Ρομποτική ΙΙ: Ευφυή Ρομποτικά Συστήματα

1η Σειρά Αναλυτικών Ασκήσεων

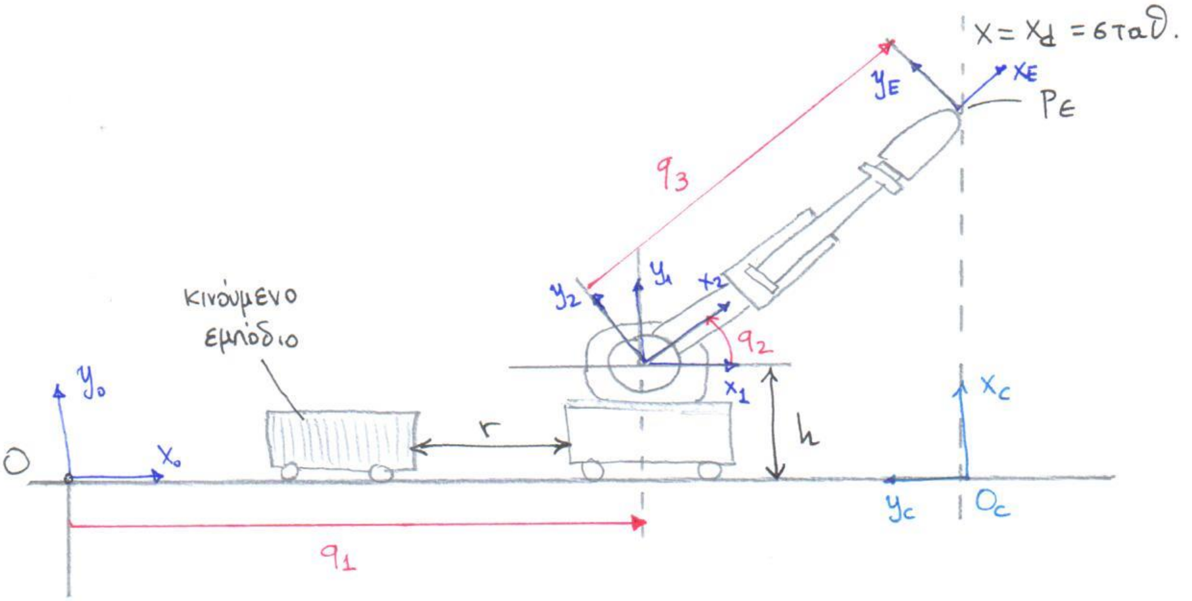
Ακαδημαϊκό Έτος 2020 - 2021

Ονοματεπώνυμο: Χρήστος Δημόπουλος

Αρ. Μητρώου: 03117037

Άσκηση 1.1: (Kinematic Control of a Redundant Robotic System)

Θεωρούμε το σύστημα κινούμενου ρομποτικού χειριστή με συνολικά 3 β.ε. στο επίπεδο, και κινούμενο εμπόδιο, όπως εικονίζονται στο κάτωθι σχήμα:



a) Εφαρμόζουμε κινηματικό έλεγχο με βάση την εξής μεθοδολογία διάσπασης υποεργασιών:

1η υποεργασία: Διατήρηση του τελικού άκρου p_E επί δεδομένης ευθείας $x = x_d =$ σταθ. στο επίπεδο.

2η υποεργασία: Διατήρηση απόστασης ασφαλείας r μεταξύ του κινούμενου ρομπότ και του κινούμενου εμποδίου

Έστω $p_1 = f_1(q)$ η συνάρτηση που περιγράφει το γεωμετρικό μοντέλο για την $1^{η}$ ρομποτική υποεργασία, και $\dot{p}_1 = J_1(q) \cdot \dot{q}$, όπου $J_1(q) = \frac{\partial f_1}{\partial q}$ η Ιακωβιανή μήτρα της $1^{ης}$ υποεργασίας.

Εαν ορίσουμε ως p_{1d} και $\dot{p}_{1d}$ την επιθυμητή θέση και ταχύτητα της $1^{ης}$ υποεργασίας αντιστοίχως, τότε η εξίσωση κινηματικού ελέγχου είναι:

$$\dot{q} = \underbrace{J_1^{+}(q) \cdot \left[\dot{p}_{1d} + K_1 \cdot (p_{1d} - f_1(q))\right]}_{\substack{\dot{q}^{(1)} \\ \text{Ταχύτητες } 1^{ης} \text{ υποεργασίας}}} + \underbrace{K_2 \left[\mathbb{I} - J_1^{+}(q) \cdot J_1(q)\right] \cdot \dot{q}_{r}^{(2)}}_{\substack{\dot{q}^{(2)} \\ \text{Ταχύτητες } 2^{ης} \text{ υποεργασίας}}} \quad (1)$$

όπου K_1, K_2 κέρδη ενίσχυσης και $\dot{q}_{r}^{(2)}$ η ταχύτητα αναφοράς για την επίτευξη της $2^{ης}$ υποεργασίας.

Το ευθύ κινηματικό μοντέλο του ρομποτικού χειριστή μας δίνει:

- $A_1^0 = Tra(x, q_1) \cdot Tra(y, h)$
- $A_2^1 = Rot(z, q_2)$
- $A_E^2 = Tra(x, q_3)$

Συνεπώς: $$p_E^0 = \begin{bmatrix} p_{Ex} \\ p_{Ey} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 + c_2 \cdot q_3 \\ h + s_2 \cdot q_3 \end{bmatrix}$$

και $$\dot{p}_E = \begin{bmatrix} \dot{p}_{Ex} \\ \dot{p}_{Ey} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 - s_2 q_3 \dot{q}_2 + c_2 \dot{q}_3 \\ c_2 q_3 \dot{q}_2 + s_2 \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -s_2 q_3 & c_2 \\ 0 & c_2 q_3 & s_2 \end{bmatrix}}_{J_E(q)} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}$$

Για να περιγράψουμε την 1^{η} υποεργασία, εκφράζουμε την κινηματική εξίσωση του ρομποτικού χειριστή ως προς το πλαίσιο αναφοράς $O_c - x_c y_c z_c$:

$$A_c^0 = Tra(x, x_d) \cdot Rot(z, \pi/2) = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & x_d \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Οπότε:

$$A_0^c = Rot(z, -\pi/2) \cdot Tra(x, -x_d) = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & +x_d \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Επομένως:

$${}^{(c)}P_E = \begin{bmatrix} k + s_2 q_3 \\ -q_1 - c_2 q_3 + x_d \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad {}^{(c)}\dot{P}_E = \begin{bmatrix} c_2 \dot{q}_2 q_3 + s_2 \dot{q}_3 \\ -\dot{q}_1 + s_2 \dot{q}_2 q_3 - c_2 \dot{q}_3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow {}^{(c)}\dot{P}_E = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & c_2 q_3 & s_2 \\ -1 & s_2 q_3 & -c_2 \end{bmatrix}}_{{}^{(c)}J_E(q)} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}$$

