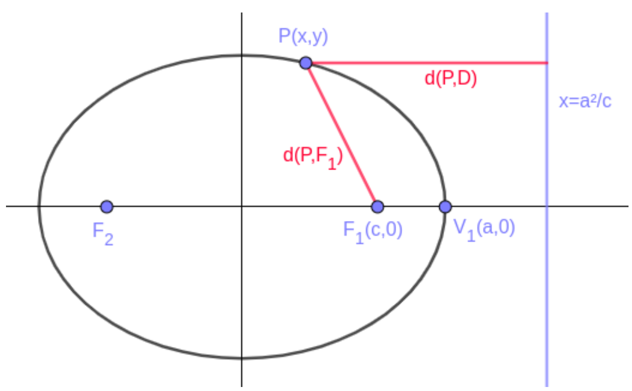


Figura 6.10

Ahora, recordemos que las coordenadas de cada punto P de la elipse debe satisfacer

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a - \frac{c}{a}x. \tag{6.8}$$

Sustituyendo (6.7) en (6.8) se tiene

$$d(P, F_1) = a - \frac{c}{a}x,$$

de donde se obtiene

$$d(P, F_1) = \frac{c}{a}\left(\frac{a^2}{c} - x\right). \tag{6.9}$$

Luego, como para cada punto P de la elipse se tiene que $x \leq a$ y $0 < c < a$, por lo que $x \leq a < \frac{a^2}{c}$. Por lo tanto $\frac{a^2}{c} - x > 0$, y podemos notar que justamente el factor $\frac{a^2}{c} - x$ es la distancia $d(P, \mathcal{D}_1)$ que separa al punto P de la elipse de la recta $\mathcal{D}_1$ cuya ecuación es $x = \frac{a^2}{c}$. Es decir, la ecuación (6.9) se puede escribir de la forma

$$d(P, F_1) = \frac{c}{a}d(P, \mathcal{D}_1). \tag{6.10}$$

EL cociente $\dfrac{c}{a}$ recibe el nombre de *excentricidad* de la elipse, y se acostumbra a denotarla por e. Es importante notar que

$$0 < e < 1,$$

puesto que $0 < c < a$. Sustituyendo a e en la ecuación (6.10) se tiene

$$\frac{d(P, F_1)}{d(P, \mathcal{D}_1)} = e. \tag{6.11}$$

Puesto que el desarrollo hecho es reversible, paso a paso, se sigue que se puede definir una elipse como el lugar geométrico de todos los puntos del plano tales que el cociente de las distancias que separan a cada punto de un punto dado (el foco) y una recta dada (la directriz), es una constante e, con $0 < e < 1$. Observemos también que por la simetría de la figura, la elipse tiene dos directrices.

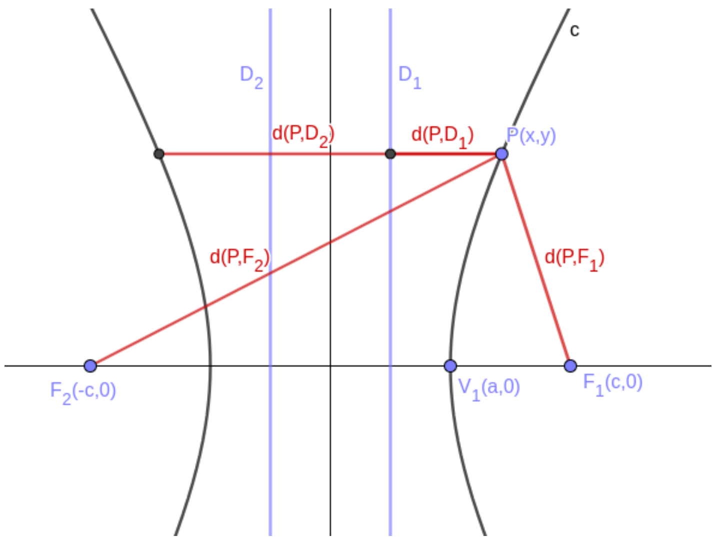


Figura 6.11

Consideremos ahora el caso de la hipérbola; ver figura 6.11. Se puede demostrar, por un método análogo al recién empleado en el caso de la elipse, que para una hipérbola con centro en el origen, foco en $F_1(c, 0)$, y un vértice en $V_1(a, 0)$, con $0 < a < c$, el cociente de las distancias que separan a un punto $P(x, y)$ de la hipérbola de foco $F_1(c, 0)$ y de la recta $\mathcal{D}_1$ dada por la ecuación $x = \dfrac{a^2}{c}$ está nuevamente dado por la ecuación (6.11). Si se sustituye a la recta $\mathcal{D}_1$ por la recta $\mathcal{D}_2$ cuya ecuación es $x = -\dfrac{a^2}{c}$, y al foco $F_1(c, 0)$ por el foco $F_2(-c, 0)$, entonces la ecuación es todavía valida. Es decir, se tiene

$$\frac{d(P, F_1)}{d(P, \mathcal{D}_1)} = \frac{d(P, F_2)}{d(P, \mathcal{D}_2)} = e.$$

Para el caso de la hipérbola, como $0 < a < c$, es claro que $e = c/a > 1$.

En resumen, hemos establecido que, para una recta dada $\mathcal{D}$ y un punto fijo F que no esté sobre $\mathcal{D}$, el lugar geométrico de los puntos P del plano tales que

$$\frac{d(P, F)}{d(P, \mathcal{D})} = e \tag{6.12}$$

1. es una elipse, si $0 < e < 1$.
2. es una parábola, si $e = 1$.
3. es una hipérbola, si $e > 1$

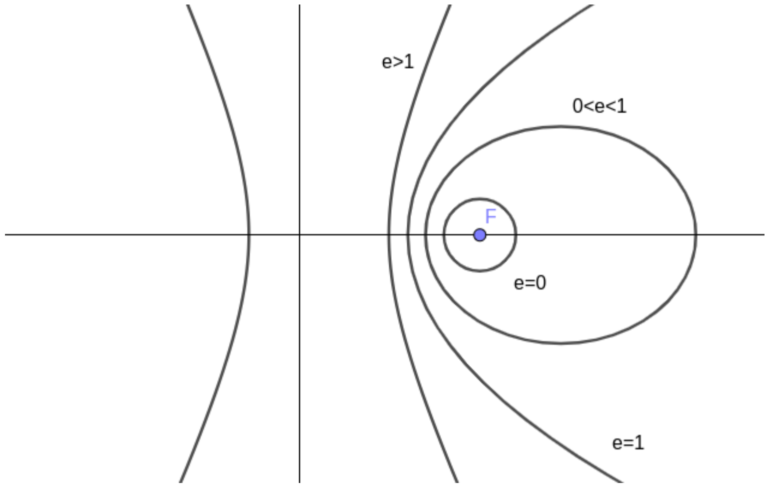


Figura 6.12

En todos los casos la constante e se llama *excentricidad* de la cónica. Esto se ilustra en la figura 6.12.

Usaremos la definición de las cónicas en términos de la excentricidad para dar sus ecuaciones polares. Para esto, consideremos una cónica cuyo foco esté en el polo y cuya directriz $\mathcal{D}$ con ecuación polar dada por $r\cos\theta = -p$ $(p > 0)$. Si e denota la excentricidad de la cónica, por la ecuaciòn 6.12, se debe cumplir que (ver figura 6.13):

$$e = \frac{d(O,P)}{d(\mathcal{D},P)}, \quad \text{o bien} \quad d(O,P) = e\,d(\mathcal{D},P).$$

Haciendo uso de las coordenadas polares, se tiene que $d(O,P) = r$, mientras que la distancia $d(\mathcal{D},P)$ se puede expresar como

$$d(\mathcal{D},P) = d(Q,S) + d(P,Q) = p + r\cos\theta,$$

de donde

$$r = e(p + r\cos\theta).$$

Al despejar r, obtenemos la ecuación deseada, que destacamos en el siguiente resultado.

