Filsafat Matematika dan Ilmu

Subiono

26 Pebruari 2024

Daftar Isi

Bab 1

Apa Matematika itu

Pada Bab ini dibahas apa itu matematika dan dari mana asalnya istilah matematika.

1.1 Matematika [4]

Matematika (dari bahasa Yunani Kuno *μάθημα* **(máthēma)**, berarti "pengetahuan, pemikiran, pengkajian, pembelajaran"), adalah bidang ilmu, yang mencakup studi tentang topik-topik seperti bilangan (aritmetika dan teori bilangan), rumus dan struktur terkait (aljabar), bangun dan ruang tempat mereka berada (geometri), dan besaran serta perubahannya (kalkulus dan analisis). Tidak ada kesepakatan umum tentang ruang lingkup yang tepat atau status epistemologisnya. Epistemologis adalah istilah yang luas yang dapat digunakan untuk merujuk pada berbagai hal yang berkaitan dengan hakikat pengetahuan dan teori pengetahuan. Epistemologi membahas pertanyaan-pertanyaan seperti, "Apa yang membuat kebenaran yang terjustifikasi dapat dijustifikasi?", "Apa artinya apabila mengatakan bahwa seseorang mengetahui sesuatu?", dan pertanyaan yang mendasar, "Bagaimana kita tahu bahwa kita tahu?".

Matematika selalu berkembang, misalnya di Tiongkok pada tahun 300 SM, di India pada tahun 100 M, dan di Arab pada tahun 800 M, hingga zaman Renaisans, ketika temuan baru matematika berinteraksi dengan penemuan ilmiah baru yang mengarah pada peningkatan yang cepat di dalam laju penemuan matematika. Berlanjut hingga kini, matematika digunakan di seluruh dunia sebagai alat penting di berbagai bidang, termasuk ilmu alam, teknik, kedokteran/medis, dan ilmu sosial seperti ekonomi, dan psikologi. Matematika terapan, cabang matematika yang melingkupi penerapan pengetahuan matematika ke bidang-bidang lain, mengilhami dan membuat penggunaan temuan-temuan matematika baru, dan kadang-kadang mengarah pada pengembangan disiplin-disiplin ilmu yang sepenuhnya baru, seperti statistika dan teori permainan.

Matematika banyak digunakan dalam ilmu pengetahuan untuk fenomena pemodelan. Hal ini memungkinkan ekstraksi perkiraan kuantitatif dari hukum-hukum percobaan. Misalnya, pergerakan planet dapat diprediksi dengan akurasi tinggi menggunakan hukum gravitasi Newton yang dipadukan dengan perhitungan matematis. Ketakbergantungan kebenaran matematis dari percobaan manapun menyiratkan bahwa keakuratan perkiraan semacam itu hanya bergantung pada kecukupan model untuk menggambarkan kenyataan. Jadi, ketika munculnya beberapa perkiraan yang tidak tepat, itu berarti bahwa model harus diperbaiki atau diubah, bukan berarti matematika salah. Misalnya, presesi apsis atau perihelium Merkurius tidak dapat dijelaskan dengan hukum gravitasi Newton, tetapi dijelaskan secara akurat oleh relativitas umum Einstein. Pengesahan percobaan teori Einstein ini menunjukkan bahwa hukum gravitasi Newton hanyalah hampiran (yang masih sangat akurat dalam kehidupan sehari-hari).

Matematika sangat penting di banyak bidang, termasuk ilmu alam, rekayasa, kedokteran, keuangan, ilmu komputer, dan ilmu sosial. Beberapa bidang matematika, seperti statistika dan teori permainan, dikembangkan dalam korelasi langsung dengan terapannya, dan sering dikelompokkan dengan nama matematika terapan. Bidang matematika lainnya dikembangkan secara independen dari aplikasi apa pun (dan oleh karena itu disebut matematika murni), tetapi aplikasi praktis sering ditemukan kemudian. Contoh yang tepat adalah masalah faktorisasi prima, yang merujuk kepada Euklides, tetapi yang tidak memiliki aplikasi praktis sebelum digunakan dalam sistemkripto RSA (untuk keamanan jaringan komputer).

Matematikawan mencari dan menggunakan pola untuk merumuskan dugaan baru; untuk menyelesaikan kebenaran atau ketidak-benaran dari dugaan dengan bukti matematika. Ketika struktur matematika adalah model yang baik dari fenomena nyata, maka penalaran matematis dapat memberikan wawasan atau prediksi tentang alam. Melalui penggunaan **abstraksi** dan **logika**, matematika dikembangkan dari penghitungan, perhitungan, pengukuran, dan studi sistematis tentang bentuk dan gerakan benda-benda fisik. Matematika praktis telah menjadi aktivitas manusia sejak ditulis terekam (ada catannya). Penelitian yang diperlukan untuk menyelesaikan masalah matematika bisa memakan waktu bertahun-tahun atau bahkan berabad-abad pertanyaan berkelanjutan.

Argumen yang tegas pertama kali muncul dalam matematika Yunani, terutama dalam Elemen Euclid. Sejak dimulai karya perintis Giuseppe Peano (1858–1932), David Hilbert (1862–1943), dan lainnya tentang sistem

aksiomatik pada akhir abad ke-19, sudah menjadi kebiasaan untuk melihat penelitian matematika sebagai pembenaran kebenaran oleh **deduksi** yang ketat dari **aksioma** dan **definisi** yang dipilih dengan tepat. Matematika berkembang relatif dengan langkah lambat sampai Renaissance, ketika inovasi matematika berinteraksi dengan penemuan-penemuan ilmiah baru menyebabkan peningkatan pesat dalam tingkat matematika Penemuan yang berlanjut hingga hari ini.

1.2 Etimologi (cabang ilmu linguistik yang mempelajari asal-usul suatu kata)

Kata "matematika" berasal dari bahasa Yunani Kuno: *μάθημα* (máthéma), yang berarti "**yang dipelajari**," "**apa yang seseorang ingin ketahui**," dengan demikian juga berarti "**pengkajian**" dan "**ilmu pengetahuan**". Kata untuk "matematika" memiliki arti yang kian menyempit dan lebih teknis "**studi matematika**" bahkan di zaman Klasik. Kata sifat-nya adalah mathēmatikós (*μαθηματικός*), berarti "**berhubungan dengan pembelajaran**" atau "**rajin belajar**," yang selanjutnya berarti "**matematis**". Secara khusus, mathēmatikētékhnē (*μαθηματικήτέχνη*; bahasa Latin: **ars mathematica**) berarti "**seni matematika**".

Demikian pula, salah satu dari dua aliran pemikiran utama dalam **Pythagoreanisme** dikenal sebagai the mathēmatikoi (*μαθηματικοί*) yang pada saat itu berarti "**pembelajar**" daripada "**matematikawan**" dalam pengertian modern.

Dalam bahasa Latin, dan dalam bahasa Inggris sampai sekitar tahun 1700, istilah matematika lebih sering berarti "astrologi" (atau kadang-kadang "astronomi") daripada "matematika"; artinya secara bertahap berubah menjadi apa yang sebagaimana dipahami sekarang ini sejak tahun 1500-an hingga 1800-an. Hal ini berakibat pada beberapa penerjemahan yang keliru. Misalnya, seruan peringatan dari Santo Agustinus bahwa orang Kristen harus waspada terhadap mathematici, yang berarti astrolog, kadang-kadang salah diterjemahkan sebagai kutukan matematikawan.

Bentuk jamak sering dipakai di dalam bahasa Inggris, seperti juga di dalam bahasa Prancis bentuk jamak les mathématiques (dan jarang digunakan sebagai turunan bentuk tunggal la mathématique), merujuk pada bentuk jamak bahasa Latin yang cenderung netral mathematica (Cicero), berdasarkan bentuk jamak *τά μαθηματικά* (ta mathēmatiká), yang dipakai Aristoteles (384–322 SM), yang terjemahan kasarnya berarti "**segala hal yang matematis**", meskipun dapat diterima bahwa bahasa Inggris hanya meminjam kata sifat mathematic(al) dan diikuti bentuk kata benda mathematics, setelah mengikuti pola physics dan metaphysics, yang dipinjam dari bahasa Yunani. Tetapi, di dalam bahasa Inggris, kata benda jamak mathematics berubah menjadi bentuk tunggal mathematic bila dipakai sebagai kata kerja. Di dalam ragam percakapan, matematika kerap kali disingkat sebagai math di Amerika Utara dan maths di tempat lain.

1.3 Sejarah matematika [3]

Cabang pengkajian yang dikenal sebagai sejarah matematika adalah penyelidikan terhadap asal mula penemuan di dalam matematika dan sedikit perluasannya, penyelidikan terhadap metode dan notasi matematika pada masa silam.

Halaman dari *Buku Ikhtisar Perhitungan dengan Penyelesaian dan Perimbangan* karya Muḥammad bin Mūsā al-Khawārizmī (sekitar 820 Masehi)

Sebelum zaman modern dan penyebaran ilmu pengetahuan ke seluruh dunia, contoh-contoh tertulis dari pengembangan matematika telah mengalami kemilau hanya di beberapa tempat. Tulisan matematika terkuno yang telah ditemukan adalah Plimpton 322 (matematika Babilonia sekitar 1900 SM), Lembaran Matematika Rhind (Matematika Mesir sekitar 2000-1800 SM) dan Lembaran Matematika Moskwa (matematika Mesir sekitar 1890 SM). Semua tulisan itu membahas teorema yang umum dikenal sebagai teorema Pythagoras, yang tampaknya menjadi pengembangan matematika tertua dan paling tersebar luas setelah aritmetika dasar dan geometri.

Sumbangan matematikawan Yunani memurnikan metode-metode (khususnya melalui pengenalan penalaran deduktif dan kekakuan matematika di dalam pembuktian matematika) dan perluasan pokok bahasan matematika. Kata "matematika" itu sendiri diturunkan dari kata Yunani kuno, $\mu\acute{\alpha}\theta\eta\mu\alpha$ (mathema), yang berarti "mata pelajaran". Matematika Cina membuat sumbangan dini, termasuk notasi posisional. Sistem bilangan Hindu-Arab dan aturan penggunaan operasinya, digunakan hingga kini, mungkin dikembangakan melalui kuliah pada milenium pertama Masehi di dalam matematika India dan telah diteruskan ke Barat melalui matematika Islam. Matematika Islam, pada gilirannya, mengembangkan dan memperluas pengetahuan matematika ke peradaban ini. Banyak naskah berbahasa Yunani dan Arab tentang matematika kemudian diterjemahkan ke dalam bahasa Latin, yang mengarah pada pengembangan matematika lebih jauh lagi di Zaman Pertengahan Eropa.

Dari zaman kuno melalui Zaman Pertengahan, ledakan kreativitas matematika sering kali diikuti oleh abad-abad kemandekan. Bermula pada abad Renaisans Italia pada abad ke-16, pengembangan matematika baru, berinteraksi dengan penemuan ilmiah baru, dibuat pada pertumbuhan eksponensial yang berlanjut hingga kini.

1.4 Matematika prasejarah


Matematika prasejarah merujuk pada perkembangan matematika pada zaman kuno sebelum masehi.

Asal mula pemikiran matematika terletak di dalam konsep bilangan, besaran, dan bangun. Pengkajian modern terhadap fosil binatang menunjukkan bahwa konsep ini tidak berlaku unik bagi manusia. Konsep ini mungkin juga menjadi bagian sehari-hari di dalam kawanan pemburu. Bahwa konsep bilangan berkembang tahap demi tahap seiring waktu adalah bukti di beberapa bahasa zaman kini mengawetkan perbedaan antara "satu", "dua", dan "banyak", tetapi bilangan yang lebih dari dua tidaklah demikian. Benda matematika tertua yang sudah diketahui adalah tulang Lebombo, ditemukan di pegunungan Lebombo di Swaziland dan mungkin berasal dari tahun 35000 SM. Tulang ini berisi 29 torehan yang berbeda yang sengaja digoreskan pada tulang fibula baboon. Terdapat bukti bahwa kaum perempuan biasa menghitung untuk mengingat siklus haid mereka; 28 sampai 30 goresan pada tulang atau batu, diikuti dengan tanda yang berbeda. Juga artefak prasejarah ditemukan di Afrika dan Prancis, dari tahun 35.000 SM dan berumur 20.000 tahun, menunjukkan upaya dini untuk menghitung waktu.

Tulang Ishango, ditemukan di dekat batang air Sungai Nil (timur laut Kongo), berisi sederetan tanda lidi yang digoreskan di tiga lajur memanjang pada tulang itu. Tafsiran umum adalah bahwa tulang Ishango menunjukkan peragaan terkuno yang sudah diketahui tentang barisan bilangan prima atau kalender lunar enam bulan. Periode Predinastik Mesir dari milenium ke-5 SM, secara grafis menampilkan rancangan-rancangan geometris. Telah diakui bahwa bangunan megalit di Inggris dan Skotlandia, dari milenium ke-3 SM, menggabungkan gagasan-gagasan geometri seperti lingkaran, elips, dan tripel Pythagoras di dalam rancangan mereka.

1.5 Timur Dekat kuno

Mesopotamia

Matematika Babilonia merujuk pada seluruh matematika yang dikembangkan oleh bangsa Mesopotamia (kini Iraq) sejak permulaan Sumeria hingga permulaan peradaban helenistik. Dinamai "Matematika Babilonia" karena peran utama kawasan Babilonia sebagai tempat untuk belajar. Pada zaman peradaban helenistik Matematika Babilonia berpadu dengan Matematika Yunani dan Mesir untuk membangkitkan Matematika Yunani. Kemudian di bawah Kekhalifahan Islam, Mesopotamia, terkhusus Baghdad, sekali lagi menjadi pusat penting pengkajian Matematika Islam.

Bertentangan dengan langkanya sumber pada Matematika Mesir, pengetahuan Matematika Babilonia diturunkan dari lebih daripada 400 lempengan tanah liat yang digali sejak 1850-an. Ditulis di dalam tulisan paku, lempengan ditulisi ketika tanah liat masih basah, dan dibakar di dalam tungku atau dijemur di bawah terik matahari. Beberapa di antaranya adalah karya rumahan.

Bukti terdini matematika tertulis adalah karya bangsa Sumeria, yang membangun peradaban kuno di Mesopotamia. Mereka mengembangkan sistem rumit metrologi sejak tahun 3000 SM. Dari kira-kira 2500 SM ke muka, bangsa Sumeria menuliskan tabel perkalian pada lempengan tanah liat dan berurusan dengan latihan-latihan geometri dan soal-soal pembagian. Jejak terdini sistem bilangan Babilonia juga merujuk pada periode ini.

Sebagian besar lempengan tanah liat yang sudah diketahui berasal dari tahun 1800 sampai 1600 SM, dan meliputi topik-topik pecahan, aljabar, persamaan kuadrat dan kubik, dan perhitungan bilangan regular, invers perkalian, dan bilangan prima kembar. Lempengan itu juga meliputi tabel perkalian dan metode penyelesaian persamaan linear dan persamaan kuadrat. Lempengan Babilonia 7289 SM memberikan hampiran bagi $\sqrt{2}$ yang akurat sampai lima tempat desimal.

Matematika Babilonia ditulis menggunakan sistem bilangan seksagesimal (basis-60). Dari sinilah diturunkannya penggunaan bilangan 60 detik untuk semenit, 60 menit untuk satu jam, dan 360 (60×6) derajat untuk satu putaran lingkaran, juga penggunaan detik dan menit pada busur lingkaran yang melambangkan pecahan derajat. Kemajuan orang Babilonia di dalam matematika didukung oleh fakta bahwa 60 memiliki banyak pembagi. Juga, tidak seperti orang Mesir, Yunani, dan Romawi, orang Babilonia memiliki sistem nilai-tempat yang sejati, di mana angka-angka yang dituliskan di lajur lebih kiri menyatakan nilai yang lebih besar, seperti di dalam sistem desimal. Bagaimanapun, mereka kekurangan kesetaraan koma desimal, dan sehingga nilai tempat suatu simbol sering kali harus dikira-kira berdasarkan konteksnya.

Mesir

Matematika Mesir merujuk pada matematika yang ditulis di dalam bahasa Mesir. Sejak peradaban helenistik, Yunani menggantikan bahasa Mesir sebagai bahasa tertulis bagi kaum terpelajar Bangsa Mesir, dan sejak itulah matematika Mesir melebur dengan matematika Yunani dan Babilonia yang membangkitkan Matematika helenistik. Pengkajian matematika di Mesir berlanjut di bawah Khilafah Islam sebagai bagian dari matematika Islam, ketika bahasa Arab menjadi bahasa tertulis bagi kaum terpelajar Mesir.

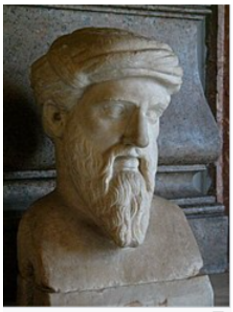
Tulisan matematika Mesir yang paling panjang adalah Lembaran Rhind (kadang-kadang disebut juga "Lembaran Ahmes" berdasarkan penulisnya), diperkirakan berasal dari tahun 1650 SM tetapi mungkin lembaran itu adalah salinan dari dokumen yang lebih tua dari Kerajaan Tengah yaitu dari tahun 2000-1800 SM. Lembaran itu adalah manual instruksi bagi pelajar aritmetika dan geometri. Selain memberikan rumus-rumus luas dan cara-cara perkalian, perbagian, dan pengerjaan pecahan, lembaran itu juga menjadi bukti bagi pengetahuan matematika lainnya, termasuk bilangan komposit dan prima; rata-rata aritmetika, geometri, dan harmonik; dan pemahaman sederhana Saringan Eratosthenes dan teori bilangan sempurna (yaitu, bilangan 6). Lembaran itu juga berisi cara menyelesaikan persamaan linear orde satu juga barisan aritmetika dan geometri.

Juga tiga unsur geometri yang tertulis di dalam lembaran Rhind menyiratkan bahasan paling sederhana mengenai geometri analitik: (1) pertama, cara memperoleh hampiran π yang akurat kurang dari satu persen; (2) kedua, upaya kuno penguadratan lingkaran; dan (3) ketiga, penggunaan terdini kotangen.

Naskah matematika Mesir penting lainnya adalah lembaran Moskwa, juga dari zaman Kerajaan Pertengahan, bertarikh kira-kira 1890 SM. Naskah ini berisikan soal kata atau soal cerita, yang barangkali ditujukan sebagai hiburan. Satu soal dipandang memiliki kepentingan khusus karena soal itu memberikan metode untuk memperoleh volume limas terpenggal: "Jika Anda dikatakan: Limas terpenggal setinggi 6 satuan panjang, yakni 4 satuan panjang di bawah dan 2 satuan panjang di atas. Anda menguadratkan 4, sama dengan 16. Anda menduakalilipatkan 4, sama dengan 8. Anda menguadratkan 2, sama dengan 4. Anda menjumlahkan 16, 8, dan 4, sama dengan 28. Anda ambil sepertiga dari 6, sama dengan 2. Anda ambil dua kali lipat dari 28, sama dengan 56. Maka lihatlah, hasilnya sama dengan 56. Anda memperoleh kebenaran."

Akhirnya, lembaran Berlin (kira-kira 1300 SM) menunjukkan bahwa bangsa Mesir kuno dapat menyelesaikan persamaan aljabar orde dua.

1.6 Matematika Yunani



Pythagoras dari Samos

Matematika Yunani merujuk pada matematika yang ditulis di dalam bahasa Yunani antara tahun 600 SM sampai 300 M. Matematikawan Yunani tinggal di kota-kota sepanjang Mediterania bagian timur, dari Italia hingga ke Afrika Utara, tetapi mereka dibersatukan oleh budaya dan bahasa yang sama. Matematikawan Yunani pada periode setelah Iskandar Agung kadang-kadang disebut Matematika Helenistik.

Matematika Yunani lebih berbobot daripada matematika yang dikembangkan oleh kebudayaan-kebudayaan pendahulunya. Semua naskah matematika pra-Yunani yang masih terpelihara menunjukkan penggunaan penalaran induktif, yakni pengamatan yang berulang-ulang yang digunakan untuk mendirikan aturan praktis. Sebaliknya, matematikawan Yunani menggunakan penalaran deduktif. Bangsa Yunani menggunakan logika untuk menurunkan simpulan dari definisi dan aksioma, dan menggunakan kekakuan matematika untuk membuktikannya.

Thales dari Miletus

Matematika Yunani diyakini dimulakan oleh Thales dari Miletus (kira-kira 624 sampai 546 SM) dan Pythagoras dari Samos (kira-kira 582 sampai 507 SM). Meskipun perluasan pengaruh mereka dipersengketakan, mereka mungkin diilhami oleh Matematika Mesir dan Babilonia. Menurut legenda, Pythagoras bersafari ke Mesir untuk mempelajari matematika, geometri, dan astronomi dari pendeta Mesir.

Thales menggunakan geometri untuk menyelesaikan soal-soal perhitungan ketinggian piramida dan jarak perahu dari garis pantai. Dia dihargai sebagai orang pertama yang menggunakan penalaran deduktif untuk diterapkan pada geometri, dengan menurunkan empat akibat wajar dari teorema Thales. Hasilnya, dia dianggap sebagai matematikawan sejati pertama dan pribadi pertama yang menghasilkan temuan matematika. Pythagoras mendirikan Mazhab Pythagoras, yang mendakwakan bahwa matematikalah yang menguasai semesta dan semboyannya adalah "semua adalah bilangan". Mazhab Pythagoraslah yang menggulirkan istilah "matematika", dan merekalah yang memulakan pengkajian matematika. Mazhab Pythagoras dihargai sebagai penemu bukti pertama teorema Pythagoras, meskipun diketahui bahwa teorema itu memiliki sejarah yang panjang, bahkan dengan bukti keujudan bilangan irasional.

Eudoksos (kira-kira 408 SM sampai 355 SM) mengembangkan metode penghabis, sebuah rintisan dari Integral modern. Aristoteles (kira-kira 384 SM sampai 322 SM) mulai menulis hukum logika. Euklides (kira-kira 300 SM) adalah contoh terdini dari format yang masih digunakan oleh matematika saat ini, yaitu definisi, aksioma, teorema, dan bukti. Dia juga mengkaji kerucut. Bukunya, Elemen, dikenal di segenap masyarakat terdidik di Barat hingga pertengahan abad ke-20. Selain teorema geometri yang terkenal, seperti teorem Pythagoras, Elemen menyertakan bukti bahwa akar kuadrat dari dua adalah irasional dan terdapat tak-hingga banyaknya bilangan prima. Saringan Eratosthenes (kira-kira 230 SM) digunakan untuk menemukan bilangan prima.

Archimedes (kira-kira 287 SM sampai 212 SM) dari Sirakusa menggunakan metode penghabis untuk menghitung luas di bawah busur parabola dengan penjumlahan barisan tak hingga, dan memberikan hampiran yang cukup akurat terhadap Pi. Dia juga mengkaji spiral yang mengharumkan namanya, rumus-rumus volume benda putar, dan sistem rintisan untuk menyatakan bilangan yang sangat besar.

1.7 Matematika Cina

Matematika Cina permulaan adalah berlainan bila dibandingkan dengan yang berasal dari belahan dunia lain, sehingga cukup masuk akal bila dianggap sebagai hasil pengembangan yang mandiri. Tulisan matematika yang dianggap tertua dari Cina adalah Chou Pei Suan Ching, berangka tahun antara 1200 SM sampai 100 SM, meskipun angka tahun 300 SM juga cukup masuk akal.

Sembilan Bab tentang Seni Matematika.

Hal yang menjadi catatan khusus dari penggunaan matematika Cina adalah sistem notasi posisional bilangan desimal, yang disebut pula "bilangan batang" di mana sandi-sandi yang berbeda digunakan untuk bilangan-bilangan antara 1 dan 10, dan sandi-sandi lainnya sebagai perpangkatan dari sepuluh. Dengan demikian, bilangan 123 ditulis menggunakan lambang untuk "1", diikuti oleh lambang untuk "100", kemudian lambang untuk "2" diikuti lambang utnuk "10", diikuti oleh lambang untuk "3". Cara seperti inilah yang menjadi sistem bilangan yang paling canggih di dunia pada saat itu, mungkin digunakan beberapa abad sebelum periode masehi dan tentunya sebelum dikembangkannya sistem bilangan India. Bilangan batang memungkinkan penyajian bilangan sebesar yang diinginkan dan memungkinkan perhitungan yang dilakukan pada suan pan, atau (sempoa Cina). Tanggal penemuan suan pan tidaklah pasti, tetapi tulisan terdini berasal dari tahun 190 M, di dalam Catatan Tambahan tentang Seni Gambar karya Xu Yue.

Karya tertua yang masih terawat mengenai geometri di Cina berasal dari peraturan kanonik filsafat Mohisme kira-kira tahun 330 SM, yang disusun oleh para pengikut Mozi (470–390 SM). Mo Jing menjelaskan berbagai aspek dari banyak disiplin yang berkaitan dengan ilmu fisika, dan juga memberikan sedikit kekayaan informasi matematika.

Pada tahun 212 SM, Kaisar Qín Shǐ Huáng (Shi Huang-ti) memerintahkan semua buku di dalam Kekaisaran Qin selain daripada yang resmi diakui pemerintah haruslah dibakar. Dekret ini tidak dihiraukan secara umum, tetapi akibat dari perintah ini adalah begitu sedikitnya informasi tentang matematika Cina kuno yang terpelihara yang berasal dari zaman sebelum itu. Setelah pembakaran buku pada tahun 212 SM, dinasti Han (202 SM–220 M) menghasilkan karya matematika yang barangkali sebagai perluasan dari karya-karya yang kini sudah hilang. Yang terpenting dari semua ini adalah Sembilan Bab tentang Seni Matematika, judul lengkap yang muncul dari tahun 179 M, tetapi wujud sebagai bagian di bawah judul yang berbeda. Ia terdiri dari 246 soal kata yang melibatkan pertanian, perdagangan, pengerjaan geometri yang menggambarkan rentang ketinggian dan perbandingan dimensi untuk menara pagoda Cina, teknik, survey, dan bahan-bahan segitiga siku-siku dan π. Ia juga menggunakan prinsip Cavalieri tentang volume lebih dari seribu tahun sebelum Cavalieri mengajukannya di Barat. Ia menciptakan bukti matematika untuk teorema Pythagoras, dan rumus matematika untuk eliminasi Gauss. Liu Hui memberikan komentarnya pada karya ini pada abad ke-3 M.

Sebagai tambahan, karya-karya matematika dari astronom Han dan penemu Zhang Heng (78–139) memiliki perumusan untuk pi juga, yang berbeda dari cara perhitungan yang dilakukan oleh Liu Hui. Zhang Heng menggunakan rumus pi-nya untuk menentukan volume bola. Juga terdapat karya tertulis dari matematikawan dan teoriwan musik Jing Fang (78–37 SM); dengan menggunakan koma Pythagoras, Jing mengamati bahwa 53 perlimaan sempurna menghampiri 31 oktaf. Ini kemudian mengarah pada penemuan 53 temperamen sama, dan tidak pernah dihitung dengan tepat di tempat lain hingga seorang Jerman, Nicholas Mercator melakukannya pada abad ke-17.

Zhang Heng (78–139)

Bangsa Cina juga membuat penggunaan diagram kombinatorial kompleks yang dikenal sebagai kotak ajaib dan lingkaran ajaib, dijelaskan pada zaman kuno dan disempurnakan oleh Yang Hui (1238–1398 M). Zu Chongzhi (abad ke-5) dari Dinasti Selatan dan Utara menghitung nilai pi sampai tujuh tempat desimal, yang bertahan menjadi nilai pi paling akurat selama hampir 1.000 tahun.

Bahkan setelah matematika Eropa mulai mencapai kecemerlangannya pada masa Renaisans, matematika Eropa dan Cina adalah tradisi yang saling terpisah, dengan menurunnya hasil matematika Cina secara signifikan, hingga para misionaris Jesuit seperti Matteo Ricci membawa gagasan-gagasan matematika kembali dan kemudian di antara dua kebudayaan dari abad ke-16 sampai abad ke-18.

1.8 Matematika India

Peradaban terdini anak benua India adalah Peradaban Lembah Indus yang mengemuka di antara tahun 2600 dan 1900 SM di daerah aliran Sungai Indus. Kota-kota mereka teratur secara geometris, tetapi dokumen matematika yang masih terawat dari peradaban ini belum ditemukan.


Arca Aryabhata. Karena informasi tentang keujudannya tidak diketahui, perupaan Aryabhata didasarkan pada daya khayal seniman.

Matematika Vedanta dimulakan di India sejak Zaman Besi. Shatapatha Brahmana (kira-kira abad ke-9 SM), menghampiri nilai π, dan Sulba Sutras (kira-kira 800–500 SM) yang merupakan tulisan-tulisan geometri yang menggunakan bilangan irasional, bilangan prima, aturan tiga dan akar kubik; menghitung akar kuadrat dari 2 sampai sebagian dari seratus ribuan; memberikan metode konstruksi lingkaran yang luasnya menghampiri persegi yang diberikan, menyelesaikan persamaan linear dan kuadrat; mengembangkan tripel Pythagoras secara aljabar, dan memberikan pernyataan dan bukti numerik untuk teorema Pythagoras.

Pānini (kira-kira abad ke-5 SM) yang merumuskan aturan-aturan tata bahasa Sanskerta. Notasi yang dia gunakan sama dengan notasi matematika modern, dan menggunakan aturan-aturan meta, transformasi, dan rekursi. Pingala (kira-kira abad ke-3 sampai abad pertama SM) di dalam risalahnya prosody menggunakan alat yang bersesuaian dengan sistem bilangan biner. Pembahasannya tentang kombinatorika meter bersesuaian dengan versi dasar dari teorema binomial. Karya Pingala juga berisi gagasan dasar tentang bilangan Fibonacci (yang disebut mātrāmeru).

Surya Siddhanta (kira-kira 400) memperkenalkan fungsi trigonometri sinus, kosinus, dan balikan sinus, dan meletakkan aturan-aturan yang menentukan gerak sejati benda-benda langit, yang bersesuaian dengan posisi mereka sebenarnya di langit. Daur waktu kosmologi dijelaskan di dalam tulisan itu, yang merupakan salinan dari karya terdahulu, bersesuaian dengan rata-rata tahun siderik 365,2563627 hari, yang hanya 1,4 detik lebih panjang daripada nilai modern sebesar 365,25636305 hari. Karya ini diterjemahkan ke dalam bahasa Arab dan bahasa Latin pada Zaman Pertengahan.

Aryabhata, pada tahun 499, memperkenalkan fungsi versinus, menghasilkan tabel trigonometri India pertama tentang sinus, mengembangkan teknik-teknik dan algoritme aljabar, infinitesimal, dan persamaan diferensial, dan memperoleh solusi seluruh bilangan untuk persamaan linear oleh sebuah metode yang setara dengan metode modern, bersama-sama dengan perhitungan astronomi yang akurat berdasarkan sistem heliosentris gravitasi. Sebuah terjemahan bahasa Arab dari karyanya Aryabhatiya tersedia sejak abad ke-8, diikuti oleh terjemahan bahasa Latin pada abad ke-13. Dia juga memberikan nilai π yang bersesuaian dengan $62832/20000 = 3{,}1416$. Pada abad ke-14, Madhava dari Sangamagrama menemukan rumus Leibniz untuk π, dan, menggunakan 21 suku, untuk menghitung nilai π sebagai 3,14159265359.

1.9 Pembelajaran matematika

Pendidik menggunakan sejarah matematika sebagai salah satu sumber belajar matematika. Pemanfaatan sejarah matematika berkaitan dengan konsep matematika dan ilmu pedagogis. Pengetahuan tentang sejarah matematika memberikan pemahaman matematika dan hubungan timbal-balik antarkonsep dalam matematika serta evolusi konsep matematika. Pemahaman mengenai latar belakang sejarah dari suatu konsep matematika memberikan peningkatan pemahaman secara menyeluruh terhadap kemampuan pedagogis guru. Pemahaman sejarah matematika meliputi nama tokoh, latar belakang berkembangnya konsep, proses evolusi dari perkembangan konsep dan hubungan timbal-balik antarkonsep dalam matematika di dalam sejarah. Pendidik yang memahami sejarah matematika mampu memperoleh motivasi, melakukan evaluasi dari masalah yang muncul di masa lalu untuk menemukan solusinya, dan merancang desain pembelajaran suatu materi tertentu dengan menjadikan sejarah matematika sebagai landasannya.

1.10 Objek matematika

Objek matematika adalah objek abstrak yang muncul dalam matematika. Konsep tersebut dipelajari dalam filsafat matematika.

Dalam praktik matematika, suatu objek adalah segala sesuatu yang telah (atau bisa) didefinisikan secara formal, dan dengannya seseorang dapat melakukan penalaran deduktif dan bukti matematika. Objek matematika yang umum ditemui meliputi:

- bilangan, bilangan bulat, partisi bilangan bulat, atau ekspresi.

Kombinatorik (cabang matematika) memiliki objek seperti:

- permutasi, pengaturan, kombinasi.

Teori himpunan (cabang matematika) memiliki objek seperti:

- himpunan, himpunan partisi,
- fungsi dan relasi

Geometri (cabang matematika) memiliki objek seperti:

- titik, garis, segmen garis,
- poligon (segitiga, bujur sangkar, segilima, segi enam, ...), lingkaran, elips, parabola, hiperbola,
- polyhedra (tetrahedron, kubus, octahedron, dodecahedron, icosahedron,), bola, ellipsoid, paraboloid, hiperboloid, silinder, kerucut.

Teori graf (cabang matematika) memiliki objek seperti:

- graf, tree, node, edge.

Topologi (cabang matematika) memiliki objek seperti:

- ruang topologi dan manifold.

Aljabar linier (cabang matematika) memiliki objek seperti:

- skalar, vektor, matriks dan tensor.

Aljabar abstrak (cabang matematika) memiliki objek seperti:

- grup,
- ring, modul,
- lapangan, ruang vektor,
- teori-grup lattice, dan teori-terurut lattice.

Kategori secara simultan adalah rumah bagi objek matematika dan objek matematika dalam hak mereka sendiri. Dalam teori bukti, bukti dan teorema juga merupakan objek matematika.

Status ontologis objek matematika telah menjadi subjek banyak penyelidikan dan perdebatan oleh para filsuf matematika.

1.10.1 Kerangka kerja Cantorian

Satu pandangan yang muncul sekitar pergantian abad ke-20 dengan karya Cantor adalah bahwa semua objek matematika dapat didefinisikan sebagai himpunan. Himpunan $\{0,1\}$ adalah contoh yang relatif jelas. Di samping itu grup $\mathbb{Z}_2$ dari bilangan bulat mod 2 juga suatu himpunan dengan dua elemen. Namun, itu tidak bisa hanya menjadi himpunan $\{0,1\}$, karena ini tidak menyebutkan struktur tambahan diperhitungkan ke $\mathbb{Z}_2$ oleh operasi penambahan dan invers aditif mod 2: bagaimana kita tahu mana 0 atau 1 yang merupakan aditif identitas, sebagai contoh? Untuk mengatur grup ini sebagai himpunan pertama dapat dikodekan sebagai quadruple ($\{0,1\},+,-$,-0), yang selanjutnya dapat dikodekan menggunakan salah satu dari beberapa konvensi sebagai himpunan yang mewakili quadruple, yang pada gilirannya mensyaratkan pengkodean operasi $+$ dan $-$ dan konstanta 0 sebagai himpunan.

Himpunan dapat mencakup denotasi terurut dari identitas tertentu dan operasi yang berlaku padanya, yang menunjukkan grup, grup abelian, ring, lapangan, atau objek matematika lainnya. Jenis objek matematika ini biasanya dipelajari dalam aljabar abstrak.

1.10.2 Paradoks dasar

Namun, jika tujuan ontologi matematika dianggap sebagai konsistensi internal matematika, lebih penting bahwa objek matematika dapat didefinisikan dalam beberapa cara yang seragam (misalnya, sebagai himpunan) terlepas dari praktik yang sebenarnya, untuk meletakkan esensi dari paradoksnya. Ini telah menjadi sudut pandang yang diambil oleh yayasan matematika, yang secara tradisional memberikan pengelolaan paradoks prioritas yang lebih tinggi daripada refleksi yang setia dari rincian praktik matematika sebagai pembenaran untuk mendefinisikan objek matematika yang akan ditetapkan.

Banyak dari ketegangan yang diciptakan oleh identifikasi dasar benda-benda matematika dengan set dapat dihilangkan tanpa terlalu mengkompromikan tujuan yayasan dengan membiarkan dua jenis objek ke dalam alam semesta matematika, himpunan dan hubungan, tanpa mengharuskan yang dianggap hanya sebagai contoh dari lain. Ini membentuk dasar teori model sebagai domain wacana logika predikat. Dari sudut pandang ini, objek matematika adalah entitas yang memuaskan aksioma teori formal dinyatakan dalam bahasa logika predikat.

1.10.3 Teori kategori

Varian dari pendekatan ini menggantikan hubungan dengan operasi, dasar aljabar universal. Dalam varian ini aksioma sering diambil bentuk persamaan, atau implikasi antar persamaan.

Varian yang lebih abstrak adalah teori kategori, yang abstraknya ditetapkan sebagai objek dan operasi di atasnya sebagai morfisme di antara objek-objek itu. Pada tingkat abstraksi ini, objek matematika direduksi menjadi sekadar simpul grafik yang ujung-ujungnya sebagai morfisme mengabstraksikan cara-cara di mana objek-objek itu dapat bertransformasi dan yang strukturnya dikodekan dalam hukum komposisi untuk morfisme. Kategori mungkin muncul sebagai model dari beberapa teori aksiomatik dan homomorfisme di antara mereka (dalam hal ini mereka biasanya konkret, artinya dilengkapi dengan functor pelupa yang setia ke kategori Set atau lebih umum ke topos yang cocok), atau mereka dapat dibangun dari kategori-kategori lain yang lebih primitif, atau mereka dapat dipelajari sebagai objek abstrak dalam hak mereka sendiri tanpa memperhatikan asalnya.

1.11 Bilangan

Suatu bilangan adalah objek matematika yang digunakan untuk menghitung, mengukur, dan memberi label. Contoh asalnya adalah bilangan asli $1, 2, 3, 4$, dan sebagainya. Simbol tertulis seperti "5" yang mewakili bilangan disebut suatu angka. Sistem angka adalah cara terorganisir untuk menulis dan memanipulasi jenis simbol ini, misalnya sistem angka Hindu-Arab memungkinkan kombinasi angka numerik seperti "5" dan "0" untuk mewakili bilangan yang lebih besar seperti 50. Angka dalam linguistik dapat merujuk pada simbol seperti 5, kata-kata atau frasa yang menyebutkan bilangan, seperti "lima ratus", atau kata-kata lain yang berarti bilangan tertentu, seperti "lusinan". Selain penggunaannya dalam penghitungan dan pengukuran, angka sering digunakan untuk label (seperti dengan nomor telepon), untuk pemesanan (seperti dengan nomor seri), dan untuk kode (seperti dengan ISBN). Dalam penggunaan umum, bilangan dapat merujuk pada simbol, kata atau frasa, atau objek matematika.

Dalam matematika, pengertian bilangan telah diperluas selama berabad-abad hingga mencakup 0, bilangan negatif, bilangan rasional seperti $\frac{1}{2}$ dan $-\frac{2}{3}$ dan bilangan real seperti $\sqrt{2}$ dan π, dan bilangan kompleks, yang memperluas bilangan real dengan suatu akar kuadrat -1 (dan kombinasinya dengan bilangan real dengan penambahan dan perkalian). Perhitungan dengan bilangan dilakukan dengan operasi aritmatika, penambahan, pengurangan, penggandaan, pembagian, dan eksponensial yang paling akrab. Studi mereka atau penggunaan disebut aritmatika. Istilah yang sama juga dapat merujuk pada teori bilangan, studi tentang sifat-sifat bilangan.

Selain penggunaan praktisnya, bilangan memiliki signifikansi budaya di seluruh dunia. Misalnya, dalam masyarakat Barat, bilangan 13 dianggap tidak beruntung, dan "satu juta" mungkin menandakan "banyak." Meskipun sekarang dianggap sebagai ilmu semu, kepercayaan pada signifikansi mistik nilangan, yang dikenal sebagai numerologi, meresapi pemikiran kuno dan abad pertengahan. Numerologi sangat memengaruhi perkembangan matematika Yunani, merangsang penyelidikan banyak masalah dalam teori bilangan yang masih menarik hingga saat ini.

Selama abad ke-19, matematikawan mulai mengembangkan banyak abstraksi berbeda yang berbagi sifat-sifat angka tertentu dan dapat dilihat sebagai perluasan konsep. Di antara yang pertama adalah bilangan hypercomplex, yang terdiri dari berbagai ekstensi atau modifikasi sistem bilangan kompleks. Saat ini, sistem bilangan dianggap sebagai contoh khusus yang penting kategori yang lebih umum seperti ring dan lapangan, dan penerapan istilah "bilangan" adalah masalah konvensi, tanpa signifikansi mendasar.

1.11.1 Sejarah

Angka

Sistem angka (atau sistem numerasi) adalah sistem penulisan untuk mengekspresikan bilangan; yaitu, notasi matematika untuk merepresentasikan bilangan-bilangan dari suatu himpunan yang diberikan, menggunakan digit atau simbol lain secara konsisten.

Barisan simbol yang sama dapat mewakili bilangan yang berbeda dalam sistem angka yang berbeda. Misalnya, "11" yang merepresentasikan bilangan sebelas dalam sistem angka desimal (digunakan dalam kehidupan bersama), bilangan tiga dalam sistem angka biner (digunakan dalam komputer), dan bilangan dua dalam sistem angka unary (misalnya digunakan dalam penghitungan angka skor).

Bilangan yang dilambangkan dengan angka disebut nilainya. Idealnya, suatu sistem angka akan:

- Merepresentasikan suatu himpunan bilangan yang bermanfaat (misal, semua bilangan bulat, atau bilangan rasional)

- Setiap bilangan yang diberikan menyajikan representasi tunggal (atau setidaknya representasi standar)

- Merefleksikan struktur aljabar dan aritmatika bilangan-bilangan tersebut.

Sebagai contoh, representasi desimal dari bilangan bulat sebagaimana biasa memberikan setiap bilangan bukan nol representasi tunggal sebagai barisan digit yang berhingga, dimulai dengan digit bukan nol. Namun, ketika representasi desimal digunakan untuk bilangan rasional atau bilangan real, bilangan seperti itu, secara umum, memiliki jumlah representasi tak hingga, misalnya $2,31$ juga dapat ditulis sebagai $2,310$; $2,3100000$; $2,309999999\cdots$; dll., Semuanya memiliki makna yang sama kecuali untuk beberapa konteks ilmiah dan lainnya di mana ketelitian yang lebih tinggi tersirat oleh bilangan lebih besar yang ditunjukkan.

Sistem angka kadang-kadang disebut *sistem bilangan*, tetapi nama itu ambigu, karena dapat merujuk pada sistem bilangan yang berbeda, seperti sistem bilangan real, sistem bilangan kompleks, sistem bilangan p-adic, dll.

Sistem angka utama

Sistem angka yang paling umum digunakan adalah sistem angka Hindu-Arab. Dua ahli matematika India dikreditkan dengan mengembangkannya. Aryabhata dari Kusumapura mengembangkan notasi nilai tempat pada abad ke-5 dan satu abad kemudian Brahmagupta memperkenalkan simbol nol. Sistem angka dan konsep nol, dikembangkan oleh umat Hindu di India, perlahan-lahan menyebar ke negara-negara sekitarnya lainnya karena kegiatan komersial dan militer mereka dengan India. Orang-orang Arab mengadopsi dan memodifikasinya. Bahkan hari ini, orang-orang Arab menyebut angka yang mereka gunakan "Raqam Al-Hind" atau sistem angka Hindu. Orang-orang Arab menerjemahkan teks-teks Hindu tentang numerologi dan menyebarkannya ke dunia barat karena hubungan dagang mereka dengan mereka. Dunia Barat memodifikasi mereka dan menyebut mereka angka Arab, ketika mereka mempelajarinya dari orang Arab. Oleh karena itu sistem angka barat saat ini adalah versi modifikasi dari sistem angka Hindu yang dikembangkan di India. Ini juga menunjukkan kesamaan besar dengan notasi Sansekerta-Devanagari, yang masih digunakan di India dan Nepal yang berdekatan.

Sistem angka paling sederhana adalah sistem angka unary, di mana setiap bilangan asli direpresentasikan oleh sebanyak simbol yang sesuai. Jika simbol / dipilih, misalnya, maka bilangan tujuh akan diwakili oleh ///////. Tanda penghitungan representasi satu sistem seperti itu masih umum digunakan. Sistem unary hanya berguna untuk jumlah kecil, meskipun memainkan peran penting dalam ilmu komputer teoretis. Elias gamma coding, yang biasa digunakan dalam kompresi data, menyatakan bilangan-bilangan berukuran sebarang dengan menggunakan unary untuk menunjukkan panjang angka biner.

Notasi unary dapat disingkat dengan memperkenalkan simbol yang berbeda untuk nilai-nilai baru tertentu. Sangat umum, nilai-nilai ini pangkat 10; jadi misalnya, jika / adalah menyatakan satu, − untuk sepuluh dan + untuk 100, maka bilangan 304 dapat dengan ringkas direpresentasikan sebagai +++ //// dan bilangan 123 sebagai + - - /// tanpa perlu nol . Ini disebut notasi nilai-tanda. Sistem angka Mesir kuno adalah tipe ini, dan sistem angka Romawi adalah modifikasi dari ide ini.

Yang lebih bermanfaat adalah sistem yang menggunakan singkatan khusus untuk pengulangan simbol; misalnya, menggunakan sembilan huruf pertama dari alfabet untuk singkatan ini, dengan A singkatan untuk "satu kejadian", B "dua kejadian", dan seterusnya, orang kemudian dapat menulis C+D/ untuk angka 304. Sistem ini digunakan saat menulis angka Cina dan angka Asia Timur lainnya berdasarkan bahasa Cina. Sistem angka dari bahasa Inggris adalah dari jenis ini ("tiga ratus [dan] empat"), seperti juga yang dari bahasa lisan lainnya, terlepas dari sistem tulisan apa yang telah mereka adopsi. Namun, banyak bahasa menggunakan campuran pangkalan, dan fitur lainnya, misalnya 79 dalam bahasa Prancis adalah *soixante dix-neuf* $(60 + 10 + 9)$ dan di Welsh adalah *pedwar ar bymtheg a thrigain* $(4+(5+10)+(3\times20))$ atau (agak kuno) *pedwar ugain namyn un* $(4\times20-1)$. Dalam bahasa Inggris, orang bisa mengatakan "empat skor kurang satu", seperti dalam *Gettysburg Address* yang terkenal mewakili "87 tahun yang lalu" sebagai "empat skor dan tujuh tahun yang lalu".

Lebih elegan adalah sistem posisi, juga dikenal sebagai notasi nilai tempat. Sekali lagi bekerja di basis 10, sepuluh digit berbeda $0, 1, \cdots, 9$ digunakan dan posisi digit digunakan untuk menandakan sepuluh pangkat bahwa digit harus dikalikan dengan, seperti dalam $304 = 3\times100+0\times10+4\times1$ atau lebih tepatnya $3 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 4 \times 10^0$. Nol, yang tidak diperlukan dalam sistem lain, sangat penting di sini, untuk pangkat "dilewati". Sistem angka Hindu-Arab, yang berasal dari India dan sekarang digunakan di seluruh dunia, adalah sistem basis 10 posisi.

Aritmatika jauh lebih mudah dalam sistem posisi daripada yang sebelumnya aditif; lebih jauh lagi, sistem aditif membutuhkan sejumlah besar simbol yang berbeda untuk pangkat 10 yang berbeda; sistem posisi hanya membutuhkan sepuluh simbol yang berbeda (dengan asumsi bahwa ia menggunakan basis 10).

Sistem desimal posisional saat ini digunakan secara universal dalam tulisan manusia. Basis 1000 juga digunakan (meskipun tidak secara universal), dengan mengelompokkan digit dan mempertimbangkan urutan tiga digit desimal sebagai satu digit. Ini adalah arti dari notasi umum 1.000.234.567

digunakan untuk bilangan yang sangat besar.

Di komputer, sistem angka utama didasarkan pada sistem posisi pada basis 2 (sistem angka biner), dengan dua digit biner, 0 dan 1. Sistem posisi diperoleh dengan mengelompokkan digit biner dengan tiga (sistem angka oktal) atau empat (angka heksadesimal) sistem) umumnya digunakan. Untuk bilangan bulat yang sangat besar, basis 2^{32} atau 2^{64} (pengelompokan digit biner dengan 32 atau 64, panjang kata mesin) digunakan, seperti, misalnya, dalam GMP.

Dalam sistem biologis tertentu, sistem pengkodean unary digunakan. Angka-angka unary digunakan dalam sirkuit saraf yang bertanggung jawab untuk produksi kicau burung. Inti di otak burung penyanyi yang berperan dalam pembelajaran dan produksi nyanyian burung adalah HVC (pusat vokal tinggi). Perintah memberi sinyal untuk not yang berbeda dalam kicau burung berasal dari titik yang berbeda di HVC. Pengkodean ini berfungsi sebagai pengkodean ruang yang merupakan strategi yang efisien untuk sirkuit biologis karena kesederhanaan dan ketahanannya yang melekat.

Angka yang digunakan saat menulis bilangan dengan digit atau simbol dapat dibagi menjadi dua jenis yang dapat disebut angka aritmatika $(0, 1, 2, 3,$-$4, 5, 6, 7, 8, 9)$ dan angka geometris $(1, 10, 100, 1000, 10000, \cdots)$, masing-masing. Sistem nilai-tanda hanya menggunakan angka geometris dan sistem posisi hanya menggunakan angka aritmatika. Sistem nilai-tanda tidak perlu angka aritmatika karena dibuat dengan pengulangan (kecuali untuk sistem ionik), dan sistem posisi tidak memerlukan angka geometris karena dibuat berdasarkan posisi. Namun, bahasa yang diucapkan menggunakan angka aritmatika dan geometris.

Dalam bidang ilmu komputer tertentu, sistem posisi basis k yang dimodifikasi digunakan, yang disebut penomoran bijektif, dengan digit $1, 2, \cdots, k$-$(k \geq 1)$, dan nol diwakili oleh string kosong. Ini menetapkan suatu penghilangan antara himpunan semua digit-string seperti itu dan himpunan bilangan bulat non-negatif, menghindari non-keunikan yang disebabkan oleh nol di depan. Bilangan basis-k bijektif juga disebut notasi k-adic, tidak menjadi bingung dengan bilangan p-adic. Bijektif basis 1 sama dengan unary.

Sistem posisi secara detail

Dalam basis b posisi-posisi sistem b (dengan b bilangan asli lebih besar dari 1 dikenal sebagai *radix*), b simbol basis (atau digit) yang sesuai dengan b bilangan asli pertama termasuk nol digunakan. Untuk menghasilkan sisa angka, posisi simbol pada Gambar 1.1 digunakan. Simbol di posisi terakhir memiliki nilainya sendiri, dan saat bergerak ke kiri nilainya dikalikan dengan b.

Posisi	3	2	1	0	-1	-2	$\cdots$
Bobot	b^3	b^2	b^1	b^0	b^{-1}	b^{-2}	$\cdots$
Digit	a_3	a_2	a_1	a_0	c_1	c_2	$\cdots$
Contoh bobot desimal	1000	100	10	1	0.1	0.01	$\cdots$
Contoh digit desimal	4	3	2	7	0	0	$\cdots$

Gambar 1.1: Posisi Digit Desimal

Misalnya, dalam sistem desimal (basis 10), bilangan 4327 berarti

$$(4 \times 10^3) + (3 \times 10^2) + (2 \times 10^1) + (7 \times 10^0),$$

ingat bahwa $10^0 = 1$.

Secara umum, jika b adalah suatu basis, seseorang menulis suatu bilangan dalam sistem bilangan basis b dengan menyatakannya dalam bentuk

$$a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + a_{n-2} b^{n-2} + \cdots + a_0 b^0$$

dan menulis digit yang disebutkan

$$a_n a_{n-1} a_{n-2} \cdots a_0$$

dalam urutan menurun. Digit adalah bilangan asli inklusif antara 0 dan $b-1$.

Jika teks (seperti ini) membahas beberapa basis, dan jika ada ambiguitas, basis (itu sendiri diwakili dalam basis 10) ditambahkan dalam subskrip di sebelah kanan angka, seperti ini: basis angka. Kecuali ditentukan oleh konteks, angka tanpa subskrip dianggap desimal.

Dengan menggunakan koma untuk membagi digit menjadi dua kelompok, orang juga dapat menulis pecahan dalam sistem posisi. Sebagai contoh, basis 2 bilangan $10,11$ menunjukkan

$$1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} = 2,75.$$

Secara umum, bilangan dalam sistem basis b adalah dalam bentuk:

$$(a_n a_{n-1} a_{n-2} \cdots a_0, c_n a_1 c_2 c_3 \cdots)_b = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b^{n-k} + \sum_{i=1}^{\infty} c_i b^{-i}.$$

Bilangan b^k dan b^{-i} adalah bobot dari digit yang bersesuaian. Posisi k adalah logaritma dari bobot w yang sesuai, yaitu. Posisi yang digunakan tertinggi dekat dengan urutan besarnya bilangan.

Banyaknya tanda penghitungan yang diperlukan dalam sistem angka unary untuk menggambarkan bobot w. Dalam posisi itu sistem, jumlah digit yang diperlukan untuk menggambarkan itu hanya $k+1 = \log_b w + 1$, untuk $k \geq 0$. Misalnya, untuk menggambarkan bobot 1000 maka diperlukan empat digit karena. Jumlah digit yang diperlukan untuk menggambarkan posisi adalah (di posisi $1, 10, 100, \cdots$ hanya untuk sederhan dalam contoh desimal).

Suatu bilangan memiliki penghentian atau pengulangan ekspansi jika dan hanya jika ia rasional; ini tidak tergantung pada basis. Suatu bilangan yang berakhir dalam satu basis dapat diulang di basis lain (dengan demikian $0,3_{10} = 0,0100110011001\cdots_2$). Bilangan irasional tetap tidak periodik (dengan angka takberulang yang takberhingga) di semua basis bilangan bulat. Jadi, misalnya dalam basis 2, $\pi = 3,1415926\cdots_{10}$ dapat ditulis sebagai tidak-periodik $11,001001000011111\cdots_2$.

Beri garis atas pada n, yaitu $\overline{n}$, di atas digit yang umum adalah konvensi yang digunakan untuk merepresentasikan ekspansi rasional yang berulang. Jadi:

$$\frac{14}{11} = 1,272727272727\cdots = 1,\overline{27} \text{ dan } 321,3217878787878\cdots = 321.321\overline{78}.$$

Bila $b = p$ adalah suatu bilangan prima, dalam hal ini bisa didefisikan angka basis-p yang mempunyai ekspansi kekiri tampa berhenti; yang demikian ini dinamakan bilangan p-adic.

Bilangan bulat panjang variabel yang digeneralisasi

Lebih umum menggunakan notasi radix campuran (di sini ditulis *little-endian*) seperti $a_0a_1a_2$ untuk, $a_0 + a_1b_1 + a_2b_1b_2$, dll.

Ini digunakan dalam punycode, salah satu aspek di antaranya adalah representasi dari urutan bilangan bulat non-negatif dari ukuran acak dalam bentuk suatu barisan tanpa pembatas, "digit" dari koleksi 36: a-z dan 0-9 , masing-masing mewakili 0–25 dan 26–35. Digit yang lebih rendah dari nilai ambang batas menandakan bahwa itu adalah digit yang paling signifikan, karenanya akhir dari abilangan tersebut. Nilai ambang tergantung pada posisi dalam bilangan. Misalnya, jika nilai ambang untuk digit pertama adalah b (yaitu 1) maka a (yaitu 0) menandai akhir angka (hanya memiliki satu digit), jadi dalam jumlah lebih dari satu digit, kisaran hanya b–9 (1-35), oleh karena itu bobot b_1 adalah 35 bukan 36. Misalkan nilai ambang untuk digit kedua dan ketiga adalah c (2), maka digit ketiga memiliki bobot $34 \times 35 = 1190$ sehingga didapat berisan berikut: $a(0), ba(1), ca(2), \cdots, 9a(35)$,-$bb(36), cb(37), \cdots, 9b(70), bca(71), \cdots, 99a(1260), bcb(1261), dst$.

Tidak seperti sistem angka berbasis reguler, ada angka seperti 9b di mana 9 dan b masing-masing mewakili 35; namun representasi ini unik karena ac dan aca tidak diizinkan a adalah mengakhiri bilangan.

Fleksibilitas dalam memilih nilai ambang batas memungkinkan pengoptimalan tergantung pada frekuensi kemunculan bilangan berbagai ukuran.

Kasus dengan semua nilai ambang sama dengan 1 sesuai dengan bilangan bijektif, di mana nol sesuai dengan pemisah bilangan dengan digit yang bukan nol.

Bilangan harus dibedakan dari **angka**, simbol yang digunakan untuk mewakili bilangan. Orang Mesir menemukan yang pertama sistem angka ciphered, dan orang-orang Yunani diikuti dengan memetakan bilangan-bilangan penghitungan mereka ke huruf Ionia dan Doric. Angka Romawi, sistem yang menggunakan kombinasi huruf dari alfabet Romawi, tetap dominan di Eropa hingga penyebaran sistem angka Hindu-Arab yang unggul sekitar akhir abad ke-14, dan sistem angka Hindu-Arab tetap yang paling umum. sistem untuk mewakili bilangan di dunia saat ini. Kunci keefektifan sistem adalah simbol untuk nol, yang dikembangkan oleh ahli matematika India kuno sekitar 500 Masehi.

Penggunaan angka pertama kali

Tulang dan artefak lain telah ditemukan dengan tanda-tanda terpotong di dalamnya yang dipercaya banyak orang sebagai tanda penghitungan. Tanda penghitungan ini mungkin telah digunakan untuk menghitung waktu yang telah berlalu, seperti jumlah hari, siklus bulan atau menyimpan catatan jumlah, seperti hewan.

Sistem penghitungan tidak memiliki konsep nilai tempat (seperti dalam notasi desimal modern), yang membatasi perwakilannya untuk bilangan yang besar. Meskipun demikian sistem penghitungan dianggap sebagai jenis pertama dari sistem angka abstrak.

Sistem yang diketahui pertama dengan nilai tempat adalah sistem basis 60 Mesopotamia (sekitar 3400 SM) dan sistem basis 10 yang paling awal diketahui berasal dari 3100 SM di Mesir.

Nol

Penggunaan pertama yang diketahui berdasarkan tanggal nol pada 628 M, dan muncul dalam Brāhmasphutasiddhānta, karya utama ahli matematika India, Brahmagupta. Dia memperlakukan 0 sebagai angka dan membahas operasi yang melibatkannya, termasuk pembagian. Pada saat ini (abad ke-7) konsep tersebut jelas mencapai Kamboja sebagai angka Khmer, dan dokumentasi menunjukkan gagasan yang kemudian menyebar ke China dan dunia Islam.

Buku Brāhmasphutasiddhānta oleh Brahmagupta adalah buku pertama yang menyebutkan nol sebagai bilangan, maka Brahmagupta biasanya dianggap yang pertama yang merumuskan konsep nol. Dia memberi aturan menggunakan nol dengan bilangan negatif dan positif, seperti 'Nol plus bilangan positif adalah bilangan positif, dan bilangan negatif plus nol adalah nilangan negatif'. Brāhmasphutasiddhān adalah teks paling awal yang dikenal untuk memperlakukan nol sebagai bilangan dalam dirinya sendiri, bukan hanya sebagai digit pengganti dalam mewakili bilangan lain seperti yang dilakukan oleh orang Babilonia atau sebagai simbol karena kurangnya kuantitas seperti yang dilakukan oleh Ptolemy dan orang Romawi.

Penggunaan 0 sebagai suatu bilangan harus dibedakan dari penggunaannya sebagai angka pengganti di sistem nilai tempat. Banyak teks kuno menggunakan 0. Teks Babel dan Mesir menggunakannya. Orang Mesir menggunakan kata *nfr* untuk menunjukkan saldo nol dalam akuntansi entri ganda. Teks India menggunakan kata Sansekerta *Shunye* atau *shunya* untuk merujuk pada konsep *void*. Dalam teks matematika, kata ini sering merujuk pada angka *nol*. Dalam nada yang sama, Pānini (abab ke-5 SM) menggunakan operator *null* (nol) di *Ashtadhyayi*, contoh awal tata bahasa aljabar untuk bahasa Sanskerta (juga lihat Pingala).

Ada kegunaan lain dari nol sebelum Brahmagupta, meskipun dokumentasinya tidak lengkap seperti di Brāhmasphutasiddhānta.

Catatan menunjukkan bahwa orang Yunani Kuno tampaknya tidak yakin tentang status 0 sebagai suatu bilangan: mereka bertanya pada diri sendiri "bagaimana mungkin 'tidak ada' menjadi sesuatu?" mengarah ke filosofis yang menarik dan, pada periode Abad Pertengahan, argumen keagamaan tentang sifat dan keberadaan 0 dan kosong. Paradoks Zeno dari Elea sebagian bergantung pada penafsiran tidak pasti dari 0. (Orang-orang Yunani kuno bahkan mempertanyakan apakah saya adalah suatu bilangan.)

Orang-orang Olmec akhir dari Meksiko selatan-tengah mulai menggunakan simbol untuk nol, mesin terbang shell, di Dunia Baru, mungkin pada abad ke-4 SM tetapi tentu saja pada 40 SM, yang menjadi bagian integral dari angka Maya dan kalender Maya . Aritmatika Maya menggunakan basis 4 dan basis 5 yang ditulis sebagai basis 20. Sanchez pada tahun 1961 melaporkan base 4, base 5 "jari" sempoa.

Pada 130 M, Ptolemeus, dipengaruhi oleh Hipparchus dan Babilonia, menggunakan simbol untuk 0 (sebuah lingkaran kecil dengan *overbar* panjang) dalam sistem angka seksagesimal atau menggunakan angka Yunani alfabet. Karena itu digunakan sendiri, bukan hanya sebagai penampung, nol Hellenistic ini adalah penggunaan nol yang didokumentasikan pertama kali di Dunia Lama. Dalam naskah-naskah Bizantium kemudian dari *Syntaxis Mathematica* (*Almagest*), nol Helenistik telah berubah menjadi huruf Yunani Omicron (jika tidak berarti 70).

Nol benar lain digunakan dalam tabel bersama angka Romawi sebagai 525 (penggunaan pertama diketahui oleh Dionysius Exiguus), tetapi sebagai kata, *nulla* tidak berarti apa-apa, bukan sebagai simbol. Ketika pembagian menghasilkan 0 sebagai sisa, nihil, juga tidak berarti apa-apa, digunakan. Nol abad pertengahan ini digunakan oleh semua ahli komputer abad pertengahan yang akan datang (kalkulator Paskah). Penggunaan awal inisial mereka, N, digunakan dalam tabel angka Romawi oleh Bede atau seorang kolega sekitar 725, simbol nol sejati.

Bilangan Negatif

Konsep abstrak bilangan negatif diakui pada awal 100-50 SM di Cina. Sembilan Bab tentang Seni Matematika berisi metode untuk menemukan luas gambar; batang merah digunakan untuk menunjukkan koefisien positif, hitam untuk negatif. Referensi pertama dalam karya Barat adalah pada abad ke-3 M di Yunani. Diophantus merujuk pada persamaan yang setara dengan $4x + 20 = 0$ (solusinya negatif) di Arithmetika, mengatakan bahwa persamaan tersebut memberikan hasil yang tidak masuk akal.

Selama 600-an, bilangan negatif digunakan di India untuk mewakili utang. Referensi sebelumnya Diophantus dibahas lebih lanjut secara eksplisit oleh ahli matematika India, Brahmagupta, dalam Brāhmasphutasiddhānta 628, yang menggunakan bilangan negatif untuk menghasilkan bentuk umum rumus kuadratik yang tetap digunakan sampai sekarang. Namun, pada abad ke-12 di India, Bhaskara memberikan akar negatif untuk persamaan kuadrat tetapi mengatakan nilai negatif "dalam hal ini tidak boleh diambil, karena tidak memadai; orang tidak menyetujui akar negatif."

Ahli matematika Eropa, sebagian besar, menolak konsep bilangan negatif sampai abad ke-17, meskipun Fibonacci memungkinkan solusi negatif dalam masalah keuangan di mana mereka dapat diartikan sebagai hutang (bab 13 dari Liber Abaci, 1202) dan kemudian sebagai kerugian (di Flos). Pada saat yang sama, orang-orang Cina menunjukkan bilangan-bilangan negatif dengan menggambar garis diagonal melalui digit paling tidak nol dari angka bilangan positif yang sesuai. Penggunaan pertama bilangan negatif di Eropa pekerjaannya dilakukan oleh Nicolas Chuquet selama abad ke-15. Dia menggunakannya sebagai eksponen, tetapi menyebutnya sebagai "bilangan *absurd*".

Baru-baru ini pada abad ke-18, merupakan praktik umum untuk mengabaikan hasil negatif yang dihasilkan oleh persamaan dengan asumsi bahwa mereka tidak ada artinya, seperti yang dilakukan oleh René Descartes dengan solusi negatif dalam sistem koordinat Kartesius.

Bilangan Rasional

Sangat mungkin bahwa konsep bilangan pecahan berasal dari zaman prasejarah. Bangsa Mesir Kuno menggunakan notasi pechan Mesir mereka untuk bilangan rasional dalam teks matematika seperti *Rhind Mathematical Papyrus* dan *Kahun Papyrus*. Matematikawan Yunani dan India klasik membuat studi tentang teori bilangan rasional, sebagai bagian dari studi umum teori bilangan. Yang paling terkenal dari ini adalah Elemen Euclid, yang berasal dari sekitar 300 SM. Dari teks-teks India, yang paling relevan adalah *Sutra Sthananga*, yang juga mencakup teori bilangan sebagai bagian dari studi umum matematika.

Konsep pecahan desimal terkait erat dengan notasi nilai tempat desimal; keduanya tampaknya telah berkembang bersama-sama. Sebagai contoh, adalah umum untuk *sutra Jain* matematika untuk memasukkan perhitungan perkiraan pecahan desimal ke π atau $\sqrt{2}$. Demikian pula, teks-teks matematika Babel selalu menggunakan pecahan sexagesimal (basis 60) dengan frekuensi besar.

Bilangan Irasional

Penggunaan bilangan irasional yang paling awal diketahui adalah dalam Sutra Sulba India yang terdiri antara 800 dan 500 SM. Bukti keberadaan pertama dari bilangan irasional biasanya dikaitkan dengan Pythagoras, lebih khusus untuk Pythagoras Hippasus dari Metapontum, yang menghasilkan bukti (kemungkinan besar geometris) dari irasionalitas akar kuadrat dari 2. Cerita berlanjut yang ditemukan Hippasus bilangan irasional ketika mencoba mewakili akar kuadrat dari 2 sebagai pecahan. Namun, Pythagoras percaya pada keabsolutan bilangan, dan tidak bisa menerima keberadaan bilangan irasional. Dia tidak dapat menyangkal keberadaan bilangan irasional melalui logika, tetapi dia tidak dapat menerima bilangan-bilangan yang tidak rasional, dan karena itu, diduga dan sering dilaporkan, untuk menghalangi penyebaran berita yang membingungkan ini, dia menjatuhkan hukuman mati kepada Hippasus dengan menenggelamkannya.

Abad ke-16 membawa penerimaan akhir Eropa dari bilangan bulat dan pecahan negatif. Pada abad ke-17, matematikawan umumnya menggunakan pecahan desimal dengan notasi modern. Namun, baru pada abad ke-19 matematikawan memisahkan irasional menjadi bagian aljabar dan transendental, dan sekali lagi melakukan studi ilmiah irasional. Itu tetap hampir tidak aktif sejak Euclid. Pada tahun 1872, publikasi teori Karl Weierstrass (oleh muridnya E. Kossak), Eduard Heine (Crelle, 74), Georg Cantor (Annalen, 5), dan tentang apa yang dibawah Richard Dedekind. Pada tahun 1869, Charles Méray telah mengambil titik keberangkatan yang sama dengan Heine, tetapi teorinya secara umum mengacu pada tahun 1872. Metode Weierstrass sepenuhnya ditetapkan oleh Salvatore Pincherle (1880), dan Dedekind telah menerima keunggulan tambahan melalui karya penulis selanjutnya (1888) dan disahkan oleh Paul Tannery (1894). Weierstrass, Cantor, dan Heine mendasarkan teori mereka pada deret tak hingga, sementara Dedekind menemukannya pada gagasan pemotongan (Schnitt) dalam sistem bilangan real, memisahkan semua bilangan rasional menjadi dua kelompok yang memiliki sifat karakteristik tertentu. Subjek tsb. telah menerima kontribusi selanjutnya di tangan Weierstrass, Kronecker (Crelle, 101), dan Méray.

Pencarian untuk akar kuintik dan persamaan derajat yang lebih tinggi merupakan perkembangan penting, teorema Abel-Ruffini (Ruffini 1799, Abel 1824) menunjukkan bahwa mereka tidak dapat diselesaikan oleh radikal (formula yang hanya melibatkan operasi dan akar aritmetika). Oleh karena itu perlu untuk mempertimbangkan rangkaian angka aljabar yang lebih luas (semua solusi untuk persamaan polinomial). Galois (1832) mengaitkan persamaan polinomial dengan teori grup sehingga memunculkan bidang teori Galois.

Pecahan kontinu, terkait erat dengan bilangan irasional (dan karena Cataldi, 1613), mendapat perhatian di tangan Euler, dan pada pembukaan abad ke-19 menjadi terkenal melalui tulisan Joseph Louis Lagrange. Kontribusi penting lainnya telah dibuat oleh Druckenmüller (1837), Kunze (1857), Lemke (1870), dan Günther (1872). Ramus (1855) pertama kali berhasil menghubungkan subjek dengan determinan, dengan kontribusi Heine, Möbius, dan Günther, dalam teori *Kettenbruchdeterminanten*.

Bilangan Transendental dan Real

Keberadaan bilangan transendental pertama kali diberikan oleh Liouville (1844, 1851). Hermite membuktikan pada 1873 bahwa e adalah transendental dan Lindemann membuktikan pada 1882 bahwa π adalah transendental. Akhirnya, Cantor menunjukkan bahwa himpunan semua bilangan real adalah tak-terhingga tak-terhitung (uncountable) tetapi himpunan semua bilangan aljabar adalah tak terhingga terhitung (countable), sehingga ada jumlah tak-terhingga tak-terhitung bilangan transendental.

Tak-terhingga dan sangat kecil sekali (infinitesimal)

Konsepsi matematis tak-terhingga yang diketahui paling awal muncul dalam *Yajur Veda*, sebuah naskah kuno India, yang intinya menyatakan, "Jika Anda menghapus bagian dari tak terhingga atau menambahkan bagian hingga tak terhingga, yang masih tersisa adalah tak hingga." Ketakberhinggan adalah topik populer dari studi filosofis di antara matematikawan Jain c. 400 SM. Mereka membedakan antara lima jenis ketidakberhinggaan: tak-berhingga dalam satu dan dua arah, tak takberhingga di daerah (luas), takberhingga di mana-mana, dan takberhingga selamanya.

Aristoteles mendefinisikan gagasan Barat tradisional tentang ketidakberhinggaan matematis. Dia membedakan antara takberhingga aktual dan takberhingga potensial, konsensus umum adalah bahwa hanya yang terakhir yang memiliki nilai sebenarnya. Galileo Galilei Dua Ilmu Pengetahuan Baru membahas gagasan korespondensi satu-satu di antara perangkat tak terbatas. Tetapi kemajuan besar berikutnya dalam teori itu dibuat oleh Georg Cantor; pada tahun 1895 ia menerbitkan sebuah buku tentang teori himpunan barunya, memperkenalkan, antara lain, bilangan-bilangan *transfinite* dan merumuskan hipotesis kontinum.

Pada 1960-an, Abraham Robinson menunjukkan bagaimana bilangan yang sangat besar dan sangat kecil dapat didefinisikan dengan ketat dan digunakan untuk mengembangkan bidang analisis yang tidak standar. Sistem bilangan *hiperreal* mewakili metode yang ketat dalam menangani ide-ide tentang bilangan sangat besar dan sangat kecil yang telah digunakan dengan santai oleh ahli matematika, ilmuwan, dan insinyur sejak penemuan kalkulus tentang "sangat kecil" oleh Newton dan Leibniz.

Versi geometri tak-terhingga modern diberikan oleh geometri projektif, yang memperkenalkan "titik ideal di tak-terhingga", satu untuk setiap arah spasial. Setiap keluarga garis paralel dalam arah yang diberikan dipostulatkan untuk bertemu ke titik ideal yang sesuai. Ini terkait erat dengan ide titik hilang (*vanishing point*) dalam menggambar perspektif.

Bilangan Kompleks

Referensi sekilas paling awal ke akar kuadrat dari bilangan negatif terjadi dalam karya ahli matematika dan penemu Heron dari Alexandria pada abad ke-1 M, ketika ia menganggap volume frustum piramida yang mustahil. Mereka menjadi lebih menonjol ketika pada abad ke-16 formula tertutup untuk akar polinomial derajad tiga dan empat ditemukan oleh matematikawan Italia seperti Niccolana Fontana Tartaglia dan Gerolamo Cardano. Segera disadari bahwa rumus-rumus ini, bahkan jika seseorang hanya tertarik pada solusi nyata, kadang-kadang membutuhkan manipulasi akar kuadrat dari bilangan negatif.

Ini dua kali lipat meresahkan karena mereka bahkan tidak menganggap bilangan negatif berada di tanah yang kuat pada saat itu. Ketika René Descartes menciptakan istilah "imajiner" untuk kuantitas ini pada tahun 1637, ia menjadikannya sebagai penghinaan. (Lihat bilangan imajiner untuk diskusi tentang "realitas" bilangan kompleks.) Sumber kebingungan selanjutnya adalah persamaan

$$\left(\sqrt{-1}\right)^2 = \sqrt{-1}\,\sqrt{-1} = -1$$

tampak sangat tidak konsisten dengan persamaan berikut

$$\sqrt{a}\,\sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

yang berlaku untuk bilangan real positif a dan b, dan juga digunakan dalam perhitungan bilangan kompleks dengan salah satu dari a, b positif dan negatif lainnya. Penggunaan persamaan ini salah, dan persamaan terkait berikut

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{1}{a}}$$

dalam kasus ketika kedua a dan b negatif bahkan Euler bingung. Kesulitan ini akhirnya membawanya ke konvensi menggunakan simbol khusus i di tempat untuk menjaga terhadap kesalahan ini.

