Semestre 2025-2 Febrero 2025
Marco, Yadira y Serafín

Repaso de Cálculo 1.

1. Demuestren formalmente que los enteros son un conjunto numerable.
2. Justifiquen que el conjunto de Cantor es no numerable. Si no vieron el conjunto de Cantor ni base 3, es buen momento para investigar.
3. Demuestren que si α es el supremo del conjunto A, entonces existe una sucesión de elementos de A que converge a α. ¿Qué pueden decir de la sucesión si α es además máximo de A en contraste con lo que ocurre si no lo es?
4. Den una sucesión de números irracionales escritos en forma decimal que converja a $1/7$ por la izquierda y otra que lo haga por la derecha.
5. Si la sucesión $\{x_n\}$ tiende a infinito cuando n tiende a menos infinito y si la sucesión $\{y_n\}$ es acotada, demuestren que la sucesión $\{x_n + y_n\}$ converge a menos infinito.
6. Demuestren que $n^3 + 5n$ es múltiplo de 6 para todo $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$.
7. Demuestren que la serie de la sucesión $\{1/n\}$ diverge mientras que la serie de la sucesión $\{1/n^2\}$ converge.
8. Grafiquen $f(x) = e^{cos\,x}$. Indiquen cuál es la imagen de la función si el dominio son todos los reales. Demuestren que f es periódica, par y encuentren un intervalo donde f sea invertible. Justifiquen sus respuestas.
9. Calculen y demuestren usando la definición el límite siguiente
$$\lim_{x \to 0} \sqrt[3]{x}.$$
10. Demuestren que la función $f(x) = sen 1/x$ no tiene límite en cero.
11. Sean $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios tal que el grado de P es mayor que el de Q. Demuestren que
$$\lim_{x \to \infty} \frac{Q(x)}{P(x)} = 0.$$
12. Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ continua. Demuestren que existe x_0 tal que $f(x_0) = x_0$.

13. Sea $n \in \mathbb{N}$ y

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{(x-1)^n}, \text{ si } x \neq 1, \\ 2, \text{si } x = 1. \end{cases}$$

¿Para qué valores de n la función f es continua en todos los reales? Justifiquen su respuesta.

14. Demuestren que la función de Dirichlet es discontinua en todos los puntos y que la función de Tomae es continua en los irracionales pero discontinua en los racionales.

15. Supongan que $f(x_0) = h(x_0)$, que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo x, que f y h son derivables en x_0 y que $f'(x_0) = h'(x_0)$. *a*) Demuestren que g es derivable en x_0 que $g'(x_0) = f'(x_0)$. *b*) Den un ejemplo de que lo anterior no se cumple si $f(x_0) \neq h(x_0)$. Hagan dibujos e ilustren sus respuestas.

16. Demuestren que si $f'(x) \geq M$ para todo $x \in [a, b]$, entonces $f(b) \geq M(b-a)+f(a)$.

Región de la nebulosa del Águila llamada Pilares de la Creación. ¿De qué tamaño es la nebulosa?