Proposición 6.2: Ecuación polar de una cónica

La ecuación polar de una cónica con foco en el polo, directriz $x = r\cos\theta = -p$, $p > 0$ y excentricidad e es

$$r = \frac{ep}{1 - e\cos\theta}. \tag{6.13}$$

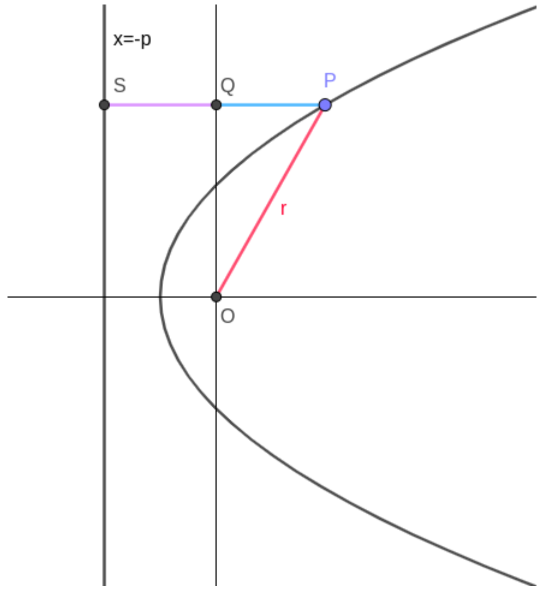


Figura 6.13

Ejemplo 6.1

Consideremos la ecuación

$$r = \frac{4}{2 - \cos\theta};$$

analizaremos que qué curva se trata. Para comparar con la ecuación 6.13, multiplicamos por 1/2 el numerador y el denominador de nuestro ejemplo para escribir

$$r = \frac{2}{1 - \dfrac{1}{2}\cos\theta};$$

inmediatamente podemos notar que $e = \frac{1}{2} < 1$, por lo que la curva es una elipse. Como $ep = 2$, tenemos que $p = 4$. Así, la ecuación cartesiana de una de sus directrices es $x = -4$. Pediremos al lector que determine la ecuación de la segunda directriz.

Observación 6.2

Por supuesto, una manera de obtener la ecuación polar de una cónica es consiste en su ecuación cartesiana y usar las expresiones

$$x = r\cos\theta,$$
$$y = r\operatorname{sen}\theta$$

para cambiar de un sistema al otro. Sólo observemos que la ecuación polar 6.13 tiene una expresión relativamente sencilla en el caso que el foco de la cónica esté en el polo; de otra forma, podríamos obtener ecuaciones polares un tanto complicadas.

Observación 6.3

Una más de las conocidas aplicaciones de las cónicas es su uso para describir las órbitas de cuerpos celestes. En la figura 6.12 habíamos representado una familia de cónicas con un mismo foco, pero esto nos recuerda[a] que las órbitas de planetas y algunos cometas son cónicas, tales que uno de los focos de todas estas cónicas se encuentra en el Sol.

[a]¡Agradezco a Juan Antonio Velasco el recordarme esto!

6.6. Cónicas con ejes paralelos a los coordenados

Cuando una cónica tiene ejes paralelos a los ejes coordenados, es sencillo obtener su ecuación a partir de su respectiva ecuación canónica.

Sea C' la curva que se obtiene al trasladar la curva C bajo la traslación debida a $u = (h, k)$, entonces los puntos $P' \in C'$ están dados por

$$P' = P + u,$$

donde P es un punto en C. Luego al introducir las coordenadas (x, y) de P y (x', y') de P' y despejando se tiene que

$$(x, y) = (x', y') - (h, k).$$

Así

$$x = x' - h; \quad y = y' - k. \tag{6.14}$$

Basta sustituir estas "nuevas" coordenadas en la ecuación canónica deseada.

Circunferencia

Sabemos que la ecuación de la circunferencia con centro en el origen y radio r ($r > 0$) está dada por

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Sustituyendo la ecuación (6.14) se tiene

$$(x' - h)^2 + (y' - k)^2 = r^2.$$

Podemos prescindir del uso de los apóstrofes (abuso de notación) para expresar la ecuación de la circunferencia con centro fuera del origen como

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2. \tag{6.15}$$

Elipse

Para la elipse, consideremos ambos casos: elipse horizontal y elipse vertical, ambas con centro el origen, cuyas ecuaciones están dadas por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Sustituyendo la ecuación (6.14) se tiene

$$\frac{(x' - h)^2}{a^2} + \frac{(y' - k)^2}{b^2} = 1; \quad \frac{(x' - h)^2}{b^2} + \frac{(y' - k)^2}{a^2} = 1.$$

Nuevamente haciendo abuso de la notación y prescindiendo de los apóstrofes, se tiene que las ecuaciones de las elipses horizontal y vertical con centro en (h, k) están dadas por

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1; \quad \frac{(x - h)^2}{b^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2} = 1, \tag{6.16}$$

respectivamente.

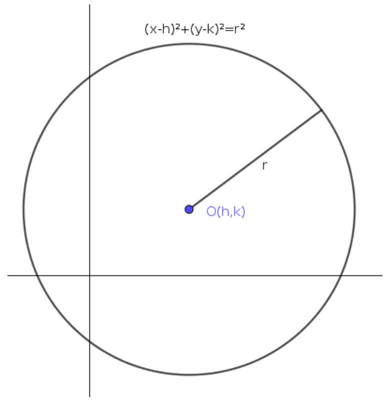


Figura 6.14: Circunferencia con centro en (h, k).

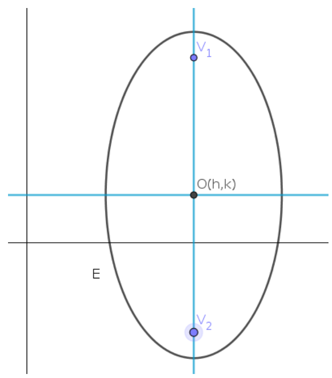


Figura 6.15: Elipse horizontal con centro en (h, k).

Parábola

Para la parábola tenemos cuatro casos; en cada uno de ellos mostraremos la traslación dada por las coordenadas de la ecuación (6.14) y nuevamente prescindiremos de los apóstrofes.

- Parábola que abre hacia arriba: $4a(y-k) = (x-h)^2$, $a > 0$;
- Parábola que abre hacia abajo: $4a(y-k) = -(x-h)^2$, $a > 0$;
- Parábola que abre hacia la derecha: $4a(x-h) = (y-k)^2$, $a > 0$;
- Parábola que abre hacia la izquierda: $4a(x-h) = -(y-k)^2$, $a > 0$.

Hipérbola

Finalmente, para la hipérbola consideramos dos casos: La hipérbola horizontal y la hipérbola vertical, cuyas respectivas ecuaciones trasladadas están dadas por

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1; \quad \frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1. \tag{6.17}$$

6.7. Ejemplos resueltos

Ejemplo 6.2

Dada la ecuación de la parábola

$$3y^2 + 6y - 4x + 15 = 0,$$

determinaremos todos sus elementos: vértice, foco, directriz, eje y lado recto.

