Ρομποτική ΙΙ: Ευφυή Ρομποτικά Συστήματα

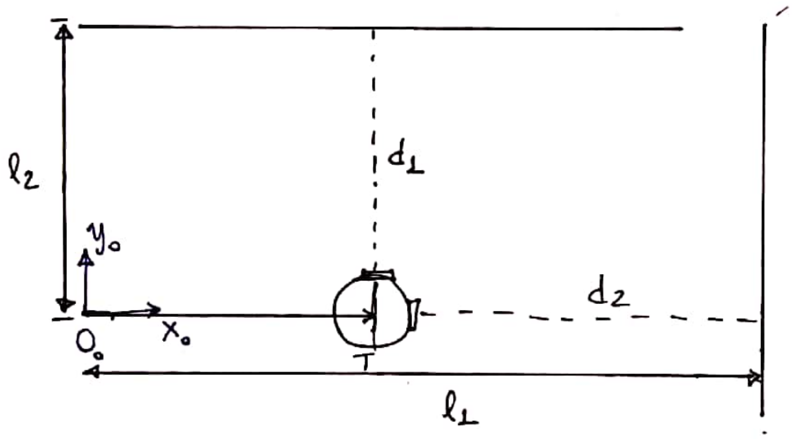
2η Αναλυτική Σειρά Ασκήσεων

Ονοματεπώνυμο : Χρήστος Δημόπουλος

Αρ. Μητρώου : 031 17 037

Άσκηση 2.1:

Έστω ολόνομο ρομποτικό όχημα, η θέση του κέντρου του σε κάθε χρονική στιγμή t περιγράφεται από το διάνυσμα $\underline{x}(t) = [x(t) \;\; y(t)]^T$.



$l_1 = 4m$

$l_2 = 1m$

Τη χρονική στιγμή $T_1 = 0.5sec$ λαμβάνουμε μετρήσεις:

$d_1^{(1)} = 80cm, \quad d_2^{(1)} = 370cm$

Έστω $\underline{v} = [v_x \;\; v_y]^T$ η ταχύτητα του οχήματος. Υποθέτουμε ότι μια ένδειξη για την ταχύτητα του ρομπότ συνοδεύεται από σφάλματα μετρήσεων, τα οποία ακολουθούν (ασυσχέτιστα) κανονική κατανομή μηδενικής μέσης τιμής και τυπικής απόκλισης $1cm/sec$.

Προβλέποντας τη θέση του ρομπότ τη χρονική στιγμή $t+\Delta t$ έχουμε :

$$\underset{\sim}{\tilde{x}}(t+\Delta t) = \underset{\sim}{\hat{x}}(t+\Delta t|t) = \begin{bmatrix} \hat{x}(t+\Delta t|t) \\ \hat{y}(t+\Delta t|t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}(t) + V_x^{(1)} \cdot \Delta t \\ \hat{y}(t) + V_y^{(1)} \cdot \Delta t \end{bmatrix} \quad (1)$$

Όπου : $\left.\begin{array}{l} V_x^{(1)} = 30\ cm/sec \\ V_y^{(1)} = 10cm/sec \end{array}\right\}$ ενδείξεις οδομετρίας.

Η αβεβαιότητα της πρόβλεψης (1) μπορεί να θεωρηθεί ότι εξελίσσεται χρονικά με βάση γραμμικό μοντέλο:

$$\sigma_p^2(t+\Delta t|t) = \sigma_p^2(t) + C_p \cdot \Delta t$$

Όπου : $C_p = (1cm)^2/sec = 1\,cm^2/sec$

Η πρόβλεψη της θέσης του οχήματος χρησιμοποιώντας τα δεδομένα της οδομετρίας (σχέση 1), μπορεί να συνδυασθεί με "εξωγενή" πληροφορία που παρέχουν οι αισθητήρες. Έστω ότι το όχημα είναι εφοδιασμένο με αισθητήρες απόστασης (τοποθετημένους κυκλικά σε απόσταση r=10cm από το κέντρο του).