• <u>Για την 1^{η} υποεργασία</u>:

- Το γεωμετρικό μοντέλο περιγράφεται από την εξίσωση:

$$P_1 = {}^{(c)}P_{Ey} = -q_1 - c_2 q_3 + x_d \Rightarrow \boxed{f_1(q) = x_d - q_1 - c_2 q_3}$$

με $\varphi_{1d} = 0$

- Το διαφορικό μοντέλο περιγράφεται από την εξίσωση:

$$\dot{P}_1 = {}^{(c)}\dot{P}_{Ey} = -\dot{q}_1 + s_2 q_3 \dot{q}_2 - c_2 \dot{q}_3 = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & s_2 q_3 & -c_2 \end{bmatrix}}_{J_1(q)} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}$$

Οπότε: $J_1(q) = \begin{bmatrix} -1 & s_2 q_3 & -c_2 \end{bmatrix}$, με $\dot{p}_{1d} = 0$.

Έπειτα, λαμβάνουμε την ψευδοαντίστροφη μήτρα:

$$J_1^+ = J_1^T (J_1 J^T)^{-1} = \frac{1}{(1+c_2^2+s_2^2 q_3^2)} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ s_2 q_3 \\ -c_2 \end{bmatrix}$$

Από τη σχέση (1):

$$\boxed{\dot{q}^{(1)} = -\frac{k_1 (x_d - q_1 - c_2 q_3)}{(1+c_2^2+s_2^2 q_3^2)} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ s_2 q_3 \\ -c_2 \end{bmatrix}} \quad (2)$$

• <u>Για τη 2η υποεργασία:</u>

Ορίζουμε μια "συνάρτηση κριτηρίου" $V(q)$, η βελτιστοποίηση της οποίας να περιγράφει τη 2η ρομποτική υποεργασία. Ειδικότερα, ορίζουμε τη $V(q)$ ως μια παραβολική συνάρτηση της απόστασης του ρομποτικού χειριστή από το κινούμενο εμπόδιο:

$$V(q) = \begin{cases} \frac{1}{2} k_c (r - r_0)^2, & \text{if } r < r_0 \\ 0, & \text{if } r \geq r_0 \end{cases}$$

, όπου k_c: σταθερά ενίσχυσης
r_0: κατώφλι απόστασης

Η μετρούμενη απόσταση r του ρομποτικού χειριστή από το κινούμενο εμπόδιο μπορεί να μοντελοποιηθεί ως:

$$r = |q_1 - x_b|$$

όπου $\underline{\underline{x_b}}$: η θέση του εμποδίου, μετρούμενη από το πλαίσιο βάσης O-xyz.

Στην προκειμένη περίπτωση:

$$V(q) = \begin{cases} \frac{1}{2} k_c (q_1 - x_b - r_0)^2, & \text{if } r < r_0 \\ 0, & \text{if } r \geq r_0 \end{cases}$$

Ως εκ τούτου, η ταχύτητα αναφοράς $\dot{q}_r^{(2)}$ για την επίτευξη της 2ης υποεργασίας, μπορεί να εκφρασθεί ως εξής:

▷ <u>If $r < r_0$:</u> $\dot{q}_r^{(2)} = \nabla_q V(q) = \begin{bmatrix} K_c(q_1 - x_b - r_0) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_c(r - r_0) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

▷ <u>If $r \geq r_0$:</u> $\dot{q}_r^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Επομένως, από τη σχέση (1) μπορούμε να προσδιορίσουμε τις γενικευμένες ταχύτητες αρθρώσεων για τη 2η υποεργασία:

$$\dot{q}^{(2)} = K_2 \left[\mathbb{I} - J_1^{+}(q) \cdot J_1(q) \right] \dot{q}_r^{(2)}$$

$$= K_2 \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{(1 + c_2^2 + s_2^2 q_3^2)} \begin{bmatrix} -1 \\ s_2 q_3 \\ -c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & s_2 q_3 & -c_2 \end{bmatrix} \right\} \dot{q}_r^{(2)}$$

$$= \frac{K_2}{(1 + c_2^2 + s_2^2 q_3^2)} \cdot \begin{bmatrix} \cancel{1} + c_2^2 + s_2^2 q_3^2 - \cancel{1} & s_2 q_3 & -c_2 \\ s_2 q_3 & 1 + c_2^2 + \cancel{s_2^2 q_3^2} - \cancel{s_2^2 q_3^2} & s_2 c_2 q_3 \\ -c_2 & c_2 s_2 q_3 & 1 + s_2^2 q_3^2 + \cancel{c_2^2} - \cancel{c_2^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_c(r - r_0) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{q}^{(2)} = \frac{K_2 K_c}{(1 + c_2^2 + s_2^2 q_3^2)} (r - r_0) \cdot \begin{bmatrix} c_2^2 + s_2^2 q_3^2 \\ s_2 q_3 \\ -c_2 \end{bmatrix}} \quad (3)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (1), (2), (3) λαμβάνουμε τη συνολική εξίσωση κινηματικού ελέγχου.

β) Έστω $h=1$, $r_0=6$, $x_d=15$. Θεωρούμε ότι τη χρονική στιγμή t ισχύει:

$$q_1(t)=x_d=15,\quad q_2(t)=\pi/2,\quad q_3(t)=5 \quad \text{και} \quad r(t)=(r_0-2)=4.$$

Τότε:

$$\dot{q}^{(1)} = -K_1\frac{\left(\cancel{x_d}-\cancel{q_1(t)}-\left[\cancel{\cos q_2(t)}\right]^{0} q_3(t)\right)}{\left(1+\cos^2 \cancel{q_2}(t)^{\,0}+\sin^2 q_2(t)\cdot q_3^2(t)\right)}\cdot\begin{bmatrix}-1\\ s_2 q_3\\ -c_2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \dot{q}^{(1)}(t) = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\dot{q}^{(2)} = \frac{k_2 k_c}{\left(1+\cancel{c_2^2(t)}^{\,0}+s_2^2(t)q_3^2(t)\right)}\left(r(t)-r_0\right)\begin{bmatrix}\cancel{c_2^2}^{\,0}+s_2^2 q_3^2\\ s_2 q_3\\ \cancel{-c_2}^{\,0}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \dot{q}^{(2)}(t) = \frac{k_2 k_c(-2)}{26}\begin{bmatrix}25\\5\\0\end{bmatrix} = k_2 k_c\begin{bmatrix}\frac{-25}{13}\\ \frac{-5}{13}\\ 0\end{bmatrix}$$