Solución. Inmediatamente podemos notar que se trata de una parábola horizontal (puede abrir a la izquierda o a la derecha), pues es y la variable que está elevada al cuadrado. Para obtener lo que se pide, debemos llevar la ecuación de la parábola a su forma canónica. Para ello completamos cuadrados

$$\begin{aligned} 3y^2 - 6y - 4x + 15 &= 0 \\ 3\left(y^2 - 2y\right) &= 4x - 15 \\ 3\left(y^2 - 2y + \left(\frac{2}{2}\right)^2\right) &= 4x - 15 + 3\left(\frac{2}{2}\right)^2 \\ 3\left(y^2 - 2y + 1\right) &= 4x - 15 + 3 \\ 3\left(y - 1\right)^2 &= 4x - 12 \\ \left(y - 1\right)^2 &= \frac{4}{3}(x - 3). \end{aligned}$$

Una vez obtenida esta ecuación canónica, podemos decir lo siguiente

- La parábola abre hacia la derecha, eso implica que el foco está a la derecha del vértice.
- El vértice está en el punto $V(3, 1)$.
- Su lado recto mide $4/3$.
- Su eje focal es paralelo al eje x, por ser una parábola horizontal, y está dado por la recta $y-1 = 0$.

Para poder obtener su foco, debemos primero fijarnos en el lado recto, el cual sabemos que es 4 veces a; así,

$$a = \frac{LR}{4} = \frac{1}{3}.$$

Luego, sumaremos $\frac{1}{3}$ a la coordenada x del vértice, pues el foco está a la derecha del vértice.

$$F = \left(3 + \frac{1}{3}, 1\right) = \left(\frac{10}{3}, 1\right).$$

Finalmente la directriz (a la izquierda del vértice en este caso) se obtiene restando $\frac{1}{3}$ a la coordenada x del vértice, por lo que está dada por la ecuación $x = \frac{8}{3}$, es decir

$$3x - 8 = 0.$$

□

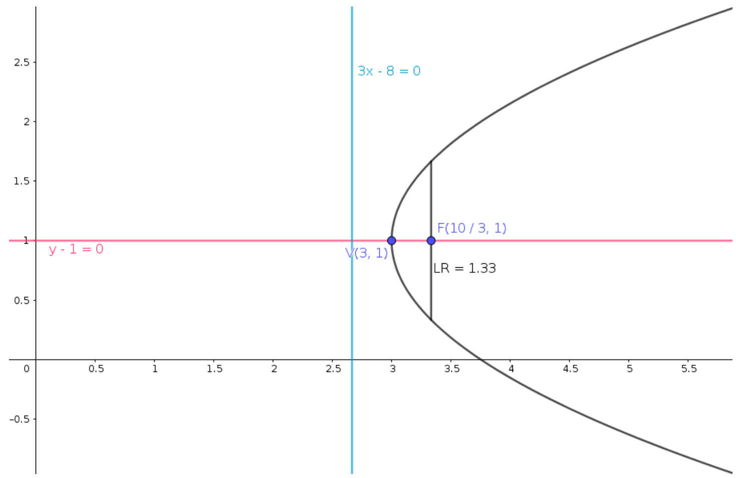


Figura 6.16

Ejemplo 6.3

Determinaremos las ecuaciones canónica y general de las elipses con las características que se piden.

a) Centro en el punto $(2, 1)$, eje mayor paralelo al eje y, que pasa por el punto $(1, 4)$ y lado recto con longitud $4/\sqrt{3}$.

b) Su foco y lado recto coinciden con los de la parábola cuya ecuación es

$$y^2 - 12x - 12y + 84 = 0,$$

y su centro es el punto $(3, 6)$.

Solución. a) Sabemos que el eje mayor de la elipse es paralelo el eje y, y tiene centro en el punto $(2, 1)$ por lo que la elipse debe ser de la forma

$$\frac{(x-2)^2}{b^2} + \frac{(y-1)^2}{a^2} = 1.$$

También sabemos que pasa por el punto $(1, 4)$, el cual podemos sustituir en la expresión anterior.

$$\frac{(1-2)^2}{b^2} + \frac{(4-1)^2}{a^2} = 1,$$

simplificando

$$a^2 + 9b^2 = a^2b^2. \tag{6.18}$$

Luego, el lado recto mide $\dfrac{4}{\sqrt{3}}$, y se sabe que

$$LR = \frac{2b^2}{a},$$

por lo que

$$\frac{2b^2}{a} = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Desarrollando la expresión anterior se tiene que

$$b^2 = \frac{2a}{\sqrt{3}}. \tag{6.19}$$

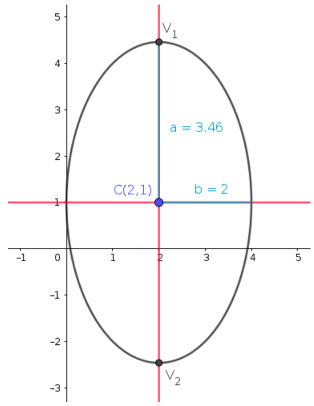


Figura 6.17

Luego sustituyendo (6.19) en (6.18)

$$a^2 + 9\left(\frac{2a}{\sqrt{3}}\right) = a^2\left(\frac{2a}{\sqrt{3}}\right),$$
$$a^2 + 6\sqrt{3}a = \frac{2a^3}{\sqrt{3}},$$
$$\sqrt{3}a^2 + 18a = 2a^3.$$

Sabemos que $a \neq 0$, entonces podemos dividir ambos lados entre a, y obtener

$$2a^2 - \sqrt{3}a - 18 = 0, \tag{6.20}$$

la cual es una ecuación de segundo grado. Obteniendo sus raíces tenemos

$$a = \frac{\sqrt{3} \pm 7\sqrt{3}}{4},$$

y como $a > 0$ entonces solo consideramos

$$a = \frac{\sqrt{3} + 7\sqrt{3}}{4} = \frac{8\sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{3}, \text{ de modo que } a^2 = 12.$$

Sustituyendo en (6.19), $b^2 = 4$. Así, la ecuación canónica de la elipse es

$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{12} = 1.$$

y su ecuación en forma general es

$$3x^2 + y^2 - 12x + 2y + 2 = 0.$$

b) Comencemos obteniendo el foco y lado recto de la parábola $y^2 - 12x - 12y + 84 = 0$. Para ello procederemos a completar cuadrados. Así, la parábola es de la forma

$$(y-6)^2 = 12(x-4).$$

Vemos que

- $LR = 12$.
- La distancia focal es igual a $\dfrac{LR}{4} = 3$.

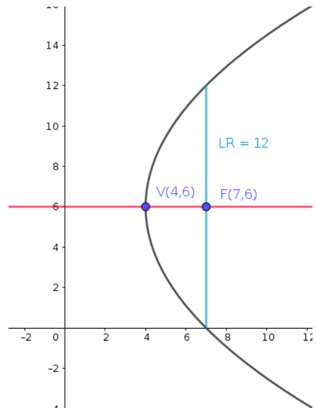


Figura 6.18

- El vértice es el punto $V(4,6)$.
- La parábola es horizontal y abre hacia la derecha.

Luego, como la parábola abre hacia la derecha, entonces el foco está a la derecha del vértice, y está en el punto $F(7,6)$, como se muestra en la figura 6.18.

Ahora, para la elipse, sabemos que será una elipse horizontal, pues su lado recto debe coincidir con el de la parábola; entonces debe ser de la forma

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1.$$

Ya conocemos el centro de la elipse y el valor c, pues es la distancia del centro al foco, y es igual a 4. Sólo nos falta determinar los valores a y b.