Abad ke-18 menyaksikan karya Abraham de Moivre dan Leonhard Euler. Formula De Moivre (1730) menyatakan:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

sedangkan formula analisis kompleks Euler (1748) memberi kami:

$$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}.$$

Keberadaan bilangan kompleks tidak sepenuhnya diterima sampai Caspar Wessel menggambarkan penafsiran geometris pada tahun 1799. Carl Friedrich Gauss menemukan kembali dan mempopulerkannya beberapa tahun kemudian, dan sebagai hasilnya teori bilangan kompleks menerima ekspansi penting. Akan tetapi, gagasan representasi grafik dari bilangan kompleks telah muncul, pada awal 1685, dalam *De Algebra tractatus* oleh Wallis.

Juga pada tahun 1799, Gauss memberikan bukti pertama yang diterima secara umum tentang teorema dasar aljabar, menunjukkan bahwa setiap polinomial atas bilangan kompleks memiliki solusi lengkap di bidang itu. Penerimaan umum teori bilangan kompleks adalah karena kerja keras Augustin Louis Cauchy dan Niels Henrik Abel, dan terutama yang terakhir, yang merupakan orang pertama yang berani menggunakan bilangan kompleks dengan keberhasilan yang sudah diketahui.

Gauss mempelajari bilangan kompleks dari bentuk $a + bi$, di mana a dan b adalah bilangan bulat, atau rasional (dan i adalah salah satu dari dua akar $x^2 + 1 = 0$). Muridnya, Gotthold Eisenstein, mempelajari tipe $a + b\omega$, di mana ω adalah akar kompleks $x^3 - 1 = 0$. Kelas sejenis lainnya (disebut lapangan cyclotomic) dari bilangan kompleks berasal dari akar-akar polinomial $x^k - 1 = 0$ untuk nilai yang lebih tinggi dari k. Generalisasi ini sebagian besar disebabkan oleh Ernst Kummer, yang juga menemukan bilangan ideal, yang dinyatakan sebagai entitas geometris oleh Felix Klein pada tahun 1893.

Pada tahun 1850 Victor Alexandre Puiseux mengambil langkah kunci untuk membedakan antara kutub dan titik cabang, dan memperkenalkan konsep titik-titik singular yang esensial. Ini akhirnya mengarah pada konsep bidang kompleks yang diperluas.

Bilangan Prima
Bilangan prima telah dipelajari sepanjang sejarah yang tercatat. Euclid mencurahkan satu buku Elemen untuk teori bilangan prima; di dalamnya ia membuktikan takberhingga banyak bilangan prima dan teorema dasar aritmatika, dan menyajikan algoritma Euclidean untuk menemukan pembagi persekutuan terbesar dari dua bilangan bulat.

Pada 240 SM, Eratosthenes menggunakan Saringan Eratosthenes untuk dengan cepat mengisolasi bilangan prima. Tetapi sebagian besar perkembangan lebih lanjut dari teori bilangan prima di Eropa berasal dari Renaissance dan era berikutnya.

Pada 1796, Adrien-Marie Legendre menduga teorema bilangan prima, menggambarkan distribusi asimtotik bilangan prima. Hasil lain mengenai distribusi bilangan prima meliputi bukti Euler bahwa jumlah timbal balik dari bilangan prima berbeda, dan dugaan Goldbach, yang mengklaim bahwa bilangan genap yang cukup besar adalah jumlah dari dua bilangan prima. Namun dugaan lain yang berkaitan dengan distribusi bilangan prima adalah hipotesis Riemann, dirumuskan oleh Bernhard Riemann pada tahun 1859. Teorema bilangan prima akhirnya dibuktikan oleh Jacques Hadamard dan Charles de la Vallée Poussin pada tahun 1896. Dugaan Goldbach dan Riemann tetap tidak terbukti dan tidak terbukti.

1.11.2 Klasifikasi utama

Bilangan dapat diklasifikasikan ke dalam himpunan, yang disebut **sistem bilangan**, seperti bilangan asli dan bilangan real. Kategori utama bilangan adalah sebagai berikut:

- Himpunan bilangan asli/natural dinotasikan oleh $\mathbb{N}$ ada dua yaitu
$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$
dan
$$\mathbb{N}_1 = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$
- Himpunan bilangan bulat
$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3. \ldots\}.$$
- Himpunan bilangan rasional
$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}.$$

- Himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ adalah himpunan barisan bilangan rasional yang konvergen.
- Himpunan bilangan kompleks
$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}\}.$$

Secara umum tidak ada masalah dalam mengidentifikasi setiap sistem bilangan dengan subset yang tepat dari yang berikutnya (dengan penyalahgunaan notasi), karena masing-masing sistem bilangan ini secara kanonik isomorfik ke subset yang tepat dari yang berikutnya. Hirarki yang dihasilkan memungkinkan, misalnya, untuk berbicara, secara formal dengan benar, tentang bilangan real yang merupakan bilangan rasional, dan diekspresikan secara simbolis dengan menulis

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Bilangan Natural

Bilangan yang paling dikenal adalah bilangan asli/natural (kadang-kadang disebut bilangan bulat (whole numbers) atau bilangan hitung (counting numbers)): $1, 2, 3$, dan seterusnya. Secara tradisional, urutan bilangan asli dimulai dengan 1 (0 bahkan tidak dianggap sebagai bilangan untuk Yunani Kuno.) Namun, pada abad ke-19, teori himpunan dan matematikawan lainnya mulai mencakup 0 (kardinalitas himpunan kosong, yaitu 0 elemen, dengan demikian 0 adalah bilangan kardinal terkecil) dalam himpunan bilangan asli. Saat ini, matematikawan yang berbeda menggunakan istilah untuk menggambarkan kedua himpunan, termasuk 0 atau tidak. Simbol matematika untuk himpunan semua bilangan asli adalah $\mathbb{N}$, juga ditulis, adakalanya $\mathbb{N}_0$ atau $\mathbb{N}_1$ dan ketika perlu untuk menunjukkan apakah himpunan harus dimulai dengan 0 atau 1.

Dalam sistem angka basis 10, yang hampir universal digunakan saat ini untuk operasi matematika, simbol untuk bilangan asli ditulis menggunakan sepuluh digit:$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$, dan 9. Radix atau basis adalah bilangan digit numerik tunggal, termasuk nol, yang digunakan suatu sistem angka untuk mewakili bilangan (untuk sistem desimal, radix adalah 10). Dalam sistem basis 10 ini, digit paling kanan dari bilangan asli memiliki nilai tempat 1, dan setiap digit lainnya memiliki nilai tempat sepuluh kali lipat dari nilai tempat digit di sebelah kanannya.

Dalam teori himpunan, yang mampu bertindak sebagai landasan aksiomatik untuk matematika modern, bilangan asli dapat diwakili oleh kelas-kelas himpunan yang setara. Misalnya, bilangan 3 dapat direpresentasikan sebagai kelas dari semua himpunan yang memiliki tepat tiga elemen. Atau, dalam Aritmatika Peano, bilangan 3 direpresentasikan sebagai $sss0$, di mana s adalah fungsi "setelahnya" (yaitu, 3 adalah setelah ketiga dari 0). Banyak representasi berbeda dimungkinkan; semua yang diperlukan untuk secara resmi mewakili 3 adalah dengan menuliskan simbol atau pola simbol tertentu tiga kali.

Bilangan bulat

Negatif dari bilangan bulat positif didefinisikan sebagai bilangan yang menghasilkan 0 ketika ditambahkan ke bilangan bulat positif yang sesuai. Bilangan negatif biasanya ditulis dengan tanda negatif (tanda minus). Sebagai contoh, negatif dari 7 ditulis -7, dan $7 + (-7) = 0$. Ketika himpunan bilangan negatif digabungkan dengan himpunan bilangan asli (termasuk 0), hasilnya didefinisikan sebagai himpunan bilangan bulat, ditulis $\mathbb{Z}$. Di sini huruf $\mathbb{Z}$ berasal dari bahasa Jerman *Zahl*, yang berarti 'bilangan'. Himpunan bilangan bulat membentuk ring dengan operasi penambahan dan perkalian.

Bilangan asli membentuk subset dari bilangan bulat. Karena tidak ada standar umum untuk dimasukkan atau tidaknya nol dalam bilangan asli, bilangan asli tanpa nol biasanya disebut sebagai bilangan **bulat positif**, dan bilangan asli dengan nol disebut sebagai bilangan **bulat tak-negatif**.

Bilangan Rasional

Bilangan rasional adalah bilangan yang dapat dinyatakan sebagai pecahan dengan pembilang bilangan bulat dan pembagi bilangan bulat positif. Penyebut negatif diperbolehkan, tetapi biasanya dihindari, karena setiap bilangan rasional sama dengan sebagian kecil dengan penyebut positif. Pecahan ditulis sebagai dua bilangan bulat, pembilang dan penyebutnya, dengan bilah pemisah di antara mereka. Pecahan $\frac{m}{n}$ mewakili bagian m dari suatu bilangan bulat yang dibagi menjadi n bagian yang sama. Dua pecahan berbeda mungkin berhubungan dengan bilangan rasional yang sama; misalnya $\frac{1}{2}$ dan $\frac{2}{4}$ adalah sama, yaitu:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}.$$

Secara umum,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{bila dan hanya bila} \quad a \times d = c \times b.$$

Jika nilai mutlak m lebih besar dari n (seharusnya positif), maka nilai mutlak pecahan lebih besar dari 1. Pecahan dapat lebih besar dari, kurang dari, atau sama dengan 1 dan juga bisa positif, negatif, atau 0. Himpunan semua bilangan rasional mencakup bilangan bulat karena setiap bilangan bulat dapat ditulis sebagai pecahan dengan penyebut 1. Misalnya -7 dapat ditulis

$\frac{-7}{1}$. Simbol untuk himpunan bilangan rasional adalah $\mathbf{Q}$ (*quotient*), juga ditulis sebagai $\mathbb{Q}$.

Bilangan Real

Simbol untuk himpunan bilangan real adalah $\mathbf{R}$, juga ditulis $\mathbb{R}$. Mereka memcakup semua bilangan pengukuran. Setiap bilangan real sesuai dengan titik pada garis bilangan. Paragraf berikut akan berfokus terutama pada bilangan real positif. Perlakuan bilangan real negatif adalah sesuai dengan aturan umum aritmatika dan denotasinya hanya awalan angka positif terkait dengan tanda minus, misalnya $-123,456$.

Sebagian besar bilangan real hanya dapat *didekati* dengan angka desimal, di mana *koma* desimal ditempatkan di sebelah kanan digit dengan nilai tempat 1. Setiap digit di sebelah kanan *koma* desimal memiliki nilai tempat sepersepuluh dari nilai tempat digit di sebelah kirinya. Sebagai contoh, $123,456$ mewakili $\frac{123456}{1000}$, atau, dengan kata lain, seratus, dua puluhan, tiga, empat persepuluh, lima per seratus, dan enam per seribu. Bilangan real dapat diekspresikan dengan sebanyak berhingga digit desimal hanya jika bilangan tsb. rasional dan pecahannyanya memiliki bagian penyebut yang faktor prima-nya adalah 2 atau 5 atau keduanya, karena ini adalah faktor prima dari 10, basis sistem desimal. Jadi, misalnya, setengah adalah $0,5$ dan seperlima adalah $0,2$ serta sepersepuluh adalah $0,1$; dan seperlimapuluh adalah $0,02$. Penyajian bilangan real lainnya sebagai desimal akan membutuhkan suatu barisan digit yang takberhingga di sebelah kanan koma desimal. Jika barisan digit yang tak terbatas ini mengikuti suatu pola, itu dapat ditulis dengan *elipsis* atau notasi lain yang menunjukkan pola berulang. Desimal seperti itu disebut desimal berulang. Jadi $\frac{1}{3}$ dapat ditulis sebagai $0,333\cdots$, dengan *elipsis* untuk menunjukkan bahwa pola berlanjut. Selamanya berulang 3 juga ditulis sebagai $0,\overline{3}$.

Ternyata desimal berulang ini (termasuk pengulangan nol) menunjukkan dengan tepat bilangan rasional, yaitu, semua bilangan rasional juga bilangan real, tetapi bukan kasus bahwa setiap bilangan real adalah rasional. Bilangan real yang tidak rasional disebut irasional. Bilangan real irasional yang terkenal adalah bilangan π, rasio keliling lingkaran apa pun dengan diameternya. Ketika pi ditulis kadang-kdang sebagai

$$\pi = 3,14159265358979\cdots,$$

elipsis tidak berarti bahwa desimal berulang (desimal pi tidak berulang), melainkan bahwa tidak ada akhir bagi desimal tsb. Sudah terbukti bahwa π tidak rasional. Bilangan lain yang terkenal, terbukti sebagai bilangan real tidak rasional, adalah

$$\sqrt{2} = 1,41424356237\cdots,$$

akar kuadrat dari 2, yaitu, bilangan real positif tunggal yang kuadratnya adalah 2. Kedua bilangan π dan $\sqrt{2}$ ini telah didekati (oleh komputasi komputer) hingga triliunan (1 triliun = 10^{12} = 1.000.000.000.000) digit.

Tidak hanya contoh-contoh yang menonjol ini, tetapi hampir semua bilangan real tidak rasional dan karena itu tidak memiliki pola berulang dan karenanya tidak ada angka desimal yang sesuai. Mereka hanya dapat didekati dengan angka desimal, yang menunjukkan bilangan real bulat atau terpotong. Setiap bilangan bulat atau terpotong tentu merupakan bilangan rasional, yang hanya banyaknya terhitung (countable). Semua pengukuran, menurut sifatnya, merupakan perkiraan, dan selalu memiliki margin kesalahan. Jadi $123,456$ dianggap perkiraan dari sebarang bilangan real yang lebih besar atau sama dengan $\frac{1234555}{10000}$ dan benar-benar kurang dari $\frac{1234565}{10000}$ (dibulatkan menjadi 3 desimal), atau bilangan real mana pun yang lebih besar atau sama dengan $\frac{123456}{1000}$ dan benar-benar kurang dari $\frac{123457}{1000}$ (pemotongan setelah 3. desimal). Digit yang menunjukkan akurasi yang lebih besar daripada pengukuran itu sendiri, harus dihapus. Digit yang tersisa kemudian disebut digit signifikan. Misalnya, pengukuran dengan penggaris jarang dapat dilakukan tanpa margin kesalahan setidaknya $0,001$ meter. Jika sisi-sisi persegi panjang diukur sebagai $1,23$ meter dan $4,56$ meter, maka perkalian memberikan luas untuk persegi panjang antara $5,614591$ meter persegi dan $5,603011$ meter persegi. Karena bahkan bukan digit kedua setelah tempat desimal dipertahankan, digit berikut ini tidak signifikan. Karena itu, hasilnya biasanya dibulatkan menjadi $5,61$.

Sama seperti pecahan yang sama dapat ditulis dalam lebih dari satu cara, bilangan real yang sama dapat memiliki lebih dari satu representasi desimal. Misalnya, $0,999\cdots; 1,0; 1,00; 1,000; \ldots$, semua mewakili bilangan asli 1. Suatu bilangan real yang diberikan hanya memiliki representasi desimal berikut: pendekatan ke beberapa tempat desimal yang berhingga, pendekatan di mana pola ditetapkan yang berlanjut untuk jumlah desimal yang tidak terbatas atau suatu nilai yang tepat dengan hanya banyak desimal berhingga. Dalam kasus terakhir ini, digit bukan nol terakhir dapat diganti dengan digit yang lebih kecil diikuti oleh angka 9 yang tidak berhingga banyaknya, atau digit bukan nol terakhir dapat diikuti oleh nol yang banyaknya takberhingga. Jadi bilangan real yang tepat 3.74 juga dapat ditulis $3.7399999999\cdots$ dan $3.74000000000\cdots$. Demikian pula, angka desimal dengan banyaknya 0 takterbatas dapat ditulis ulang dengan menghilangkan angka 0 di sebelah kanan tempat desimal, dan angka desimal dengan banyaknya 9 yang takberhingga dapat ditulis ulang dengan menambah satu pada digit 9 paling kanan, mengubah semua angka 9 ke kanan digit itu menjadi 0. Akhirnya, suatu barisan takberhingga dari 0 di sebelah kanan tempat desimal dapat dihilangkan. Misalnya, $6,849999999999\cdots = 6.85$ dan $6,850000000000\cdots = 6,85$. Akhirnya, jika semua digit dalam angka adalah 0, maka merupakan bilangan 0, dan jika semua digit dalam suatu angka adalah string tanpa akhir dari angka 9, anda dapat menghapus angka sembilan di sebelah kanan tempat desimal, dan menambahkan satu ke string 9 di sebelah kiri tempat desimal. Misalnya, $99,999\cdots = 100$.

Bilangan real juga memiliki properti penting namun sangat teknis yang disebut properti batas atas.

Dapat ditunjukkan bahwa setiap lapangan terurut yang lengkap, isomorfik dengan himpunan bilangan real. Himpunan bilangan real bukan suatu lapangan yang tertutup secara aljabar, sebab ia tidak menyertakan penyelesaian (sering disebut akar kuadrat minus satu) persamaan aljabar $x^2+1=0$.

Bilangan Kompleks

Pindah ke tingkat abstraksi yang lebih besar, bilangan real dapat diperluas ke bilangan kompleks. Himpunan bilangan ini muncul secara historis dari mencoba menemukan formula tertutup untuk akar polinomial kubik dan kuadrat. Ini mengarah pada ekspresi yang melibatkan akar kuadrat dari bilangan negatif, dan akhirnya ke definisi bilangan baru: akar kuadrat -1, dilambangkan oleh i, simbol yang ditugaskan oleh Leonhard Euler, dan disebut unit imajiner. Bilangan kompleks terdiri dari semua angka berbentuk

$$x + yi,$$

dimana $x, y \in \mathbb{R}$ dan $i = \sqrt{-1}$. Karena itu, bilangan kompleks sesuai dengan titik-titik pada bidang kompleks, ruang vektor dua dimensi nyata. Dalam ungkapan $x + yi$, bilangan real x disebut bagian real dan y disebut bagian imajiner. Jika bagian real dari bilangan kompleks adalah 0, maka bilangan tersebut disebut bilangan imajiner atau disebut sebagai imajiner murni; jika bagian imajiner adalah 0, maka bilangannya adalah bilangan real. Jadi bilangan real adalah bagian dari bilangan kompleks. Jika bagian real dan imajiner dari bilangan kompleks keduanya bilangan bulat, maka bilangan tersebut disebut bilangan bulat Gaussian. Simbol untuk bilangan kompleks adalah $\mathbf{C}$ atau $\mathbb{C}$.

Teorema dasar aljabar menyatakan bahwa bilangan kompleks membentuk lapangan aljabar aljabar tertutup, artinya setiap polinomial dengan koefisien kompleks memiliki akar dalam bilangan kompleks. Seperti himpunan bilangan real, himpunan bilangan kompleks membentuk lapangan, yang lengkap, tetapi tidak seperti bilangan real, ia tidak terurut. Artinya, tidak ada makna konsisten yang dapat diberikan untuk mengatakan bahwa I lebih besar dari 1, juga tidak ada makna mengatakan bahwa I kurang dari 1. Dalam istilah teknis, bilangan kompleks tidak memiliki urutan total yang kompatibel dengan operasi lapangan.

1.11.3 Subklas dari bilangan bulat

Bilangan genap dan ganjil
Bilangan **genap** adalah bilangan bulat yang "habis dibagi" oleh dua, yang bisa dibagi dua tanpa sisa; bilangan **ganjil** adalah bilangan bulat yang tidak genap. Setiap bilangan ganjil dapat dikonstruksi dengan rumus $n = 2k + 1$, untuk bilangan bulat k yang sesuai. Dimulai dengan $k = 0$, himpunan bilangan ganjil non-negatif adalah $\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$. Setiap bilangan genap m memiliki bentuk $m = 2k$ di mana k adalah bilangan bulat. Demikian pula, himpunan bilangan genap non-negatif adalah $\{0, 2, 4, 6, \ldots\}$.

Bilangan Prima
Bilangan prima adalah bilangan bulat yang lebih besar dari 1 yang bukan merupakan hasil kali dari dua bilangan bulat positif yang lebih kecil. Beberapa bilangan prima adalah $2, 3, 5, 7$, dan 11. Tidak ada rumus sederhana untuk bilangan ganjil dan genap untuk menghasilkan bilangan prima. Bilangan prima telah dipelajari secara luas selama lebih dari 2000 tahun dan telah menimbulkan banyak pertanyaan, hanya beberapa yang telah dijawab. Studi tentang pertanyaan-pertanyaan ini milik teori bilangan. Contoh dari pertanyaan yang masih belum terjawab adalah, apakah setiap bilangan genap adalah jumlah dari dua bilangan prima. Ini disebut dugaan Goldbach.

Pertanyaannya, apakah setiap bilangan bulat yang lebih besar dari satu adalah hasil perkalian bilangan prima hanya dalam satu cara, kecuali untuk penataan ulang bilangan prima, telah dijawab dengan positif: klaim yang terbukti ini disebut teorema dasar aritmatika. Bukti muncul di Elemen Euclid.

Klas yang bilangan bulat
Banyak himpunan bagian dari bilangan asli telah menjadi subjek studi tertentu dan dinamai, sering kali setelah ahli matematika pertama yang telah mempelajarinya. Contoh himpunan bilangan bulat tersebut adalah bilangan **Fibonacci** dan bilangan **sempurna/perfect**. Untuk contoh lainnya, lihat Urutan bilangan bulat.

1.11.4 Subklas dari bilangan kompleks

Bilangan aljabar, irasional, dan transendental
Bilangan aljabar adalah bilangan yang merupakan solusi untuk persamaan polinomial dengan koefisien bilangan bulat. Bilangan real yang bukan bilangan rasional disebut bilangan irasional. Bilangan kompleks yang bukan aljabar disebut bilangan transendental. Bilangan aljabar yang merupakan solusi dari persamaan polinomial monik dengan koefisien bilangan bulat disebut bilangan bulat aljabar.

Bilangan yang dapat dikonstruksi (Constructible numbers)
Termotivasi oleh masalah klasik konstruksi dengan sejajar dan kompas, bilangan konstruktif adalah bilangan kompleks yang bagian nyata dan imajinernya dapat dibangun menggunakan sejajar dan kompas, mulai dari segmen panjang unit tertentu, dalam sejumlah langkah terbatas.

Bilangan yang dapat dihitung (Computable numbers)
Bilangan yang dapat dihitung, juga dikenal sebagai bilangan *rekursif*, adalah bilangan real sedemikian sehingga terdapat algoritma yang, diberi suatu bilangan positif n sebagai input, menghasilkan n digit pertama dari representasi desimal bilangan yang dapat dihitung. Definisi setara dapat diberikan menggunakan fungsi rekursif-μ, mesin Turing atau kalkulus-λ. Bilangan yang dihitung stabil untuk semua operasi aritmatika biasa, termasuk perhitungan akar polinomial, dan dengan demikian membentuk lapangan tertutup real yang berisi bilangan aljabar real.

Bilangan yang dapat dihitung dapat dilihat sebagai bilangan real yang dapat secara tepat direpresentasikan dalam komputer: bilangan yang dapat dihitung secara tepat direpresentasikan oleh digit pertama dan program untuk menghitung digit selanjutnya. Namun, bilangan yang dapat dihitung jarang digunakan dalam praktik. Salah satu alasannya adalah bahwa tidak ada algoritma untuk menguji kesetaraan dua bilangan yang dapat dihitung. Lebih tepatnya, tidak ada algoritma yang mengambil bilangan yang dapat dihitung sebagai input, dan memutuskan dalam setiap kasus apakah bilangan ini sama dengan nol atau tidak.

Himpunan bilangan yang dapat dihitung memiliki kardinalitas yang sama dengan bilangan asli. Oleh karena itu, hampir semua bilangan real tidak dapat dihitung. Namun, sangat sulit untuk menghasilkan bilangan real yang tidak dapat dihitung secara eksplisit.

1.11.5 Konsep Perluasan

Bilangan p-adic
Bilangan p-adic mungkin memiliki ekspansi yang jauh tak terhingga ke kiri titik desimal, dengan cara yang sama bahwa bilangan real mungkin memiliki ekspansi yang tak terhingga panjang ke kanan. Sistem bilangan yang dihasilkan tergantung pada basis apa yang digunakan untuk digit: basis apa pun dimungkinkan, tetapi basis bilangan prima memberikan sifat matematika terbaik. Himpunan bilangan p-adic berisi bilangan rasional, tetapi tidak termuat dalam bilangan kompleks.

Elemen-elemen dari lapangan fungsi aljabar atas hingga hingga dan bilangan-bilangan aljabar memiliki banyak sifat yang serupa (lihat Analogi lapangan fungsi). Oleh karena itu, mereka sering dianggap sebagai bilangan oleh teori bilangan. Bilangan-bilangan p-adic memainkan peran penting dalam analogi ini.

Bilangan Hyperkonmpleks
Beberapa sistem bilangan yang tidak termasuk dalam bilangan kompleks dapat dibangun dari bilangan real dengan cara menggeneralisasi konstruksi bilangan kompleks. Bilangan ini kadang-kadang disebut bilangan hiperkompleks. Mereka termasuk bilangan quoternion **H**, diperkenalkan oleh Sir William Rowan Hamilton, di mana perkaliannya tidak komutatif, yaitu diskusi tentang, di mana perkalian tidak asosiatif selain tidak bersifat komutatif, dan *sedenion*, di mana perkalian tidak alternatif, baik asosiatif maupun komutatif.

Bilangan Transfinite
Berkenaan dengan himpunan takberhingga, bilangan asli telah digeneralisasi ke bilangan ordinal dan ke bilangan kardinal. Hal ini yang pertama memberikan urutan himpunan, sedangkan yang kedua memberikan ukurannya. Untuk himpunan yang berhingga, bilangan ordinal dan kardinal diidentifikasi dengan bilangan asli. Dalam kasus tak hingga, banyak bilangan ordinal sesuai dengan bilangan kardinal yang sama.

Bilangan-bilangan transfinite adalah bilangan-bilangan yang "takberhingga" dalam arti bahwa mereka lebih besar dari semua bilangan yang terbatas, namun belum tentu mutlak takberhingga. Istilah transfinite diciptakan oleh Georg Cantor, yang ingin menghindari beberapa implikasi dari kata *infinite* sehubungan dengan objek-objek ini, yang, bagaimanapun, tidakberhingga. Beberapa penulis kontemporer berbagi keraguan ini; sekarang digunakan untuk menyebut kardinal dan ordinat transfinite sebagai "takberhingga". Namun, istilah "takberhingga" juga tetap digunakan.

Definisi

Setiap bilangan hingga dapat digunakan setidaknya dalam dua cara: sebagai *ordinal* dan sebagai *kardinal*. Bilangan kardinal menentukan ukuran himpunan (misal, Sekantong lima kelereng), sedangkan bilangan ordinal menentukan urutan anggota dalam himpunan yang diurutkan (misal, "Orang ketiga dari kiri" atau "hari kedua puluh tujuh Januari"). Ketika diperluas ke bilangan transfinite, kedua konsep ini menjadi berbeda. Bilangan kardinal transfinite digunakan untuk menggambarkan ukuran himpunan besar takberhingga, sedangkan bilangan transfinite ordinal digunakan untuk menguraikan lokasi dalam himpunan yang sangat besar takberhingga yang diurutkan. Bilangan ordinal dan kardinal yang paling menonjol masing-masing adalah:

- ω (omega) didefinisikan sebagai bilangan ordinal transfinite terendah dan merupakan tipe urutan dari bilangan asli terhadap terurut-linear biasa.

- Aleph-nol, $\aleph_0$ didefinisikan sebagai bilangan kardinal transfinite pertama dan merupakan kardinalitas himpunan takberhingga dari bilangan asli. Jika aksioma pilihan berlaku, bilangan kardinal yang lebih tinggi berikutnya adalah aleph-satu, $\aleph_1$. Jika tidak, mungkin ada kardinal yang lain yang tidak ada bandingannya dengan aleph-satu dan lebih besar dari aleph-nol. Tapi bagaimanapun juga, tidak ada kardinal antara aleph-nol dan aleph-satu.

Hipotesis kontinum menyatakan bahwa tidak ada bilangan kardinal antara aleph-nol dan kardinalitas kontinum (himpunan bilangan real): artinya, aleph-satu adalah kardinalitas himpunan bilangan real. (Jika teori himpunan Zermelo-Fraenkel (ZFC) konsisten, maka hipotesis kontinum maupun negasinya tidak dapat dibuktikan dari ZFC.)

Beberapa penulis, termasuk P. Suppes dan J. Rubin, menggunakan istilah kardinal transfinite untuk merujuk pada kardinalitas himpunan Dedekind-infinite, dalam konteks di mana ini mungkin tidak ekivalen dengan "kardinal infinite"; yaitu, dalam konteks di mana aksioma pilihan terhitung tidak dianggap atau tidak diketahui berlaku. Dengan definisi ini, berikut ini semua ekivalen:

- m adalah suatu kardinal transfinite. Yaitu, ada suatu himpunan takberhingga Dedekind A sehingga kardinalitas A adalah m.

- $m + 1 = m$.

- Ada suatu kardinal n sedmikian hingga $\aleph_0 + n = m$.

Bilangan tidak baku (non-standart)
Bilangan hiperreal digunakan dalam analisis non-standar. Hiperreals, atau nonstard real (biasanya dinotasikan sebagai ${}^*\mathbf{R}$), menunjukkan lapangan yang diurutkan yang merupakan perluasan yang tepat dari lapangan yang diurutkan dari himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ dan memenuhi prinsip transfer. Prinsip ini memungkinkan pernyataan tingkat pertama yang benar tentang $\mathbb{R}$ untuk ditafsirkan kembali sebagai pernyataan tingkat pertama yang benar tentang ${}^*\mathbf{R}$. Non-standart ${}^*\mathbf{R}$ merupakan perluasan himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ yang memuat bilangan bilangan yang lebih besar dari bentuk

$$1 + 1 + 1 + \cdots + 1 \text{ (untuk sebarang banyak berhingga suku-suku.)}$$

${}^*\mathbf{R}$ tidak berhingga, dan kebalikannya adalah sangat kecil sekali. Istilah "hyper-real" diperkenalkan oleh Edwin Hewitt pada tahun 1948.

Bilangan-bilangan hyperreal memenuhi prinsip transfer, versi ketat Hukum heuristik Leibniz. Prinsip transfer menyatakan bahwa pernyataan urutan pertama yang benar di $\mathbf{R}$ juga berlaku di ${}^*\mathbf{R}$. Sebagai contoh, hukum komutatif penjumlahan, $x + y = y + x$, berlaku untuk hyperreal seperti halnya untuk real; karena $\mathbf{R}$ adalah lapangan tertutup real, demikian juga ${}^*\mathbf{R}$. Karena $\sin(\pi n) = 0$ untuk semua bilangan bulat n, kita juga memiliki untuk semua hyperintegers H. Prinsip transfer untuk ultrapower adalah konsekuensi dari teorema Loś̃ tahun 1955.

Bilangan super-real dan su-real memperluas bilangan real dengan menambahkan bilangan sangat kecil sekali (infinitesimal) dan sangat besar sekali (infinitely large), tetapi masih berupa lapangan.

Kekhawatiran tentang argumen tentang "sangat kecil sekali" (infinitesimal) kembali ke matematika Yunani kuno, dengan Archimedes mengganti bukti tersebut dengan yang menggunakan teknik lain yaitu metode yang melelahkan. Pada 1960-an, Abraham Robinson membuktikan bahwa hyperreals secara logis konsisten jika dan hanya jika ia real. Ini menghilangkan ketakutan bahwa bukti apa pun yang melibatkan "sangat kecil sekali" mungkin tidak sehat, asalkan mereka dimanipulasi sesuai dengan aturan logis yang Robinson gambarkan.

Penerapan bilangan hyperreal dan khususnya prinsip transfer ke masalah analisis disebut analisis non-standar. Salah satu aplikasi langsung adalah definisi konsep-konsep dasar analisis seperti turunan dan integral dalam cara langsung, tanpa melewati komplikasi logis dari banyak quantifiers. Dengan demikian, turunan dari $f(x)$ menjadi

$$f'(x) = \text{st.}\left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right)$$

untuk infinitesimal Δx, di mana $\mathrm{st}(\cdot)$ menunjukkan fungsi bagian standar, merupakan "pembulatan (rounds off)" setiap hyperreal berhingga ke real terdekat. Demikian pula, integral didefinisikan sebagai bagian standar dari jumlah tak takberhingga yang sesuai.

Prinsip transfer

Gagasan dari sistem hyperreal adalah untuk memperluas himpunan bilangan real $mathbbR$ untuk membentuk sistem $^*\mathbf{R}$ yang mencakup bilangan sangat kecil sekali dan sangat besar sekali, tetapi tanpa mengubah salah satu aksioma dasar aljabar. Pernyataan apa pun dari bentuk "untuk bilangan apa pun x..." yang benar untuk real juga berlaku untuk hyperreal. Misalnya, aksioma yang menyatakan "untuk bilangan apa pun $x, x + 0 = x$" masih berlaku. Hal yang sama berlaku untuk kuantifikasi atas beberapa bilangan, misalnya, "untuk bilangan apa pun x dan $y, xy = yx$." Kemampuan untuk membawa pernyataan dari real ke hyperreals disebut prinsip transfer. Namun, pernyataan dalam bentuk "untuk himpunan bilangan S..." mungkin tidak terbawa. Satu-satunya sifat yang berbeda antara real dan hyperreals adalah mereka yang bergantung pada kuantifikasi atas himpunan, atau struktur tingkat tinggi lainnya seperti fungsi dan relasi, yang biasanya dikonstruksi di luar himpunan. Setiap himpunan real, fungsi, dan relasi memiliki ekstensi hyperreal alami, memenuhi sifat urutan-pertama yang sama. Jenis-jenis kalimat logis yang mematuhi pembatasan kuantifikasi ini disebut sebagai pernyataan dalam logika tingkat pertama.

Namun, prinsip transfer tidak berarti bahwa $\mathbf{R}$ dan $^*\mathbf{R}$ memiliki perilaku yang identik. Misalnya, dalam $^*\mathbf{R}$ terdapat elemen ω sedemikian hingga

$$1 < \omega, 1 + 1 < \omega, 1 + 1 + 1 < \omega, 1 + 1 + 1 + 1 < \omega, \ldots$$

tetapi tidak ada bilangan seperti itu dalam $\mathbf{R}$. (Dengan kata lain, $^*\mathbf{R}$ bukan Archimedean.) Ini dimungkinkan karena tidak adanya ω tidak dapat diekspresikan sebagai pernyataan urutan-pertama.

Penggunaan dalam analisis

Kalkulus dengan fungsi aljabar

Notasi informal untuk kuantitas non-real secara historis muncul dalam kalkulus dalam dua konteks: sebagai sangat kecil sekali seperti dx dan sangat besar sekali dengan simbol ∞ , digunakan, misalnya, dalam batas-batas integral yang tidak wajar.

Sebagai contoh dari prinsip transfer, pernyataan bahwa untuk setiap bilangan taknol $x, 2x \neq x$, berlaku untuk bilangan real, dan itu adalah dalam bentuk yang diperlukan oleh prinsip transfer, jadi itu juga berlaku untuk bilangan hyperreal. Ini menunjukkan bahwa tidak mungkin untuk menggunakan simbol generik seperti ∞ untuk semua kuantitas takberhingga dalam sistem hyperreal; kuantitas takberhingga berbeda dalam besarnya dengan kuantitas takberhingga lainnya, dan infinitesimal dengan infinitesimal lainnya.

Demikian pula, penggunaan $1/0 = \infty$ tidak valid, karena prinsip transfer berlaku untuk pernyataan bahwa pembagian dengan nol tidak ditentukan. Hal yang tepat dari perhitungan seperti itu adalah bahwa jika ε adalah infinitesimal taknol, maka $1/\varepsilon$ takberhingga.

Untuk bilangan hiperreal berhingga x, bagian standarnya, st.x, didefinisikan sebagai bilangan real tunggal yang berbeda dari bilangan sangat kecil sekali. Turunan dari fungsi $y(x)$ didefinisikan bukan sebagai dy/dx tetapi sebagai bagian standar dy/dx.

Misalnya, untuk menemukan turunan $f'(x)$ dari fungsi $f(x) = x^2$, misalkan dx adalah infinitesimal taknol. Maka,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \mathrm{st.}\left(\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}\right) \\
&= \mathrm{st.}\left(\frac{x^2+2x.dx+dx^2-x^2}{dx}\right) \\
&= \mathrm{st.}\left(\frac{2x.dx+(dx)^2}{dx}\right) \\
&= \mathrm{st.}\left(\frac{2x.dx}{dx}+\frac{(dx)^2}{dx}\right) \\
&= \mathrm{st.}\,(2x+dx) \\
&= 2x
\end{aligned}$$

Penggunaan bagian standar dalam definisi turunan adalah alternatif yang ketat untuk praktik tradisional mengabaikan kuadrat dari kuantitas yang sangat kecil. Bilangan ganda (dual) adalah sistem bilangan berdasarkan ide ini. Setelah baris ketiga diferensiasi di atas, metode khas dari Newton hingga abad ke-19 adalah dengan hanya membuang istilah $(dx)^2$. Dalam sistem hyperreal, $(dx)^2 \neq 0$, karena dx taknol, dan prinsip transfer dapat diterapkan pada pernyataan bahwa kuadrat dari setiap bilangan taknol adalah taknol. Namun, kuantitas $(dx)^2$ sangat-sangat kecil sekali dibandingkan dengan dx; yaitu, sistem hyperreal memuat hierarki quantitas yang sangat-sangat kecil sekali.

Integral

Salah satu cara mendefinisikan integral yang pasti dalam sistem hyperreal adalah sebagai bagian standar dari jumlah takberhingga pada hyperfinite lattice yang didefinisikan sebagai

$$a, a + dx, a + 2dx, \cdots a + ndx,$$

di mana dx sangat kecil sekali, n adalah hypernatural yang takberhingga, dan batas bawah dan atas dari integrasi adalah a dan $b = a + ndx$.

Sifat-sifat

Hyperreals $^*\mathbf{R}$ membentuk lapangan terurut yang berisi real $\mathbf{R}$ sebagai sublapangan. Tidak seperti real, hyperreal tidak membentuk ruang metrik standar, tetapi berdasarkan keterutannya, ia menjadi topologi terurut.

Penggunaan artikel tertentu dalam frasa bilangan hiperreal agak menyesatkan karena tidak ada lapangan terurut tunggal yang disebut dalam sebagian besar treatmen. Namun, suatu makalah tahun 2003 oleh Vladimir Kanovei dan Saharon Shelah menunjukkan bahwa ada ekstensi terhitung jenuh (countably saturated) yang dapat didefinisikan, jenuh (artinya ω-jenuh, tetapi tentu saja terhitung (countable)) dari real, yang karenanya memiliki klaim yang baik untuk judul bilangan hyperreal. Selain itu, lapangan yang diperoleh oleh konstruksi ultrapower dari ruang semua barisan real, tunggal dalam makna isomorfisma jika hal ini mengasumsikan hipotesis kontinum.

Kondisi menjadi lapangan hyperreal lebih kuat daripada kondisi menjadi lapangan tertutup real yang benar-benar berisi $\mathbf{R}$. Itu juga lebih kuat daripada menjadi lapangan superreal dalam arti Dales dan Woodin.

1.12 Sejarah

Sejarah matematika dapat dilihat sebagai serangkaian abstraksi yang terus meningkat. Abstraksi pertama, yang diinspirasi oleh banyak hewan, mungkin adalah angka: kesadaran bahwa himpunan dua apel dan himpunan dua jeruk (misalnya) memiliki sesuatu yang sama, yaitu jumlah/banyak anggotanya.

Sebagaimana dibuktikan oleh penghitungan yang ditemukan pada tulang, selain mengenali bagaimana cara menghitung benda fisik, orang prasejarah mungkin juga mengakui cara menghitung kuantitas abstrak, seperti waktu, hari, musim, tahun.

Bukti untuk matematika yang lebih kompleks tidak muncul sampai sekitar 3000 SM, ketika Babilonia dan Mesir mulai menggunakan aritmatika, aljabar dan geometri untuk perpajakan dan perhitungan keuangan lainnya, untuk bangunan dan konstruksi, dan untuk astronomi. Teks matematika paling kuno dari Mesopotamia dan Mesir berasal dari tahun 2000–1800 SM. Banyak teks awal menyebutkan tiga kali lipat Pythagoras dan, dengan kesimpulan, teorema Pythagoras tampaknya merupakan perkembangan matematika yang paling kuno dan tersebar luas setelah aritmatika dan geometri dasar. Dalam matematika Babilonia bahwa aritmatika dasar (penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian) pertama kali muncul dalam catatan arkeologis. Orang Babilonia juga memiliki sistem nilai tempat, dan menggunakan sistem angka *seksagesimal*, masih digunakan sampai sekarang untuk mengukur sudut dan waktu.

Dimulai pada abad ke-6 SM dengan Pythagoras, orang-orang Yunani Kuno memulai studi sistematis matematika sebagai subjek dalam dirinya sendiri dengan matematika Yunani. Sekitar 300 SM, Euclid memperkenalkan metode aksiomatik yang masih digunakan dalam matematika saat ini, yang terdiri dari definisi, aksioma, teorema, dan buktinya. Elemen buku teks secara luas dianggap sebagai buku teks paling sukses dan berpengaruh sepanjang masa. Matematikawan zaman kuno terbesar sering dianggap Archimedes (c. 287-212 SM) dari Syracuse. Dia mengembangkan formula untuk menghitung luas permukaan dan volume padatan revolusi dan menggunakan metode kelelahan untuk menghitung luas di bawah busur parabola dengan penjumlahan deret tak hingga, dengan cara yang tidak terlalu berbeda dengan kalkulus modern. Prestasi penting lainnya dari matematika Yunani adalah irisan kerucut (Apollonius dari Perga, abad ke-3 SM), trigonometri (Hipparchus dari Nicea (abad ke-2 SM), dan permulaan aljabar (Diophantus, abad ke-3 Masehi).

Sistem angka Hindu-Arab dan aturan untuk penggunaan operasinya, yang digunakan di seluruh dunia saat ini, berevolusi selama milenium pertama di India dan ditransmisikan ke dunia Barat melalui matematika Islam. Perkembangan penting lainnya dari matematika India termasuk definisi modern tentang sinus dan cosinus, dan bentuk awal deret tak-berhingga.

Selama Zaman Keemasan Islam, khususnya selama abad ke-9 dan ke-10, matematika melihat banyak inovasi penting yang dibangun pada matematika Yunani. Pencapaian paling menonjol dari matematika Islam adalah pengembangan aljabar. Terkenal lainnya pencapaian periode Islam adalah kemajuan dalam trigonometri bola dan penambahan titik desimal ke sistem angka Arab. Banyak ahli matematika terkemuka dari periode ini adalah Persia, seperti Al-Khwarismi, Omar Khayyam dan Sharaf al-Dīn al-Ṭūsī.

Selama periode modern awal, matematika mulai berkembang dengan kecepatan yang semakin cepat di Eropa Barat. Itu pengembangan kalkulus oleh Newton dan Leibniz di abad ke-17 merevolusi matematika. Leonhard Euler adalah ahli matematika paling terkenal dari abad ke-18, yang menyumbang banyak teorema dan penemuan. Mungkin ahli matematika terkemuka abad ke-19 adalah ahli matematika Jerman Carl Friedrich Gauss, yang membuatnya banyak berkontribusi untuk bidang-bidang seperti aljabar, analisis, geometri diferensial, teori matriks, teori bilangan, dan statistik. Pada awal abad ke-20, Kurt Gödel mengubah matematika dengan menerbitkan teorema tidak lengkap, yang menunjukkan bahwa sistem aksiomatik yang konsisten akan mengandung proposisi yang tidak dapat dibuktikan.

Sejak saat itu matematika telah sangat diperluas, dan telah ada interaksi yang bermanfaat antara matematika dan sains, untuk kepentingan keduanya. Penemuan matematika terus dilakukan hari ini. Menurut Mikhail B. Sevryuk, dalam edisi Januari 2006 dari Buletin Masyarakat Matematika Amerika, Jumlah makalah dan buku yang termasuk dalam database Ulasan Matematika sejak 1940 (tahun pertama pengoperasian MR) sekarang lebih dari 1,9 juta, dan lebih dari 75 ribu item ditambahkan ke database setiap tahun. Luar biasa sebagian besar karya di lautan ini mengandung teorema matematika baru dan buktinya.

1.13 Etimologi

Kata matematika berasal dari bahasa Yunani Kuno *μάθημα* (máthēma), yang berarti "apa yang dipelajari", "apa yang bisa diketahui", maka dari itu juga "belajar" dan "ilmu". Kata untuk "matematika" datang untuk memiliki arti "studi matematika" yang lebih sempit dan lebih teknis bahkan di zaman Klasik. Kata sifatnya adalah *μαθηματικός* (mathēmatikós), yang berarti "terkait dengan belajar" atau "rajin belajar", yang juga selanjutnya berarti "matematika". Secara khusus, *μαθηματική τέχνη* (mathēmatik ē tēkhnē), bahasa Latin: *ars Mathematica*, berarti "seni matematika".

Demikian pula, salah satu dari dua aliran pemikiran utama dalam Pythagorasisme dikenal sebagai mathēmatikoi (*μαθηματικοί*) yang pada saat itu berarti "guru" daripada "ahli matematika" dalam pengertian modern.

Dalam bahasa Latin, dan dalam bahasa Inggris hingga sekitar tahun 1700, istilah matematika lebih umum berarti "astrologi" (atau kadang-kadang "astronomi") daripada "matematika"; maknanya berangsur-angsur berubah menjadi yang sekarang dari sekitar 1500 menjadi 1800. Hal ini mengakibatkan beberapa terjemahan salah. Misalnya, peringatan Santo Agustinus itu orang Kristen harus mewaspadai Mathematici, yang berarti ahli nujum, kadang-kadang disalahartikan sebagai kecaman dari ahli matematika.

Bentuk jamak yang jelas dalam bahasa Inggris, seperti bentuk jamak Prancis *les mathématiques* (dan turunan tunggal yang jarang digunakan la mathématique), berlaku kembali ke bahasa Latin jamak netral (Cicero), berdasarkan jamak Yunani *τά μαθημτικά* (ta mathēmatiká), digunakan oleh Aristoteles (384-322 SM), dan makna kira-kira "semua hal matematika";

meskipun masuk akal bahwa bahasa Inggris hanya meminjam kata sifat matematika (al) dan membentuk kata benda matematika lagi, setelah pola fisika dan metafisika, yang diwarisi dari bahasa Yunani. Dalam bahasa Inggris, matematika kata benda mengambil kata kerja tunggal. Ini sering disingkat menjadi matematika atau, di Amerika Utara, matematika.

1.14 Definisi Matematika

Matematika tidak memiliki definisi yang diterima secara umum. Aristoteles mendefinisikan matematika sebagai "ilmu kuantitas" dan definisi ini berlaku hingga abad ke-18. Pada abad ke-19, ketika studi matematika meningkat dalam ketelitian dan mulai membahas topik-topik abstrak seperti teori grup dan geometri proyektif, yang tidak memiliki hubungan yang jelas dengan kuantitas dan pengukuran, matematikawan dan filsuf mulai mengusulkan variasi definisi baru. Tiga jenis definisi matematika saat ini disebut logika, intuitionis, dan formalis, masing-masing mencerminkan aliran pemikiran filosofis yang berbeda. Semua memiliki masalah parah, tidak ada yang memiliki penerimaan luas, dan sepertinya mungkin tidak ada rekonsiliasi.

Definisi awal matematika dalam hal logika diberikan oleh Benjamin Peirce yaitu : "***sains yang menarik kesimpulan yang diperlukan***" (1870). Dalam Principia Mathematica, Bertrand Russell dan Alfred North Whitehead memajukan program filosofis yang dikenal sebagai logikaisme, dan berusaha membuktikan bahwa semua konsep, pernyataan, dan prinsip matematika dapat didefinisikan dan dibuktikan seluruhnya dalam hal logika simbolik. Definisi logika tentang matematika yang diberikan oleh Russell adalah : "***Semua Matematika adalah Logika Simbolik***".

Definisi intuitionist, berkembang dari seorang filsafat ahli matematika yaitu, L.E.J. Brouwer, mengidentifikasi matematika dengan fenomena mental tertentu. Contoh dari definisi intuitionist adalah : "***Matematika adalah aktivitas mental yang terdiri dalam melaksanakan konstruksi satu demi satu.*** " Keunikan intuitionism adalah bahwa ia menolak beberapa ide matematika dianggap sah menurut definisi lain. Secara khusus, sedangkan filosofi matematika lainnya memungkinkan benda itu dapat dibuktikan ada meskipun tidak dapat dikonstruksikan, intuitionism hanya mengizinkan objek matematika yang satu itu sebenarnya bisa membangun.

Definisi formalis mengidentifikasi matematika dengan simbol-simbolnya dan aturan untuk mengoperasikannya. Haskell Curry mendefinisikan matematika hanya sebagai "***ilmu sistem formal***". Sistem formal adalah seperangkat simbol, atau token, dan beberapa aturan memberi tahu bagaimana token dapat digabungkan menjadi formula. Dalam sistem formal, kata aksioma memiliki makna khusus, berbeda dari makna biasa "***kebenaran yang terbukti dengan sendirinya***". Dalam sistem formal, aksioma adalah kombinasi dari token yang termasuk dalam sistem formal yang diberikan tanpa perlu diturunkan menggunakan aturan sistem.

Banyak ahli matematika profesional tidak tertarik pada definisi matematika, atau menganggapnya tidak dapat didefinisikan. Bahkan tidak ada konsensus tentang apakah matematika adalah seni atau sains. Beberapa hanya berkata, "***Matematika adalah apa yang dilakukan ahli matematika.***"

1.15 Matematika sebagai sains

Ahli matematika Jerman Carl Friedrich Gauss menyebut matematika sebagai "***Ratu Ilmu Pengetahuan***". Lebih baru-baru ini, Marcus du Sautoy menyebut matematika "***Ratu Ilmu Pengetahuan ... kekuatan pendorong utama di balik ilmiah Penemuan***". Dalam Latin Regina Scientiarum yang asli, juga dalam bahasa Jerman *Königin der Wissenschaften*, kata sesuai dengan sains berarti "***bidang ilmu***", dan ini juga arti asli "***sains***" dalam bahasa Inggris; matematika dalam hal ini adalah bidang pengetahuan. Spesialisasi membatasi makna "***sains***" menjadi alami sains mengikuti munculnya sains Baconian, yang membedakan "***sains alam***" dengan skolastik, metode Aristoteles bertanya dari prinsip pertama. Peran eksperimen dan observasi empiris dapat diabaikan dalam matematika, dibandingkan dengan ilmu alam seperti biologi, kimia, atau fisika. Albert Einstein menyatakan bahwa "***sejauh hukum matematika merujuk pada kenyataan, mereka tidak pasti; dan sejauh yang mereka yakini, mereka tidak merujuk pada kenyataan***".

Beberapa filsuf modern menganggap bahwa matematika bukanlah sains, dan merujuk pada Karl Popper untuk itu. Namun, Karl Popper sendiri menyimpulkan bahwa "***kebanyakan teori matematika, seperti teori fisika dan biologi, deduktif hipotetis: oleh karena itu matematika murni ternyata jauh lebih dekat dengan ilmu pengetahuan alam yang hipotesisnya merupakan dugaan, daripada yang tampaknya, bahkan sampai saat ini.***"

Matematika memiliki banyak kesamaan dengan banyak bidang dalam ilmu fisika, terutama eksplorasi logika konsekuensi dari asumsi. Intuisi dan eksperimen juga berperan dalam perumusan dugaan dalam matematika dan sains (lainnya). Matematika eksperimental terus tumbuh dalam kepentingan matematika, komputasi dan simulasi memainkan peran yang semakin meningkat pada sains dan matematika.

Pendapat ahli matematika tentang hal ini sangat bervariasi. Banyak ahli matematika merasa bahwa menyebut bidang mereka sebagai sains berarti mengecilkan pentingnya sisi estetisnya, dan sejarahnya dalam tujuh seni liberal tradisional; yang lain merasa bahwa mengabaikan hubungannya dengan sains berarti menutup mata terhadap fakta bahwa antarmuka antara matematika dan aplikasinya dalam sains dan teknik telah mendorong banyak perkembangan dalam matematika. Salah satu cara yang dimainkan oleh perbedaan sudut pandang ini adalah dalam debat filosofis tentang apakah matematika diciptakan (seperti dalam seni) atau ditemukan (seperti dalam sains). Adalah umum untuk melihat universitas dibagi menjadi beberapa bagian yang mencakup divisi Sains dan Matematika, yang menunjukkan bahwa bidang tersebut dilihat sebagai sekutu tetapi tidak begitu tepat. Dalam praktiknya, matematikawan biasanya dikelompokkan oleh para ilmuwan di tingkat dasar tetapi dipisahkan pada tingkat yang lebih baik. Ini adalah salah satu dari banyak masalah yang dipertimbangkan dalam filsafat matematika.

1.16 Inspirasi, matematika murni dan terapan, dan estetika

Matematika muncul dari berbagai macam masalah. Awalnya ditemukan dalam perdagangan, pengukuran tanah, arsitektur dan kemudian astronomi; saat ini, semua ilmu menyarankan masalah dipelajari oleh ahli matematika, dan banyak masalah muncul dalam matematika itu sendiri. Misalnya, fisikawan Richard Feynman menemukan rumus integral lintasan (path integral) kuantum mekanik menggunakan kombinasi penalaran matematika dan wawasan fisik, dan teori string, saat ini masih terus berkembang teori ilmiah yang berusaha menyatukan empat fundamental kekuatan alam, terus menginspirasi matematika baru.

Beberapa matematika hanya relevan di bidang yang menginspirasi itu, dan diterapkan untuk memecahkan masalah lebih lanjut di bidang itu. Namun seringkali matematika yang terinspirasi oleh satu bidang terbukti bermanfaat di banyak bidang, dan bergabung dengan stok umum konsep matematika. Perbedaan sering dibuat antara matematika murni dan matematika terapan. Namun topik matematika murni seringkali ternyata memiliki aplikasi, misalnya teori bilangan dalam kriptografi. Fakta luar biasa ini, yang bahkan matematika "paling murni" sering berubah keluar untuk memiliki aplikasi praktis, adalah apa yang disebut Eugene Wigner "efektivitas matematika yang tidak masuk akal". Seperti di sebagian besar bidang studi, ledakan pengetahuan di era ilmiah telah menyebabkan spesialisasi: sekarang ada ratusan bidang khusus dalam matematika dan Matematika terbaru Klasifikasi Subjek berjalan hingga 46 halaman. Beberapa bidang matematika terapan telah bergabung dengan tradisi terkait di luar matematika dan menjadi disiplin ilmu dalam hak mereka sendiri, termasuk statistik, riset operasi, dan ilmu komputer.

Bagi mereka yang cenderung matematis, sering ada aspek estetika yang pasti untuk banyak matematika. Banyak ahli matematika berbicara tentang keanggunan matematika, estetika intrinsik dan keindahan batinnya. Kesederhanaan dan keumuman dihargai. Ada keindahan dalam bukti sederhana dan elegan, seperti bukti Euclid bahwa ada banyak bilangan prima, dan dalam metode numerik elegan yang mempercepat perhitungan, seperti transformasi cepat Fourier. G. H. Hardy dalam *A Mathematician's Apology*, menyatakan keyakinan bahwa pertimbangan estetika ini, dalam dirinya sendiri, cukup untuk membenarkan studi matematika murni. Dia mengidentifikasi kriteria seperti signifikansi, tak terduga, tak terhindarkan, dan ekonomi sebagai faktor yang berkontribusi terhadap estetika matematika. Penelitian matematika sering mencari fitur kritis dari objek matematika. Teorema yang dinyatakan sebagai karakterisasi objek oleh fitur-fitur ini adalah hadiah. Contoh argumen matematis yang ringkas dan terbuka telah diterbitkan dalam Bukti dari BUKU.

Popularitas matematika rekreasi adalah tanda lain dari kesenangan yang ditemukan banyak orang dalam menyelesaikan pertanyaan matematika. Begitu juga pada ekstrem sosial lainnya, filsuf terus menemukan masalah dalam filsafat matematika, seperti sifat bukti matematika.

1.17 Notasi, bahasa, dan ketelitian

Sebagian besar notasi matematika yang digunakan saat ini tidak ditemukan sampai abad ke-16. Sebelum itu, matematika dituliskan dalam kata-kata, membatasi penemuan matematika. Euler (1707-1783) bertanggung jawab atas banyak notasi yang digunakan saat ini. Notasi modern membuat matematika jauh lebih mudah bagi profesional, tetapi pemula sering menganggapnya menakutkan. Menurut Barbara Oakley, ini dapat dikaitkan dengan fakta bahwa ide-ide matematika lebih abstrak dan lebih terenkripsi daripada bahasa alami. Tidak seperti bahasa alami, di mana orang sering dapat menyamakan kata (misalnya sapi) dengan objek fisik yang sesuai dengannya, simbol matematika abstrak, kurang analog fisik. Simbol matematika juga lebih terenkripsi daripada kata-kata biasa, yang berarti satu simbol dapat menyandikan sejumlah operasi atau ide yang berbeda.

Bahasa matematika bisa sulit dipahami untuk pemula karena bahkan istilah umum, seperti *atau* dan *hanya*, memiliki makna yang lebih tepat daripada yang mereka miliki dalam percakapan sehari-hari, dan istilah lain seperti *terbuka* dan *lapangan* merujuk pada spesifik ide matematika, tidak tercakup oleh makna awam mereka. Bahasa matematika juga mencakup banyak istilah teknis seperti *homeomorfisme* dan *integrable* yang tidak memiliki makna di luar matematika. Selain itu, frasa steno seperti *iff* untuk "*jika dan hanya jika*" milik jargon matematika. Ada alasan untuk notasi khusus dan teknis kosakata: matematika membutuhkan ketelitian lebih dari pidato sehari-hari. Matematikawan mengacu pada ketepatan ini bahasa dan logika sebagai "*ketelitian*". simbol dapat menyandikan sejumlah operasi atau ide yang berbeda.

Bukti matematika pada dasarnya adalah masalah ketelitian. Matematikawan ingin teorema mereka mengikuti dari aksioma dengan cara penalaran sistematis. Ini untuk menghindari "teorema" yang salah, berdasarkan pada intuisi yang keliru, yang mana banyak contoh telah terjadi dalam sejarah subjek. Tingkat ketelitian yang diharapkan pada matematika bervariasi dari waktu ke waktu: orang-orang Yunani mengharapkan argumen yang terperinci, tetapi pada saat Isaac Newton metode yang digunakan kurang ketat. Masalah yang melekat dalam definisi yang digunakan oleh Newton akan mengarah pada kebangkitan analisis yang cermat dan bukti formal di abad ke-19. Kesalahpahaman tentang ketelitian adalah penyebab dari beberapa ke"pahaman umum tentang matematika. Saat ini, matematikawan terus berdebat di antara mereka sendiri tentang bukti yang dibantu komputer. Karena perhitungan besar sulit untuk diverifikasi, bukti seperti itu mungkin keliru jika program komputer yang digunakan salah. Disisi lain, bantuan bukti memungkinkan memverifikasi semua detail yang tidak dapat diberikan dalam bukti tulisan tangan, dan memberikan kepastian kebenaran bukti lama seperti teorema Feit-Thompson.

Aksioma dalam pemikiran tradisional adalah "*kebenaran yang terbukti dengan sendirinya*", tetapi konsepsi itu bermasalah. Pada tingkat formal, aksioma hanyalah serangkaian simbol, yang hanya memiliki makna intrinsik dalam konteks semua formula turunan dari sistem aksiomatik. Itu adalah tujuan dari program Hilbert untuk meletakkan semua matematika pada suatu perusahaan dasar aksiomatik, tetapi menurut Gödel ketidaklengkapan teorema, setiap sistem aksiomatik (cukup kuat) memiliki formula yang tidak dapat ditentukan; jadi suatu akhir aksioma matematika tidak mungkin. Meskipun demikian matematika sering dibayangkan sebagai (sejauh konten formalnya) tidak lain dalam beberapa aksioma teori himpunan, dalam arti bahwa setiap pernyataan atau bukti matematika dapat dimasukkan ke dalam formula dalam teori himpunan.

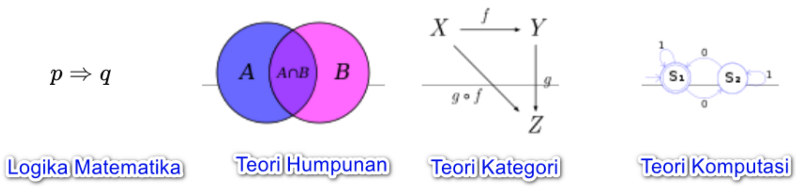
1.18 Bidang-bidang matematika

Matematika dapat, secara umum, dibagi menjadi studi tentang kuantitas, struktur, ruang, dan perubahan (yaitu aritmatika, aljabar, geometri, dan analisis). Selain masalah utama ini, ada juga subdivisi yang didedikasikan untuk mengeksplorasi tautan dari jantung matematika ke bidang lain: ke logika, untuk menetapkan teori (dasar), untuk matematika empiris dari berbagai ilmu (matematika terapan), dan baru-baru ini untuk kajian yang ketat yaitu studi tentang ketidakpastian. Sementara beberapa daerah mungkin tampak tidak berhubungan, program Langlands telah menemukan koneksi antara area yang sebelumnya dianggap tidak terhubung, seperti Grup Galois, Permukaan Riemann dan Teori Bilangan.

1.19 Fondasi dan Filosofi

Untuk memperjelas fondasi matematika, bidang logika matematika dan teori himpunan dikembangkan. Logika matematis meliputi studi matematis logika dan penerapan logika formal bidang matematika lainnya; teori himpunan adalah cabang matematika yang mempelajari himpunan atau koleksi objek. Teori kategori, yang membahas secara abstrak dengan struktur matematika dan hubungan di antara mereka, masih dalam pengembangan. Ungkapan "*Krisis Fondasi*" menggambarkan pencarian yang sungguh-sungguh dasar untuk matematika yang berlangsung dari sekitar 1900 hingga 1930. Beberapa ketidaksepakatan tentang dasar-dasar matematika berlanjut ke hari ini. Krisis fondasi dirangsang oleh sejumlah kontroversi pada saat itu, termasuk kontroversi atas teori himpunan Cantor dan Kontroversi Brouwer-Hilbert.

Logika matematika berkaitan dengan pengaturan matematika dalam kerangka kerja aksiomatik yang ketat, dan mempelajari implikasi dari kerangka kerja semacam itu. Dengan demikian, itu adalah rumah bagi teorema ketidaklengkapan Gödel yang (secara informal) menyiratkan bahwa sistem formal mana pun yang efektif yang berisi aritmatika dasar, jika bunyi (berarti bahwa semua teorema yang dapat dibuktikan adalah benar), tentu tidak lengkap (artinya bahwa ada teorema yang benar) yang tidak dapat dibuktikan dalam sistem itu). Apa pun koleksi terbatas aksioma teoretis-angka diambil sebagai fondasi, Gödel menunjukkan bagaimana membangun pernyataan formal yang benar-benar merupakan fakta teoritis-teoretis, tetapi yang tidak mengikuti dari aksioma-aksioma tersebut. Karena itu, tidak ada sistem formal yang merupakan aksiomatisasi lengkap dari teori bilangan penuh. Logika modern dibagi menjadi teori rekursi, teori model, dan teori bukti, dan terkait erat dengan ilmu komputer teoretis, serta teori kategori. Dalam konteks teori



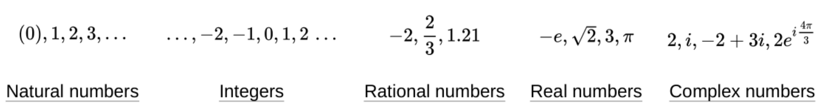
rekursi, ketidakmungkinan aksiomatisasi penuh teori bilangan juga dapat secara formal ditunjukkan sebagai konsekuensi dari teorema MRDP.

lmu komputer teoretis meliputi teori komputabilitas, teori kompleksitas komputasional, dan teori informasi. Teori komputabilitas meneliti keterbatasan berbagai model teoretis komputer, termasuk model paling terkenal yaitu mesin Turing. Teori kompleksitas adalah studi tentang traktabilitas oleh komputer; meskipun beberapa masalah, secara teoritis dapat dipecahkan oleh komputer, sangat mahal dalam hal waktu atau ruang sehingga penyelesaiannya kemungkinan besar akan tetap tidak layak, bahkan dengan kemajuan pesat dari perangkat keras komputer. Masalah yang terkenal adalah masalah "$\mathbf{P} = \mathbf{NP}$?", salah satu Masalah Hadiah Milenium. Akhirnya, teori informasi berkaitan dengan jumlah data yang dapat disimpan pada media tertentu, dan karenanya berkaitan dengan konsep-konsep seperti itu sebagai kompresi dan entropi.

1.20 Matematika murni

Kuantitas

Kajian kuantitas dimulai dengan angka, pertama bilangan asli dan bilangan bulat yang dikenal ("bilangan bulat") serta operasi aritmatika pada bilangan bulat, yang ditandai dalam aritmatika. Sifat yang lebih dalam dari bilangan bulat dipelajari dalam teori bilangan, yang mana datang hasil yang populer seperti Teorema Terakhir Fermat. Dugaan prima kembar dan dugaan Goldbach adalah dua masalah yang belum terpecahkan dalam teori bilangan.



Ketika sistem bilangan dikembangkan lebih lanjut, bilangan bulat diakui sebagai bagian dari bilangan rasional ("pecahan"). Ini, pada gilirannya, terkandung dalam bilangan real, yang digunakan untuk mewakili kuantitas kontinu. Bilangan real digeneralisasikan ke bilangan kompleks. Ini adalah langkah pertama dari hierarki bilangan yang selanjutnya mencakup bilangan kuaternion dan oktonion. Pertimbangan bilangan asli juga mengarah pada bilangan tak terbatas, yang memformalkan konsep "tak terbatas". Menurut teorema aljabar dasar semua solusi persamaan dengan satu yang tidak diketahui (unknown) atau satu peubah dengan koefisien kompleks adalah bilangan kompleks, apapun dari derajadnya. Bidang kajian lain adalah banyaknya elemen suatu himpunan, yang dijelaskan dengan bilangan kardinal. Ini termasuk bilangan *aleph*, yang memungkinkan perbandingan yang berarti dari banyaknya elemen dari suatu himpunan besar tak-terbatas.

Struktur

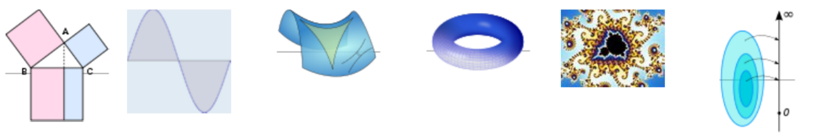
Banyak objek matematika, seperti himpunan bilangan dan fungsi, menunjukkan struktur internal sebagai konsekuensi dari operasi atau hubungan yang didefinisikan pada himpunan. Matematika kemudian mempelajari sifat-sifat himpunan yang dapat diekspresikan dalam hal struktur itu; misalnya teori bilangan mempelajari sifat dari himpunan bilangan bulat yang dapat diekspresikan dalam hal operasi aritmatika. Selain itu, sering terjadi bahwa himpunan (atau struktur) terstruktur yang berbeda tersebut menunjukkan sifat yang serupa, yang memungkinkan, dengan langkah selanjutnya dari abstraksi, untuk menyatakan aksioma untuk kelas struktur, dan kemudian mempelajari sekaligus seluruh kelas struktur memuaskan aksioma ini. Dengan demikian seseorang dapat mempelajari grup, ring, lapangan dan sistem abstrak lainnya; bersama-sama kajian tersebut (untuk struktur yang didefinisikan oleh operasi aljabar) merupakan domain aljabar abstrak. Dengan

Number theory Algebra Group theory Combinatorics Graph theory Order theory

sifatnya yang umum, aljabar abstrak seringkali dapat diterapkan untuk masalah yang tampaknya tidak berhubungan; misalnya sejumlah masalah kuno mengenai kompas dan konstruksi sejajar akhirnya diselesaikan dengan menggunakan teori Galois, yang melibatkan teori field dan teori grup. Contoh lain dari teori aljabar adalah aljabar linier, yang merupakan kajian umum ruang vektor, yang unsur-unsurnya disebut vektor memiliki kuantitas dan arah, dan dapat digunakan untuk memodelkan (hubungan antara) titik-titik dalam ruang. Ini adalah salah satu contoh dari fenomena bahwa domain geometri dan aljabar yang awalnya tidak terkait memiliki interaksi yang sangat kuat pada matematika modern. Kombinatorik mempelajari cara menghitung jumlah objek yang sesuai dengan struktur yang diberikan.

Ruang

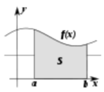
Kajian tentang ruang berasal dari geometri, khususnya, geometri Euclidean, yang menggabungkan ruang dan bilangan, dan mencakup teorema Pythagoras yang terkenal. Trigonometri adalah cabang matematika yang berhubungan dengan hubungan antara sisi dan sudut segitiga juga dengan fungsi trigonometri. Kajian ruang modern menggeneralisasikan ide-ide ini untuk memasukkan geometri dimensi tinggi, geometri non-Euclidean (yang memainkan peran sentral dalam relativitas umum) dan topologi. Kuantitas dan ruang keduanya berperan dalam geometri analitik, geometri diferensial, dan geometri aljabar. Konveks dan geometri diskrit dikembangkan untuk memecahkan masalah dalam teori bilangan dan analisis fungsional tetapi sekarang dikejar dengan mata untuk aplikasi dalam optimasi dan ilmu komputer. Dalam diferensial geometri, konsep bundel serat dan kalkulus pada manifold, khususnya, vektor dan kalkulus tensor. Dalam geometri aljabar, deskripsi objek geometris sebagai himpunan solusi persamaan polinomial, menggabungkan konsep kuantitas dan ruang, dan juga kajian grup topologi, yang menggabungkan struktur dan ruang. Grup Lie digunakan untuk mempelajari ruang, struktur, dan perubahan. Topologi dalam semua percabangannya mungkin merupakan area pertumbuhan terbesar dalam matematika abad ke-20; itu termasuk topologi "*set-point*", topologi teori himpunan, topologi aljabar dan topologi diferensial. Secara khusus, contoh topologi modern adalah teori metrizabilitas, aksiomatik teori himpunan, teori homotopy, dan teori Morse. Topologi juga mencakup dugaan Poincaré yang sekarang terpecahkan, dan area yang masih belum terpecahkan dari dugaan Hodge. Hasil lain dalam geometri dan topologi, termasuk teorema empat warna dan dugaan Kepler, telah dibuktikan hanya dengan bantuan komputer.



Geometry Trigonometry Differential geometry Topology Fractal geometry Measure theory

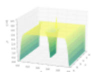
Perubahan

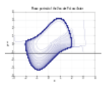
Memahami dan menggambarkan perubahan adalah tema umum dalam ilmu alam, dan kalkulus dikembangkan sebagai alat untuk menyelidikinya. Fungsi muncul di sini, sebagai konsep sentral yang menggambarkan kuantitas yang berubah. Studi ketat bilangan real dan fungsi peubah real dikenal sebagai analisis real, dengan analisis kompleks lapangan ekivalen untuk bilangan kompleks. Analisis fungsional memusatkan perhatian pada ruang fungsi (biasanya dimensi tak-berhingga). Salah satu dari banyak aplikasi analisis fungsional adalah mekanika kuantum. Banyak masalah secara alami mengarah pada hubungan antara kuantitas dan laju perubahannya, dan ini dipelajari sebagai persamaan diferensial. Banyak fenomena di alam dapat dijelaskan oleh sistem dinamis; teori *chaos* membuat cara yang tepat di mana banyak sistem ini menunjukkan perilaku yang tidak dapat diprediksi namun masih deterministik.



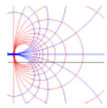
Calculus


Vector calculus


Differential equations


Complex analysis


Dynamical systems


Chaos theory

1.21 Matematika Terapan

Matematika terapan berkaitan dengan metode matematika yang biasanya digunakan dalam sains, teknik, bisnis, dan industri. Dengan demikian, "matematika terapan" adalah ilmu matematika dengan pengetahuan khusus. Istilah matematika terapan juga menggambarkan spesialisasi profesional di mana matematikawan bekerja pada masalah praktis; sebagai profesi yang berfokus pada masalah praktis, matematika terapan berfokus pada "perumusan, studi, dan penggunaan model matematika "dalam sains, teknik, dan bidang praktik matematika lainnya.

Di masa lalu, aplikasi praktis telah memotivasi pengembangan teori matematika, yang kemudian menjadi subjek studi dalam matematika murni, di mana matematika dikembangkan terutama untuk kepentingannya sendiri. Dengan demikian, aktivitas matematika terapan sangat terkait dengan penelitian dalam matematika murni.

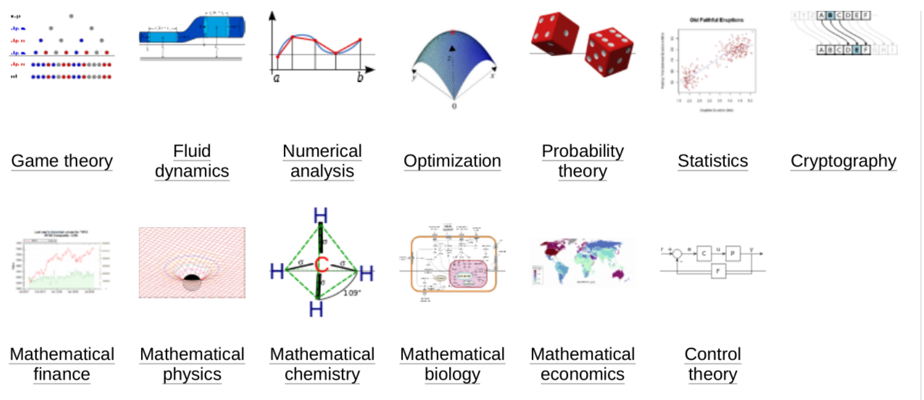
Statistik dan ilmu keputusan lainnya

Matematika terapan memiliki tumpang tindih yang signifikan dengan disiplin statistika, yang teorinya dirumuskan secara matematis, terutama dengan teori probabilitas. Ahli statistik (bekerja sebagai bagian dari proyek penelitian) "membuat data yang masuk akal" dengan pengambilan sampel acak dan dengan eksperimen acak; desain sampel statistik atau percobaan menentukan analisis data (sebelum data tersedia). Ketika mempertimbangkan kembali data dari eksperimen dan sampel atau ketika menganalisis data dari studi observasional, ahli statistik "memahami data" menggunakan seni pemodelan dan teori inferensi dengan pemilihan dan estimasi model; model estimasi dan prediksi konsekuensial harus diuji pada data baru.