Συνολικά:

$$\begin{bmatrix}\dot{q}_1(t)\\ \dot{q}_2(t)\\ \dot{q}_3(t)\end{bmatrix} = k_2 k_c\begin{bmatrix}\frac{-25}{13}\\ -5/13\\ 0\end{bmatrix}.$$

Άσκηση 1.2:

Έστω ρομποτικός μηχανισμός 2d.o.f. (q_1, q_2), του οποίου το δυναμικό μοντέλο (θεωρώντας αβαρή τον 1ο σύνδεσμο και $l_1 = 0$), περιγράφεται από τις εξισώσεις:

$$\tau_1 = (m q_2^2)\cdot \ddot{q}_1 + (2 m q_2)\, \dot{q}_1 \dot{q}_2 \qquad (1\alpha)$$

$$\tau_2 = m \cdot \ddot{q}_2 - (m q_2)\cdot \dot{q}_1^{2} \qquad (1\beta)$$

1.2.α) Προσαρμοστικός Έλεγχος ρομποτικού χειριστή

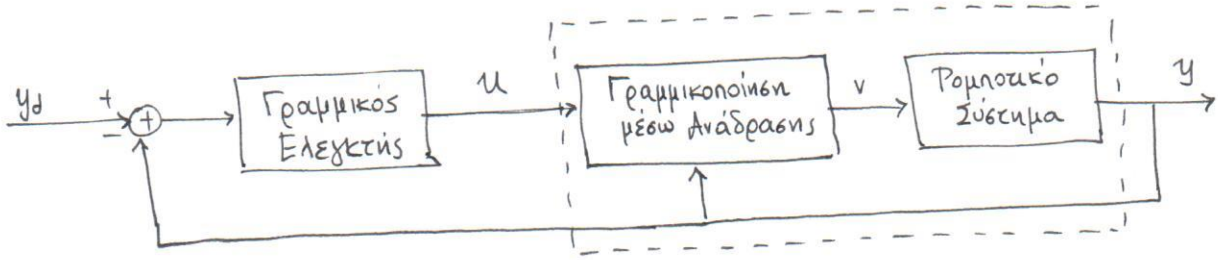
Οι εξισώσεις (1α)-(1β) μπορούν να γραφούν ως:

$$\underline{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} m q_2^2 & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}}_{D(q)} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} m q_2 \dot{q}_2 & m q_2 \dot{q}_1 \\ -m q_2 \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}}_{C(q, \dot{q})} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

Σύμφωνα με τη μεθοδολογία Computed-Torque, δημιουργούμε ελεγκτή:

$$\underline{\tau} = \hat{D}\cdot u + \hat{C}\cdot \dot{q} \qquad (3)$$

όπου: $u = \ddot{q}_d + K_d(\underbrace{\dot{q}_d - \dot{q}}_{\dot{e}}) + K_p(\underbrace{q_d - q}_{e})$ (σχεδίαση στον χώρο των αρθρώσεων)



Οι πρώτες δύο εξισώσεις, όμως, μπορούν να γραφούν ως:

$$\underline{\tau} = D(q)\cdot \ddot{q} + C(q, \dot{q})\cdot \dot{q} = \underbrace{\begin{bmatrix} q_2^2 \ddot{q}_1 + 2 q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ \ddot{q}_2 - q_2 \dot{q}_1^2 \end{bmatrix}}_{K(q, \dot{q}, \ddot{q})} \cdot \underline{\varphi} \qquad (4)$$

Όπου $\varphi = [m]$, το μητρώο που περιέχει τις άγνωστες παραμέτρους του συστήματος.

Εαν ορίσουμε ως $\hat{\varphi} = [\hat{m}]$ το διάνυσμα των "εκτιμούμενων" δυναμικών παραμέτρων του ρομποτικού συστήματος, τότε η σχέση (3) δίνει:

$$\underline{\tau} = \hat{D} \cdot \underline{u} + \hat{C} \cdot \dot{\underline{q}} = \begin{bmatrix} q_2^2 \cdot u_1 + 2 q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ u_2 - q_2 \dot{q}_1^2 \end{bmatrix} \cdot [\hat{m}] = K(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, \underline{u}) \cdot \hat{\varphi} \quad (5)$$

Έστω $\tilde{\varphi} = \varphi - \hat{\varphi}$: Το σφάλμα εκτίμησης παραμέτρων

Θέτοντας $\ddot{\underline{q}} = \underline{u}$ στη σχέση (4) και συνδυάζοντας την με την αρχική δυναμική εξίσωση και τον νόμο ελέγχου, λαμβάνουμε:

$$K(q, \dot{q}, u) \cdot \tilde{\varphi} = K(q, \dot{q}, u)(\varphi - \hat{\varphi}) = D(q) \underbrace{(u - \ddot{q})}_{\xi(e_q)} \quad (6)$$

όπου: $\boxed{\xi(e_q) = u - \ddot{q} = \ddot{e}_q + K_D \cdot \dot{e}_q + K_p e_q}$ (σφάλμα παρακολούθησης) reference model (7)

Εαν ορίσουμε μια συνάρτηση Lyapunov της μορφής:

$$V(\tilde{\varphi}, \underline{s}) = \frac{1}{2} \left[\tilde{\varphi}^T \cdot \Gamma \cdot \tilde{\varphi} + \underline{s}^T D \cdot \underline{s} \right]$$

όπου Γ: μήτρα κερδών μηχανισμού προσαρμογής παραμέτρων

και επίσης $\dot{\underline{s}} + \Lambda \cdot \underline{s} = \underline{\xi}$

Καταλήγουμε ότι $\dot{V} = -\underline{s}^T \left(D \cdot \Lambda - \frac{1}{2} \dot{D} \right) \underline{s}$