También sabemos que el lado recto de la elipse debe ser $LR = 12$, así,

$$LR=\frac{2b^2}{a}=12, \text{ de modo que } b^2=6a. \tag{6.21}$$

Como $a^2=b^2+c^2$, sustituyendo (6.18) se tiene

$$a^2-6a-16=0.$$

Las raíces de esta ecuación son $a_1=8$ y $a_2=-2$; como $a>0$, solo consideramos el caso $a=8$. Sustituyendo este valor en (6.21) se tiene que $b^2=48$ y así la ecuación canónica de la elipse es

$$\frac{(x-3)^2}{64}+\frac{(y-6)^2}{48}=1.$$

mientras que su ecuación en forma general es

$$3x^2+4y^2-18x-48y-21=0. \qquad \square$$

Ejemplo 6.4

Determinaremos el valor de k para que la recta l con ecuación $kx+y-15=0$ sea tangente a la circunferencia $\mathcal{C}$ con ecuación $x^2+y^2+6x-8y-1=0$.

Solución. Si la recta l es tangente a $\mathcal{C}$ en un punto P, entonces la distancia del centro de $\mathcal{C}$ a P debe ser igual al radio r, como se muestra en la figura 6.20.

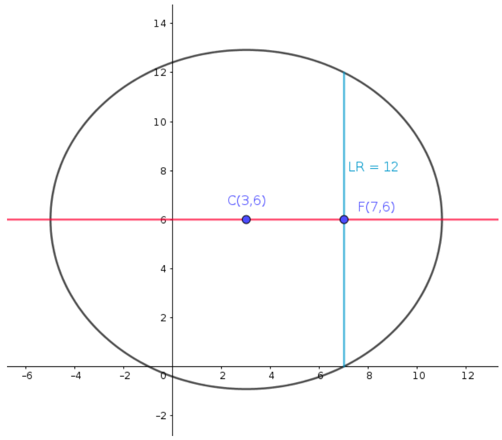


Figura 6.19

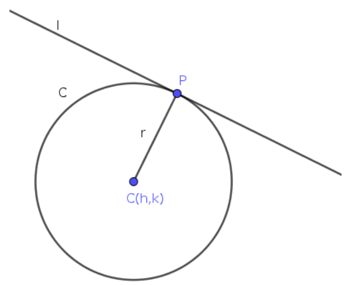


Figura 6.20

Dicho esto, llevemos la ecuación de la circunferencia a su forma canónica para obtener su centro y su radio:

$$x^2 + y^2 + 6x - 8y - 1 = 0$$
$$x^2 + 6x + \left(\frac{6}{2}\right)^2 + y^2 - 8y + \left(\frac{8}{2}\right)^2 = 1 + \left(\frac{6}{2}\right)^2 + \left(\frac{8}{2}\right)^2$$
$$(x+3)^2 + (y-4)^2 = 26.$$

Así, su centro es el punto $C(-3,4)$ y su radio es $r = \sqrt{26}$. Luego, usando la proposición 5.1 se tiene que

$$\frac{|k(-3) + 1(4) - 15|}{\sqrt{k^2+1}} = \sqrt{26}$$
$$\frac{|-3k - 11|}{\sqrt{k^2+1}} = \sqrt{26}$$
$$|-3k - 11| = \sqrt{26\,(k^2+1)}.$$

Elevando al cuadrado,

$$(-3k - 11)^2 = 26\left(k^2+1\right)^2$$
$$9k^2 + 66k + 121 = 26k^2 + 26$$
$$17k^2 - 66k - 95 = 0.$$

Las raíces de esta última expresión son

$$k = -\frac{19}{17} \text{ y } k = 5.$$

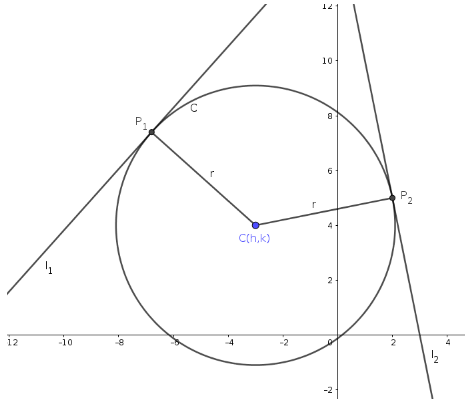


Figura 6.21

Así, tenemos dos soluciones posibles, como se muestra en la figura 6.21:

$$\begin{aligned} l_1 &: \quad 19x - 17y + 255 = 0; \\ l_2 &: \quad 5x + y - 15 = 0. \end{aligned}$$ □

6.8. Las cónicas como curvas parametrizadas

En esta sección describiremos brevemente a las cónicas como curvas parametrizadas; es decir, como la imagen de alguna función de un intervalo a $\mathbb{R}^2$.

Recordemos la descripción de la cónica más sencilla, la circunferencia; en particular, consideremos la circunferencia unitaria

$$\mathbb{S}^1 = \{\ (x, y \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\ \}.$$

Podemos describir a la circunferencia de una infinidad de maneras, pero tal vez la más sencilla es la siguiente:

$$x(t) = \cos t, \quad y(t) = \operatorname{sen} t,$$

donde t varía en cierto intervalo[1] de $\mathbb{R}$, o incluso en todo $\mathbb{R}$; podemos describir a esta parametrización diciendo que “enrolla” a $\mathbb{R}$ en la circunferencia, recorriéndola en el sentido contrario al de las manecillas del reloj.

Podemos usar una parametrización similar en el caso de una elipse; por ejemplo, dada la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

la parametrizamos de la manera siguiente:

$$x(t) = a\cos t, \quad y(t) = b\operatorname{sen} t; \tag{6.22}$$

en este caso, si $t = 0$, estamos en el punto $(a, 0)$ de la elipse. Si t crece, entonces recorremos la elipse en el sentido contrario al de las manecillas del reloj. Otra parametrización que podemos usar es

$$x(t) = a\operatorname{sen} t, \quad y(t) = b\cos t,$$

la cual pasa en $t = 0$ por el punto $(0, b)$ y recorre la elipse en el sentido de las manecillas del reloj. Una parametrización más:

$$x(t) = \cos 2t, \quad y(t) = \operatorname{sen} 2t; \tag{6.23}$$

[1] Para evitar notación excesiva, supondremos en esta sección que las parametrizaciones tienen el máximo dominio posible, que en la gran mayoría de los casos será toda la recta real.

¿cuál es la diferencia de esta parametrización con (6.22)? Observemos que para recorrer toda la elipse, con la parametrización (6.22) necesitamos un intervalo de longitud 2π, mientras que con la parametrización (6.23) basta un intervalo de longitud π; en otras palabras, la segunda parametrización tiene el doble de velocidad que la primera.

Si consideramos una elipse con centro en (h,k), con ecuación

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1,$$

podemos modificar un poco nuestra parametrización (6.22):

$$x(t)=a\cos t+h,\quad y(t)=b\,\mathrm{sen}\,t+k.$$

Pasemos ahora al caso de la hipérbola, comenzando con la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Ahora, debemos buscar otras funciones que jueguen el papel que jugaron el seno y el coseno en el caso de la elipse. Recordando que $\cosh^2 t-\mathrm{senh}^2\,t=1$, es fácil convencerse de que

$$x(t)=a\cosh t,\quad y(t)=b\,\mathrm{senh}\,t;$$

es la parametrización deseada. Conviene notar que esta parametrización corresponde sólo a una rama de la hiperbola; en este caso, a la rama derecha, es decir, a la que contiene al punto $(a,0)$ de la hipérbola. Para obtener una parametrización de la rama izquierda, basta fijarse en

$$x(t)=-a\cosh t,\quad y(t)=b\,\mathrm{senh}\,t.$$

Como en el caso de la elipse, la curva parametrizada

$$x(t)=a\cosh t+h,\quad y(t)=b\,\mathrm{senh}\,t+k.$$

parametrizará una rama de la hipérbola con ecuación

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1.$$

Para finalizar esta sección, podemos mencionar al menos una parametrización útil de la parábola. Recordemos que el *tiro parabólico* describe el movimiento de una partícula en un plano, bajo el efecto de la gravedad g y con una velocidad inicial $\mathbf{v}_0$. Si denotamos por $\mathbf{i}=(1,0)$, $\mathbf{j}=(0,1)$ y $\mathbf{a}$ al vector de aceleración, las ecuaciones que rigen el movimiento de la partícula son[2]

$$\begin{aligned}\mathbf{a}&=-g\mathbf{j}\\ \mathbf{v}(0)&=v_{0x}\mathbf{i}+v_{0y}\mathbf{j}.\end{aligned}$$