Teori statistika mempelajari masalah keputusan seperti meminimalkan risiko (kehilangan yang diharapkan) dari tindakan statistika, seperti menggunakan prosedur dalam, estimasi parameter, pengujian hipotesis, dan memilih yang terbaik. Dalam bidang statistika matematika tradisional ini, masalah keputusan statistika dirumuskan dengan meminimalkan fungsi tujuan, seperti kehilangan atau biaya yang diharapkan, di bawah kendala spesifik: Misalnya, merancang survei sering kali melibatkan meminimalkan biaya estimasi rata-rata populasi dengan diberikan tingkat kepercayaan. Karena penggunaan optimasi, teori statistika matematika berbagi kepentingan dengan ilmu keputusan lainnya, seperti riset operasi, teori kontrol, dan matematika ekonomi.

Komputasi Matematika

Matematika komputasional mengusulkan dan mempelajari metode untuk memecahkan masalah matematika yang biasanya terlalu besar untuk kapasitas numerik manusia. Analisis numerik mempelajari metode untuk masalah dalam analisis menggunakan analisis fungsional dan teori aproksimasi; analisis numerik meliputi studi aproksimasi dan diskritisasi secara luas dengan perhatian khusus untuk kesalahan pembulatan. Analisis numerik dan, yang lebih luas, komputasi ilmiah juga mempelajari topik-topik non-analitik ilmu matematika, terutama matriks algoritmik dan teori grafik. Bidang lain dari matematika komputasi termasuk aljabar komputer dan perhitungan simbolik.



Gambar 1.2:

1.22 Penghargaan matematika

Penghargaan yang paling bergengsi dalam matematika adalah ***Fields Medal***, didirikan pada tahun 1936 dan diberikan setiap empat tahun (kecuali sekitar Perang Dunia II) kepada sebanyak empat individu. Medali ***Fields*** sering dianggap setara dengan matematika Hadiah Nobel.

Sisi lempeng bagian depan Medali Fields

Penghargaan bergengsi lainnya meliputi:

- Penghargaan Abel, dilembagakan pada tahun 2002 dan pertama dianugerahkan pada tahun 2003.
- Medali Chern untuk pencapaian seumur hidup, diperkenalkan pada tahun 2010.
- Penghargaan Wolf dalam bidang matematika, juga untuk pencapaian seumur hidup, dilembagakan pada tahun 1978.

Daftar masyhur 23 soal terbuka, disebut "Masalah Hilbert", disusun pada tahun 1900 oleh matematikawan Jerman David Hilbert. Daftar ini mendapat sambutan hebat di kalangan matematikawan, dan setidaknya 13 soal (tergantung cara menafsirkan) kini telah diselesaikan. Daftar baru dari tujuh soal penting, berjudul "Masalah Milenium", diterbitkan pada tahun 2000. Hanya satu dari mereka, hipotesis Riemann, menggandakan salah satu masalah Hilbert. Solusi untuk semua soal ini dijanjikan hadiah 1 juta dolar. Kini, hanya satu dari masalah ini yang telah diselesaikan, yaitu konjektur Poincaré.

Bab 2

Filsafat

Filsafat (dari bahasa Yunani $\phi\iota\lambda o\sigma o\varphi\iota\alpha$, filsafat, secara harfiah "cinta kebijaksanaan") adalah studi pertanyaan umum dan mendasar tentang keberadaan, pengetahuan, nilai-nilai, akal, pikiran, dan bahasa. Pertanyaan seperti itu sering diajukan sebagai masalah untuk dipelajari atau diselesaikan. Istilah ini mungkin diciptakan oleh Pythagoras (c.570-495 BCE). Metode filosofis termasuk pertanyaan, kritis diskusi, argumen rasional, dan presentasi sistematis. Pertanyaan filosofis klasik meliputi: Apakah mungkin mengetahui sesuatu dan membuktikannya? Apa yang paling nyata? Para filsuf juga mengajukan pertanyaan yang lebih praktis dan konkret seperti: Apakah ada cara terbaik untuk hidup? Apakah lebih baik menjadi adil atau tidak adil (jika seseorang bisa lolos begitu saja)? Apakah manusia memiliki kehendak bebas?

Secara historis, "filsafat" mencakup segala pengetahuan. Dari zaman filsuf Yunani Kuno, Aristoteles hingga abad ke-19, "filsafat alam" meliputi astronomi, kedokteran, dan fisika. Sebagai contoh, Newton's 1687 Prinsip Matematika dari Filsafat Alam kemudian menjadi diklasifikasikan sebagai buku fisika. Pada abad ke-19, pertumbuhan universitas riset modern memimpin filosofi akademik dan disiplin ilmu lain untuk memprofesionalkan dan mengkhususkan diri. Di era modern, beberapa investigasi yang secara tradisional bagian dari filsafat menjadi disiplin ilmu yang terpisah, termasuk psikologi, sosiologi, linguistik, dan ekonomi.

Investigasi lain yang terkait erat dengan seni, sains, politik, atau kegiatan lain tetap menjadi bagian dari filsafat. Misalnya, kecantikan obyektif atau subyektif? Apakah ada banyak metode ilmiah atau hanya satu? Apakah utopia politik adalah mimpi yang penuh harapan atau tanpa harapan fantasi? Sub-bidang utama dari filsafat akademik termasuk metafisika ("berkaitan dengan sifat dasar dari realitas dan keberadaan "), epistemologi (tentang" sifat dan dasar pengetahuan [dan] ... batas dan validitasnya "), etika, estetika, filsafat politik, logika dan filsafat sains.

2.1 Pengantar

Pengetahuan
Secara tradisional, istilah "filsafat" mengacu pada setiap badan pengetahuan. Dalam pengertian ini, filsafat berkaitan erat dengan agama, matematika, ilmu alam, pendidikan dan politik. Pendapat Newton pada 1687 *Prinsip Matematika dari Filsafat Alam* adalah diklasifikasikan pada 2000-an sebagai buku fisika; dia menggunakan istilah "filsafat alam" karena digunakan untuk mencakup disiplin ilmu itu kemudian menjadi terkait dengan ilmu-ilmu seperti astronomi, kedokteran dan fisika.

Pada bagian pertama buku pertama Akademiknya, Cicero memperkenalkan pembagian filsafat ke dalam logika, fisika, dan etika. Dia sedang menyalin pembagian *Epicurus* dari doktrinnya menjadi kanon, fisika, dan etika. Di bagian tiga belas buku pertama *"Kehidupannya dan Pendapat para Filsuf Terkemuka"*, Diogenes Laërtius abad ke-3, sejarawan filsafat pertama, menetapkan divisi tradisional penyelidikan filosofis menjadi tiga bagian:

- Filsafat alam ("fisika," dari *ta physika*, "hal-hal yang berkaitan dengan alam (physis)" adalah studi tentang konstitusi dan proses transformasi di dunia fisik;

- Filsafat moral ("etika," dari *êthika*, secara harfiah, "berkaitan dengan karakter, watak, perilaku") adalah studi tentang kebaikan, benar dan salah, keadilan dan kebajikan.

- Filsafat metafisik ("logika") adalah studi tentang keberadaan, sebab akibat, Tuhan, logika, bentuk dan abstrak lainnya benda ("*meta ta physika*").

Pembagian ini tidak usang tetapi telah berubah. Filosofi alam telah dibagi menjadi berbagai ilmu alam, terutama astronomi, fisika, kimia, biologi, dan kosmologi. Filsafat moral telah melahirkan ilmu-ilmu sosial, tetapi masih memasukkan teori nilai (termasuk estetika, etika, filsafat politik, dll.). Filsafat metafisik telah melahirkan ilmu-ilmu formal seperti logika, matematika dan filsafat sains, tetapi masih mencakup epistemologi, kosmologi dan lain-lain.

Kemajuan filosofis

Banyak perdebatan filosofis yang dimulai pada zaman kuno masih diperdebatkan saat ini. Colin McGinn dan yang lainnya mengklaim tidak ada kemajuan filosofis telah terjadi selama interval itu. Chalmers dan yang lainnya, sebaliknya, melihat kemajuan dalam filsafat serupa untuk itu dalam sains, sementara Talbot Brewer berpendapat bahwa "kemajuan" adalah standar yang salah untuk menilai filosofis aktivitas.

2.2 Tinjauan sejarah

Dalam satu pengertian umum, filsafat dikaitkan dengan kebijaksanaan, budaya intelektual dan pencarian pengetahuan. Dalam pengertian itu, semua budaya dan masyarakat melek mengajukan pertanyaan filosofis seperti "bagaimana kita hidup" dan "apa sifat realitas". Luas dan konsepsi filosofi yang tidak memihak kemudian, menemukan penyelidikan yang masuk akal mengenai hal-hal seperti kenyataan, moralitas dan kehidupan di seluruh dunia peradaban.

Filsafat Barat
Filsafat Barat adalah tradisi filosofis dunia Barat dan berasal dari para pemikir Pra-Sokrates yang aktif di Yunani Kuno pada abad ke-6 SM seperti Thales (sekitar 624-546 SM) dan Pythagoras (sekitar 570-495 SM) yang mempraktikkan "cinta kebijaksanaan" (Philosophia) dan juga disebut fisiologoi (siswa physis, atau alam). Socrates adalah seorang filsuf yang sangat berpengaruh, yang bersikeras bahwa ia tidak memiliki kebijaksanaan tetapi pengejar kebijaksanaan. Filsafat Barat dapat dibagi menjadi tiga era: Kuno (Yunani-Romawi), filsafat Abad Pertengahan (Eropa Kristen), dan filsafat Modern.

Era kuno didominasi oleh sekolah-sekolah filsafat Yunani yang muncul dari berbagai murid Socrates, seperti Plato, yang mendirikan Akademi Platonis dan muridnya Aristoteles, mendirikan sekolah Peripatetik, yang keduanya sangat berpengaruh dalam tradisi Barat. Tradisi lain termasuk Sinisme, Stoicisme, Skeptisisme Yunani dan Epicureanisme. Topik-topik penting yang dicakup oleh orang Yunani termasuk metafisika (dengan teori-teori yang bersaing seperti itu sebagai atomisme dan monisme), kosmologi, sifat kehidupan yang dijalani dengan baik (eudaimonia), kemungkinan pengetahuan dan sifat nalar (logo). Dengan munculnya kekaisaran Romawi, filsafat Yunani juga semakin dibahas dalam bahasa Latin oleh orang Romawi seperti Cicero dan Seneca.

Filsafat Abad Pertengahan (abad 5-16) adalah periode setelah jatuhnya Kekaisaran Romawi Barat dan didominasi oleh kebangkitan agama Kristen maka dari itu mencerminkan keprihatinan teologis Yahudi-Kristen serta mempertahankan kesinambungan dengan pemikiran Yunani-Romawi. Masalah-masalah seperti keberadaan dan sifat Allah, sifat iman dan akal, metafisika, masalah kejahatan dibahas dalam periode ini. Beberapa pemikir utama Abad Pertengahan termasuk St.Augustine, Thomas Aquinas, Boethius, Anselmus dan Roger Bacon. Filsafat bagi para pemikir ini dipandang sebagai bantuan bagi Teologi (ancilla theologiae) dan karenanya mereka berusaha untuk menyelaraskan filosofi mereka dengan interpretasi mereka terhadap kitab suci. Periode ini melihat perkembangan Skolastik, metode kritis teks dikembangkan di universitas abad pertengahan berdasarkan pembacaan dekat dan perselisihan pada teks kunci. Periode Renaissance melihat peningkatan fokus pada klasik Pemikiran Yunani-Romawi dan humanisme yang tegar.

Filsafat modern awal di dunia Barat dimulai dengan pemikir seperti Thomas Hobbes dan René Descartes (1596–1650). Menyusul munculnya ilmu alam, filsafat modern prihatin dengan mengembangkan landasan sekuler dan rasional untuk pengetahuan dan pindah dari struktur otoritas tradisional seperti agama, pemikiran skolastik dan Gereja. Para filosof modern utama termasuk Spinoza, Leibniz, Locke, Berkeley, Hume, dan Kant. Filsafat abad ke-19 dipengaruhi oleh gerakan yang lebih luas yang disebut Pencerahan, dan termasuk tokoh-tokoh seperti Hegel tokoh kunci dalam idealisme Jerman, Kierkegaard yang mengembangkan fondasi untuk eksistensialisme, Nietzsche seorang anti-Kristen terkenal, John Stuart Mill yang mempromosikan Utilitarianisme, Karl Marx yang mengembangkan fondasi untuk Komunisme dan William James dari Amerika. Abad ke-20 menyaksikan perpecahan antara filsafat Analitik dan filsafat Kontinental, serta tren filosofis seperti Fenomenologi, Eksistensialisme, Positivisme Logika, Pragmatisme, dan Pergantian Linguistik.

Filosofi Timur Tengah

Daerah-daerah di Bulan Sabit yang subur, Iran dan Arab adalah rumah bagi literatur Kebijaksanaan filosofis paling awal yang diketahui dan saat ini sebagian besar didominasi oleh budaya Islam. Literatur hikmat awal dari bulan sabit yang subur adalah genre yang berusaha untuk mengajar orang tindakan etis, kehidupan praktis dan kebajikan melalui cerita dan peribahasa. Di Mesir Kuno, teks-teks ini dikenal sebagai *sebayt* ('ajaran') dan mereka adalah pusat pemahaman kita tentang Kuno Filsafat Mesir. Astronomi Babilonia juga memasukkan banyak spekulasi filosofis tentang kosmologi yang mungkin memengaruhi orang Yunani Kuno. Filsafat Yahudi dan Filsafat Kristen adalah tradisi religio-filosofis yang berkembang baik di Timur Tengah maupun di Eropa, yang keduanya memiliki teks-teks Yudais awal tertentu (terutama Tanakh) dan kepercayaan monoteistik. Pemikir Yahudi seperti Geonim dari Akademi Talmud di Babylonia dan Maimonides terlibat dengan filsafat Yunani dan Islam. Kemudian filsafat Yahudi datang di bawah pengaruh intelektual Barat yang kuat dan termasuk karya-karya Musa Mendelssohn yang mengantar Haskalah (Pencerahan Yahudi), eksistensialisme Yahudi dan Yudaisme Reformasi.

Filsafat Iran pra-Islam dimulai dengan karya Zoroaster, salah satu penganjur monoteisme pertama dan dualisme antara yang baik dan yang jahat. Kosmogoni dualistis ini kemudian memengaruhi perkembangan Iran seperti Manichaeisme, Mazdakisme, dan Zurvanisme. Pencerahan), eksistensialisme Yahudi dan Yudaisme Reformasi.

Setelah penaklukan Muslim, filsafat Islam awal mengembangkan tradisi filsafat Yunani ke arah inovatif baru. Zaman Keemasan Islam ini mempengaruhi perkembangan intelektual Eropa. Dua arus utama pemikiran Islam awal adalah Kalam yang berfokus pada teologi Islam dan Falsafa yang didasarkan pada Aristotelianisme dan Neoplatonisme. Pekerjaan dari Aristoteles sangat berpengaruh di antara falsafa seperti al-Kindi (abad ke-9), Avicenna (980-Juni 1037) dan Averroes (ke-12) abad). Yang lain seperti Al-Ghazali sangat kritis terhadap metode falsafa Aristotelian. Pemikir Islam juga mengembangkan metode ilmiah, kedokteran eksperimental, teori optik dan filsafat hukum. Ibn Khaldun berpengaruh pemikir dalam filsafat sejarah.

Di Iran beberapa sekolah filsafat Islam terus berkembang setelah Zaman Keemasan dan termasuk arus seperti Filsafat iluminasi, filsafat sufi, dan teosofi transenden. Dunia Arab abad ke-19 dan 20 melihat Nahda Gerakan (kebangkitan atau kebangkitan) yang mempengaruhi filsafat Islam kontemporer.

Filsafat India

Filsafat India (Sanskerta: darśana; 'pandangan dunia', 'ajaran') mengacu pada beragam tradisi filosofis yang muncul sejak zaman kuno di anak benua India. Jainisme dan Buddhisme berasal pada akhir periode Veda, sementara Hindu muncul sebagai perpaduan dari beragam tradisi, dimulai setelah akhir periode Veda.

Orang Hindu umumnya mengklasifikasikan tradisi-tradisi ini sebagai ortodoks atau heterodoks-āstika atau nāstika tergantung pada apakah mereka menerima otoritas Veda dan teori-teori Brahman dan Atman (jiwa, diri) di dalamnya. Sekolah ortodoks termasuk tradisi pemikiran Hindu, sedangkan sekolah heterodoks termasuk tradisi Buddha dan Jain. Sekolah-sekolah lain termasuk Ajñana, Ajivika dan Cārvāka yang punah karena sejarah mereka.

Konsep filosofis India yang penting yang dimiliki oleh filosofi India termasuk dharma, karma, artha, kama, dukkha (penderitaan), anitya (anicca, ketidakkekalan), dhyana (jhana, meditasi), pelepasan (dengan atau tanpa monastisisme atau asketisme), berbagai samsara dengan siklus kelahiran kembali, moksha (nirwana, kaivalya, pembebasan dari kelahiran kembali), dan kebajikan seperti ahimsa.

Filsafat Asia Timur

Pemikiran filosofis Asia Timur dimulai di Tiongkok Kuno, dan filsafat Cina dimulai pada Dinasti Zhou Barat dan periode-periode berikutnya setelah kejatuhannya ketika "Seratus Sekolah Pemikiran" berkembang (abad ke-6 hingga 221 SM). Periode ini ditandai oleh intelektual dan signifikan perkembangan budaya dan melihat maraknya sekolah filosofis utama Cina, Konfusianisme, Legalisme, dan Daoisme serta banyak sekolah lain yang kurang berpengaruh. Tradisi filosofis ini berkembang metafisik, teori-teori politik dan etika seperti Tao, Yin dan yang, Ren dan Li yang, bersama dengan Buddhisme Cina, secara langsung memengaruhi filsafat Korea, Vietnam filsafat dan filsafat Jepang (yang juga termasuk Shinto asli tradisi). Agama Buddha mulai berdatangan di Cina pada masa Dinasti Han (206 SM) - 220 CE), melalui transmisi jalan Sutra bertahap dan melalui asli pengaruh mengembangkan bentuk-bentuk Cina yang berbeda (seperti Chan/Zen) yang menyebar ke seluruh lingkup budaya Asia Timur. Selama kemudian dinasti Cina seperti Dinasti Ming (1368–1644) serta dinasti Joseon Korea (1392–1897) bangkit kembali Neo-Konfusianisme yang dipimpin oleh para pemikir seperti Wang Yangming (1472-1529) menjadi aliran pemikiran yang dominan, dan dipromosikan oleh negara kekaisaran.

Di era Modern, para pemikir Cina memasukkan ide-ide dari filsafat Barat. Cina Filsafat Marxis berkembang di bawah pengaruh Mao Zedong, sementara seorang Cina pragmatisme di bawah Hu Shih dan kebangkitan Konfusianisme Baru dipengaruhi oleh Xiong Shili. Sementara itu pemikiran Jepang modern berkembang di bawah pengaruh Barat yang kuat seperti studi tentang Ilmu Pengetahuan Barat (Rangaku) dan intelektual modern Meirokusha masyarakat yang menarik dari pemikiran pencerahan Eropa. Abad ke-20 menyaksikan kebangkitan Negara Shinto dan juga nasionalisme Jepang. Sekolah Kyoto, yang berpengaruh dan sekolah filsafat Jepang yang unik dikembangkan dari fenomenologi Barat dan Jepang Filsafat Buddha Jepang abad pertengahan seperti Dogen.

Filsafat Afrika

Filsafat Afrika adalah filsafat yang diproduksi oleh orang-orang Afrika, filsafat yang menghadirkan Pandangan dunia Afrika, ide dan tema, atau filsafat yang menggunakan Afrika yang berbeda metode filosofis. Pemikiran Afrika modern telah disibukkan dengan Ethnophilosophy, dengan mendefinisikan makna filosofi Afrika dan karakteristiknya yang unik dan apa artinya menjadi orang Afrika. Selama abad ke-17, filsafat Ethiopia berkembang tradisi sastra yang kuat sebagaimana dicontohkan oleh Zera Yacob. Orang Afrika awal lainnya filsuf adalah Anton Wilhelm Amo (c. 1703-1759) yang menjadi filsuf yang disegani di Jerman. Afrika yang berbeda ide-ide filosofis termasuk Ujamaa, ide Bantu 'Force', Négritude, Pan-Africanism dan Ubuntu. Afrika kontemporer pemikiran juga telah melihat perkembangan filsafat Profesional dan filsafat Africana, literatur filosofis Diaspora Afrika yang mencakup arus seperti eksistensialisme kulit hitam oleh orang Afrika-Amerika. Para pemikir Afrika modern telah melakukannya dipengaruhi oleh Marxisme, literatur Afrika-Amerika, teori Kritis, teori ras Kritis, Postkolonialisme dan Feminisme.

Filsafat Amerika Pribumi
Filosofi Amerika Pribumi adalah filsafat masyarakat Pribumi orang Amerika. Ada berbagai kepercayaan dan tradisi di antara ini budaya Amerika yang berbeda. Di antara beberapa penduduk asli Amerika di Amerika Menyatakan ada kepercayaan pada prinsip metafisik yang disebut "Misteri Hebat" (Siouan: Wakan Tanka, Algonquian: Gitche Manitou). Lain dibagikan secara luas Konsepnya adalah Orenda atau "kekuatan spiritual". Menurut Peter M.Whiteley, untuk penduduk asli Amerika, "Mind mendapat informasi kritis dari pengalaman transendental (mimpi, visi, dan sebagainya) serta oleh akal." Praktik untuk mengakses pengalaman transendental ini disebut Shamanisme. Fitur lain dari pandangan dunia asli Amerika adalah perpanjangan dari etika untuk hewan dan tumbuhan bukan manusia.

Di Mesoamerika, filsafat Aztec adalah tradisi intelektual yang dikembangkan oleh individu yang disebut Tlamatini ('mereka yang tahu sesuatu') dan gagasannya dilestarikan dalam berbagai kodeks Aztec. Pandangan dunia Aztec mengemukakan konsep energi atau kekuatan universal pamungkas yang disebut Ometeotl yang dapat diterjemahkan sebagai "Energi Kosmik Ganda" dan mencari cara untuk hidup seimbang dengan dunia yang terus berubah, "licin". Teori Teotl dapat dilihat sebagai bentuk Pantheisme. Filsuf Aztec mengembangkan teori metafisika, epistemologi, nilai-nilai, dan estetika. Etika Aztec difokuskan pada pencarian tlamatiliztli (pengetahuan, kebijaksanaan) yang didasarkan pada moderasi dan keseimbangan dalam semua tindakan seperti dalam pepatah Nahua "kebaikan tengah diperlukan". Peradaban Inca juga memiliki kelas elit sarjana-filsuf yang disebut Amawtakuna yang penting dalam sistem pendidikan Inca sebagai guru agama, tradisi, sejarah dan etika. Konsep-konsep kunci dari pemikiran Andean adalah Yanantin dan Masintin yang melibatkan teori "saling melengkapi" yang melihat polaritas (seperti pria/wanita, gelap/terang) sebagai bagian yang saling tergantung dari keseluruhan yang harmonis.

2.3 Kategori

Pertanyaan filosofis dapat dikelompokkan ke dalam kategori. Pengelompokan ini memungkinkan para filsuf untuk fokus pada serangkaian topik serupa dan berinteraksi dengan pemikir lain yang tertarik pada pertanyaan yang sama. Pengelompokan juga membuat filosofi lebih mudah bagi siswa untuk mendekati. Siswa dapat mempelajari prinsip-prinsip dasar yang terlibat dalam satu aspek lapangan tanpa kewalahan dengan keseluruhannya seperangkat teori filsafat.

Berbagai sumber menyajikan skema kategorikal yang berbeda. Kategori yang diadopsi dalam bahasan ini bertujuan untuk luas dan kesederhanaan. Kelima cabang utama ini dapat dipisahkan menjadi cabang pembantu dan setiap cabang pembantu berisi banyak bidang kajian tertentu.

- Metafisika dan epistemologi
- Teori nilai
- Sains, logika dan matematika
- Sejarah filsafat Barat
- Tradisi filosofis

Pembagian ini tidak lengkap, atau saling eksklusif. (Seorang filsuf mungkin berspesialisasi dalam epistemologi Kantian, atau Estetika Platonis, atau filsafat politik modern.) Lebih jauh, penyelidikan filosofis ini terkadang saling tumpang tindih lainnya dan dengan pertanyaan lain seperti sains, agama atau matematika.

Metafisika

Metafisika adalah studi tentang fitur paling umum dari realitas, seperti keberadaan, waktu, objek dan sifat-sifatnya, keutuhan dan bagian mereka, peristiwa, proses dan sebab akibat dan hubungan antara pikiran dan tubuh. Metafisika meliputi kosmologi, studi tentang dunia secara keseluruhan dan ontologi, studi tentang keberadaan.

Poin utama dari perdebatan adalah antara realisme, yang menyatakan bahwa ada entitas yang ada secara independen dari persepsi mental dan idealisme mereka, yang berpendapat bahwa realitas dibangun secara mental atau tidak material. Metafisika membahas topik identitas. Esensi adalah seperangkat atribut yang membuat objek seperti apa dasarnya dan tanpa yang itu kehilangan identitasnya sementara kecelakaan adalah properti yang dimiliki objek, tanpa itu objek masih dapat mempertahankan identitasnya.

Partikel adalah objek yang dikatakan ada dalam ruang dan waktu, berbeda dengan objek abstrak, seperti angka, dan universal, yang merupakan properti yang dimiliki oleh banyak partikular, seperti kemerahan atau jenis kelamin. Jenis keberadaan, jika ada, benda-benda universal dan abstrak adalah masalah perdebatan.

Epistemologi

Epistemologi adalah studi tentang pengetahuan (episteme Yunani). Ahli epistemologi mempelajari sumber pengetahuan yang diduga, termasuk intuisi, alasan apriori, memori, pengetahuan persepsi, pengetahuan diri dan kesaksian. Mereka juga bertanya: Apa itu kebenaran? Apakah pengetahuan dibenarkan keyakinan sejati? Apakah ada kepercayaan yang dibenarkan? Pengetahuan yang diduga mencakup pengetahuan proposisional (pengetahuan bahwa ada sesuatu yang terjadi), pengetahuan (pengetahuan tentang bagaimana melakukan sesuatu) dan kenalan (keakraban dengan seseorang atau sesuatu). Ahli epistemologi memeriksa ini dan bertanya apakah pengetahuan itu benar-benar mungkin.

Skeptisisme adalah posisi yang meragukan klaim pengetahuan. Argumen regresi, masalah mendasar dalam epistemologi, terjadi ketika, untuk benar-benar membuktikan pernyataan apa pun, pembenarannya sendiri perlu didukung oleh pembenaran lain. Rantai ini dapat berlangsung selamanya, yang disebut infinitisme, pada akhirnya dapat mengandalkan keyakinan dasar yang dibiarkan tidak terbukti, yang disebut fondasionalisme, atau dapat berjalan dalam lingkaran sehingga pernyataan dimasukkan dalam rantai pembenarannya sendiri, yang disebut koherentisme.

Rasionalisme adalah penekanan pada penalaran sebagai sumber pengetahuan. Ini terkait dengan pengetahuan apriori, yang tidak tergantung pada pengalaman, seperti matematika dan deduksi logis. Empirisme adalah penekanan pada bukti pengamatan melalui pengalaman indrawi sebagai sumber pengetahuan.

Di antara banyak topik dalam metafisika dan epistemologi, yang ditafsirkan secara luas adalah:

- Filsafat bahasa mengeksplorasi sifat, asal-usul dan penggunaan bahasa.
- Filsafat pikiran mengeksplorasi sifat pikiran dan hubungannya dengan tubuh. Ini dilambangkan dengan perselisihan antara dualisme dan materialisme. Dalam beberapa tahun terakhir cabang ini telah menjadi terkait dengan ilmu kognitif.
- Filsafat sifat manusia menganalisis karakteristik unik manusia, seperti rasionalitas, politik dan budaya.

- Metafilosofi mengeksplorasi tujuan filsafat, batasan-batasannya, dan metode-metodenya.

Teori nilai

Teori nilai (atau aksiologi) adalah cabang utama dari filsafat yang membahas topik-topik seperti kebaikan, keindahan dan keadilan. Teori nilai meliputi etika, estetika, filsafat politik, filsafat feminis, filsafat hukum dan banyak lagi.

Etika

Etika, atau "filsafat moral", mempelajari dan mempertimbangkan apa yang baik dan buruk, nilai benar dan salah, dan baik dan buruk. Investigasi utamanya meliputi bagaimana menjalani kehidupan yang baik dan mengidentifikasi standar moralitas. Ini juga mencakup meta-investigasi tentang apakah ada cara terbaik untuk hidup atau standar terkait. Utama Cabang-cabang etika adalah etika normatif, meta-etika dan etika terapan.

Area perdebatan utama melibatkan konsekuensialisme, di mana tindakan dinilai oleh hasil potensial tindakan itu, seperti memaksimalkan kebahagiaan, yang disebut utilitarianisme, dan deontologi, di mana tindakan dinilai berdasarkan bagaimana mereka mematuhi prinsip, terlepas dari tujuan negatif.

Estetika

Estetika adalah "refleksi kritis pada seni, budaya dan alam." Ini membahas sifat seni, keindahan dan rasa, kenikmatan, nilai-nilai emosional, persepsi dan dengan kreasi dan apresiasi keindahan. Ini lebih tepatnya didefinisikan sebagai studi tentang nilai-nilai sensorik atau sensori-emosional, kadang-kadang disebut penilaian dari sentimen dan rasa. Pembagian utamanya adalah teori seni, teori sastra, teori film dan teori musik. Contoh dari teori seni adalah untuk membedakan seperangkat prinsip yang mendasari karya seniman tertentu atau gerakan artistik seperti Kubis estetis. Filosofi film menganalisis film dan pembuat film untuk konten filosofis mereka dan mengeksplorasi film (gambar, sinema, dll.) sebagai media refleksi dan ekspresi filosofis.

Filsafat Politik

Filsafat politik adalah studi tentang pemerintah dan hubungan individu (atau keluarga dan suku) dengan masyarakat termasuk negara. Ini mencakup pertanyaan tentang keadilan, hukum, properti, dan hak serta kewajiban warga negara. Politik dan etika adalah mata pelajaran yang terkait secara tradisional, karena keduanya membahas pertanyaan tentang bagaimana orang harus hidup bersama.

Cabang lain dari teori nilai :

- Filsafat hukum (sering disebut yurisprudensi) mengeksplorasi beragam teori yang menjelaskan sifat dan interpretasi hukum.
- Filsafat pendidikan menganalisis definisi dan isi pendidikan, serta tujuan dan tantangan pendidik.
- Filsafat feminis mengeksplorasi pertanyaan seputar gender, seksualitas dan tubuh termasuk sifat feminisme itu sendiri sebagai sosial dan gerakan filosofis.
- Filsafat olahraga menganalisis olahraga, permainan, dan bentuk permainan lainnya sebagai aktivitas manusia yang sosiologis dan unik.

Logika, sains, dan matematika

Banyak disiplin ilmu menghasilkan pertanyaan filosofis. Hubungan antara "X" dan "filosofi X" masih diperdebatkan. Richard Feynman berpendapat bahwa filsafat suatu topik tidak relevan dengan studi utamanya, dengan mengatakan bahwa "filsafat ilmu sama bermanfaatnya bagi para ilmuwan seperti halnya ilmu burung bagi burung." Curtis White, sebaliknya, berpendapat bahwa alat filosofis sangat penting untuk humaniora, ilmu pengetahuan dan ilmu sosial.

Topik-topik filsafat ilmu adalah bilangan, simbol dan metode penalaran formal seperti yang digunakan dalam ilmu sosial dan ilmu alam.

Logika

Logika adalah studi tentang penalaran dan argumen. Argumen adalah "serangkaian pernyataan terhubung yang dimaksudkan untuk menetapkan proposisi." Serangkaian pernyataan yang terhubung adalah "premis" dan proposisi adalah kesimpulan. Sebagai contoh:

1. Semua manusia adalah fana. (premis)
2. Socrates adalah manusia. (premis)
3. Oleh karena itu, Socrates fana. (kesimpulan)

Penalaran deduktif adalah ketika, diberikan premis tertentu, kesimpulan tidak dapat dihindari tersirat. Aturan inferensi digunakan untuk menyimpulkan kesimpulan seperti, mode ponens, di mana diberikan "A" dan "Jika A maka B", maka "B" harus disimpulkan.

Karena penalaran yang masuk akal adalah elemen penting dari semua ilmu, ilmu sosial dan disiplin ilmu humaniora, logika menjadi ilmu formal. Sub-bidang termasuk logika matematika, logika filosofis, logika Modal, logika komputasi dan non-klasik logika. Sebuah pertanyaan utama dalam filsafat matematika adalah apakah entitas matematika itu objektif dan ditemukan, disebut realisme matematika, atau diciptakan, disebut antirealisme matematika.

Filsafat Ilmu
Cabang ini mengeksplorasi fondasi, metode, sejarah, implikasi, dan tujuan sains. Banyak sub-bagian yang sesuai dengan cabang ilmu tertentu. Sebagai contoh, filsafat biologi berurusan secara khusus dengan masalah metafisik, epistemologis dan etika dalam ilmu biomedis dan kehidupan. Filsafat matematika mempelajari asumsi filosofis, dasar dan implikasi matematika.

Sejarah Filsafat

Beberapa filsuf berspesialisasi dalam satu periode sejarah atau lebih. Sejarah filsafat (studi periode tertentu, individu atau sekolah) terkait dengan tetapi tidak sama dengan filsafat sejarah (aspek teoritis sejarah, yang berkaitan dengan pertanyaan seperti sifat bukti sejarah dan kemungkinan objektivitas). Ceramah Hegel tentang *Filsafat Sejarah* mempengaruhi banyak filsuf untuk menafsirkan kebenaran dengan mengingat sejarah, sebuah pandangan yang disebut historisisme.

Filsafat Agama

Filsafat agama berurusan dengan pertanyaan-pertanyaan yang melibatkan agama dan ide-ide keagamaan dari perspektif filosofis netral (sebagai lawan dari teologi yang dimulai dari keyakinan agama). Secara tradisional, pertanyaan-pertanyaan keagamaan tidak dilihat sebagai bidang terpisah dari filsafat yang tepat, gagasan tentang bidang terpisah hanya muncul pada abad ke-19.

Isu-isu termasuk keberadaan Tuhan, hubungan antara akal dan iman, pertanyaan epistemologi agama, hubungan antara agama dan sains, bagaimana menafsirkan pengalaman keagamaan, pertanyaan tentang kemungkinan akhirat, masalah bahasa agama dan keberadaan jiwa-jiwa dan tanggapan terhadap pluralisme dan keragaman agama.

2.4 Pendekatan lain

Berbagai pendekatan akademik dan non-akademik lainnya telah dieksplorasi.

Filsafat Terapan

Ide-ide yang dikandung oleh masyarakat memiliki dampak mendalam pada tindakan yang dilakukan masyarakat. Weaver berpendapat bahwa ide memiliki konsekuensi. Filosofi menghasilkan aplikasi seperti yang ada di etika-etika terapan khususnya filsafat politik. Filsafat politik dan ekonomi Konfusius, Sun Tzu, Chanakya, Ibn Khaldun, Ibn Rushd, Ibn Taymiyyah, Machiavelli, Leibniz, Hobbes, Locke, Rousseau, Adam Smith, John Stuart Mill, Marx, Tolstoy, Gandhi dan Martin Luther King Jr. telah digunakan untuk membentuk dan membenarkan pemerintah dan tindakan mereka. Pendidikan progresif sebagaimana diperjuangkan oleh Dewey memiliki dampak mendalam pada praktik pendidikan AS abad ke-20. Keturunan dari gerakan ini termasuk upaya dalam filsafat untuk anak-anak, yang merupakan bagian dari filsafat pendidikan. Filosofi politik perang Clausewitz telah memiliki efek mendalam pada kenegaraan, politik internasional dan strategi militer di abad ke-20, terutama di seluruh Dunia Perang II. Logika penting dalam matematika, linguistik, psikologi, ilmu komputer dan teknik komputer.

Aplikasi penting lainnya dapat ditemukan dalam epistemologi, yang membantu dalam memahami persyaratan untuk pengetahuan, bukti yang kuat dan keyakinan yang dibenarkan (penting dalam hukum, ekonomi, teori keputusan dan sejumlah disiplin ilmu lainnya). Filsafat sains membahas dasar-dasar metode ilmiah dan telah mempengaruhi sifat penyelidikan ilmiah dan argumentasi. Filsafat karenanya memiliki implikasi mendasar bagi sains secara keseluruhan. Sebagai contoh, pendekatan empiris yang ketat dari B.F.Skiner paham-perilaku mempengaruhi selama beberapa dekade pendekatan pendirian psikologis Amerika. Ekologi yang dalam dan hak-hak binatang memeriksa situasi moral manusia sebagai penghuni dunia yang memiliki penghuni non-manusia untuk dipertimbangkan juga. Estetika dapat membantu menafsirkan diskusi musik, sastra, seni plastik, dan seluruh dimensi kehidupan artistik. Secara umum, berbagai filosofi berusaha untuk memberikan kegiatan praktis dengan pemahaman yang lebih dalam tentang dasar-dasar teoretis atau konseptual dari bidang mereka.

2.5 Masyarakat

Beberapa dari mereka yang mempelajari filsafat menjadi filsuf profesional, biasanya dengan bekerja sebagai profesor yang mengajar, meneliti dan menulis di lembaga akademik. Namun, sebagian besar mahasiswa filsafat akademik kemudian berkontribusi pada hukum, jurnalisme, agama, ilmu, politik, bisnis, atau berbagai seni. Sebagai contoh, tokoh publik yang memiliki gelar dalam filsafat termasuk komedian Steve Martin dan Ricky Gervais, pembuat film Terrence Malick, Paus John Paul II, salah satu pendiri Wikipedia, Larry

Sanger, pengusaha teknologi Peter Thiel, Hakim Agung Stephen Bryer dan kandidat wakil presiden Carly Fiorina.

Upaya terbaru untuk memanfaatkan masyarakat umum untuk pekerjaan dan relevansi para filsuf termasuk Hadiah Berggruen jutaan dolar, pertama kali diberikan kepada Charles Taylor pada tahun 2016.

2.6 Profesional

Jerman adalah negara pertama yang memprofesionalkan filsafat. Doktor filsafat (PhD) berkembang di Jerman sebagai kredensial Guru terminal pada pertengahan abad ke-17. Pada akhir 1817, Georg Wilhelm Friedrich Hegel adalah filsuf pertama yang diangkat sebagai Profesor oleh Negara, yaitu oleh Menteri Pendidikan Prusia, sebagai akibat dari reformasi Napoleon di Prusia. Di Amerika Serikat, profesionalisasi tumbuh dari reformasi sistem pendidikan tinggi Amerika yang sebagian besar didasarkan pada model Jerman.

Dalam abad terakhir, filsafat semakin menjadi disiplin profesional yang dipraktikkan di universitas, seperti disiplin akademis lainnya. Dengan demikian, ia menjadi kurang umum dan lebih terspesialisasi. Dalam pandangan seorang sejarawan terkemuka baru-baru ini: "Filsafat telah menjadi filsuf yang sangat terorganisir, volume publikasi telah membengkak, dan subbidang penyelidikan filosofis yang serius telah berlipat ganda. Tidak hanya bidang filsafat yang luas saat ini terlalu luas untuk dianut oleh satu pikiran, sesuatu yang serupa benar bahkan untuk banyak subbidang yang sangat terspesialisasi." Beberapa filsuf berpendapat bahwa profesionalisasi ini telah secara negatif memengaruhi disiplin.

Hasil akhir dari profesionalisasi untuk filsafat berarti bahwa pekerjaan yang dilakukan di lapangan sekarang hampir secara eksklusif dilakukan oleh profesor universitas bergelar doktor di bidang penerbitan dalam jurnal yang sangat teknis, ditinjau sejawat. Sementara itu tetap umum di antara populasi pada umumnya bagi seseorang untuk memiliki seperangkat pandangan agama, politik atau filosofis yang mereka anggap milik mereka "filsafat", pandangan-pandangan ini jarang diinformasikan atau dihubungkan dengan pekerjaan yang dilakukan dalam filsafat profesional saat ini. Lebih jauh, tidak seperti banyak sains yang menjadi industri buku, majalah, dan acara televisi yang sehat yang dimaksudkan untuk mempopulerkan sains dan mengkomunikasikan hasil teknis bidang ilmiah kepada masyarakat umum, karya-karya para filsuf profesional diarahkan pada sebuah audiens di luar profesi tetap langka. Buku Philosopher Michael Sandel Justice: *What's The Right Think to Do*? dan karya Harry Frankfurt *On Bullshit* adalah contoh dari karya-karya yang memiliki perbedaan tidak lazim karena ditulis oleh para filsuf profesional tetapi diarahkan dan pada akhirnya populer di kalangan khalayak non-filsuf yang lebih luas. Kedua karya tersebut menjadi best seller New York Times.

Bab 3

Filsafat Matematika

Filsafat matematika adalah cabang filsafat yang mempelajari asumsi, dasar, dan implikasi matematika; maksud untuk memberikan sudut pandang sifat dan metodologi matematika; untuk memahami tempat matematika dalam kehidupan manusia. Sifat logis dan struktural matematika itu sendiri membuat penelitian ini luas dan unik di antara rekan-rekan filosofisnya.

3.1 Sejarah

Asal usul matematika adalah patuh pada kaidah argumen. Apakah kelahiran matematika adalah kejadian acak atau disebabkan oleh kebutuhan yang sepatutnya bergantung pada mata pelajaran lain, misalnya fisika, hal ini masih merupakan masalah perdebatan yang produktif sampai saat kini.

Banyak pemikir telah menyumbangkan ide-ide mereka mengenai sifat matematika. Saat ini, beberapa filsuf bertujuan matematika untuk memberikan pertanggungjawaban bentuk penyelidikan ini dan produk-produknya sebagaimana adanya, sementara yang lain menekankan peran untuk diri mereka sendiri melampaui interpretasi sederhana hingga analisis kritis. Ada tradisi filsafat matematika pada filsafat Barat dan Filsafat timur. Filsafat matematika Barat sampai sejauh Pythagoras, yang menggambarkan teori "semuanya ada matematika "(mathematicism), Plato, yang diparafrasekan Pythagoras, dan mempelajari status ontologis objek matematika, dan Aristoteles, yang mempelajari logika dan masalah-masalah yang berkaitan dengan ketakterhinggaan (aktual versus potensial).

Filsafat Yunani tentang matematika sangat dipengaruhi oleh studi geometri mereka. Sebagai contoh, pada suatu waktu, orang Yunani berpendapat bahwa 1 (satu) bukan bilangan, melainkan sebarang satuan panjang. Suatu bilangan didefinisikan sebagai suatu kuantitas/banyak. Karena itu, 3, misalnya, mewakili banyak unit tertentu, dengan demikian tidak "benar-benar" ia merupakan bilangan. Di suatu hal lain, argumen serupa dibuat bahwa 2 bukan bilangan tetapi gagasan mendasar dari suatu pasangan. Pandangan-pandangan ini berasal dari sudut pandang garis lurus-dan-kompas yang sangat geometris dari orang-orang Yunani: sekedar sebagai garis-garis yang digambar dalam masalah geometris diukur secara proporsional dengan garis yang ditarik/dimulai dari sebarang titik awal, demikian juga bilangan-bilangan pada garis bilangan diukur dalam proporsi ke sebarang "bilangan" atau "satu" sebagai awal.

Pembunuhan di Laut karena Irrasional

Pembahasan berikut ini tentang sejarah terbunuhnya ***Hippasus*** seorang penganut Pythagoras.

Ide-ide Yunani kuno tentang bilangan-bilangan kemudian dikalahkan oleh penemuan irasionalitas akar kuadrat dari dua $\sqrt{2}$. Hippasus, seorang murid Pythagoras, menunjukkan bahwa diagonal dari suatu persegi dengan panjang sisinya satu satuan panjang tidak dapat dibandingkan dengan sisinya (satuan panjang): dengan kata lain ia membuktikan tidak ada bilangan (rasional) yang ada yang secara akurat bisa menggambarkan proporsi diagonal dari persegi satuan. Ini menyebabkan evaluasi ulang yang signifikan dari filsafat Yunani matematika. Menurut legenda, sesama Pythagoras sangat trauma dengan penemuan ini sehingga mereka membunuh ***Hippasus*** untuk menghentikannya menyebarkan ide sesatnya. Simon Stevin adalah salah satu yang pertama di Eropa yang menantang gagasan Yunani pada abad ke-16. Dimulai dengan Leibniz, fokus bergeser kuat ke hubungan antara matematika dan logika. Perspektif ini mendominasi filsafat matematika melalui zaman Frege dan Russell, tetapi dipertanyakan oleh perkembangan di akhir abad ke-19 dan awal abad ke-20.

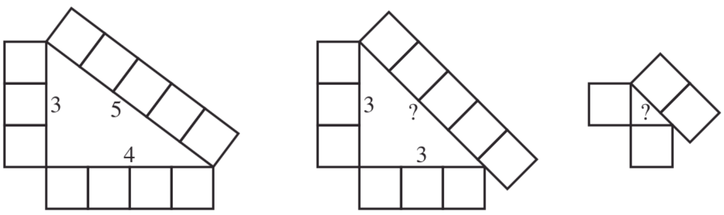
Jauh setelah Pythagoras meninggal, beberapa pengagumnya terpesona oleh angka. Tradisi ini akhirnya menghasilkan kisah pembunuhan yang menawan. Jika bukan Pythagoras sendiri, setidaknya beberapa pengagumnya tampaknya tertarik pada matematika. Namun bukti paling awal tidak gratis. Ini menunjukkan bahwa beberapa orang Pythagoras berfokus pada bilangan-bilangan yang tidak terlalu serius. Plato mengkritik orang-orang Pythagoras karena menganalisis secara numerik keharmonisan string yang dipetik, daripada menganalisis hubungan di antara bilangan-bilangan itu sendiri. 1). Aristoteles berulang kali mengkritik “orang-orang yang disebut Pythagoras” karena percaya bahwa benda, benda material, terbuat dari angka. 2). Dan kita juga mungkin berpikir: “Benda terbuat dari angka? Omong kosong!” Gagasan kuno bahwa benda terbuat dari bilangan, sehingga bilangan adalah benda yang terlihat, bukan abstraksi yang terpisah, tampak aneh. Tetapi menjadi masuk akal setelah kita menyadari bahwa banyak siswa saat ini berpikir bahwa objek material terdiri dari hal-hal matematika: gambar geometris tiga dimensi, partikel subatomik bola.

Terlepas dari laporan Aristoteles, kami tidak memiliki dokumen di mana ada Pythagoras kuno khusus mengklaim bahwa benda terbuat dari bilangan. Tetapi ada bukti bahwa setidaknya beberapa individu menilai bilangan sebagai properti penting dan menghargai kemampuan kita untuk memikirkan bilangan. Misalnya, kira-kira seabad setelah Pythagoras meninggal, Philolaus dilaporkan mengatakan, “Dan memang semua hal yang diketahui memiliki jumlah. Karena tidak mungkin sesuatu apa pun dipahami atau diketahui tanpa ini.” 3). Ini adalah jenis pernyataan kuno yang sekarang diapresiasi oleh ahli matematika, karena menyerupai pemikiran kita: bahwa untuk benar-benar mengetahui hal-hal penting untuk berpikir secara numerik. Philolaus juga menghargai peran rasio sederhana bilangan bulat dalam harmoni musik. Ngomong-ngomong, bertentangan dengan cerita-cerita selanjutnya, tidak ada bukti bahwa Pythagoras sendiri benar-benar menemukan (atau bahkan tahu tentang) rasio numerik seperti itu dalam rangkaian string harmonis.

Aristoteles mengklaim bahwa “yang disebut Pythagoras” telah mempelajari dan mengembangkan ilmu-ilmu dan yang telah menemukan urutan numerik dalam harmoni musik dan hal-hal duniawi lainnya, mereka menyimpulkan “bahwa unsur-unsur bilangan adalah unsur-unsur dari segala sesuatu, dan bahwa seluruh surga adalah harmoni dan bilangan.” 5). Tetapi Aristoteles tidak setuju, dan dia mengkritik Pythagoras, misalnya, karena menciptakan benda surgawi, “counter-Earth,” agar sesuai dengan asumsi numerik mereka tentang kesempurnaan, bahwa seharusnya ada sepuluh tubuh di surga. Ada juga bukti bahwa orang-orang Pythagoras menghubungkan bilangan-bilangan tidak hanya dengan hal-hal materi tetapi dengan gagasan-gagasan abstrak. Untuk sebagai contoh, Aristoteles melaporkan bahwa mereka mengidentifikasi keadilan dengan bilangan empat.

Berabad-abad kemudian, Iamblichus berkata: “apa yang utama adalah sifat bilangan dan rasio yang mengalir melalui semua hal, yang menurutnya semua hal ini diatur secara harmonis dan tertata sesuai.” 6). Sekarang, karena sulit untuk meninggalkan apa yang pernah kita pelajari, kita mungkin bisa membayangkan bahwa alasan mengapa beberapa pengagum Pythagoras menghargai bilangan kemungkinan besar karena ia memprakarsai studi agama tentang bilangan. Namun, di samping kurangnya bukti untuk ini di sumber yang lebih kuno, ada bukti terhadap ini di sumber-sumber kemudian. Sebagai contoh, Iamblichus mengklaim bahwa Pythagoras berasal dari pemujaan numeriknya dari Orpheus, gambar mistis kuno, seorang musisi dan penyair yang memikat burung, binatang buas, dan bahkan batu untuk menari dan mengikutinya. Iamblichus menulis bahwa Pythagoras mengklaim telah belajar dari Agalophamus apa yang pernah dikatakan Orpheus, yaitu bahwa "makhluk kekal dari bilangan adalah prinsip paling hemat dari seluruh langit, Bumi, dan sifat peralihan; lebih dari itu, itu adalah sumber keabadian bagi para pria dan dewa ilahi dan daemon."

Bagaimanapun, kami tidak tahu apakah Pythagoras sendiri menghargai bilangan dalam agama atau kehidupan, tetapi setidaknya beberapa pengagumnya di kemudian hari melakukannya. Dan dengan "bilangan," itu tidak berarti apa yang kita maksudkan: mereka tidak memasukkan apa yang sekarang kita sebut bilangan negatif, bilangan imajiner, bilangan irasional, ininitesimal, dan banyak lagi. Sebaliknya, tampaknya mereka hanya memasukkan apa yang kita sebut bilangan bulat alami dan rasio mereka. Ini mengarah langsung ke legenda besar tentang Pythagoras, yaitu bahwa mereka sangat fanatik dalam mempercayai bahwa semuanya numerik sehingga ketika ***Hippasus***, seorang anggota kultus Pythagoras, menemukan bahwa sesuatu yang



Gambar 3.1: Untuk segitiga siku-siku memiliki panjang sisi 3 dan 4 unit, sisi miring dapat dibagi menjadi 5 unit dengan ukuran yang sama, jadi kami menyebutnya "sepadan." Tapi untuk segitiga siku-siku memiliki dua sisi dengan panjang yang sama, sisi miring adalah tidak dapat dibandingkan, karena sekecil apa pun kita membuat kotak, tidak ada jumlah kotak yang pas untuk kedua sisi dan sisi miringnya.

tidak dapat dinyatakan sebagai rasio bilangan, Pythagoras membunuh ***Hippasus*** dengan menenggelamnya.

Kisah ini sering diceritakan seolah-olah ***Hippasus*** telah berusaha untuk mengekspresikan sisi miring dari sebuah segitiga yang memiliki dua sisi, masing-masing panjangnya 1 unit. Karena teorema sisi miring menyatakan bahwa $a^2 + b^2 = c^2$, maka untuk segitiga dengan sisi a dan b, masing-masing dengan panjang 1, panjang sisi miring adalah $\sqrt{2}$. Jadi tampaknya Hippasus sedang mencoba untuk menginduksi nilai numerik dari akar kuadrat dari 2, yaitu untuk menyatakannya sebagai rasio dari dua bilangan bulat. Tetapi dia menemukan bahwa ini tidak mungkin dan karena itu agama Pythagoras salah. Dan dia tidak akan tutup mulut tentang hal ini, jadi mereka membunuhnya.

Sebelum menganalisis kisah ini, kita harus mengutip beberapa manifestasinya. Sebagai contoh, sebuah akun tipikal diberikan oleh ahli matematika Morris Kline pada tahun 1972, dalam sejarah umum matematika selama berabad-abad: "Penemuan rasio yang tidak dapat dibandingkan dikaitkan dengan Hippasus of Metapontum (5 Abab SM). Pythagoras seharusnya berada di laut pada saat itu dan telah melemparkan Hippasus ke laut karena telah menghasilkan elemen di alam semesta yang menyangkal doktrin Pythagoras bahwa semua fenomena di alam semesta dapat dikurangi menjadi bilangan bulat atau rasio mereka."

Pembaca yang belajar sejarah dasar matematika akan mencari dalam buku seperti Kline dan dengan demikian ulangi apa yang mereka baca di sana. Beberapa penulis siap membumbui cerita dengan menambahkan detail atau berlebihan. Sebagai contoh, ini adalah cerita bengkok dari tahun 1997, di mana Pythagoras sendiri membunuh muridnya: "Kemudian suatu hari, salah seorang murid Pythagoras menunjukkan kepadanya bahwa diagonal dari sebuah persegi yang sisinya satu unit tidak dapat diekspresikan dengan cara itu$\cdots$ Karena mereka semua berada di atas kapal pada saat itu, Pythagoras melemparkan muridnya ke laut dan menyumpah semua orang di kelasnya untuk menjaga kerahasiaan." Tetapi kisah ini hanyalah hasil dari parafrase yang ceroboh mengutip cerita tanpa memeriksa sumber aslinya. Berikut ini adalah kisah dramatis yang serupa:

"Hippasus pasti sangat senang dengan penemuannya, tetapi tuannya tidak. Pythagoras telah mendefinisikan alam semesta dalam hal bilangan rasional, dan keberadaan bilangan irasional membawa cita-citanya dipertanyakan. . . . Pythagoras tidak mau menerima bahwa dia salah, tetapi pada saat yang sama dia tidak dapat menghancurkan argumen Hippasus dengan kekuatan logika. Karena malu abadi, dia menghukum mati Hippasus dengan tenggelam.

Bapak logika dan metode matematika telah menggunakan kekerasan daripada mengakui bahwa dia salah. Penolakan Pythagoras tentang angka-angka irasional adalah tindakannya yang paling memalukan dan mungkin merupakan tragedi terburuk dari matematika Yunani".

Demikian juga, buku terlaris Zero: Biografi Ide Berbahaya menggemakan kisah itu dengan detail sinematik: "Hippasus dari Metapontum berdiri di geladak, bersiap untuk mati. Di sekelilingnya berdiri para anggota sekte, sebuah persaudaraan rahasia yang telah ia khianati. Hippasus telah mengungkapkan sebuah rahasia yang mematikan bagi cara berpikir Yunani, sebuah rahasia yang mengancam akan merusak seluruh filosofi yang harus dibangun oleh persaudaraan itu. Untuk mengungkapkan rahasia itu, Pythagoras yang agung sendiri menjatuhkan hukuman mati kepada Hippasus dengan menenggelamkan Hippasus. Untuk melindungi filosofi bilangan mereka, aliran sesat akan membunuh."

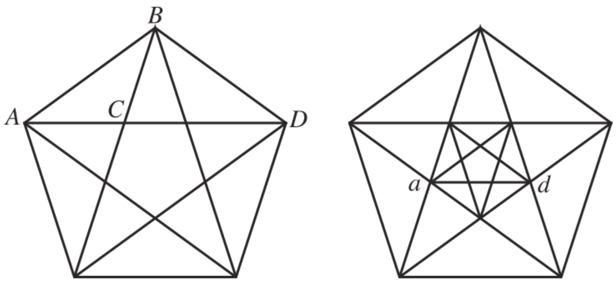
Dalam salah saji populer lainnya, Pythagoras sendiri membuat penemuan yang menakutkan. Misalnya, dalam bukunya yang memenangkan Hadiah Pulitzer, Gödel, Escher, Bach, Douglas Hofstadter dengan tepat mencatat bahwa itu adalah "Pythagoras, yang pertama kali membuktikan bahwa akar kuadrat dari 2 adalah tidak rasional. Itu dianggap sebagai penemuan yang benar-benar menyeramkan pada saat itu, karena belum pernah ada yang menyadari bahwa ada bilangan seperti akar kuadrat dari 2 yang bukan rasio bilangan bulat. Dan dengan demikian penemuan itu sangat mengganggu bagi Pythagoras, yang merasa bahwa itu mengungkapkan cacat tak terduga dan aneh di dunia angka abstrak." Demikian juga, dalam buku terlaris *Unknown Quantity: A Real and Imaginary History of Algebra*, oleh John Derbyshire bahwa "Pythagoras menemukan kegelisahan dan kesulitannya" bahwa akar kuadrat dari 2 tidak rasional. Namun klaim semacam itu tidak memiliki substansi.

Tidak mengherankan bahwa seperti minuman keras yang diterbitkan saat ini, ketika standar kekakuan ilmiah terkenal, fiksi lain ditulis berabad-abad yang lalu, ketika standar dan ulasan sejawat lebih lemah atau tidak ada.

Pada sekitar tahun 460 M, Procter teolog pagan tampaknya mengklaim bahwa Pythagoras "menemukan teori irasional". Beberapa dekade yang lalu, beberapa sejarawan dulu menganggap serius klaim itu. Tetapi kemudian para sejarawan semakin skeptis terhadap klaim itu, sebagian karena itu hanya muncul lebih dari sembilan ratus tahun setelah Pythagoras meninggal. Jika itu benar, mengapa tidak satu pun dari berbagai penulis biografi dan komentator Pythagoras tentang sejarah matematika yang sebelumnya membuat klaim seperti itu? Sebaliknya, beberapa sejarawan berspekulasi bahwa bahkan Proclus tidak membuat klaim seperti itu, bahwa kata-kata aslinya menjadi rusak.

Bahkan penulis yang melakukan penelitian terperinci tidak kebal terhadap keinginan untuk berspekulasi. Misalnya, pada tahun 1945, sejarawan Kurt von Fritz menulis sebuah artikel yang mencoba menunjukkan bagaimana Hippasus menemukan irasionalitas. Von Fritz berpendapat bahwa dengan menggambar pentagram di dalam segilima, Hippasus dapat mengetahui bahwa sisi dan diameter pentagon tidak dapat dibandingkan (mis., Tidak ada segmen garis, betapapun kecilnya, dapat dengan rapi menjadi diameter dan sisi dalam bilangan bulat bilangan bulat).

Von Fritz mengumpulkan beberapa bit bukti untuk mengklaim bahwa prosedur pentagon-pentagram ini adalah cara yang memungkinkan Hippasus menemukan bahwa beberapa garis tidak dapat diwakili oleh rasio bilangan bulat. Von Fritz menyebutkan bahwa vas dari abad ketujuh SM menunjukkan pentagram dan karenanya orang-orang Pythagoras bisa sangat mengenal gambar itu dan bisa mempelajari sifat-sifatnya. Dia juga mengutip dua penulis yang (berabad-abad kemudian) mengklaim bahwa beberapa orang Pythagoras menggunakan pentagram "sebagai tanda pengakuan". Tetapi *factoids* semacam itu sama sekali bukan bukti dari apa yang dipikirkan atau dilakukan oleh orang-orang Pythagoras pada zaman Hippasus. Intinya adalah bahwa von Fritz memberikan dugaan, bukan temuan sejarah. Namun, beberapa guru masih menggemakan argumen von Fritz seolah-olah itu adalah sejarah. Tapi sungguh, bagaimana itu irasionalitas pertama kali ditemukan?



Gambar 3.2: Bisakah garis AB dan AD dibagi dengan rapi dengan panjang yang sama? Tidak, dengan menggunakan sifat-sifat segitiga, geometer telah menunjukkan bahwa kedua garis ini tidak dapat dibandingkan.

Kami tidak tahu. Sebenarnya, kami bahkan tidak tahu apakah Hippasus menemukan hal seperti itu!

Von Fritz memulai argumennya dengan mengklaim bahwa tradisi historis "adalah dengan suara bulat dalam menghubungkan penemuan itu dengan filsuf Pythagoras dengan nama Hippasus dari Metapontum". Tapi itu sama sekali tidak benar. Von Fritz tidak memberikan contoh siapa pun yang menghubungkan penemuan itu dengan Hippasus. Oleh karena itu, seorang sejarawan keberatan bahwa klaim von Fritz "bagi saya tampaknya tidak memiliki dasar sama sekali. Sejauh ini, dari kesepakatan, saya yakin, tradisi itu tidak ada. Saya tahu tidak ada satu pun penulis kuno yang menghubungkan penemuan itu dengan Hippasus".

Apa sumber cerita yang sekarang populer tentang Hippasus, disuarakan oleh Kline, Von Fritz, dan banyak lainnya? Satu catatan sebelumnya muncul dalam karya John Burnet, dalam sebuah buku berjudul *Early Greek Philosophy*. Burnet menyebutkan bahwa "tradisi kami mengatakan bahwa Hippasos dari Metapontium tenggelam di laut karena mengungkapkan kerangka ini di lemari". Burnet mengaitkan cerita ini dengan Iamblichus. Jadi, apa yang dikatakan Iamblichus?

Tetapi pertama-tama mari kita mempertimbangkan sumber yang tidak terlalu kuno yang menyebutkan penemuan irasionalitas. Pada sekitar 340 M, Pappus dari Aleksandria menulis komentar tentang The Elements, di mana ia menyebutkan pengungkapan irasionalitas:

"Memang sekte Pythagoras sangat terpengaruh oleh penghormatannya terhadap hal-hal ini yang menjadi pepatah saat ini di dalamnya, yaitu, bahwa dia yang pertama mengungkapkan pengetahuan *surds* atau irasional dan menyebarkannya ke luar negeri di antara kawanan umum yang binasa karena tenggelam. Yang kemungkinan besar adalah sebuah perumpamaan yang dengannya mereka berusaha untuk mengungkapkan keyakinan mereka bahwa pertama kali, lebih baik menyembunyikan (atau kerudung) setiap *surd*, atau tidak rasional, atau tak terbayangkan di alam semesta, dan kedua, bahwa jiwa yang karena kesalahan atau kelalaian menemukan atau mengungkapkan hal ini alam yang ada di dalamnya atau di dunia, mengembara (setelah itu) ke sana kemari di lautan non-identitas (tidak memiliki semua kesamaan kualitas atau kecelakaan), tenggelam dalam arus calon yang akan datang dan berlalu, di mana tidak ada standar pengukuran. Ini adalah pertimbangan yang diadakan oleh Pythagoras dan Orang Asing Athena untuk menjadi insentif untuk perawatan dan kepedulian khusus untuk hal-hal ini".

Beberapa poin perlu diperhatikan tentang "kutipan pendek" ini. Pertama, Pappus percaya bahwa cerita itu kemungkinan sebuah perumpamaan, bukan fakta sejarah. Kedua, penemu irasionalitas diduga mati karena tenggelam, tetapi ia tidak dibunuh. Dan ketiga, kisah itu sama sekali tidak menyebutkan Hippasus.

Sekarang, beralihlah ke tulisan-tulisan Iamblichus sebelumnya, sekitar 300 M, di mana kisah yang relatif kuno tentang penemuan irasionalitas muncul:

"Dan Pythagoras dikatakan telah mengajarkan hal pertama ini kepada mereka yang berasosiasi dengannya: bahwa, bebas dari semua inkontinensia kehendak, mereka harus menjaga dalam keheningan apa pun wacana yang mereka dengar. Bagaimanapun, dia yang pertama kali mengungkapkan sifat setimbang dan tidak sebanding dengan mereka yang tidak layak untuk berbagi dalam doktrin-doktrin ini sangat dibenci, kata mereka, bahwa dia tidak hanya diusir dari asosiasi umum dan cara hidup mereka, tetapi sebuah makam bahkan dibangun untuknya. Sebagai orang yang pernah menjadi teman mereka, dia benar-benar meninggalkan kehidupan bersama manusia. Yang lain mengatakan bahwa bahkan Kekuatan Ilahi marah pada mereka yang membocorkan doktrin Pythagoras. Karena lelaki itu binasa di laut sebagai orang yang melawan dewa-dewa yang mengungkapkan konstruksi sebuah *igure* yang memiliki dua puluh sudut: ini melibatkan penulisan dodecahedron, salah satu dari lima tokoh yang disebut "solid," dalam sebuah bola. Namun, beberapa menyatakan bahwa orang yang menyampaikan berita tentang irasional dan ketidakterbandingannya menderita nasib ini".

Jadi, menurut Iamblichus, ada dua cerita yang beredar di sekitar tentang Pythagoras yang mati di laut. Satu orang membocorkan teori yang tidak dapat dibandingkan, dan yang lainnya membocorkan sebuah metode untuk menuliskan gambar dua belas wajah (sebuah dodecahedron) di dalam bola. Tak satu pun dari mereka dibunuh, kecuali mungkin oleh dewa mereka, "Kekuatan Ilahi." Atau sebagai alternatif, dalam versi lain dari cerita yang disebutkan oleh Iamblichus, orang yang membocorkan rahasia yang tidak dapat dibandingkan bahkan tidak mati di laut, tetapi orang Pythagoras mendirikan sebuah makam untuknya, seolah-olah dia sudah mati bagi mereka. Apakah Hippasus setidaknya orang yang membuat makam itu? Apakah dia membocorkan yang tidak rasional? Penulis mengubah cerita. Misalnya,

Gambar 3.3: Sebuah dodecahedron tertulis dalam sebuah bola; dua angka memiliki dua puluh titik kontak

dalam bukunya yang laris, The Golden Ratio, Mario Livio keliru mengklaim: “Menurut salah satu kisah Iamblichus, orang-orang Pythagoras membangun batu nisan kepada Hippasus, seolah-olah dia mati, karena penemuan kehancuran yang tidak dapat dibandingkan”. Alexander, dalam sebuah buku yang sangat bagus, mengklaim bahwa Hippasus “membuktikan” bahwa sisi dan diagonal kotak tidak dapat dibandingkan. Penulis lain menggambarkannya sebagai pemberontak yang berani: “Hippasos adalah seorang Pythagoras yang sesat. Dia tidak lagi merasa terikat oleh anonimitas di mana Pythagoras lainnya membungkus diri mereka sendiri. Seperti yang sering terjadi, wahyu menyangkut tendon Achilles dari Pythagoras berpikir akar kuadrat dari dua”.

Tapi tidak. Menurut Iamblichus, Hippasus adalah orang lain: orang yang mengungkapkan cara menuliskan dodecahedron dalam sebuah bola. Iamblichus menulis: “Mengenai masalah Hippasus secara khusus: ia adalah seorang Pythagoras, tetapi karena telah mengungkapkan dan memberikan diagram untuk pertama kalinya lingkup dari dua belas pentagon, ia binasa di laut karena ia melakukan ketidaksopanan. Dia memperoleh ketenaran karena telah membuat penemuan, tetapi semua penemuan adalah dari orang itu, karena itu mereka merujuk pada Pythagoras, dan tidak memanggilnya dengan namanya”. Rupanya kultus memiliki kebiasaan menghubungkan semua penemuan dengan "orang itu", Pythagoras. Maka menghilanglah legenda bahwa penemu yang tidak dapat dibandingkan adalah seorang Pythagoras bernama Hippasus, yang akibatnya dibunuh di laut. Itu hanyalah distorsi dari cerita-cerita lain. Itu berasal dari pencampuran dua cerita mitos tentang kematian di laut. Kisah bahwa makam didirikan Hippasus juga merupakan kesalahpahaman (lihat Tabel 1). Perhatikan juga bahwa catatan Iamblichus dan

Tabel 1 :Perpaduan Cerita

ca. 400? SM	Hippasus hidup	Jika dia menulis karya, tidak ada yang selamat berabad-abad kemudian.
Enam abad kemudian		
ca. 180? CE	Lucian	Pythagoras menggunakan pentagram sebagai tanda pengakuan.
ca. 300	Lamblichus	Hippasus adalah seorang Pythagoras yang pertama kali mengungkapkan cara menuliskan sosok dua belas pentagon ke dalam sebuah bola, dan ia mati di laut karena melakukan ketidaksopanan.
ca. 300	Lamblichus	Seseorang yang pertama kali mengungkapkan ketidakterbandingannya dengan yang tidak layak dibenci dengan sangat kejam, kata mereka, bahwa ia dibuang dan sebuah makam dibangun untuknya. Beberapa yang lain malah mengatakan bahwa orang ini mati di laut sebagai pelaku kejahatan terhadap para dewa.
340	Pappus	Pepatah atau perumpamaan mengklaim bahwa dia yang pertama mengungkapkan pengetahuan tentang irasional dan penyebaran itu di antara kawanan yang umum mati karena tenggelam
Lima belas abad kemudian		
1892	John Burnet	Tradisi mengatakan bahwa Hippasos tenggelam di laut karena mengungkapkan irasionalitas.
1945	Kurt von Fritz	Hippasus menemukan irasionalitas, mungkin dengan menganalisis garis-garis pentagram.
1980	James R. Choike	Kurt von Fritz menunjukkan bahwa Hippasus menemukan irasionalitas dalam garis-garis pentagram.
1972	Morris Kline	Penemuan rasio yang tidak dapat dibandingkan ini dikaitkan dengan Hippasus, dan Pythagoras seharusnya melemparkannya ke laut.
1997	William Everdell	Salah satu murid Pythagoras menunjukkan bahwa diagonal kotak tidak bisa dibandingkan, jadi ``Pythagoras melempar muridnya ke laut dan menyumpah semua orang di kelasnya untuk menjaga kerahasiaan.''
2005	Stephen Hawking	Siapa pun dia, orang yang menemukan irasionalitas "adalah martir pertama untuk matematika!"
2006	John Derbyshire	``Pythagoras menemukan kegelisahan dan kesulitannya'' bahwa akar kuadrat dari 2 tidak rasional.
2006	Mario Livio	``Orang-orang Pythagoras mendirikan batu nisan untuk Hippasus, seolah-olah dia sudah mati, karena penemuan yang tidak dapat dibandingkan yang menghancurkan.''
2010	Amir Alexander	``Hippasus dari Metapontum membuktikan bahwa sisi kotak tidak dapat dibandingkan dengan diagonalnya.''

Sebuah cerita tentang Hippasus menjadi tergabung dengan cerita tentang seorang Pythagoras yang mengungkapkan ketidakrasionalan, dan para penulis menambahkan detail dan dugaan imajiner. Catatan: kecuali tanda kutip digunakan, setiap klaim diringkas.

Pappus tidak menentukan apakah penemu yang tidak dapat dibandingkan adalah orang Pythagoras. Tetapi kelihatannya paling tidak orang Pythagoras tahu tentang topik itu dan mereka sangat terganggu ketika salah satu dari mereka mempublikasikan pengetahuan itu. Dan tuhan mereka juga marah? Jadi, bahkan tanpa hiasan kemudian, ceritanya cukup menarik.

Bagaimanapun, siapakah Hippasus? Yah, selain dari mungkin membocorkan cara untuk menuliskan dodecahedron dalam sebuah bola, ia tampaknya muncul dalam beberapa sumber kuno. Sebagai contoh, Aristoteles menyebutkan seorang Hippasus yang percaya bahwa dunia pada dasarnya terbuat dari kemarahan. Dan Diogenes Laertius menyebutkan bahwa beberapa penulis percaya bahwa seorang Hippasus adalah ayah atau kakek Pythagoras.

Bagaimanapun, kami tidak tahu siapa yang menemukan ketidakterbandingan. Tetapi kita tahu bahwa itu ditemukan sebelum sekitar 360 SM, karena pada sekitar tanggal itu, Plato menulis dialog yang menyebutkan ketidakterbandingan: "Theodorus sedang menulis untuk kita sesuatu tentang akar, seperti akar tiga atau lima, menunjukkan bahwa mereka tidak dapat dibandingkan oleh unit: ia memilih contoh-contoh lain hingga tujuh belas di sana ia berhenti". Karena bau tersebut membahas ketidakterbandingan, beberapa penulis berspekulasi bahwa ia adalah seorang Pythagoras atau bahwa ia mempelajarinya dari seorang Pythagoras. Dan bagaimanakah orang orang zaman dahulu mengetahui bahwa beberapa hal tidak dapat dibandingkan dengan yang lain? Kami tidak tahu, tetapi setidaknya kami memiliki singgungan untuk bukti awal. Aristoteles secara terus-menerus menyebutkan bagaimana seseorang dapat dalam ketidakterbandingan: "Bagi semua yang berdebat ketidakmungkinan menyimpulkan dengan silogisme, kesimpulan yang keliru, dan membuktikan kesimpulan asli secara hipotetis ketika sesuatu yang mustahil mengikuti dari asumsi yang kontradiktif, seperti, misalnya, bahwa diagonal [sebuah persegi] tidak dapat dibandingkan [dengan sisi] karena bilangan ganjil sama dengan [bilangan] genap jika dianggap sepadan. "Kata-kata Aristoteles menyerupai prosedur yang diberikan kemudian dalam The Elements. Argumen yang luar biasa yang dapat kami perjelas sebagai berikut.

Pertimbangkan persegi yang memiliki sisi panjang masing-masing 1. Dengan teorema hypotenuse, diagonal-nya kemudian menjadi akar kuadrat dari 2. Apakah ada segmen panjang, betapapun kecilnya, yang dapat digunakan untuk membagi dengan rapi baik sisi diagonal dan sisi dari bujur sangkar? Jika demikian, maka panjang diagonal dapat dinyatakan sebagai rasio, yang menyatakan berapa banyak unit di diagonal dan berapa banyak di samping. Jadi, argumen tersebut berlanjut dengan mengasumsikan bahwa akar kuadrat dari 2 benar-benar adalah rasio dan akibatnya mendeduksi suatu kontradiksi yang absurd, yang kemudian menjadikan tidak benar asumsi tersebut.