Προκειμένου η παράγωγος της Lyapunov συνάρτησης $\dot{V}$ να είναι αρνητικά ημιορισμένη, πρέπει το μητρώο $(D\cdot\Lambda - \frac{1}{2}\dot{D})$ να είναι θετικά ορισμένο, κάτι το οποίο επιτυγχάνεται μέσω κατάλληλης επιλογής του μητρώου Λ. Ειδικότερα:

$$D\cdot\Lambda - \frac{1}{2}\dot{D} = \begin{bmatrix} mq_2^2 & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2mq_2\dot{q}_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} mq_2(\lambda_1 q_2 - \dot{q}_2) & 0 \\ 0 & m\lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Συνεπώς πρέπει να ισχύουν:

$$\left.\begin{aligned} &\cdot\ mq_2(\lambda_1 q_2 - \dot{q}_2) > 0 \\ &\cdot\ m^2 q_2\lambda_2(\lambda_1 q_2 - \dot{q}_2) > 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 q_2 - \dot{q}_2 > 0 \\ \lambda_2 > 0 \end{matrix}}$$

Στην περίπτωση αυτή, παίρνουμε: $\dot{V}(\tilde{\varphi}, \underline{s}) \leq 0$ με $\dot{V} = 0 \iff (\underline{s} \equiv 0) \iff \boxed{\underline{\xi} = 0}$

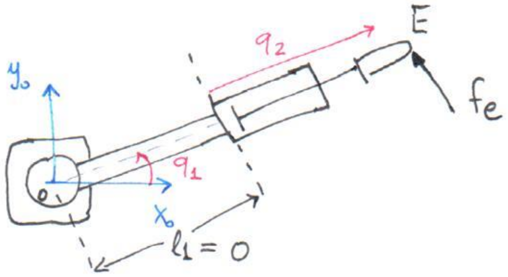
Ο Μηχανισμός Προσαρμογής ορίζεται τελικώς ως:

$$\dot{\hat{\varphi}} = \Gamma^{-1}K^T(q,\dot{q},u)\cdot\underline{s} = \Gamma^{-1}\cdot\left[q_2^2\ddot{q}_1 + 2q_2\dot{q}_1\dot{q}_2\ ,\ \ddot{q}_2 - q_2\dot{q}_1^2\right]\cdot\underline{s}$$

όπου $\dot{\underline{s}} + \Lambda\underline{s} = \underline{\xi} = \ddot{e}_q + K_D\dot{e}_q + K_P e_q$.

1.2.β) Έλεγχος Εμπέδησης:

Έστω εξωτερική δύναμη $f_e = [f_{ex}, f_{ey}]^T$ ασκούμενη στο άκρο του εργαλείου του ρομποτικού χειριστή.



Αρχικά, από ευθεία κινηματική ανάλυση, λαμβάνουμε:

$$A^0_E(q_1,q_2) = Rot(z,q_1)\cdot Tra(x,q_2) = \left[\begin{array}{ccc|c} c_1 & -s_1 & 0 & c_1 q_2 \\ s_1 & c_1 & 0 & s_1 q_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Προσδιορίζουμε την Ιακωβιανή μήτρα που περιγράφει το 1R-1P σύστημα:

▷ $\underline{i=1}$: Περιστροφική Άρθρωση

$$\begin{bmatrix} J_{L_1} \\ \hline J_{A_1} \end{bmatrix}_{6\times1} = \begin{bmatrix} \hat{b}_0 \times p_E \\ \hat{b}_0 \end{bmatrix}_{6\times1} = \left[\begin{array}{c} -s_1 q_2 \\ c_1 q_2 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right]$$

▷ $\underline{i=2}$: Πρισματική Άρθρωση

$$\begin{bmatrix} J_{L_2} \\ \hline J_{A_2} \end{bmatrix}_{6\times1} = \left[\begin{array}{c} \hat{b}_1 \\ \hline \emptyset \end{array}\right]_{6\times1} = \left[\begin{array}{c} c_1 \\ s_1 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right]$$

Δηλαδή: $J = \left[\begin{array}{c|c} -s_1 q_2 & c_1 \\ c_1 q_2 & s_1 \\ 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{array}\right]_{6\times2}$ η Ιακωβιανή μήτρα.

Στο εξής, δεδομένου ότι η εξωτερική δύναμη που ασκείται είναι της μορφής $fe = [fex, fey]^T$, εστιάζουμε μόνο στις πρώτες δύο γραμμές της Ιακωβιανής μήτρας.

Τότε, το δυναμικό μοντέλο του ρομποτικού χειριστή, γράφεται ως:

$$M(\underline{q}) \cdot \ddot{\underline{q}} + h(\underline{q}, \dot{\underline{q}}) = \underline{\tau} + J^T \cdot Fe$$

$$\Longleftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} mq_2^2 & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}}_{M(q)} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2mq_2\dot{q}_1\dot{q}_2 \\ -mq_2\dot{q}_1^2 \end{bmatrix}}_{h(q,\dot{q})} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -s_1 q_2 & c_1 q_2 \\ c_1 & s_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} fe_x \\ fe_y \end{bmatrix}$$

Έπειτα, μεταβαίνουμε από τον χώρο των αρθρώσεων στο task space:

· $M^{-1}(\underline{q}) = \dfrac{1}{m^2 q_2^2} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & mq_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{mq_2^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} \end{bmatrix}$

$$Q = JM^{-1}J^T = \begin{bmatrix} -\frac{s_1}{mq_2} & \frac{c_1}{m} \\ \frac{c_1}{mq_2} & \frac{s_1}{m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -s_1 q_2 & c_1 q_2 \\ c_1 & s_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} \end{bmatrix}$$

$\det Q = \dfrac{1}{m^2}$, οπότε:

$$M^*(q) = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}$$

· Ισχύει $h^* = (M^* J M^{-1}) h - M^* \dot{J} \dot{q}$

$$M^* J M^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{s_1}{q_2} & c_1 \\ \frac{c_1}{q_2} & s_1 \end{bmatrix}$$

Επίσης:

$$\dot{J} = \begin{bmatrix} -c_1 q_2 \dot{q}_1 - s_1 \dot{q}_2 & -s_1 q_2 \dot{q}_1 + c_1 \dot{q}_2 \\ -s_1 \dot{q}_1 & c_1 \dot{q}_1 \end{bmatrix}$$

οπότε:
$$M^* \dot{J} \dot{q} = m \cdot \begin{bmatrix} -c_1 q_2 \dot{q}_1^2 - s_1 \dot{q}_1 \dot{q}_2 - s_1 q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + c_1 \dot{q}_2^2 \\ -s_1 \dot{q}_1^2 + c_1 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

και:

$$(M^* J M^{-1}) \cdot h = \begin{bmatrix} -2m s_1 \dot{q}_1 \dot{q}_2 - m c_1 q_2 \dot{q}_1^2 \\ 2m c_1 \dot{q}_1 \dot{q}_2 - m s_1 q_2 \dot{q}_1^2 \end{bmatrix}$$