Puesto que la aceleación es la derivada de la velocidad, al integrar y tomar en cuenta la condición inicial $\mathbf{v}(0)$, tenemos que

$$\mathbf{v}(t)=v_{0x}\mathbf{i}+(v_{0y}-gt)\mathbf{j};$$

y para obtener la posición $\mathbf{p}(t)$ de la partícula, integramos nuevamente, suponiendo una condición inicial $\mathbf{p}(0)=x_0\mathbf{i}+y_0\mathbf{j}$:

$$\mathbf{p}(t)=(x_0+v_{0x}t)\mathbf{i}+\left(y_0+v_{0y}t-\frac{gt^2}{2}\right)\mathbf{j};$$

en nuestro contexto, lo que estamos diciendo es que las ecuaciones

$$x(t)=x_0+v_{0x}t,\quad y(t)=y_0+v_{0y}t-\frac{gt^2}{2},$$

son una parametrización de una parábola. (¿Hacia dónde abre? ¿Dónde está su vértice?)

[2]El lector observador notará nuestro uso de las **negritas** en este ejemplo, a diferencia de lo que hemos hecho hasta ahora. Nos hemos tomado esta licencia por plantear las cosas en un contexto físico.

6.9. Propiedad focal de las cónicas

Como ya hemos señalado, las cónicas se han estudiado desde hace siglos, y en dicho estudio se han descubierto muchas propiedades interesantes y útiles. Una de ellas es la llamada *propiedad focal*, que ha tenido aplicaciones en arquitectura, diseño y en varias áreas fuera de las matemáticas. En el caso de la elipse, la formulación de esta propiedad es la siguiente:

Proposición 6.3: Propiedad focal de la elipse

Si un rayo de luz sale de uno de los focos de la elipse y se refleja en ésta, el rayo reflejado pasará por el otro foco.

Antes de demostrar este resultado, conviene señalar que de manera implícita estamos usando la *ley de reflexión de Snell*, que en este caso se suele resumir diciendo que

el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión.

Así, en el caso de la elipse, estamos diciendo que el ángulo que forma el rayo que sale de un foco con la recta tangente a la elipse en el punto de contacto con la elipse debe ser igual al ángulo que forma el rayo reflejado con la misma recta tangente. Como de costumbre, una imagen dice más que mil palabras:

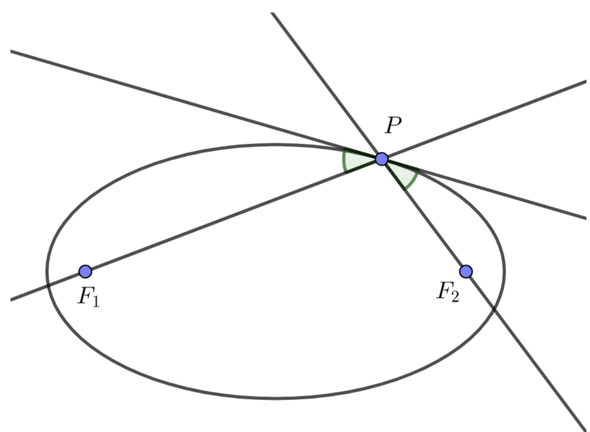


Figura 6.22: Propiedad focal de la elipse.

Ahora bien, la primera dificultad para mostrar esta propiedad consiste en encontrar la recta tangente a la elipse en un punto dado. Como ilustración, usaremos dos métodos, uno algebraico y el otro con Cálculo. Usemos un sistema de coordenadas tal que la ecuación de la elipse queda en forma canónica:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

y el punto P en la elipse tenga coordenadas (x_0, y_0).

Lema 6.1

La ecuación de la recta tangente a la elipse anterior en el punto (x_0, y_0) tiene la ecuación $x = x_0$ si (x_0, y_0) es alguno de los vértices $(\pm a, 0)$, o

$$y - y_0 = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}(x - x_0),$$

en cualquier otro caso.

Demostración algebraica. Para esta demostración, usaremos una propiedad de la recta tangente, a saber, que ésta sólo toca en un punto a nuestra cónica.[3]

Analicemos primero cuándo una recta vertical es tangente a la elipse en el punto P. Dicha recta tiene la ecuación $x = x_0$. Si sustituimos esto en la ecuación de la elipse, obtenemos

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{ó} \quad a^2y^2 + b^2(x_0^2 - a^2) = 0,$$

que es una ecuación de segundo grado en y. Como queremos que la recta $x = x_0$ tenga una única intersección con la elipse, la ecuación debe tener una sola raíz y por tanto su discriminante debe ser cero; es decir, $-4a^2b^2(x_0^2 - a^2) = 0$, de donde $x_0 = \pm a$. Esto nos dice que una recta vertical sólo puede ser tangente a la elipse en los vértices $(\pm a, 0)$.

Por otro lado, si consideramos una recta no vertical que pasa por P, podemos escribir su ecuación como

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

Al despejar y y sustituir la expresión resultante en la ecuación de la elipse, obtenemos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(m(x - x_0) + y_0)^2}{b^2} = 1. \tag{6.24}$$

Si la *vemos fijamente*, ésta es una ecuación de segundo grado en x; de nuevo, como queremos que la recta sólo tenga una intersección con la elipse, esta ecuación debe tener una sola raíz y por tanto su discriminante debe ser cero. Después de hacer algunas cuentas, se puede ver que el discriminante se anula si y sólo si

$$a^2b^4 + a^4b^2m^2 - a^2b^2m^2x_0^2 + 2a^2b^2mx_0y_0 - a^2b^2y_0^2 = 0.$$

Por segunda ocasión, vemos fijamente a esta ecuación, que resulta ser una ecuación de segundo grado en m; sus soluciones son

$$m = \frac{-x_0y_0 \pm \sqrt{b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2}}{a^2 - x_0^2},$$

pero observemos que la expresión que está dentro del signo radical se anula, puesto que el punto P pertenece a la elipse y por tanto satisface la ecuación de ésta. Hasta ahora hemos obtenido que

$$m = \frac{x_0y_0}{x_0^2 - a^2}.$$

Para finalizar la demostración, debemos probar que

$$\frac{y_0}{x_0^2 - a^2} = -\frac{b^2}{a^2y_0}, \quad \text{o bien} \quad -a^2y_0^2 = b^2x_0^2 - a^2b^2;$$

pero de nuevo, esto es válido pues el punto (x_0, y_0) está en la elipse. $\square$

[3]En otros cursos se verá que esta propiedad de las rectas tangentes no ocurre en general, pero en el caso de las cónicas sí.