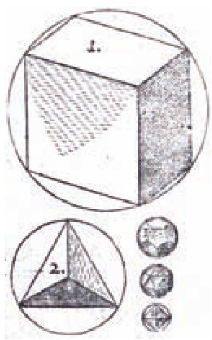
Jadi, anggaplah bahwa $\sqrt{2}$ dapat dinyatakan sebagai rasio bilangan bulat, yaitu $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, dengan $q \neq 0$ dan faktor persekutuan terbesar dari p dan q adalah 1. Sehingga dapat $p^2 = 2q^2$. Oleh karena itu, p^2 adalah bilangan genap sebab kelipatan dua. Jadi, p sendiri juga genap. Selanjutnya, karena p adalah genap, maka q pasti ganjil, sebab bentuk pecahan $\frac{p}{q}$ faktor pesekutuan terbesar dari p dan q adalah 1. Jadi p dan q tidak sama-sama genap (kalau tidak p dan q masih dapat dibagi 2). Sekarang, karena p adalah genap, q adalah dua kali bilangan bulat lainnya, katakanlah, $p = 2k$. Sehingga didapat $4k^2 = 2q^2$ atau $q^2 = 2k^2$. Jadi q^2 adalah bilangan bulat genap dan akibatnya q sendiri adalah genap. Hal ini bertentangan dengan kenyataan q ganjil. Jadi haruslah $\sqrt{2}$ bukan merupakan suatu rasio dari bilangan-bilangan bulat atau $\sqrt{2}$ bukan bilangan rasional.

Jadi ini adalah jenis argumen yang diberikan Aristoteles dan yang lainnya untuk membuktikan bahwa diagonal bujur sangkar tidak dapat dibandingkan dengan sisinya.

Lalu apa? Mengapa penting bahwa tidak ada satu unit panjang yang membagi sisi dan diagonal persegi? Tampaknya tidak terlalu penting bagi Aristoteles. Tetapi menurut Pappus dan Iamblichus, itu penting bagi Pythagoras. Karena bilangan hanyalah bilangan bulat dan rasio mereka, itu berarti bahwa tidak ada bilangan yang ada yang sesuai dengan diagonal persegi. Tampaknya $\sqrt{2}$ bukan bilangan. Ini berarti bahwa masalah penggalian akar kuadrat tidak memiliki solusi, tidak ada jawaban numerik. Ini berarti bahwa gagasan yang dikaitkan Aristoteles dengan Pythagoras, bahwa bilangan adalah prinsip dari semua hal, adalah salah.

Jadi, memang, mungkin tampak bahwa beberapa individu mungkin merasa kesal dan ingin menjaga rahasia yang tidak dapat dibandingkan. Bilangan yang bukan rasio bukan bilangan; itu tidak masuk akal, paradoks gila. Dan sekarang, jika seseorang gila, kita mengatakan bahwa mereka tidak rasional.

Saat ini, kami tidak menderita akibat diagonal persegi. Kami hanya mengatakan bahwa itu dapat diwakili oleh jenis bilangan tertentu, bilangan irasional. Tetapi dalam jaman Yunani, besaran irasional bukanlah bilangan. Dan teori Pythagoras yang kabarnya menyebutkan bahwa semua adalah bilangan diejek oleh Aristoteles. Setelah itu, Euclid menyinkronkan sebagian besar kontribusi geometer ke dalam Elemen. Penulis atau penulis Elemen berusaha keras untuk merumuskan semuanya secara geometris, bahkan di mana argumen numerik atau aljabar akan lebih sederhana. Elemen-elemen berakhir dengan pembangunan lima padatan reguler: yang memiliki empat sisi, enam, delapan, dua belas, dan dua puluh. Berpuluh-puluh tahun sebelumnya, Plato berpendapat bahwa realitas, dunia bentuk yang tak terlihat tetapi abadi, terdiri dari lima padatan reguler ini. Jadi ada, sejak jaman



Gambar 3.4: Lima padatan biasa, seperti yang ditarik oleh Johannes Kepler dalam *Harmonices Mundi*-nya tahun 1619

dahulu, ketegangan antara mereka yang berpikir bahwa entitas matematika yang paling mendasar adalah bilangan dan mereka yang lebih suka bilangan geometris. Selama berabad-abad, sudut pandang ini terulang kembali, karena beberapa ahli matematika berusaha menjelaskan pengertian numerik secara geometris, sementara yang lain mencoba untuk menghitung geometri.

Jadi, jika Anda adalah jenis ahli matematika yang lebih suka bilangan daripada bentuk, maka yang disebut Pythagoras akan tampak heroik. Sekali lagi, masa lalu yang jauh beresonansi sejauh itu menggemakan suka kita.

Atau, kita bisa tidak setuju dengan Pythagoras, katakanlah, untuk kerahasiaan dan kesiapan mereka untuk menganggap pencapaian Pythagoras yang bukan miliknya (seperti kebiasaan mereka, menurut Porphyry dan Iamblichus). Dan kita juga bisa menolak klaim mereka bahwa mengungkapkan pengetahuan sejati kepada siapa pun dengan cara yang mudah dimengerti adalah melanggar hukum.

Kembali ke legenda tentang segitiga Pythagoras dan Hippasus di laut, kita dapat menduga mengapa kisah-kisah ini menyebar begitu luas. Kedua legenda memiliki kesamaan. Dalam keduanya, beberapa fanatik menghargai pengetahuan matematika sebagai sangat penting dan sakral sehingga mereka siap membunuh untuk itu. Legenda seperti itu kedengarannya benar karena cocok dengan beberapa pengertian dan bias yang kita peroleh dari budaya populer. Mereka menggemakan stereotip populer bahwa sekte pagan rahasia melakukan pengorbanan, konspirasi, dan retribusi ekstrem. Legenda Pythagoras juga tampaknya menegaskan gagasan bahwa matematika asli dimulai dalam peradaban Helenistik Mediterania, di dan sekitar Yunani kuno. Dan yang terpenting, legenda ini menyampaikan gagasan bahwa pengetahuan matematika itu berharga. Memang benar, tetapi legenda tidak perlu untuk menyampaikan kebenaran itu.

Meskipun demikian, mitos Hippasus berharga karena memungkinkan kita untuk bermeditasi pada suatu kontradiksi. Bahkan dalam versi yang paling ekstrem, bahwa Pythagoras membunuh muridnya, ceritanya menarik karena menggerakkan kita untuk bergantung pada gagasan seseorang yang menyalahgunakan kekuasaannya, seorang pria yang dibedakan karena rasionalitasnya yang bertindak tidak adil dengan cara yang tidak rasional. Demikian juga, kelompok Pythagoras diduga berdiri: mereka membiarkan sesat kreatif dihukum. Rasionalitas dibawa ke ekstrem. Mitos ini menantang kita, guru dan ahli matematika, untuk tidak berperilaku seperti kultus Pythagoras.

Setidaknya cerita terkadang mundur ke bentuk sebelumnya. Sebagai contoh, fisikawan terlaris Stephen Hawking tidak mengklaim bahwa penemu irasionalitas adalah Hippasus. Tapi tetap saja, Hawking mengklaim bahwa Pythagoras berencana untuk menenggelamkan penemu di laut dan bahwa "siapa pun dia, orang ini adalah martir pertama untuk matematika!"

Kita harus menghentikan kebiasaan mengabadikan mitos yang sudah dikenal tentang siapa yang pertama kali melakukan ini atau itu. Alih-alih, kita bisa belajar dari kisah-kisah Pythagoras ini betapa mudahnya desas-desus dan fiksi mencemari pendidikan dengan menyamar sebagai sejarah. Bukan hanya buruk bahwa kita belajar mitos sebagai sejarah. Selain itu, mitos dan legenda telah terdistorsi. Jadi kita mungkin setuju dengan Pythagoras dari Iamblichus, seperti yang diduga "ia mengutuk penulis prosa dan penyair atas kesalahan dalam versi mitos mereka." Tetapi masalahnya adalah bahwa, tidak seperti sejarah, legenda sering membaik karena distorsi dan kesalahan.

Cerita-cerita bagus berkembang. Pada tahun 1632 Galileo menerbitkan Dialognya tentang gerakan Bumi, meskipun ada peringatan yang adil bahwa teori "Pythagoras" ini tidak diterima oleh Gereja Katolik. Dia menyajikannya sebagai hipotesis dalam dialog fiksi, untuk tidak menghina. Dan dia menceritakan kisah ini tentang orang-orang Pythagoras: "Tetapi misteri yang dimiliki Pythagoras dan sekte-nya dalam penghormatan ilmu bilangan, adalah omong kosong apa yang disebarkan melalui mulut dan tulisan-tulisan vulgar, saya tidak percaya dengan cara apa pun : memang karena saya tahu bahwa mereka tidak mengekspos hal-hal indah pada cemoohan dan penghinaan terhadap masyarakat, untuk merusak, sebagai penghujatan untuk mempublikasikan sifat-sifat bilangan yang paling direkondisi, dan tentang jumlah yang tidak dapat dibandingkan & irasional yang mereka selidiki, dan mereka memberitakan bahwa orang yang mengungkapkan ini disiksa di dunia lain." Rupanya tidak cukup bahwa Hippasus dan orang yang mengungkapkan ketidakrasionalan mati di laut. Hukuman terbatas itu tidak berlaku, sehingga dalam versi Galileo tampaknya siapa pun yang melakukan kejahatan semacam itu akan disiksa di neraka.

Sebagai akhir dari bahasan bagian ini, kita coba renungkan kembali pengetahuan yang telah kita punyai dengan memperhatikan contoh-contoh berikut:

1. Diberikan persamaan kuadrat

$$\frac{(x-1)(x-2)}{2}+\frac{(x-2)(x-3)}{2}-(x-1)(x-3)=1.$$

   Dapat, kita selidiki bahwa $x = 1, 2$ dan $x = 3$ adalah penyelesaian dari persamaan kuadrat tsb., tetapai bagaimana mungkin hal ini sebab pengetahuan kita secara intuisi persamaan kuadrat paling banyak hanya mempunyai dua akar.

2. Misalkan

$$S = a + ar + ar^2 + \cdots$$

dan

$$rS = ar + ar^2 + \cdots$$

Sehingga didapat $S - rS = (1-r)S = a$ dan $S = \frac{a}{1-r}$. Selanjutnya bila

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots, a = 1, r = 2.$$

didapat $S = \frac{1}{1-2} = -1$. Apakah mungkin hal ini?

3.1.1 Platoisme

Apa penemuan terbesar dalam sejarah pemikiran? Tentu saja, ini pertanyaan konyol - tetapi itu tidak akan menghentikan saya untuk menyarankan jawaban. Ini adalah penemuan objek abstrak Plato. Sebagian besar ilmuwan, dan bahkan sebagian besar filsuf, akan mencemooh hal ini. Para filsuf mengagumi Plato sebagai salah satu yang terbaik, tetapi menganggap doktrinnya tentang bentuk-bentuk surgawi sebagai bagian dari sebuah museum. Matematikawan, di sisi lain, setidaknya sedikit simpatik. Bekerja hari demi hari dengan bilangan prima, polinomial, dan bundel serat utama, mereka menganggap entitas-entitas ini memiliki kehidupan sendiri. Mungkinkah ini hanya reaksi mendalam terhadap ilusi? Mungkin, tapi saya meragukannya. Namun, kasus Platonisme perlu dibuat dengan hati-hati. Mari kita mulai dengan melihat masa lalu.

Platonis asli

Kami melihat kesamaan di antara berbagai apel dan dengan santai berkata, "Ada kesamaan mereka." Tapi apa *kesamaan* mereka? Haruskah kita mengambil pertanyaan seperti itu secara harfiah? Plato melakukan dan mengatakan hal yang umum adalah *bentuk suatu apel.* Bentuknya adalah apel yang sempurna, atau mungkin semacam cetak biru. Apel yang sebenarnya kita temui adalah salinan formulir; beberapa salinan lebih baik daripada yang lain. Seekor anjing adalah anjing sejauh 'berpartisipasi' dalam *bentuk seekor anjing*, dan suatu tindakan secara moral hanya sejauh ia berpartisipasi *dalam bentuk keadilan.*

Bagaimana kita tahu tentang formulir? Jiwa abadi kita pernah tinggal di surga dan dalam kehidupan awal ini menatap langsung pada bentuk. Tetapi dilahirkan ke dunia ini sulit bagi ingatan kita; kami lupa segalanya. Jadi, menurut Plato, apa yang kita sebut belajar sebenarnya adalah ingatan. Maka, cara yang tepat untuk mengajar adalah apa yang disebut metode pertanyaan Sokrates, yang tidak hanya menyatakan fakta kepada kita, tetapi sebaliknya membantu kita mengingat apa yang sudah kita ketahui.

Contoh budak laki-laki di Meno secara dramatis mengilustrasikan poin Plato. Setelah diyakinkan bahwa budak laki-laki itu tidak punya pelatihan matematika, Socrates, melalui urutan pertanyaan yang cerdas, membuatnya menggandakan kuadrat, yang, untuk pemula, merupakan konstruksi geometris yang agak menantang. Bukan hanya budak laki-laki yang melakukannya tetapi, setelah awal yang salah, dia menyadari bahwa dia akhirnya melakukannya dengan benar. Moral Plato adalah bahwa budak laki-laki itu sudah tahu cara menggandakan kuadrat, dan Socrates, 'bidan' yang digambarkan sendiri, hanya membantunya mengeluarkan apa yang sudah ada di sana.

Teori Plato luar biasa dan tidak masuk akal. Ini luar biasa karena cakupannya yang luar biasa. Ini menjelaskan apa yang dimiliki semua apel, apa yang membuat tindakan moral bermoral, bagaimana kita memperoleh pengetahuan dan, di atas semua itu, itu memberi tahu kita apa itu matematika. Fitur terakhir ini terutama berdering meskipun jika tidak ada yang lain tentang Platonisme. Ketika kita berbicara tentang lingkaran, misalnya, kita sepertinya tidak berbicara tentang tokoh tertentu di papan tulis. Itu hanya perkiraan. Kami berbicara tentang lingkaran sempurna, sesuatu yang tidak ada di dunia fisik. Pada titik ini, sangat wajar untuk merasa tertarik pada ranah bentuk abadi Plato. Dan banyak yang menganggap tarikan itu tak tertahankan.

Tetapi teorinya juga tidak masuk akal. Apa arti yang bisa kita buat dari entitas abstrak? Jiwa yang abadi? Ingatan? Para filsuf yang mengira bentuk-bentuk Plato termasuk dalam sebuah museum, sebagian besar, benar. Namun, Platonisme kontemporer tidak perlu merangkul semua ini. Bahan penting adalah *keberadaan dan aksesibilitas dari bentuk-bentuk itu sendiri, khususnya bentuk-bentuk matematika, jika tidak yang lain seperti tinggi dan keadilan*. Hanya itu yang diperhatikan Platonisme matematika saat ini. Tetapi bahkan ini adalah asumsi besar. Mengeja dan membuatnya masuk akal bukanlah tugas yang mudah.

Beberapa Tampilan Terbaru

Banyak ahli matematika dan ahli logika terhebat adalah Platonis gung-ho. Mari kita mencicipi beberapa pandangan, dimulai dengan Gottlob Frege, bisa dibilang ahli logika terhebat dan (setelah Plato) filsuf matematika terhebat sepanjang masa. Tujuan saya dalam mengutip Frege dan tokoh-tokoh lainnya ada dua: sebagian untuk memahami Platonisme dan sebagian untuk memohon tanpa malu kepada otoritas jika orang-orang pintar ini mempercayainya, setidaknya kita harus menganggapnya serius.

Frege membedakan antara ide-ide kita (yang merupakan entitas psikologis), pikiran, sebagaimana ia menyebutnya (yang merupakan isi dari ide-ide kami), dan kalimat yang kami gunakan untuk mengekspresikannya (yang, seperti katanya, adalah hal-hal dari dunia luar, entitas fisik seperti pohon, elektron, tanda tinta atau gelombang suara). Pikiran Frege adalah entitas Platonis.

Jadi hasilnya sepertinya: pikiran bukanlah hal-hal dari dunia luar maupun ide.

Ranah ketiga harus diakui. Apa yang termasuk dalam ini bersesuaian dengan ide-ide, dalam hal itu tidak dapat dirasakan oleh indera, tetapi dengan hal-hal, dalam hal itu tidak perlu dibebani dengan isi yang memiliki kesadaran untuk dimiliki. Jadi, pikiran, misalnya, yang kita ungkapkan dalam teorema Pythagoras adalah abadi, benar terlepas dari apakah seseorang menganggapnya benar. Tidak perlu pembawa. Ini tidak benar untuk pertama kalinya ketika ditemukan, tetapi seperti sebuah planet yang, sebelum ada orang yang melihatnya, telah berinteraksi dengan planet lain.

G.H. Hardy adalah salah satu ahli matematika hebat abad ini, yang terkenal, antara lain, atas kolaborasinya dengan Littlewood dan dengan Ramanujan. Esai klasiknya, 'Bukti Matematika', berisi pernyataan Platonistik seperti ini:

“Tampak bagi saya bahwa tidak ada filsafat yang dapat bersimpati kepada ahli matematika yang tidak mengakui, dengan satu atau lain cara, validitas kebenaran matematika yang tidak dapat diubah dan tanpa syarat. Teorema matematika benar atau salah; kebenaran atau kepalsuan mereka mutlak dan independen dari pengetahuan kita tentang mereka. Dalam beberapa hal, kebenaran matematika adalah bagian dari realitas objektif.”

“Saya sendiri selalu berpikir tentang ahli matematika karena pada contoh pertama adalah seorang pengamat, seorang pria yang memandangi pegunungan yang jauh dan mencatat pengamatannya. Tujuannya adalah untuk membedakan dengan jelas dan memberi tahu orang lain sebanyak mungkin puncak yang berbeda. Ada beberapa puncak yang bisa dia bedakan dengan mudah, sementara yang lain kurang jelas. Dia melihat A dengan tajam, sementara dari B dia hanya bisa mendapatkan pandangan sekilas. Akhirnya ia menemukan punggungan yang mengarah dari A, dan mengikutinya sampai akhir ia menemukan bahwa itu memuncak pada B. B sekarang tetap dalam visinya, dan dari titik ini ia dapat melanjutkan ke penemuan lebih lanjut. Dalam kasus-kasus lain, mungkin ia dapat membedakan punggungan yang lenyap di kejauhan, dan menduga bahwa itu mengarah ke puncak di awan atau di bawah cakrawala. Tetapi ketika dia melihat puncak, dia percaya bahwa itu ada di sana hanya karena dia melihatnya. Jika dia ingin orang lain melihatnya, dia menunjuk ke sana, baik secara langsung atau melalui rantai puncak yang membawanya untuk mengenalinya sendiri. Ketika muridnya juga melihatnya, penelitian, argumen, buktinya selesai. Analogi itu kasar, tapi saya yakin itu tidak sepenuhnya menyesatkan. Jika kita mendorongnya sampai ekstrem, kita harus mengarah pada kesimpulan yang agak paradoks; bahwa tidak ada bukti matematis; bahwa kita dapat, dalam analisis terakhir, tidak melakukan apa pun kecuali menunjukkan; bahwa bukti adalah apa yang saya dan Littlewood sebut gas, retorika berkembang untuk memengaruhi psikologi, gambar-gambar di papan tulis dalam perkuliahan, perangkat untuk merangsang imajinasi siswa."

Kurt Gödel, yang mencapai beberapa hasil paling spektakuler dalam fondasi matematika, juga merupakan Platonis paling terkenal dan berpengaruh belakangan ini. Dia menyatakan bahwa 'kelas dan konsep mungkin... dipahami sebagai objek... ada terlepas dari definisi dan konstruksi kami '. Dia menggambar analogi antara matematika dan fisika:

"Asumsi benda-benda semacam itu sama sahnya dengan asumsi tubuh fisik dan ada cukup banyak alasan untuk meyakini keberadaannya. Mereka dalam arti yang sama diperlukan untuk memperoleh sistem matematika yang memuaskan seperti tubuh fisik diperlukan untuk teori memuaskan persepsi indera kita."

"Terlepas dari keterpencilan mereka dari pengalaman indera, kita memiliki sesuatu seperti persepsi juga tentang objek-objek teori himpunan, seperti yang terlihat dari fakta bahwa aksioma-aksioma memaksa diri kita sebagai sesuatu yang benar. Saya tidak melihat alasan mengapa kita harus kurang percaya diri dalam persepsi semacam ini, yaitu dalam intuisi matematika, daripada dalam persepsi akal."

Apa Platoisme

Ada beberapa poin yang bisa kita dapatkan dari pernyataan di atas dan dari tulisan lain dari berbagai Platonis. Mereka membentuk inti dari Platonisme.

(1) *Objek matematika benar-benar nyata dan eksis secara independen dari kita.* Objek matematika tidak berbeda dengan benda sehari-hari (pohon pinus) atau entitas eksotis sains (positron). Kami tidak dengan cara apa pun membuatnya; kami menemukan mereka. Dan teorema kami mencoba menggambarkannya dengan benar. Setiap kalimat matematika yang terbentuk dengan baik adalah benar atau salah, dan apa yang membuatnya demikian adalah objek yang dirujuk oleh kalimat itu. Kebenaran dari proposisi ini tidak ada hubungannya dengan kita; itu tidak bersandar pada struktur pikiran kita, atau pada cara kita menggunakan bahasa, atau pada cara kita memverifikasi dugaan kita.

Pandangan ini memberi Platonisme keuntungan besar atas para pesaingnya yang harus melakukan banyak gerak kaki mewah untuk menjelaskan kebenaran matematika. Formalisme (seperti yang akan kita lihat bahasan selanjutnya) mengidentifikasi kebenaran dengan bukti, tetapi, sebagai hasil dari teorema Gödel, mengalami kebenaran nyata yang tidak dapat dibuktikan secara formal. Dengan demikian identifikasi kebenaran dengan bukti rusak. Dan konstruktivis (seperti kita juga akan lihat di bawah) menghubungkan kebenaran dengan bukti konstruktif, tetapi tentu saja tidak memiliki konstruksi untuk banyak hasil yang sangat diinginkan dari matematika klasik, membuat catatan mereka tentang kebenaran matematika agak tidak masuk akal.

Platonisme dan semantik standar (seperti yang sering disebut), berjalan seiring. Semantik standar adalah apa yang Anda pikirkan. Mari kita anggap kalimat 'Mary suka es krim itu benar. Apa yang membuatnya begitu? Dalam menjawab pertanyaan seperti itu, kami akan mengatakan 'Mary' merujuk pada orang Mary, 'es krim' ke substansi, dan 'suka' mengacu pada hubungan tertentu yang berlaku antara Mary dan es krim. Ini agak sepele mengikuti dari ini bahwa Mary ada. Jika dia tidak melakukannya, maka 'Mary suka es krim' tidak mungkin benar, seperti 'Phlogiston dirilis pada membakar 'bisa jadi benar ketika phlogiston tidak ada.

Pertimbangan semantik yang sama menyiratkan Platonisme. Pertimbangkan kalimat benar berikut ini: '$7 + 5 = 12$' dan '$7 > 3$'. Kedua hal ini mensyaratkan angka 7 untuk eksis, jika tidak kalimat akan salah. Dalam semantik standar, objek yang dilambangkan dengan istilah tunggal dalam kalimat yang benar ('Mary', '7') ada. Akibatnya, objek matematika memang ada.

(2) *Objek matematika berada di luar ruang dan waktu* Subjek khas ilmu pengetahuan alam terdiri dari objek fisik dalam ruang dan waktu. Untuk pohon pinus, positron dan kucing-kucing, kita selalu bisa mengatakan *di mana dan kapan*; tidak demikian untuk bilangan prima, π, atau polinomial. *Meteran standar* disimpan di tempat khusus di Paris; tidak demikian halnya dengan bilangan 27 yang tidak dapat ditemukan di mana pun dalam ruang dan waktu, meskipun itu sama nyatanya dengan Batuan Gibraltar. Beberapa komentator suka mengatakan bahwa angka 'ada', tetapi mereka tidak 'bertahan'. Jika ini hanya berarti bahwa mereka tidak fisik, tetapi masih sangat nyata, baik-baik saja. Jika itu berarti sesuatu yang lain, maka itu mungkin hanya omong kosong.

(3) *Entitas matematika abstrak dalam satu arti, tetapi tidak dalam arti lain* Istilah 'abstrak' telah memiliki dua arti berbeda. Arti yang lebih tua berkaitan dengan hal-hal yang bersifat universal dan khusus. Yang universal, misalnya kemerahan, disarikan dari apel merah tertentu, darah merah, kaus kaki merah, dan sebagainya; itu adalah yang terkait dengan banyak. Gagasan tentang kelompok, atau ruang vektor mungkin cocok dengan pola ini. Bila-

ngan, sebaliknya, tidak abstrak dalam pengertian ini, karena masing-masing bilangan bulat adalah individu yang unik, khusus, bukan universal.

Di sisi lain, dalam penggunaan yang lebih mutakhir, 'abstrak' hanya berarti ruang dan waktu di luar, bukan konkret, bukan fisik. Dalam pengertian ini semua objek matematika adalah abstrak. Sebuah argumen sederhana memperjelas hal ini: Ada banyak sekali angka, tetapi hanya sejumlah entitas fisik yang terbatas; jadi sebagian besar entitas matematika harus non-fisik. Tampaknya agak tidak mungkin bahwa, katakanlah, sebanyak n bilangan-bilangan pertama adalah fisik sedangkan $n+1$ dari bilangan itu adalah abstrak. Jadi, kesimpulan yang masuk akal adalah bahwa semua angka, dan memang semua objek matematika, adalah abstrak.

(4) *Kita dapat melihat benda-benda matematika dan memahami kebenaran matematika.* Entitas matematika dapat 'dilihat' atau 'dipahami' dengan 'mata pikiran'. Istilah-istilah ini, tentu saja, metafora, tetapi saya tidak yakin kita bisa melakukannya lebih baik. Gagasan utamanya adalah bahwa kita memiliki semacam akses ke ranah matematika yang mirip dengan akses perseptual kita ke ranah fisik. Ini tidak berarti bahwa kami memiliki akses langsung ke semuanya; ranah matematika mungkin seperti fisik di mana kita melihat beberapa hal, seperti goresan putih di ruang gelembung, tetapi kami tidak melihat orang lain, seperti positron.

Ini memberikan keuntungan besar lain Platonisme atas beberapa saingannya, terutama dibandingkan dengan akun konvensionalis. Ini menjelaskan fakta psikologis bahwa orang merasakan dorongan untuk percaya bahwa, katakanlah, $5+7=12$. Ini seperti dorongan untuk percaya bahwa rumput itu hijau. Dalam setiap kasus kita melihat objek yang relevan. Konvensionalis membuat matematika menjadi seperti permainan di mana kita bisa bermain dengan aturan yang berbeda. Tapi '$5+7=12$' memiliki perasaan yang sangat berbeda dari 'Para uskup bergerak secara diagonal.' Platonisme melakukan banyak keadilan terhadap fakta-fakta psikologis ini.

3.2 Filsafat kontemporer

Masalah abadi dalam filsafat matematika menyangkut hubungan antara logika dan matematika di yayasan bersama mereka. Sementara para filsuf abad ke-20 terus mengajukan pertanyaan-pertanyaan yang disebutkan pada awal artikel ini, filsafat matematika pada abad ke-20 dicirikan oleh minat utama pada logika formal, teori himpunan, dan masalah-masalah mendasar.

Ini adalah teka-teki mendalam bahwa di satu sisi kebenaran matematis tampaknya memiliki keniscayaan yang meyakinkan, tetapi di sisi lain sumber "kebenaran" mereka tetap sulit dipahami. Investigasi ke dalam masalah ini dikenal sebagai dasar dari program matematika.

Pada awal abad ke-20, para filsuf matematika sudah mulai membagi ke dalam berbagai aliran pemikiran tentang semua pertanyaan ini, secara luas dibedakan oleh gambar-gambar mereka epistemologi matematika dan ontologi. Tiga sekolah, formalisme, intuitionisme, dan logikaisme, muncul pada saat ini, sebagian sebagai tanggapan terhadap kekhawatiran yang semakin meluas bahwa matematika sebagaimana adanya, dan analisis khususnya, tidak memenuhi standar kepastian dan ketelitian yang telah diterima begitu saja. Setiap sekolah membahas masalah-masalah yang muncul pada saat itu, baik berusaha menyelesaikannya atau mengklaim bahwa matematika tidak berhak atas statusnya sebagai pengetahuan kita yang paling tepercaya.

Perkembangan mengejutkan dan kontra-intuitif dalam logika formal dan menetapkan teori di awal abad ke-20 menimbulkan pertanyaan baru tentang apa yang secara tradisional disebut sebagai dasar matematika. Ketika abad ini berkembang, fokus awal keprihatinan meluas ke eksplorasi terbuka dari aksioma dasar matematika, pendekatan aksiomatik telah diterima sejak zaman Euclid sekitar 300 SM sebagai dasar alami untuk matematika. Gagasan aksioma, proposisi dan bukti, serta gagasan proposisi yang benar dari objek matematika (lihat Penugasan (logika matematika)), diformalkan, yang memungkinkan mereka untuk diperlakukan secara matematis. Aksioma Zermelo-Fraenkel untuk teori himpunan dirumuskan yang memberikan kerangka kerja konseptual di mana banyak wacana matematika akan ditafsirkan. Dalam matematika, seperti dalam fisika, ide-ide baru dan tak terduga telah muncul dan perubahan signifikan datang. Dengan penomoran Gödel, proposisi dapat diartikan sebagai merujuk pada diri mereka sendiri atau proposisi lain, memungkinkan penyelidikan ke dalam konsistensi teori matematika. Kritik reflektif di mana teori yang sedang ditinjau "menjadi objek studi matematis" membuat Hilbert menyebut *metamathematics* atau teori pembuktian tersebut.

Pada pertengahan abad, teori matematika baru diciptakan oleh Samuel Eilenberg dan Saunders Mac Lane, yang dikenal sebagai teori kategori, dan itu menjadi pesaing baru untuk bahasa alami pemikiran matematika. Namun, seiring dengan perkembangan abad ke-20, pendapat-pendapat filosofis berbeda pendapat tentang seberapa kuat pertanyaan tentang yayasan yang diangkat pada awal abad ke-20. Hilary Putnam merangkum satu pandangan umum tentang situasi di sepertiga terakhir abad ini dengan mengatakan:
"Ketika filsafat menemukan sesuatu yang salah dengan sains, terkadang sains harus diubah; paradoks Russell muncul di benak, seperti halnya serangan Berkeley terhadap infinitesimal yang sebenarnya, tetapi lebih sering filsafat yang harus diubah. Saya tidak berpikir bahwa kesulitan yang ditemukan

filsafat dengan matematika klasik saat ini kesulitan asli; dan saya pikir interpretasi filosofis matematika yang ditawarkan kepada kita adalah salah, dan bahwa "interpretasi filosofis" adalah apa yang tidak dibutuhkan matematika".

Filsafat matematika saat ini berkembang di sepanjang beberapa jalur penyelidikan yang berbeda, oleh para filsuf matematika, ahli logika, dan ahli matematika, dan ada banyak aliran pemikiran tentang masalah ini. Sekolah-sekolah dibahas secara terpisah di bagian berikutnya, dan asumsi mereka dijelaskan.

3.3 Tema utama

Realisme matematika

Realisme matematika, seperti realisme pada umumnya, menyatakan bahwa entitas matematika ada secara independen dari pikiran manusia. Jadi manusia tidak menciptakan matematika, tetapi menemukannya, dan makhluk cerdas lain di alam semesta mungkin akan melakukan hal yang sama. Dalam sudut pandang ini, sebenarnya ada satu jenis matematika yang dapat ditemukan; segitiga, misalnya, adalah entitas nyata, bukan ciptaan pikiran manusia.

Banyak ahli matematika yang bekerja telah menjadi realis matematika; mereka melihat diri mereka sebagai penemu benda-benda yang terjadi secara alami. Contohnya termasuk Paul Erds dan Kurt Gödel. Gödel percaya pada realitas matematika objektif yang dapat dirasakan dengan cara yang analog dengan persepsi persepsi. Prinsip-prinsip tertentu (misalnya, untuk dua objek, ada kumpulan objek yang terdiri dari tepat dua objek) dapat langsung dilihat sebagai benar, tetapi dugaan hipotesis kontinum mungkin terbukti tidak dapat diputuskan hanya berdasarkan prinsip-prinsip tersebut. Gödel menyarankan bahwa metodologi quasi-empiris dapat digunakan untuk memberikan bukti yang cukup untuk dapat mengasumsikan dugaan seperti itu.

Dalam realisme, ada perbedaan tergantung pada jenis keberadaan yang dimiliki entitas matematika, dan bagaimana kita tahu tentang mereka. Bentuk utama realisme matematika termasuk Platonisme.

Anti-realisme matematika

Anti-realisme matematika umumnya menyatakan bahwa pernyataan matematika memiliki nilai kebenaran, tetapi mereka tidak melakukannya dengan berhubungan dengan bidang khusus entitas yang tidak material atau non-empiris. Bentuk-bentuk utama dari anti-realisme matematika meliputi formalisme dan fiksi.

3.4 Sekolah pemikiran kontemporer

3.4.1 Platonisme

Platonisme Matematika adalah bentuk realisme yang menunjukkan bahwa entitas matematika adalah abstrak, tidak memiliki spasial atau temporal sifat sebab akibat, dan bersifat kekal dan tidak berubah. Ini sering diklaim sebagai pandangan sebagian besar orang tentang bilangan. Syarat Platonisme digunakan karena pandangan semacam itu terlihat sejajar dengan Teori Bentuk Plato dan "Dunia Gagasan" (Bahasa Yunani: eidos ($\varepsilon\iota\delta o\varsigma$)) dijelaskan dalam alegori gua Plato: dunia sehari-hari hanya dapat mendekati secara tidak sempurna suatu realitas pamungkas yang tidak berubah. Baik gua Plato maupun Platonisme memiliki hubungan yang bermakna, bukan hanya dangkal, karena gagasan Plato didahului dan mungkin dipengaruhi oleh Pythagoras yang sangat populer di Yunani kuno, yang percaya bahwa dunia, secara harfiah, dihasilkan oleh bilangan.

Pertanyaan utama yang dipertimbangkan dalam Platonisme matematika adalah: Di mana tepatnya dan bagaimana entitas matematika itu ada, dan bagaimana kita tahu tentang mereka? Adakah dunia, yang sepenuhnya terpisah dari dunia fisik kita, yang ditempati oleh entitas matematika? Bagaimana kita dapat memperoleh akses ke dunia yang terpisah ini dan menemukan kebenaran tentang entitas? Satu jawaban yang diajukan adalah Ultimate Ensemble, sebuah teori yang mendalilkan bahwa semua struktur yang ada secara matematis juga ada secara fisik di alam semesta mereka sendiri.

Platonisme Kurt Gödel mempostulatkan jenis khusus intuisi matematika yang memungkinkan kita melihat objek matematika secara langsung. (Pandangan ini mirip dengan banyak hal yang dikatakan Husserl tentang matematika, dan mendukung gagasan Kant bahwa matematika itu apriori sintetik). Davis dan Hersh telah menyarankan dalam bukunya 1999 *The Mathematical Experience* bahwa sebagian besar matematikawan bertindak seolah-olah mereka adalah Platonis, walaupun, jika ditekan untuk mempertahankan posisi dengan hati-hati, mereka mungkin mundur ke formalisme.

Platonisme totok (full-blooded) adalah variasi modern Platonisme, yang merupakan reaksi terhadap fakta bahwa sekumpulan entitas matematika yang berbeda dapat dibuktikan ada tergantung pada aksioma dan aturan inferensi yang digunakan (misalnya, hukum perantara yang dikecualikan, dan aksioma pilihan). Ini berpendapat bahwa semua entitas matematika ada, namun mereka dapat dibuktikan, bahkan jika mereka tidak semua dapat berasal dari satu aksioma himpunan yang konsisten.

3.4.2 Matematikaisme

Hipotesis semesta matematika Max Tegmark (atau matematisme) melangkah lebih jauh dari Platonisme dalam menyatakan bahwa tidak hanya semua objek matematika ada, tetapi tidak ada yang lain. Dalil satu-satunya Tegmark adalah: Semua struktur yang ada secara matematis juga ada secara fisik. Yaitu, dalam arti bahwa "di [dunia] yang cukup kompleks untuk mengandung substruktur sadar diri [mereka] akan secara subyektif menganggap diri mereka ada di dunia 'nyata' secara fisik".

Logikaisme

Logika adalah tesis bahwa matematika dapat direduksi menjadi logika, dan karenanya tidak lain adalah bagian dari logika: 41 Ahli logika berpendapat bahwa matematika dapat diketahui secara apriori, tetapi menyarankan bahwa pengetahuan kita tentang matematika hanyalah bagian dari pengetahuan kita tentang logika secara umum, dan dengan demikian analitik, tidak memerlukan fakultas khusus intuisi matematika. Dalam pandangan ini, logika adalah dasar matematika yang tepat, dan semua pernyataan matematis adalah kebenaran logis yang diperlukan.

Rudolf Carnap (1931) menyajikan tesis logika dalam dua bagian:

1. Konsep matematika dapat diturunkan dari konsep logis melalui definisi eksplisit.

2. Teorema matematika dapat diturunkan dari aksioma logis melalui deduksi logis murni.

Gottlob Frege adalah pendiri logika. Dalam seminalinya Die Grundgesetze der Arithmetik (Hukum Dasar Aritmatika) yang ia bangun naik aritmatika dari sistem logika dengan prinsip umum pemahaman, yang ia sebut "Hukum Dasar V" (untuk konsep F dan G, perluasan F sama dengan perluasan G jika dan hanya jika untuk semua objek a, Fa sama dengan Ga), sebuah prinsip yang ia anggap dapat diterima sebagai bagian dari logika.

Konstruksi Frege cacat. Russell menemukan bahwa Hukum Dasar V tidak konsisten (ini adalah paradoks Russell). Frege meninggalkan program logikanya segera setelah ini, tetapi dilanjutkan oleh Russell dan Whitehead. Mereka menghubungkan paradoks dengan "lingkaran setan" dan membangun apa yang mereka sebut teori tipe bercabang untuk menghadapinya. Dalam sistem ini, mereka akhirnya mampu membangun banyak matematika modern tetapi dalam bentuk yang diubah, dan sangat kompleks (misalnya, ada bilangan alam yang berbeda di setiap jenis, dan ada banyak jenis yang tak terbatas). Mereka juga harus membuat beberapa kompromi untuk mengembangkan begitu banyak matematika, seperti "aksioma reducibilitas". Bahkan Russell mengatakan bahwa aksioma ini tidak benar-benar masuk akal.

Ahli logika modern (seperti Bob Hale, Crispin Wright, dan mungkin yang lain) telah kembali ke program yang lebih dekat dengan Frege. Mereka telah meninggalkan Hukum Dasar V demi prinsip abstraksi seperti prinsip Hume (jumlah objek yang jatuh dalam konsep F sama dengan jumlah objek yang jatuh dalam konsep G jika dan hanya jika perluasan F dan perluasan G dapat dimasukkan ke dalam korespondensi satu-satu). Frege membutuhkan Hukum Dasar V untuk dapat memberikan definisi eksplisit bilangan, tetapi semua sifat bilangan dapat diturunkan dari prinsip Hume. Ini tidak akan cukup untuk Frege karena (untuk memparafrasekannya) itu tidak mengecualikan kemungkinan bahwa bilngan 3 sebenarnya adalah Julius Caesar. Selain itu, banyak dari prinsip-prinsip yang dilemahkan yang harus mereka adopsi untuk menggantikan Hukum Dasar V tidak lagi tampak begitu analitik, dan dengan demikian murni logis.

Formalisme

Formalisme berpendapat bahwa pernyataan matematis dapat dianggap sebagai pernyataan tentang konsekuensi aturan manipulasi rangkaian tertentu. Misalnya, dalam "permainan" geometri Euclidean (yang terlihat terdiri dari beberapa rangkaian yang disebut "aksioma", dan beberapa "aturan inferensi" untuk menghasilkan rangkaian baru dari yang diberikan), seseorang dapat membuktikan bahwa teorema Pythagoras berlaku (yaitu, seseorang dapat menghasilkan rangkaian yang sesuai dengan teorema Pythagoras). Menurut formalisme, kebenaran matematika bukan tentang bilangan dan himpunan dan segitiga dan sejenisnya pada kenyataannya, mereka bukan "tentang" apa pun.

Versi formalisme lain sering dikenal sebagai deductivisme. Dalam deductivisme, teorema Pythagoras bukanlah kebenaran absolut, tetapi yang relatif: jika seseorang memberikan makna pada string sedemikian rupa sehingga aturan permainan menjadi benar (yaitu, pernyataan benar ditugaskan pada aksioma dan aturan kesimpulan adalah melestarikan kebenaran), maka seseorang harus menerima teorema, atau, lebih tepatnya, penafsiran yang diberikan seseorang harus merupakan pernyataan yang benar. Hal yang sama dianggap benar untuk semua pernyataan matematika lainnya. Jadi, formalisme tidak harus berarti bahwa matematika tidak lebih dari permainan simbolik yang tidak berarti. Biasanya diharapkan ada beberapa interpretasi di mana aturan mainnya berlaku (bandingkan posisi ini dengan strukturalisme). Tetapi hal itu memungkinkan ahli matematika yang bekerja untuk melanjutkan pekerjaannya dan menyerahkan masalah seperti itu kepada filsuf atau ilmuwan. Banyak formalis akan mengatakan bahwa dalam prakteknya, sistem aksioma yang akan dipelajari akan disarankan oleh tuntutan sains atau bidang lain matematika.

Pendukung awal formalisme utama adalah David Hilbert, yang programnya dimaksudkan untuk menjadi aksioma lengkap dan konsisten dari semua matematika. Hilbert bertujuan untuk menunjukkan konsistensi sistem matematika dari asumsi bahwa "aritmatika finitari" (sebuah subsistem aritmatika biasa dari bilangan bulat positif, yang dipilih secara filosofis tidak kontroversial) konsisten. Tujuan Hilbert untuk menciptakan sistem matematika yang lengkap dan konsisten secara serius dirusak oleh teorema ketidaklengkapan Gödel yang kedua, yang menyatakan bahwa sistem aksioma konsisten yang cukup ekspresif tidak pernah dapat membuktikan konsistensi mereka sendiri. Karena sistem aksioma semacam itu akan mengandung aritmatika berhingga sebagai subsistem, teorema Gödel menyiratkan bahwa tidak mungkin untuk membuktikan konsistensi sistem relatif terhadap hal tersebut (sebab, itu akan membuktikan konsistensinya sendiri, yang telah ditunjukkan Gödel tidak mungkin). Jadi, untuk menunjukkan bahwa setiap sistem aksiomatik matematika pada kenyataannya konsisten, pertama-tama seseorang perlu mengasumsikan konsistensi sistem matematika yang dalam arti lebih kuat daripada sistem untuk dibuktikan adalah konsisten.

Hilbert awalnya adalah deductivist, tetapi, seperti yang telah dijelaskan di atas, ia mempertimbangkan metode metamathematis tertentu untuk menghasilkan hasil yang secara intrinsik bermakna dan realis berkenaan dengan aritmatika keuangan. Kemudian, ia berpendapat bahwa tidak ada matematika yang bermakna apa pun, terlepas dari interpretasi.

Formalis lain, seperti Rudolf Carnap, Alfred Tarski, dan Haskell Curry, menganggap matematika sebagai penyelidikan sistem aksioma formal. Ahli logika matematika mempelajari sistem formal tetapi seringkali realis seperti halnya formalis.

Formalis relatif toleran dan mengundang pendekatan baru untuk logika, sistem bilangan non-standar, teori himpunan baru dll. Semakin banyak *game* yang kita pelajari, semakin baik. Namun, dalam ketiga contoh ini, motivasi diambil dari masalah matematika atau filosofis yang ada. "*Game*" biasanya tidak sembarangan.

Kritik utama formalisme adalah bahwa ide-ide matematika aktual yang menduduki matematikawan jauh dari permainan manipulasi rangkaian yang disebutkan di atas. Formalisme dengan demikian tidak menjawab pertanyaan tentang sistem aksioma mana yang harus dipelajari, karena tidak ada yang lebih bermakna daripada yang lain dari sudut pandang formalistik.

Baru-baru ini, beberapa matematikawan formalis telah mengusulkan bahwa semua pengetahuan matematika formal kita harus dikodekan secara sistematis dalam format yang dapat dibaca komputer, sehingga dapat memfasilitasi pemeriksaan bukti otomatis bukti matematis dan penggunaan teorema interaktif yang membuktikan dalam pengembangan teori matematika dan perangkat lunak komputer . Karena hubungan mereka yang erat dengan ilmu komputer, ide ini juga dianjurkan oleh intuitionists matematika dan konstruktivis dalam tradisi "komputabilitas" - lihat proyek QED untuk tinjauan umum.

Konvesionalisme

Ahli matematika Prancis Henri Poincaré adalah yang pertama mengartikulasikan pandangan konvensionalis. Penggunaan Poincaré tentang geometri non-Euclidean dalam karyanya tentang persamaan diferensial meyakinkannya bahwa geometri Euclidean tidak boleh dianggap sebagai kebenaran apriori. Dia berpendapat bahwa aksioma dalam geometri harus dipilih untuk hasil yang mereka hasilkan, bukan karena koherensi mereka dengan intuisi manusia tentang dunia fisik.

Intuisiisme

Dalam matematika, intuisiisme adalah program reformasi metodologis yang mottonya adalah "tidak ada kebenaran matematika yang tidak berpengalaman" (L.E.J. Brouwer). Dari batu loncatan ini, para intuisiisme berusaha merekonstruksi apa yang mereka anggap sebagai bagian matematika yang sesuai dengan konsep *Kantian* tentang makhluk hidup, menjadi, intuisi, dan pengetahuan. Brouwer, pendiri gerakan, berpendapat bahwa objek matematika muncul dari bentuk apriori dari kemauan yang menginformasikan persepsi objek empiris.

Kekuatan utama di balik intuisiisme adalah L.E.J. Brouwer, yang menolak kegunaan logika formal apa pun untuk matematika. Muridnya, Arend Heyting, mendalilkan logika *intuitionistic*, berbeda dari logika Aristotelian klasik; Logika ini tidak mengandung hukum dari kalangan tengah yang dikecualikan dan oleh karena itu tidak menyukai bukti menggunakan kontradiksi. Aksioma pilihan juga ditolak dalam kebanyakan teori himpunan *intuitionistic*, meskipun dalam beberapa versi itu diterima.

Dalam intuisiisme, istilah "konstruksi eksplisit" tidak didefinisikan dengan jelas, dan itu menimbulkan kritik. Upaya telah dilakukan untuk menggunakan konsep mesin Turing atau fungsi yang dapat dihitung untuk mengisi celah ini, yang mengarah pada klaim bahwa hanya pertanyaan tentang perilaku algoritma terbatas yang bermakna dan harus diselidiki dalam matematika. Ini telah menyebabkan studi tentang bilangan yang dapat dihitung, pertama kali diperkenalkan oleh Alan Turing. Maka, tidak mengherankan jika pendekatan matematika ini terkadang dikaitkan dengan ilmu komputer teoretis.

Konstruktivisme

Seperti intuitionism, konstruktivisme melibatkan prinsip regulatif bahwa hanya entitas matematika yang dapat dibangun secara eksplisit dalam pengertian tertentu yang boleh dimasukkan ke wacana matematika. Dalam pandangan ini, matematika adalah latihan intuisi manusia, bukan permainan yang dimainkan dengan simbol yang tidak berarti. Sebaliknya, ini tentang entitas yang dapat kita ciptakan secara langsung melalui aktivitas mental. Selain itu, beberapa penganut aliran ini menolak bukti yang tidak konstruktif, seperti bukti berdasarkan kontradiksi. Pekerjaan penting dilakukan oleh Errett Bishop, yang berhasil membuktikan versi dari teorema paling penting dalam analisis real sebagai analisis konstruktif dalam 1967 Foundations of Constructive Analysis.

Finitisme

Finitisme adalah bentuk ekstrem konstruktivisme, yang menyatakan bahwa objek matematika tidak ada kecuali ia dapat dikonstruksikan dari bilangan asli dalam sejumlah langkah terbatas. Dalam bukunya, Philosophy of Set Theory, Mary Tiles mengkarakterisasi mereka yang mengizinkan objek tak terhingga sebagai finitists klasik, dan mereka yang menyangkal objek yang bahkan tak terhitung banyaknya sebagai finitists ketat.

Pendukung finitisme yang paling terkenal adalah Leopold Kronecker, yang mengatakan: "Tuhan menciptakan bilangan alami, yang lainnya adalah pekerjaan manusia."

Ultrafinitisme adalah versi finitisme yang bahkan lebih ekstrem, yang tidak hanya menolak infinitas tetapi juga jumlah terbatas yang tidak dapat dibangun dengan sumber daya yang tersedia. Varian lain dari finitisme adalah *Euclidean arithmetic*, sebuah sistem yang dikembangkan oleh John Penn Mayberry dalam bukunya *The Foundations of Mathematics in Theory of Sets.* Sistem Mayberry adalah Aristotelian dalam inspirasi umum dan, terlepas dari penolakannya yang kuat terhadap peran operasionalisme atau kelayakan dalam dasar-dasar matematika, sampai pada kesimpulan yang agak mirip, seperti, misalnya, bahwa super-eksponensial bukanlah fungsi *finitery* yang sah.

Strukturalisme

Strukturalisme adalah suatu posisi yang menyatakan bahwa teori-teori matematika menggambarkan struktur, dan bahwa objek-objek matematika secara mendalam didefinisikan oleh tempat-tempat mereka dalam struktur tersebut, akibatnya tidak memiliki sifat intrinsik. Misalnya, hal itu akan mempertahankan bahwa semua yang perlu diketahui tentang bilangan 1 adalah bilangan bulat pertama setelah 0. Demikian juga semua bilangan bulat lainnya ditentukan oleh tempat mereka dalam suatu struktur, garis bilangan. Contoh lain dari objek matematika mungkin termasuk garis dan bidang dalam geometri, atau elemen dan operasi dalam aljabar abstrak.

Strukturalisme adalah pandangan yang realistis secara epistemologis dalam pengertian bahwa pernyataan matematis memiliki nilai kebenaran objektif. Namun, klaim utamanya hanya terkait dengan entitas apa yang menjadi objek matematika, bukan dengan keberadaan atau objek matematika seperti apa (bukan, dengan kata lain, dengan ontologi mereka). Jenis keberadaan objek matematika jelas akan tergantung pada struktur di mana mereka tertanam; sub-varietas strukturalisme yang berbeda membuat klaim ontologis yang berbeda dalam hal ini.

Strukturalisme *ante rem* ("sebelum hal") memiliki ontologi yang mirip dengan Platonisme. Struktur dianggap memiliki eksistensi yang nyata tetapi abstrak dan tidak material. Dengan demikian, ia menghadapi masalah epistemologis standar untuk menjelaskan interaksi antara struktur abstrak dan matematikawan daging-dan-darah (lihat masalah identifikasi Benacerraf).

Strukturalism *in re* ("dalam hal") adalah padanan dengan realisme Aristoteles. Struktur dianggap ada karena beberapa sistem konkret mencontohkannya. Ini menimbulkan masalah biasa bahwa beberapa struktur yang sah secara sah mungkin secara kebetulan terjadi tidak ada, dan bahwa dunia fisik yang terbatas mungkin tidak "besar" cukup untuk mengakomodasi beberapa struktur yang sah.

Strukturalism *post rem* ("setelah hal") anti-realis tentang struktur dengan cara yang paralel dengan nominalisme. Seperti nominalisme, pendekatan *post rem* menyangkal keberadaan objek matematika abstrak dengan sifat-sifat selain tempat mereka dalam struktur relasional. Menurut pandangan ini sistem matematika ada, dan memiliki fitur struktural yang sama. Jika ada sesuatu yang benar pada suatu struktur, itu akan berlaku untuk semua sistem yang mencontohkan struktur. Namun, itu hanya penting untuk berbicara tentang struktur yang "dimiliki bersama" antara sistem: mereka sebenarnya tidak memiliki keberadaan independen.

Teori pikiran yang diwujudkan

Teori-teori pikiran yang diwujudkan berpendapat bahwa pemikiran matematika adalah hasil alami dari perangkat kognitif manusia yang menemukan dirinya di alam semesta fisik kita. Sebagai contoh, konsep abstrak angka muncul dari pengalaman penghitungan objek diskrit. Dianggap bahwa matematika itu tidak universal dan tidak ada dalam arti nyata apa pun, selain di otak manusia. Manusia membangun, tetapi tidak menemukan, matematika.

Dengan pandangan ini, alam semesta fisik dengan demikian dapat dilihat sebagai dasar utama matematika: ia memandu evolusi otak dan kemudian menentukan pertanyaan mana yang menurut otak ini layak untuk diselidiki. Namun, pikiran manusia tidak memiliki klaim khusus pada kenyataan atau pendekatan yang dibangun dari matematika. Jika konstruksi seperti identitas Euler itu benar maka mereka benar sebagai peta pikiran dan kognisi manusia.

Dengan demikian, para ahli teori pikiran yang diwujudkan menjelaskan keefektifan matematika;matematika dibangun oleh otak agar efektif di alam semesta ini.

Perlakuan yang paling mudah diakses, terkenal, dan terkenal dari perspektif ini adalah *Where Mathematics comes From*, oleh George Lakoff dan Rafael E. Núñez. Selain itu, ahli matematika Keith Devlin telah menyelidiki konsep serupa dengan bukunya *The Math Instinct*, seperti halnya ilmuwan saraf Stanislas Dehaene dengan bukunya *The Number Sense*. Untuk lebih lanjut tentang ide-ide filosofis yang menginspirasi perspektif ini, lihat ilmu kognitif matematika.

Realisme Aristoteles

Realisme Aristotelian berpendapat bahwa studi matematika sifat-sifat seperti simetri, kontinuitas, dan ketertiban yang secara harfiah dapat diwujudkan dalam dunia fisik (atau di dunia lain mana pun mungkin ada). Ini kontras dengan Platonisme dalam menyatakan bahwa objek matematika, seperti bilangan, tidak ada dalam dunia "abstrak" tetapi dapat direalisasikan secara fisik. Sebagai contoh, bilangan 4 diwujudkan dalam hubungan antara tumpukan burung beo dan universal "menjadi burung beo" yang membagi tumpukan menjadi begitu banyak burung beo. Realisme Aristotelian dipertahankan oleh James Franklin dan Sekolah Sydney (http://web.maths.unsw.edu.au/ jim/structmath.html) dalam filosofi matematika dan dekat dengan pandangan Penelope Maddy bahwa ketika karton telur dibuka, satu set tiga telur dirasakan (yaitu, entitas matematika yang diwujudkan dalam dunia fisik). Masalah bagi realisme Aristotelian adalah apa yang harus dijelaskan tentang ketidakterbatasan yang lebih tinggi, yang mungkin tidak dapat diwujudkan dalam dunia fisik.

Aritmatika Euclidean dikembangkan oleh John Penn Mayberry dalam bukunya *The Foundations of Mathematics in Theory of Sets*. juga jatuh ke dalam tradisi realis Aristotelian. Mayberry, mengikuti Euclid, menganggap bilangan hanyalah "banyak unit tertentu" yang diwujudkan di alam — seperti "anggota Orkestra Simfoni London" atau "pohon-pohon di kayu Birnam". Apakah ada banyak unit yang pasti di mana dari pengertian Persekutuan Euclid tentang bilangan 5 (Seluruhnya lebih besar dari pembagian) gagal dan akibatnya dianggap tak terbatas, ini adalah suatu pertanyaan untuk Mayberry pada dasarnya tentang Alam dan tidak memerlukan anggapan transendental.

Psikologi

Psikologi dalam filosofi matematika adalah posisi dimana konsep dan/atau kebenaran matematika didasarkan, diturunkan dari atau dijelaskan oleh fakta psikologis (atau hukum).

John Stuart Mill tampaknya merupakan pendukung jenis psikologi logis, seperti halnya banyak ahli logika Jerman abad ke-19 seperti Sigwart dan Erdmann serta sejumlah psikolog, dulu dan sekarang: misalnya, Gustave Le Bon. Psikologi terkenal dikritik oleh Frege dalam bukunya *The Foundations of Arithmetic*, dan banyak dari karyanya serta esai-esainya, termasuk ulasannya tentang *Husserl's Philosophy of Arithmetic.* Edmund Husserl, dalam volume pertama Investigations Logikanya, yang disebut "*Prolegomena of Pure Logic*", mengkritik psikologi secara menyeluruh dan berusaha menjauhkan diri darinya. "Prolegomena" dianggap sebagai sanggahan psikologis yang lebih singkat, adil, dan menyeluruh daripada kritik yang dibuat oleh Frege, dan juga dianggap hari ini oleh banyak orang sebagai sanggahan yang berkesan atas pukulan tegasnya terhadap psikologi. Psikologi juga dikritik oleh Charles Sanders Peirce dan Maurice Merleau-Ponty.

Empirisme

Empirisme matematika adalah suatu bentuk realisme yang menyangkal bahwa matematika dapat diketahui secara apriori sama sekali. Dikatakan bahwa kita menemukan fakta matematika dengan penelitian empiris, seperti halnya fakta dalam ilmu lain. Ini bukan salah satu dari tiga posisi klasik yang dianjurkan pada awal abad ke-20, tetapi terutama muncul di pertengahan abad ini. Namun, pendukung awal penting dari pandangan seperti ini adalah John Stuart Mill. Pandangan Mill dikritik secara luas, karena, menurut kritikus, seperti A.J. Ayer, itu membuat pernyataan seperti "$2 + 2 = 4$" keluar sebagai kebenaran yang tidak pasti dan kontingen, yang hanya bisa kita pelajari dengan mengamati contoh dua pasangan yang berkumpul dan membentuk kuartet.

Empirisme matematika kontemporer, dirumuskan oleh WVO Quine dan Hilary Putnam, terutama didukung oleh argumen yang sangat diperlukan: matematika sangat diperlukan untuk semua ilmu empiris, dan jika kita ingin percaya pada realitas fenomena yang dijelaskan oleh ilmu pengetahuan, kita juga harus percaya pada realitas entitas yang diperlukan untuk uraian ini. Yaitu, karena fisika perlu berbicara tentang elektron untuk mengatakan mengapa bola lampu berperilaku seperti itu, maka elektron harus ada. Karena fisika perlu berbicara tentang angka dalam menawarkan penjelasannya, maka angka harus ada. Sesuai dengan filosofi Quine dan Putnam secara keseluruhan, ini adalah argumen naturalistik. Ini berpendapat untuk keberadaan entitas matematika sebagai penjelasan terbaik untuk pengalaman, sehingga mengupas matematika menjadi berbeda dari ilmu-ilmu lain.

Putnam sangat menolak istilah "Platonis" sebagai menyiratkan ontologi yang terlalu spesifik yang tidak diperlukan untuk praktik matematika dalam arti sebenarnya. Dia menganjurkan bentuk "realisme murni" yang menolak gagasan mistis tentang kebenaran dan menerima banyak quasi-empirisme dalam matematika. Ini tumbuh dari pernyataan yang semakin populer di akhir abad ke-20 bahwa tidak ada satu pun dasar matematika yang dapat dibuktikan ada. Kadang-kadang juga disebut "postmodernisme dalam matematika" meskipun istilah itu dianggap kelebihan oleh beberapa dan menghina oleh yang lain. Quasi-empirisme berpendapat bahwa dalam melakukan penelitian mereka, ahli matematika menguji hipotesis serta membuktikan teorema. Argumen matematis dapat mentransmisikan kepalsuan dari kesimpulan ke premis dan juga dapat mengirimkan kebenaran dari premis ke kesimpulan. Putnam berpendapat bahwa teori realisme matematika apa pun akan mencakup metode kuasi-empiris. Dia mengusulkan bahwa spesies asing yang melakukan matematika mungkin mengandalkan terutama pada metode quasi-empiris, yang sering bersedia untuk melupakan bukti yang teliti dan aksiomatik, dan masih melakukan matematika — mungkin risiko kegagalan perhitungan mereka yang agak lebih besar. Dia memberikan argumen rinci untuk ini di Arah Baru. Kuasi empirisme juga dikembangkan oleh Imre Lakatos.

Kritik paling penting terhadap pandangan empiris matematika kira-kira sama dengan yang diajukan terhadap Mill. Jika matematika sama empirisnya dengan ilmu-ilmu lain, maka ini menunjukkan bahwa hasilnya sama keliru dengan mereka, dan sama kontingen. Dalam kasus Mill, pembenaran empiris datang secara langsung, sedangkan dalam kasus Quine, pembuktian empiris muncul secara tidak langsung, melalui koherensi teori ilmiah kita secara keseluruhan, yaitu ketelitian setelah E.O. Wilson. Quine menyatakan bahwa matematika tampaknya sepenuhnya pasti karena peran yang dimainkannya dalam jaringan kepercayaan kita sangat sentral, dan bahwa akan sangat sulit bagi kita untuk merevisinya, meskipun bukan tidak mungkin.

Untuk filosofi matematika yang mencoba untuk mengatasi beberapa kekurangan pendekatan Quine dan Gödel dengan mengambil aspek masing-masing lihat Realisme Penelope Maddy dalam Matematika. Contoh lain dari teori realis adalah teori pikiran yang terkandung.

Untuk bukti eksperimental yang menunjukkan bahwa bayi manusia dapat melakukan aritmatika dasar, lihat Brian Butterworth.

Fiksionalisme

Fiksiionalisme matematika mulai terkenal pada tahun 1980 ketika Hartry Field menerbitkan *Science Without Numbers*, yang ditolak dan bahkan membalikkan argumen perlunya Quine. Di mana Quine menyarankan bahwa matematika sangat diperlukan untuk teori-teori ilmiah terbaik kita, dan oleh karena itu harus diterima sebagai badan kebenaran yang berbicara tentang entitas yang ada secara independen, Fiktifisme Lapangan menyatakan bahwa matematika dapat diabaikan, dan oleh karena itu harus dianggap sebagai badan kepalsuan yang tidak berbicara. tentang sesuatu yang nyata. Dia melakukan ini dengan memberikan aksioma lengkap mekanika Newton tanpa referensi ke angka atau fungsi sama sekali. Dia mulai dengan "antara" aksioma Hilbert untuk mengkarakterisasi ruang tanpa mengoordinasikannya, dan kemudian menambahkan hubungan ekstra antara titik-titik untuk melakukan pekerjaan yang sebelumnya dilakukan oleh bidang vektor. Geometri Hilbert adalah matematika, karena berbicara tentang titik-titik abstrak, tetapi dalam teori Field, titik-titik ini adalah titik konkret ruang fisik, jadi tidak ada objek matematika khusus sama sekali yang diperlukan.

Setelah menunjukkan bagaimana melakukan sains tanpa menggunakan angka, Field melanjutkan untuk merehabilitasi matematika sebagai semacam fiksi yang berguna. Dia menunjukkan bahwa fisika matematika adalah perpanjangan konservatif dari fisika non-matematisnya (yaitu, setiap fakta fisik yang dapat dibuktikan dalam fisika matematika sudah dapat dibuktikan dari sistem Field), sehingga matematika adalah proses yang andal yang semua aplikasi fisiknya benar, walaupun pernyataannya sendiri salah. Jadi, ketika melakukan matematika, kita dapat melihat diri kita sendiri menceritakan semacam cerita, berbicara seolah-olah bilangan ada. Bagi Field, pernyataan seperti "$2 + 2 = 4$" sama fiktifnya dengan "Sherlock Holmes tinggal di 221B Baker Street" —tetapi keduanya benar sesuai dengan fiksi yang relevan.

Dengan akun ini, tidak ada masalah metafisik atau epistemologis khusus untuk matematika. Satu-satunya kekhawatiran yang tersisa adalah kekhawatiran umum tentang fisika non-matematika, dan tentang fiksi secara umum. Pendekatan Field sangat berpengaruh, tetapi ditolak secara luas. Ini sebagian karena persyaratan fragmen kuat dari logika orde dua untuk melakukan reduksi, dan karena pernyataan konservatif tampaknya memerlukan kuantifikasi atas model atau deduksi abstrak.

Konstruktivisme sosial

Konstruktivisme sosial melihat matematika terutama sebagai konstruk sosial, sebagai produk budaya, dapat dikoreksi dan diubah. Seperti ilmu lainnya, matematika dipandang sebagai upaya empiris yang hasilnya terus dievaluasi dan dapat dibuang. Namun, sementara pada pandangan empiris evaluasi adalah semacam perbandingan dengan "kenyataan", konstruktivis sosial menekankan bahwa arah penelitian matematika ditentukan oleh mode kelompok sosial yang melakukan itu atau oleh kebutuhan masyarakat yang membiayainya. Namun, meskipun kekuatan eksternal semacam itu dapat mengubah arah beberapa penelitian matematika, ada kendala internal yang kuat — tradisi matematika, metode, masalah, makna, dan nilai-nilai yang menjadi dasar pengkulturasi matematikawan — yang bekerja untuk melestarikan disiplin yang ditentukan secara historis.

Ini bertentangan dengan kepercayaan tradisional matematikawan yang bekerja, bahwa matematika itu entah bagaimana murni atau objektif. Tetapi konstruktivis sosial berpendapat bahwa matematika sebenarnya didasarkan pada banyak ketidakpastian: ketika praktik matematika berkembang, status matematika sebelumnya dilemparkan ke dalam keraguan, dan dikoreksi ke tingkat yang diperlukan atau diinginkan oleh komunitas matematika saat ini. Ini dapat dilihat dalam pengembangan analisis dari pengujian ulang kalkulus Leibniz dan Newton. Mereka berpendapat lebih lanjut bahwa matematika selesai sering diberikan status terlalu banyak, dan matematika rakyat tidak cukup, karena terlalu menekankan pada bukti aksiomatik dan peer review sebagai praktik.

Sifat sosial matematika disorot dalam subkulturnya. Penemuan besar dapat dibuat dalam satu cabang matematika dan relevan dengan yang lain, namun hubungannya tidak ditemukan karena kurangnya kontak sosial antara matematikawan. Konstruktivis sosial berpendapat masing-masing spesialisasi membentuk komunitas epistemiknya sendiri dan seringkali memiliki kesulitan besar dalam berkomunikasi, atau memotivasi investigasi dugaan pemersatu yang mungkin menghubungkan berbagai bidang matematika. Konstruktivis sosial melihat proses "melakukan matematika" sebagai benar-benar menciptakan makna, sementara realis sosial melihat kekurangan baik kapasitas manusia untuk mengabstraksi, atau bias kognitif manusia, atau kecerdasan kolektif matematikawan sebagai mencegah pemahaman alam semesta nyata dari objek matematika. Konstruktivis sosial terkadang menolak pencarian dasar matematika yang cenderung gagal, tidak ada gunanya atau bahkan tidak berarti.

Kontribusi untuk sekolah ini telah dibuat oleh Imre Lakatos dan Thomas Tymoczko, meskipun tidak jelas apakah keduanya akan mendukung gelar tersebut. Baru-baru ini Paul Ernest secara eksplisit merumuskan filosofi konstruktivis sosial matematika. Beberapa orang menganggap karya Paul Erd secara keseluruhan telah memajukan pandangan ini (meskipun ia secara pribadi menolaknya) karena kolaborasinya yang luas dan unik, yang mendorong orang lain untuk melihat dan mempelajari "matematika sebagai kegiatan sosial", misalnya, melalui Sosial Erd. jumlah konstruktivisme. Reuben Hersh juga telah mempromosikan pandangan sosial matematika, menyebutnya pendekatan "humanistik", mirip dengan tetapi tidak persis sama dengan yang terkait dengan Alvin White; salah satu rekan penulis Hersh, Philip J. Davis, juga menyatakan simpati terhadap pandangan sosial.

Sebuah kritik terhadap pendekatan ini adalah bahwa itu sepele, berdasarkan pengamatan sepele bahwa matematika adalah aktivitas manusia. Untuk mengamati bahwa bukti yang kuat datang hanya setelah dugaan yang tidak menarik, eksperimen dan spekulasi adalah benar, tetapi itu sepele dan tidak ada seorang pun akan menyangkal ini. Jadi agak sulit untuk menggambarkan filosofi matematika dengan cara ini, pada sesuatu yang sepele. Itu kalkulus Leibniz dan Newton diperiksa ulang oleh ahli matematika seperti Weierstrass untuk membuktikan teorema dengan teliti daripadanya. Tidak ada yang istimewa atau menarik tentang hal ini, karena cocok dengan tren yang lebih umum dari ide-ide gegabah yang kemudian dibuat keras. Perlu ada perbedaan yang jelas antara objek-objek studi matematika dan studi tentang objek-objek studi matematika. Yang pertama tampaknya tidak banyak berubah; yang terakhir selamanya berubah. Yang terakhir adalah apa itu tentang teori sosial, dan yang utama adalah apa itu tentang Platonisme dkk.

Namun, kritik ini ditolak oleh para pendukung perspektif konstruktivis sosial karena ia melewatkan poin bahwa objek matematika adalah konstruksi sosial. Objek-objek ini, demikian ditegaskannya, terutama adalah objek semiotik yang ada di ranah budaya manusia, ditopang oleh praktik-praktik sosial (setelah Wittgenstein) yang menggunakan tanda-tanda yang diwujudkan secara fisik dan memunculkan konstruksi intrapersonal (mental). Konstruktivis sosial melihat reifikasi lingkup budaya manusia menjadi ranah Platonis, atau wilayah keberadaan seperti surga di luar dunia fisik, suatu kesalahan kategori yang sudah lama ada.

Di luar sekolah tradisional

Efektivitas yang tidak masuk akal

Alih-alih fokus pada perdebatan sempit tentang sifat sejati kebenaran matematika, atau bahkan pada praktik unik untuk matematikawan seperti buktinya, gerakan yang berkembang dari tahun 1960-an hingga 1990-an mulai mempertanyakan gagasan mencari yayasan atau menemukan satu jawaban yang tepat untuk mengapa matematika berhasil. Titik awal untuk ini adalah 1960 karya terkenal Eugene Wigner *The Unreasonable Effectiveness of*

Mathematics in the Natural Sciences, di mana ia berpendapat bahwa kebetulan yang menyenangkan antara matematika dan fisika yang sangat cocok tampaknya tidak masuk akal dan sulit untuk dijelaskan.

Dua indera Popper
Teori realis dan konstruktivis biasanya dianggap sebagai pelawan. Namun, Karl Popper berpendapat bahwa pernyataan angka seperti "2 apel + 2 apel = 4 apel" dapat diambil dalam dua pengertian. Di satu sisi itu tidak dapat dibantah dan secara logis benar. Dalam pengertian kedua, faktual itu benar dan dapat dipalsukan. Cara lain untuk mengatakan ini adalah dengan mengatakan bahwa satu pernyataan bilangan dapat mengekspresikan dua proposisi: salah satunya dapat dijelaskan pada garis konstruktivis; yang lainnya pada garis *realis*.

Filsafat bahasa
Inovasi dalam filsafat bahasa selama abad ke-20 memperbarui minat pada apakah matematika, seperti yang sering dikatakan, bahasa sains. Meskipun beberapa ahli matematika dan filsuf akan menerima pernyataan "matematika adalah bahasa", ahli bahasa percaya bahwa implikasi dari pernyataan seperti itu harus dipertimbangkan. Sebagai contoh, alat-alat linguistik umumnya tidak diterapkan pada sistem simbol matematika, yaitu, matematika dipelajari dengan cara yang sangat berbeda dari bahasa lain. Jika matematika adalah bahasa, itu adalah jenis bahasa yang berbeda dari bahasa alami. Memang, karena kebutuhan akan kejelasan dan kekhususan, bahasa matematika jauh lebih terbatas daripada bahasa alami yang dipelajari oleh ahli bahasa. Namun, metode yang dikembangkan oleh Frege dan Tarski untuk studi bahasa matematika telah banyak dikembangkan oleh siswa Tarski, Richard Montague dan ahli bahasa lain yang bekerja dalam semantik formal untuk menunjukkan bahwa perbedaan antara bahasa matematika dan bahasa alami mungkin tidak sehebat kelihatannya.

Mohan Ganesalingam telah menganalisis bahasa matematika menggunakan alat-alat dari linguistik formal. Ganesalingam mencatat bahwa beberapa fitur bahasa alami tidak diperlukan ketika menganalisis bahasa matematika (seperti tense), tetapi banyak alat analitis yang sama dapat digunakan (seperti tata bahasa bebas konteks). Salah satu perbedaan penting adalah bahwa objek matematika memiliki tipe yang jelas, yang dapat secara eksplisit didefinisikan dalam teks: "Secara efektif, kami diizinkan untuk memperkenalkan kata dalam satu bagian kalimat, dan menyatakan bagian bicaranya di bagian lain; dan operasi ini tidak memiliki analog dalam bahasa alami."

3.5 Argumen

Argumen yang sangat diperlukan untuk realisme

Argumen ini, terkait dengan Willard Quine dan Hilary Putnam, dianggap oleh Stephen Yablo sebagai salah satu argumen yang paling menantang dalam mendukung penerimaan keberadaan entitas matematika abstrak, seperti bilangan dan himpunan. Bentuk argumennya adalah sebagai berikut.

1. Seseorang harus memiliki komitmen ontologis untuk semua entitas yang sangat diperlukan untuk teori-teori ilmiah terbaik, dan hanya untuk entitas-entitas itu (umumnya disebut sebagai "semua dan hanya").

2. Entitas matematika sangat diperlukan untuk teori-teori ilmiah terbaik. "**Karena itu**",

3. Seseorang harus memiliki komitmen ontologis terhadap entitas matematika.

Pembenaran untuk premis pertama adalah yang paling kontroversial. Baik Putnam maupun Quine memohon naturalisme untuk membenarkan pengecualian semua entitas non-ilmiah, dan karenanya untuk membela "satu-satunya" bagian dari "semua dan hanya". Pernyataan bahwa "semua" entitas yang dipostulatkan dalam teori-teori ilmiah, termasuk angka, harus diterima sebagai nyata dibenarkan oleh konfirmasi holisme. Karena teori tidak dikonfirmasi secara sedikit demi sedikit, tetapi secara keseluruhan, tidak ada pembenaran untuk mengecualikan entitas yang dirujuk dalam teori yang dikonfirmasi dengan baik. Ini menempatkan nominalis yang ingin mengecualikan keberadaan set dan geometri non-Euclidean, tetapi memasukkan keberadaan quark dan entitas fisika yang tidak terdeteksi lainnya, misalnya, dalam posisi yang sulit.