Τελικώς:
$$h^* = (M^* J M^{-1}) h - M^* \dot{J} \dot{q} = \begin{bmatrix} -m c_1 \dot{q}_2^2 + s_1 q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cdot m - m s_1 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ m c_1 \dot{q}_1 \dot{q}_2 - m s_1 q_2 \dot{q}_1^2 + s_1 m \dot{q}_1^2 \end{bmatrix}$$

Οπότε, το ρομποτικό σύστημα έχει τις εξής δυναμικές εξισώσεις, εκφρασμένες στο task space:

$$\boxed{M^* \cdot \ddot{p} + h^* = F_a + F_e} \qquad (\mathrm{I})$$

όπου: M^*, h^* τα μητρώα που προσδιορίστηκαν παραπάνω

F_e: η εξωτερική δύναμη $[f_{ex}, f_{ey}]^T$

F_a: γενικευμένη δύναμη λόγω των κινητήριων στοιχείων του robot ~~($F_e = J^T$~~ $(\tau = J^T F_a)$.

Έστω η επιθυμητή μηχανική εμπέδηση (desired impedance) του ρομποτικού χειριστή να περιγράφεται από την εξίσωση:

$$M_d(\ddot{p}_d - \ddot{p}) + B_d(\dot{p}_d - \dot{p}) + K_d(p_d - p) = F_d - F_e \quad (1)$$

όπου:

$$M_d = \begin{bmatrix} m_x & 0 \\ 0 & m_y \end{bmatrix}, \quad B_d = \begin{bmatrix} b_x & 0 \\ 0 & b_y \end{bmatrix}, \quad K_d = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix}$$

τα επιθυμητά μητρώα αδράνειας, απόσβεσης και ακαμψίας αντίστοιχα.

Για τον σκοπό αυτό (δηλαδή να επιτύχουμε την επιθυμητή συμπεριφορά), σχεδιάζουμε έναν δυναμικό ελεγκτή ενεργούς εμπέδησης, βασιζόμενοι στη μεθοδολογία computed torque control:

$$\tau = J^T F_a \quad (2a)$$

$$F_a = M^* u + h^* - F_e \quad (2\beta)$$ (από τις δυναμικές εξισώσεις και τη θεώρηση $u = \ddot{p}$)

Η εξίσωση (1) προκύπτει στο κλειστό σύστημα για είσοδο:

$$\boxed{u = \ddot{p}_d + M_d^{-1}\Big[B_d \underbrace{(\dot{p}_d - \dot{p})}_{\text{σφάλμα ταχύτητας}} + K_d \underbrace{(p_d - p)}_{\text{σφάλμα θέσης}} - \underbrace{(F_d - F_e)}_{\text{σφάλμα δύναμης}}\Big] \quad (3)}$$

Επομένως, τα τελικά Gains του ελεγκτή θα είναι:

▷ Gain Ταχύτητας: $K_D = M^* M_d^{-1} B_d = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{m_x} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x & 0 \\ 0 & b_y \end{bmatrix}$

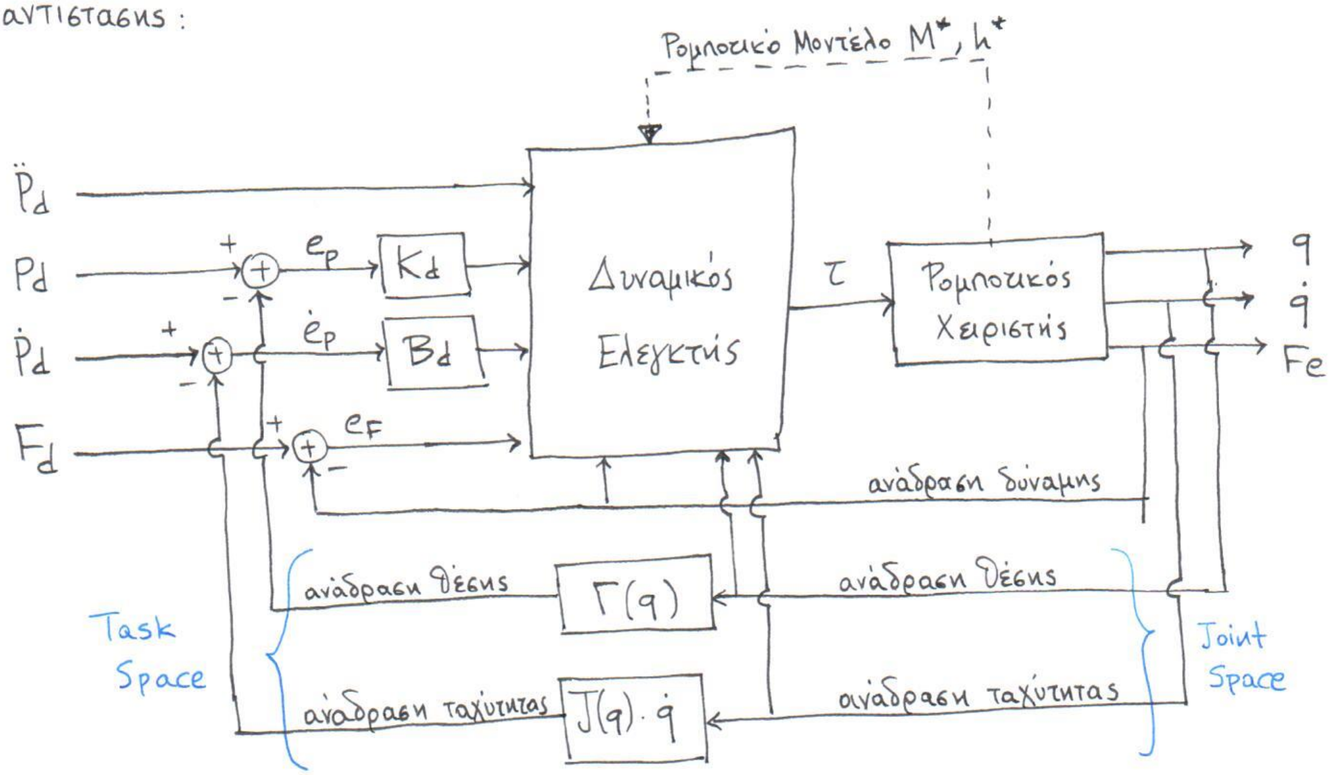
$$\Rightarrow K_D = \begin{bmatrix} \left(\frac{m}{m_x}\right) b_x & 0 \\ 0 & \left(\frac{m}{m_y}\right) b_y \end{bmatrix}$$