Demostración usando Cálculo. Consideremos sólo el caso en que P no es alguno de los vértices $(\pm a, 0)$. En este caso, podemos despejar y en la ecuación de la elipse para obtener

$$y = \pm b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}. \tag{6.25}$$

Analicemos qué ocurre al tomar la parte superior de la elipse; es decir, tomando en cuenta el signo $+$ en la expresión anterior; el análisis al tomar el signo $-$ es muy similar. Al derivar con respecto de x, obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a^2}\frac{x}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} = -\frac{b^2 x}{a^2 y};$$

en la última igualdad usamos (6.25). Al evaluar en (x_0, y_0), obtenemos el resultado. $\square$

Como consecuencia del lema 6.1, obtenemos

Corolario 6.1

Un vector de dirección de la recta tangente a la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

en el punto (x_0, y_0) es el vector $v = (a^2 y_0, -b^2 x_0)$.

Ahora sí, podemos enunciar y demostrar la proposición 6.3 acerca de la propiedad focal de la elipse. Daremos dos demostraciones con distintos sabores. En realidad, no daremos todos los detalles para no extendernos demasiado, pero esperemos que al menos les quede una buena idea de éstas.

Demostración con geometría euclidiana. Recordemos que la elipse es el conjunto de puntos P tales que

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a;$$

y que los puntos que están dentro de la elipse cumplen que $d(P, F_1) + d(P, F_2) < 2a$, mientras que los que están fuera satisfacen la desigualdad opuesta. En particular, dada la recta tangente L a la elipse en un punto P, los puntos Q en L diferentes de P satisfacen

$$d(Q, F_1) + d(Q, F_2) > 2a.$$

Sea F_2^* el punto simétrico del foco F_2 con respecto de la recta L; ver figura 6.23.

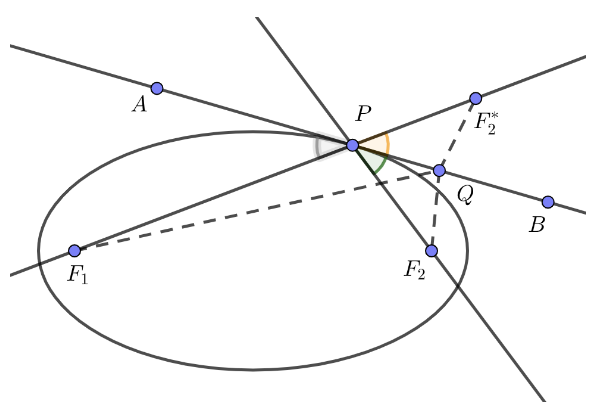


Figura 6.23: Demostración geométrica de la propiedad focal de la elipse.

En particular, los ángulos F_2^*PB y BPF_2 miden lo mismo. Por lo antes dicho y la simetría, para cualquier punto $Q \neq P$ de la recta tangente,

$$\begin{aligned} d(P,F_1)+d(P,F_2^*) &= d(P,F_1)+d(P,F_2) = 2a \\ &< d(Q,F_1)+d(Q,F_2) = d(Q,F_1)+d(Q,F_2^*), \end{aligned}$$

lo que nos dice que la manera más corta de ir de F_1 a F_2^* pasa por P, lo cual implica que F_1, P, F_2^* son colineales. Entonces, los ángulos opuestos por el vértice F_1PA y F_2^*PB miden lo mismo, de donde se sigue el resultado. □

Demostración con vectores. Consideremos de nuevo la elipse en posición canónica, con focos en $(\pm c, 0)$ y un punto arbitrario P de la elipse, con coordenadas (x_0, y_0). Mostraremos que los ángulos entre el vector de dirección de la recta tangente a la elipse en P y los vectores $P - F_1$ y $P - F_2$ son iguales. En términos del producto punto, veremos que

$$\frac{(P-F_1)\cdot v}{\|P-F_1\|\,\|v\|} = \frac{(P-F_2)\cdot v}{\|P-F_2\|\,\|v\|},$$

donde v es el vector dado en el Corolario 6.1. En forma equivalente, debemos probar que

$$((P-F_1)\cdot v)\|P-F_2\| = ((P-F_2)\cdot v)\|P-F_1\|. \tag{6.26}$$

Observando que

$$\begin{aligned} v &= (a^2y_0, -b^2x_0), \\ P - F_1 &= (x_0 - c, y_0), \\ P - F_2 &= (x_0 + c, y_0) \end{aligned}$$

y después de hacer bastantes cálculos,[4] basta probar que

$$(a^2-b^2)(b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2) = 0,$$

lo cual es claramente cierto, pues (x_0, y_0) está en la elipse. □

Enunciaremos ahora la propiedad focal de la parábola.

Proposición 6.4: Propiedad focal de la parábola

Si un rayo de luz sale del foco de la parábola y se refleja en ésta, el rayo reflejado será paralelo al eje focal de la parábola.

En cierto sentido, el caso de la parábola se puede ver como un caso límite del de la elipse, cuando uno de los focos tiende a infinito. Sin embargo, haremos una demostración sin utilizar este recurso.

Demostración. Haremos referencia a la figura 6.24.

Sea F el foco de la parábola, P un punto cualquiera de la misma, y Q el pie de la perpendicular de P a la directriz. Afirmamos que la mediatriz del segmento FQ es precisamente la recta tangente a la parábola, en el punto P. Observemos que la mediatriz divide al plano en dos partes, aquellos puntos que están más cerca de F que de Q y aquellos puntos que están más cerca de Q que de F. De este modo, el único punto de dicha mediatriz que puede estar sobre la parábola es P.

Ahora, si consideramos un punto $A \neq P$ de la mediatriz del segmento FQ, entonces tenemos que los ángulos FPA y APQ miden lo mismo.

Finalmente, si A', Q' son como los puntos indicados en la figura, tenemos que los ángulos APQ y $A'PQ'$ miden lo mismo, pues son opuestos por el vértice. Esto muestra que el rayo reflejado es justamente la recta que pasa por P y Q, que es paralela al eje focal de la parábola. □

[4] Cálculos que podemos hacer a mano, pero aquí recurrimos a *Mathematica*.

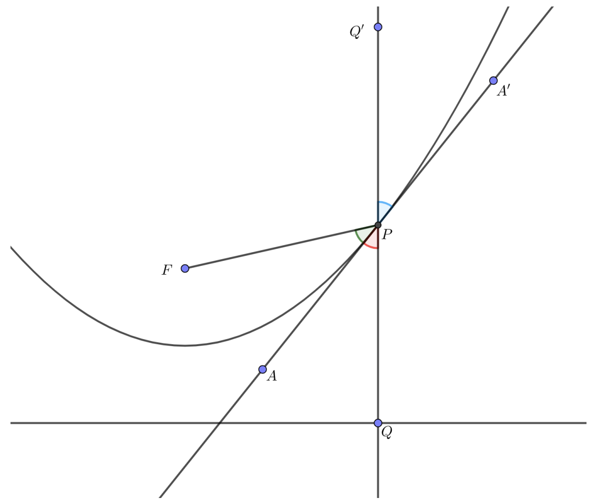


Figura 6.24: Demostración geométrica de la propiedad focal de la parábola.

Para cerrar esta sección, mencionaremos sin demostración la propiedad focal de la hipérbola.

Proposición 6.5: Propiedad focal de la hipérbola

Si un rayo de luz sale de uno de los focos de la hipérbola y se refleja en ésta, el rayo reflejado pasará por el otro foco, si se prolonga adecuadamente.

En la figura 6.25 ilustramos esta propiedad, aclarando qué queremos decir con prolongar el rayo.