Στην προκειμένη περίπτωση, θεωρούμε ως "γεωμετρικά ορόσημα" την ύπαρξη εμποδίων σε γνωστές θέσεις (l_1, l_2), όπως φαίνεται στο σχήμα.

Επομένως, μια νέα ένδειξη της θέσης του ρομπότ τη χρονική στιγμή $t+\Delta t$ μπορεί να προέλθει από τις μετρήσεις:

$$z(t+\Delta t) = \begin{bmatrix} l_1 - dx - r \\ l_2 - dy - r \end{bmatrix} \qquad (2)$$

όπου dx, dy : μετρήσεις αισθητήρων

με αβεβαιότητα μέτρησης $\hat{\sigma}_z^2(t+\Delta t) = (5\,mm)^2 = 25\,mm^2$

(Υποθέτουμε ότι τα σφάλματα μετρήσεων ακολουθούν κανονική κατανομή μηδενικής μέσης τιμής και τυπικής απόκλισης 5mm).

Συνολικά από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (μήτρα του μοντέλου κίνησης)

$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (μήτρα του μοντέλου μετρήσεων)

Επομένως, η ανανεωμένη (updated) εκτίμηση της θέσης του ρομπότ δίνεται από τη σχέση:

$$\underline{\hat{x}}(t+\Delta t) = \underbrace{\underline{\hat{x}}(t+\Delta t|t)}_{\text{prediction}} + K(t+\Delta t)\cdot\left[z(t+\Delta t) - H\cdot\hat{x}(t+\Delta t|t)\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{x}(t+\Delta t) = \hat{x}(t+\Delta t|t) + K(t+\Delta t)\cdot\left[z(t+\Delta t) - \hat{x}(t+\Delta t|t)\right]} \qquad (3a)$$

με μήτρα διακύμανσης:

$$P(t+\Delta t) = \left[\mathbb{I} - K(t+\Delta t)\cdot H\right]\cdot P(t+\Delta t|t) = \left[\mathbb{I} - K(t+\Delta t)\right]\cdot P(t+\Delta t|t)$$

$P(t+\Delta t|t) = AP(t)A^T + C_p$

$$\Rightarrow \boxed{P(t+\Delta t) = \left[\mathbb{I} - K(t+\Delta t)\right]\cdot\left[P(t) + C_p\right]} \qquad (3\beta)$$

και βέλτιστο κέρδος φίλτρου Kalman:

$$K(t+\Delta t) = P(t+\Delta t|t) \cdot H^T \cdot \left[H P(t+\Delta t|t) H^T + C_z\right]^{-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{K(t+\Delta t) = \left[P(t) + C_p\right] \cdot \left[P(t) + C_p + C_z\right]^{-1}} \quad (3\gamma)$$

Όπου: $C_p = \operatorname{diag}[\sigma_p^2] = \begin{bmatrix} c_p \cdot \Delta t & 0 \\ 0 & c_p \cdot \Delta t \end{bmatrix} = \Delta t \cdot \begin{bmatrix} 1\,cm^2/sec & 0 \\ 0 & 1\,cm^2/sec \end{bmatrix}$

$$C_z = \operatorname{diag}[\sigma_z^2] = \begin{bmatrix} 25mm^2 & 0 \\ 0 & 25mm^2 \end{bmatrix}$$

Άρα, το αναδρομικό φίλτρο Kalman στον διακριτό χρόνο περιγράφεται από τις σχέσεις:

$$\hat{x}(t+\Delta t) = \hat{x}(t+\Delta t|t) + K(t+\Delta t) \cdot \left[z(t+\Delta t) - \hat{x}(t+\Delta t|t)\right] \quad (4a)$$

$$K(t+\Delta t) = \frac{\hat{\sigma}_p^2(t+\Delta t|t)}{\hat{\sigma}_p^2(t+\Delta t|t) + \hat{\sigma}_z^2(t+\Delta t)} \quad (4\beta)$$