3.5.1 Apa Ontologi itu?

Ontologi adalah studi filosofis tentang keberadaan. Secara lebih luas, studi ini mempelajari konsep-konsep yang secara langsung berhubungan dengan keberadaan, khususnya penjelmaan, keberadaan, realitas, serta kategori dasar keberadaan dan hubungan mereka. Secara tradisional terdaftar sebagai bagian dari cabang utama filsafat yang dikenal sebagai metafisika, ontologi sering membahas pertanyaan tentang entitas apa yang ada atau dapat dikatakan ada dan bagaimana entitas tersebut dapat dikelompokkan, terkait dalam suatu hierarki, dan dibagi lagi sesuai dengan persamaan dan perbedaan.

Beberapa filsuf, terutama dalam tradisi aliran Platonis, berpendapat bahwa semua kata benda (termasuk kata benda abstrak) merujuk pada entitas yang ada. Filsuf lain berpendapat bahwa kata benda tidak selalu menyebutkan entitas, tetapi beberapa memberikan semacam istilah untuk referensi ke koleksi baik objek atau peristiwa. Dalam pandangan yang terakhir ini, pikiran, alih-alih merujuk pada suatu entitas, mengacu pada kumpulan peristiwa mental yang dialami seseorang; masyarakat mengacu pada kumpulan orang-orang dengan beberapa karakteristik bersama, dan geometri mengacu pada kumpulan jenis kegiatan intelektual tertentu. Di antara kutub-kutub realisme dan nominalisme ini berdiri berbagai posisi lain.

Dalam tradisi filsafat Yunani, **Parmenides** termasuk orang pertama yang mengusulkan karakterisasi ontologis tentang sifat dasar keberadaan. Dalam prolog ***On Nature***, ia menjelaskan dua pandangan tentang keberadaan. Pada mulanya tidak ada sesuatu pun yang berasal dari ketiadaan, sehingga keberadaannya bersifat kekal. Pandangan ini berpendapat bahwa eksistensi adalah apa yang dapat dipahami melalui pikiran, diciptakan, atau dimiliki. Oleh karena itu, tidak mungkin ada kehampaan atau kevakuman; dan realitas sejati tidak mungkin muncul atau hilang dari keberadaan. Sebaliknya, keseluruhan ciptaan bersifat kekal, seragam, dan tidak dapat diubah, meskipun tidak terbatas (Parmenides mencirikan bentuknya sebagai bola sempurna). Parmenides kemudian berpendapat bahwa perubahan, seperti yang dirasakan dalam pengalaman sehari-hari, adalah ilusi.

Berlawanan dengan monisme Eleatik Parmenides adalah konsepsi pluralistik tentang keberadaan. Pada abad ke-5 SM, Anaxagoras, dan Leucippus menggantikan realitas wujud (unik dan tidak berubah) dengan realitas wujud, oleh karena itu dengan pluralitas ontik (keberadaan fisik, nyata, atau faktual.) yang lebih mendasar dan mendasar. Tesis ini berasal dari dunia Hellenic, dinyatakan dalam dua cara berbeda oleh Anaxagoras dan Leucippus. Teori pertama berhubungan dengan "benih" (yang Aristoteles sebut sebagai "homeomeri") dari berbagai zat. Yang kedua adalah teori atomistik, yang menangani realitas berdasarkan pada ruang hampa, atom, dan pergerakan intrinsiknya di dalamnya.

Atomisme materialis yang dikemukakan oleh Leucippus bersifat indeterministik, namun Democritus (abad 460–370 SM) kemudian mengembangkannya secara deterministik. Kemudian (abad ke-4 SM), Epicurus kembali menganggap atomisme asli sebagai sesuatu yang tidak dapat ditentukan. Ia memandang realitas terdiri dari sel-sel atau atom-atom yang tidak dapat dibagi-bagi dan tidak dapat diubah (dari bahasa Yunani atomon, yang berarti 'tidak dapat dipotong'), namun ia memberi bobot untuk mengkarakterisasi atom, sedangkan bagi Leucippus mereka dicirikan oleh sebuah "gambar", sebuah "keteraturan". " dan "posisi" dalam kosmos. Selain itu, atom menciptakan keseluruhan dengan gerakan intrinsik dalam ruang hampa, menghasilkan aliran wujud yang beragam. Pergerakan mereka dipengaruhi oleh parenklisis (Lucretius menamakannya clinamen) dan itu ditentukan secara kebetulan. Ide-ide ini menjadi cikal bakal pemahaman fisika tradisional hingga munculnya teori-teori abad ke-20 tentang sifat atom.

Beberapa pertanyaan mendasar
Pertanyaan utama ontologi meliputi:

- "Apa yang bisa dikatakan ada?"
- "Apa sesuatu itu?"
- "Ke dalam kategori apa, jika ada, bisakah kita memilah barang-barang yang ada?"
- "Apa artinya menjadi?"
- "Apa saja berbagai mode keberadaan entitas?"

Berbagai filsuf telah memberikan jawaban berbeda untuk pertanyaan-pertanyaan ini. Salah satu pendekatan umum melibatkan membagi subjek yang masih ada dan predikat ke dalam kelompok yang disebut kategori. Daftar kategori semacam itu sangat berbeda satu sama lain, dan melalui koordinasi berbagai skema kategorikal itulah ontologi berhubungan dengan bidang-bidang seperti ilmu perpustakaan dan kecerdasan buatan. Namun demikian, pemahaman tentang kategori ontologis hanyalah taksonomi, klasifikasi. Kategori-kategori Aristoteles adalah cara-cara di mana suatu makhluk dapat disapa hanya sebagai suatu makhluk, seperti:

- apa itu ('apa adanya', kuiditas, kecerdasan, atau esensi)
- bagaimana itu ('howness' atau kualitas)
- berapa banyak (kuantitas)
- di mana itu (keterkaitannya dengan makhluk lain)

Contoh lebih lanjut dari pertanyaan ontologis meliputi:

- Apa itu eksistensi, mis. Apa artinya makhluk?
- Apakah keberadaan adalah sifat?
- Apakah keberadaan genus atau kelas umum yang hanya dibagi oleh perbedaan spesifik?

- Entitas mana, jika ada, yang fundamental?
- Apakah semua entitas benda?
- Bagaimana sifat-sifat suatu objek berhubungan dengan objek itu sendiri?
- Apakah sifat fisik benar-benar ada?
- Fitur apa yang penting, bukan hanya atribut kebetulan dari objek yang diberikan?
- Berapa banyak level eksistensi atau level ontologis yang ada? Dan apa yang merupakan "level"?
- Apa itu objek fisik?
- Bisakah seseorang menjelaskan apa artinya mengatakan bahwa objek fisik ada?
- Dapatkah seseorang memberikan penjelasan tentang apa artinya mengatakan bahwa entitas non-fisik ada?
- Apa yang merupakan identitas suatu objek?
- Kapan sebuah objek keluar dari keberadaan, bukan hanya berubah?
- Makhluk yang ada selain dalam mode objektivitas dan subjektivitas, yaitu adalah perpecahan subjek/objek modern filsafat tidak bisa dihindari?

Konsep
Dikotomi ontologis yang penting meliputi:

- universal dan khusus
- substansi dan kebetulan
- benda abstrak dan konkret
- esensi dan keberadaan
- determinisme dan ketidakpastian
- monisme dan dualisme
- idealisme dan materialisme

Jenis
Filsuf dapat mengklasifikasikan ontologi dengan berbagai cara, menggunakan kriteria seperti tingkat abstraksi dan bidang aplikasi:

1. Ontologi atas: konsep yang mendukung pengembangan ontologi, meta-ontologi

2. Domain ontologi: konsep yang relevan dengan topik tertentu, domain wacana, atau bidang yang diminati, misalnya, untuk teknologi informasi atau bahasa komputer, atau cabang ilmu pengetahuan tertentu

3. Antarmuka ontologi: konsep yang relevan dengan persimpangan dua disiplin ilmu

4. Proses ontologi: input, output, kendala, pengurutan informasi, terlibat dalam proses bisnis atau rekayasa

3.5.2 Sejarah Ontology

Filsafat Hindu
Fitur ontologi di sekolah Samkhya filsafat Hindu dari milenium pertama SM. Konsep *guna* yang menggambarkan tiga sifat (*sattva*, *rajas*, dan *tamas*) yang hadir dalam proporsi yang berbeda dalam semua hal yang ada, adalah konsep penting dari aliran ini.

Parmenides dan monisme
Dalam tradisi filsafat Yunani, Parmenides (akhir abad ke-6 atau awal abad ke-5 SM) adalah yang pertama mengusulkan karakterisasi ontologis dari sifat dasar keberadaan. Dalam prolog atau proem untuk puisinya On Nature, ia menggambarkan dua pandangan tentang keberadaan; awalnya tidak ada yang datang dari ketiadaan, dan karena itu keberadaan itu abadi. Ini mengandaikan bahwa keberadaan adalah apa yang dapat dipahami dengan pikiran, diciptakan, atau dimiliki. Karenanya, mungkin tidak ada kekosongan atau kekosongan; dan kenyataan sejati tidak mungkin muncul atau punah dari keberadaan. Sebaliknya, keseluruhan ciptaan adalah kekal, seragam, dan tidak berubah, meskipun tidak terbatas (Parmenides melambangkan bentuknya sebagai bentuk bola yang sempurna). Parmenides dengan demikian berpendapat bahwa perubahan, seperti yang dirasakan dalam pengalaman sehari-hari, adalah ilusi. Segala sesuatu yang dapat ditangkap hanyalah satu bagian dari satu kesatuan. Gagasan ini agak mengantisipasi konsep modern dari teori penyatuan agung utama yang akhirnya menggambarkan semua keberadaan dalam satu realitas sub-atom yang saling terkait yang berlaku

untuk segalanya. Sebagian besar filsafat Barat (terutama filsafat Baruch Spinoza) termasuk konsep dasar kepalsuan telah muncul dari pandangan ini.

Pluralisme ontologis

Kebalikan dari monisme Eleatic Parmenides adalah konsepsi pluralistik tentang keberadaan. Pada abad ke 5 SM, Anaxagoras dan Leucippus menggantikan realitas *Keberadaan/Being* (unik dan tidak berubah) dengan *Menjadi/Becoming* dan karena itu oleh pluralitas ontik yang lebih mendasar dan elementer. Tesis ini berasal dari dunia Hellenic, dinyatakan dalam dua cara berbeda oleh Anaxagoras dan oleh Leucippus. Teori pertama berurusan dengan "biji" (yang disebut Aristoteles sebagai "homeomeries") dari berbagai zat. Itu kedua adalah teori atomistik, yang membahas realitas berdasarkan vakum, atom dan gerakan intrinsiknya di dalamnya.

Atomisme materialis yang diusulkan oleh Leucippus adalah indeterminist, tetapi Democritus (c.460 - c.370 SM) kemudian mengembangkannya dengan cara deterministik. Kemudian (abad ke-4 SM) Epicurus mengambil atomisme asli lagi sebagai tidak dapat ditentukan. Dia melihat kenyataan sebagai terdiri dari tak terhingga sel-sel atau atom yang tidak dapat dibagi, tidak dapat diubah (atomon, lit. 'uncuttable'), tetapi dia memberikan bobot untuk mengkarakterisasi atom sedangkan untuk Leucippus mereka dicirikan oleh "figur", "order" dan sebuah "Posisi" di kosmos. Selain itu, atom menciptakan keseluruhan dengan gerakan intrinsik dalam ruang hampa, menghasilkan fluks makhluk yang beragam. Gerakan mereka dipengaruhi oleh parenklisis (Lucretius menamakannya klinamen) dan itu ditentukan oleh kesempatan. Ide-ide ini meramalkan pemahaman fisika tradisional sampai munculnya teori abad ke-20 tentang sifat atom.

Plato

Plato (hidup tahun 420-an SM hingga 348/347 SM) mengembangkan perbedaan antara realitas sejati dan ilusi, dengan berpendapat bahwa apa yang nyata adalah Bentuk atau Ide abadi dan tidak berubah (pendahulu universal), di mana hal-hal yang dialami dalam sensasi paling baik hanyalah salinan, dan hanya nyata sejauh mereka menyalin ("mengambil bagian") Formulir tersebut. Secara umum, Plato menganggap bahwa semua kata benda (mis., "Kecantikan") merujuk pada entitas nyata, apakah benda yang masuk akal atau Formulir yang tidak masuk akal. Oleh karena itu, dalam The Sophist Plato berpendapat bahwa Being adalah Bentuk di mana semua hal yang ada berpartisipasi dan yang mereka miliki bersama (meskipun tidak jelas apakah "Being" dimaksudkan dalam arti keberadaan, kopula, atau identitas); dan berpendapat, melawan Parmenides, bahwa Bentuk harus ada tidak hanya dari Makhluk, tetapi juga dari Negasi dan non-Makhluk (atau Perbedaan).

Aristoteles
Dalam Kategorinya, Aristoteles (384-322 SM) mengidentifikasi sepuluh jenis hal yang mungkin menjadi subjek atau predikat dari dalil. Bagi Aristoteles ada empat dimensi ontologis yang berbeda:

1. sesuai dengan berbagai kategori atau cara mengatasi makhluk seperti itu

2. sesuai dengan kebenaran atau kepalsuannya (mis. Emas palsu, uang palsu)

3. apakah itu ada di dalam dan dari dirinya sendiri atau hanya 'datang' secara tidak sengaja

4. sesuai dengan potensinya, gerakan (energi) atau kehadiran akhir (Buku Metafisika Theta).

Avicenna
Menurut Avicenna (c. 980 - 1037), dan dalam penafsiran doktrin ontologis Aristotelian dan Platonis Yunani dalam metafisika abad pertengahan, keberadaan itu perlu, kontingen qua mungkin, atau tidak mungkin. Keberadaan yang diperlukan adalah keberadaan yang tidak bisa tidak ada, karena tidak ada keberadaan ini mengandung kontradiksi. Kontingen qua keberadaan yang mungkin ada tidak perlu atau tidak mungkin untuk menjadi atau tidak menjadi. Secara ontologis netral, dan dibawa dari potensi yang ada ke dalam keberadaan aktual melalui suatu sebab yang berada di luar esensinya. Keberadaannya dipinjam tidak seperti yang diperlukan, yang hidup sendiri dan tidak mungkin tidak terjadi. Adapun yang mustahil, itu tentu tidak ada, dan penegasan keberadaannya adalah kontradiksi.

3.5.3 Topik ontologis lainnya

Formasi ontologis
Konsep 'formasi ontologis' mengacu pada formasi hubungan sosial yang dipahami sebagai cara hidup yang dominan. Hubungan temporal, spasial, korporeal, epistemologis dan performatif dianggap penting untuk memahami formasi dominan. Yaitu, formasi ontologis tertentu didasarkan pada bagaimana kategori ontologis dari waktu, ruang, perwujudan, pengetahuan dan kinerja dijalani secara objektif dan subyektif. Formasi ontologis yang berbeda termasuk adat (termasuk suku), tradisional, modern dan postmodern. Konsep ini pertama kali diperkenalkan oleh Globalisme, Nasionalisme, Tribalisme

bersama Paul James dengan serangkaian penulis termasuk Damian Grenfell dan Manfred Steger.

Dalam pendekatan teori terlibat, formasi ontologis dipandang sebagai berlapis dan berpotongan daripada formasi tunggal. Mereka adalah 'bentukan makhluk'. Pendekatan ini menghindari masalah-masalah biasa dari Kesenjangan Besar yang diajukan antara yang modern dan pra-modern. Dari perbedaan filosofis mengenai formasi makhluk yang berbeda, konsep ini kemudian menyediakan cara menerjemahkan ke dalam pemahaman praktis tentang bagaimana manusia dapat merancang kota dan komunitas yang hidup secara kreatif di berbagai formasi ontologis yang berbeda, misalnya kota yang tidak sepenuhnya didominasi oleh valensi modern spasial konfigurasi. Di sini pekerjaan Tony Fry penting.

Kepastian ontologis dan epistemologis

René Descartes, dengan *je pense donc je suis* atau *cogito ergo sum* atau "Saya pikir, oleh karena itu saya", berpendapat bahwa "diri" adalah sesuatu yang dapat kita ketahui ada dengan kepastian epistemologis. Descartes berargumen lebih lanjut bahwa pengetahuan ini dapat mengarah pada bukti kepastian keberadaan Tuhan, menggunakan argumen ontologis yang telah dirumuskan pertama kali oleh Anselmus dari Canterbury.

Namun, kepastian tentang keberadaan "diri" dan "yang lain" mendapat kecaman yang meningkat di abad ke-20. Para ahli teori sosiologis, terutama George Herbert Mead dan Erving Goffman, memandang Cartesian Other sebagai "Generalized Other", khalayak khayal yang digunakan individu ketika memikirkan diri. Menurut Mead, "kita tidak berasumsi bahwa ada diri yang memulainya. Diri tidak dianggap sebagai sesuatu yang darinya dunia muncul. Sebaliknya, diri muncul di dunia". Cartesian Other juga digunakan oleh Sigmund Freud, yang melihat superego sebagai kekuatan pengatur yang abstrak, dan Émile Durkheim yang memandang ini sebagai entitas yang dimanifestasikan secara psikologis yang mewakili Tuhan dalam masyarakat pada umumnya.

Tubuh dan lingkungan, mempertanyakan makna keberadaan

Sekolah subyektivisme, objektivisme, dan relativisme ada pada berbagai waktu di abad ke-20, dan postmodernis dan tubuh filsuf mencoba membingkai ulang semua pertanyaan ini dalam hal tubuh mengambil beberapa tindakan khusus dalam lingkungan. Ini sangat bergantung pada wawasan yang berasal dari penelitian ilmiah terhadap hewan yang mengambil tindakan naluriah dalam pengaturan alami dan buatan seperti yang dipelajari oleh biologi, ekologi, dan ilmu kognitif.

Proses-proses dimana badan-badan yang terkait dengan lingkungan menjadi perhatian besar, dan gagasan tentang dirinya sendiri menjadi sangat sulit untuk didefinisikan. Apa yang orang maksud ketika mereka berkata "A adalah B", "A harus B", "A menjadi B" ...? Beberapa ahli bahasa menganjurkan menjatuhkan kata kerja "menjadi" dari bahasa Inggris, meninggalkan "E Prime", yang seharusnya kurang rentan terhadap abstraksi yang buruk. Yang lain, sebagian besar filsuf, mencoba menggali kata dan penggunaannya. Martin Heidegger membedakan manusia sebagai keberadaan dari keberadaan benda-benda di dunia. Heidegger mengusulkan bahwa cara kita menjadi manusia dan cara dunia bagi kita dilemparkan secara historis melalui pertanyaan ontologis yang mendasar. Kategori-kategori ontologis yang mendasar ini memberikan dasar untuk komunikasi di zaman: cakrawala makna latar belakang yang tak terucapkan dan nampaknya tak perlu dipertanyakan, seperti manusia yang dipahami tanpa pertanyaan ketika subjek dan entitas lain dipahami tanpa pertanyaan sebagai objek. Karena makna ontologis dasar ini menghasilkan dan diperbarui dalam interaksi sehari-hari, lokus cara kita berada dalam zaman sejarah adalah peristiwa komunikatif bahasa yang digunakan. Akan tetapi, bagi Heidegger, komunikasi pada awalnya bukanlah di antara manusia, tetapi bahasa itu sendiri terbentuk sebagai tanggapan terhadap pertanyaan (makna yang tidak habis-habisnya) dari makhluk. Bahkan fokus ontologi tradisional pada 'apa' atau *quidditas* keberadaan dalam keberadaannya yang substansial dan dapat berdiri dapat digeser untuk mengajukan pertanyaan tentang 'keutuhan' manusia itu sendiri.

Ontologi dan bahasa

Beberapa filsuf mengemukakan bahwa pertanyaan "Apa itu?" adalah (setidaknya sebagian) masalah penggunaan daripada pertanyaan tentang fakta. Perspektif ini disampaikan oleh analogi yang dibuat oleh Donald Davidson: Misalkan seseorang merujuk pada 'cangkir' sebagai 'kursi' dan membuat beberapa komentar yang berkaitan dengan cangkir, tetapi menggunakan kata 'kursi' sebagai pengganti 'cangkir' terus menerus secara konsisten. Seseorang mungkin dengan mudah mengetahui bahwa orang ini hanya menyebut 'cangkir' sebagi 'kursi' dan keanehannya dijelaskan. Secara analogi, jika kita menemukan orang-orang yang menyatakan 'ada' ini dan itu, dan kita sendiri tidak berpikir bahwa 'ini-dan-itu' ada, kita dapat menyimpulkan bahwa orang-orang ini tidak gila (Davidson menyebut asumsi ini 'amal'), mereka hanya menggunakan 'ada' berbeda dari kita. Pertanyaan Apa itu? setidaknya sebagian topik dalam filsafat bahasa, dan tidak sepenuhnya tentang ontologi itu sendiri. Pandangan ini telah diungkapkan oleh Eli Hirsch.

Hirsch menafsirkan Hilary Putnam sebagai menyatakan bahwa konsep berbeda tentang "keberadaan sesuatu" bisa benar. Posisi ini tidak bertentangan dengan pandangan bahwa beberapa hal memang ada, tetapi menunjukkan bahwa 'bahasa' yang berbeda akan memiliki aturan yang berbeda tentang menetapkan sifat ini. Cara menentukan 'kebugaran' suatu 'bahasa' bagi dunia kemudian menjadi subjek investigasi.

Umum untuk semua bahasa kopula Indo-Eropa adalah penggunaan ganda dari kata kerja "menjadi" dalam keduanya menyatakan bahwa entitas X ada ("X adalah.") Serta menyatakan bahwa X memiliki suatu sifat ("X adalah S"). Kadang-kadang dikemukakan bahwa penggunaan ketiga juga berbeda, menyatakan bahwa X adalah anggota kelas ("X adalah suatu C"). Dalam keluarga bahasa lain, peran-peran ini mungkin memiliki kata kerja yang sama sekali berbeda dan kecil kemungkinannya untuk dikacaukan satu sama lain. Misalnya mereka mungkin mengatakan sesuatu seperti "mobil itu mempunyai warna merah" daripada "mobil itu merah". Oleh karena itu setiap diskusi tentang "keberadaan" dalam filsafat bahasa Indo-Eropa mungkin perlu membuat perbedaan antara indera-indera ini.

Ontologi dan geografi manusia

Dalam geografi manusia ada dua jenis ontologi: "o" kecil yang menjelaskan orientasi praktis, menggambarkan fungsi menjadi bagian dari kelompok, dianggap terlalu menyederhanakan dan mengabaikan kegiatan utama. "o" yang lain, atau "O" besar, secara sistematis, logis, dan rasional menggambarkan karakteristik esensial dan sifat universal. Konsep ini berkaitan erat dengan pandangan Plato bahwa pikiran manusia hanya dapat melihat dunia yang lebih besar jika mereka terus hidup dalam batas-batas perbedaan, ontologi bergantung pada perjanjian simbolis di antara anggota. Yang mengatakan, ontologi sangat penting untuk kerangka kerja bahasa aksiomatik.

Realitas dan aktualitas

Menurut A.N. Whitehead, untuk ontologi, berguna untuk membedakan istilah 'kenyataan' dan 'aktualitas'. Dalam pandangan ini, 'entitas aktual' memiliki status filosofis prioritas ontologis yang fundamental, sedangkan 'entitas nyata' adalah entitas yang mungkin aktual, atau dapat menurunkan realitasnya dari hubungan logisnya dengan entitas atau entitas aktual. Misalnya, peristiwa dalam kehidupan Socrates adalah entitas yang sebenarnya. Tetapi Socrates menjadi seorang pria tidak menjadikan 'manusia' sebagai entitas yang sebenarnya, karena ia mengacu pada banyak entitas yang sebenarnya, seperti beberapa kesempatan dalam kehidupan Socrates, dan juga beberapa kesempatan dalam kehidupan Alcibiades, dan yang lainnya. Tetapi gagasan tentang manusia itu nyata; ia memperoleh realitasnya dari rujukannya pada banyak peristiwa aktual itu, yang masing-masing merupakan entitas aktual. Suatu kejadian aktual adalah entitas konkret, sementara istilah seperti 'manusia' adalah abstraksi dari banyak entitas relevan yang konkret.

Menurut Whitehead, entitas aktual harus mendapatkan status filosofis prioritas ontologis yang mendasar dengan memuaskan beberapa kriteria filosofis, sebagai berikut:

- Tidak ada jalan di belakang entitas yang sebenarnya, untuk menemukan sesuatu yang lebih mendasar pada kenyataannya atau dalam keberhasilan. Kriteria ini harus dianggap sebagai mengekspresikan aksioma, atau mendalilkan doktrin terkemuka.

- Entitas aktual harus sepenuhnya ditentukan dalam arti bahwa mungkin tidak ada kebingungan tentang identitasnya yang akan memungkinkannya dikacaukan dengan entitas aktual lainnya. Dalam pengertian ini, entitas aktual sepenuhnya konkret, tanpa potensi untuk menjadi sesuatu selain dirinya sendiri. Itu adalah apa adanya. Ini adalah sumber potensi untuk penciptaan entitas aktual lainnya, yang dapat dikatakan sebagai penyebab sebagian. Demikian juga konkret atau realisasi potensi entitas aktual lainnya yang merupakan penyebab parsialnya.

- Penyebab antara entitas aktual sangat penting untuk aktualitas mereka. Akibatnya, untuk Whitehead, setiap entitas aktual memiliki ekstensi yang berbeda dan pasti dalam ruang Minkowski fisik, dan dengan demikian dapat diidentifikasi secara unik. Deskripsi dalam ruang Minkowski mendukung deskripsi dalam waktu dan ruang untuk pengamat tertentu.

- Ini adalah bagian dari tujuan filosofi ontologi seperti Whitehead bahwa entitas yang sebenarnya harus semuanya sama, qua entitas yang sebenarnya; mereka semua harus memenuhi suatu perangkat tunggal kriteria ontologis aktualitas yang dinyatakan dengan baik.

Whitehead mengusulkan bahwa gagasannya tentang kesempatan pengalaman memenuhi kriteria statusnya sebagai definisi yang lebih disukai secara filosofis tentang entitas aktual. Dari sudut pandang yang murni logis, setiap kesempatan pengalaman memiliki karakter karakter objektif dan subyektif. Subjektivitas dan obyektivitas mengacu pada berbagai aspek dari suatu peristiwa pengalaman, dan sama sekali tidak mengesampingkan satu sama lain.

Contoh-contoh proposal atau kandidat filosofis lainnya sebagai entitas aktual, dalam pandangan ini, adalah 'substansi' Aristoteles, monad Leibniz, dan Descartes 'res verae', dan 'state of affairs' yang lebih modern. Zat-zat Aristoteles, seperti Socrates, ada di belakangnya sebagai 'zat utama' yang lebih mendasar, dan dalam hal ini tidak memenuhi kriteria Whitehead. Whitehead tidak senang dengan monad Leibniz sebagai entitas aktual karena mereka "tidak berjendela" dan tidak saling menyebabkan. 'Kondisi hubungan' seringkali tidak didefinisikan secara dekat, seringkali tanpa rincian, dan oleh karena itu memiliki sesuatu di belakangnya. Salah satu ringkasan dari entitas aktual Whiteheadian adalah bahwa itu adalah proses entitas aktual, adalah bahwa ia "semua jendela", berbeda dengan monad tanpa jendela Leibniz.

Pandangan ini memungkinkan entitas filosofis selain entitas aktual untuk benar-benar ada, tetapi tidak secara fundamental dan terutama faktual atau berkhasiat kausal; mereka memiliki eksistensi sebagai abstraksi, dengan realitas hanya berasal dari referensi mereka terhadap entitas aktual. Suatu entitas Whiteheadian sebenarnya memiliki tempat dan waktu yang unik dan sepenuhnya pasti. Abstraksi Whiteheadian tidak didefinisikan secara ketat dalam waktu dan tempat, dan dalam ekstremnya, beberapa di antaranya bersifat abadi dan tanpa batas, atau keberadaan konseptual dari pada berkhasiat; kurangnya waktu yang pasti tidak membuat mereka tidak nyata jika mereka mengacu pada entitas yang sebenarnya. Whitehead menyebutnya 'prinsip ontologis'.

Ontologi mikrokosmik

Ada sejarah filosofis yang mapan dan panjang tentang konsep atom sebagai objek fisik mikroskopis. Mereka terlalu kecil untuk dapat dilihat oleh mata telanjang. Baru-baru ini seperti abad kesembilan belas bahwa perkiraan yang tepat dari ukuran pengamatan diduga efek atom adalah karena penyelidikan teoritis gerak Brown oleh Albert Einstein pada awal abad kedua puluh. Tetapi bahkan kemudian, keberadaan sebenarnya dari atom diperdebatkan oleh beberapa orang. Debat seperti itu mungkin diberi label 'ontologi mikrokosmik'. Di sini kata 'mikrokosmos' digunakan untuk dunia fisik entitas kecil, seperti misalnya atom.

Partikel subatomik biasanya dianggap jauh lebih kecil dari atom. Keberadaan mereka yang sebenarnya atau yang sebenarnya mungkin sangat sulit untuk ditunjukkan secara empiris. Perbedaan kadang-kadang ditarik antara partikel subatomik aktual dan virtual. Secara wajar, orang mungkin bertanya, dalam arti apa, jika ada, apakah partikel virtual ada sebagai entitas fisik? Untuk partikel atom dan subatomik, pertanyaan sulit muncul, seperti apakah mereka memiliki posisi yang tepat, atau momentum yang tepat? Sebuah pertanyaan yang terus menjadi kontroversial adalah 'untuk apa jenis fisik, jika ada, apakah merujuk fungsi gelombang mekanika kuantum?'

Argumen ontologis

Dalam tradisi Kristen Barat, dalam karyanya Proslogion 1078, Anselmus dari Canterbury mengusulkan apa yang dikenal sebagai 'argumen ontologis' untuk keberadaan Tuhan. Anselmus mendefinisikan Tuhan sebagai "yang selain itu tidak ada yang lebih besar dapat dipikirkan", dan berpendapat bahwa keberadaan ini harus ada dalam pikiran, bahkan dalam pikiran orang yang menyangkal keberadaan Tuhan. Dia menyarankan bahwa, jika keberdaan terbesar yang ada dalam pikiran, itu juga harus ada dalam kenyataan. Jika itu hanya ada dalam pikiran, maka keberadaan yang lebih besar haruslah ada yang ada di dalam pikiran dan dalam kenyataan. Karena itu, keberadaan yang paling besar ini harus ada dalam kenyataan. Filsuf Perancis abad ketujuh belas René Descartes mengajukan argumen serupa. Descartes menerbitkan beberapa variasi argumennya, yang masing-masing berpusat pada gagasan bahwa keberadaan Tuhan segera dapat disimpulkan dari gagasan "jelas dan berbeda" tentang keberadaan yang sangat sempurna. Pada awal abad kedelapan belas, Gottfried Leibniz menambah gagasan Descartes dalam upaya untuk membuktikan bahwa keberadaan "yang sangat sempurna" adalah konsep yang koheren. Norman Malcolm menghidupkan kembali argumen ontologis pada tahun 1960 ketika ia menemukan argumen ontologis kedua yang lebih kuat dalam karya Anselmus; Alvin Plantinga menentang argumen ini dan mengusulkan alternatif, berdasarkan pada modal logika. Berbagai upaya juga telah dilakukan untuk memvalidasi bukti Anselmus dengan menggunakan teorema teorema otomatis.

Baru-baru ini, Kurt Gödel mengusulkan argumen formal untuk keberadaan Tuhan. Argumen lain untuk keberadaan Tuhan telah dikemukakan, termasuk yang dibuat oleh filsuf Islam Mulla Sadra dan Allama Tabatabai.

3.6 Epistemologi

Epistemologi dari bahasa Yunani Kuno $\epsilon\pi\iota\sigma\tau\eta\mu\eta$ (episteme) 'pengetahuan', dan -logi) adalah cabang filsafat yang berkaitan dengan pengetahuan. Epistemolog mempelajari hakikat, asal usul, dan ruang lingkup pengetahuan, pembenaran epistemik, rasionalitas keyakinan, dan berbagai persoalan terkait. Perdebatan dalam epistemologi (kontemporer) umumnya dikelompokkan pada empat bidang inti:

1. Analisis filosofis tentang hakikat pengetahuan dan kondisi yang diperlukan agar suatu keyakinan dapat membentuk pengetahuan, seperti **kebenaran** dan **pembenaran**

2. Sumber pengetahuan potensial dan keyakinan yang dibenarkan, seperti persepsi, akal, ingatan, dan kesaksian

3. Struktur kumpulan pengetahuan atau keyakinan yang dibenarkan, termasuk apakah semua keyakinan yang dibenarkan harus berasal dari keyakinan dasar yang dibenarkan atau apakah pembenaran hanya memerlukan serangkaian keyakinan yang koheren

4. Skeptisisme filosofis, mempertanyakan kemungkinan adanya pengetahuan, dan masalah terkait, seperti apakah skeptisisme merupakan ancaman terhadap klaim pengetahuan kita yang biasa dan apakah mungkin untuk menyangkal argumen skeptis

Dalam perdebatan ini dan perdebatan lainnya, epistemologi bertujuan untuk menjawab pertanyaan seperti “Apa yang diketahui orang?”, “Apa yang dimaksud dengan mengatakan bahwa orang mengetahui sesuatu?”, “Apa yang membuat keyakinan yang dibenarkan bisa dibenarkan?”, dan “Bagaimana orang tahu?” bahwa mereka tahu?" Spesialisasi dalam epistemologi mengajukan pertanyaan seperti "Bagaimana orang dapat membuat model formal tentang isu-isu yang berkaitan dengan pengetahuan?" (dalam epistemologi formal), "Apa saja kondisi historis perubahan berbagai jenis pengetahuan?" (dalam epistemologi sejarah), "Apa metode, tujuan, dan pokok bahasan penyelidikan epistemologis?" (dalam metaepistemologi), dan “Bagaimana orang bisa saling mengetahui?” (dalam epistemologi sosial).

Lalu apa hubungan matematika dengan epistemologi. Suatu contoh, bagaimana orang tahu berapa panjang saat mengukur, panjang suatu sisi miring suatu kuda-kuda atap rumah? Bila pajang alas kuda-duda 2 m dan kemiringan kuda-kuda 45°. Matematikawan tahu bahwa panjangnya $\sqrt{2}$ m. Persoalannya berapa $\sqrt{2}$ bila diukur dengan alat ukur yang tersedia? Tentu tidak akan pernah didapat **jawab eksak**, sebab $\sqrt{2}$ dapat dibuktikan bahwa ia bukan bilangan rasional tetapi bilangan irrasional. Disini, matematikawan dengan gagasan dan kemampuan logika tidak perluh mengukur dengan alat ukur untuk menunjukkan bahwa $\sqrt{2}$ **bukan bilangan pecahan/rasional** $\frac{p}{q}$ dengan $p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$. Hal bisa dilakukan dengan menggunakan logika pengandian dan akan terjadi kontradiksi.

Andaikan $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ dengan p dan q relatif prima yaitu mempunyai faktor persekutuan terbesar 1, sehingga kita memunyai

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2q^2.$$

Ini berarti p^2 adalah bilangan bulat genap. Jadi p bilangan bulat genap, sehingga kita mempunyai

$$p = 2r, \text{ dengan } r \in \mathbb{Z}, r = 1, 2, 3, \ldots$$

Dengan demikian

$$2q^2 = 4r^2 \Rightarrow q^2 = 2r^2.$$

Ini berarti q adalah bilangan genap. Jadi 2 memrupakan faktor persekutan dari p dan q. Hal ini berteentangan dengan kenyataan bahwa p dan q relatif prima. Jadi haruslah $\frac{p}{q}$ bukan bilangan rasional. Dengan demikian $\sqrt{2}$ irrasional.

Suatu diskusi tentang bilangan prima

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 27, 29, 31, 37, 41, 43 \ldots \tag{3.1}$$

Bila barisan(3.1) tanpa bilangan 2 kita pecah menjadi dua bagian

$$3, 7, 11, 19, 23, 27, 31, 43, \ldots \tag{3.2}$$

dan

$$5, 13, 17, 29, 37, 41, 53, \ldots \tag{3.3}$$

Maka suku-suku barisan(3.2) bila dibagi 4 sisanya 3. Sedangkan suku-suku barisan(3.3) bila dibagi 4 sisanya 1. Diskusi ini berkaitan dengan pernyataan **teorema Fermat**.

3.7 Estetika

Banyak matematikawan yang berlatih tertarik pada subjek mereka karena rasa keindahan yang mereka rasakan di dalamnya. Seseorang kadang-kadang mendengar sentimen bahwa ahli matematika ingin meninggalkan filsafat kepada para filsuf dan kembali ke matematika di mana, mungkin, keindahan terletak.

Dalam karyanya tentang proporsi ilahi, H.E. Huntley mengaitkan perasaan membaca dan memahami bukti orang lain tentang teorema matematika dengan pemirsa sebuah karya seni. Pembaca suatu bukti memiliki perasaan kegembiraan yang sama dalam memahami sebagai penulis asli buktinya, seperti halnya, ia berpendapat, penampil sebuah karya memiliki rasa kegembiraan yang mirip dengan pelukis atau pematung asli. Memang, seseorang dapat mempelajari tulisan-tulisan matematika dan ilmiah sebagai sastra.

Philip J. Davis dan Reuben Hersh telah berkomentar bahwa rasa keindahan matematika bersifat universal di kalangan praktisi matematika. Sebagai contoh, mereka memberikan dua bukti irasionalitas $\sqrt{2}$. Yang pertama adalah bukti tradisional berdasarkan kontradiksi, yang dianggap berasal dari Euclid; yang kedua adalah bukti yang lebih langsung yang melibatkan teorema dasar aritmatika yang, menurut mereka, menjadi inti permasalahan. Davis dan Hersh berpendapat bahwa ahli matematika menemukan bukti kedua lebih menarik secara estetika karena semakin dekat dengan sifat masalah.

Paul Erdős terkenal karena gagasannya tentang "Buku" hipotetis yang mengandung bukti matematika paling elegan atau indah. Tidak ada kesepakatan universal bahwa suatu hasil memiliki satu bukti "paling elegan"; Gregory Chaitin menentang gagasan ini.

Para filsuf kadang-kadang mengkritik rasa keindahan atau keanggunan matematikawan, yang terbaik, secara samar-samar dinyatakan. Dengan cara yang sama, bagaimanapun, filsuf matematika telah berusaha untuk mengkarakterisasi apa yang membuat satu bukti lebih diinginkan daripada yang lain ketika keduanya masuk akal secara logis.

Aspek lain dari estetika tentang matematika adalah pandangan matematikawan terhadap kemungkinan penggunaan matematika untuk tujuan yang dianggap tidak etis atau tidak pantas. Eksposisi pandangan ini yang paling terkenal terjadi di G.H. Buku Hardy Permintaan Maaf Seorang Ahli Matematika, di mana Hardy berpendapat bahwa matematika murni lebih unggul dalam keindahan daripada matematika terapan karena itu tidak dapat digunakan untuk perang dan tujuan yang serupa.

3.8 Apa itu Filsafat Matematika Sekarang?

Salah satu poin awal bahasan ini adalah pembicaraan pekerjaan yang dipresentasikan di departemen filsafat beberapa universitas riset. Dibahas bagaimana tanda-tanda matematika menggeser maknanya dan menjelaskan proses matematika dari pembuatan akal, beberapa di antaranya dibahas dalam pembahasan ini. Salah satu profesor departemen berkomentar dengan singkat bahwa "ini bukan filsafat matematika." Dia menjelaskan bahwa seorang filsuf matematika harus mengambil pengertian dan istilah yang kita atau sumber sejarah kita gunakan ketika membahas matematika dan menyediakan semacam rekonstruksi rasional kepada mereka.

Dalam arti tertentu, profesor ini benar. Apa yang telah banyak dlakukan bukanlah filsafat matematika seperti yang biasa dipraktikkan hari ini. Ini dapat dengan mudah diverifikasi. Ada 150 entri teratas dalam Indeks Filsuf dengan kata-kata "matematika" atau "matematikal" dalam abstrak mereka yang diposting selama beberapa tahun terakhir. Ini menunjukkan bahwa perdebatan paling populer dalam filsafat matematika kontemporer, yang mewakili cara keberadaan entitas matematika, terutama dalam konteks penerapannya pada ilmu alam (bibliografi Phil Papers menyarankan proporsi yang sama).

Jadi masalah utama yang menggangu filsafat arus utama matematika saat ini berkaitan dengan jenis realitas yang dikaitkan dengan objek dan pernyataan matematika. Memang, dalam kebanyakan situasi, seseorang berbicara tentang objek dan pernyataan matematis seperti halnya seseorang berbicara tentang objek dan pernyataan ilmiah lainnya. Tetapi ada masalah yang jelas dengan cara berbicara ini, karena objek matematika sulit untuk diikat ke fenomena spatio-temporal (ruang-waktu), dan oleh karena itu klaim yang melibatkan objek matematika sulit dipahami sebagai benar-benar referensial, seperti yang dibutuhkan oleh realis. Pada saat yang sama, banyak klaim matematis sangat dapat diterapkan pada fenomena empiris, yang membuatnya sulit untuk menganggapnya sebagai gagasan kontingen, seperti yang cenderung dilakukan oleh nominalis.

Jadi tugas filosofis utama kontemporer dalam arus utama filsafat kehilangan matematika adalah untuk melacak akun rasional dari istilah "benar" dan "ada" sehingga memungkinkan penggunaannya yang konsisten baik dalam sains dan matematika, dan, pada saat yang sama, menghormati penggunaan umum dari istilah-istilah ini dan kebiasaan matematika umum . Tetapi pasangan kendala terakhir ini dalam konflik: kita dapat mendefinisikan kembali "benar" dan "ada" secara kreatif untuk menghasilkan konsistensi atas penggunaannya dalam sains dan matematika, tetapi kehilangan kontak dengan penggunaan umum, atau kita dapat berpegang pada penggunaan umum, tetapi menghadapi rintangan ketika menerapkan istilah-istilah ini untuk hal nyata, praktik matematika yang ada. Debat filosofis dengan demikian adalah tentang memperluas istilah "benar" dan "ada" dengan cara yang mencakup aspek paling penting dari penggunaan umum dan konsistensi konseptual. Karena memutuskan apa yang "paling penting" melibatkan penentuan prioritas nonkonsensual, perdebatan terus berputar.

Pendekatan analitik ini mengacu pada sebuah kanon yang sudah mapan dari filosofi matematika. Referensi utama adalah sebagai berikut: Bentuk matematika transenden dan ideal Plato dikumpulkan melalui pengalaman empirik dan alasan dialektik; Pandangan Kant tentang matematika sebagai ilmu tentang bentuk-bentuk melalui mana kita mengatur waktu dan ruang (jalan tengah antara catatan empiris matematika dalam hal pengamatan dalam waktu dan ruang dan akun rasionalis dalam hal alasan non-empiris murni); upaya logisis untuk mereduksi matematika menjadi logika sebagai ilmu nalar murni; upaya intuitionist untuk membatasi matematika dengan apa yang sebenarnya dapat dikonstruksikan dalam pikiran kita (atau, lebih tepatnya, dalam bentuk intuisi temporal seperti Kantian); artikulasi formalis matematika sebagai sistem tanda-tanda yang tidak berarti tunduk pada aturan sintaksis murni yang konsistensinya harus dianalisis dengan menggunakan logika yang konstruktif dan finansial; artikulasi positivis logis matematika sebagai sistem kebenaran logis sintaksis yang digunakan untuk menyatukan pengamatan empiris; dan pandangan empiris-holistik tentang matematika dan sains empiris sebagai kontinum yang tidak terpisahkan. Kanon ini memberikan latar belakang pencarian kontemporer untuk artikulasi yang memuaskan dari objektivitas dan kebenaran matematika.

Seluruh kanon ini berputar di sekitar pertanyaan mendasar: "Ke dasar ontologis seperti apa kita dapat mengurangi matematika?" Jadi dari sudut pandang tradisi ini, professor yang mengkritik presentasi itu benar. Penyaji presentasi tidak melakukan filosofi matematika, dan dia terus tidak melakukannya dalam bahasan ini. (Jelas, dia tidak mendapatkan pekerjaan itu.)

Apa Lagi Filsafat Matematika yang Bisa lakukan

Sebelum mencoba mengartikulasikan filosofi matematika yang berbeda, harus dijelaskan untuk siapa filosofi ini dimaksudkan. Seperti yang terlihat, ada tiga kelompok sasaran utama untuk filsafat matematika: filsuf, ahli matematika, dan orang-orang yang terlibat dengan matematika kurang intensif dalam kehidupan profesional dan sehari-hari mereka.

Para filsuf biasanya tertarik pada matematika sebagai ujian bagi beberapa sistem filsafat umum. Karena itu bukan sembarang kasus uji, tetapi yang memiliki beberapa karakteristik ekstrem (misalnya, dipandang sebagai cabang ilmu yang sangat ketat), matematika dianggap sebagai kasus uji yang sangat penting. Karena minat dalam matematika biasanya terjerat dengan sains dan logika, dan karena domain ini adalah favorit dari tradisi analitis, filsafat matematika filsuf biasanya analitik sehingga fokus saat ini pada versi analitik realisme versus nominalisme dan pertanyaan tentang hubungan matematika-sains.

Matematikawan, sejauh yang bisa terlihat, tidak terlalu tertarik pada filosofi matematika. Mereka sering memiliki pandangan filosofis, tetapi mereka biasanya tidak terlalu tertarik pada tantangan atau mengembangkannya, mereka biasanya tidak menganggap ini sebagai upaya yang terlalu berharga. Mereka juga sangat mencurigai para filsuf. Memang, ahli matematika tahu lebih baik daripada siapa pun apa yang mereka lakukan. Gagasan meminta seorang filsuf memberi tahu mereka tentang hal itu terasa konyol, atau bahkan mengganggu.

Jadi kita beralih ke orang-orang yang ada hubungannya dengan matematika dalam kehidupan profesional atau sehari-hari mereka, tetapi tidak fokus pada matematika. Orang-orang semacam itu sering memiliki semacam konsepsi matematika yang samar, terkadang naif,. Salah satu manifestasi paling mencolok dari pandangan masyarakat ini adalah sebagai berikut: Jika saya mengatakan sesuatu yang filosofis yang tidak dimengerti orang, asumsi defaultnya adalah saya menggunakan kata-kata sok besar untuk membahas ide-ide kecil. Jika saya mengatakan sesuatu yang matematis sehingga orang tidak mengerti, asumsi standarnya adalah bahwa saya mengatakan sesuatu yang sangat cerdas dan mendalam sehingga mereka tidak bisa mendapatkannya.

Ada rasa hormat yang luar biasa terhadap matematika di akademisi dan di kalangan yang lebih luas. Sedemikian rupa sehingga bentuk-bentuk matematika yang buruk, sepele, dan tidak berguna sering disalahartikan sebagai pencapaian penting dalam ilmu sosial, dan kadang-kadang juga dalam ilmu humaniora. Sering diasumsikan bahwa semua ambiguitas dalam komunikasi verbal samar-samar kita hilang begitu kita beralih ke matematika, yang seharusnya murni univocal dan benar-benar benar. Tetapi bayangan cermin dari pendekatan ini juga umum. Menurut pandangan ini, matematika adalah bentuk pengetahuan yang murni mekanis, tidak manusiawi, dan tidak relevan.

Hal ini harus disadari bahwa filsafat matematika harus mencoba menghadapi pandangan naif seperti itu. Untuk melakukan itu, orang tidak perlu merekonstruksi skema rasio yang mendasari cara kita berbicara tentang matematika, tetapi melukiskan gambaran matematika yang lebih kaya, yang mencoba untuk menegaskan, alih-alih menghilangkan, ambiguitas, kemanusiaan, dan historisitasnya.

Pendekatan ini mewakili untai minoritas dalam filsafat matematika tetapi minoritas yang tumbuh. Ada seluruh tradisi itu telah datang bersama sejak 1980-an (jika tidak sebelumnya), yang, hari ini, disebut dengan judul "filsafat praktik matematika" (Az- zouni 1994; Ernest 1998; Hersh 1997; Van Kerkhove 2009; Van Kerkhove dan Van Bendegem 2007; Mancosu 1996, 2011; Rotman 2000; Tymoczko 1998). Tradisi ini mencoba menjelaskan apa yang dilakukan ahli matematika ketika mereka mengerjakan matematika, dan untuk mengalihkan fokus dari “apa adanya” ke “bagaimana cara kerjanya.” Pergeseran ini tidak cukup mengesampingkan pertanyaan “apa itu matematika”; alih-alih, ia bertanya “apa yang sedang bergerak,” saat diproduksi, dipahami, ditafsirkan, dan diterapkan, daripada “apa yang diam,” ketika kita mencoba memandangnya sebagai objek atau strata realitas/wacana yang lengkap, diberikan.

Ketika para pendukung sekolah filsafat ini memandang matematika pada beberapa praktik historis atau kontemporer yang bermasalah menurut standar formal kontemporer (misalnya, penggunaan infinitesimal atau argumen oleh diagram), mereka tidak mencoba merekonstruksi mereka dalam istilah yang lebih ketat; alih-alih mereka melihat apa pun yang dilakukan oleh ahli matematika, bahkan ketika apa yang mereka lakukan tidak secara resmi ketat (hal ini, secara pribadi, cenderung berfokus pada semiosis bagaimana tanda-tanda matematika menumpuk dan mengubah makna).

Cabang terakhir dari filsafat matematika ini sangat tinggi deskriptif dan sangat terjerat dengan sejarah dan sosiologi matematika. Memang, ketika kita melihat apa yang dilakukan ahli matematika, kita menemukan bahwa praktik mereka berubah secara historis dan tidak dapat direduksi tertanam dalam lembaga sosial. Karena rasa deskriptif dan konkret dari jenis pekerjaan ini, banyak yang melihatnya sebagai tidak layak dari judul “filosofis.”

Sering harus menyebut dirinya "studi sains" untuk bertahan hidup di luar batas-batas disiplin ilmu tradisional filsafat, sejarah, dan sosiologi. Dalam banyak hal, apa yang telah dilakukan dengan teks matematika lebih mirip dengan apa yang dilakukan beberapa peneliti di departemen sastra dengan teks sastra daripada apa yang dilakukan orang di departemen filsafat (ini jelas ada hubungannya dengan kenyataan bahwa beberapa cabang filsafat kontinental diasingkan ke departemen sastra).

Namun demikian, dipercaya bahwa bentuk berurusan dengan matematika ini, terlepas dari apakah kita memilih untuk menyebutnya filsafat atau tidak, adalah sangat penting hari ini. Pendekatan yang telah disajikan di sini dapat membantu pembaca akademik umum mereformasi beberapa pandangan masyarakat tentang matematika, dan memposisikan matematika sebagai upaya yang dapat diakses secara manusiawi, menikmati banyak karakteristik unik, tetapi masih dapat dibandingkan dengan cabang ilmu pengetahuan lainnya.

Pendekatan yang dianjurkan di sini semakin menarik minat para filsuf, dan tidak terlalu mengasingkan matematikawan daripada arus utama catatan filosofis. Mudah-mudahan, ini dapat menghasilkan wacana yang akan menyatukan para filsuf, matematikawan, dan non-spesialis, sehingga untuk mengintegrasikan kembali perdebatan sektarian yang tersebar pada matematika sekarang dan masa depan ke dalam percakapan lintas budaya yang lebih hidup dan lebih relevan.

Pemujaan terhadap matematika yang tidak kritis sebagai model terbaik dari pengetahuan, seperti halnya tren yang berlawanan dari matematika yang meremehkan sebagai pekerjaan yang sia-sia, keduanya merugikan organisasi dan evaluasi pengetahuan akademis kontemporer. Sebaliknya, matematika harus dihargai dan dinilai sebagai salah satu di antara banyak praktik membentuk pengetahuan. Memahami apa yang terdiri dari praktik ini akan memungkinkan komunitas akademik untuk memberikan kreditnya hak dan tempat dalam dan di luar sistem akademik.

Tetapi sebelum kita melangkah lebih jauh, untuk memberikan pengertian yang lebih konkret dari apa yang telah dibahas, mari kita perhatikan sketsa berikut.

Harga Opsi dan Formula Black-Scholes

Inti sketsa berikut adalah untuk memberikan contoh konkret tentang bagaimana matematika berhubungan dengan konteks ilmiah dan praktis yang lebih luas. Ini akan menunjukkan bahwa matematika memiliki kekuatan, dan bahwa kekuatannya berlaku bahkan ketika klaim matematika aktual tidak cukup berfungsi sebagai deskripsi realitas.

Konteks sketsa ini adalah penetapan harga opsi. "Opsi" adalah hak (tetapi bukan kewajiban) untuk melakukan transaksi tertentu dengan biaya tertentu pada waktu tertentu. Misalnya, saya dapat memiliki opsi untuk membeli 100 poundsterling Inggris seharga 150 dolar AS tiga bulan mulai hari ini. Jika saya memiliki opsi ini, dan tiga bulan dari hari ini 100 pound bernilai lebih dari 150 dolar, saya kemungkinan akan menggunakan opsi ini. Jika 100 pound ternyata bernilai kurang dari 150 dolar, kemungkinan besar saya akan membuangnya.

Opsi tersebut dapat digunakan sebagai asuransi. Opsi sebelumnya, misalnya, akan mengasuransikan saya terhadap penurunan nilai tukar dolar-pound, jika saya membutuhkan asuransi semacam itu. Ini juga bisa berfungsi sebagai taruhan sederhana untuk penjudi keuangan. Tetapi berapa harga yang harus seseorang pasang pada asuransi atau taruhan semacam ini?

Ada dua narasi untuk menjawab pertanyaan ini. Yang pertama mengatakan bahwa sampai tahun 1973, tidak ada yang benar-benar tahu cara menentukan harga opsi semacam itu, dan harga ditentukan oleh penawaran, permintaan, dan perkiraan. Lebih tepatnya, ada beberapa cara beralasan untuk menentukan harga, tetapi semuanya melibatkan penetapan harga pada risiko yang bersedia diambil, yaitu merupakan masalah yang agak subyektif.

Dalam dua makalah yang diterbitkan pada tahun 1973, Fischer Black dan Myron Scholes, diikuti oleh Robert Merton, muncul dengan formula alasan untuk opsi penetapan harga yang tidak mengharuskan penetapan harga pada risiko. Prestasi ini dianggap sangat penting sehingga pada 1997 Scholes dan Merton dianugerahi Hadiah Nobel dalam bidang ekonomi untuk formula mereka (Black telah meninggal dua tahun sebelumnya). Memang, "Black, Merton dan Scholes dengan demikian meletakkan dasar bagi pertumbuhan cepat pasar untuk derivatif dalam sepuluh tahun terakhir" setidaknya menurut siaran pers Royal Swedish Academy (1997).

Tetapi ada cara lain untuk menceritakan kisah itu. Cara lain ini mengklaim bahwa opsi kembali sejauh jaman dahulu, dan penetapan harga opsi telah dipelajari sejak abad ketujuh belas. Rumus penetapan harga opsi ditetapkan jauh sebelum Black and Scholes, dan begitu juga berbagai cara untuk memperhitungkan risiko penetapan harga (berdasarkan sesuatu yang disebut paritas panggilan-panggilan daripada metode lindung nilai dinamis pemenang Nobel, tetapi kita tidak bisa pergi ke rincian di sini). Selain itu, menurut narasi ini, rumus Black-Scholes tidak berfungsi dan tidak digunakan (Derman dan Taleb 2005; Haug dan Taleb 2011).

Jika kita ingin mencapai kompromi antara dua narasi, kita dapat mengatakan bahwa model Black-Scholes adalah tambahan baru dan asli untuk model yang ada, dan bahwa itu bekerja di bawah kondisi ideal yang sesuai, yang tidak selalu didekati oleh kenyataan. Tapi mari kita coba untuk lebih spesifik.

Gagasan di balik model Black-Scholes adalah untuk merekonstruksi opsi dengan proses dinamis membeli dan menjual aset yang mendasarinya (dalam contoh kami sebelumnya, pound dan dolar). Ini memberikan biaya awal dan resep yang memberi tahu Anda cara terus membeli dan menjual dolar dan pound ini ketika nilai tukar mereka berfluktuasi seiring waktu untuk menjamin bahwa pada saat transaksi, uang yang telah diakumulasikan bersama dengan 150 dolar ditentukan oleh opsi akan cukup untuk membeli 100 pound. Resep ini tergantung pada beberapa matematika yang cerdas, mendalam, dan elegan.

Resep ini juga bebas risiko dan tentu akan berhasil, asalkan ada beberapa syarat yang berlaku. Kondisi ini termasuk, antara lain, kapasitas untuk selalu secara instan membeli dan menjual pound/dolar sebanyak yang saya inginkan dan model probabilistik khusus untuk perilaku nilai tukar (pergerakan Brown dengan volatilitas masa depan yang tetap dan diketahui di masa depan, di mana volatilitas adalah ukuran fluktuasi nilai tukar).

Dua kondisi sebelumnya tidak berlaku dalam kenyataan. Pertama, jual beli tidak pernah benar-benar tanpa batas dan instan. Kedua, nilai tukar tidak sesuai dengan model probabilistik spesifik. Tetapi jika kita dapat membeli dan menjual dengan cukup cepat, dan model Brown adalah pendekatan yang cukup baik, formula penetapan harga harus bekerja dengan cukup baik. Sayangnya, harga kadang-kadang mengikuti model probabilistik lainnya (dengan beberapa momen tak terbatas), di mana rumus Black dan Scholes mungkin gagal bahkan mendekati kebenaran. Kelemahan yang terakhir ini beberapa kali disebut sebagai penjelasan untuk beberapa jatuhnya pasar baru-baru ini tetapi ini adalah interpretasi yang sangat diperdebatkan.

Masalah lain adalah volatilitas masa depan (ukuran fluktuasi biaya dari sekarang sampai opsi berakhir) dari opsi apa pun membeli dan menjual harus diketahui agar model itu berfungsi. Orang bisa mengandalkan volatilitas masa lalu, tetapi ketika membandingkan harga opsi aktual dan Formula Black-Scholes, ini tidak bekerja. Tingkat volatilitas itu diperlukan agar sesuai dengan formula Black-Scholes dengan penetapan harga opsi pasar aktual bukan hanya volatilitas masa lalu.

Bahkan, jika seseorang membandingkan harga opsi aktual dengan formula Black-Scholes, dan mencoba menghitung volatilitas yang akan membuatnya cocok, ternyata tidak ada volatilitas tunggal untuk komoditas tertentu pada waktu tertentu. Biaya opsi yang lebih liar (untuk menjual atau membeli dengan harga yang jauh dari harga sekarang) mencerminkan volatilitas yang lebih tinggi daripada lebih banyak opsi jinak. Jadi ada sesuatu yang salah secara empiris model Black-Scholes, yang mengasumsikan volatilitas tetap (bukan stokastik) di masa depan untuk apa pun opsi yang berkaitan, terlepas dari ketentuan opsi.

Jadi rumus Black-Scholes bagus dalam teori, tetapi tidak perlu bekerja dalam praktik. Haug dan Taleb (2011) bahkan berpendapat bahwa praktisi tidak menggunakannya, dan memiliki alternatif praktis yang lebih sederhana. Mereka pergi sejauh itu untuk mengatakan bahwa formula Black-Scholes adalah seperti "para ilmuwan memberi kuliah burung-burung tentang cara terbang, dan mengambil pujian atas penampilan mereka berikutnya kecuali bahwa di sini itu akan memberi kuliah mereka dengan cara yang salah". Jadi mengapa formula itu layak mendapat hadiah Nobel?

Melihat beberapa pertukaran informal antara praktisi, orang dapat menemukan beberapa jawaban menarik. Diskusi yang saya kutip dari forum online Quora dipimpin oleh pertanyaan "Apakah Formula Black-Scholes Salah sesuai apa adanya?" (2014). Semua praktisi setuju bahwa formula tidak digunakan seperti itu. Banyak dari mereka juga tidak melihatnya sebagai perkiraan. Tetapi ini tidak berarti bahwa mereka pikir itu tidak berguna. Seorang praktisi (John Hwang) menulis:

"Di mana Black-Scholes benar-benar bersinar, bagaimanapun, adalah sebagai bahasa umum di antara pedagang opsi. Ini adalah model penetapan harga opsi tertua, paling sederhana, dan paling intuitif. Setiap pedagang opsi memahaminya, dan mudah untuk menghitung, sehingga masuk akal untuk mengomunikasikan volatilitas tersirat [volatilitas yang akan membuat formula sesuai dengan harga aktual] dalam hal Black-Scholes. . . . Sebagai bukti, bursa menyebarkan [Black-Scholes] tersirat volatilitas di samping data harga."

Praktisi lain (Rohit Gupta) menambahkan bahwa ini "dilakukan karena pedagang memiliki intuisi yang lebih baik dalam hal volatilitas daripada mengutip berbagai harga." Dengan nada yang sama, namun seorang praktisi lain (Joseph Wang) menambahkan:

"Satu cara lain untuk melihat ini adalah bahwa Black-Scholes menyediakan sesuatu dari garis dasar yang memungkinkan Anda membandingkan dunia nyata dengan dunia ideal yang tidak ada. . . . Karena kita tidak hidup di dunia yang ideal, jumlahnya berbeda, tetapi kerangka Black-Scholes memberi tahu kita *betapa berbedanya* dunia nyata dari dunia yang diidealkan."

Jadi model tersebut mendapatkan kemasyhurannya dengan menyediakan bahasa umum yang dipahami praktisi dengan baik, dan memungkinkan mereka untuk memahami keadaan darurat yang sebenarnya terkait dengan cita-cita yang kokoh.

Sekarang ingat bahwa praktisi memperkirakan volatilitas tersirat dengan membandingkan rumus Black-Scholes dengan harga aktual, daripada memasukkan volatilitas yang diberikan ke dalam rumus untuk mendapatkan harga. Ini mungkin terdengar seperti pemasangan data. Memang, seorang praktisi

(Ron Ginn) menyatakan bahwa “jika penyebut umum dari pendapat orang banyak adalah Black-Scholes. . . baunya seperti ramalan yang terpenuhi dengan sendirinya bisa muncul,” atau, dimasukkan ke dalam cara yang lebih rumit (Luca Parlamento):

“Saya hanya ingin menambahkan bahwa CBOE [Chicago Board Options Exchange] di awal ’70 ingin memasarkan produk baru: sesuatu yang disebut "opsi." Masalah mereka adalah bagaimana Anda bisa memasarkan sesuatu yang tidak dapat dievaluasi oleh siapa pun? Kamu tidak bisa! Anda memerlukan model yang membantu orang bertukar barang, dapatkan rumus BS. . . melakukan pekerjaan. Anda memiliki cara untuk membuat orang dengan mudah menyetujui harga, menciptakan pasar yang likuid dan. . . "Mengapa tidak" menghasilkan komisi.”

Nada di sini lebih menyeramkan: formula ini berguna karena ada di sana, karena itu adalah titik referensi yang memungkinkan pasar untuk berkembang di sekitarnya. Anda memiliki cara untuk membuat orang dengan mudah menyetujui harga, menciptakan pasar yang likuid dan. . . “Mengapa tidak” menghasilkan komisi.

Tetapi mengapa formula khusus ini menarik pasar, dan menjadi titik referensi umum, bahkan mungkin ramalan yang memuaskan sendiri? Mengapa tidak ada praktik penetapan harga yang lebih tua atau kontemporer, yang tidak lebih buruk? Mengapa model penetapan harga khusus ini dianggap Nobel layak?

Jawabannya, saya percaya, terletak pada matematika. Rumusnya tergantung pada argumen yang sehat dan elegan. Matematika yang digunakannya canggih, dan menikmati catatan pelayanan yang baik dalam fisika, yang memberikan halo prestise ilmiah. Selain itu, ini diungkapkan dalam bahasa domain matematika ekspresif yang masuk akal bagi para praktisi (dan, tentu saja, itu juga datang pada waktu yang tepat).

Ini adalah kekuatan matematika. Ini adalah bahasa yang dipahami dan dihargai oleh para praktisi dari relung yang relevan. Rasanya beralasan dan setidaknya idealnya benar. Jika canggih dan dilengkapi dengan rekam jejak yang baik dalam konteks ilmiah lainnya, itu diasumsikan dalam dan entah bagaimana benar. Semua ini membantu membangun jaringan praktis yang kaya di sekitar ide-ide matematika, bahkan ketika ide-ide ini tidak mencerminkan kenyataan empiris dengan sangat baik.

Bab 4

Sekilas tentang Filsafat Matematika Pendidikan

Bab ini membahas sekilas tentang filsafat pendidikan matematika. Sub-bidang ini dicirikan secara sempit dan luas, masing-masing mengenai tujuan pendidikan matematika dan semua aspek filosofis penelitian dalam pendidikan matematika. Sub-bidang juga dieksplorasi dalam hal pertanyaan dan praktiknya, yang dapat disebut perspektif *bottom-up*, serta dalam hal penerapan cabang-cabang filsafat untuk pendidikan matematika, yang mungkin disebut perspektif *top-down*. Dari bawah ke atas orang dapat mengkarakterisasi area tersebut dalam bentuk pertanyaan, dan kita telah bertanya: Apa maksud dan tujuan pengajaran dan pembelajaran matematika? Apa itu matematika? Bagaimana matematika berhubungan dengan masyarakat? Apa itu belajar matematika? Apa itu pengajaran matematika? Bagaimana status pendidikan matematika sebagai bidang pengetahuan? Dalam mengkarakterisasi sub-bidang dari perspektif '*top down*' kita melihat secara singkat kontribusi ontologi dan metafisika, estetika, epistemologi dan teori pembelajaran, filsafat sosial, etika, dan metodologi penelitian pendidikan matematika. Ini mengungkapkan betapa kaya dan dalam kontribusi filsafat terhadap fondasi teoritis bidang studi kita. Tetapi bahkan pendekatan yang berbeda ini meninggalkan banyak pertanyaan yang tidak terjawab. Misalnya: apa tanggung jawab matematika dan apa tanggung jawab subbidang kita sendiri, filsafat pendidikan matematika? Kita menyimpulkan bahwa peran filsafat pendidikan matematika adalah untuk menganalisis, mempertanyakan, menantang, dan mengkritik klaim praktik, kebijakan, dan penelitian pendidikan matematika.

4.1 Apa Filsafat Pendidikan Matematika?

Dalam seperempat abad terakhir filsafat pendidikan matematika telah muncul sebagai area penelitian yang didefinisikan secara longgar, terutama berkaitan dengan aspek filosofis pendidikan matematika. Bab ini bertujuan untuk memetakan secara singkat beberapa medannya, dan mencoba visi sinoptik tentang luas dan kedalaman area ini. Ini akan mempersiapkan dasar untuk pertanyaan yang lebih rinci dan spesifik dalam bab-bab berikutnya. Tugas ini menjadi semakin mendesak karena pertanyaan tentang apa yang membentuk filsafat pendidikan matematika bukannya tanpa ambiguitas dan banyak jawaban. Misalnya, apakah filsafat pendidikan matematika merupakan pendekatan khusus dan khusus untuk pengajaran dan pembelajaran matematika atau untuk penelitian pendidikan matematika? Artikel yang pasti dapat dianggap menyiratkan klaim untuk definitif akun, yaitu, filosofi yang unik, alasan atau arah yang diusulkan. Bukan ini yang dimaksudkan di sini, dan 'the' dimaksudkan untuk menunjukkan area penyelidikan tertentu, domain spesifik, bukan perspektif ideologis tunggal yang tetap. Dengan demikian, filsafat pendidikan matematika bukanlah interpretasi yang dominan melainkan suatu bidang studi dan penyelidikan tertentu, jika tidak didefinisikan secara lengkap, suatu sub-spesialisasi dalam pendidikan matematika.

Dipahami dalam arti yang paling sederhana pendidikan matematika adalah tentang praktek atau kegiatan mengajar matematika. Filosofi dari beberapa aktivitas atau domain adalah tujuannya, alasan atau tujuan yang mendasarinya. Jadi pengertian paling sederhana dari 'filsafat pendidikan matematika' menyangkut tujuan atau alasan di balik praktik pengajaran matematika. Masalah ini sangat penting, pusat filsafat pendidikan matematika, serta pendidikan matematika secara keseluruhan. Tujuan pengajaran matematika juga berimplikasi pada tujuan pembelajaran matematika, karena belajar tidak dapat dipisahkan dari mengajar, meskipun keduanya dapat dipahami secara terpisah. Dalam praktiknya, seorang guru aktif mengandaikan satu atau lebih peserta didik, dan hanya dalam situasi patologis seseorang dapat mengajar tanpa belajar. Namun, kebalikannya tidak berlaku, karena pembelajaran informal sering kali diarahkan sendiri dan berlangsung tanpa pengajaran yang eksplisit.

Selanjutnya, tujuan, sasaran, dan alasan untuk mengajar dan belajar matematika tidak ada dalam ruang hampa. Mereka milik orang-orang, baik individu maupun kelompok sosial. Karena pengajaran matematika adalah kegiatan sosial yang tersebar luas dan sangat terorganisir, maka tujuan dan sasarannya perlu dikaitkan dengan kelompok sosial, kepentingan sosial dan masyarakat pada umumnya, sambil mengakui bahwa ada tujuan dan sasaran yang beragam dan berbeda di antara kelompok-kelompok yang berbeda. dan orang-orang. Tujuan adalah ekspresi nilai-nilai dan nilai-nilai pendidikan dan sosial masyarakat, atau beberapa bagian darinya, terlibat dalam penyelidikan ini. Selanjutnya, tujuan yang dibahas di sini adalah untuk pengajaran matematika, sehingga tujuan dan nilai yang diimplikasikan terpusat pada matematika dan peran serta tujuannya dalam pendidikan dan masyarakat.

Dengan demikian, pertimbangan pertama tentang makna filsafat pendidikan matematika mengangkat masalah pengajaran dan pembelajaran matematika, tujuan dan alasan yang mendasarinya, peran guru, pelajar, dan matematika dalam masyarakat, serta nilai-nilai yang mendasarinya, kelompok sosial yang bersangkutan. Untuk sebagian besar ini mencerminkan isu-isu yang timbul dari penerapan teori kurikulum Schwab (1961) **empat tempat umum mengajar matematika**. Tempat umum, dasar-dasar kurikulum, adalah mata pelajaran (matematika), pembelajar, guru, dan lingkungan pengajaran, termasuk hubungan belajar-mengajar, dan tujuannya, dengan masyarakat pada umumnya.

Filsafat adalah disiplin substansial dan interpretasi yang lebih luas tentang apa yang mungkin menjadi filosofi pendidikan matematika membawa masalah lebih lanjut ke depan dari perspektif filosofis. Kita dapat menerapkan filsafat untuk pendidikan matematika serta mengeksplorasi implikasi spesifik dari penerapan filsafat matematika atau filsafat pendidikan (Brown, 1995). Filsafat adalah tentang analisis sistematis dan pemeriksaan kritis terhadap masalah mendasar. Ini melibatkan latihan pikiran dan intelek, termasuk berpikir, analisis, penyelidikan, penalaran dan hasilnya: penilaian, kesimpulan, keyakinan dan pengetahuan. Ada banyak cara di mana proses tersebut serta teori substantif, konsep dan hasil penyelidikan masa lalu dalam filsafat dapat diterapkan dan dalam pendidikan matematika. Jadi filsafat pendidikan matematika juga harus dipahami dengan mencakup penerapan konsep dan metode filosofis, seperti sikap kritis terhadap klaim serta analisis konseptual yang terperinci dari konsep, teori, metodologi atau hasil penelitian pendidikan matematika, dan matematika itu sendiri. (Ernest, 1998; Skovsmose, 1994).

Tetapi memperkenalkan filsafat dalam arti yang lebih luas menimbulkan pertanyaan. Mengapa filsafat penting? Mengapa teori secara umum penting? Bagaimana mereka meningkatkan penelitian pendidikan matematika? Pertanyaan-pertanyaan ini perlu ditangani di beberapa titik dalam pembenaran kemajuan filsafat pendidikan matematika, dan saya menawarkan beberapa jawaban sementara di sini. Pertama-tama, domain dan pendekatan filosofis ini membantu menyusun penelitian dan penyelidikan dengan cara yang cerdas dan beralasan, menawarkan dasar yang aman untuk pengetahuan. Mereka menyediakan struktur keseluruhan untuk mengakomodasi hasil penelitian mutakhir dalam tubuh pengetahuan yang diterima dengan susah payah. Kedua, landasan filosofis yang aman memastikan 'kebersihan' penelitian yang memberikan jaminan dan pembenaran yang kuat untuk hasil dan klaim. Tetapi ketiga; mereka memungkinkan orang untuk melihat melampaui anggapan yang diterima secara luas tetapi belum diuji dan cerita resmi tentang dunia, dan tentang masyarakat, ekonomi, pendidikan, matematika, pengajaran dan pembelajaran. Mereka menyediakan alat berpikir untuk mempertanyakan status quo, untuk melihat bahwa 'apa adanya' bukanlah 'apa yang harus'; untuk melihat bahwa batas-batas antara yang mungkin dan yang tidak mungkin tidak selalu di mana 'kebijaksanaan yang diterima' mengatakannya. Ini memungkinkan gagasan yang diterima secara umum untuk diselidiki, dipertanyakan dan banyak asumsi implisit, distorsi ideologis atau prasangka yang tidak diinginkan terungkap dan ditantang. Keempat, dan yang paling penting, mereka memungkinkan kita membayangkan alternatif. Sama seperti sastra dapat memungkinkan kita untuk berdiri di atas sepatu orang lain dan melihat dunia melalui mata dan imajinasi mereka, demikian pula filsafat dan teori dapat memberi orang 'kacamata' baru untuk melihat dunia dan praktik institusionalnya secara baru, termasuk praktek belajar mengajar matematika, serta penelitian dalam pendidikan matematika. Dengan demikian filsafat memungkinkan kita untuk 'mempertanyakan yang tidak perlu dipertanyakan', termasuk mempermasalahkan beberapa Shibboleth suci pendidikan matematika, seperti yang kita contohkan di bawah ini.