▹ Gain Θέσης: $K_p = M^* M_d^{-1} K_d = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{m_x} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow K_p = \begin{bmatrix} \left(\frac{m}{m_x}\right) k_x & 0 \\ 0 & \left(\frac{m}{m_y}\right) k_y \end{bmatrix}$$

▹ Gain Δύναμης: $K_F = M^* M_d^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{m}{m_x} & 0 \\ 0 & \frac{m}{m_y} \end{bmatrix}$

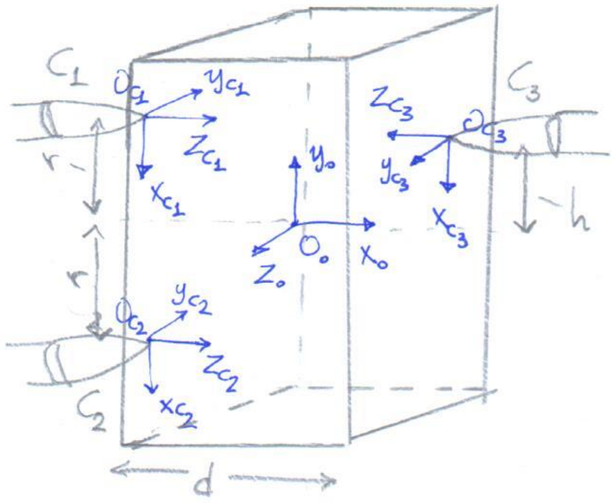
Παρατίθεται το block-diagram του δυναμικού ρομποτικού ελεγκτή ενεργούς μηχανικής αντίστασης:



όπου ο Δυναμικός Ελεγκτής περιγράφεται από τις εξισώσεις (2α),(2β) και (3), ενώ ο Ρομποτικός χειριστής διέπεται από τις αρχικές δυναμικές εξισώσεις, εκφρασμένες στο task space ($M^* \ddot{p} + h^* = Fa + Fe$).

Άσκηση 1.3: (Dexterous Robot Grasping)

a)



C_1, C_2 : χωρίς τριβή

C_3 : με τριβή (συντελεστής μ)

Σημειακές επαφές.

Απεικονίζουμε τη διάταξη της ρομποτικής λαβής στον 3Δ χώρο, θεωρώντας ότι τα πλαίσια των τριών επαφών και το πλαίσιο του αντικειμένου $O_0 - x_0 y_0 z_0$ είναι ευθυγραμμισμένα (δηλ. βρίσκονται στο ίδιο βάθος στον χώρο). Επιπλέον, για κάθε σημείο επαφής των δακτύλων με το αντικείμενο, επιλέγουμε ως κάθετο άξονα των πλαισίων τον z-άξονα.

• Σημείο Επαφής C_1:

$$R^0_{C_1} = Rot(y, 90^\circ) \cdot Rot(z, -90^\circ) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}^{\,(0)}_{C_1} = \left[-\frac{d}{2},\ r,\ 0 \right]^T$$

$$\left[\vec{r}^{\,(0)}_{C_1} \times \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & r \\ 0 & 0 & d/2 \\ -r & -d/2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{οπότε} \quad \vec{r}^{\,(0)}_{C_1} \times R^0_{C_1} = \begin{bmatrix} 0 & -r & 0 \\ 0 & -d/2 & 0 \\ d/2 & 0 & -r \end{bmatrix}$$

ενώ $B_{C_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$

Επομένως: $G_{c_1} = \underbrace{\begin{bmatrix} R^0_{c_1} & O_{3\times3} \\ \vec{r}^{(0)}_{c_1} \times R^0_{c_1} & R^0_{c_1} \end{bmatrix}}_{W_{c_1}} \cdot B_{c_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -r \end{bmatrix}$

• <u>Σημείο Επαφής C_2:</u>

$$R^0_{c_2} = R^0_{c_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \vec{r}^{(0)}_{c_2} = \begin{bmatrix} -d/2 \\ -r \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\vec{r}^{(0)}_{c_2} \times\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -r \\ 0 & 0 & d/2 \\ r & -d/2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \left[\vec{r}^{(0)}_{c_2} \times\right] R^0_{c_2} = \begin{bmatrix} 0 & r & 0 \\ 0 & -d/2 & 0 \\ d/2 & 0 & r \end{bmatrix}$$

ενώ $B_{c_2} = B_{c_1} = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$

Επομένως: $G_2 = W_{c_2} \cdot B_{c_2} = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ r]^T$

• <u>Σημείο Επαφής C_3:</u> Με τριβή

$$R^0_{c_3} = Rot(y, -90^\circ) \cdot Rot(z, 90^\circ) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & +1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}^{(0)}_{c_3} = [d/2 \ \ h \ \ 0]^T$$

$$\left[\vec{r}^{(0)}_{c_3} \times\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & h \\ 0 & 0 & -d/2 \\ -h & \frac{d}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \left[\vec{r}_{c_3} \times\right] \cdot R^0_{c_3} = \begin{bmatrix} 0 & +h & 0 \\ 0 & -d/2 & 0 \\ -\frac{d}{2} & 0 & h \end{bmatrix}$$

Λόγω σημειακού σημείου επαφής με τριβή, έχουμε:

$$B_{C_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ενώ} \quad W_{C_3} = \begin{bmatrix} R^0_{C_3} & O_{3\times 3} \\ \vec{r}^{\,(0)}_{C_3} \times R^0_{C_3} & R^0_{C_3} \end{bmatrix}$$

Επομένως: $$G_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & +h & 0 \\ 0 & -d/2 & 0 \\ -d/2 & 0 & h \end{bmatrix}$$

Η συνολική μήτρα ρομποτικής λαβής, λοιπόν, θα είναι:

$$G = \begin{bmatrix} G_1 & G_2 & G_3 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & +h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -d/2 & 0 \\ -r & r & -d/2 & 0 & h \end{array}\right]$$
$$\underbrace{\quad}_{G_1} \quad \underbrace{\quad}_{G_2} \quad \underbrace{\qquad\qquad}_{G_3}$$

Για τους κώνους τριβής (friction cones) κάθε επαφής, έχουμε:

$$\cdot\ FC_1 = \{ f_{c_1} \in \mathbb{R} : f_{c_1} \geq 0 \}$$

$$\cdot\ FC_2 = \{ f_{c_2} \in \mathbb{R} : f_{c_2} \geq 0 \}$$

σημειακή επαφή
<u>χωρίς τριβή</u>

$$\cdot\ FC_3 = \left\{ f_{c_3} = [f_{c_{3,x}}, f_{c_{3,y}}, f_{c_{3,z}}]^T \in \mathbb{R}^3 : f_{c_{3,z}} \geq 0,\ \sqrt{f_{c_{3,x}}^2 + f_{c_{3,y}}^2} \leq \mu \cdot f_{c_{3,z}} \right\}$$