με διακύμανση να ανανεώνεται:

$$\hat{\sigma}_p^2(t+\Delta t) = \hat{\sigma}_p^2(t+\Delta t|t) - K(t+\Delta t) \cdot \hat{\sigma}_p^2(t+\Delta t|t) \quad (4\gamma)$$

Δεδομένου ότι τη χρονική στιγμή $T_1 = 0.5sec$ λαμβάνουμε τις μετρήσεις $d_1^{(1)} = 80cm$ και $d_2^{(1)} = 370cm$, προσδιορίζουμε τη βέλτιστη εκτίμηση θέσης του ρομπότ τη χρονική στιγμή T_1 κάνοντας χρήση των άνωθι αναδρομικών σχέσεων:

Γνωρίζουμε με απόλυτη βεβαιότητα ότι τη χρονική στιγμή $t=0$ βρισκόμαστε στη θέση $(0,0)$ δηλαδή: $\underline{X}(t=0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ και $\hat{\sigma}_p^2(t=0) = 0$.

Άρα:

$$\hat{\sigma}_p^2(T|t=0) = \cancelto{0}{\hat{\sigma}^2(t=0)} + T \cdot C_p = (0.5sec) \cdot \frac{1cm^2}{sec}$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{\sigma}_p^2(T|t=0) = 0.5cm^2}$$

Άρα, βέλτιστο κέρδος Φίλτρου Kalman:

$$K(T) = \frac{\hat{\sigma}_p^2(T|t=0)}{\hat{\sigma}_p^2(T|t=0) + \sigma_z^2(T)} = \frac{0.5cm^2}{0.5cm^2 + 0.25cm^2} = \underline{\underline{2/3}}$$

Επίσης:

$$\cdot\ z(T=0.5sec) = \begin{bmatrix} l_1 - d_2 - r \\ l_2 - d_1 - r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4m - 3.7m - 0.1m \\ 1m - 0.8m - 0.1m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2\ m \\ 0.1\ m \end{bmatrix}$$

· Πρόβλεψη:

$$\hat{x}(t+\Delta t|t) = \hat{x}(T|t=0) = \begin{bmatrix} \cancelto{0}{\hat{x}(t=0)} + V_x^{(1)} \cdot T \\ \cancelto{0}{\hat{y}(t=0)} + V_y^{(1)} \cdot T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30\frac{cm}{sec} \cdot 0.5sec \\ 10\frac{cm}{sec} \cdot 0.5sec \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \hat{x}(t+\Delta t|t) = \begin{bmatrix} 15cm \\ 5\ cm \end{bmatrix}$$

Επομένως, η ανανεωμένη εκτίμηση θέσης τη χρονική στιγμή $T=0.5sec$

θα είναι:

$$\hat{x}(T) = \hat{x}(T|t=0) + K(T) \cdot \left[z(T) - \hat{x}(T|t=0) \right]$$

$$\Rightarrow \hat{x}(T) = \begin{bmatrix} 15cm \\ 5cm \end{bmatrix} + \frac{2}{3} \cdot \begin{bmatrix} 20cm - 15cm \\ 10cm - 5cm \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{x}(T) = \begin{bmatrix} 18.333cm \\ 8.333cm \end{bmatrix}}$$

Ενώ για τη διακύμανση:

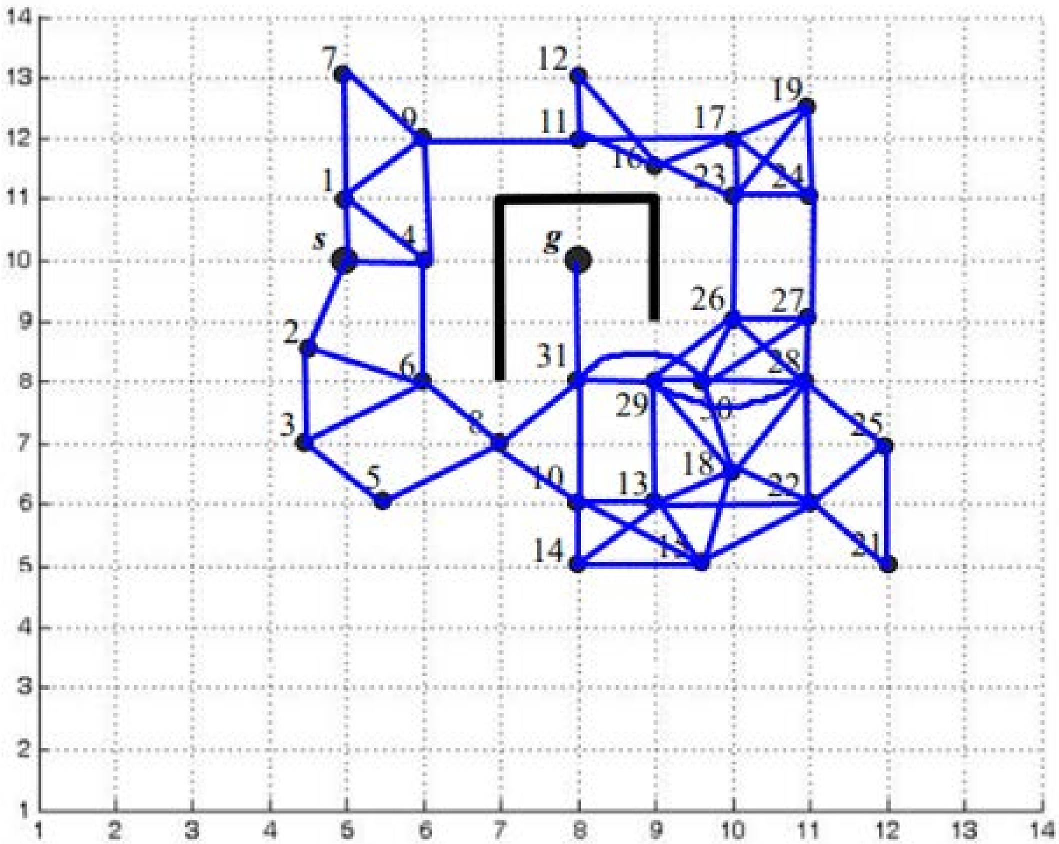
$$\hat{\sigma}_p^2(T) = \hat{\sigma}_p^2(T|t=0) - K(T) \cdot \hat{\sigma}_p^2(T|t=0)$$

$$\Rightarrow \hat{\sigma}_p^2(T) = \left[0.5 - \frac{\cancel{2}}{3} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \right] cm^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{\sigma}_p^2(T) = 1/6 \ cm^2}$$

Άσκηση 2.2:

Θεωρώντας ως "γειτονικές" όλες τις διατάξεις του ρομποτικού χειριστή Ευκλίδειας απόστασης μικρότερης ή ίσης του 2, κατασκευάζουμε τον γράφο κάλυψης του χώρου διατάξεων:



Εικόνα 1: Γράφος Κάλυψης χώρου διατάξεων.

Στη συνέχεια, περιγράφουμε αναλυτικά τα πρώτα τρία βήματα του αλγορίθμου Best-First με επανιχνηλάτηση (backtracking).

Για την εφαρμογή του αλγορίθμου, υποθέτουμε συνάρτηση δυναμικού πεδίου για τους κόμβους του γράφου κάλυψης με βάση τη σχέση:

$$V(q) = V_{att}(q) + V_{rep}(q)$$

όπου:

- $V_{att}(q) = \frac{1}{2} k_{att} \cdot \| q_{goal} - q \|^2 \;, \quad q_{goal} = g = [8, 10]$
- $V_{rep}(q) = \begin{cases} \frac{1}{2} k_{rep} \cdot \left(\frac{1}{\rho(q)} - \frac{1}{\rho_0} \right)^2, & \text{if } \rho(q) < \rho_0 = 1 \\ 0, & \text{if } \rho(q) \geq \rho_0 = 1 \end{cases}$