Pendidikan matematika adalah penelitian lapangan dan kebijakan publik tentang pendidikan, dan bukan tanpa kontroversi publik yang memanas mengenai praktik pengajaran matematika. Jadi peran sentral filsafat pendidikan matematika adalah untuk memeriksa kontroversi tersebut tanpa memihak, untuk menganalisis konsep dan mengidentifikasi nilai-nilai yang mendasari untuk menerangi, memperjelas dan jika mungkin menyelesaikan konflik. Dalam sekuel sejumlah kontroversi luar biasa tersebut diidentifikasi sebagai bidang di mana filsafat pendidikan matematika telah atau dapat diterapkan dengan baik.

Paling tidak, analisis ini menunjukkan bahwa filsafat pendidikan matematika harus memperhatikan tidak hanya maksud dan tujuan pengajaran dan pembelajaran matematika dan filsafat matematika dan implikasinya bagi praktik pendidikan. Ini menunjukkan bahwa kita harus melihat lebih luas untuk alat filosofis dan teoretis untuk memahami semua aspek pengajaran dan pembelajaran matematika dan lingkungannya. Paling tidak kita perlu melihat ke filosofi Schwab (1961) tempat umum pengajaran lainnya: pelajar, guru, dan lingkungan atau masyarakat. Jadi kami juga memiliki bidang minat filosofi pembelajaran (khususnya pembelajaran matematika), filosofi pengajaran (matematika) dan filosofi lingkungan atau masyarakat (dalam contoh pertama sehubungan dengan pendidikan matematika dan matematika) sebagai elemen lebih lanjut. untuk memeriksa. Kita juga harus mempertimbangkan disiplin pendidikan matematika sebagai bidang pengetahuan itu sendiri, untuk menetapkan status epistemologis dari penalaran, analisis dan jawaban yang diberikan, bahkan ketika mereka diklaim tidak lebih dari sementara.

Melihat masing-masing dari empat hal biasa ini pada gilirannya, ditambah pendidikan matematika sebagai bidang pengetahuan itu sendiri, sejumlah pertanyaan dapat diajukan sebagai masalah yang harus ditangani oleh filsafat pendidikan matematika. Selain itu, masing-masing bidang topik yang ditunjuk memiliki kontroversi terkait yang membutuhkan perhatian dan klarifikasi, yang saya gambarkan di bawah ini.

4.2 Apa Itu Matematika? (Pertanyaan Dasar Filsafat Matematika)

Apa itu matematika, dan bagaimana karakteristik uniknya dapat diakomodasi dalam sebuah filsafat? Dapatkah matematika diperhitungkan baik sebagai tubuh pengetahuan dan domain sosial penyelidikan? Apakah ini menyebabkan ketegangan? Filsafat matematika apa yang telah dikembangkan? Fitur matematika apa yang mereka pilih sebagai signifikan? Apa signifikansi dan dampaknya terhadap pengajaran dan pembelajaran matematika? Apa pentingnya gerakan yang muncul pada konstruksi sosial matematika dan filosofi praktik matematika untuk pendidikan, jika ada? Apa alasan untuk memilih elemen terbatas tertentu dari matematika untuk sekolah? Mengingat bahwa sebagian besar konten matematika sekolah berusia berabad-abad, apakah ada tempat untuk konsep dan teori matematika yang baru-baru ini dikembangkan dalam pendidikan? Bagaimana dan haruskah matematika dikonseptualisasikan dan ditransformasikan untuk tujuan pendidikan? Nilai dan tujuan pendidikan dan sosial apa yang terlibat? Apakah matematika itu sendiri sarat nilai atau bebas nilai? Bagaimana matematikawan bekerja dan menciptakan pengetahuan matematika baru? Apa metode, nilai, dan estetika matematikawan? Apakah siswa perlu dihadapkan pada metode kerja seperti itu, atau apakah mereka hanya untuk sekelompok kecil spesialis, jika untuk siapa pun di bidang pendidikan? Bagaimana sejarah matematika berhubungan dengan filsafat matematika, dan bahkan dengan matematika saat ini itu sendiri? Apakah matematika berubah ketika metode dan teknologi informasi dan komunikasi baru muncul? Apakah ada tempat untuk sejarah dan filsafat matematika dalam pengajarannya di sekolah? Atau haruskah matematika hanya diajarkan sebagai seperangkat instrumen dan alat untuk memecahkan masalah abstrak? Apa perbedaan antara matematika penelitian dan matematika sekolah? Dalam matematika sekolah, keseimbangan apa antara perhitungan, pembuktian, dan pemodelan yang sesuai untuk siswa pada tingkat yang berbeda? Apa yang harus menjadi peran topik tradisional aljabar, geometri, dan aritmatika dalam kurikulum kontemporer, dan mengapa? Seberapa pentingkah probabilitas, statistik, dan komputasi dalam matematika sekolah dan mengapa?

Kontroversi 1 Ada kontroversi '**panas**' dalam filsafat matematika, antara matematikawan tradisionalis dan filsuf versus fallibilist dan filsuf konstruktivis sosial matematika. Yang pertama mengklaim bahwa matematika itu pasti, kumulatif dan tidak tersentuh oleh kepentingan sosial. Yang terakhir berpendapat bahwa matematika pada dasarnya sosial, dengan keterbatasan budaya klaim kepastian, universalitas dan kemutlakan, dan banyak tunduk pada revolusi konseptual seperti halnya sains. Kontroversi ini adalah bagian dari apa yang disebut 'Perang Sains' antara realis dan konstruktivis. Ini adalah konflik lama yang kembali ke argumen Yunani Kuno antara dogmatis dan skeptis (Lakatos, 1962), dan tidak mungkin diselesaikan dalam waktu dekat.

Kontroversi terkait lainnya muncul atas pertanyaan apakah matematika sarat nilai atau bebas nilai. Misalnya, apakah matematika netral secara etis atau apakah matematika memikul tanggung jawab etis atas peran dan kegunaannya dalam masyarakat dan pendidikan? (Ernest, 2016a). Jika matematika adalah etika dan sarat nilai, di mana letak tanggung jawabnya dan di mana ujungnya? Bagaimana seharusnya hal ini tercermin dalam pendidikan? Kontroversi ini adalah salah satu panas, karena banyak matematikawan dan lain-lain hanya mengajukan pertanyaan apakah matematika murni sarat nilai atau memiliki dimensi etika atau tanggung jawab tampaknya menjadi sebuah oxymoron, yang kontradiktif sendiri dan karenanya tidak masuk akal.

4.3 Bagaimana Hubungan Matematika dengan Masyarakat? (Filosofi Lingkungan)

Bagaimana matematika dan pendidikan matematika berhubungan dengan masyarakat? Apa tujuan pendidikan matematika, yaitu, tujuan pengajaran matematika? Apakah tujuan ini valid? Tujuan siapa mereka? Untuk siapa? Berdasarkan nilai apa? Siapa yang untung dan siapa yang rugi dalam prosesnya? Haruskah tujuan belajar matematika sama untuk semua orang, atau haruskah kelompok siswa yang berbeda memiliki tujuan yang berbeda? Bagaimana atau haruskah pengelompokan ini dan tujuan terkait dipilih? Oleh siapa dan dengan kriteria apa? Bagaimana konteks sosial, budaya dan sejarah berhubungan dengan matematika, tujuan pengajaran, dan praktik pengajaran dan pembelajaran matematika? Nilai-nilai apa yang mendukung serangkaian tujuan yang berbeda? Bagaimana matematika berkontribusi pada keseluruhan barang dan tujuan masyarakat dan pendidikan? Apa peran pengajaran dan pembelajaran matematika dalam mempromosikan atau menghambat keadilan sosial yang dipahami dalam hal gender, ras, kelas, disabilitas dan kewarganegaraan kritis? Apa arti pendidikan matematika feminis dan/atau anti-rasis dan apakah itu mungkin? Apa implikasinya bagi pengajaran dan pembelajaran matematika? Bagaimana matematika dilihat oleh publik dan dirasakan di berbagai sektor masyarakat? Apa dampaknya bagi pendidikan? Apa hubungan antara matematika dan masyarakat? Fungsi apa yang dijalankannya? Manakah dari fungsi ini yang dimaksudkan dan terlihat? Fungsi mana yang tidak disengaja atau tidak terlihat? Sejauh mana metafora matematika, kuantifikasi keseluruhan seperti itu, 'pengukuran' kualitas, neraca laba rugi, dan spreadsheet meresapi pemikiran sosial? Apa signifikansi sosial dan filosofis mereka? Kepada siapa matematika bertanggung jawab? Apakah matematika merupakan hal yang baik bagi masyarakat? Selain manfaat yang diberikan matematika kepada masyarakat melalui penerapannya dalam sains, teknologi, bisnis, dan sebagainya, apakah ada biaya dan kerusakan tambahan yang ditimbulkan oleh prioritas universalnya dalam pendidikan? Dapatkah pengajaran dan pembelajaran matematika direformasi atau ditambah untuk mengkompensasi atau memperbaiki kerusakan yang disebabkan? (Lihat Ernest, 2018, volume ini).

Kontroversi 2 Ada kontroversi **panas** atas tujuan mengajar matematika untuk waktu yang lama. Hal ini diwujudkan dalam konflik antar kelompok dengan tujuan, nilai, epistemologi yang berbeda dalam Kurikulum Nasional Inggris tahun 1980-an dan 1990-an. Konflik Inggris telah dianalisis sebagai melibatkan lima kelompok bersaing yang berbeda. Ini adalah

1. Pelatih Industri, dengan tujuan *back-to-basics* yang otoriter;

2. Pragmatis Teknologi, dengan tujuan yang berpusat pada industri;

3. Kaum Humanis Lama, dengan tujuan murni yang berpusat pada matematika;

4. Pendidik Progresif, dengan tujuan yang berpusat pada peserta didik; dan

5. Pendidik Publik, dengan tujuan yang berpusat pada keadilan sosial (Ernest, 1991).

Dalam kasus Inggris, kelompok 1, 2 & 3 mendominasi perumusan Kurikulum Nasional pada 1980-an, dengan lip service yang ditujukan untuk tujuan kelompok 4 dan dengan tujuan kelompok 5 diabaikan sama sekali. Dalam perkembangan selanjutnya bahkan lip service untuk tujuan kelompok 4 ini telah ditiadakan. Sejauh mana analisis ini telah dibuktikan? Apakah masih relevan sampai sekarang?

Konflik atas tujuan pengajaran matematika juga telah dimanifestasikan secara lebih luas. Misalnya, di Amerika Serikat konflik mengenai tujuan pengajaran matematika bersama dengan pedagoginya, disebut Perang Matematika, meletus antara matematikawan tradisional dan spesialis pendidikan matematika pada 1990-an dan 2000-an (Ernest, 2014). Apakah konflik seperti itu tak terelakkan, atau adakah kompromi dan penyelesaian yang mungkin dilakukan? Sejauh mana temuan proyek penelitian dan perbandingan internasional dapat digunakan untuk mengevaluasi kemanjuran implementasi tujuan tertentu?

4.4 Apa itu Belajar dan Belajar Matematika, Secara Khusus? (Filosofi Pembelajaran)

Asumsi apa, mungkin implisit, yang mendukung pandangan belajar matematika? Apakah asumsi ini valid? Epistemologi dan teori pembelajaran mana yang diasumsikan? Apa pengandaian filosofis dari penerimaan tradisional, pemrosesan informasi, konstruktivis radikal, konstruktivis sosial, enaktivis, sosiokultural, dan teori pembelajaran matematika lainnya? Bagaimana konteks sosial pembelajaran dapat diakomodasi dalam apa yang seringkali berorientasi individualistis dan teori pembelajaran kognitif tradisional? Apakah adopsi teori belajar yang berbeda membantu atau menghambat pembelajaran matematika? Apakah teori semacam itu memiliki dampak yang berbeda pada praktik kelas, dan jika demikian, apa? Apakah ada perbedaan yang terlihat antara praktik kelas berdasarkan teori pembelajaran yang mendasari yang diadopsi? Apa elemen pembelajaran matematika yang paling berharga? Bagaimana mereka bisa dan haruskah mereka dinilai? Putaran umpan balik apa yang dibuat oleh berbagai bentuk penilaian, yang berdampak pada proses belajar mengajar matematika? Seberapa kuat analogi antara penilaian pembelajaran matematika dan penjaminan pengetahuan matematika? Apa peran pembelajar? Apa kekuatan pelajar yang, dapat atau harus dikembangkan dengan belajar matematika? Bagaimana identitas pembelajar berubah dan berkembang melalui pembelajaran matematika? Apakah belajar matematika berdampak pada orang secara keseluruhan baik atau buruk? Sejauh mana hasil yang menguntungkan/merugikan tersebut terjadi, dalam kondisi pembelajaran apa dan bagaimana hal ini berhubungan dengan konteks budaya? Apakah pembelajaran matematika berdampak berbeda pada siswa menurut perbedaan dan identitas sosial dan individu, dan jika demikian bagaimana? Bagaimana matematikawan masa depan dan warga negara masa depan terbentuk melalui pembelajaran matematika? Seberapa pentingkah dimensi afektif yang meliputi emosi, sikap, keyakinan, dan nilai dalam pembelajaran matematika? Apa itu kemampuan matematika dan bagaimana cara mengembangkannya? Apakah pembelajaran matematika dapat diakses oleh dan untuk semua? Bagaimana artefak dan teknologi budaya, termasuk teknologi informasi dan komunikasi, mendukung, membentuk, dan mendorong pembelajaran matematika? Sejauh mana pengalaman siswa belajar matematika mencerminkan atau memodelkan praktik matematikawan penelitian? Apakah pembelajaran matematika hierarkis, progresif atau kumulatif, seperti teori tradisional memberitahu kita, dan jika demikian, sampai sejauh mana? Sejauh mana pembelajaran matematika dapat ditransfer ke situasi baru dan berbeda?

Kontroversi 3 Ada kontroversi **panas** antara pendukung teori yang berbeda dari pembelajaran matematika selama bertahun-tahun. Di awal Era pasca-Perang Dunia 2, ini adalah antara *behaviorisme* dan psikologi kognitif. Dari tahun 1980-an ini terutama antara teori pembelajaran matematika kognitivis (tindakan mental atau proses memperoleh pengetahuan dan pemahaman melalui pikiran, pengalaman, dan indera) tradisional dan konstruktivisme radikal, terutama atas isu-isu epistemologis (berkaitan dengan studi tentang sifat, asal-usul, dan batas-batas pengetahuan manusia) seperti klaim bahwa semua pengetahuan dibangun oleh pelajar. Sebagai *Ernst von Glasersfeld*, mungkin pendukung paling menonjol dari konstruktivisme radikal mengatakan "Untuk memperkenalkan pertimbangan epistemologis ke dalam diskusi pendidikan selalu dinamis" (1983, hal. 41). Baru-baru ini telah ada kontroversi lebih lanjut antara konstruktivisme versus teori-teori sosial-budaya berdasarkan pada isu apakah pengetahuan dan pembelajaran terutama individu atau sosial. Kontroversi terakhir ini tetap hidup dan belum terselesaikan, meskipun para sarjana seperti Sfard (2008) telah mencoba menjembatani kesenjangan dengan teori-teori baru seperti '*commognition*'-nya, yang menggabungkan kognisi individu dengan dimensi komunikatif. Seberapa sukseskah teori ini dan teori pembelajaran lainnya? Apakah ada perbedaan terukur antara hasil teori pembelajaran yang berbeda, seperti yang diklaim Boaler (2002), dalam kontribusinya pada Perang Matematika?

4.5 Apa itu Pengajaran dan Pengajaran Matematika, khususnya? (Filsafat Pedagogis untuk Matematika)

Teori dan epistemologi apa yang mendasari pengajaran matematika? Apakah ada teori pengajaran matematika yang diartikulasikan secara memadai? Apakah '*Didactique*' Prancis adalah teori seperti itu? Atau terkait Teori Antropologi Didaktik? Asumsi apa, mungkin implisit, yang mendasari pendekatan pengajaran matematika? Apakah asumsi ini valid? Apakah filosofi matematika yang berbeda mendukung pendekatan pengajaran yang berbeda? Apakah ada hasil unik yang berasal dari filosofi matematika tertentu yang diterapkan dalam pengajaran? Atau apakah asumsi tambahan, seperti nilai, selain asumsi atau adopsi filosofi atau epistemologi tertentu, diperlukan untuk membuat perbedaan yang terlihat dalam praktik pengajaran atau hasil pembelajaran? Cara apa yang ditempuh untuk mencapai tujuan pendidikan matematika? Apakah tujuan dan sarana konsisten? Bisakah kita mengungkap dan mengeksplorasi ideologi pendidikan dan pendidikan matematika yang berbeda dan dampaknya terhadap pengajaran matematika? Metode, sumber daya, dan teknik apa yang, telah, dan mungkin digunakan dalam pengajaran matematika? Manakah dari ini yang telah membantu dan dalam situasi dan kondisi apa? Teori apa yang mendukung penggunaan teknologi informasi dan komunikasi yang berbeda dalam mengajar matematika? Perangkat nilai apa yang dibawa oleh teknologi ini, baik yang disengaja maupun tidak? Apakah ada filosofi teknologi yang memungkinkan kita untuk memahami peran mediasi alat antara manusia dan dunia fisik dan budaya? Apa artinya mengetahui matematika dengan cara yang memenuhi tujuan pengajaran matematika? Bagaimana pengajaran dan pembelajaran matematika dapat dievaluasi dan dinilai? Apa peran guru? Rentang peran apa yang mungkin dalam hubungan perantara guru antara matematika dan pelajar? Apa batas-batas etika, sosial dan epistemologis untuk tindakan guru? Pengetahuan, keterampilan, dan proses matematika apa yang digunakan atau dibutuhkan guru? Apakah ini dapat ditentukan atau bergantung pada konteks? Apa kisaran keyakinan, sikap, dan filosofi pribadi terkait matematika yang dipegang oleh guru? Bagaimana sikap, keyakinan, dan filosofi pribadi ini berdampak pada praktik pengajaran matematika? Apa perbedaan antara keyakinan yang dianut dan keyakinan yang berlaku yang dapat diamati? Bagaimana seharusnya guru matematika dididik? Apa perbedaan mendidik, melatih, dan mengembangkan guru matematika? Apa (atau seharusnya) peran penelitian dalam pendidikan dan pengajaran matematika dan pendidikan guru matematika? Apakah pedagogi matematika terutama merupakan ilmu desain yang berkaitan dengan pengoptimalan efisiensi teknik pengajaran? Atau apakah pedagogi matematika harus bertumpu pada landasan filosofis dan epistemologisnya?

Kontroversi 4 Pedagogi yang bersaing untuk pengajaran matematika telah lama menjadi tempat kontestasi dan baru-baru ini menjadi medan pertempuran untuk 'Perang Matematika'. Pendidik progresif yang mempromosikan metode pengajaran yang berpusat pada anak, termasuk pembelajaran penemuan, pemecahan masalah dan pendekatan investigasi, misalnya, Boaler (2002), telah diadu dengan para pendukung pendekatan pembelajaran tradisional yang berpusat pada guru, misalnya, Stephan (2014). Tetapi apakah ada bukti bahwa salah satu dari posisi ini lebih efektif dalam praktik, dan dalam konteks apa? Klein (2007) berpendapat bahwa penyelarasan dikotomi pedagogi progresif versus tradisionalis dengan kiri, liberal versus sayap kanan, politik konservatif, masing-masing, seperti yang pasti terjadi di Amerika Serikat hanya berfungsi untuk memperkuat oposisi dan mengalihkan fokus dari tujuan dan hasil matematika sekolah.

Kontroversi terkait tambahan menyangkut metode yang disukai untuk mengajar bilangan dan aritmatika. Satu pertanyaan adalah apakah aritmatika harus diperkenalkan kepada anak-anak kecil berdasarkan pendekatan spontan anak-anak itu sendiri dan metode perhitungan mental, yang bertentangan dengan pengajaran algoritma tertulis standar untuk aritmatika ('empat aturan'). Pertanyaan lain adalah apakah kalkulator elektronik harus diperkenalkan bersama atau sebelum pengajaran algoritme tertulis standar, sebagai lawan setelahnya, dan apakah penekanan sama sekali pada algoritme ini harus dikurangi? Pendapat yang kuat telah disuarakan di kedua sisi kontroversi ini.

Terakhir, ada kontroversi mengenai peran konteks dalam pengajaran matematika. Apakah masalah terapan merupakan cara terbaik untuk memperkenalkan, mengajarkan atau memperkuat konsep dan metode matematika? Bisakah matematika diajarkan secara efektif melalui praktik etnomatematika (studi tentang hubungan antara matematika dan budaya. Sering dikaitkan dengan "budaya tanpa ekspresi tertulis", itu juga dapat didefinisikan sebagai "matematika yang dipraktikkan di antara kelompok budaya yang dapat diidentifikasi")? Atau haruskah matematika murni diajarkan sebelum menerapkannya, sehingga konsep dan metode dikuasai dalam bentuknya yang paling kuat dan abstrak? Semua masalah ini telah menghasilkan banyak panas dan konflik, terutama di media, tetapi juga di kalangan matematika profesional dan pendidikan matematika.

4.6 Apa Status (Filosofi) Pendidikan Matematika sebagai Bidang Pengetahuan?

Apa dasar pendidikan matematika sebagai bidang ilmu? Apakah pendidikan matematika suatu disiplin, bidang penyelidikan, bidang interdisipliner, domain aplikasi ekstra-disiplin, atau sesuatu yang lain? Apakah itu cabang matematika terapan atau bagian khusus dari teori pendidikan? Apakah itu ilmu pengetahuan, ilmu sosial, seni atau kemanusiaan, atau tidak ada atau semua ini? (Kilpatrick, 2008). Apa hubungannya dengan disiplin ilmu lain seperti filsafat, matematika, sosiologi, psikologi, linguistik, antropologi, dll? Bagaimana kita bisa tahu dalam pendidikan matematika? Apa dasar untuk klaim pengetahuan dalam penelitian dalam pendidikan matematika? Metode dan metodologi penelitian apa yang digunakan dan apa dasar dan status filosofisnya? Bagaimana komunitas riset pendidikan matematika menilai klaim pengetahuan? Standar apa yang diterapkan? Bagaimana ini berhubungan dengan standar yang digunakan dalam penelitian lebih luas dalam pendidikan, atau ilmu sosial, humaniora, seni, matematika, ilmu fisika dan ilmu terapan seperti kedokteran, teknik dan teknologi? Apakah pendidikan matematika merupakan ilmu desain, seperti yang diklaim oleh beberapa peneliti, atau apakah itu menjawab pertanyaan penelitian yang lebih mendasar? Apa peran dan fungsi peneliti dalam pendidikan matematika? Haruskah kita (peneliti tersebut) fokus pada aspek teknis untuk meningkatkan pengajaran dan pembelajaran matematika, atau kita juga intelektual publik yang tanggung jawabnya termasuk mengkritik matematika dan masyarakat? Bagaimana status teori dalam pendidikan matematika? Apakah kita menyesuaikan teori dan konsep dari disiplin lain atau 'menumbuhkan milik kita sendiri'? Mana yang lebih baik? Apa dampak perkembangan modern dalam filsafat terhadap pendidikan matematika, termasuk fenomenologi, teori kritis, pasca-strukturalisme, pasca-modernisme, Hermeneutika, semiotika, filsafat linguistik, inferensialisme, dll? Apa dampak penelitian dalam pendidikan matematika pada disiplin ilmu lain? Apa kesamaan mata pelajaran pendidikan STTM (Sains, Teknologi, Teknik dan Matematika) yang berdekatan, dan bagaimana perbedaannya? (Hal yang sama lagi untuk STTSM: Sains, Teknologi, Teknik, Seni dan Matematika.) Bisakah mereka disatukan atau perlu diajarkan secara terpisah? Dapatkah filsafat pendidikan matematika berdampak pada praktik belajar mengajar matematika, pada penelitian dalam pendidikan matematika, atau pada disiplin ilmu lainnya? Bagaimana status filsafat pendidikan matematika itu sendiri? Apakah itu sub-bidang pendidikan matematika yang sah, atau keluarga pertanyaan dan metode serumpun yang dikelompokkan secara longgar? Apakah menyebut filsafat pendidikan matematika sebagai subbidang pendidikan matematika memiliki legitimasi? Seberapa sentral matematika untuk penelitian dalam pendidikan matematika? Apakah penelitian pendidikan yang tidak memanfaatkan pengetahuan matematika yang mendalam memiliki hak untuk memproklamirkan dirinya sebagai penelitian dalam pendidikan matematika? Apakah pendidikan matematika memiliki filosofi teknologi yang memadai dan sesuai untuk mengakomodasi isu-isu mendalam yang diangkat oleh teknologi informasi dan komunikasi? Apakah teknologi informasi dan komunikasi hanyalah seperangkat alat atau apakah mereka memiliki dampak yang lebih dalam pada hakikat pendidikan matematika itu sendiri, atau pada pengetahuan manusia?

Kontroversi 5 Haruskah pendidikan matematika, sebagai disiplin universitas, diakomodasi dalam departemen pendidikan atau departemen matematika? Negara yang berbeda menjawab ini dengan cara yang berbeda, dan tidak selalu sepenuhnya konsisten dalam diri mereka sendiri. Pertanyaan ini penting, karena lokasi di departemen matematika dalam fakultas ilmiah sering kali membawa sumber daya yang jauh lebih baik daripada perumahan di departemen pendidikan, di dalam fakultas ilmu sosial. Namun, di beberapa departemen matematika tradisional, spesialis matematika dipandang rendah sebagai bukan 'ahli matematika sejati', sedangkan di banyak departemen pendidikan, pendidik matematika setara dengan rekan pendidikan mereka.

Kontroversi lain dalam penelitian pendidikan matematika yang berkaitan dengan masalah pendanaan menyangkut metode dan metodologi penelitian. Konflik antara pendukung paradigma penelitian ilmiah dan paradigma penelitian interpretatif telah disebut 'perang paradigma' (Gage, 1989). Sampai hari ini penelitian dalam paradigma ilmiah menggunakan metodologi uji coba terkontrol secara acak (yaitu kuantitatif, eksperimental versus desain kelompok kontrol) dianggap sebagai 'standar emas' penelitian pendidikan dan ilmu sosial. Ini menerima bagian terbesar dari sumber daya dan prestise, meskipun kritik luas penerapannya dalam penelitian pendidikan (Sullivan, 2011; Thomas, 2016). Apakah ini sah? Apa status dan validitas paradigma penelitian kritis? (Ernest 1994; Habermas, 1972). Apakah ini merupakan ancaman bagi dua paradigma penelitian lainnya atau justru melengkapinya?

Secara keseluruhan, lima set pertanyaan ini mencakup banyak hal yang penting bagi filsafat pendidikan matematika untuk dipertimbangkan dan dijelajahi. Seperti yang diungkapkan oleh berbagai bidang tumpang tindih, rangkaian pertanyaan tidak sepenuhnya terpisah. Banyak dari pertanyaan-pertanyaan tersebut pada dasarnya tidak bersifat filosofis, karena pertanyaan-pertanyaan tersebut juga dapat dijawab dan dieksplorasi dengan cara yang mengedepankan perspektif disiplin ilmu lainnya, seperti sosiologi dan psikologi. Memang pertanyaan-pertanyaan tersebut, bila disesuaikan dengan tepat, dapat membentuk dasar bagi ratusan PhD dalam pendidikan matematika arus utama. Namun, ketika pertanyaan tersebut didekati secara filosofis, mereka menjadi bagian dari bisnis filsafat pendidikan matematika. Juga, langkah untuk mengecualikan salah satu dari pertanyaan-pertanyaan ini sejak awal sebagai tidak sah untuk penelitian dalam pendidikan matematika, tanpa mempertimbangkannya, berisiko mempromosikan ideologi tertentu atau memang filosofi pendidikan matematika yang miring. Selain itu, mungkin lebih dari filsafat, sosiologi atau psikologi, pendidikan matematika adalah bidang studi multi atau interdisipliner, sehingga mungkin area yang paling tepat dan mudah diakses di mana pertanyaan dan sub-pertanyaan yang tercantum di atas dapat dieksplorasi bersama. , dari perspektif filosofis.

Seperti kontroversi yang terkait dengan masing-masing dari lima pertanyaan menunjukkan, ada masalah dalam pendidikan matematika, seringkali dengan dimensi filosofis, yang tetap hangat diperebutkan. Peran filsafat pendidikan matematika tidak terutama untuk mengadili dalam kontes ini, tetapi untuk menganalisis dan disambiguasi konsep, pertanyaan dan argumen yang terlibat untuk membawa kejelasan perdebatan, bukan untuk mendukung satu atau sisi lain dari dikotomi. Faktanya, dalam beberapa kasus yang dikutip, analisis konseptual yang lebih dalam mengungkapkan bahwa tidak ada pihak yang benar dalam klaimnya, tetapi seringkali kompromi, sintesis dialektis, atau posisi ketiga paling baik didukung oleh bukti yang tersedia.

Suatu contoh kontroversi semacam itu adalah antara pedagogi progresif dan tradisional. Mari saya mulai dengan mengatakan bahwa pedagogi progresif yang berpusat pada anak yang dilakukan dengan baik kemungkinan besar lebih berhasil daripada pedagogi tradisional yang berpusat pada guru yang dilakukan dengan buruk, baik dalam hal hasil belajar siswa dan kepuasan siswa. Tetapi juga, pedagogi tradisional yang berpusat pada guru yang dilakukan dengan baik kemungkinan besar memiliki hasil yang lebih baik daripada pedagogi progresif yang berpusat pada anak yang dilakukan dengan buruk. Faktor kuncinya bukanlah teknik, atau bahkan ideologi, tetapi penerapan pengetahuan dan keterampilan mengajar guru yang efektif.

Mengenai kontroversi ini, sebuah penelitian yang sangat menarik dilaporkan dalam Askew, Brown, Rhodes, Wiliam, dan Johnson (1997). Ini didasarkan pada proyek yang menghubungkan perolehan prestasi siswa sekolah dasar dalam berhitung dengan keyakinan atau filosofi pendidikan matematika guru mereka. Dalam studi tersebut, tiga kelompok keyakinan yang berbeda muncul dari data sebagai hal yang penting dalam memahami pendekatan yang diambil guru terhadap pengajaran berhitung. Ini disebut set kepercayaan transmisi, penemuan dan koneksionis. Keyakinan transmisi didasarkan pada keunggulan pengajaran dan pandangan matematika sebagai kumpulan rutinitas dan prosedur yang terpisah. Ini sesuai dengan tingkat yang lebih besar atau lebih kecil dengan pedagogi tradisional yang berpusat pada guru. Keyakinan penemuan berkerumun di sekitar keunggulan pembelajaran dan pandangan matematika sebagai yang ditemukan oleh siswa. Ini sesuai dengan pedagogi progresif yang berpusat pada anak (konstruktivisme dan pembelajaran penemuan). Keyakinan koneksionis didasarkan pada penilaian metode siswa, tetapi juga strategi pengajaran dengan penekanan pada pembentukan koneksi dalam matematika. Meskipun ini sebagian berpusat pada anak, ini juga secara tradisional berpusat pada matematika dan dengan demikian tidak jatuh rapi di satu sisi atau yang lain dari pembagian tradisional-progresif. Selama dua periode studi, baik kelas guru dengan orientasi penemuan atau transmisi yang kuat tidak membuat perolehan prestasi terbesar. Sebaliknya guru dengan orientasi koneksionis yang kuat lebih cenderung memiliki kelas yang membuat keuntungan lebih besar. Dengan demikian, dalam penelitian ini, dikotomi pembelajaran penemuan/penerimaan atau pengajaran progresif/tradisional tidak membantu dalam mengidentifikasi gaya pedagogis yang paling berhasil. Melainkan orientasi matematis dan pedagogis yang berbeda di luar dikotomi tradisional yang paling berhasil.

Meskipun ini hanya satu studi dan telah dilaporkan di sini dengan cara yang sangat disederhanakan, namun tetap merupakan temuan awal yang signifikan sehubungan dengan kontroversi khusus ini. Hubungan antara keyakinan guru dan hasil belajar, seperti dalam penelitian ini, telah lama menjadi fokus dalam filsafat teori dan penelitian pendidikan matematika (Ernest, 1989). Dengan mengkonseptualisasikan penelitian dalam kaitannya dengan konsep dan hubungan yang dilatarbelakangi dalam filsafat pendidikan matematika, seperti dalam kasus ini, ada potensi untuk mengklarifikasi kontroversi dalam pendidikan matematika dan menghilangkan panasnya. Keberhasilan ini didasarkan pada menempatkan temuan empiris dan praktik kelas yang sukses (sambil mengakui bahwa frasa ini menimbulkan sejumlah masalah filosofis yang bermasalah) di atas komitmen ideologis.

4.7 Menerapkan Filsafat pada Pendidikan Matematika

Pertanyaan-pertanyaan yang tercantum di atas menginterogasi dan mempermasalahkan praktik pengajaran dan pembelajaran matematika dan isu-isu terkait dari perspektif rendah atau non-teoretis. Mulai dari pertanyaan dengan cara ini merupakan pengantar '*bottom up*' ke ruang lingkup dan sifat filsafat pendidikan matematika, Sederhananya, ini menempatkan praktik sebelum teori. Sebaliknya, pendekatan '*top down*' dapat menggunakan cabang-cabang filsafat untuk menyediakan kerangka kerja konseptual untuk menganalisis masalah filosofis dalam penelitian dalam pendidikan matematika. Berikut ini, penelitian dan teori dalam pendidikan matematika dianalisis menurut cabang-cabang filsafat yang mereka gunakan, termasuk metafisika dan ontologi, epistemologi, filsafat sosial dan politik, etika, metodologi, dan estetika. Ontologi dan metafisika masih sedikit diterapkan dalam penelitian pendidikan matematika (Ernest, 2012). Pekerjaan menggambar pada estetika masih dalam masa pertumbuhan (Ernest, 2015a, 2016a; Sinclair, 2008). Namun penggunaan epistemologi dan teori pembelajaran yang luas, filsafat sosial dan politik, etika dan metodologi dapat ditemukan dalam penelitian dan literatur pendidikan matematika.

Ontologi dan Metafisika

Ontologi adalah bagian dari metafisika yang mempelajari sifat dan kondisi keberadaan dan keberadaan itu sendiri. Meskipun belum banyak diterapkan dalam pendidikan matematika, ontologi penelitian menimbulkan dua bidang masalah langsung termasuk pertama sifat objek matematika dan kedua sifat manusia (Ernest, 2012). Platonisme, yang menyangkut masalah pertama ini, telah menjadi filosofi matematika yang dominan selama lebih dari dua ribu tahun. Ini adalah pandangan bahwa objek matematika ada secara independen dari dunia fisik di beberapa alam yang ideal. Namun, ada perselisihan lama di bidang ini, secara historis antara Platonis dan realis versus konseptualis dan nominalis. Meskipun sosiolog dan konstruktivis sosial telah menantang Platonisme, baru-baru ini filsafat arus utama menyetujui gagasan bahwa ada realitas sosial yang sepenuhnya ada (Searle 1995) dan bahwa objek matematika adalah bagian dari realitas sosial ini daripada realitas lain (Cole, 2013). ; Hersh, 1997). Pemikiran seperti itu pasti juga akan memiliki konsekuensi bagi filsafat teknologi dan status realitas virtual yang dibawa oleh teknologi informasi dan komunikasi, serta bagi filsafat matematika. Yang akan saya tandai di sini adalah bahwa ini adalah bidang penyelidikan yang kontroversial tetapi sedang berkembang yang berpotensi sangat penting bagi bidang kita. Karena sebagian besar melalui pengajaran dan pembelajaran matematika siswa bertemu, mengembangkan hubungan dengan, dan menjadi percaya pada realitas objek matematika dan kepastian pengetahuan matematika (Ernest, 2015b).

Hakikat manusia adalah pertanyaan mendalam lainnya yang berimplikasi pada pengajaran dan pembelajaran matematika. Apa hakikat mendalam, karakter non-esensial tetapi abadi dari pembelajar, guru dan orang sebagai makhluk pada umumnya, yang kemudian diandaikan oleh pengajaran, pembelajaran dan penelitian dalam pendidikan matematika? Untuk semua bidang pengetahuan humanistik bergantung pada dan mengandaikan model implisit atau eksplisit tentang apa artinya menjadi manusia, dengan semua agensi, kemampuan, dan hak yang menyertainya. Tentu saja kekhawatiran seperti itu memiliki konsekuensi etis langsung, tetapi apa yang kita tambahkan ke penelitian pendidikan matematika dengan berfokus pada dan mengklarifikasi masalah ontologis yang mendalam ini? Proyek baru apa yang dapat diteliti yang disarankan dan dibawa ke dalam jangkauan kita? Ini masih merupakan pertanyaan terbuka, tetapi satu atau dua dekade terakhir telah melihat pertumbuhan dalam penelitian tentang identitas pembelajar dan guru yang mulai menyentuh area ini (Grootenboer, Smith, & Lowrie, 2006; Lerman, 2005).

Estetika

Gambar kerja yang relevan pada estetika masih dalam masa pertumbuhan tetapi sedang berkembang (Ernest, 2015a, 2016a; Inglis & Aberdein, 2016; Sinclair, 2008). Estetika telah dikaitkan dengan matematika sejak zaman Plato, tetapi apa yang ditambahkan fokus teoretis pada estetika dalam penelitian dalam pendidikan matematika selain membiarkan pelajar mengalami beberapa keindahan matematika? Sudah umum dikatakan bahwa ada bukti, persamaan, dan teori yang indah dalam matematika. Tetapi mengapa ada perbedaan pendapat antara mereka yang mengagungkan keindahan matematika yang agung dan mereka yang gagal melihat keindahan sama sekali dalam matematika? Apakah perbedaan pendapat ini bersifat intrinsik atau hanya karena lintasan belajar yang unik dari beberapa individu? Apa yang bisa fokus pada keindahan dalam matematika dan pengajaran dan pembelajarannya menambah penelitian dan pengajaran di kelas? Karena pengalaman keindahan biasanya dikaitkan dengan minat, kekaguman, dan sikap positif lainnya, dapatkah hal ini dimanfaatkan untuk meningkatkan pengalaman belajar dan keterlibatan keseluruhan dengan matematika?

Epistemologi

Epistemologi menyangkut teori pengetahuan dan dapat diambil untuk memasukkan baik sifat pengetahuan matematika, termasuk yang paling sentral sarana verifikasi, dan mengetahui, termasuk proses menjadi tahu dan belajar. Jadi beberapa pertanyaan yang diajukan di atas: 'Apa itu matematika atau pengetahuan matematika?' dan 'Apa itu belajar matematika?' termasuk dalam judul ini. Ada literatur yang mengeksplorasi hubungan antara epistemologi matematika dan pendidikan matematika (Ernest, 1994, 1998, 1999; Sierpinska & Lerman, 1997). Literatur ini menyediakan kerangka kerja untuk memeriksa beberapa pertanyaan epistemologis utama mengenai kebenaran, makna dan kepastian, dan cara yang berbeda untuk menafsirkannya untuk bidang kita. Ini survei berbagai epistemologi dan isu-isu epistemologis termasuk konteks pembenaran dan penemuan, perspektif dasar dan non-dasar pada matematika; epistemologi kritis, genetik, sosial dan budaya, dan epistemologi makna. Stimulus baru-baru ini untuk penelitian dalam pendidikan matematika adalah penerapan inferensialisme, yang menolak teori makna representasional. Alih-alih menafsirkan makna kata atau konsep sebagai jaringan penalaran holistik yang menghubungkannya dengan kata dan konsep lain (Brandom, 2000; Derry, 2017).

Melihat dalam pendidikan matematika sejumlah kontroversi epistemologis dapat dipetakan termasuk karakter subjektif-objektif dari pengetahuan matematika; peran dalam kognisi konteks sosial dan budaya; transfer pengetahuan dan transfer pembelajaran dari satu konteks sosial ke yang lain; hubungan antara bahasa dan pengetahuan; dan ketegangan antara prinsip utama konstruktivisme, pandangan sosial budaya, interaksionisme dan Didaktik Prancis, dari perspektif epistemologis. Hubungan antara epistemologi dan teori pengajaran, terutama yang berkaitan dengan prinsip-prinsip didaktik, juga dapat dipertimbangkan, dengan demikian menjawab pertanyaan 'Apa yang dimaksud dengan pengajaran dalam matematika?', karena pengajaran adalah upaya yang disengaja untuk mengarahkan dan mendorong pembelajaran.

Pekerjaan oleh sosiolog pada epistemologi dan sosiologi pengetahuan, termasuk Bloor (1991) dan Bernstein (1999) telah berdampak pada bidang kita melalui teori sosiologis latar depan pengetahuan. Bahkan dampak yang lebih radikal berasal dari post-strukturalisme Foucault (1980) dan lainnya, dan post-modernisme Lyotard (1984) dan Derrida (1978). Namun, dampak teori mereka tidak dapat dibatasi hanya pada epistemologi karena mereka mempertanyakan dan mengkritik pembagian tradisional filsafat dan pengetahuan. Teori-teori dan penjelasan-penjelasan ini berfungsi untuk menggoyahkan konsepsi tradisional tentang kepastian pengetahuan dan kepastian konsep. Akibatnya, ada semakin banyak literatur dan teori yang menerapkan wawasan teori-teori sosial baru-baru ini, jika kita dapat menyebutnya demikian, untuk penelitian pendidikan matematika (Hossain, Mendick, & Adler, 2013; Llewellyn, 2010).

Teori Pembelajaran

Meskipun rumah alami teori belajar dalam domain psikologi, banyak yang telah dibuat dari asumsi epistemologis dan implikasi dari teori belajar dalam penelitian pendidikan matematika. Banyak peneliti tyro di bidang kami memotong gigi filosofis mereka pada kontroversi konstruktivisme radikal. Debat publik yang panas pada Konferensi Psikologi Pendidikan Matematika (PPM) no.7 di Montreal pada tahun 1987 antara Ernst von Glasersfeld, Jeremy Kilpatrick, David Wheeler dan lainnya mengedepankan isu-isu ini untuk komunitas penelitian pendidikan matematika internasional. Perbedaan filosofis yang mencolok dan penting dapat ditemukan di antara teori-teori pembelajaran terkemuka di bidang kita. Meskipun kontroversi telah mereda sejak hari-hari memabukkan pertama tetap dipahami bahwa ada perbedaan besar dalam pengandaian filosofis pengolahan informasi, konstruktivis, konstruktivis sosial, enaktivis, dan teori sosiokultural belajar matematika. Ini terutama perbedaan epistemologis, meskipun pendukung dan kritikus dari berbagai teori juga membawa analisis dan penalaran ontologis, etika, sosial dan metodologis ke dalam argumen mereka.

Filsafat Sosial dan Politik

Filsafat Sosial dan Politik lebih sulit untuk dijabarkan daripada beberapa cabang filsafat lainnya sejak munculnya sosiologi, karena yang terakhir telah memperebutkan dan menjajah beberapa wilayahnya. Tetapi ada tradisi filsafat politik dan sosial yang panjang dan terhormat yang kembali ke Republik Platon. Di dalamnya Plato menyarankan bagaimana sebuah masyarakat dapat diatur dengan sebaik-baiknya pada garis filosofis. Selain itu Plato juga mengutarakan apa yang mungkin disebut filsafat pertama pendidikan matematika. Dia berpendapat bahwa pembelajaran matematika tidak hanya mempersiapkan para filsuf untuk menjadi penguasa masa depan, dan memberikan pengetahuan praktis yang penting bagi pembangun, pedagang, dan tentara, tetapi yang lebih penting juga memperkenalkan siswanya pada kebenaran, seni penalaran, dan juga ide-ide kunci dari etika. Pengetahuan seperti itu, menurutnya, diperlukan di semua lapisan masyarakat, terutama kalangan atas. Seperti diketahui, akademinya, mungkin universitas pertama dalam sejarah, dan tentu saja salah satu yang paling lama bertahan, mengharuskan semua yang masuk berpengalaman dalam geometri.

Filsuf politik yang paling unggul di zaman modern adalah Karl Marx. Analisis sosial dan politiknya terutama didasarkan pada kritik terhadap struktur ekonomi masyarakat dan peran modal. Namun, ada dimensi etika yang kuat pada karyanya karena kritiknya berfokus pada eksploitasi satu kelas sosial oleh kelas sosial lainnya dan kemarahannya pada hal ini sangat jelas. Beberapa aliran filsafat telah dibangun di atas wawasan Marx termasuk Sekolah teori kritis Frankfurt, filsafat pasca-strukturalis termasuk Foucault (1980), teori sosial Pierre Bourdieu (misalnya, Bourdieu & Passeron, 1977), dan beberapa filsuf kontinental modern telah tersentuh oleh ide-idenya, dari penerus Hegel hingga saat ini. Semua ini banyak digunakan dalam penelitian pendidikan matematika. Semua gerakan yang disebutkan adalah gerakan kontinental (terutama Prancis dan Jerman) tetapi pemikir sosial non-kontinental yang paling banyak dikutip dalam penelitian pendidikan matematika, Basil Bernstein, tidak mendasarkan karyanya pada Marx. Semua cendekiawan atau gerakan bernama ini, baik sosial atau filosofis, telah digunakan untuk membuat kontribusi filosofis penting dalam penelitian pendidikan matematika.

Beberapa kontribusi lain dari teori sosial dan politik dalam penelitian pendidikan matematika adalah kritik terhadap konsep pembelajaran individualistik, orang dan pengetahuan dan beberapa penggunaan konstruksi sosial 'identitas' sebagai unit analisis dalam meneliti dan mengajar matematika (Lerman, 2005).

Etika

Etika masuk ke dalam penelitian pendidikan matematika dalam beberapa cara termasuk perhatian dengan nilai-nilai, dengan pendekatan keadilan dan kesetaraan sosial, dan melalui etika metodologi penelitian. Beberapa penulis berpendapat bahwa meskipun matematika citra absolutis bebas nilai tradisionalnya sarat dengan nilai (Ernest, 2016a). Yang lain menggunakan filosofi emansipatoris Freire (1972), sekali lagi didasarkan pada Marx, untuk menyatakan bahwa belajar matematika dapat menjadi kegiatan revolusioner dan harus menjadi emansipatoris dan memberdayakan melalui pembinaan warga negara yang kritis. Yang menonjol dalam membawa ide-ide ini ke depan, meskipun tidak selalu mengacu pada Freire, adalah gerakan pendidikan matematika kritis (Skovsmose, 1994) dan etnomatematika (D'Ambrosio, 2007). Karena peran utama etika dalam gerakan-gerakan ini, saya menyebutkannya di sini, tetapi kritik sosial mereka yang kuat dapat dengan mudah dimasukkan di bawah judul filsafat sosial dan politik, terutama karena pendidikan matematika kritis secara eksplisit mengacu pada sekolah Frankfurt.

Untaian dominan lain dari penelitian berbasis etika dalam pendidikan matematika menyangkut keadilan sosial dan kekurangannya dalam pendidikan kelompok khusus seperti perempuan, etnis minoritas, siswa penyandang cacat, siswa berkebutuhan khusus, pelajar bahasa kedua, siswa dari status sosial ekonomi yang lebih rendah, dan seterusnya. Kepedulian yang benar ini telah melahirkan literatur yang luas selama lebih dari empat puluh tahun terakhir dengan ribuan publikasi serta konferensi dan kelompok penelitian yang berdedikasi. Sekali lagi banyak dari penelitian semacam itu juga dapat diberi label sosial dan politik, tetapi penelitian yang memiliki dimensi filosofis yang terbuka sering kali berfokus pada etika pengucilan atau kerugian, sehingga cocok di sini.

Metodologi

Terakhir, area penelitian pendidikan matematika di mana isu-isu filosofis berpengaruh dan digunakan secara terbuka adalah metodologi penelitian. Penelitian serius di bidang kita, baik dalam bentuk proyek kecil seperti investigasi doktoral, atau proyek penelitian yang didanai lebih besar, diharapkan dapat menjawab isu filosofis dalam metodologi penelitian. Di luar teknik dan metode, metodologi penelitian diharapkan memiliki dasar yang kuat dengan kesadaran eksplisit dan perlakuan terhadap asumsi ontologis dan epistemologis yang mendasari penelitian, belum lagi etikanya. Penelitian nonempiris, yang bersifat konseptual atau filosofis, bahkan lebih dituntut untuk berada di atas asumsi filosofisnya. Pendidikan matematika adalah bidang studi interdisipliner yang mengangkangi ilmu pengetahuan, ilmu sosial, humaniora dan bahkan mungkin seni, sehingga tidak mengherankan bahwa berbagai metodologi dan paradigma penelitian digunakan dalam penelitian. Memang keragaman paradigma penelitian, pendekatan dan metodologi adalah salah satu kekuatan besar bidang kami. Namun demikian, pembenaran filosofis diperlukan untuk kesesuaian pendekatan penelitian apa pun yang dipilih dan digunakan, serta untuk keandalan, validitas, dan kepercayaan dari pengetahuan yang dihasilkan.

Analisis Konseptual

Selain kontribusi cabang substantif filsafat untuk pendidikan matematika, ada juga manfaat yang dapat diperoleh dari penerapan gaya berpikir filosofis dalam penelitian kami. Misalnya, banyak konstruksi yang kita gunakan membutuhkan analisis dan kritik konseptual yang cermat. Yang saya pikirkan, misalnya, ide-ide yang banyak digunakan seperti pemahaman, pengembangan, kemajuan, progresivisme, kemampuan matematika, sifat/alam, nilai-nilai, objektivitas/subjektivitas, identitas, bekerja seperti ahli matematika, pembelajaran, pembelajaran penemuan, pemecahan masalah (termasuk masalah murni, terapan, 'nyata' dan 'otentik'), pengajaran, penilaian, matematika, pengetahuan, jenis kelamin/gender, kebutuhan khusus dalam matematika, multikulturalisme/antirasisme, etnomatematika, konteks, baik yang berkaitan dengan sosial maupun tugas, dan seterusnya.

Mendekonstruksi beberapa ide dan istilah ini mungkin tampak 'topi lama', tetapi bahkan ide sehari-hari seperti pemahaman, misalnya, mengandung asumsi dan perangkap tersembunyi. Pertama-tama, ini didasarkan pada metafora dari sesuatu di bawah posisi kita, memberikan landasan bagi posisi kita. Dengan cara apa ini menangkap maknanya? Sinonim seperti 'menggenggam', 'mendapatkan pegangan' atau 'melihat' semuanya didasarkan pada keakraban melalui pertemuan indrawi dengan makna, dan pada kemampuan untuk mengendalikan atau memilikinya ('mendapatkannya'). Jadi metafora ini mengandaikan model 'perbankan' statis, menafsirkan pemahaman sebagai akuisisi, kepemilikan atau kepemilikan pengetahuan (Sfard, 1998). Tetapi kedua, ada asumsi ideologis bahwa memahami suatu konsep atau keterampilan lebih baik, lebih dalam, dan lebih berharga daripada sekadar mampu menggunakan atau melakukannya dengan sukses. Skemp (1976) membedakan 'pemahaman relasional' dari 'pemahaman instrumental', dan mengemukakan keunggulan yang pertama. Namun, rekan pencetus perbedaannya, Mellin-Olsen (1981), menggunakannya untuk membedakan cara berpikir siswa akademik dari siswa magang, sehingga membawa konteks sosial dan bahkan dimensi kelas sosial ke dalam perbedaan, dan memaksakan lebih sedikit hierarki penilaian implisit. Jika kita ingin menegaskan keunggulan 'pemahaman relasional' di atas 'pemahaman instrumental' itu perlu dilakukan atas dasar argumen yang masuk akal, dan tidak dianggap sudah jelas. Argumen Skemp sendiri didasarkan pada psikologi skema, berdasarkan teori Piaget, tetapi ini telah ditantang oleh sejumlah teori pembelajaran alternatif termasuk teori sosial budaya dan konstruktivisme sosial, mengacu pada Vygotsky (1986). Menurut Vygotsky pengetahuan bukanlah sesuatu yang dimiliki oleh pembelajar tetapi merupakan kompetensi yang disimpulkan dari kemampuan yang diwujudkan pembelajar untuk menyelesaikan tugas, baik tanpa bantuan, atau, dengan bantuan orang lain yang lebih mampu, dalam apa yang disebut zona perkembangan proksimal pembelajar. Mengingat tantangan saat ini terhadap teori-teori pembelajaran yang mendasarinya, asumsi bahwa pemahaman relasional lebih unggul daripada kinerja efektif membutuhkan pembenaran.

Beberapa cendekiawan telah menantang keunggulan pemahaman relasional yang tidak perlu dipertanyakan lagi. Hosain dkk. (2013) mempertanyakan kebaikan yang diterima dari gagasan terkait 'memahami matematika secara mendalam' karena, seperti yang mereka tunjukkan, perannya dalam pekerjaan identitas beberapa siswa-guru mengganggu mereka. Misalnya, satu guru siswa dengan nama samaran Lola mengalami konflik antara kebaikan pemahaman relasional yang dipaksakan, ketika belajar di Inggris, dan kesuksesannya sendiri dalam norma pemahaman instrumental yang dia internalisasikan dalam pengasuhannya di Nigeria (Ernest, 2016b). Yang lain telah menantang promosi pemahaman yang tidak kritis dalam komunitas pendidikan matematika karena inkoherensinya (kualitas atau keadaan tidak terhubung dengan cara yang jelas atau logis). Llewellyn (2010) mempertanyakan 'pemahaman' sebagian karena kesalahan penggunaan istilah sehingga mencakup baik bentuk relasional maupun instrumentalnya. Namun, kritiknya yang lebih dalam adalah bahwa dalam penggunaannya membawa sejumlah asumsi bermasalah tentang siapa yang dapat memiliki 'pemahaman' dalam hal kemampuan, jenis kelamin, ras, kelas.

> Pemahaman dihasilkan secara hierarkis, terutama dalam kaitannya dengan gender, kelas sosial dan kemampuan. Itu milik segelintir orang yang memiliki hak istimewa, yang 'secara alami' mampu, yang sering kali adalah anak laki-laki (klasifikasi lain yang tidak membantu dan tidak perlu). Menyatakan bahwa anak perempuan memiliki 'pencarian pemahaman' terlalu sederhana dan berdasarkan gender dan dalam contoh pertama kita harus membongkar bagaimana setiap versi pemahaman dibangun. ... Akhirnya saya menyarankan agar siswa guru tidak menghasilkan pemahaman sebagai kognitif; anak bukanlah robot yang melakukan seperti yang ditentukan oleh teks pemerintah. Murid dan pemahaman terikat dengan gagasan seperti jenis kelamin, kepercayaan diri dan emosi. (Llewellyn, 2010, hlm. 355–356)

Apa yang diperlihatkan sekilas pada satu contoh adalah bahwa kebaikan yang diandaikan secara luas dalam wacana pendidikan matematika, konsep pemahaman, adalah target analisis dan kritik filosofis yang berharga. Meskipun analisis semacam itu tidak berarti bahwa kita harus meninggalkan konsep itu, itu berarti bahwa kita perlu menyadari penumbra (a : ruang iluminasi parsial (seperti dalam gerhana) antara bayangan sempurna di semua sisi dan cahaya penuh b : daerah berbayang yang mengelilingi bagian tengah bintik matahari yang gelap) makna yang terungkap dan aporias yang dilepaskan melalui dekonstruksinya. Kita perlu menggunakan istilah tersebut dengan hati-hati dan tepat, memperjelas atau menghindari konotasi dan implikasinya yang mengganggu. Dengan demikian, filosofi pendidikan matematika, serta menawarkan pandangan dan penjelasan menyeluruh dan sinoptik yang berharga tentang bidang kita, juga berfungsi sebagai tenaga kerja rendah.

Ini dapat membersihkan lanskap konseptual dari hambatan yang tidak diketahui dan melakukan fungsi higienis penargetan, inokulasi dan menetralkan ide-ide yang berpotensi beracun yang beredar, seperti virus, dalam wacana kita.

Kesimpulan

Dalam bab pengantar ini kita telah menawarkan perspektif tentang sifat dan problematis filsafat pendidikan matematika. Kita telah mengkarakterisasi bidang-bidang tersebut dalam pengertian sempit dan luas, dan dari perspektif bawah-atas dan atas-bawah. Dari perspektif *bottom-up* seseorang dapat mengkarakterisasi area tersebut dalam hal pertanyaan seperti: Apa maksud dan tujuan pengajaran dan pembelajaran matematika? Apa itu matematika? Bagaimana matematika berhubungan dengan masyarakat? Apa itu belajar matematika? Apa itu pengajaran matematika? Bagaimana status pendidikan matematika sebagai bidang pengetahuan? Menggunakan perspektif '*top down*' bidang dapat dicirikan berdasarkan cabang-cabang filsafat yang terlibat. Melihat secara singkat kontribusi ontologi dan metafisika, estetika, epistemologi dan teori pembelajaran, filsafat sosial, etika, dan metodologi penelitian pendidikan matematika mengungkapkan seberapa kaya dan dalam kontribusi filsafat terhadap landasan teoretis bidang studi kita.

Akun sinoptik (memberikan pandangan umum secara keseluruhan) ini akhirnya mengajukan lebih banyak pertanyaan daripada memberikan jawaban. Beberapa pertanyaan yang belum terjawab tentang bidang tersebut meliputi, misalnya: apa tanggung jawab keseluruhan pendidikan matematika sebagai bidang studi dan praktik keseluruhan, dan apa tanggung jawab subbidang kita sendiri, filosofi pendidikan matematika? Apa tanggung jawab peneliti pendidikan matematika? Apakah ini tergantung pada pendirian filosofis kita, apakah kita melihat diri kita sebagai intelektual publik yang kritis atau sebagai akademisi fungsional yang menyelidiki lebih dalam spesialisasi yang sempit? (Ernest, 2016b). Apakah kita melihat diri kita sebagai kebutuhan untuk melampaui pemahaman masalah kompleks yang muncul dari meneliti pengajaran dan pembelajaran matematika? Apakah bisnis kita juga mengubah praktik pendidikan matematika, seperti yang disarankan Luis Radford dalam Kata Pengantar (volume ini)? Lagi pula, Marx berpendapat bahwa "para filsuf hanya menafsirkan dunia dengan berbagai cara; intinya, bagaimanapun, adalah untuk mengubahnya." Marx dan Engels (1969, hlm. 13-15). Namun, kecuali jika Anda memahami minat dan kekuatan sosial yang bekerja dalam praktik sosial apa pun, Anda dibatasi dalam kemanjuran tindakan Anda. Menafsirkan tesis Marx, West (1991, p.67) berpendapat bahwa Filsafat Pendidikan Matematika: Sebuah Tinjauan

> Tugas yang ada kemudian menjadi tugas teoretis, yaitu, memberikan analisis sosial konkret yang menunjukkan bagaimana kebutuhan, minat, dan kekuatan ini membentuk dan memegang konvensi manusia tertentu dan dengan cara apa konvensi ini dapat diubah.

Dengan demikian filsafat (teori) dan praktik perlu maju bersama dalam praksis pendidikan matematika transformatif. Radford benar bahwa filsafat pendidikan matematika perlu melampaui pemahaman belaka. Ia tidak hanya perlu mengartikulasikan seperangkat nilai yang bersaing, tetapi juga berkomitmen pada seperangkat nilai untuk perkembangan manusia melalui matematika. Di luar ini, kita perlu terlibat dengan praktik transformatif untuk meningkatkan pengajaran dan pembelajaran matematika, praktik matematika, masyarakat, dan dunia tempat kita tinggal.

Filsafat muncul dari dialektika Yunani kuno di mana kepercayaan umum dan konsep yang tidak dianalisis diinterogasi dan diteliti; di mana peran penguasa dipertanyakan dan ditantang melalui berbicara kebenaran kepada kekuasaan. Dengan demikian peran filsafat pendidikan matematika adalah untuk menganalisis, mempertanyakan, menantang, dan mengkritik klaim praktik, kebijakan, dan penelitian pendidikan matematika. Tugas kita adalah menggali asumsi dan praanggapan tersembunyi, dan dengan membuat mereka terbuka dan terlihat, untuk memungkinkan para peneliti dan praktisi untuk dengan berani melampaui batas-batas yang mereka tentukan sendiri, melampaui batas-batas konseptual yang tidak diragukan yang dipasang oleh wacana bidang kita, untuk bekerja mewujudkan cita-cita, visi, dan impian mereka sendiri di ruang kelas mereka, masyarakat dan dunia. More about this source textSource text required for additional translation information

Bab 5

Suatu Konsepsi Dialogis Penjelasan dalam Bukti Matematika

Dalam bab ini, kita berpendapat bahwa masalah penjelasan dalam bukti matematis dapat diatasi dengan baik dalam konseptualisasi dialogis dari bukti yang telah kita kembangkan dalam beberapa tahun terakhir. Ide kuncinya adalah untuk menekankan pengamatan bahwa bukti adalah sepotong wacana yang ditujukan untuk audiens yang dituju, dengan maksud untuk menghasilkan persuasi yang menjelaskan. Pendekatan ini menjelaskan mengapa bukti eksplanatori lebih disukai daripada yang tidak atau kurang jelas, dan mengapa eksplanatori adalah sifat relatif pemirsa dari suatu bukti. Akun ini juga mampu mengklarifikasi sejumlah fitur latihan matematika.

5.1 Pendahuluan

Pada tahun 1959, Stephen Smale membuktikan bahwa semua pencelupan bola-n ke dalam ruang Euclidean secara teratur homotopik; ini menyiratkan bahwa bola dapat dibalik (dibalik ke dalam dalam ruang tiga dimensi dengan kemungkinan berpotongan sendiri tetapi tanpa membuat lipatan apa pun). Hasilnya cukup mengejutkan, apalagi bukti Smale (bukti tidak langsung) tidak mengungkap detail proses eversi (tindakan membalik ke dalam: keadaan membalik ke luar) (Jackson, 2002). Dengan demikian, sementara bukti itu sendiri dianggap benar, ia gagal menjelaskan proses yang keberadaannya dibuktikan. Hanya ketika Bernard Morin menciptakan model tanah liat yang menunjukkan homotopi yang melakukan eversi pada tahun 1967, proses tersebut menjadi sepenuhnya dipahami (Dutilh Novaes, 2013). (Kemudian, eversi yang berbeda dijelaskan.) Sampai saat itu, bukti Smale dipandang begitu membingungkan sehingga sering (dan masih sekarang) disebut sebagai paradoks Smale.

Pembuktian Smale dapat dilihat sebagai contoh klasik dari bukti yang, meskipun benar dan diterima seperti itu (sehingga menetapkan kebenaran kesimpulan) gagal menjelaskan. Justru kurangnya penjelasan yang membuatnya tampak paradoks, dan yang menyebabkan Morin dan matematikawan lainnya untuk terus bekerja pada masalah, meskipun fakta bahwa kemungkinan eversi itu sendiri telah terbukti.

Perbedaan antara bukti non-penjelas dan bukti penjelasan sering dirumuskan dalam istilah perbedaan antara bukti yang hanya menetapkan bahwa kesimpulannya adalah kasusnya (yaitu, jika premisnya adalah kasusnya) dan bukti yang menetapkan mengapa kesimpulannya demikian; yang pertama hanya mendemonstrasikan, sedangkan yang kedua menjelaskan (Colyvan, 2012, hlm. 76). Bukti penjelasan adalah mereka yang 'tampaknya mengungkapkan inti masalah' (Davis & Hersh, 1982; dikutip dalam Resnik & Kushner, 1987). Dengan demikian dijelaskan, penjelasan adalah (mungkin) sifat yang diinginkan dalam bukti, dan semua hal dianggap sama, matematikawan akan lebih memilih bukti penjelasan daripada bukti yang tidak jelas. Tapi apa yang membuat beberapa bukti menjelaskan dan beberapa tidak?

Isu penjelasaan bukti matematis telah mendapat perhatian yang signifikan dalam beberapa dekade terakhir, baik dalam filsafat (Mancosu & Pincock, 2012) maupun dalam pendidikan matematika (Hanna, Jahnke, & Pulte, 2010). silsilah dibedakan: itu dibahas oleh penulis kuno seperti Aristoteles dan Proclus, serta oleh Renaissance dan penulis modern awal (Mancosu, 2011: Sect. 5). Dalam beberapa dekade terakhir, perdebatan dihidupkan kembali di antara para filsuf oleh karya Steiner pada akhir 1970-an (Steiner, 1978), dan dalam pendidikan matematika (serta di beberapa kalangan filosofis) oleh penekanan Lakatos pada epistemik, penjelasan (sebagai lawan untuk hanya pembenaran) peran bukti matematis dalam Proofs and Refutations (Lakatos, 1976).

Salah satu untaian menonjol dalam filsafat matematika mengambil sebagai titik awal diskusi tentang penjelasan dalam ilmu (empiris). Menurut akun Aristotelian yang tersebar luas dan luas, teori ilmiah benar-benar dapat menjelaskan itu secara akurat melacak proses kausal yang mendasari fenomena yang berusaha dijelaskannya. Dialihkan ke matematika, pertanyaannya kemudian menjadi: apakah bukti matematika menjelaskan dengan cara yang sama seperti teori ilmiah, yaitu sejauh mereka melacak proses kausal? Tidak jelas bagaimana kisah kausal semacam itu untuk bukti matematis dapat diceritakan. Apakah masuk akal untuk mengatakan bahwa beberapa kebenaran matematika dapat menyebabkan beberapa kebenaran matematika lainnya? Agar hal ini terjadi, seseorang mungkin harus menerima tidak hanya keberadaan entitas matematika yang independen, tetapi juga gagasan bahwa mereka dapat saling mempengaruhi secara kausal yang akan memerlukan konsepsi ontologi matematika yang sangat meningkat dan agak tidak masuk akal.

Sebagian besar penulis yang terlibat dalam perdebatan ini tampaknya berpikir bahwa cerita kausal yang lengkap tidak mungkin memuaskan dalam kasus bukti matematis. Penjelasan yang berbeda dari penjelasan bukti matematis yang tidak sepenuhnya kausal/metafisik telah diusulkan (Lange, 2016), tetapi beberapa dari mereka (Colyvan, 2010; Steiner, 1978) masih berusaha untuk membangun konon sifat obyektif dari bukti (atau entitas/struktur matematika yang relevan) sebagai dasar untuk penjelasan (atau ketiadaan), sehingga mencoba untuk membangun versi penjelasan matematika yang non-kausal tetapi masih objektif.

Dalam perdebatan tentang penjelasan ilmiah, ada orang-orang yang condong ke metafisik, konsepsi penjelasan kausal (Salmon, 1984), dan mereka yang mengadopsi perspektif pragmatis. Pendekatan 'penjelasan sebagai jawaban atas pertanyaan mengapa' yang dikembangkan oleh van Fraassen (1977, 1980) adalah contoh yang paling menonjol dari yang terakhir. Pembagian serupa dapat ditemukan di antara penjelasan tentang bukti matematis, dan beberapa dari mereka yang mendukung pendekatan kontekstual pragmatis adalah Heinzmann (2006) dan Paseau (2010). Tetapi bahkan mereka yang mengadopsi perspektif pragmatis tentang penjelasan cenderung merumuskan rekening 'tanpa tubuh' bukti matematis sebagai entitas berdiri bebas mengambang di udara, seolah-olah: tidak diproduksi tidak dikonsumsi oleh siapa pun.

Seperti yang diharapkan, literatur tentang penjelasan bukti dalam pendidikan matematika jauh lebih rentan terhadap pendekatan tanpa agen. Pendidik matematika pada akhirnya tertarik pada fenomena interaksi guru-siswa yang sangat konkret dan multi-agen, dan pada pertanyaan epistemik yang cukup nyata yang berkaitan dengan pemahaman bukti matematika dan konsep matematika. Beberapa dari mereka (Alibert & Thomas, 1991; Balacheff, 1991; Ernest, 1994) menekankan peran bukti sebagai alat untuk persuasi dan penjelasan antarpribadi. Lagi pula, apa penjelasan jika bukan wacana yang dihasilkan oleh seseorang dengan maksud untuk menjelaskan sesuatu kepada orang lain? (Atau untuk diri sendiri, dalam kasus batas.)

Klaim utama kita dalam bab ini adalah bahwa ada banyak yang bisa diperoleh untuk penjelasan filosofis dari penjelasan (atau ketiadaan) bukti matematis dengan mengadopsi perspektif multi-agen. Lebih khusus lagi, saya di sini menerapkan akun dialogis bukti matematis yang telah saya kembangkan di tempat lain (Dutilh Novaes, 2016) untuk masalah penjelasan matematis. Ini akan menghasilkan akun dialogis yang 'terwujud', pragmatis, dan termotivasi secara independen tentang penjelasan bukti matematis.

Perspektif dialogis memberikan alasan yang sangat alami mengapa kita ingin bukti matematis menjadi penjelasan: karena mereka adalah potongan wacana yang ditawarkan oleh produser bukti kepada audiens yang dituju, dengan maksud untuk menghasilkan persuasi penjelasan. Perspektif dialogis juga menjelaskan sejumlah fenomena lain yang terkait dengan penjelasaan bukti: ketergantungan konteks, granularitas (kondisi yang ada dalam butiran, mengacu pada sejauh mana suatu bahan atau sistem terdiri dari potongan-potongan yang dapat dibedakan. Ini dapat merujuk pada sejauh mana entitas yang lebih besar dibagi, atau sejauh mana kelompok entitas kecil yang tidak dapat dibedakan telah bergabung bersama untuk menjadi entitas yang lebih besar dan dapat dibedakan [Wikipedia]), pencarian bukti baru dari teorema yang sudah terbukti. Pada saat yang sama, memungkinkan perumusan gagasan penyederhanaan penjelas dalam kasus batas, dalam hal konsep retoris khalayak universal.

Kita melanjutkan dengan cara berikut: Sekte. "Penjelasan dalam Matematika" menyajikan gambaran singkat dari beberapa perdebatan filosofis tentang penjelasan matematis; Sekte. "Suatu Konsepsi Dialogis dari Bukti Matematika" menyajikan konsepsi dialogis kita tentang bukti matematis; Sekte. "Bukti Matematis sebagai Dialog Fiktif Penjelasan" membongkar apa yang dikatakan perspektif dialogis tentang penjelasaan bukti matematis.

Penjelasan dalam Matematika

Suatu pra-anggapan yang berjalan melalui diskusi filosofis tentang penjelasan dan pembuktian matematis adalah bahwa benar-benar ada perbedaan yang bermakna dan berguna antara bukti yang menjelaskan dan bukti yang tidak (Baracco, 2017; Resnik & Kushner, 1987; Zelcer, 2013) adalah pengecualian). Namun, itu adalah pertanyaan yang sah apakah matematikawan sendiri melihat atau tidak melihat kategori 'penjelas' dan 'non-penjelas' sebagai relevan untuk pekerjaan mereka. Colyvan (2012, p. 79) mengakui bahwa penilaian dari penjelasan biasanya ditinggalkan dari karya matematikawan yang diterbitkan; dia juga mencatat bahwa "sulit untuk menemukan banyak kesepakatan dalam literatur matematika tentang bukti yang menjelaskan dan mana yang tidak". Namun demikian, ia menyatakan bahwa kategori ini sebenarnya relevan untuk praktik matematikawan, dan dengan demikian penjelasan merupakan topik penting bagi filsuf matematika.10 Hafner dan Mancosu (2005) mencapai kesimpulan serupa tentang relevansi penjelasan untuk praktik matematika berdasarkan sejumlah studi kasus.

Tetapi dengan asumsi bahwa penjelasan adalah sifat yang menarik dari bukti matematika (beberapa?), sejumlah pertanyaan segera muncul. Misalnya, apakah perbedaan antara bukti eksplanatori dan non-penjelasan merupakan perbedaan yang tajam, atau apakah itu memungkinkan untuk derajat, sehingga penjelas menjadi gagasan komparatif? Dengan kata lain, mungkin suatu bukti tidak menjelaskan seperti itu, melainkan lebih menjelaskan daripada beberapa bukti, serta kurang menjelaskan daripada yang lain. Selain itu, apakah penjelasan merupakan sifat objektif dan absolut dari bukti itu sendiri, atau apakah itu sifat yang dikaitkan dengan berbagai bukti pertama dan terutama berdasarkan elemen kontekstual dan variabel? Apakah penilaian agen penjelas relatif?

Tetapi dengan asumsi bahwa penjelasan adalah sifat yang menarik dari bukti matematika (beberapa?), sejumlah pertanyaan segera muncul. Misalnya, apakah perbedaan antara bukti eksplanatori dan non-penjelasan merupakan perbedaan yang tajam, atau apakah itu memungkinkan untuk derajat, sehingga penjelas menjadi gagasan komparatif? Dengan kata lain, mungkin suatu bukti tidak menjelaskan seperti itu, melainkan lebih menjelaskan daripada beberapa bukti, serta kurang menjelaskan daripada yang lain. Selain itu, apakah penjelasan merupakan sifat objektif dan absolut dari bukti itu sendiri, atau apakah itu sifat yang dikaitkan dengan berbagai bukti pertama dan terutama berdasarkan elemen kontekstual dan variabel? Apakah penilaian agen penjelas relatif?

Seperti disebutkan di atas, karya mani Steiner di akhir 1970-an telah dan terus menjadi sangat berpengaruh dalam perdebatan tentang penjelasan. Dia memperkenalkan gagasan tentang properti yang mencirikan sebagai apa yang membedakan bukti eksplanatori dari non-penjelasan: "bukti penjelas mengacu pada properti karakterisasi dari suatu entitas atau struktur yang disebutkan dalam teorema, sehingga dari bukti itu terbukti bahwa hasilnya tergantung pada properti" (Steiner, 1978, hlm. 143). Gagasan ketergantungan ini berusaha menangkap analogi non-kausal tetapi realis dari gagasan sebab-akibat dalam penjelasan ilmiah secara lebih umum. Seperti yang dijelaskan oleh Mancosu dan Pincock (2012, hlm. 16), "Steiner berpendapat bahwa hubungan ketergantungan ini mengharuskan entitas atau struktur dipilih secara unik oleh beberapa properti yang mencirikan, dan bahwa bukti penjelas menjadi bagian dari keluarga bukti di mana properti ini bervariasi." Yang penting, gagasan tentang properti yang mencirikan dikaitkan dengan entitas atau struktur matematika, dan dengan demikian dipahami dalam istilah yang realistis, objektif, dan non-kontekstual. Namun, masih ada komponen epistemik yang tidak dapat direduksi dalam bagaimana sifat karakterisasi (atau tidak) ditangkap dengan tepat dalam pembuktian.