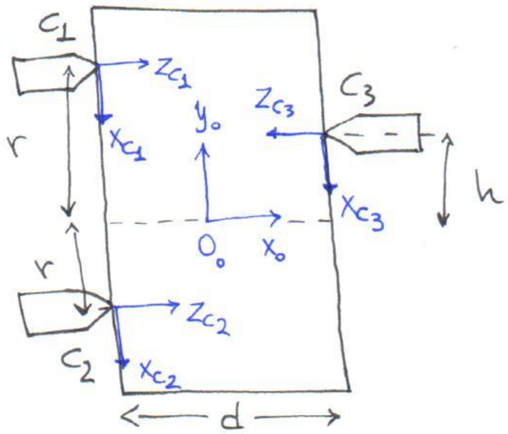
και ο συνολικός κώνος τριβής της ρομποτικής λαβής:

$$FC = \left\{ f_c = [f_{c_1}, f_{c_2}, f_{c_3}]^T \in \mathbb{R}^5 : f_{c_1} \in FC_1,\ f_{c_2} \in FC_2,\ f_{c_3} \in FC_3 \right\}$$

Τέλος, προκειμένου να ελαττώσουμε τη μήτρα G στο επίπεδο του δοθέντος σχήματος, σβήνουμε την $3^{\text{η}}$ γραμμή που αντιστοιχεί στην κάθετη ως προς το επίπεδο του σχήματος δύναμη f_z, καθώς και την $4^{\text{η}}$ και $5^{\text{η}}$ γραμμή που αντιστοιχούν στις ροπές τ_x, τ_y αντιστοίχως. Άρα:

$$G_{2D} = \left[\begin{array}{c|c|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{0} \\ \hdashline -r & r & -d/2 & 0 & h \end{array}\right]$$

B) Η ρομποτική λαβή στο επίπεδο θα είναι :

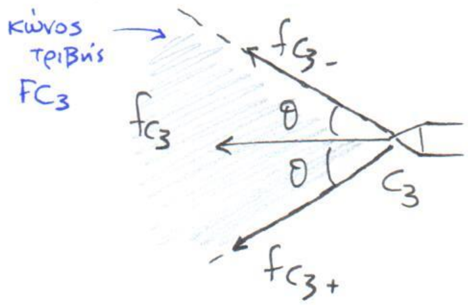


όπου C_1, C_2 : χωρίς τριβή

C_3 : με τριβή και συντελ. τριβής $\underline{\mu = 1}$

$$G_{2D} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -r & r & +\frac{d}{2} & 0 & h \end{bmatrix}$$

Προκειμένου να εξετάσουμε υπό ποιές συνθήκες η ρομποτική λαβή είναι κλειστή ως προς δύναμη, αρχικά πρέπει να αντικαταστήσουμε στη σημειακή επαφή με τριβή C_3 τη γενικευμένη δύναμη f_{C_3} με δύο γενικευμένες δυνάμεις f_{C_3+}, f_{C_3-} εφαπτόμενες στα όρια του κώνου τριβής FC_3, οι οποίες θα αντιστοιχούν σε σημειακές επαφές χωρίς τριβή:



$$\tan\theta = \mu \xrightarrow{\mu=1} \boxed{\theta = 45^\circ}$$

· <u>Υπολογισμός G_{3^-}</u> :

$$R^0_{C_3-} = R^0_{C_3} \cdot Rot(y, -45^\circ)$$

$$\Rightarrow R^0_{C_3-} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\sqrt{2}/2 & 0 & +\sqrt{2}/2 \\ 0 & +1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\vec{r}^{(0)}_{C_3}\times]\cdot R^{0}_{C_3-} = \begin{bmatrix} 0 & h & 0 \\ 0 & -d/2 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\left(h-\frac{d}{2}\right) & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\left(h+\frac{d}{2}\right) \end{bmatrix}$$

Οπότε $$G_{3-} = \begin{bmatrix} R^{0}_{C_3-} & \emptyset_{3\times 3} \\ \vec{r}^{(0)}_{C_3-}\times R^{0}_{C_3-} & R^{0}_{C_3-} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\left(h+\frac{d}{2}\right) \end{bmatrix}$$

· Υπολογισμός G_{3+}:

$$R^{0}_{C_3+} = R^{0}_{C_3}\cdot Rot(y,+45^\circ) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\vec{r}^{(0)}_{C_3}\times]\cdot R^{0}_{C_3+} = \begin{bmatrix} 0 & h & 0 \\ 0 & -d/2 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(h+\frac{d}{2}\right) & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\left(h-\frac{d}{2}\right) \end{bmatrix}$$

Οπότε $$G_{3+} = \begin{bmatrix} R^{0}_{C_3+} & \emptyset_{3\times 3} \\ \vec{r}^{(0)}_{C_3}\times R^{0}_{C_3+} & R^{0}_{C_3+} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\left(h-\frac{d}{2}\right) \end{bmatrix}^T$$

Συνεπώς, η νέα μήτρα λαβής στο επίπεδο θα είναι:

$$G'_{2D} = \begin{bmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ -r \end{matrix}}_{G_{C_1}} & \underbrace{\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ r \end{matrix}}_{G_{C_2}} & \underbrace{\begin{matrix} -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\left(h-\frac{d}{2}\right) \end{matrix}}_{G_{C_3+}} & \underbrace{\begin{matrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\left(h+\frac{d}{2}\right) \end{matrix}}_{G_{C_3-}} \end{bmatrix}$$

Οι στήλες G_{C_3+} και G_{C_3-} ορίζουν ένα επίπεδο:

$$\underline{V}_{34} = G_{C_3+} \times G_{C_3-} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\left(h-\frac{d}{2}\right) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\left(h+\frac{d}{2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -h \\ -d/2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Προκειμένου η ρομποτική λαβή να είναι κλειστή ως προς δύναμη, πρέπει τα εσωτερικά γινόμενα $\underline{V}_{34}^T \cdot G_{C_1}$ και $\underline{V}_{34}^T \cdot G_{C_2}$ να <u>μην</u> είναι ομόσημα.