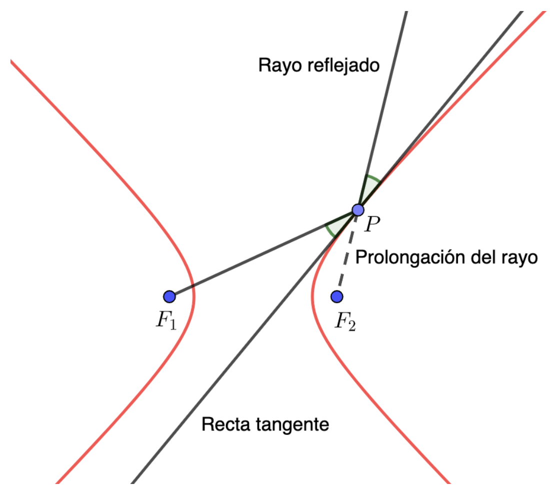


Figura 6.25: La propiedad focal de la hipérbola.

Apéndice A

Grupos y campos

Aquí mencionaremos dos estructuras algebraicas importantes.

Definición A.1: Grupo

Un conjunto G es un *grupo* si tiene definida una operación (usualmente denotada como el producto $\lambda\mu$ de $\lambda, \mu \in G$) que satisface las propiedades siguientes:

(G 1) **Cerradura**: Para cada par de elementos $\lambda, \mu \in G$, su producto $\lambda\mu$ es elemento de G.

(G 2) **Asociatividad**: Para cualesquiera $\lambda, \mu, \nu \in G$,

$$\lambda(\mu\nu) = (\lambda\mu)\nu.$$

(G 3) **Existencia del neutro**: Existe un elemento en G denotado por 1 o 1_G, tal que para todo $\lambda \in G$,

$$1\lambda = \lambda.$$

Además, si para cualesquiera $\lambda, \mu \in G$,

$$\lambda\mu = \mu\lambda,$$

se dice que el grupo es *conmutativo* o *abeliano*.

Otro concepto algebraico fundamental es el siguiente.

Definición A.2: Campo

Un conjunto $\mathbb{K}$ es un *campo* si tiene definidas dos operaciones llamadas *suma* y *producto*, que satisfacen las propiedades siguientes:

(C 1) **Cerradura**: Para cada par de elementos $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, su suma $\lambda + \mu$ y su producto $\lambda\mu$ son elementos de $\mathbb{K}$.

(C 2) **Conmutatividad**: Para cualesquiera $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

$$\lambda + \mu = \mu + \lambda \quad \text{y} \quad \lambda\mu = \mu\lambda.$$

(C 3) **Asociatividad**: Para cualesquiera $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{K}$,

$$\lambda + (\mu + \nu) = (\lambda + \mu) + \nu \quad \text{y} \quad \lambda(\mu\nu) = (\lambda\mu)\nu.$$

(C 4) **Existencia de neutros**: Existen elementos en $\mathbb{K}$ denotados por $0, 1$, distintos entre sí, tales que para todo $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\lambda + 0 = \lambda \quad \text{y} \quad 1\lambda = \lambda.$$

En particular, $K \neq \varnothing$.

(C 5) **Existencia de inversos**: Para cada $\lambda \in \mathbb{K}$ existe un elemento en $\mathbb{K}$, denotado $-\lambda$ tal que

$$\lambda + (-\lambda) = 0.$$

Además, si $\lambda \neq 0$, existe un elemento en $\mathbb{K}$, denotado λ^{-1}, tal que

$$\lambda\lambda^{-1} = 1.$$

(C 6) **Distributividad del producto con respecto de la suma**: Para cualesquiera $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{K}$, se tiene

$$\lambda(\mu + \nu) = \lambda\mu + \lambda\nu.$$

Ejemplos

1. El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, con las definiciones usuales de suma y multiplicación es un campo.

2. El conjunto de números racionales $\mathbb{Q}$, con las definiciones usuales de suma y multiplicación es un campo.

3. El conjunto de números reales de la forma $\lambda + \mu\sqrt{2}$ donde $\lambda, \mu \in \mathbb{Q}$, con la suma y multiplicación como en $\mathbb{R}$ es un campo.

4. El campo $\mathbb{Z}_2$ consiste de dos elementos 0 y 1 con las operaciones de suma y multiplicación definidas por las tablas

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

5. Ni el conjunto de números enteros positivos $\mathbb{Z}^+$ ni el conjunto de enteros $\mathbb{Z}$ con las definiciones usuales de suma y multiplicación son campos, pues la propiedad (C 5) no se cumple.

Los elementos neutros e inversos garantizados por (C 4) y (C 5) son únicos; esto es consecuencia del siguiente teorema.

Teorema A.1: Leyes de cancelación

Sea $\mathbb{K}$ un campo y $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{K}$. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

a) Si $\lambda + \mu = \nu + \mu$, entonces $\lambda = \nu$.

b) Si $\lambda \cdot \mu = \nu \cdot \mu$ y $\mu \neq 0$, entonces $\lambda = \nu$.

Demostración. La idea es similar en ambos incisos.

a) Como $\mu \in \mathbb{K}$, existe $(-\mu) \in K$ tal que $\mu + (-\mu) = 0$. Entonces

$$\begin{aligned} \lambda + \mu &= \nu + \mu, && \text{hipótesis;} \\ (\lambda + \mu) + (-\mu) &= (\nu + \mu) + (-\mu), && \text{sumando } -\mu; \\ \lambda + (\mu + (-\mu)) &= \nu + (\mu + (-\mu)), && \text{asociatividad;} \\ \lambda + 0 &= \nu + 0; && \text{inverso aditivo;} \\ \lambda &= \nu, && \text{neutro aditivo.} \end{aligned}$$

b) Como $\mu \neq 0$, existe $\mu^{-1} \in \mathbb{K}$ tal que $\mu\mu^{-1} = 1$. Entonces

$$\begin{aligned} \lambda \cdot \mu &= \nu \cdot \mu, && \text{hipótesis;} \\ (\lambda\mu)\mu^{-1} &= (\nu \cdot \mu)\mu^{-1}, && \text{multiplicando por } \mu^{-1}; \\ \lambda(\mu\mu^{-1}) &= \nu(\mu\mu^{-1}), && \text{asociatividad;} \\ \lambda(1) &= \nu(1), && \text{inverso multiplicativo;} \\ \lambda &= \nu, && \text{neutro multiplicativo.} \end{aligned}$$

$\square$

Corolario A.1

Los elementos neutros y los inversos, son únicos.

Demostración. Supongamos que existe otro elemento denotado por $0'$ que satisface que $0' + \lambda = \lambda$ para cada $\lambda \in \mathbb{K}$. Como $0 + \lambda = \lambda$ para cada $\lambda \in \mathbb{K}$, tenemos que $0' + \lambda = 0 + \lambda$ para cada $\lambda \in \mathbb{K}$. Entonces por el teorema (A.1), se tiene que $0' = 0$. Laa demás pruebas son análogas. $\square$

Así cada elemento μ de un campo tiene un único inverso aditivo y, si $\mu \neq 0$, un único inverso multiplicativo. Notemos que $-(-\mu) = \mu$ y $\left(\mu^{-1}\right)^{-1} = \mu$.

Algunas de las propiedades conocidas del producto de números reales son ciertas en un campo cualquiera, como el siguiente teorema muestra.

Teorema A.2

Sean λ y μ elementos arbitrarios en un campo $\mathbb{K}$. Entonces cada una de las siguientes propiedades es cierta.

a) $\lambda 0 = 0$.

b) $(-\lambda)\mu = \lambda(-\mu) = -(\lambda\mu)$.

c) $(-\lambda)(-\mu) = \lambda\mu$.