όπου $\rho(q)$: απόσταση της διάταξης q από το πλησιέστερο εμπόδιο

Επιλέγοντας $k_{att} = 2$, εν τέλει, για όλες τις επιτρεπτές διατάξεις (δηλ. θέσεις τέτοιες, ώστε $V(q) < +\infty$), το δυναμικό πεδίο θα δίνεται από τη σχέση:

$$V(q) = (x_{goal} - x)^2 + (y_{goal} - y)^2 \Rightarrow \boxed{V(q) = (8 - x)^2 + (10 - y)^2}$$

Με βάση τα παραπάνω, εφαρμόζουμε τον Αλγόριθμο Path Planning:

- Βήμα Αρχικοποίησης:

Στη λίστα OPEN προστίθεται ο κόμβος $S = [5, 10]$:

$$OPEN = \{ (5, 10) \}$$

με δυναμικό

$$V(5,1) = 9 + 0 = 9$$

Το δέντρο αναζήτησης περιλαμβάνει μόνο τον κόμβο $s = [5, 10]$ και όλοι οι κόμβοι q επισημαίνονται ως $q \to visited = FALSE$, εκτός από τον s, όπου $s \to visited = TRUE$.

· Βήμα 1º:

▷ $q = BEST(OPEN)$

Επιλέγουμε τον κόμβο χαμηλότερου δυναμικού από τη λίστα OPEN, ο οποίος προφανώς είναι ο $s = [5, 10]$, καθώς μόνο αυτός εμπεριέχεται της λίστας.

▷ $OPEN = OPEN \cup \mathcal{N}(q)$

όπου $\mathcal{N}(q)$: το σύνολο όλων των κόμβων q' που είναι γείτονες (με βάση τον γράφο κάλυψης) του q, για τους οποίους $q' \to visited = FALSE$ και $U(q') < +\infty$ (επιτρεπτές διατάξεις).

Στην προκειμένη περίπτωση:

$$\mathcal{N}(s) = \{(5,11), (4{,}5, 8.5), (6,10)\}$$

οπότε:

$$OPEN = \{(5,11); (4.5, 8.5); (6,10)\}$$

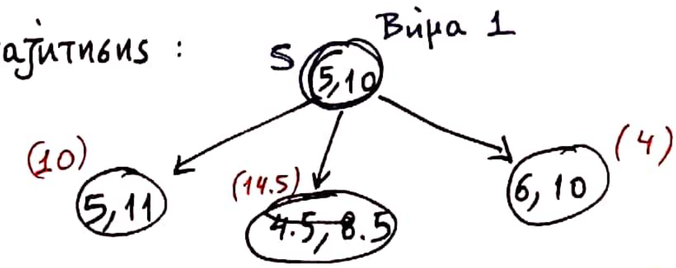
με τιμές δυναμικού των στοιχείων:

· $U(5,11) = 10$

· $U(4.5, 8.5) = 12{,}25 + 2.25 = 14.5$

· $U(6,10) = 4$

Δέντρο Αναζήτησης:



▷ Επισημαίνουμε τους νέους κόμβους ως visited = TRUE και τους εισάγουμε στο Δέντρο Αναζήτησης.

Βήμα 2ο:

▹ $q = BEST(OPEN) = (6,10)$, δυναμικού $V(6,10) = 4$

▹ $OPEN = OPEN \cup N(q)$

όπου $N(q) = \{(6,12), (6,8)\}$

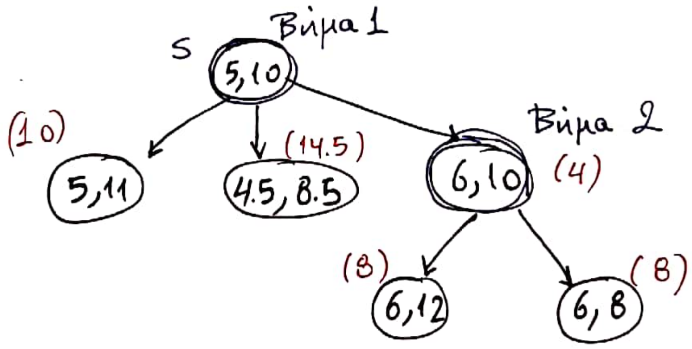
Δηλαδή $OPEN = \{(5,11), (4.5, 8.5), (6,12), (6,8)\}$