Seperti yang ditunjukkan oleh Mancosu (2011), Steiner adalah akun lokal, yaitu explanatoriness adalah properti lokal dari bukti yang diberikan. Sebaliknya, pendekatan lain yang berpengaruh, yaitu Kitcher (1989), dengan tepat digambarkan sebagai global/holistik di mana penjelasan bukti dilihat dalam konteks yang lebih luas dari pengetahuan (matematika) secara keseluruhan. Untuk Kitcher, gagasan kuncinya adalah penyatuan: "bukti penjelas dalam matematika murni adalah bukti yang merupakan bagian dari kumpulan kecil pola argumen yang memungkinkan derivasi klaim matematika yang kita terima." (Mancosu & Pincock, 2012, hal. 15). Jadi, sementara gagasan Kitcher tentang penjelasan tidak terletak pada tingkat entitas atau struktur matematika, melainkan pada tingkat pola argumen, ia disajikan dalam istilah non-kontekstual, absolut, yaitu sehubungan dengan totalitas pengetahuan matematika kita. Secara khusus, dijelaskan demikian, atribusi penjelasan tampaknya tidak menjadi agen-relatif dengan cara apapun.

Reaksi alami terhadap pendekatan semacam itu adalah untuk menekankan elemen kontekstual dan pragmatis yang tak terhindarkan yang terlibat agar bukti matematis dianggap kurang lebih sebagai penjelas dengan kata lain, faktor manusia. Salah satu motivasi untuk mengadopsi perspektif ini adalah pengamatan bahwa penjelasan dapat dipandang sebagai konsep triadik, yang melibatkan produsen penjelasan, penjelasan itu sendiri (bukti), dan penerima penjelasan. Ide kuncinya adalah bahwa penjelasan biasanya ditujukan pada audiens potensial; seseorang menjelaskan sesuatu kepada orang lain (atau kepada diri sendiri, dalam kasus batas) (Walton, 2004).

Meskipun mungkin menjanjikan pada pandangan pertama, beralih ke penjelasan pragmatis penjelasan ilmiah seperti van Fraassen tampaknya tidak menawarkan titik awal yang tepat untuk analisis penjelasan matematis dalam nada ini. Seperti yang dikemukakan oleh Sandborg (1998, hlm. 604), “penjelasan memang menjawab pertanyaan mengapa dan evaluasi penjelas bergantung pada konteks, tetapi [...] pendekatan pertanyaan mengapa tetap melewatkan aspek penting dari evaluasi penjelas tertentu.” Memang, seperti disebutkan di atas, akun van Fraassen mengabaikan agen yang memproduksi dan mengonsumsi penjelasan, meskipun fokusnya pada pertanyaan mengapa. Namun, dapat dikatakan bahwa mengabaikan perspektif agen yang terlibat membuat hampir tidak mungkin untuk melakukan diskusi yang berarti tentang bukti yang menjelaskan atau tidak. Misalnya, Paseau (2010) menyajikan tinjauan mendalam tentang berbagai bukti teorema kekompakan, dan menyimpulkan:

> Akhirnya dan mungkin yang paling jelas, diskusi kita menyoroti ketergantungan konteks penjelasan argumen matematika. Penjelasan tampaknya tergantung pada bidang matematika apa yang akrab dengannya. [...] Oleh karena itu, apakah suatu argu-

> men itu elegan atau menjelaskan, bergantung pada asumsi apa yang digunakannya dan apakah audiens yang menjadi sasarannya akrab dengan asumsi tersebut. (Paseau, 2010, hlm. 96–97, penekanan ditambahkan)

Dengan kata lain, mungkin elemen kontekstual yang paling relevan yang menentukan apakah suatu bukti akan menjelaskan adalah kesesuaiannya untuk audiens targetnya, dalam hal pengetahuan sebelumnya dan keakraban dengan alat konseptual yang relevan. Bagi pembaca yang berasal dari bidang pendidikan matematika, ini mungkin tampak seperti pengamatan yang hampir sepele; tetapi di antara para filsuf, itu tetap kontroversial.

Berikut ini, saya berpendapat bahwa penjelasan dialogis yang termotivasi secara independen dari bukti matematis berdasarkan wawasan bahwa bukti (seperti penjelasan) pada dasarnya adalah wacana yang ditujukan untuk audiens yang diduga mengarah pada analisis penjelasan matematis yang meyakinkan, yang menjelaskan sejumlah fitur dari praktek matematika dalam kaitannya dengan bukti. Tetapi sebelum melanjutkan, izinkan saya mengomentari beberapa karya terbaru tentang bukti matematika dari perspektif teori argumentasi, karena pendekatan ini cukup dekat dengan beberapa ide yang akan kita kembangkan di bagian selanjutnya.

Dufour (2013a, b) memberikan ikhtisar yang berguna yang menyatukan berbagai perdebatan yang sejauh ini telah berkembang secara independen satu sama lain: debat filosofis tentang penjelasan ilmiah serta penjelasan tentang bukti yang melibatkan Steiner, Kitcher, Mancosu, dll.; dan diskusi tentang penjelasan dalam teori argumentasi. Satu pertanyaan yang dia jawab adalah apakah bukti matematis adalah argumen, dan apakah itu/dapat menjadi penjelasan (pertanyaan selanjutnya diambil oleh komentar Aberdein (2013) tentang Dufour). Dia membahas beberapa argumen yang telah diberikan yang menyatakan bahwa bukti matematis sebaiknya tidak dianggap sebagai argumen, tetapi menganggapnya tidak persuasif. Dengan demikian, dia bergabung dengan kumpulan penulis yang terus bertambah yang melihat bukti matematika sebagai jenis argumen tertentu (lihat Aberdein & Dove, 2009, 2013, dan pendekatan dialogis saya sendiri terhadap bukti). Jika demikian, dan jika beberapa bukti matematis memang menjelaskan, maka setidaknya beberapa argumen (bukti) juga harus dihitung sebagai penjelasan.

Suatu Konsepsi Dialogis Bukti Matematika

Dalam pendekatan berbasis praktik (yang dipahami secara luas) yang diadopsi di sini (dan juga dalam sebagian besar pekerjaan saya dalam filsafat matematika), pertanyaan fungsional menjadi sangat penting. Berkenaan dengan pembuktian, pertanyaan yang relevan menjadi: apa fungsi (atau apa fungsi) dari sebuah bukti? Mengapa matematikawan repot-repot menghasilkan bukti sama sekali? Efek apa yang ingin mereka dapatkan? Matematikawan dan filsuf matematika cenderung mengabaikan pertanyaan-pertanyaan penting ini, tetapi mereka telah ditangani oleh sejumlah penulis (Auslander, 2008; Dawson, 2006; Hersh, 1993; Rav, 1999).

Salah satu sudut pandang yang menjanjikan untuk menjawab pertanyaan-pertanyaan ini adalah apa yang dapat digambarkan sebagai pendekatan silsilah (Dutilh Novaes, 2015). Ketika sampai pada pertanyaan fungsionalis, masuk akal untuk menanyakan apa yang dipikirkan oleh praktisi pertama dari praktik tertentu yang mereka lakukan, dan mengapa mereka melakukannya ketika praktik itu pertama kali muncul. (Tapi perhatikan kemungkinan pergeseran fungsi di sepanjang jalan.) Dalam kasus ini, kemunculan historis bukti deduktif dalam matematika Yunani kuno adalah titik data yang sangat relevan, dan pada topik ini studi yang paling otoritatif tetap ada (Netz, 1999). Netz menekankan pentingnya persuasi, lisan, dan dialog untuk munculnya matematika klasik 'Euclidean' di Yunani kuno:

> Matematika Yunani mencerminkan pentingnya persuasi. Ini mencerminkan peran kelisanan, dalam penggunaan formula, dalam struktur pembuktian... Tapi kelisanan ini diatur ke dalam bentuk tertulis, di mana kosa kata terbatas, presentasi mengikuti pola yang relatif kaku... Ini sekaligus lisan dan tulisan... (Netz, 1999, hlm. 297–298)

Interpretasi Netz bergantung pada karya sebelumnya oleh Lloyd (1996), yang berpendapat bahwa konteks sosial, budaya dan politik di Yunani kuno, dan khususnya peran praktik berdebat, merupakan dasar munculnya teknik pembuktian deduktif matematis (lihat juga Jahnke, 2010). Jadi dari perspektif ini, tampaknya salah satu fungsi utama bukti deduktif (dulu dan sekarang) adalah untuk menghasilkan persuasi, khususnya apa yang bisa disebut persuasi penjelas: untuk menunjukkan tidak hanya bahwa ada sesuatu yang terjadi, tetapi juga mengapa memang demikian. Juga dikemukakan oleh Dawson (2006, hlm. 270):

> Kami akan mengambil bukti untuk menjadi argumen informal yang tujuannya adalah untuk meyakinkan mereka yang berusaha untuk mengikutinya bahwa pernyataan matematika tertentu benar (dan, idealnya, untuk menjelaskan mengapa itu benar).

Apa yang saya tambahkan pada deskripsi Dawson adalah perspektif dialogis multi-agen yang eksplisit, yang hanya tersirat dalam deskripsinya. Pada konsepsi ini, bukti deduktif sesuai dengan dialog antara orang yang ingin menetapkan kesimpulan (mengingat kebenaran dugaan dari premis), dan lawan bicara yang tidak akan mudah diyakinkan dan yang akan mengajukan keberatan, contoh tandingan, dan permintaan untuk klarifikasi lebih lanjut dan presisi. Bukti yang baik adalah bukti yang meyakinkan lawan yang adil tapi 'tangguh'; seperti yang diduga dicatat oleh ahli matematika Mark Kac, "keindahan bukti matematis adalah bahwa bukti itu meyakinkan bahkan pendukung yang keras kepala" (Fisher, 1989, hlm. 50). Sekarang, jika ini benar, maka bukti matematis adalah gagasan yang secara inheren dialogis, multi-agen, mengingat pada dasarnya itu adalah bagian dari wacana yang ditujukan untuk audiens yang diduga, biasanya terdiri dari lawan bicara yang 'keras kepala'.

Yang pasti, ada berbagai cara di mana klaim bahwa bukti matematis pada dasarnya dialogis dapat dipahami. Sebagai contoh, fakta bahwa suatu bukti hanya diakui oleh komunitas matematika setelah cukup diteliti oleh para ahli yang dapat dipercaya juga dapat dilihat sebagai fenomena dialogis, mungkin dalam pengertian yang longgar ('dialog' antara matematikawan yang merumuskan bukti dan komunitas matematika yang menelitinya). Tetapi berikut ini kita menyajikan rekonstruksi rasional yang lebih tepat dari dialog (cukup khusus) yang akan sesuai dengan bukti deduktif.

Pada konsepsi ini, pembuktian adalah dialog semi-permusuhan dari jenis khusus yang melibatkan dua peserta: *Prover* dan *Skeptic*. Prima facie, para peserta memiliki tujuan yang berlawanan, dan inilah mengapa komponen permusuhan tetap menonjol: Prover ingin menetapkan kebenaran dari kesimpulan, dan Skeptis tidak akan mudah diyakinkan. Dialog dimulai dengan Prover meminta Skeptic untuk memberikan premis tertentu. Prover kemudian mengajukan pernyataan lebih lanjut, yang konon mengikuti dari apa yang telah diberikan. (Prover juga dapat meminta Skeptic untuk memberikan tempat tambahan tambahan di sepanjang jalan.)

Tampaknya sebagian besar pekerjaan dilakukan oleh Prover, tetapi Skeptic memiliki peran penting untuk dimainkan, yaitu untuk memastikan bahwa buktinya persuasif, jelas, dan benar. Langkah skeptis adalah: memberikan premis untuk mendapatkan bukti; menawarkan contoh tandingan ketika langkah inferensial oleh Prover tidak benar-benar harus melestarikan kebenaran (atau contoh tandingan global untuk seluruh bukti); meminta klarifikasi mengapa-pertanyaan ketika langkah inferensial tertentu oleh Prover tidak cukup meyakinkan dan jelas. Ketiga langkah ini sesuai dengan apa yang bisa dibilang sebagai tiga fitur utama dari bukti matematis: dimulai dengan premis-premis tertentu; itu berlangsung melalui langkah-langkah inferensial yang melestarikan kebenaran; langkah-langkah ini harus secara individual jelas dan menarik.

Dari sudut pandang ini, bukti matematis dicirikan oleh interaksi kompleks antara permusuhan dan kerja sama: para peserta memiliki tujuan yang berlawanan dan 'bersaing' satu sama lain di tingkat yang lebih rendah, tetapi mereka juga terlibat dalam proyek bersama untuk menyelidiki kebenaran. atau kepalsuan dari suatu kesimpulan (mengingat kebenaran premis yang diduga) dengan cara yang tidak hanya persuasif tetapi juga (idealnya) menjelaskan. Jika kedua peserta menunjukkan kemampuan terbaiknya, maka tujuan bersama menghasilkan pengetahuan matematika akan tercapai secara optimal. Komponen kooperatif juga menonjol dari pengamatan bahwa Prover berusaha membantu Skeptic dalam benar-benar memahami mengapa kesimpulan mengikuti dari premis, dan bahwa (dengan mengajukan pertanyaan mengapa yang sesuai) Skeptic dapat membantu Prover untuk merumuskan bukti yang mencerahkan.

Pada titik ini, pembaca mungkin bertanya-tanya: ini semua sangat baik, tetapi bukti deduktif jelas tidak benar-benar dialog, karena biasanya disajikan secara tertulis daripada diproduksi secara lisan. Kalaupun ada, hanya ada satu 'suara' yang kita dengar, yaitu Prover. Jadi yang terbaik, mereka harus dilihat sebagai monolog. Tapi bukti matematis bisa dibilang merupakan contoh dari apa yang digambarkan oleh ahli bahasa E. Pascual sebagai interaksi fiktif, yaitu sepotong wacana yang tampaknya monologis tetapi sebenarnya mereproduksi skenario komunikatif multi-agen.

> Secara khusus, kami menyajikan premis bahwa ada dasar percakapan untuk bahasa, yang berfungsi untuk sebagian struktur kognisi, wacana, dan tata bahasa. Berangkat dari prinsip ini, kami membahas pengertian interaksi fiktif atau 'FI', yaitu penggunaan template interaksi tatap muka sebagai domain kognitif yang sebagian memodelkan: (i) pemikiran (misalnya berbicara dengan diri sendiri); (ii) konseptualisasi pengalaman (misalnya 'Jalan jauh adalah jawaban untuk sakit kepala'); (iii) organisasi wacana (misalnya monolog yang disusun sebagai dialog); dan (iv) sistem bahasa dan penggunaannya (misalnya pertanyaan retoris). (Pascual & Oakley, 2017, hlm. 348, penekanan ditambahkan)

Mengingat pengamatan bahwa bukti matematis adalah bentuk wacana (spesifik, teratur, dan khusus), dan gagasan bahwa struktur percakapan interaktif meresapi banyak dari apa yang tampak sebagai wacana monologis pada pandangan pertama, sebenarnya tidak begitu mengejutkan bahwa bukti matematis juga akan memiliki dasar percakapan (dialogis). Kontribusi utama saya di sini adalah untuk menjelaskan secara rinci jenis percakapan yang dibuat ulang oleh bukti matematis: dialog semi-permusuhan mengikuti aturan yang cukup ketat, yang melibatkan peserta fiktif Prover dan Skeptic.

Memang, Skeptic mungkin telah 'dibungkam', tetapi dia masih hidup dan sehat sejauh metode deduktif telah menginternalisasi peran Skeptis dengan menjadikannya konstitutif dari metode deduktif seperti itu. Ingatlah bahwa tugas Skeptic adalah mencari contoh tandingan dan memastikan argumentasinya masuk akal. Hal ini pada gilirannya sesuai dengan persyaratan minimal bahwa setiap langkah inferensial dalam suatu bukti harus selalu menjaga kebenaran (dan sangat kebal terhadap contoh tandingan), dan bahwa setiap langkah dari suatu bukti harus terbukti dan persuasif.

Dukungan empiris lebih lanjut untuk klaim bahwa bukti matematis paling baik dipahami sebagai dialog fiktif adalah karya Hodds dan rekan pada pelatihan penjelasan diri untuk meningkatkan pemahaman bukti siswa (Hodds, Alcock, & Inglis, 2014). Pelatihan ini terdiri dari mengajar siswa untuk mengajukan pertanyaan kepada diri mereka sendiri tentang bukti yang sangat mirip dengan pertanyaan yang diajukan Skeptis: Apakah saya memahami ide yang digunakan dalam langkah inferensial ini? Apakah saya memahami ide umum dari pembuktian? Apakah informasi yang diberikan dalam bukti bertentangan dengan keyakinan saya tentang topik sejauh ini? (Yang mungkin mendorong pencarian contoh tandingan.) Siswa bahkan diinstruksikan untuk memberikan jawaban atas pertanyaan-pertanyaan ini dengan lantang, seolah-olah terlibat dalam dialog lisan yang nyata, sehingga memberlakukan interaksi fiktif dari bentuk tertulis. Hasil mereka menunjukkan bahwa pendekatan ini secara substansial meningkatkan pemahaman bukti, sehingga menunjukkan bahwa 'kembali' ke versi dialogis dari bukti memiliki dampak kognitif yang signifikan. (Ingat deskripsi Netz tentang bukti matematis di atas sebagai "sekaligus lisan dan tertulis".)

Bukti Matematika sebagai Dialog Fiktif Penjelasan

Penjelasan itu adalah properti yang diinginkan dalam bukti mengikuti langsung dari konseptualisasi dialogis yang baru saja disajikan, khususnya sehubungan dengan kooperatif, komponen didaktik dari dialog tersebut: Prover tidak ingin hanya memaksa Skeptis untuk memberikan kesimpulan, tetapi juga untuk benar-benar mencerahkan Skeptis mengapa teorema berlaku. Di bagian ini kami mengeja sejumlah hasil dari konsepsi dialogis ini untuk pertanyaan tentang penjelasan bukti matematis.

Fitur utama dari penjelasan dialogis dalam bukti matematis yang dipertahankan di sini adalah bahwa penjelasan adalah 'di mata yang melihatnya': itu bukan milik bukti seperti itu, melainkan muncul dari hubungan antara bukti dan a penonton yang diberikan. Dengan kata lain, keterjelasan adalah properti relatif penonton dari sebuah bukti; itu bisa menjelaskan untuk audiens tertentu, akrab dengan bagian matematika tertentu (katakanlah, ahli topologi), tetapi tidak untuk audiens yang berbeda (katakanlah, ahli logika matematika). Paseau (2010) membuat poin ini dengan sangat meyakinkan sehubungan dengan bukti yang berbeda dari teorema kekompakan yang dia diskusikan.

Relativitas penonton dari explanatoriness tidak hanya berkaitan dengan bidang yang berbeda dalam matematika, tetapi juga untuk berbagai tingkat keahlian. Hal ini diperjelas oleh fenomena tingkat granularity yang berbeda untuk pembuktian matematis. Telah diketahui dengan baik bahwa tingkat detail yang digunakan untuk menjelaskan langkah-langkah yang berbeda dalam suatu pembuktian akan bervariasi sesuai dengan audiens yang dituju: misalnya, dalam jurnal profesional, bukti lebih sering daripada tidak lebih dari sketsa bukti, yang tidak menguraikan secara rinci semua langkah inferensial. Pra-anggapannya adalah bahwa audiens yang dituju, yaitu matematikawan profesional yang mengerjakan topik serupa, akan dapat merekonstruksi rincian bukti dari intinya, jika mereka merasa perlu melakukannya (misalnya jika mereka entah bagaimana meragukan hasilnya). Sebaliknya, dalam konteks buku teks atau dalam situasi kelas, bukti cenderung disajikan lebih detail, justru karena audiens yang dituju tidak diharapkan memiliki tingkat keahlian yang dibutuhkan untuk merekonstruksi bukti dari sketsa bukti. Terlebih lagi, audiens yang dituju sedang dalam proses mempelajari permainan merumuskan dan memahami bukti matematis, sehingga diperlukan bukti di mana setiap langkah dijabarkan dengan jelas. Lebih jauh lagi, area yang berbeda dalam matematika cenderung memiliki standar ketelitian yang berbeda untuk pembuktian, sekali lagi dalam fungsi audiens yang dituju.

Apa yang ditunjukkan oleh fenomena tingkat perincian yang berbeda ketika sampai pada penjelasan tentang bukti adalah bahwa, agar bukti dapat menjelaskan bagi audiens yang dituju, tingkat perincian yang tepat harus diadopsi. Jika sebuah bukti ingin menjelaskan dalam arti membuat "sesuatu yang awalnya membingungkan menjadi kurang membingungkan; penjelasan mengurangi misteri" (Colyvan, 2012, hlm. 76), pengurangan misteri secara inheren terkait dengan agen yang kepadanya sesuatu seharusnya tidak terlalu membingungkan.

Dari perspektif ini, tidak mengherankan bahwa matematikawan harus lebih memilih bukti tertentu daripada yang lain, khususnya yang mencapai 'pengurangan misteri'. Sekarang, jika fungsi utama atau mungkin satu-satunya dari bukti matematis adalah untuk menetapkan kebenaran dugaan matematika tertentu, maka fenomena matematikawan yang lebih memilih bukti tertentu daripada yang lain tidak akan terjadi. Memang, jika menetapkan kebenaran adalah satu-satunya fungsi dari sebuah bukti, maka seorang matematikawan akan sama-sama puas dengan dua bukti yang benar yang membangun teorema yang sama. Tapi tentu saja, ini tidak terjadi (seperti yang juga dicatat oleh Bueno, 2009, hlm. 52), dan pada kenyataannya matematikawan sering bekerja untuk membuktikan kembali teorema, yaitu menemukan bukti yang lebih memuaskan untuk teorema tertentu yang sudah ada. terbukti (Dawson, 2006). Apa yang membuat bukti tertentu lebih memuaskan daripada yang lain kemungkinan besar adalah urusan multi-dimensi (Inglis & Aberdein, 2015), tetapi fitur seperti kesederhanaan, keanggunan, umum, kedalaman, kejelasan, adalah beberapa fitur yang biasanya dikaitkan dengan bukti yang memuaskan.

Matematikawan sering menggunakan kosakata estetika untuk menunjukkan bukti yang mereka sukai (indah, anggun) atau tidak suka (jelek) (Inglis & Aberdein, 2015; Montaño, 2014). Sifat pasti dari properti yang dilacak oleh istilah estetika ini dalam bukti matematis adalah masalah perdebatan (Inglis & Aberdein, 2015), dan telah diperdebatkan bahwa penilaian estetika yang tampaknya ini sebenarnya melacak properti epistemik (Todd, 2008). Secara khusus, Rota (1997, hlm. 182) memilih pencerahan sebagai properti utama yang dilacak oleh penilaian estetis ini, yang ia gambarkan dalam istilah berikut:

> Kita mengakui keindahan sebuah teorema ketika kita melihat bagaimana teorema itu "cocok" pada tempatnya,26 bagaimana teorema itu menerangi dirinya sendiri, seperti suatu *Lichtung*, sebuah tempat terbuka di hutan. Kita mengatakan bahwa bukti itu indah ketika bukti seperti itu akhirnya mengungkapkan rahasia teorema, ketika itu membawa kita untuk memahami yang sebenarnya, bukan keniscayaan logis dari pernyataan yang sedang dibuktikan.

Segera terlihat bahwa properti yang dijelaskan Rota di sini adalah apa yang biasanya dipahami sebagai penjelas bukti dalam literatur yang telah kita diskusikan sejauh ini. Dari pengamatan ini, kita dapat menyimpulkan bahwa fenomena kecenderungan pembuktian di kalangan matematikawan (seperti yang dilacak dengan penggunaan kosakata estetika, antara lain) pada umumnya (meskipun tidak secara unik) terkait dengan penjelas.

Jika ini benar, maka penjelasan paling baik dilihat sebagai masalah derajat, yaitu sebagai gagasan komparatif (seperti yang disarankan dalam Pincock, 2015): sebuah bukti mungkin lebih atau kurang menjelaskan (untuk audiens tertentu) daripada bukti lain (dari sama atau teorema lain). Misalnya, bukti reductio ad absurdum biasanya dipandang kurang jelas daripada bukti langsung, dan juga bukti dengan kasus dan bukti dengan induksi matematika umumnya dianggap kurang jelas (Lange, 2014). Tetapi ini tidak berarti bahwa bukti-bukti tersebut tidak memiliki penjelasan sepenuhnya. Kadang-kadang, bukti reductio bahkan mungkin lebih menjelaskan dan meyakinkan daripada bukti langsung dari teorema yang sama, misalnya jika bukti langsung sangat panjang sedangkan bukti reductio pendek, jelas, dan elegan. Faktanya, Colyvan (2012, hlm. 83) dengan meyakinkan berpendapat bahwa membahas penjelasan atau kekurangannya dalam hal keluarga struktural bukti (reductio, dengan induksi, berdasarkan kasus, dll.) mungkin bukan pendekatan yang paling menjanjikan untuk diambil; orang harus melihat rincian bukti individu untuk membuat pernyataan tentang penjelasan (perbandingan).

Prediksi lain dari pendekatan untuk penjelasan bukti yang dipertahankan di sini adalah bahwa matematikawan biasanya tidak akan berkumpul dalam penilaian mereka tentang penjelasan (serta fitur terkait seperti keindahan dan keanggunan). Mengingat keragaman epistemik yang diamati di antara matematikawan (jenis pelatihan yang berbeda, keakraban dengan sub-bidang matematika yang berbeda) terlepas dari kesamaan institusional dan metodologis, bukti yang dipandang sebagai penjelas oleh beberapa matematikawan kemungkinan besar akan dipandang sebagai kurang (atau tidak) menjelaskan. oleh orang lain.

Ini adalah prediksi empiris yang telah diselidiki, meskipun secara tidak langsung, dalam beberapa tahun terakhir oleh Inglis dan Aberdein. Dalam (Inglis & Aberdein, 2015), data yang dikumpulkan menunjukkan bahwa, dalam penilaian matematikawan tentang bukti, penjelasan dari suatu bukti berkorelasi dengan (non-)kerumitan, utilitas, dan presisi. Dalam (Inglis & Aberdein, 2106), mereka pada gilirannya menunjukkan bahwa matematikawan secara substansial tidak setuju pada penilaian bukti mereka, khususnya sehubungan dengan kerumitan, utilitas, dan presisi, yang, mengingat hasil mereka sebelumnya, merupakan bukti tidak langsung untuk klaim bahwa matematikawan tidak setuju pada atribusi mereka untuk menjelaskan bukti. Tetapi lebih banyak pekerjaan diperlukan pada titik ini untuk menyelidiki klaim empiris bahwa matematikawan tidak setuju pada penilaian mereka tentang penjelas.

Apakah ini berarti bahwa tidak ada prospek untuk gagasan non-relatif, objektif dari bukti matematis yang menjelaskan dalam akun ini? Tidak demikian, berkat gagasan tentang Skeptis ideal yang terinternalisasi. Skeptis yang terinternalisasi adalah apa yang dapat digambarkan sebagai Skeptis yang universal dan sewenang-wenang: bukti matematis mungkin bertujuan untuk meyakinkan dan menjelaskan berbagai kemungkinan Skeptis (dipahami sebagai mereka yang memiliki kredensial matematika yang diperlukan), dan dengan demikian mengandaikan sesedikit mungkin yang khusus untuk Skeptis tertentu (misalnya latar belakang pengetahuan, gaya argumentasi). Jadi kita dapat mengatakan bahwa bukti penjelasan dalam arti absolut adalah bukti yang akan dianggap sebagai penjelasan oleh Skeptis universal yang sewenang-wenang.

Tapi tentu saja, Skeptic sewenang-wenang adalah idealisasi, dan khususnya jika tujuannya adalah untuk tetap dekat dengan praktik matematika yang sebenarnya, tidak segera jelas bahwa itu adalah idealisasi yang berguna. (Seperti yang dikemukakan, bukti matematis aktual selalu menampilkan fitur sensitivitas konteks seperti tingkat perincian yang berbeda.) Tetapi ini berarti bahwa mereka yang mencari gagasan penjelas yang nonrelatif dan objektif tidak perlu menolak pendekatan dialogis yang diusulkan di sini sama sekali. Dari perspektif ini, gagasan non-relatif muncul dari perluasan secara maksimal jangkauan konteks/audiens yang diduga dipertimbangkan, dan dengan demikian merupakan kasus batas dari gagasan relatif.

Bukti Smale tentang eversi bola, yang kita mulai dengan bab ini, dapat dianggap sebagai bukti yang dengan suara bulat dipandang sebagai tidak jelas. Mungkin ada juga contoh-contoh bukti yang secara bulat dianggap sangat jelas (walaupun dalam literatur tentang penjelasan bukti, sulit sekali menemukan contoh). Namun, tampaknya sebagian besar bukti akan menghuni zona abu-abu; mereka akan dianggap sebagai penjelas oleh beberapa orang tetapi tidak oleh yang lain, yang tidak mengejutkan mengingat adanya keragaman kognitif dan epistemik yang signifikan di antara para matematikawan.

Kesimpulan

Dalam bab ini, kita berpendapat bahwa masalah penjelasan dalam bukti matematis dapat diatasi dengan baik dalam konseptualisasi dialogis dari bukti yang telah kita kembangkan dalam beberapa tahun terakhir. Ide kuncinya adalah untuk menekankan pengamatan bahwa bukti adalah sepotong wacana yang ditujukan untuk pemirsa yang dituju, dengan maksud untuk menghasilkan persuasi yang menjelaskan. Pendekatan ini menjelaskan mengapa bukti eksplanatori lebih disukai daripada yang tidak menjelaskan (atau yang kurang jelas), dan mengapa eksplanatori adalah sifat relatif pemirsa dari sebuah bukti. Namun demikian, pendekatan multi-agen pragmatis, 'terwujud' ini masih menyisakan ruang bagi kemungkinan rasa penjelasan yang mutlak melalui konsep khalayak universal. Kita berpendapat bahwa akun ini mampu mengklarifikasi sejumlah fitur dari praktik matematika, seperti predileksi (kecenderungan) bukti, berbagai tingkat granularitas bukti, dan non-konvergensi penilaian penjelas. Perhatikan bahwa argumen yang disajikan di sini tidak dimaksudkan sebagai sanggahan definitif dari penjelasan objektif yang tidak dialogis, melainkan sebagai menawarkan pendekatan yang berbeda dan berpotensi bermanfaat untuk masalah ini.

Bab 6

Sejarah Filsafat Matematika

Bab ini membahas latar belakang kanonik filosofi matematika. Ini akan menyajikan beberapa sejarah narasi yang mengikuti beberapa tren utama dalam filsafat matematika. Semua narasi ini akan sangat selektif dan dangkal. Sejarah ini disajikan secara paralel, menekankan keberpihakan dari setiap narasi tertentu. Tetapi ini tidak berarti bahwa bersama-sama mereka mengira akan menguras lanskap historis-filosofis. Ada banyak lagi yang dapat ditambahkan ke cerita-cerita ini, dan banyak cara untuk menceritakannya kembali.

Disini harus ditekankan bahwa sejarah ini tidak berani menjelaskan atau menganalisis posisi filosofis yang mereka kemukakan. Intinya adalah untuk menyoroti beberapa masalah yang dipertaruhkan dalam perdebatan di antara para filsuf yang tidak selalu disorot secara eksplisit oleh para filsuf itu. Karena itu disini tidak akan masuk ke rincian setiap posisi filosofis atau bahkan memberikan survei yang layak dari argumen mereka. Melakukan hal itu akan memaksa untuk menyimpang terlalu jauh dari argumen utama yang disajikan dan mereproduksi beberapa diskusi terkenal yang dibahas dalam banyak karya pengantar lainnya (di antara yang terbaru adalah Bostock 2009; Celluci 2007; Teman 2007; George dan Velleman 2001; Peretasan 2014) ; Murawski 2010; Shapiro 2005; dan Stanford and Routledge, ensiklopedia filsafat online). Karena disini hanya ingin menyatukan berbagai perdebatan untuk mengajukan beberapa pertanyaan penting yang mendasari perdebatan filosofis, banyak poin filosofis yang dalam yang sangat penting bagi berbagai filsuf yang dikutip akan dibahas dengan sangat cepat dan tidak mendalam, sehingga dapat mengangkat masalah yang penting untuk argumen bahasan ini.

Lebih khusus, daripada pertanyaan filosofis seperti “Apakah objek matematika itu nyata ?”, “Apakah matematika dapat direduksi menjadi logika, atau intuisi, atau aksioma?”, Atau “Apakah matematika adalah apriori?”, Disini dibahas sejarah beberapa diskusi filosofis sebagai berputar di sekitar ketegangan meta filosofis: ketegangan antara tatanan alam dan kebebasan konseptual; antara matematika sebagai awalnya konstitutif dan dapat direduksi menjadi alasan dan/atau alam; antara mengekang monster konseptual dan berusaha membiarkan mereka berkeliaran bebas; dan antara berbagai cara untuk mendistribusikan wewenang atas norma dan standar matematika.

6.1 Sejarah 1: Tentang Apa Yang Ada, Yang Merupakan Ketegangan antara Tatanan Alam dan Kebebasan Konseptual

Narasi filosofi matematika pertama dimulai dari W. V. Quine's (1948) "*On What There Is*." Makalah ini menimbulkan pertanyaan apakah entitas matematika benar-benar ada atau isapan jempol dari imajinasi. Pertanyaan ini berkaitan dengan sentimen umum yang mengatakan bahwa matematika itu baik karena memberikan deskripsi yang baik atau prediksi realitas empiris atau ideal.

Makalah Quine menarik analogi antara, di satu sisi, realisme skolastik, konseptualisme, dan nominalisme dan, di sisi lain, logikaisme modern, intuisioisme, dan formalisme masing-masing (akan diperkenalkan yang pertama dan yang terakhir dalam beberapa paragraf) . Untuk menghilangkan ketegangan antara tatanan alam dan kebebasan konseptual dalam konteks matematika, kita harus melihat sekilas pemikiran-pemikiran ini.

Menurut analogi Quine, realis abad pertengahan dan logika abad kedua puluh berkomitmen terhadap keberadaan semua jenis objek abstrak; konseptualis abad pertengahan dan intuisi modern hanya berkomitmen pada mereka yang dapat diterima melalui konstruksi mental yang terbatas; dan nominalis dan formalis hanya berkomitmen untuk nama dan tanda tertulis, tanpa memerlukan objek yang merujuk nama dan tanda ini di luar contoh spesifik.

Esai Quine menandai momen penting dalam sejarah filsafat matematika abad kedua puluh sehingga Hilary Putnam menyatakan bahwa dalam tradisi analitik "Quine yang sendirian menjadikan Ontologi subjek yang terhormat" (2004, 78-79). Narasi historis Quine muncul pada saat logikaisme, intuisionisme, dan formalisme telah menghabiskan sebagian besar dari dorongan mereka sebagai proyek filosofis formatif, dan menjadi terserap ke dalam pekerjaan yang lebih teknis dalam logika. Pernyataan penting-Nya mengatur adegan untuk diskusi realis-nominalis kontemporer yang akan menjadi perhatian utama dalam filsafat kontemporer matematika.

Untuk melihat apa yang disyaratkan historiografi Quine, terlebi dahulu diperpertimbangkan satu dimensi dari debat skolastik. Tetapi catat bahwa mengurangi debat yang berlangsung ratusan tahun tentu akan membuat karikatur dan melibatkan generalisasi berlebihan. Penjelasan historis yang terperinci tentang debat fluktuatif tentang universal dalam pemikiran skolastik disediakan oleh de Libera (1996).

Realisme skolastik melibatkan skema rumit entitas yang memediasi persepsi manusia dan pengetahuan ilahi, melampaui batas waktu dan ruang. Itu tergantung pada pembagian kerja yang kompleks antara objek, indera, intelektualitas manusia yang pasif dan aktif (yang memediasi antara indera dan konsep mental), dan penerangan ilahi (yang memberikan input dan arahan yang tidak masuk akal). Elemen-elemen ini digabungkan untuk memunculkan konsep subyektif dan obyektif (yang dibangun oleh satu individu dan yang harus dibagi oleh semua) dan ke individual dan absolut esensi (esensi dari suatu objek yang dipahami oleh seorang individu dan sebagaimana adanya dari sudut pandang ilahi). Konsep universal secara umum (misalnya, baik, biru), dan konsep matematika khususnya (angka, bentuk geometris), harus diabstraksikan dari dunia indera oleh intelek manusia dan iluminasi ilahi, dan disatukan secara obyektif melintasi pikiran yang berbeda dan contoh individu yang berbeda. oleh esensi umum mereka. Arsitektur ini memaksa karya Tuhan dan manusia ke dalam kerangka hierarkis dan tujuan Aristotelian yang rasional yang diintegrasikan dengan reifikasi Platonis tentang konsep-konsep abstrak sebagai independen dan abadi.

Nominalis bereaksi terhadap dunia rasional yang rumit dan ilahi ini dengan menghilangkan banyak pilar yang menyatukan arsitektur konseptual realis. Alih-alih abstraksi esensi dari individu yang serupa, konsep atau nama umum menjadi sarana pengelompokan individu bersama. Tidak ada konsep atau esensi universal yang menyatukan nama-nama atau kelompok-kelompok yang berbeda ini mereka adalah keterlibatan individu atau kolektif dengan dunia. Kehendak Ilahi tidak lagi terikat pada beban ontologis yang berat dari klasifikasi hierarkis dan terarah Aristotelian dan ke bentuk-bentuk kekal Platonis. Hubungan antara manusia dan Tuhan lebih sedikit bergantung pada akal dan lebih pada iman. Berfokus pada dampak budaya dari posisi ini (khususnya, posisi abad keempat belas Ockham), Sheila Delany menyarankan bahwa

"Karena Allah tidak terikat oleh hukum kodrat maupun janjinya sendiri, alam semesta menjadi sangat bergantung dan, dalam arti absolut, tidak dapat diprediksi. Baik alam, masyarakat, maupun pikiran manusia tidak harus permanen atau statis dalam strukturnya; semua terbuka untuk berubah dan pluralitas, tidak ada yang dapat sepenuhnya dipahami dengan merujuk pada skema suatu abstrak sebelumnya. (Delany 1990, 48)".

Kehendak ilahi dan manusia menjadi jauh lebih mandiri sehubungan dengan sifat dari dunia yang diciptakan. Namun, biayanya, jaminan filosofis komunikasi, representasi dunia yang benar, dan tujuan umum bisa hilang.

Menyesuaikan pembagian ini dengan trio dasar logikaisme, intuitionisme, dan formalisme awal abad ke-20 adalah rumit. Yang pertama harus membawa konseptualisme untuk menyelesaikan duo skolastik menjadi sebuah triad (karena pembagian skolastik tidak pernah sejelas yang dipresentasikan oleh presentasi kontemporer, beberapa bentuk nominalisme yang lebih moderat, yang memungkinkan pikiran untuk mengabstraksi beberapa esensi dari individu, disebut "konseptualis"). Bahkan kemudian, jika kita mempertimbangkan gambaran besar, posisi dasar awal abad kedua puluh tidak memiliki terlalu banyak kesamaan dengan debat skolastik.

Tetapi Quine fokus pada kuantifikasi sebagai bentuk komitmen ontologis, bukan pada keseluruhan konstruksi skolastik. Kuantifikasi adalah penggunaan istilah "semua". . . atau "ada. . ." dalam bahasa ilmiah kami. Bagi Quine, menggunakan istilah-istilah ini berarti kami mengakui keberadaan entitas yang mereka maksud. Jadi jika kita katakan "semua adalah bilangan. . . ," kita berkomitmen untuk keberadaan bilangan. Sekarang, jika kita membatasi perhatian kita pada kuantifikasi saja, analogi Quine bekerja sampai batas tertentu. Mari kita tinjau analogi ini.

"Logisme" Frege dan Russell menganjurkan pengurangan matematika menjadi logika dan alasan murni. Ini tampaknya merupakan proyek yang dapat dipertahankan, karena pada akhir abad ke-19 logika telah menjadi jauh lebih kaya dan ekspresif daripada yang pernah ada sebelumnya. Upaya mereka adalah untuk menyajikan angka dan entitas matematika lainnya sebagai himpunan subjek hukum logis dari beberapa himpunan teori dasar. Ahli logika, seperti yang umumnya ditafsirkan, melakukan kuantifikasi terhadap istilah-istilah abstrak seperti "himpunan" "bilangan," dan "bentuk geometris," seperti yang dilakukan realis skolastik (dengan asumsi kita dapat menolak istilah "kuantifikasi" beberapa ratus tahun ke masa lalu), dan menganggap mereka sebagai entitas nyata yang ada. Seperti yang dikatakan Bertrand Russell awal (dan kemudian ditarik kembali):

"Semua pengetahuan haruslah pengakuan, tentang rasa sakit karena menjadi khayalan belaka; Aritmatika harus ditemukan dengan cara yang sama di mana Columbus menemukan Hindia Barat, dan kami tidak lebih banyak menciptakan bilangan selain ia menciptakan orang-orang India. Bilangan 2 tidak murni mental, tetapi merupakan entitas yang dapat dipikirkan. Apa pun yang dapat dianggap telah ada, dan keberadaannya adalah prasyarat, bukan hasil, dari yang dipikirkan, karena tentu saja tidak ada dalam pikiran yang memikirkannya." (Russell 1938, bab 51, §427).

"Intuisionism" Brouwer (didahului dalam beberapa hal oleh tokoh-tokoh seperti Poincaré dan Kronecker) mempertanyakan matematika apa pun yang tidak dapat dibangun secara konstruktif dimulai dengan menghitung urutan momen (dalam kerangka temporalitas mirip Kant, yang akan dibahas pada bagian berikutnya). Dalam pandangan Brouwer, infinitas aktual tidak dapat dikandung oleh konstruksi seperti itu dan karenanya ditolak.

Bukti nonkonstruktif juga dicurigai. Misalnya, jelas bahwa salah satu dari $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ adalah dua bilangan irasional yang menghasilkan suatu pangkat rasional, atau jika pangkat keduanya ternyata tidak rasional, maka

$$(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2$$

adalah dua bilangan irasional menghasilkan pangkat rasional. Tetapi selama kita tidak dapat memutuskan alternatif mana yang berlaku, kita telah gagal membangun kekuatan rasional dari dua bilangan irasional, dan dengan demikian para intuisi radikal akan mengatakan bahwa kita belum membuktikan keberadaan dua irasional yang menghasilkan pangkat rasional. Penolakan konsep dan argumen klasik ini membutuhkan tinjauan menyeluruh dari banyak matematika klasik.

Intuisionis lebih sulit masuk ke analogi Quine. Mereka mengukur konstruksi mental berdasarkan pada intuisi elementer dari suksesi temporal (menghitung momen $1, 2, 3, \cdots$), bukan hanya atas nama umum (nominalis) atau lebih dari abstraksi esensi (realis) yang sepenuhnya baku. Karena itu orang dapat mengatakan bahwa objek intuisionis dan konseptualis ada dalam pikiran. Tetapi apa yang dimaksud "pikiran", dan bagaimana segala sesuatu menjadi ada dalam pikiran bekerja agak berbeda dalam sistem skolastik dan intuisionis. Pikiran skolastik konseptualis mengumpulkan individu di bawah konsep dengan analogi. Pikiran intuisionis membangun sendiri dengan mengikuti pengalaman internal dasar dari kemajuan waktu.

"Formalisme" Hilbert mencoba melihat matematika sebagai menganalisis kombinasi tanda mana yang dapat diperoleh ketika mengikuti aturan sintaksis yang ketat, tanpa berpura-pura memasang tanda-tanda ini ke referensi atau makna apa pun (pikirkan misalnya tentang persamaan aljabar dengan aturan untuk menyederhanakannya, tetapi tanpa memutuskan bilangan-bilangan apa yang tidak diketahui yang mungkin dinyatkan, atau jika bilangan-bilangan dinyatakan sama sekali). Tetapi dalam sistem Hilbert, bahasa formal seperti tanda dan aturan harus dianalisis dan dibandingkan di dalam beberapa sistem (bahasa meta), dan Hilbert menetapkan sistem ini sebagai inti dasar dari subjek aritmatika terbatas untuk pembatasan konstruktif dan logis yang akan menjadi sah di mata semua pihak filosofis yang terlibat.

Formalis membuat hal-hal lebih rumit untuk analogi Quine, karena artikulasi ganda wacana matematika mereka ke dalam bahasa bukti formal (tanda-tanda yang tidak berarti mengikuti aturan sintaksis) dan meta-bahasa yang berlaku terbatas, penalaran konstruktif untuk bahasa tingkat pertama.

Memang, meta-bahasa formalis mengkuantifikasi jumlah (itu menghitung tanda-tanda dan membuat klaim yang bergantung pada panjang bit teks), tetapi Poincaré dan Hilbert berselisih mengenai apakah jumlah meta-bahasa itu hanya kolektif nama-nama empiris tanda di atas kertas atau konstruksi mental matematis lengkap, terutama di mana induksi digunakan dalam bahasa meta untuk membuat pernyataan umum tentang bukti (Ewald 1996, 1021–51).

Adapun tingkat bahasa formal, di mana bukti matematis ditulis, menurut pandangan Hilbertian bahasa-bahasa ini adalah kumpulan tanda dan aturan yang dapat membuang denotasi. Ini adalah pernyataannya yang terkenal bahwa “titik”, “garis”, dan “bidang” dalam geometri Euclidean mungkin juga digantikan oleh “meja,” “kursi,” dan “cangkir bir”; yang penting hanyalah aturan bahasa (aksioma dan postulat Euclidean, serta yang Euclid gunakan secara tersirat), dan kami tidak memutuskan sebelumnya apa yang ditetapkan oleh ketentuan Euclidean. (Hilbert sebenarnya membangun berbagai jenis geometri dengan menawarkan sebutan yang berbeda untuk istilah Euclidean yang sama, sehingga membuat mereka mematuhi serangkaian aksioma yang berbeda.) Oleh karena itu, tanda-tanda bahasa formal bukanlah nama yang mengelompokkan individu-individu, seperti yang kita harapkan mengikuti Quine’s analogi antara formalis dan nominalis.

Jadi analogi antara trikotomi abad ke-20 skolastik dan awal adalah goyah di terbaik. Untuk menemukan versi modern nominalisme skolastik yang lebih memadai, kita mungkin harus mencoba John Stuart Mill, yang menyatakan itu

“Semua bilangan haruslah berupa bilangan dari sesuatu: tidak ada yang namanya bilangan dalam abstrak. Sepuluh harus berarti sepuluh tubuh, atau sepuluh suara, atau sepuluh denyut nadi. Tetapi meskipun bilangan harus berupa bilangan dari sesuatu, mereka mungkin bilangan dari apa saja.” (Mill 1843, buku II, bab 6, §2)

Ini berarti bahwa ketika kita mengatakan bahwa “$2 + 3 = 5$,” kita membuat pernyataan empiris, tetapi yang secara kolektif benar untuk apel, kursi, dan sebagainya. Karena itu, ketika Mill mengkuantifikasi jumlah, dia mengkuantifikasi, seperti nominalis skolastik dan seperti Hilbert dalam meta-language-nya dalam menangani angka-angka, lebih dari sekumpulan contoh individual.

Jika kita melanjutkan dalam waktu, dan mencoba untuk membawa analogi Quine ke realis dan nominalis kontemporer, kita mungkin menemukan analogi yang lebih substansial. Analogi ini tidak terbatas pada masalah kuantifikasi. Mereka bahkan melampaui peminjaman istilah-istilah skolastik untuk realisme dan nominalisme seperti dalam *rebus* (ada dalam empiris) dan *ante rem* (ada apriori, terlepas dari hal-hal empiris; lihat *Reck* dan *Price* 2000 untuk detailnya). Hal ini dipercaya bahwa analogi yang paling substansial antara skolastik dan filsuf matematika modern menyangkut komitmen terhadap tatanan alam versus kebebasan konsepsi.

Paragraf berikut dari Burgess dan Rosen (1997, 241) studi kritis nominalisme kontemporer dalam matematika mengatakan:

tokoh-tokoh paling modis dalam sejarah dan sosiologi dan antropologi sains tidak hanya menyangkal bahwa ada teori siap pakai di dunia, tetapi bahkan ada dunia yang sudah jadi. Mereka mempertahankan tidak hanya bahwa teori-teori tentang kehidupan dan materi dan angka adalah konstruksi dari sejarah manusia dan masyarakat dan budaya, tetapi jumlah dan materi dan kehidupan yang mereka hasilkan adalah konstruksi semacam itu [. . . dan] bahwa fakta-fakta matematika dan fisik dan biologis, yang diciptakan oleh kami ketika kami membuat teori matematika dan fisik dan biologis, tidak dapat memaksakan kendala sebelumnya tentang bagaimana kita membentuk teori-teori itu, hanya menyisakan kendala dari pihak kita yang dianggap sosial dan politik dan ekonomi daripada sisi dunia.

Drum-drum Perang Sains dapat dengan jelas didengar mengalahkan di latar belakang, dan bentuk-bentuk realisme kontemporer tampaknya masih peduli dengan risiko relativisme yang membuat kita kehilangan realitas. Mereka beberapa kali bahkan membawa nuansa keagamaan. Pandangan Mark Steiner (1998) adalah bahwa semacam desain antropomorfik diperlukan untuk membuat alam semesta sangat mudah diakses oleh matematika manusia, dan jika kita tidak setuju, maka "nominalisme, seperti ateisme, dan untuk alasan yang sama, adalah posisi filosofis yang merekomendasikan sendiri bagi banyak filsuf modern" (2001, 73). Etika tanpa Ontologi Putnam (2004) khawatir bahwa kehilangan cengkeraman realitas dalam konteks ilmu sains terkait dengan penurunan berbahaya ke dalam relativitas etis.

Seperti dalam debat realisme skolastik, apa yang dipertaruhkan bukan hanya komitmen ontologis yang diungkapkan oleh kuantifikasi, tetapi juga pengikatan alasan manusia dan ilahi dengan realitas sains (Aristotelian atau modern). Tetapi dapatkah kita juga mencocokkan dengan analogi ini aspek nominalisme abad pertengahan yang ditetapkan untuk membebaskan pikiran manusia dan akankah dari beberapa konsepsi yang telah ditentukan sebelumnya tentang dunia yang diciptakan?

Hellman (1998) dengan bercanda membaca Burgess dan Rosen sebagai menuduh nominalis Maoisme, yang mencoba untuk memicu revolusi budaya dalam matematika. Revolusi ini akan berusaha untuk mengganti bahasa matematika sains dengan bahasa lain, yang tidak dihitung atas entitas matematika. Hartry Field (1980) adalah contoh paradigmatik di sini. Pertama, Field menghasilkan bahasa fisik alternatif yang tidak melibatkan entitas matematika (berdasarkan lokasi spasial dan hubungan kualitatif yang dapat diamati). Kemudian ia menunjukkan bahwa menambahkan matematika sebagai bantuan representasional untuk bahasa fisik yang ketat ini adalah "konservatif", yaitu, tidak ada kesimpulan yang diambil dari ekspansi matematika bahasa melebihi yang dapat diambil dari bahasa fisik itu sendiri. Keuntungan dari ekstensi matematis adalah ia memfasilitasi derivasi semacam itu.

Apa yang disebut nominalisme jalan-keras (saya menyisakan nominalisme jalan-mudah untuk saat ini) dapat dibaca sebagai proyek higienis: menghapus semua bahasa matematika dari fisika, dan menunjukkan bahwa membiarkannya kembali tidak akan membuat kita melompat ke kesimpulan yang tidak beralasan. Proyek ini memastikan cengkeraman kita pada kenyataan dengan mengesampingkan segala cara pintas matematis yang melibatkan entitas yang tidak nyata dan tidak bergantung. Proyek semacam ini diterima oleh Burgess dan Rosen, serta Quine, sebagai cara untuk mencari tahu apa yang perlu dan apa yang bergantung pada cara kita berteori tentang dunia. Bagi Burgess dan Rosen, ini adalah "cara menggambarkan seperti apa sains kecerdasan alien" (1997, 243), sedangkan Quine mengundang kita untuk "melihat bagaimana, atau sampai taraf apa, sains alam dapat dibuat independen dari platonistik [di sini, realis] matematika; tetapi marilah kita juga mengejar matematika dan mempelajari dasar-dasar platonisnya" (1948, 38).

Dengan membaca nominalisme kontemporer ini, kita dapat kembali ke paruh pertama abad kedua puluh untuk mengikat logika nominalis baru abad keempat belas dan filsafat matematika nominalis kontemporer. Tautan kami adalah positivisme logis, sebuah proyek yang berusaha memisahkan klaim empiris dari klaim analitik (yang terakhir benar berdasarkan definisi dan konsekuensi logis). Pernyataan matematika dengan demikian dibagi menjadi dua jenis: untuk mengamati dengan menghitung bahwa 3 apel dan 2 pir menghasilkan 5 buah adalah pengamatan empiris; untuk mengklaim bahwa $3 + 2 = 5$ berdasarkan pada definisi angka dan aturan yang terkait adalah murni klaim matematika analitik. Prinsip toleransi Carnap menuntut agar semua pendekatan analitik diberi kesempatan yang sama untuk memajukan sains. Mereka yang bekerja dengan baik dengan sains empiris harus dipertahankan, dan mereka yang tidak dapat dibuang.

Formalisme Hilbert juga dapat dibaca dengan nada yang sama. Penalaran konstruktif finansial (menjawab pertanyaan seperti "Apakah formula ini mengikuti dari itu sesuai dengan aturan yang diberikan?"), Yang berkuasa atas manipulasi tanda di atas kertas, adalah aktivitas yang melekat secara fisik, dan karenanya merupakan bagian dari dunia nyata (pikirkan juga verifikasi berbasis komputer yang membuang transendensi yang konon masuk akal manusia). Bahasa matematika apa pun yang memperluas logika ini dan dapat diekspresikan dalam string terbatas hingga mengikuti aturan derivasi yang dapat diverifikasi akan diterima dalam matematika formalis terlepas dari apa (dan jika) yang dimaksudkan untuk diwakilinya. Satu-satunya kualifikasi Hilbert adalah bahwa penambahan baru tidak akan membawa kita pada kesimpulan yang salah tentang aritmatika konstruktif terbatas yang telah kita mulai. Hilbert berharap bahwa bentuk konservatisme ini akan dapat dibuktikan dengan menggunakan logika konstruktif yang bersifat metamatematikal.

Seperti nominalisme abad pertengahan, bentuk-bentuk nominalisme matematika modern ini (jalan yang keras, positivisme logis, formalisme) mempromosikan kebebasan konseptual dan linguistik sambil menarik garis jelas yang memisahkan kebebasan ini dari fakta fisik yang keras. Nominalisme kontemporer, bagaimanapun, tidak dapat bergantung pada iman abad pertengahan, dan mencoba untuk membuktikan bahwa kebebasan untuk berpikir ini tidak menghasilkan klaim palsu mengenai dunia yang sebenarnya. Tetapi tidak satu pun dari bentuk nominalisme kontemporer ini yang secara umum diterima sebagai upaya yang berhasil. Jadi, banyak filsuf masih percaya bahwa hanya realisme holistik di mana semua istilah merujuk pada entitas (fisik atau ideal) yang ada dapat melindungi kita dari keanehan siswa sekolah yang nakal dan sosiolog yang modis.

Tapi ingat di sini sketsa matematika dari pendahuluan. Kami melihat bahwa formula Black-Scholes bernilai bahkan ketika itu menyimpang dari jalur empiris, bahkan ketika itu memungkinkan kita untuk menarik kesimpulan empiris yang salah atau tidak memiliki padanan empiris yang jelas. Akan tetapi, ini tidak membuat rumus itu arbitrer atau tidak berarti ini justru berguna karena para praktisi berhasil memberikannya makna dan membuatnya relevan untuk dunia perdagangan yang sebenarnya.

6.2 Sejarah 2: Matriks Kantian, yang Memberikan Matematika Posisi Epistemologis Antara Konstitutif

Mengikuti gema pemikiran skolastik nominalis, tokoh-tokoh Prancis menunjuk ke celah antara matematika nyata dan padanan abstraknya. Condillac, misalnya, menemukan bahwa bilangan dimulai dari representasi konkret objek dengan jari dan sebagainya, tetapi kemudian, ketika bilangan diabstraksikan, mereka kehilangan pijakan pada objek dan dianggap "dalam nama-nama yang telah menjadi tanda-tanda bilangan" (Condillac, *Langue des Calculs*, dikutip dalam Schubring 2005, 260). Lainnya, seperti d'Alembert, bersikeras bahwa kesenjangan antara matematika riil dan nominal harus dapat dijembatani:

"Kami tiba melalui generalisasi terus-menerus dari ide-ide kami di bagian utama matematika. . . . [Tapi kemudian matematika] menelusuri kembali langkah-langkahnya, menyusun kembali persepsinya sendiri, dan, sedikit demi sedikit dan demi sedikit, menghasilkan dari mereka makhluk konkret yang merupakan objek langsung dan langsung dari sensasi kita." (dAlembert 1995, 20-21).

Kontribusi penting Kant terhadap filosofi matematika (berdebat tidak secara langsung dengan tokoh-tokoh Prancis, tetapi dengan tradisi kembali ke rasionalis Descartes dan empiricist Hume) adalah untuk merevisi konsepsi sezamannya tentang kesenjangan antara pandangan empiris dan rasionalis dengan menempatkan matematika dalam suatu posisi perantara. Manuver ini diorganisir dengan menggunakan matriks Kantian.

Matriks ini mengklasifikasikan penilaian atau pernyataan (ada perbedaan di sini) menurut dua sumbu: analitik/sintetik dan apriori/posteriori.

- Pernyataaa adalah "analitik" jika predikat (atau apa yang diklaim) adalah bagian dari subjek-konsep (atau yang diklaim). Bahwa segitiga memiliki tiga sisi adalah analitik, karena memiliki tiga sisi terkandung dalam definisi segitiga.

- Pernyataan adalah "sintetis" jika predikat menambahkan sesuatu pada apa yang sudah terkandung dalam konsep subjek. Untuk mengklaim bahwa beberapa segitiga memiliki sisi yang panjangnya 10 inci adalah sintetis, karena tidak mengikuti dari konsep segitiga. (Ada masalah dengan apa artinya predikat dimasukkan dengan benar dalam sebuah konsep. Apakah predikat tersebut harus dimasukkan secara literal, atau dapatkah itu diturunkan dari konsep dengan alasan logis? Bagi Kant, ini bukan masalah besar, karena apa yang dianggap sebagai derivasi logis pada waktu itu, berdasarkan silogisme Aristotelian, memiliki jangkauan yang sangat terbatas. Tetapi ketika logika fungsi, hubungan, dan kelas berevolusi, masalah menjadi lebih relevan.)

- Pernyataan adalah "apriori" jika tidak membutuhkan pengalaman empiris untuk dibuat. Misalnya, untuk mengetahui bahwa segala sesuatu identik dengan dirinya sendiri, setidaknya menurut Kant, tidak diperlukan pengalaman.

- Pernytaan adalah "posteriori" jika didasarkan pada pengalaman empiris. Untuk menegaskan bahwa matahari bersinar sekarang tergantung pada pengamatan saya terhadap langit, atau pengamatan lain yang kurang langsung.

Orang mungkin berharap sumbu priori/posteriori dan analitik/sintetik menjadi tumpang tindih. Memang, jika pernyataan tidak bergantung pada pengalaman, maka kami berharap kebenarannya akan mengikuti definisi dan logika, dan sebaliknya. Tapi Kant menemukan pengecualian. Sementara ia berpikir bahwa pernyataan analitik a posteriori tidak mungkin (jika predikat dimasukkan dalam konsep, tidak perlu menggunakan pengalaman), ia menemukan bahwa pernyataan priori sintetik adalah tipikal matematika.

Sebagai contoh, perhatikan pernyataan bahwa jumlah sudut dalam suatu segitiga adalah jumlah dua sudut pelurus. Bukti Euclidean membutuhkan konstruksi: gambar ruas garis paralel ke salah satu sisi melalui titik berlawanan. Konstruksi ini bukan bagian dari konsep segitiga, tetapi perlu untuk membangun pernyataan. Pernyataan bahwa jumlah sudut adalah dua sudut pelurus karena itu melebihi konsep segitiga. Itu sintetis.

Di sisi lain, tidak ada pengalaman empiris eksternal diperlukan untuk bukti Euclidean. Seseorang dapat berjalan melalui buktinya dengan mata tertutup di tangki perampasan sensorik. Oleh karena itu, pernyataan sintetik ini bersifat apriori. Dengan demikian, priori sintetik adalah ranah pengetahuan yang tidak bergantung pada pengamatan eksternal, tetapi masih lebih kaya daripada logika murni. Ini mencakup bentuk-bentuk murni ruang dan waktu pada permukaan yang terjadi penalaran matematis. Pengalaman priori dari ranah ini diistilahkan oleh Kant "intuisi murni" (dan tidak ada hubungannya dengan penggunaan istilah "intuisi" karena semacam firasat yang tidak jelas, ini adalah intuisi yang tidak masuk akal di mana intuisi melakukan konstruksi mereka) .

Sebagian besar filosofi matematika selanjutnya dapat dibaca sebagai reaksi terhadap pembagian kerja antara logika analitik priori alasan, pengamatan empirik sintetik posteriori sintetik, dan sintesis Kant di tengah jalan apriori. Titik di sini menyangkut tempat matematika dalam tatanan pengetahuan yang lebih besar: apakah itu jalan tengah yang dibedakan, perlu, dan formatif, atau apakah dapat direduksi menjadi alasan atau observasi empiris?

Langkah pertama dalam evolusi ide-ide pasca-Kantian adalah bertanya apakah, bahkan jika kita menerima arsitektur Kant, semua matematika adalah priori sintetik. Bahkan penerus terdekat Kant yang paling setia menunjukkan bahwa beberapa matematika tetap analitik. Disini tidak dirujuk untuk pernyataan analitik yang jelas seperti "segitiga adalah segitiga" atau "segitiga memiliki tiga sisi," tetapi untuk klaim yang melibatkan takhingga dan infinitesimal. Sumber di sini dari filsuf Kant, Jakob Friedrich Fries (1773–1843).

Menurut Fries, ada dua jenis infinitas. Yang pertama cocok dengan sintetis Kantian priori. Ini adalah yang tak terbatas sebagai "tidak terbatas." Ini mengikuti solusi Kant terhadap antinomi dari alasan murni: pengalaman apriori ruang kita yang sintetis menunjukkan kepada kita bahwa kita selalu dapat melangkah lebih jauh ke arah mana pun, tetapi dengan demikian kita tidak dapat mengalami atau menyimpulkan ketidakterbatasan lengkap dari apa pun dunia. Oleh karena itu proses kenaikan atau pengurangan yang tidak terbatas merupakan versi priori tak terbatas dari sintetis, dan diterima dalam pandangan dunia matematika Kantian. Ini diungkapkan, misalnya, dalam deret tak terbatas konvergen dan pengertian dari limit.

Tetapi akal itu sendiri dapat muncul dengan konsep infinitas lengkap atau infinitesimal, seperti yang disaksikan oleh banyak matematikawan yang memohon infinitas semacam itu sebelum Kant. Sekarang Kant berpendapat bahwa pikiran tanpa konten (yaitu, tanpa pengalaman murni atau empiris) kosong. Konsepnya mungkin sudah ada, tetapi tidak akan memiliki rekanan nyata dan tidak akan memiliki tujuan ilmiah.

Fries, yang dipengaruhi oleh ahli matematika Carl Friedrich Hindenburg, berusaha mencari tempat untuk infinitas lengkap karena alasan. Jadi dia membedakan antara operasi sintaksis (kombinasi tanda-tanda yang mengikuti aturan taktentu (sembarang)) dan operasi aritmatika (operasi yang berhubungan dengan besaran dalam kerangka sintetis priori Kant). Yang pertama tergantung pada tatanan kombinatorial, dan yang terakhir pada aksioma klasik besarnya dan rasio. Karena itu, pendekatan sintaksis tidak tergantung pada pendekatan aritmatika (Fries 1822, 68).

Karena pengecualian Kantian ketaberhinggan lengkap dari intuisi, operasi dengan ketakberhinggan lengkap dan *infinitesimal* dianggap sebagai sintaksis ketat (Fries 1822, 280, 294). Operasi matematika dengan infinitas, seperti yang dilakukan oleh matematikawan seperti Wallis, Euler, dan Fontenelle (Boyer 1959), tidak ada hubungannya dengan pengalaman empiris, dan kemudian turun ke permainan alasan. Setiap klaim yang layak secara empiris yang melibatkan infinitas lengkap dalam dunia spatio-temporal dengan besaran yang terukur harus dikurangi menjadi ekspresi kenaikan atau penurunan yang tidak terbatas.

Poin penting di sini adalah bahwa orang mengakui bentuk matematika yang analitik dan priori, tergantung pada konsep alasan kosong yang tidak memiliki intuisi murni atau empiris yang sesuai di luar artikulasi mereka dalam tanda-tanda. Menurut Fries, ini adalah bagian dari imajinasi kreatif akal. Hanya karena mereka analitik dan priori, tidak berarti mereka nyata.

Sekarang pendekatan ini tidak memuaskan bagi para filsuf terkemuka abad kesembilan belas. Meninggalkan alasan untuk melayang tidak relevan di tanah belakang sepertinya tidak tepat. Sebagian besar idealisme Jerman adalah tentang mengidentifikasi alasan dengan keberadaan (Schelling; lihat pada pembahasan selanjutnya) atau bahkan mengklaim bahwa itu sesuai dengan rencana teleologis (Hegel).

Tren ini tidak hilang dengan idealisme Jerman, tetapi tidak mengambil bentuk boros. Pada saat Gottlob Frege (1848-1925), dan sebagian karena upayanya sendiri, logika dapat dibuat cukup kaya untuk menggambarkan berbagai macam struktur dan derivasi aritmatika, sehingga Frege berusaha menggambar aritmatika (jika tidak semua matematika) kembali ke analitik priori. Tetapi ini tidak berarti bahwa matematika adalah isapan jempol dari imajinasi atau permainan akal. Bagi Frege, matematika itu nyata:

"Pikiran yang telah kami ungkapkan dalam teorema Pythagoras adalah abadi, benar terlepas dari apakah seseorang menganggapnya benar. Tidak perlu pemilik. Itu tidak benar hanya sejak saat ditemukan; seperti halnya planet, bahkan sebelum orang melihatnya, berinteraksi dengan planet lain." (Frege 1984, 363).

Pembahasan tidak akan masuk ke diskusi rumit tentang sifat tepat dari realisme yang seharusnya Frege. Intinya adalah bahwa Frege tidak mengizinkan matematika untuk terikat pada segala bentuk pengalaman, bahkan fondasi yang tidak diperlukan untuk semua pengalaman manusia seperti sintetik priori Kant. Logika ingin mendorong matematika kembali ke ranah analitik a priori, tanpa dengan demikian menyerahkan statusnya sebagai kebenaran objektif tentang dunia.

Cabang lain dalam evolusi ide-ide Kantian adalah intuisionisme, merujuk pada intuisi murni Kant, pengalaman ruang dan waktu yang mendahului pengamatan empiris. Matematikawan seperti Poincaré dan Brouwer berusaha mempertahankan status matematika sebagai "di antara" yang dibedakan. Bagi Brouwer ini berarti bahwa alasan ketidakterbatasan lengkap harus dilepaskan. Urutan bilangan bulat yang tidak terbatas harus dijaga, tetapi ketidakterbatasan yang lebih tinggi harus dikecualikan, bahkan dengan biaya revisi besar-besaran matematika dari kontinum bilangan real.

Sekitar waktu yang sama, Hermann Cohen dan Ernst Cassirer lebih suka mengikuti Kant dengan mengikuti sesuatu seperti sintetis priori, tetapi memilih untuk memperkaya itu, daripada menyerah pada analisis takhingga yang lebih tinggi. Untuk mempertahankan posisi perantara matematika yang dibedakan serta kekayaannya, Cohen (1883; lihat bab 7) menganggap sangat kecil sebagai dasar sintesis matematika yang dibedakan; Cassirer (1910) memilih gagasan modern tentang fungsi dan hubungan, menjadikan fokus pada "objek" matematika menjadi usang. Tetapi inovasi yang paling menarik dari Cohen dan Cassirer adalah historisitas dan kontingensi yang mereka perkenalkan ke dalam jalan tengah sintesis. Jalan tengah ini tidak lagi menjadi fondasi pengetahuan manusia untuk disimpulkan dengan memecahkan paradoks yang tampak. Apa yang berfungsi sebagai latar belakang priori sintetik terhadap penalaran kita adalah perantara yang terbentuk secara historis dan budaya antara akal dan realitas satu cara yang mungkin untuk menemukan pandangan dunia manusia.

Formalisme Hilbert, di sisi lain, tampaknya paling setia pada artikulasi aritmatika versus sintaks Fries. Meta-bahasa Hilbert adalah matematika minimal yang dimaksudkan untuk menghormati tuntutan intuisionis, logis, dan mereka yang ingin mengurangi matematika menjadi abstraksi nominalis dari penghitungan terbatas empiris. (Saya tidak berpikir dia terlalu tertarik untuk menghormati sintetis Kantian priori, karena dia tertarik untuk memulai dari sebuah yayasan yang tidak akan dipertanyakan oleh siapa pun di lingkungan filosofisnya.) Sisa matematika tidak boleh ditolak; itu harus ditegakkan sebagai sintaksis murni. Namun, untuk memastikan bahwa elaborasi matematika murni sintaksis yang kami perkenalkan ke dalam alasan kami tidak mengguncang konsensual, konsistensi harus dijamin, dan harus dibuktikan dengan cara yang tersedia dalam inti konsensual ini. Teorema ketidaklengkapan kedua Gödel menghancurkan harapan ini.

Untuk mengaitkan hal-hal dengan bagian sebelumnya, perhatikan bahwa positivisme logis berusaha untuk menghilangkan posisi matematika di antara keduanya. Itu hanya memungkinkan pernyataan empiris sintetik posteriori, dan analitik priori yang logis. Biaya itu, seperti yang dijelaskan sebelumnya, untuk membagi klaim matematika menjadi dua aspek: aspek deskriptif empiris dan satu sintaksis formal. Mengikuti tradisi ini, realisme kontemporer dan nominalisme tidak menerima dualisme ini; mereka menuntut kita memilih pihak.

Sejarah pertama kami mengangkat ketegangan antara pemahaman matematika sebagai komitmen terhadap tatanan alam dan pandangannya sebagai bebas secara konseptual. Sejarah saat ini menunjukkan ketegangan antara menempatkan matematika dalam posisi dasar perantara yang menonjol versus penyerapannya ke dalam dunia yang tertata secara alami dan/atau ke dalam pemikiran bebas. Pertanyaan mendasarnya adalah apakah matematika itu begitu istimewa dan mendasar sehingga ia pantas memiliki domain ontologis-epistemologisnya sendiri.

Kembali ke sketsa yang telah dibahas, terlihat bahwa formula Black-Scholes tidak sepenuhnya deskriptif, juga bukan konstruksi bebas yang sewenang-wenang. Namun, ini hampir tidak dapat digambarkan sebagai milik sebuah yayasan priori terkemuka atau kebenaran yang diperlukan. Catatan praktik matematika harus menemukan artikulasi yang berbeda untuk menjelaskan kekuatannya.

6.3 Sejarah 3: Pembatasan Monster, Penjinakan Monster, dan Hidup dengan Monster Matematika

Dibahas dulu istilah *infinitesimal*, sebab istila ini penting dan sering digunakan dalam pembahasan. Namum terlebih dahulu diberikan suatu sifat yang berkaitan dengan bilangan real.

Sifat 1 : Misalkan $x \in \mathbb{R}$, maka

1. $x \leq 0$ bila dan hanya bila $x < \varepsilon$ untuk semua $\varepsilon > 0$.
2. $x \geq 0$ bila dan hanya bila $x > -\varepsilon$ untuk semua $\varepsilon > 0$.
3. $x = 0$ bila dan hanya bila $|x| < \varepsilon$ untuk semua $\varepsilon > 0$.

Sifat 1, tidak hanya berguna secara teknis, tetapi juga memiliki konsekuensi yang sangat filosofis. Dalam pengembangan awal kalkulus, sebelum konsep modern tentang limit dikembangkan, gagasan "*infinitesimal*" digunakan, di mana infinitesimal adalah semacam bilangan yang "sangat kecil," yang berarti bilangan bukan nol yang memiliki nilai absolut lebih kecil dari setiap bilangan real (secara teknis, bilangan nol juga dianggap sangat kecil, meskipun hanya bilangan kecil yang berguna). Meskipun infinitesimal secara konseptual penting dalam pengembangan awal kalkulus, Sifat 1 menyiratkan bahwa tidak ada infinitesimal bukan-nol di antara bilangan real, dan dengan demikian perawatan modern standar analisis real (seperti kita) tidak menggunakan infinitesimal. (Infinitesimal sebenarnya dapat dikembangkan dengan ketat, tetapi tidak sebagai bilangan yang dimasukkan dalam himpunan bilangan real; melainkan dianggap sebagai bagian dari himpunan yang lebih besar yang berisi bilangan real, infinitesimal dan bilangan yang tak terhingga besar. Pembahasan yang lebih mendalam mengenai infinitesimal bisa dicak pada pemebahasan kalkulus infnitesimal atau beberapa referensi lain yang terkait.

Titik awal kami di sini adalah larangan Aristoteles terhadap metabasis *eis allo genos* transfer pertimbangan antara berbagai jenis entitas. "Kita tidak bisa menunjukkan dari satu gen ke gen. Kami tidak dapat, misalnya, membuktikan kebenaran geometri dengan aritmatika" (*Posterior Analytics* I.7 75a38-39, G.R.G. terjemahan Mure). Menurut Aristoteles, ada geometri berurusan dengan garis kontinu, dan ada aritmatika berurusan dengan bilangan diskrit, dan kita tidak boleh mencampur keduanya bersama-sama atau hal-hal buruk mungkin terjadi. Banyak sejarah matematika dan fisika selanjutnya sering dibaca sebagai kisah yang secara bertahap menjembatani kesenjangan menuju ilmu matematika terpadu.

Tapi ini narasi yang bermasalah. Jelas bahwa pengukuran spasial dan enumerasi telah berkembang bersama. Ketika seseorang mengukur tanah atau kain untuk pajak atau perdagangan, ia menggunakan bilangan. Ketika salah satu alasan tentang bilangan, organisasi spasial (*bilangan segitiga* (suatu bilangan disebut segitiga ketika berapa titik atau objek jika dapat disusun membentuk segitiga sama sisi : $1, 3, 6, \cdots$), bilangan kuadrat : $1, 4, 9, \cdots$, *bilangan persegi-panjang* : $2, 6, 12, \cdots$) memainkan peran penting. Geometri dan aritmatika tumbuh bersama, dan kemudian dipaksa terpisah oleh para sarjana alis kuno.