- $V_{34}^T \cdot G_{C_1} = \begin{bmatrix} -h & d/2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -r \end{bmatrix} = -h + r = -(h-r)$
- $V_{34}^T \cdot G_{C_2} = \begin{bmatrix} -h & d/2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ r \end{bmatrix} = -h - r = -(h+r)$

Αν οι παραπάνω ποσότητες είναι ομόσημες, τότε για το γινόμενό τους θα ισχύει ότι:

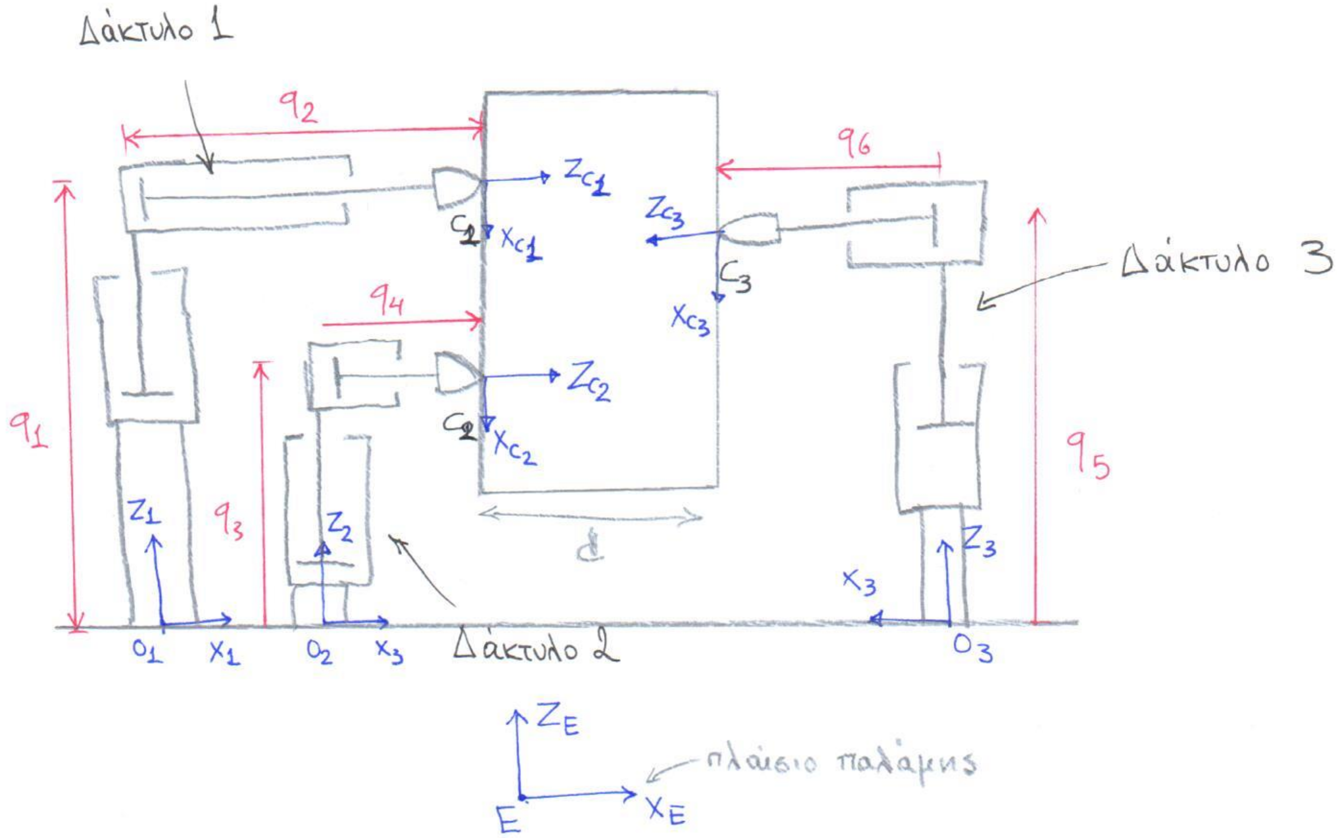
$$(h-r)(h+r) \geq 0 \Rightarrow h^2 - r^2 \geq 0 \Rightarrow h^2 \geq r^2$$

$$\Rightarrow |h| \geq |r|$$

Συνεπώς:

$$\boxed{\text{Ρομποτική λαβή Κλειστή ως προς Δύναμη} \iff |h| < |r|}$$

γ)



i) <u>Δάκτυλο 1</u>:

$$A^{o_1}_{c_1} = Tra(z, q_1) \cdot Rot(y, 90^\circ)\, Tra(z, q_2) = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & q_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & q_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Ιακωβιανή $1^{ου}$ Δακτύλου:

$$J_1 = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right]$$

Επίσης $R^{c_1}_{E} = Rot(y, -90^\circ) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Οπότε $T_E^{C_1} = \begin{bmatrix} R_E^{C_1} & \emptyset_{3\times3} \\ \emptyset_{3\times3} & R_E^{C_1} \end{bmatrix}$ και $B_{C_1}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Άρα: $J_{h_1} = B_{C_1}^T \cdot T_E^{C_1} \cdot J_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$

ii) <u>Δάκτυλο 2:</u>

$$A_{C_2}^{O_2} = Tra(z, q_3) \cdot Rot(y, 90^\circ) \cdot Tra(z, q_4) = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & q_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & q_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Ιακωβιανή 2ου Δακτύλου:

$$J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Επίσης $T_E^{C_2} = T_E^{C_1}$ και $B_{C_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Άρα: $J_{h_2} = B_{C_2}^T \cdot T_E^{C_2} \cdot J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$

(iii) <u>Δάκτυλο 3:</u>

$$A_{C_3}^{O_3} = Tra(z, q_5) \cdot Rot(y, 90^\circ) \, Tra(z, q_6) = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & q_6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & q_5 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Ιακωβιανή 3ου Δακτύλου:

$$J_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Έπειτα:

$$R_E^{C_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad T_E^{C_3} = \begin{bmatrix} R_E^{C_3} & \emptyset_{3\times3} \\ \emptyset_{3\times3} & R_E^{C_3} \end{bmatrix}$$

και $$B_{C_3}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ (λόγω τριβής)

Άρα $$J_{h_3} = B_{C_3}^T \cdot T_E^{C_3} J_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times6} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{6\times2}$$

$$\Rightarrow J_{h_3} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Συνεπώς, η Ιακωβιανή Μήτρα της Ρομποτικής Λαβής θα είναι:

$$J_h = \mathrm{diag}(J_{h_1}, J_{h_2}, J_{h_3}) = \cancel{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}} \begin{array}{c} \\ f_{c_1} \\ f_{c_2} \\ f_{c_{3x}} \\ f_{c_{3z}} \\ \tau_{c_3} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 & q_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$