Οι τιμές δυναμικού των νέων στοιχείων θα είναι:

· $V(6,12) = 4 + 4 = 8$

· $V(6,8) = 4 + 4 = 8$

▹ Επισημαίνουμε τους νέους κόμβους ως visited = TRUE και τους εισάγουμε στο δέντρο αναζήτησης:



Βήμα 3ο:

▹ $q = BEST(OPEN) = (6,8)$, δυναμικού $V(6,8) = 8$

▹ $OPEN = OPEN \cup N(q)$

όπου $N(q) = \{(4,5,7), (7,7)\}$

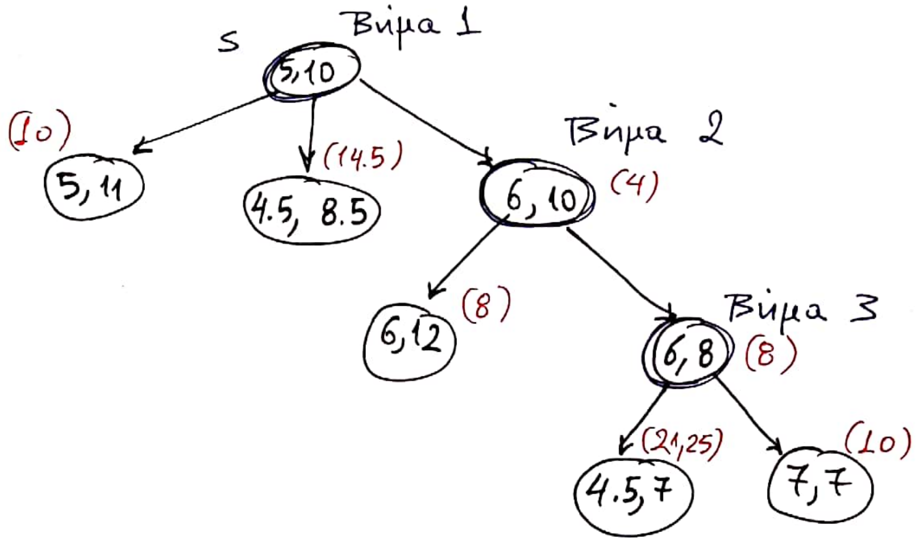
με δυναμικά:

· $V(4.5,7) = 12,25 + 9 = 21,25$

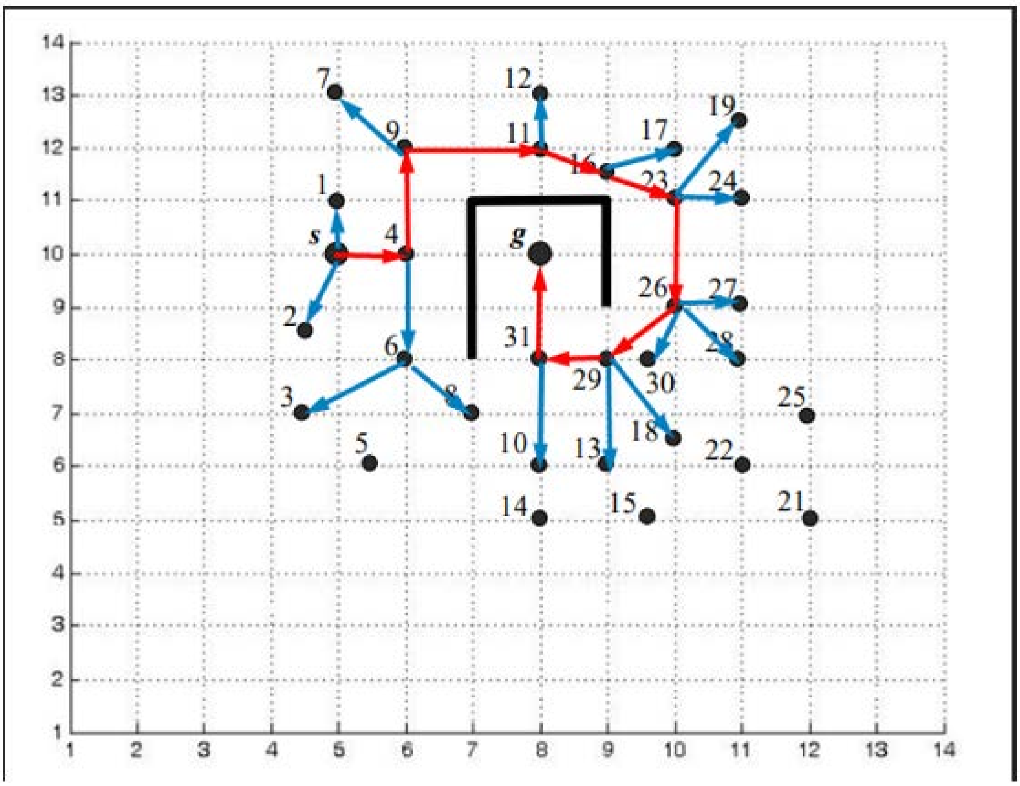
· $V(7,7) = 1 + 9 = 10$

Δηλαδή $OPEN = \{(5,11), (4.5, 8.5), (6,12), (4.5,7), (7,7)\}$

▸ Επισημειώνουμε τους νέους κόμβους ως visited = TRUE και τους εισάγουμε στο δέντρο αναζήτησης :



Η άνωθι διαδικασία συνεχίζεται, μέχρις ότου εισαχθεί ο κόμβος στόχος $g=(8,10)$ στο δέντρο, οπότε ο αλγόριθμος τερματίζει και επιστρέφει τη βέλτιστη διαδρομή, όπως αυτή βρίσκεται παρακολουθώντας τους δείκτες στο δέντρο αναζήτησης, ανάστροφα από τον κόμβο-στόχο g προς τον αρχικό κόμβο s. Ειδικότερα:



Εικόνα 2: Δέντρο Αναζήτησης και Επιστρεφόμενο Μονοπάτι.

Με κόκκινα βέλη διαφαίνεται η διαδρομή που επιστρέφει ο αλγόριθμος Best-First with backtracking, ενώ με μπλε βέλη τονίζονται οι κόμβοι του χώρου διατάξεων που ο αλγόριθμος θα έχει θεωρήσει ως Visited.

Σημειώνεται ότι ο εν λόγω αλγόριθμος δεν επιστρέφει σίγουρα τη βέλτιστη διαδρομή προς τον κόμβο-στόχο, κάτι το οποίο επιβεβαιώνεται και στη συγκεκριμένη άσκηση: ο αλγόριθμος επιστρέφει τη διαδρομή

$$s \rightarrow 4 \rightarrow 9 \rightarrow 11 \rightarrow 16 \rightarrow 23 \rightarrow 26 \rightarrow 29 \rightarrow 31 \rightarrow g$$