Demostración. Veamos qué ocurre en cada inciso.

a) Como $0 + 0 = 0$,
$$0 + \lambda 0 = \lambda 0 = \lambda(0 + 0) = \lambda 0 + \lambda 0.$$
Por el teorema (A.1) se tiene que $\lambda 0 = 0$.

b) Por definición, $-(\lambda\mu)$ es el único elemento de $\mathbb{K}$ tal que $\lambda\mu + (-(\lambda\mu)) = 0$. Pero
$$\lambda\mu + (-\lambda)\mu = (\lambda + (-\lambda))\mu = 0\mu = 0.$$
Así, por unicidad se tiene que $-(\lambda\mu) = (-\lambda)\mu$. Análogamente, $-(\lambda\mu) = \lambda(-\mu)$.

c) Basta aplicar el inciso anterior dos veces
$$(-\lambda)(-\mu) = -[\lambda(-\mu)] = -[-(\lambda\mu)] = \lambda\mu.$$
□

Corolario A.2

El neutro aditivo de un campo no tiene inverso multiplicativo.

Apéndice B

Determinantes

B.1. Matrices

Una *matriz* A de orden $m \times n$ es un arreglo de escalares (que pueden estar en $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ o cualquier campo K) a_{ij} llamados *elementos*, arreglados en m renglones y n columnas, y que por lo general se denota como sigue:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

o, en forma abreviada, por (a_{ij}) con $i = 1, 2, \ldots, m$ y $j = 1, 2, \ldots, n$. Si $m = n$ la matriz es *cuadrada* de orden n o simplemente matriz de orden n. Si $m = 1$, es una *matriz renglón* o *vector renglón*; si $n = 1$, es una *matriz columna* o *vector columna*.

Una matriz cuadrada A de orden n es llamada *matriz diagonal* si $a_{ij} = 0$ siempre que $i \neq j$. Si además $a_{ii} = 1$ para toda $i = 1, 2, \ldots, n$, entonces la matriz es llamada *matriz identidad* y se denota por I.

Una *matriz nula*, que se denota por O, es aquella cuyos elementos son todos iguales a cero.

En este curso nos interesa el caso en el que los elementos de la matriz son números reales. Denotaremos el conjunto de todas las matrices de orden $m \times n$ con entradas en los reales por $\mathfrak{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

B.2. Determinantes

Una herramienta importante en el estudio de las matrices cuadradas es el *determinante* que en general se define de una forma "complicada". En este apéndice vamos a centrar nuestra atención en los casos $n = 2, 3$, cuya dafinición es un poco más sencilla.

Definición B.1: Determinante de 2×2

Sea $A \in \mathfrak{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ dada por

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

El *determinante* de A denotado[a] por $\det A$, se define como

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

[a]También puede ser denotado por $|A|$, $|a_{ij}|$ o $\det(a_{ij})$.

Ejemplo B.1

Sean $A, B, C \in \mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ dadas por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \qquad C = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -7 & -8 \end{pmatrix}.$$

El determinante de cada matriz es

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (1)(1) - (1)(1) = 0:$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (1)(4) - (2)(3) = 4 - 6 = -2;$$

$$\det C = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -7 & -8 \end{vmatrix} = (5)(-8) - (6)(-7) = -40 + 42 = 2.$$

Una vez dada esta definición, podemos definir el determinante de una matriz de 3×3, pues para ello, requerimos usar determinantes de 2×2.

Definición B.2: Determinante de 3×3

Sea $A \in \mathsf{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ dada por

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

El determinante de A se define como

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Sería difícil memorizar la fórmula anterior sin algún recurso mnemotécnico. La regla que hay que aprender es que recorremos la primera fila multiplicando a_{1j} por el determinante de la matriz de 2×2 que resulta de eliminar el primer renglón y la j-ésima columna, y después sumamos todo, recordando poner un signo de resta delante del término a_{12}.

Una forma "gráfica" de ver esta regla es la siguiente: Para calcular

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

nos fijamos en

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \xcancel{a_{12}} & \xcancel{a_{13}} \\ \xcancel{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ \xcancel{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \xcancel{a_{11}} & a_{12} & \xcancel{a_{13}} \\ a_{21} & \xcancel{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & \xcancel{a_{32}} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \xcancel{a_{11}} & \xcancel{a_{12}} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \xcancel{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & \xcancel{a_{33}} \end{vmatrix}.$$

Así,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Ejemplo B.2

Calculemos el determinante de la matriz identidad de 3×3.

$$\det I_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

Ejemplo B.3

Calculemos el determinante de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} &= 1 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\ &= -3 + 12 - 9 = 0 \end{aligned}$$

B.3. Propiedades de los determinantes

Una propiedad importante es que el signo de un determinante cambia al intercambiar dos filas o dos columnas. Para determinantes de 2×2 esto es consecuencia de la definición:

- Para las filas tenemos

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = -\left(a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22}\right) = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}$$

- Para las columnas

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\left(a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}\right) = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}$$

Se dejará al lector probar esta propiedad para el caso 3×3.

Otra propiedad fundamental de los determinantes es que podemos *sacar como factor común escalares de cualquier fila o columna*. Para determinantes de 2×2, esto significa

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \alpha a_{11} & a_{12} \\ \alpha a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \alpha a_{12} \\ a_{21} & \alpha a_{22} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{vmatrix} &= \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

De manera análoga para determinantes de 3×3 tenemos

$$\begin{vmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & a\alpha_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \alpha a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \alpha a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & \alpha a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

y así sucesivamente. Estos resultados se deducen de las definiciones. En particular si cualquier fila o columna contiene únicamente ceros, el valor del determinante es cero.

Un tercer hecho fundamental acerca de los determinantes es el siguiente: *Podemos abrir las sumas renglón por renglón, o bien, columna por columna.* Esto significa:

- Para el caso 2×2

$$\begin{vmatrix} a_1 + c_1 & a_2 + c_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \qquad \text{por renglón}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 + c_1 & a_2 \\ b_1 + d_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & a_2 \\ d_1 & b_2 \end{vmatrix} \qquad \text{por columna}$$

- Para el caso 3×3, podemos separar por renglón así:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 + d_1 & b_2 + d_2 & b_3 + d_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

  o por columna, así:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 + d_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 + e_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 + f_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & d_3 \\ d_1 & d_2 & e_3 \\ c_1 & c_2 & f_3 \end{vmatrix}.$$

Estrechamente ligado a estas propiedades está el hecho de que *podemos desarrollar un determinante de* 3×3 *recorriendo cualquier renglón o columna* usando los signos del siguiente patrón:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

Por ejemplo, podemos desarrollar "por menores" el determinante del ejemplo (B.3) recorriendo el segundo renglón

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$
$$= (-4)(-6) + (5)(-12) + (-6)(-6) = 0.$$

Bibliografía

[1] Daniel C Alexander y Geralyn M. Koeberlein. *Geometría*. 5.ª ed. Cengage Learning Editores, SA de CV, 2013.

[2] Sheldon Axler. *Linear algebra done right*. Springer, 2015.

[3] David Hilbert y Stephan Cohn-Vossen. *Geometry and the Imagination*. AMS Chelsea Publishing, 1999.

[4] Arnold J Insel, Lawrence E Spence y Stephen H Friedberg. *Linear Algebra*. 4.ª ed. Pearson Education, 2003.

[5] Jerrold E Marsden y Anthony J Tromba. *Cálculo vectorial*. 5.ª ed. Madrid, España: Person Education, 2004.

[6] Yakov Perelman. *Geometría Recreativa*. 1.ª ed. Moscú, URSS: MIR.

[7] Ana Irene Ramirez Galarza. *Geometría analítica: Una introducción a la geometría*. México UNAM, Facultad de Ciencias: Las Prensas de Ciencias, 2004.

[8] Murray Spiegel. “Análisis Vectorial”. En: *Serie Schaum*. 2.ª ed. México: Editorial Mc Graw Hill, 2011.

[9] William Wooton et al. *Geometría analítica moderna*. Cultural, 1985.