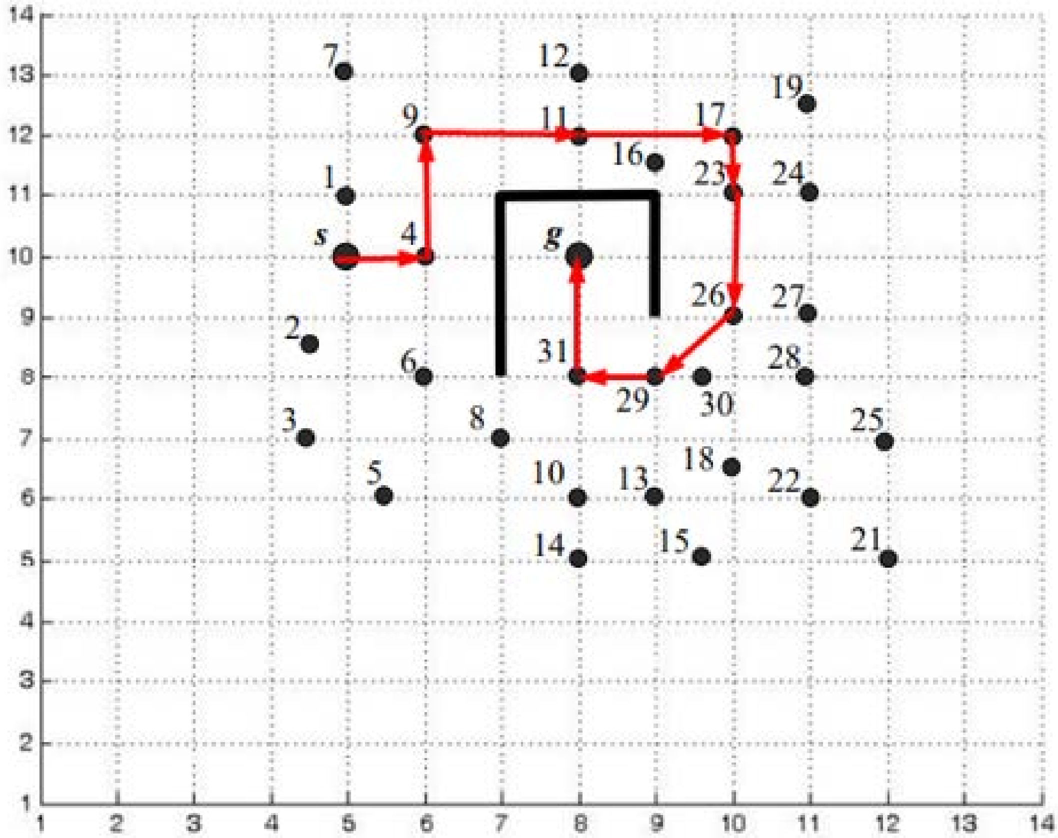
και όχι τη διαδρομή:

$$s \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \rightarrow 31 \rightarrow g$$

η οποία είναι προφανώς συντομότερη.

Επιπλέον, ο αλγόριθμος Best-First with backtracking είναι πλήρης, δηλαδή θα επιστρέψει σίγουρα ένα μονοπάτι από τον αρχικό κόμβο s προς τον κόμβο-στόχο g, εφόσον αυτό υπάρχει, διότι αφενός μαρκάρει τους επισκευφθέντες κόμβους ως visited = True, ώστε να μην τους ξανά επισκεφθεί με κίνδυνο να εγκλωβιστεί σε ατέρμονους κύκλους, και αφετέρου χρησιμοποιεί επανιχνηλάτηση, με αποτέλεσμα να μην εγκλωβίζεται σε local minima δυναμικού.

Τέλος, αυξάνοντας την παράμετρο ρ_0, αυξάνεται ο χώρος επίδρασης απωστικών δυναμικών λόγω κοντινών εμποδίων, γεγονός που μπορεί να τροποποιήσει την επιστρεφόμενη από τον αλγόριθμο διαδρομή. Για παράδειγμα, για $\rho_0 = 1.5$ και μεγάλο K_{rep}, ο αλγόριθμος θα αποφύγει να πάει στον κόμβο 16 και θα επιλέξει τη διαδρομή μέσω του κόμβου 17.



Εικόνα 3: Εναλλακτική Επιστρεφόμενη διαδρομή για ρ0 = 1.5