Narasi yang diterima mengatakan bahwa orang Pythagoras (Hyppasus) menemukan bahwa beberapa rasio antara garis (seperti sisi dan diagonal persegi) adalah “tidak dapat dibandingkan” yaitu, rasio mereka tidak dapat dinyatakan sebagai rasio antara bilangan bulat. Reaksi terhadap krisis ini adalah pemborosan berlebihan yang ditangkap dalam larangan Aristoteles: singkirkan semua aritmatika dari wacana geometris. Alih-alih menyatakan bahwa ketika beberapa garis diberi nilai numerik, yang lain mungkin dapat diekspresikan secara numerik hanya dengan perkiraan (yang merupakan hal praktis untuk dilakukan), geometri Yunani klasik secara lengkap disusun kembali tanpa mengacu pada bilangan. Monster yang tidak dapat dibandingkan atau tidak rasional itu dihalangi dari aritmatika dengan mengurungnya dalam bidang geometri.

Tetapi bahkan di Yunani klasik, orang-orang praktis melanjutkan bisnis harian pencampuran geometri dan aritmatika (Asper 2008). Itu hanya elit kecil yang berlatih geometri murni. Elit ini membentuk jaringan pemain terdistribusi yang menulis dalam bahasa rahasia praktis dalam arti sandi, tetapi dalam arti leksikon, sintaksis, dan logika yang sangat terkodifikasi yang tidak dapat ditiru tanpa inisiasi yang tepat (Netz 1999; Latour 2008) . Menjadi bahasa esoteris yang dikuasai oleh minoritas elit tentu saja membantu geometri dihormati di akademi Plato sebagai pintu gerbang ke beberapa kebenaran yang lebih tinggi di luar jangkauan surveyor tanah dan akuntan. Pendekatan ilmiah ini melarang tidak hanya monster bilangan irasional tetapi juga praktik-praktik rakyat jelata yang tidak adil, tidak konsisten, dan tidak tepat.

Namun, tak lama kemudian, monster-monster merayap naik lagi (dari Timur!). Matematika dari Asia Selatan dan Barat digabungkan dan membawa bilangan irasional akar kuadrat diperlakukan sebagai bilangan daripada sebagai besaran geometris bagi ahli waris Arab dari ilmu Yunani klasik. Ketika entitas aljabar mengerikan tumbuh lebih umum dan berguna, mereka harus diintegrasikan, bukan dilarang (dibatasi).

Ini adalah proyek yang dimulai dengan beberapa aljabar Arab tertua yang masih ada (al-Khwarizmi dan abu Kamil), yang memberikan representasi Euclidean dan bukti untuk algoritma penyelesaian persamaan kuadratik (Rashed 1994). Di Renaissance Italia, aljabar tumbuh lebih liar dan memungkinkan entitas yang lebih dicurigai, seperti pengurangan jumlah yang lebih besar dari yang lebih kecil dan akar hasil mereka. Lambang upaya geometri aljabar Italia, termasuk monster seperti akar bilangan negatif, adalah milik Aljabar Bombelli. Itu segera digantikan oleh metode analitik Cartesian di ambang modernitas awal.

Kita melihat di sini bahwa matematika praktis jamak, yang hidup dengan monster, dan matematika ilmiah terkodifikasi, yang berupaya menghalangi monster, memiliki alternatif ketiga. Kami akan menyebutnya penjinakan monster: terjemahan entitas baru dan tersangka ke dalam bahasa yayasan yang didirikan. Ketegangan antara tiga strategi adalah salah satu yang terus terlibat dengan matematika sepanjang masa depannya.

Dengan dimulainya sains modern awal, monster baru mengangkat kepalanya: sangat kecil. Takhingga (infinitas) dan ketakberhinggan (infinitesimals) menjadi elemen konstitutif dari proto-kalkulus dan kalkulus. Para Jesuit, Thomas Hobbes, dan George Berkeley semua berjuang untuk mengusir mereka dari matematika karena sifat hibrida yang berbahaya dan inkonsistensi (Alexander 2014; Berkeley 1734). Diobservasi dan dikte otoritas menjadi satu-satunya dasar untuk matematika. Ketidakberhinggan harus dilarang (dibatasi).

Matematikawan lain, seperti Euler, senang bermain dengan monster itu. Mereka tahu itu melibatkan kontradiksi, tetapi mereka tetap terlibat dengan itu (Jahnke 2003). Ini tidak berarti bahwa mereka senang dengan ketidakkonsistenan. Bahkan, ketika Euler menghitung jumlah deret divergen $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n!$, ia merasa nyaman dengan hasilnya tepat karena ia diterima secara konsisten dalam beberapa cara yang berbeda (Sandifer 2007, bab 31). Kontradiksi tidak diterima, tetapi mereka dihindari dengan memilih metode dalam konteks, bukan dengan mendalilkan aturan priori.

Pendekatan ketiga, yaitu penjinakan monster, juga dieksplorasi pada saat itu. Beberapa yang paling awal untuk menggunakan argumen *infinitarian* (misalnya, Fermat, Newton, MacLaurin) baik berpendapat untuk kemungkinan, atau benar-benar dipraktikkan, pengurangan argumen sangat kecil untuk bukti dengan kontradiksi mengikuti metode Archimedean yang melelahkan. Alih-alih menggunakan infinitesimal untuk menghitung luas bentuk lengkung, mereka menggunakan peningkatan pendekatan bujursangkar untuk menunjukkan bahwa nilai apa pun yang lebih rendah (atau masing-masing, lebih tinggi) daripada luas yang dihitung hasilnya melebihi luas bentuk aslinya (masing-masing, melebihi luas bentuk bujursangkar yang mengelilingi bentuk aslinya).

Kemudian, Carnot (1813; lihat juga Schubring 2005) menawarkan seluruh katalog upaya untuk menginterpretasikan ulang infinitesimal dengan menggunakan entitas matematika yang sudah mapan. Upaya-upaya ini bermuara pada metode yang melelahkan dari paragraf sebelumnya, limit rasio dari jumlah yang secara drastis cepat dicapai (berdasarkan rasio pertama dan terakhir Newton), dan dua metode aljabar: Identifikasi derivatif Lagrange dengan koefisien dalam deret pangkat sebagai pengganti dari rasio differensial infinitisimal, dan upaya awal untuk melihat infinitesimal sebagai variabel korektif independen. Daripada memilih, Carnot menganjurkan pendekatan pluralistik. Menjinakkan monster dengan terjemahan tidak harus berarti terjemahan yang unik. Bahkan Cauchy, yang biasanya memahami dengan mereduksi infinitesimals menjadi limit, paling meyakinkan dibaca sebagai pemogokan kompromi antara limit dan infinitesimal (Schubring 2005).

Tetapi kompromi-kompromi jamak ini tidak bertahan lama, dan pada akhir abad kesembilan belas infinitesimal direduksi menjadi barisan bilangan yang "*menghilang/semakin sangat mengecil* (vanishing numbers)". Perhatikan sentuhan mendasar di sini: karena geometri, dengan varietas non-Euclidean dan projektif yang baru, kehilangan stabilitas kuno, aritmatika menjadi kandidat utama untuk penjinakan monster. Proyek aritmetisasi mulai dari Bolzano ke Weierstrass dan Dedekind memuncak dalam upaya untuk mengurangi semua matematika ke urutan bilangan asli dan himpunan bagiannya.

Tetapi infinitesimals yang dijinakkan dan irasionalitas aritmatika memunculkan monster baru, yang pada gilirannya memicu pemberontakan melawan monster. Monster-monster itu adalah himpunan Cantor yang tak terbatas dan paradoksnya, diikat bersama dengan fungsi yang sangat nonanalitik (fungsi kontinu tanpa turunan, *kurva pengisian ruang* (space filling curves), dan sebagainya). Poincaré memprotes: "Dahulu ketika sebuah fungsi baru ditemukan, itu mengingat beberapa tujuan praktis. Saat ini mereka diciptakan dengan sengaja untuk menunjukkan alasan nenek moyang kita bersalah, dan kita tidak akan pernah mendapatkan lebih dari itu" (1914, 125).

Upaya paling terkenal untuk mencegah monster-monster ini adalah intuisionisme Brouwer. Ini mengurangi matematika ke inti yang konstruktif, tidak termasuk hukum infinitas menengah dan lengkap yang dikecualikan. Karya Lebesgue, Borel, dan Baire tentang teori himpunan deskriptif telah mengikuti jalur terkait. Menurut pendekatan ini, himpunan bilangan tidak dapat dipercaya kecuali mereka termasuk dalam hierarki yang dapat dikontrol dari konstruksi yang semakin kompleks (Cavaillès 1994). Diskusi mengenai konstrabilitas mengubah *aksioma pilihan* (the axiom of choice) (dengan kata lain, secara kasar, bahwa saya dapat secara bersamaan memilih satu elemen dari setiap himpunan dalam kumpulan/koleksi himpunan yang tak terbatas) dari sesuatu yang terlalu jelas untuk bahkan diperhatikan menjadi aksioma independen yang dipertanyakan. Tetapi usaha-usaha melawan monster ini terbukti terlalu membatasi atau mengerikan dalam cara mereka sendiri.

Formalisme Hilbert menawarkan bentuk baru penjinakan monster. Dalam arsitekturnya, monster dapat berkeliaran bebas, selama habitat matematisnya dapat di aksioma dengan cara yang bebas dari kontradiksi. Kita tidak perlu memilih antara matematika dengan atau tanpa batas, dengan atau tanpa aksioma pilihan, dengan atau tanpa set yang tidak dapat dibangun. Setiap jenis teori dapat dikembangkan secara independen berdasarkan aksioma konsistennya sendiri dan tanpa konflik dengan teori-teori alternatif. Tetapi kita tidak harus melompat pada kesimpulan bahwa penjinakan monster Hilbert telah menang atas pembatasan monster konstruktivis. Semakin banyak ahli matematika tertarik pada versi konstruktif dari teori yang ada bukan karena masalah ontologis, tetapi karena aplikasi algoritmik.

Tampaknya matematika modern tidak akan tahan untuk hidup dengan monster liar. Tapi ini bukan masalahnya. Beberapa matematikawan yang tertarik pada dasar-dasar teori kategori dan teori himpunan khawatir bahwa konjungsi mereka tidak memiliki landasan aksiomatik yang diartikulasikan dengan baik dan konsisten (meskipun ini bukan posisi yang didukung secara universal). Seperti yang dikatakan Pierre Cartier dalam sebuah wawancara:

"Saat ini, salah satu poin paling menarik dalam matematika adalah bahwa, meskipun semua penalaran kategoris secara formal bertentangan, kami menggunakannya dan kami tidak pernah membuat kesalahan. . . . Sebuah revolusi yayasan yang mirip dengan apa yang dilakukan Cauchy dan Weierstrass untuk analisis masih akan tiba" (Fresan 2009, 33; lihat juga abstrak dalam Krömer et al. 2009, 472-74).

Namun Cartier masih mengklaim di sini bahwa kontradiksi harus diselesaikan. Ini tidak sejelas kedengarannya. Mengenai kontradiksi yang ditemukan Russell dalam teori himpunan Frege, Wittgenstein menyatakan:

"Jika Anda mendasarkan sesuatu pada sistem ini, saya tidak melihat bahwa itu akan merugikan jika ada kontradiksi di dalamnya, selama kontradiksi ini tidak digunakan sebagai jalan atau sirkus [sehingga memungkinkan untuk mendapatkan pernyataan apa pun] . . . . Satu-satunya poin adalah: bagaimana menghindari kontradiksi yang tanpa disadari" (1976, 227).

Sementara Turing bereaksi negatif terhadap pernyataan ini, para logika yang konsisten (yang memungkinkan kontradiksi tanpa runtuh menjadi sepele dengan menolak kebenaran dari beberapa implikasi dengan premis yang salah) tepat sejalan dengan saran Wittgenstein tentang menjinakkan kontradiksi.

Penting untuk disebutkan di sini Imre Lakatos, yang mengembangkan konsepsi dialektis yang indah tentang praktik matematika berdasarkan pada pengelolaan perjumpaan dengan monster (istilahnya sendiri) dalam *Proofs and Refutations* (1976). Menurut dialektika ini, klaim matematis dibuat dan dibenarkan. Kemudian "monster", contoh sejauh ini yang tidak terpikirkan mengguncang generalisasi klaim. Klaim tersebut kemudian dirumuskan ulang agar sesuai dengan dampak konseptual dari contoh baru dengan berbagai strategi.

Narasi ketiga ini membahas ketegangan historis antara tiga pendekatan meta-matematika: pembatasan monster(*monster barring*) (tidak termasuk entitas bermasalah atau kontradiktif dari matematika); penjinakan monster (menerjemahkan entitas-entitas ini ke dalam matematika yang lebih dapat diterima); dan hidup dengan monster (mengakui kontradiksi dan menghindarinya dengan pengalaman pragmatis). Filsafat matematika yang dominan biasanya tidak melibatkan masalah ini. Mereka cenderung berasumsi bahwa monster telah dilarang atau dijinakkan (pengecualian yang sangat menantang adalah Colyvan 2010).

Tapi monster itu berbahaya. Model probabilistik mengerikan diabaikan oleh formula Black-Scholes (harga tidak kontinu, distribusi dengan momen tak terbatas) kembali dengan sepenuh hati. Menurut beberapa analis, itu karena kehadiran mereka sendiri bahwa formula penetapan harga opsi gagal dan menyebabkan crash pasar (apa yang disebut angsa hitam Nassim Taleb). Sekarang interpretasi ini harus diambil dengan sebutir (atau lebih tepatnya segenggam) garam. Memang, pasar telah hancur selama berabad-abad, jauh sebelum Black-Scholes muncul. Tetapi mencoba berpura-pura sebagai model penetapan harga monster mungkin telah berkontribusi pada keadaan struktural spesifik dari benturan paling baru. Menutup pintu monster meninggalkan jendela terbuka lebar bagi mereka untuk merangkak kembali. . .

6.4 Sejarah 4: Otoritas, atau Siapa yang Memutuskan Untuk Menentukan Tentang Matematika

Mari kita kembali ke awal narasi sejarah terakhir. Kita ikuti klaim Netz bahwa penciptaan bahasa elitis yang dikodifikasikan membantu melimpahkan aura matematika Yunani yang elitis akses ke kebenaran yang lebih tinggi. Sekarang aura ini bukanlah sesuatu *sui generis*. Kesan ini harus didorong.

Salah satu yang mendorongnya adalah Plato. Dalam buku Republik ke-7, ia menulis bahwa "pengetahuan yang menjadi tujuan geometri adalah pengetahuan tentang yang abadi, dan bukan tentang yang binasa dan sementara. .

. . Geometri akan menarik jiwa ke arah kebenaran, dan menciptakan semangat filsafat." Sementara Plato menemukan standar kontemporer pengajaran matematika tidak memuaskan, ia percaya itu "akan menjadi sebaliknya jika seluruh Negara menjadi direktur studi ini dan memberikan penghormatan kepada mereka; maka para murid akan ingin datang, dan akan ada pencarian yang berkelanjutan dan sungguh-sungguh, dan penemuan akan dibuat" (Plato 1973, 219-20). Kita melihat bahwa untuk matematika Plato disahkan oleh dan untuk filsafat, dan bahwa negara diminta untuk menegakkan otoritas ini. Tetapi ini tidak berarti bahwa otoritas, filsafat, dan matematika harus berjalan seiring.

Sejarah di bagian sebelumnya melanjutkan ke keprihatinan modern awal dengan pembatasan atau hidup dengan sangat kecil. Seperti Amir Alexander yang berkuasa. "Di Italia, para Yesuitlah yang memimpin dakwaan menentang sangat kecil, sebagai bagian dari upaya mereka untuk menegaskan kembali otoritas gereja katolik" (Alexander 2014, 13). Dan kemudian di Inggris, ketika "yang rendah bercampur dengan yang tinggi, dan orang yang tidak tahu adat seperti Wallis diizinkan di masyarakat yang tinggi, harapan apa yang ada untuk pengadilan dan raja untuk membangun otoritas [Hobbesian absolut] mereka?" (Alexander 2014, 7).

Sedangkan untuk Berkeley versus Newton, banyak hal bahkan lebih eksplisit. Kritik terhadap metode Newton dalam The Analyst (1734) berkisar pada dugaan supremasi penalaran matematis atas penalaran agama. Pertanyaan 49 berbunyi:

"Apakah benar-benar tidak ada Philosophia prima, suatu Ilmu transendental tertentu yang lebih unggul dan lebih luas daripada Matematika, yang mungkin mendorong Analis modern kita daripada belajar daripada memandang rendah?"

Dan pertanyaan 63 berikut dengan:

"Apakah matematikawan, yang begitu peka dalam poin agama, benar-benar teliti dalam ilmu mereka sendiri? Apakah mereka tidak tunduk pada Otoritas, mengambil hal-hal berdasarkan Kepercayaan, dan percaya *points* tidak bisa dipahami? Apakah mereka tidak memiliki Misteri mereka, dan apa lagi, Penindasan dan Kontradiksi mereka?"

Otoritas matematika, politik, dan agama terlibat dalam konflik yang muncul seputar pertanyaan orang tak terhingga. Kritik atau pujian filosofis dari penalaran matematika benar-benar terjerat dengan aliansi sosial di sekitar pembagian wewenang ini.

Kekhawatiran dengan otoritas mendapatkan putaran yang menarik pada awal abad kesembilan belas. Ini bukan lagi tentang otoritas konstitutif yang memiliki otoritas untuk mendikte istilah logico-matematika tetapi tentang otoritas kreatif, yaitu, yang menciptakan pengetahuan matematika.

Idealisme Jerman, dimulai dengan Fichte, kesulitan menerima dikotomi Kant (pada pembahasan berikutnya). Mereka berusaha menyatukan alasan priori dan makhluk posteriori. Salah satu cara melakukannya adalah membiarkan akal dan imajinasi kreatif menghasilkan pengetahuan tidak hanya ketika diterapkan pada intuisi yang diberikan, tetapi juga dengan membentuknya secara langsung. Dalam versi ini, geometri tidak diberikan oleh apriori sintetik yang dideduksi transenden, tetapi dihasilkan oleh subjek sebagai bebas untuk membentuk dan membangun dunianya sendiri.

Fichte menegaskan bahwa ruang dan titik tidak cukup untuk geometri muncul dalam budaya manusia. Kami membutuhkan satu bahan lebih lanjut yang baginya secara diam-diam diasumsikan dalam kebebasan sistem Euclidean. Kita harus mengandaikan akting bebas manusia untuk memindahkan titik-titik di angkasa menjadi satu garis: "Geometri muncul melalui akting bebas saya, dengan memindahkan titik ke garis di angkasa" (Wood 2012, 89, mengutip kuliah Zürich Wissenschaftslehre).

Cara berpikir ini menemukan gema dalam wacana matematikawan. Dedekind, misalnya, menyatakan bahwa mengubah garis bilangan rasional menjadi garis kontinu bilangan real dapat bergantung pada "penciptaan individu titik baru" (Ewald 1996, 772), dan bahwa keberadaan urutan tak terbatas dibuktikan dengan mengamati benda-benda di "ranah pikiranku sendiri" (Ewald 1996, 806). Komentar Kronecker yang terkenal tentang Tuhan yang hanya menciptakan bilangan alami, menyerahkan sisanya kepada manusia, kompatibel dengan sentimen ini, kecuali bahwa Kronecker menggunakannya untuk meremehkan apa yang ia anggap sebagai ciptaan manusia yang meragukan, ciptaan yang ditinggikan oleh Dedeking.

Ketika kita mencapai Brouwer, kita menemukan bahwa "perenungan matematis muncul dalam dua fase sebagai tindakan kehendak dalam melayani naluri untuk pelestarian diri manusia individu" (Ewald 1996, 1175). Ini mengacu pada abstraksi dari urutan bilangan alami dari sikap temporal dan kausal. Bahasa bagian-bagian Brouwer dipenuhi dengan gaya dan jargon idealisme Jerman dan akibatnya, memproyeksikan sepenuhnya ke fenomenologi Husserl.

Tujuan ungkapan di sini bukan untuk mengulangi keprihatinan sejarah sebelumnya dengan konstruktivisme untuk tujuan pembatasan monster. Di sini kita berhadapan dengan otoritas kreatif manusia berkenaan dengan matematika, dan dengan koalisi ahli matematika dan filsuf yang dibentuk untuk menegaskan otoritas manusia sebagai pencipta. Tetapi kita harus mencatat, setidaknya secara sepintas, tren lain yang muncul pada saat yang sama yaitu, kenaikan statistik. Statistik, menurut definisi, adalah matematika negara, dirancang untuk memungkinkan pemerintah untuk memerintah, membentuk koalisi yang kuat antara matematika dan otoritas politik.

Sementara filsafat kontinental arus utama sampai pertengahan abad ke-20 cenderung memandang laki-laki (dan di abad ke-20, perempuan juga semakin) sebagai pencipta diri, tradisi analitiklah yang menempatkan matematika sebagai perhatian utama. Dalam tradisi ini, realisme ilmiah telah mendapatkan landasan, sebagian bersandar pada "argumen tak-tergantikan" yang dikaitkan dengan Quine dan Putnam: klaim bahwa kita harus percaya pada realitas entitas matematika karena mereka memainkan bagian yang tak terpisahkan dari sains kontemporer, yang, untuk filsuf analitik, adalah upaya kami yang paling berhasil untuk memahami dan mendefinisikan realitas.

Argumen ini berarti bahwa otoritas telah bergeser dari manusia yang menciptakan diri dan penyelidikan para filsuf ke ilmu pengetahuan modern. Matematika memperoleh statusnya bukan karena introspeksi atau fondasinya, tetapi karena layanannya yang sangat diperlukan yang diberikan pada sains. Seperti yang dikatakan Reichenbach, penganut filsafatnya

"menolak untuk mengakui otoritas filsuf yang mengklaim mengetahui kebenaran dari intuisi, dari wawasan ke dunia ide atau ke dalam sifat nalar atau prinsip-prinsip makhluk, atau dari sumber super-empiris apa pun. Tidak ada jalan masuk terpisah untuk kebenaran bagi para filsuf." (Schilpp 1949, 310)

Tetapi ada risiko otonomi matematis dalam pendekatan ini. Apa yang terjadi jika sains baru ternyata kurang memanfaatkan matematika? Dan bagaimana dengan banyak cabang matematika yang tidak berguna untuk sains empiris? Apakah mereka menjadi kurang objektif atau kurang benar?

Filsafat naturalis matematika mencoba untuk melawan sikap ini: "Himpunan hanyalah semacam hal yang dijelaskan teori; hanya ini yang ada pada mereka; untuk pertanyaan tentang himpunan, teori shimpunan adalah satu-satunya otoritas yang relevan" (Maddy 2013, 61). Otoritas atas matematika adalah milik ahli matematika. Tidak ada orang lain yang dapat melakukan pekerjaan lebih baik daripada ahli matematika dalam meneliti pekerjaan mereka. Tetapi bahkan di sini, pilihan Maddy untuk menghormati standar matematikawan (daripada, katakanlah, para astrolog) ada hubungannya dengan kesesuaian matematis dengan keseluruhan proyek ilmiah modern (Maddy 2013, 350-51).

Masalah yang dihadapi adalah karena itu siapa yang memiliki otoritas atas matematika: ahli matematika, filsuf, ilmuwan, negarawan? Kita tentu saja dapat mengakui bahwa jawabannya adalah "semua hal di atas." Hanya koalisi pemain yang berkelanjutan di bidang sebelumnya yang dapat memunculkan lembaga matematika yang kuat dan layak. Tetapi debat filosofis berusaha untuk memperkuat posisi beberapa pemain dengan mengorbankan yang lain untuk memfasilitasi koalisi dan standar tertentu.

Perhatikan satu dimensi lagi dari debat ini. Haug dan Taleb (2011), dikutip dalam sketsa pengantar, sangat menyerang ekonom matematika yang berpura-pura menegaskan otoritas atas praktik ekonomi perdagangan ("ilmuwan mengajari burung tentang cara terbang"). Di sini sengketa otoritas bukan tentang matematika, tetapi tentang matematika melampaui batas-batasnya, dan mengganggu praktik ekonomi.

6.5 "Ya, Tolong!" Filsafat Matematika

Jika ada satu hal yang umum untuk semua arus filosofis yang disurvei dalam sejarah sebelumnya (tetapi tidak berarti untuk semua filosofi matematika), itu adalah bahwa mereka membuat kita memilih. Kami diharapkan untuk memutuskan bahwa objek matematika ada di alam atau tidak; bahwa pernyataan matematis adalah sintetik atau analitik; bahwa monster harus diizinkan masuk ke matematika atau dilarang; bahwa ahli matematika harus menetapkan standar mereka sendiri, atau bahwa mereka harus membiarkan para filsuf, ilmuwan, dan agen kekuasaan melacak jejak mereka.

Tetapi membuat kita memutuskan mengasumsikan bahwa matematika itu cukup monolitik untuk menjamin suatu keputusan. Dan tidak. Matematika adalah banyak hal dengan nama umum, yang mematuhi banyak norma dan standar yang saling bertentangan. Kami tidak harus memilih. Jawaban yang benar untuk pertanyaan filosofis yang diuraikan dalam bahasan ini adalah "semua yang di atas!" Dalam beberapa konteks tertentu, seseorang mungkin memiliki alasan yang bagus untuk membujuk ahli matematika atau filsuf untuk lebih memilih satu pilihan daripada yang lain, tetapi jika kita ingin memikirkan matematika secara keseluruhan, kita perlu mengakui bahwa filosofi matematika yang berbeda menangkap aspek praktik matematika yang berbeda (untuk pendekatan pluralis analitik yang lebih berbeda terhadap matematika, lihat Teman 2014).

Jawaban semacam ini tampaknya mengubah filosofi matematika menjadi upaya yang tidak berguna; tapi ini juga salah. Mengingat pluralitas matematika, kita masih harus menjelaskan apa yang dilakukan matematika, cara kerjanya, dan apa yang membuat ekspresi matematika yang berbeda menonjol dalam budaya ilmiah kita. Kita perlu membuat sebuah akun yang membantu kita mengetahui bagaimana kita ingin berhubungan dengan matematika dalam berbagai skema kita, tetapi semua itu akan dibahas pada pembahasan berikutnya.

Sebelum kita pergi ke sana, bahasan berikutnya akan menunjukkan bahwa matematika memang bisa jadi banyak hal yang berbeda, bahkan jika kita melihat cabang matematika tertentu dalam waktu dan tempat tertentu. Kami akan menunjukkan jenis pluralitas apa yang harus dianut filsafat matematika, jika ingin setia pada fenomena yang ingin dijelaskannya.

Bab 7

Entitas Baru Abbacus dan Aljabar Renaissance

Bab ini akan menawarkan narasi sejarah dari beberapa elemen aljabar baru yang dikembangkan pada abad keempat belas hingga keenambelas di Italia utara. Sebelum kita memulai kisah matematika, disini diungkapkan sesuatu tentang ahli matematika.

7.1 Para Ahli Aljabar Abacus dan Renaissance

Matematika yang kami pertimbangkan muncul dari konteks praktis. Itu ditulis oleh master abbacus guru yang mengelola sekolah aritmatika untuk anak-anak pedagang. Terlepas dari judul mereka, mereka tidak ada hubungannya dengan sempoa sebagai instrumen perhitungan (inilah sebabnya, disini mengikuti ejaan Jens Høyrup di sini, berdasarkan pada varian vernacular *abbaco*). Pengajaran mereka berfokus pada representasi desimal dengan algoritme kalkulasi (algoritme) dan masalah praktis pertukaran, kemitraan, minat, pengukuran, dan sebagainya.

Status para guru itu sejajar dengan para profesional liberal tingkat rendah dan menengah lainnya, di bawah para ahli hukum dan dokter. Selain mengajar matematika, para master ini bekerja sebagai insinyur, surveyor, dan akuntan. Mereka dibayar baik oleh petugas lokal atau langsung oleh orang tua siswa mereka (Ulivi 2002, 2008).

Sementara aljabar tidak diajarkan di sekolah mereka, beberapa master mengejar aljabar sebagai kegiatan santai. Mereka juga menggunakan aljabar untuk mendapatkan kemasyhuran dan mengesankan calon klien (Høyrup 2008). Tidak semua buku teks mereka termasuk aljabar (misalnya, Swetz 1987), tetapi di antara ratusan manuskrip yang masih hidup yang tercantum dalam katalog Van Egmond (1980), ada beberapa yang berurusan dengan aljabar, termasuk beberapa yang mengembangkannya secara kreatif dalam periode yang biasanya dianggap sebagai salah satu stagnasi matematika. Ulasan aljabar abbacist dan sumber-sumbernya tersedia di Franci dan Rigatelli (1985) dan Høyrup (2007).

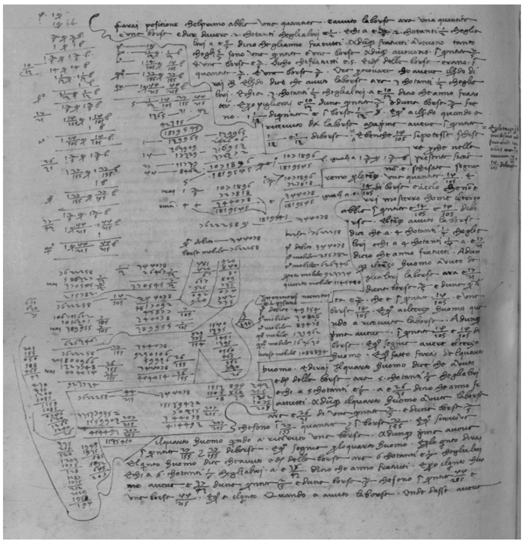
Pada abad keenam belas, budaya vernakular dari para master abbacus dan budaya humanis Latin dan universitas mulai bergabung. Ini adalah waktu terkenal berkaitan dengan penyelesaian persamaan kubik dan kuartik oleh Dal Ferro, Tartaglia, Cardano, Ferrari, dan Bombelli. Ini juga merupakan periode kemunduran sekolah abbacus dan kebangkitan ilmu pengetahuan Italia yang baru. Bab ini akan mencoba mengikuti beberapa perkembangan matematika penting pada periode ini, dan menganalisisnya dalam bentuk filosofi matematika "Ya, tolong! filosofi matematika".

7.2 Awal Munculnya Tanda yang Tak-diketahui

Titik awal kami adalah halaman manuskrip pada Gambar 7.1. Halaman ini menceritakan masalah tentang lima pria yang mendapatkan dana. Orang pertama mengatakan bahwa jika ia diberi dana, maka bersama dengan uangnya sendiri ia akan memiliki $2\frac{1}{2}$ kali dari semua gabungan dengan yang lainnya. Yang kedua mengatakan bahwa jika ia diberikan dana, ia akan memiliki $3\frac{1}{2}$ kali sebanyak dari yang lainnya. Yang lain mengikuti, berakhir dengan orang kelima yang menyatakan bahwa jika ia diberikan dana, ia akan memiliki $6\frac{1}{6}$ kali sebanyak dari yang lainnya.

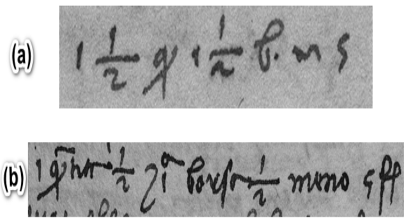
Masalah ini memiliki sejarah panjang. Masalah dengan struktur yang sama sudah terjadi di sumber-sumber Yunani. Sebuah versi dengan dana aktual muncul dalam aritmatika Sanskerta abad ke-7 Mahavira. Masalah khusus yang diceritakan sebelumnya dinyatakan oleh Leonardo Pisano, yang lebih dikenal sebagai Fibonacci, pada awal abad ketiga belas, 250 tahun sebelum rendisi Benedetto (Singmaster 2004, §7.R).

Salah satu fitur yang mencolok dari manuskrip Benedetto adalah pembagian halaman ke dalam kalkulasi dan teks yang sedang berjalan. Seperti yang dicatat Jens Høyrup (2010), perhitungan terjadi di sisi kiri; hanya setelah mereka selesai adalah teks yang berjalan ditambahkan ke kanan. Perhitungannya mencakup unsur-unsur yang sangat mirip dengan kombinasi variabel linear modern (Gambar 7.2(a)). Membandingkan perhitungan dengan teks yang sedang berjalan (Gambar 7.2(b)), kita melihat bahwa huruf b dalam diagram perhitungan adalah *borsa* (dana), dan q yang bersilangan, ligatur untuk *forqua*, singkatan dari *quantità* (kuantitas). Yang pertama mewakili jumlah uang dalam dana, dan yang terakhir mewakili jumlah uang



Gambar 7.1: Halaman naskah dari Florentine Trattato de Praticha d'Arismetrica dari abad ke-15 Maestro Benedetto. Hak cipta Biblioteca Comunale degli Intronati, Siena, L.IV.21, fol. 263v. 2015. 11, 24.

dari orang pertama dalam cerita. Pertanyaan yang jelas adalah: dari mana



Gambar 7.2: Detail dari Trattato de Praticha d'Arismetrica dari Benedetto. Hak cipta Biblioteca Comunale degli Intronati, Siena, L.IV.21, fol.264r.2015.11, 24. Tulisan cepat (atas) adalah: "$1\frac{1}{2}q\ 1\frac{1}{2}b.\ m\ 5$"; teks yang bawah adalah: "1 *quantità* [and a] $\frac{1}{2}$ dan 1 borsa [dan a] $\frac{1}{2}$ kurang 5 fl."

praktik menggunakan huruf dan ikatan untuk mewakili jumlah yang tidak diketahui berasal? Secara historis, ini sulit dilacak. Karena perhitungan dilakukan baik pada papan debu atau kertas bekas, kami memiliki beberapa skema perhitungan yang bertahan seperti yang ada dalam naskah Benedetto (Høyrup 2010). Tetapi di sini kita memiliki jawaban kontekstual yang mudah. Memang, teks pada Gambar 7.2(b) berakhir dengan ligatur yang mewakili unit moneter Fiorino.

Penggunaan ini menunjukkan bahwa tanda kuantitas yang tidak diketahui tidak harus "diciptakan." Itu diambil dari praktik ekonomi. B bukan hanya singkatan dari borsa; itu berfungsi sebagai semacam denominasi moneter jumlah uang yang ditemukan di dana. Hal yang sama berlaku untuk q yang disilangkan. Menambahkan keduanya bersamaan tidak berbeda dengan menambahkan berbagai jenis uang dalam satu baris. Menghitung dengan tanda-tanda ini tidak memerlukan ide baru.

Konteks ekonomi juga dapat menjelaskan cara penghitungan pada Gambar 7.1 diatur: kolom transaksi berturut-turut diterapkan pada jumlah uang tertentu. Ini menggemakan sistem pembukuan entri ganda, yang dikembangkan pada waktu dan tempat yang sama oleh para abbasis yang sama (hubungan yang ketat antara dua cara penulisan tidak terbukti secara meyakinkan, tetapi analoginya substansial; lihat Heeffer 2011).

Namun, sejauh ini, diskusi hanya memperhatikan bentuk representasi: simbol yang digunakan dan cara mereka diletakkan di atas kertas. Bagaimana dengan konsep yang tidak diketahui atau besarnya variabel? Bisakah kita menjelaskannya dari dalam konteks ekonomi tradisi abbacus Italia?

Untuk memberikan penjelasan tentang munculnya konsep yang besarnya tidak diketahui, saya memilih tiga kutipan dari dua risalah abbacus. Masing-masing menerangi aspek yang sedikit berbeda tentang bagaimana variabilitas matematika muncul dari praktik ekonomi. Setiap kutipan agak sepele dan biasa-biasa saja. Tapi saya pikir bersama-sama mereka menunjukkan dari mana variabel aljabar dan variabel takdiketahui berasal.

Yang pertama adalah latihan "aturan tiga". Misalkan Anda tahu bahwa harga A unit produk adalah C, dan ingin tahu harga B unit produk yang sama. Aturan tiga adalah prosedur standar yang menjawab pertanyaan ini dengan mengambil harga C yang diketahui, mengalikannya dengan B, dan membaginya dengan A. Berikut ini satu varian dari Trattato d'Abaco karya Piero della Francesca (dia memang pelukis Renaisans yang terkenal; ia menulis risalah matematika juga):

"Satu pon sutra harganya 5 libre dan 3 soldi, berapa harganya 8 ons? Anda harus mengalikan 8 ons dengan 5 libre dan 3 soldi. Ini membuat 41 libre dan 4 soldi. Membagi dengan satu pon tidak baik, ini bekerja dengan mengkonversi ke ons, yaitu 12 per pon. Selanjutnya bagi 41 libre [dan 4 soldi] dengan 12.. . ." (della Francesca 1970, 43)

Menurut aturan tiga, kita harus mengambil harga yang diketahui (5 libre dan 3 soldi), kalikan dengan 8 ons, dan bagi dengan 1 pound. Tetapi agar ini berfungsi, kita membutuhkan homogenitas unit. Jadi kita perlu mengonversi 1 pon menjadi 12 ons.

Sepertinya tidak ada yang luar biasa di sini. Satu-satunya hal yang ingin saya tunjukkan adalah bahwa dalam konteks perhitungan tertentu, seperti ini, beberapa angka mungkin harus diganti oleh yang lain (di sini 1 harus diganti dengan 12). Simbol "1" tidak selalu mewakili nilai nominalnya dalam konteks perhitungan ini. Dalam konteks khusus ini, sebenarnya adalah singkatan dari 12. Jadi dengan cara yang sangat biasa-biasa saja, kadang-kadang bilangan (tidak tergantung dari "takdiketahui" dan "variabel") berdiri untuk nilai-nilai selain nilai nominalnya.

Kutipan berikutnya adalah dari Trestato d'Abbacho karya Maestro Benedetto (Arrighi 1974, secara keliru dikaitkan dengan Pier Maria Calandri). Ini adalah Benedetto yang sama dari masalah yang membuka bab ini. Karena ia menulis tentang matematika praktis dalam konteks komersial, tidak mengherankan untuk menemukan dalam risalahnya sebuah bab yang ditujukan untuk mata uang konversi.

"Fiorino, untuk uang ini tidak ada nilai tetap, karena kadang-kadang naik beberapa *scudi* dan kadang-kadang turun harganya. Saat ini nilainya sekitar 6 *libre*, 3 *soldi* dan 4 *denari*. Tentu saja ada nilai imajiner yang disebut golden *scudo*, yang selalu stabil, sehingga *fiorino* bernilai 20 golden *scudi* dan golden scudo 12 *denari* emas." (Arrighi 1974, 34)

Fakta bahwa uang memiliki nilai tukar yang lancar diterima begitu saja saat ini. Tetapi untuk mencatat fakta ini secara real time membutuhkan masyarakat komersial yang relatif berkembang yang bekerja dengan beberapa jenis koin, dan peka terhadap volatilitas ekonomi ekonomi lain dan kelangkaan relatif logam. Dalam situasi seperti ini, seseorang dapat memperkenalkan unit moneter imajiner untuk dapat menarik perhitungan standar terlepas dari nilai tukar yang tidak stabil ini. Unit imajiner ini tidak sesuai dengan koin yang sebenarnya (Einaudi 2006).

Kita melihat di sini manifestasi yang sangat sepele dari sebuah tanda yang mengubah nilainya, dan praktik menemukan besaran ideal yang berfungsi sebagai alat bantu untuk perhitungan. Tidak ada yang sangat mencolok di sini, tetapi sistem ini dari nilai yang bervariasi dan istilah tanpa referensi duniawi diperlukan untuk ekonomi matematika praktis bahkan sebelum kami memperkenalkan "variabel" dan "tak diketahui".

Kutipan terakhir sedikit lebih rumit, setidaknya untuk pembaca kontemporer. Bunyinya:

"Jika 4 adalah setengah dari 12, maka $\frac{1}{3}$ dari 15 akan menjadi berapa?" (della Francesca 1970, 48)

Bagi kami, ini tidak masuk akal 4 bukan setengahnya dari 12. Tetapi konteksnya dapat mengungkapkan apa yang sedang terjadi. Ini, seperti kutipan sebelumnya dari Piero, adalah contoh dari aturan tiga. Ini tentang konversi. Ini adalah abstraksi dari pertanyaan seperti "jika 4 pon sutra bernilai setengah dari 12 *soldi*. . . ," atau "jika 4 *fiorini* hari ini bernilai setengah dari 12 *fiorini* yang nilainya setahun lalu. . . ." Masalah konversi yang abstrak dan tampaknya faktual ini adalah tipikal dari risalah Iberia, dan juga ditemukan di Italia (Høyrup 2012). Sekali lagi, kita lihat di sini bahwa suatu tanda bilangan tidak perlu mewakili nilai nominalnya.

Jadi bahkan sebelum kita datang dengan tanda huruf untuk "variabel" dan "takdiketahui", kita sudah memiliki praktik ekonomi dan aritmetika di mana tanda-tanda matematika berdiri untuk nilai-nilai selain nilai nominalnya, di mana mereka berdiri untuk nilai variabel, dan di mana mereka tidak memiliki objek nyata sebagai referensi . Setelah kami menempatkan praktik-praktik ini pada huruf dan ligatur yang mewakili nilai ekonomi, seperti yang ditunjukkan sebelumnya, kami memiliki praktik simbolik yang akan memunculkan variabel dan tidak diketahui (analisis lebih lanjut dari proses ini tersedia di Wagner 2010a).

7.3 Refleksi Perantara Pertama

Bagaimana kisah yang dikisahkan sejauh ini berkaitan dengan filosofi matematika yang disurvei pada bab sebelumnya? Kita pasti dapat menemukan dukungan dalam narasi sebelumnya untuk kedudukan filosofis empiris matematika sebagai abstraksi yang berasal dari pengamatan duniawi. Namun, sementara kita biasanya menganggap matematika sebagai abstraksi dari pengamatan sains alam (terutama fisika), di sini abstraksi muncul dari ranah ilmu sosial: ekonomi.

Sementara pengamatan yang muncul dari ilmu pengetahuan alam tampaknya mencerminkan tatanan alam yang diberikan, tatanan ekonomi biasanya dianggap sebagai kontingensi yang dibentuk oleh manusia. Oleh karena itu tidak jelas bagaimana menempatkan pengamatan ini dan abstraksi mereka dalam dikotomi antara tatanan alam empiris dan konsepsi bebas manusia.

Jika kita mencoba memeriksa narasi ini sehubungan dengan pandangan realis, kesulitan juga terjadi. Di satu sisi, jika nilai matematika berasal dari praktik ekonomi, di mana tanda memiliki nilai variabel, mereka tidak seperti entitas Platonis yang stabil dan ideal. Namun, kami melihat bahwa kadang-kadang stabilitas nilai yang ideal harus diimpor ke dalam praktik ekonomi (dalam kasus kami, golden *scudo*). Daya tarik untuk mengidealisasikan imajinasi dalam konteks ini dapat diartikan sebagai daya tarik untuk realitas ideal, terlepas dari dunia fenomena yang cair. (Kami mengamati sikap ini dalam konteks komentar praktisi tentang formula Black-Scholes juga.) Jadi dunia matematika yang kami uraikan berkaitan dengan konsepsi Platonis dan empiris.

Jika kita mencoba berpikir dalam istilah Kantian sebagai gantinya, kita dapat mempertimbangkan alat utama perhitungan abbacist, aturan tiga, sebagai aturan suatu priori. Memang, itu tidak bisa secara empiris, karena secara empiris, harga suatu produk seringkali tidak berbanding lurus dengan kuantitasnya ini adalah logika diskon pembelian dalam jumlah besar. Jadi aturan tiga bukanlah generalisasi yang tidak produktif, tetapi suatu standar normatif yang memberikan pengertian regulatif pada gagasan penentuan harga dalam jumlah yang berbeda dari komoditas yang sama. (Klaim ini dijabarkan dengan cara yang berbeda dalam analisis konsep "nilai" dalam Heeffer 2011.) Meskipun ini adalah suatu priori, aturan tiga tidak termasuk dalam konsep penetapan harga, dan oleh karena itu sintetis.

Aturan tiga juga dapat dianggap suatu priori sintetis dalam arti bahwa ia mengasumsikan intuisi temporalitas yang melekat dalam konsep nilai; memang, nilai ekonomi membutuhkan temporalitas untuk berfluktuasi. Namun, interpretasi apriori sintetik tradisional matematika menggambar batas yang tajam antara angka tetap dan variabel fluida, yang tidak tersedia dalam konteks abbacist ("jika 4 adalah setengah dari 12 ..."). Dunia matematika para abbasis, yang merupakan standardisasi reflektif dari praktik ekonomi, hidup dengan hibrida mengerikan antara fixitas dan mobilitas yang tidak akan ditoleransi oleh skema Kantian.

Matematika Abbacist memang membuat dunia, dan banyak penulis sejak Marx berpendapat untuk koneksi antara konsepsi nilai ekonomi dalam kapitalisme awal dan dunia yang dikuantifikasi, komputasi, dan teralienasi yang kita tinggali saat ini. Tapi ini adalah bentuk dunia kontingen neo-Kantian, jauh dari sintetik buatan Kant yang dapat dideduksi secara transenden priori. Kantianisme, seperti empirisme, nominalisme, dan Platonisme, semuanya tercermin dalam matematika abbacus, tetapi hanya sebagai aspek parsial dari fenomena yang lebih kompleks.

7.4 Aritmatika Nilai yang Didebit

Masalah yang kami mulai dengan, tentang lima orang yang mendapatkan dana, adalah, seperti disebutkan sebelumnya, telah disajikan dalam 1202 Fibonacci Liber Abaci. Salah satu fitur penting dari pertanyaan ini adalah bahwa itu adalah salah satu contoh Eropa paling awal dari masalah dengan solusi negatif (Sesiano 1985, 118).

Fibonacci memperkirakan bahwa uang orang pertama (q_1) bersama dengan dana (b), menjadi $2\frac{1}{2}$ kali lebih banyak dari yang lainnya, harus merupakan $\frac{5}{7}$ dari jumlah total uang antara dana dan kelima orang ($q_1+\cdots+q_5+b$). Satukan informasi analog dari pernyataan lainnya, diperoleh persamaan bentuk (anakronistik) $q_1+b=\frac{5}{7}(q_1+\cdots+q_5+b)$; $q_2+b=\frac{3}{13}(q_1+\cdots+q_5+b),\cdots,$ $q_5+b=\frac{6}{43}(q_1+\cdots+q_5+b)$. Ringkasnya identitas ini, Fibonacci dapat menemukan rasio antara uang dalam dana (b) dan total antara semua orang dan dana ($q_1+\cdots+q_5+b$). Dia kemudian mengemukakan nilai 1.455.636

untuk jumlah total uang sejumlah yang dapat dibagi oleh semua pecahan yang relevan, sehingga untuk menjamin penyelesaian dengan bilangan bulat dan melanjutkan dengan perhitungan (perhatikan bahwa masalah memiliki enam takdiketahui tetapi hanya tersedia lima persamaan, sehingga taktentu, dan penentuan sebarang dari salah satu nilai dibolehkan). Dana itu ternyata berisi 1.088.894; Adapun uang dari orang pertama:

"Akan ada 1.455.636 yang merupakan jumlah dana dan uang dari lima orang, dan karena yang pertama memiliki $\frac{5}{7}$ dari seluruh jumlah, Anda mengambil $\frac{5}{7}$ dari 1.455.636 yaitu 1.039.740, dan jumlah dana ini yang dimiliki orang pertama. Tetapi karena di atas lebih banyak ditemukan dana daripada dana dan yang diperoleh orang pertama, masalah yang ditimbulkan ini tidak akan dapat dipecahkan kecuali orang pertama memiliki debit, yaitu selisih antara jumlah dana ditambah dengan keseluruhan jumlah dana, yaitu 1.088.894 dikurangi 1.039.749; hasilnya adalah 49.154." (Sigler 2002, 321–22)

Karena uang orang pertama dan dana ternyata lebih kecil daripada uang dana itu sendiri, orang pertama harus memiliki nilai yang didebit, dapat ditafsirkan sebagai utang. Tetapi kekhawatiran ini muncul hanya ketika hasil akhir diperoleh, dan tidak dipengaruhi dalam uraian penyelesaian.

Versi Benedetto bukan merupakan terjemahan Fibonacci (meskipun ia menyadari akan Fibonacci yang didahulukan, dan bahkan mengutip hasilnya, yang berbeda dari Fibonacci, karena penentuan yang sebelumnya kurang jelas). Akan tetapi, gagasan umum serupa, dan menuntun Benedetto untuk mendapatkan hubungan berikut antara jumlah uang orang pertama, dan jumlah uang dalam *borsa*.

"$\cdots$ 1 *kuantitatif* $\frac{344078}{1819545}$ *dan* 1 *borsa* $\frac{1071896}{1819545}$ sama dengan satu *borsa* $\frac{2}{5}$. Jika selanjutnya dihapus dari kedua sisi 1 *borsa* $\frac{1071896}{819545}$, anda memiliki $\frac{7622258}{1819545}$ kuantitatif adalah sama dengan $\frac{344078}{1819545}$ *debito de borsa*. Agar tidak memiliki pecahan, gandakan masing-masing pihak dengan 1.819.545, akan didapat 7.622.258 kuantitatif sama dengan 344.078 *bito debito*. Oleh karena itu, 344.078 *borse debito* bernilai sebanyak 7.622.258 *quantità mobile*. Di sini jelas bahwa *quantità* akan memiliki nilai *debito*. Untuk mendapatkan bilangan bulat, Anda mengatakan bahwa orang pertama akan mempunyai nilai *debito* 344.078, dan *borsa* akan bernilai *mobile* 7,622.258." (Siena, Biblioteca Comunale degli Intronati, L.IV.21, fol. 264r)

Di sini nilai *debito* (didebit) dan *mobile* (tunai) tidak hanya kualifikasi yang disematkan ke penyelesaian pada akhirnya, setelah semua penalaran aljabar dilakukan. Mereka masuk ke dalam persamaan itu sendiri. Selain itu, uang dari orang lain dihitung dalam hal kuantitas, sehingga debit tidak hanya merupakan output, tetapi juga input untuk perhitungan lebih lanjut. Dalam 250 tahun memisahkan Fibonacci dan Benedetto, *debito* telah berubah dari deskripsi hasil perhitungan menjadi elemen yang melekat dalam praktik matematika. Bagaimana kita bisa menjelaskan perubahan ini?

Disini diyakini bahwa ada dua proses yang saling melengkapi. Di satu sisi, bilangan ditentukan oleh sifat atau spesiesnya. Bilangan dapat berupa keutuhan, pecahan (separuh, pertiga, kuartal), satuan moneter (misalnya *fiorini*), ukuran panjang atau luas, satuan temporal, aljabar "takdiketahui", dan sebagainya. (Cukup sering, bahkan akar suatu bilangan dianggap sebagai bilangan yang memiliki sifat akar, dan bukan sebagai operasi yang diterapkan pada bilangan tersebut.) Sifat atau spesies bilangan mempengaruhi nilainya: 4 meter sutera, 4 membagi dua, dan 4 yang tidak diketahui jelas memiliki nilai yang berbeda. Aturan yang mengatur tanda matematika dan nilainya tergantung pada sifatnya, sehingga setiap spesies kuantitas memiliki aturan sendiri, dan aturan ini sering disajikan secara terpisah. Dalam masalah sebelumnya, debit dapat dianggap sebagai sifat lain yang dimiliki suatu bilangan, yang mempengaruhi nilainya dan bagaimana kita beroperasi dengan hal-hal ini.

Di sisi lain, sifat suatu bilangan dapat dikonversi. (Ini adalah salah satu alasan mengapa, seperti yang ditunjukkan pada bagian pertama bab ini, nilai bilangan belum tentu nilai nominalnya.) Sebagai contoh, ketika membuat perhitungan, semuanya harus dibawa ke sifat yang sama untuk menyediakan suatu garis-dasar tunggal. Anda tidak dapat mengumpulkan mata uang atau pecahan yang berbeda kecuali jika Anda mengonversi ke mata uang umum atau penyebut umum. Ketika mengalikan bilangan bulat dan akar (misalnya, $2\times\sqrt{3}$), kalkulator diperintahkan untuk mengkonversi keduanya ke sifat akar ($\sqrt{4}\times\sqrt{3}=\sqrt{12}$). Praktik ini mengarah pada beberapa prosedur aneh, seperti membawa pecahan ke penyebut yang sama sebelum mengalikannya dengan usaha yang sia-sia dari sudut pandang kontemporer.

Praktik konversi inilah yang memungkinkan pengintegrasian debet ke dalam skema umum nilai matematika sebagai nilai yang dikurangi. Mmenurut Wagner 2010c bahwa kedua proses yang tampaknya saling bertentangan (ideal) pembagian kuantitas menurut spesies berbeda versus (nominal empirisnominal) konversi nilai-nilai cairan merupakan konstitutif dari evolusi aljabar Renaissance. Tetapi bagaimana bilangan negatif bahkan menjadi spesies kuantitas?

Albrecht Heeffer (2008) menawarkan penjelasan yang menarik. Kita mulai dengan satu spesies kuantitas dalam matematika abbacus: binomial yaitu, jumlah atau pengurangan dari suatu bilangan dan suatu akar. Milik spesies yang berbeda, binomial memerlukan aturannya sendiri, termasuk aturan persyaratan multisplikasi seperti $(a-\sqrt{b})(c-\sqrt{d})$. Diskusi tentang penggandaan dua akar yang dikurangi (disebut *meno*, secara harfiah "kurang") dalam produk binomial seperti itu diekstraksi dari konteks ini, sehingga menimbulkan aturan independen untuk bilangan *meno*, termasuk yang terkenal "minus kali minus adalah plus." Diekstraksi dari binomial, *meno* menjadi spesies bilangan baru, membawa serta aturan yang berasal dari aturan yang mengatur binomial.

Argumen Heeffer lebih lanjut dapat dibuktikan dengan contoh yang menunjukkan proses ini dalam "waktu real". Argumen ini diambil dari aljabar abad ke-15 Maestro Dardi (Dardi 2001; lihat juga Van Egmond 1983). Contoh yan akan dibahas dikutip mengikuti daftar 194 kasus persamaan Dardi, semuanya dapat direduksi (dalam istilah kontemporer) menjadi persamaan linear atau kuadratik. Karena spesies bilangan yang berbeda (bilangan bulat, akar, *meno*) diperlakukan sebagai berbeda, persamaan yang koefisiennya berasal dari spesies yang berbeda harus diperlakukan secara terpisah, yang menyebabkan perkembangbiakan kasus Dardi.

Pada akhir daftar kasus dan contoh yang melelahkan (tetapi tidak hampir lengkap) ini, muncul dua pernyataan, yang tidak diberi nomor sebagai kasus yang berbeda (posisi mereka mungkin menunjukkan bahwa mereka mewakili penambahan selanjutnya). Komentar pertama menganggap persamaan dari bentuk "akar tidak diketahui dan angka sama", seperti $5C + 6 = \sqrt{90}$ (C, kependekan dari *cosa* secara harfiah "benda" adalah representasi Dardi dari jumlah yang tidak diketahui). Untuk menyelesaikannya, kita kurangi kedua sisi persamaan dengan 6, dan hasilnya $\sqrt{90} - 6$ dibagi dengan 5, didapat $\sqrt{3\frac{3}{5}} - 1\frac{1}{5}$.

Selanjutnya, tanpa gembar-gembor atau basa-basi, kami memiliki paragraf peletakan batu pertama berikut, mungkin yang pertama di Eropa yang menentukan solusi negatif atau didebit secara independen dari konteks ekonomi eksplisit:

"Ketahuilah bahwa ketika anda mendapatkan C dan bilangan di satu sisi sama dengan tidak ada (karena beberapa persamaan dalam banyak kasus yang telah kita bahas, banyak yang melibatkan perbedaan atau hal-hal lain), anda harus mengurangi bilangan dari kedua sisi, dan anda akan mendapatkan C sama dengan bilangan *meno*, dalam hal ini anda harus membagi jumlah yang *meno* dengan jumlah C. Apa pun yang berasal dari ini adalah C *debita*. Misalkan anda mendapatkan $5C$ dan 15 bilangan sama dengan nol. Bagi 15 dengan 5, hasilnya 3, dan itu akan menjadi *debita* yang "takdiketahui" [*cosa*]. (Dardi 2001, 297; terjemahan ini bergantung pada naskah Arizona yang diuraikan dalam Hughes 1987, yang sedang diedit oleh Warren Van Egmond)."

Persamaan $5C + 15 = 0$ diselesaikan dengan terlebih dahulu mengatur ulangnya menjadi $5C = 0 - 15$, dan kemudian membaginya dengan 5. Poin yang dibuat dalam paragraf yang dikutip adalah sebagai berikut. Pertama, kasus "takdiketahui + bilanga = tidak ada" bukanlah tambahan buatan, tetapi sesuatu yang dapat muncul dari memanipulasi persamaan dengan cara yang sudah menjadi milik gudang ilmiah kami (memang, sesuatu seperti ini terjadi dalam solusi Benedetto tentang masalah dana). Kedua, metode solusi disajikan analog sempurna dengan kasus sebelumnya ("bilangan akar kurang binomial" sebelumnya diganti di sini oleh binomial "bilangan kurang tidak ada"). Pada langkah terakhir, bilangan yang dikurangi dalam binomial diterjemahkan dari nilai *meno* (atau kurang) menjadi nilai yang didebit. Kita melihat di sini suatu hubungan langsung dan eksplisit antara binomial dan kemunculan apa yang akan menjadi, dalam beberapa abad, sepenuhnya bilangan negatif.

Ketika akar bilangan negatif kemudian muncul dalam penyelesaian persamaan kubik pertengahan abad keenam belas Raffael Bombelli, proses serupa terjadi. Secara khusus, rumus dal Ferro Tartaglia untuk menyelesaikan persamaan $x^3 = 15x + 4$ menyatakan bahwa penyesaiannya adalah

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{4-125}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{4-125}}.$$

Ini ditolak sebagai tidak masuk akal oleh sebagian besar ahli matematika abad ke-enam belas. Lompatan ke depan Bombelli adalah untuk menulis ulang selisih $4 - 125$ sebagai binomial $0 - 121$, dan kemudian menggunakan versinya tentang pertimbangan yang kurang lebih diketahui untuk mengekstraksi akar kubik binomial (memperoleh persamaan untuk menentukan bilangan bulat dan bagian akar dari binomial, dan mencari penyelesaian bulat (integer) dengan coba-coba). Jumlah akar kubik dikurangi menjadi $(2 + \sqrt{0-1}) + (2 - \sqrt{0-1})$. Penghapusan akar, kita mendapatkan hasilnya 4. Substitusikan 4 ini ke dalam persamaan asli menunjukkan bahwa 4 membentuk penyesaian yang benar.

La Nave dan Mazur (2002) berpendapat bahwa akar bilangan negatif Bombelli diperkenalkan sebagai spesies bilangan baru. Sama seperti kita memiliki binomial (termasuk binomial dari jenis "tidak ada bilangan kurang"), sama seperti kita memiliki akar, dan seperti halnya kita memiliki akar binomial, kita dapat memperkenalkan ke dalam daftar akar spesies binomial "tidak ada bilangan kurang". Kita kemudian dapat merumuskan aturan binomial ini dengan analogi dengan binomial lain, dan menggunakannya untuk menyelesaikan persamaan.

7.5 Refleksi Perantara Kedua

Kita telah melihat sebelumnya bahwa nilai bilangan abbacist dan takdiketahui belum tentu nilai nominalnya. Sekalipun bilangan-bilangan itu nampaknya angka tetap, nilainya dapat berfluktuasi. Mereka datang dari realitas ekonomi, tetapi tidak selalu referensi secara empiris (misalnya, golden *scudo*, atau solusi dalam hal akar irasional untuk pertanyaan penetapan harga). Ini membuatnya sulit untuk memasukkan mereka ke dalam Platonis/empiris atau dikotomi realis/nominalis. Aturan tiga, yang mengatur konversi nilai-nilai ini, dapat dipandang sebagai semacam fondasi priori sintetis yang mengatur kuantitas. Tetapi mengingat penerapan pengelompokan, itu tidak dapat dilihat sebagai kebenaran transendental yang diperlukan.

Pembahasan bilangan negatif di bagian sebelumnya menambah ketegangan ini. Kita melihat bahwa pembentukan bilangan negatif beroperasi di sepanjang tiga sumbu. Yang pertama adalah poros empiris-ekonomi: gagasan utang dan integrasinya ke dalam perhitungan. Sumbu kedua adalah Platonis: pembagian jumlah menjadi spesies ideal, yang masing-masing memiliki status dan aturan ontologis sendiri, termasuk binomial, istilah *meno*, dan akarnya. Sumbu ketiga adalah formalis: derivasi aturan matematika dari hipotesis aksioma tentang spesies kuantitas.

Untuk membuat sumbu terakhir lebih menonjol, pertimbangkan bukti Dardi bahwa produk istilah *meno* adalah aditif. Ia menganggap produk $(10 - 2) \times (10 - 2)$. Di satu sisi, ini harus identik dengan $8 \times 8 = 64$. Di sisi lain, secara implisit mengasumsikan distributivitas, Dardi memecah produk ini menjadi 10×10, dua bentuk 10 kali *meno* 2, dan produk dari *meno* 2 dengan dirinya sendiri. Tiga istilah pertama menghasilkan $100-20-20 = 60$. Satu-satunya cara untuk mencapai hasil yang diharapkan dari 64 adalah dengan menetapkan bahwa produk *meno* 2 dengan dirinya sendiri adalah ditambahkan 4. Dengan kata lain, minus kali minus adalah plus. Alasan yang sama berlaku untuk pekerjaan Bombelli dengan akar bilangan negatif.

Dalam hal ini, aturan yang mengatur suatu spesies kuantitas ternyata diturunkan secara formal dari prinsip-prinsip implisit seperti distributivitas, daripada dari pemahaman langsung tentang spesies yang mendasarinya. Tetapi poin penting adalah bahwa argumen formalis ini tidak berdiri sendiri. Ini ditumpangkan pada ontologi yang mengasumsikan berbagai spesies dalam genus kuantitas, termasuk spesies meno, dan pada konteks ekonomi menerjemahkan spesies kuantitas menjadi nilai ekonomi (seperti hutang).

Terkadang diperdebatkan bahwa sejarah matematika adalah sejarah menghilangkan pembagian yang tidak perlu menjadi spesies kuantitas (yaitu, menghitung secara keseluruhan), dan abstrak di luar konteks empiris apa pun. Tetapi narasi ini mengabaikan produktivitas dari praktik-praktik yang ditolak ini. Misalnya, desakan untuk mempertimbangkan bilangan, akar, dan binomial sebagai entitas yang berbeda sebenarnya membantu memahami kondisi solvabilitas persamaan dan menemukan solusi baru. Memang, itu dengan menolak untuk mengurangi bilangan, akar dan binomial $(a, \sqrt{b}, a + \sqrt{b}, a - \sqrt{b})$ ke konsep bilangan homogen, bahwa beberapa jenis persamaan dengan koefisien bilangan bulat positif dapat dibuktikan tidak memiliki solusi yang terdiri dari akar kuadrat atau binomial (orang akan mengganti spesies tertentu ke dalam persamaan, dan menunjukkan bahwa hasilnya tidak bisa menjadi bilangan bulat positif). Akhirnya, eksplorasi hubungan antara sifat-sifat koefisien persamaan dan sifat solusi dari persamaan tersebut mungkin membantu menebak spesies solusi yang diharapkan dan benar-benar menyelesaikan persamaan kubik (untuk perinciannya, lihat Wagner 2010a, §4).

Jadi berusaha mereduksi matematika menjadi satu pondasi tunggal (formal, empiris, aritmatika, dan sebagainya) tidak berlaku adil terhadap penalaran matematis. Mencoba merekonstruksi ideal normatif untuk matematika dengan mempromosikan satu sumbu dasar dengan mengorbankan yang lain adalah usaha yang bermasalah. Rekonstruksi semacam ini dapat membantu meyakinkan kita bahwa matematika lebih cenderung konsisten, tetapi menjauhkan kita dari pemahaman tentang cara kerja matematika.

Justru superposisi dari berbagai aspek entitas matematika (dalam bagian ini, empiris, Platonis, dan formalis) yang membuat entitas matematika kaya, bermanfaat, dan kuat. Mereka tidak bergantung hanya pada satu yayasan, tetapi mendapatkan dukungan mereka dari beberapa jangkar. Jika satu fondasi berantakan jika divisi Platonis dari spesies kuantitas diguncang, atau jika kita gagal menemukan manifestasi empiris dari beberapa entitas matematika atau manuver, atau jika kita perlu menyesuaikan aturan formal karena mereka akhirnya saling bertentangan satu sama lain pilar lainnya yang mendukung penalaran matematis memungkinkannya bertahan dan berkembang.

7.6 Entitas Palsu dan Canggih

Bilangan negatif dan akarnya tunduk pada sikap ambigu dalam aljabar Italia. Ketika aljabar berevolusi dan solusi persamaan kubik dan kuartik diterbitkan oleh Cardano dan Tartaglia, bilangan negatif menjadi lebih luas dan dinaturalisasi daripada dalam risalah abbacus sebelumnya (dan jadi disini disengaja menggunakan istilah anakronistik "negatif" bukan pribumi dan ambigu *meno*). Cardano dan Bombelli, misalnya, menggunakan bilang-bilangan negatif dalam pekerjaan mereka, tetapi bukannya tanpa reservasi.

Baik Cardano dan Bombelli mengakui bilangan negatif sebagai hasil sementara dalam proses penyelesaian masalah yang lebih kompleks. Kadang-kadang, mereka membiarkan angka negatif tetap berdiri bahkan sebagai hasil akhir. Tetapi di lain waktu, para penulis yang sama ini juga berusaha mengelak dan menghindari bilangan negatif, menyebutnya palsu dan canggih. Hasilnya adalah campuran yang tidak konsisten dari afirmasi dan penolakan bilangan negatif (Wagner 2010c, §5).

Cardano, yang lebih cenderung secara filosofis dari keduanya, memiliki perubahan hati yang signifikan mengenai bilangan negatif ketika ia mendekati akhir hidupnya. Dalam *Ars Magna* yang terkenal, ia menyatakan, seperti para pendahulunya, bahwa minus kali minus menjadi plus. Tetapi kemudian ia menolak klaim ini, dan berpendapat bahwa produk dengan syarat minus harus minus (Tanner 1980a). Pandangan ini bukan hanya milik Cardano. Ini memiliki jejak di penulis seperti Marco Aurel dan Piero della Francesca juga (Wagner 2010c, §5; tema ini kemudian dibawa oleh Thomas Harriot, lihat Tanner 1980b).

Tetapi bagaimana sajian ini sehubungan dengan bukti yang dikutip dari Dardi sebelumnya bukti dengan suatu interpretasi geometris yang Cardano tidak bisa abaikan? Memang, Cardano tidak menyangkal bahwa $(10-2)\times(10-2) = 100-20-20+4$. Dia menyangkal bahwa perhitungan ini ada hubungannya dengan perkalian dari bilangan negatif. Dengan kata lain, ia menyangkal identitas distributif $(a-b)\times(a-b) = aa+a(-b)+(-b)a+(-b)(-b)$. Ini mungkin mengejutkan kita sebagai hal yang mustahil, tetapi jika kita tidak menerima begitu saja hukum dan identitas distributif seperti dan $a-b = -(b-a)$ dan $a-b = a+(-b)$, gagasan tentang bilangan negatif berbeda dari bilangan yang dikurangi dapat dianggap konsisten. Upaya semacam itu memang dielaborasi dalam istilah modern oleh Martínez (2006, 133). kemudian dibawa oleh Thomas Harriot, lihat Tanner 1980b).

Argumen Cardano bersifat ontologis. Bilangan positif dianggap nyata, dan negatif “asing” dengan kenyataan. Perkalian dari hal-hal yang asing bagi kenyataan tidak mungkin nyata, sehingga perkalian negatif dengan negatif harus negatif. Jika aljabar yang lebih tinggi secara signifikan digunakan dalam teologi atau ontologi, argumen ini mungkin berdampak. Tetapi ini bukan masalahnya, dan karena itu distribusi menjadi menang. Bilangan yang dikurangi ditempatkan pada yang negatif, dan aljabar yang bisa dikembangkan dari argumen Cardano dibatalkan sejak awal.

Pendekatan Bombelli lebih instrumental. Yang terbaik dicontohkan dalam perawatannya tentang persamaan $x^3+165 = 9x^2+9x$. Untuk menyelesaikan persamaan ini, Bombelli mengubahnya, dan memperoleh persamaan $y^3 = 36y-84$, di mana $y = x-3$. (Hari ini, kami menyebutnya perubahan variabel; ini bukan terminologi atau notasi Bombelli, tetapi untuk konteks ini akan berhasil.) Dalam istilah Bombelli, persamaan terakhir adalah “tidak mungkin atau derivasi dari persamaan itu dilakukan dengan buruk” (Wagner 2010c, 504). Dalam istilah kami, persamaan ini tidak memiliki solusi positif. Namun demikian, Bombelli selanjutnya menyatakan bahwa “nilai [y] ditemukan (jika bisa), jika kita ingin menambahkan 3. . . jumlahnya akan menjadi nilai [x]” (Wagner 2010c, 504).

Pernyataan ini sangat tidak masuk akal. Apa artinya menambahkan 3 ke nilai yang tidak ada? Ada dua penjelasan di sini. Pertama, Bombelli sangat sadar akan solusi negatif, dan mahir dalam menanganinya. Dia pergi melalui contoh di mana perubahan variabel mengubah solusi negatif menjadi solusi positif. Namun, ini bukan kasus di sini menambahkan 3 ke solusi negatif dari persamaan baru (untuk y) masih akan menghasilkan solusi negatif dari persamaan asli (untuk x). Karena itu ini tidak berguna bagi Bombelli.

Penjelasan alternatif adalah bahwa Bombelli berurusan di sini bukan dengan persamaan tunggal yang terisolasi, tetapi dengan contoh untuk prosedur umum. Jika koefisien masalahnya berbeda, prosedurnya mungkin berhasil. Bilangan "165," "9," dan "3" di sini tidak berdiri begitu saja; mereka mendukung semua koefisien yang mungkin, termasuk yang memungkinkan metode solusi yang lama menghasilkan solusi positif.

Ini, sekali lagi, prinsip fluiditas tanda-tanda matematika. Sebagai tanda-tanda matematika mengubah nilai-nilai mereka sesuai dengan konteks, mereka dapat mengubah sifat atau spesies mereka sendiri, atau sifat atau spesies entitas terkait, seperti solusi persamaan. Solusi negatif dapat menjadi positif, jika ketentuan masalahnya diubah. Oleh karena itu, solusi "palsu" atau "canggih" tidak dapat dibuang begitu saja. Entitas yang tidak ada dapat diperlakukan secara hitung, karena perubahan konteks dapat mengubahnya menjadi sesuatu yang nyata (seperti dalam konteks ini), atau karena mereka dapat memfasilitasi perhitungan dan pada akhirnya dapat dikonversi menjadi hasil nyata (seperti dalam kasus scudo emas imajiner). Sekarang jika jenis logika ini diterapkan pada akar bilangan negatif, tidak lagi sangat mengejutkan bahwa Bombelli berani melewatinya dalam perjalanannya ke solusi nyata persamaan kubik.

Tetapi kisah ini harus disempurnakan. Dalam solusi persamaan kubik $x^3 = 15x+4$ yang dipertimbangkan sebelumnya, yang melewati akar bilangan negatif, akar canggih bilangan negatif akhirnya dibatalkan dan menghasilkan solusi nyata 4. Dalam contoh lain, akar kubik tidak dapat diubah oleh teknik Bombelli menjadi hasil nyata, dan satu-satunya representasi solusi yang tersedia melibatkan akar bilangan negatif.

Bombelli tidak puas dengan situasi ini. Untuk memvalidasinya, ia mencari representasi geometris. Memang, ia menguraikan seluruh sistem untuk menerjemahkan aljabar ke dalam geometri (Wagner 2010b). Antara lain, dia menunjukkan bagaimana membangun solusi persamaan kubik menggunakan penggaris siku-siku. Konstruksi magnitudo geometris yang mewakili solusi persamaan ini tidak memberikan representasi untuk akar bilangan negatif yang terlibat dalam representasi aritmatika kompleks dari solusi nyata, tetapi untuk Bombelli bentuk representasi ini cukup untuk mengangkat selubung "ilmu pengetahuan" yang menggantung di karyanya.

7.7 Refleksi dan Kesimpulan Akhir

Bagian dari cerita ini kebanyakan tentang penanganan monster. Ketika "monster" negatif mulai muncul dalam bidang matematika utama, abbacis tinggal bersama mereka, menangani mereka secara ad hoc, sambil menyadari bahaya mereka.

Ketika peran mereka menjadi lebih sentral, kami melihat upaya yang lebih serius untuk menghalangi atau menahannya. Upaya Cardano kemudian adalah upaya untuk mencegah monster. Pertama, bilangan negatif terkurung dalam ranah "asing." Kedua, jika kita menerima bahwa perkalian negatif dengan negatif adalah negatif, maka demikian pula akar bilangan negatif, dan masalah akar negatif bilangan positif bersama dengan keseluruhan masalah bilangan kompleks dielakkan. (Aspek penalaran Cardano ini disorot oleh Tanner 1980a.)

Strategi Bombelli, di sisi lain, adalah yang pertama hidup dengan monster: ia berpikir bahwa mereka canggih, tetapi berguna dalam mendapatkan hasil yang benar. Kemudian ia berusaha menerjemahkannya ke bidang geometri yang sudah mapan dengan konstruksi geometris. Seperti tipikal geometri klasik, pendekatannya memiliki corak konstruktif yang berbeda: elemen matematika dapat diterima karena dapat dibangun dari kumpulan kecil elemen dan gerakan konstruksi dasar. Namun, untuk konstruksi Bombelli, penggaris dan kompas tidak cukup; dia harus menyesuaikan gagasan konstruksi dengan memasukkan penguasa bersudut kanan. Konstruktivitas sebagai kriteria untuk mencegah atau menjinakkan monster adalah gagasan yang agak kabur dan fleksibel; ini berlaku untuk modernitas awal (Bombelli, Descartes) sebagaimana halnya dengan pergantian abad kedua puluh (Baire, Borel, Lebesgue).

Sikap Cardano ternyata berada di pihak yang kalah, tetapi ada suatu pendapat bahwa alasan untuk kekalahan bergantung. Seperti yang telah diungkapkan, jika ada upaya serius untuk mengembangkan ontologi teologis matematis di zaman Cardano, pendekatannya mungkin menghasilkan struktur aljabar yang berbeda dari yang muncul dari karya Bombelli. (Jika gagasan melakukan ontologi oleh matematika menurut anda tidak masuk akal, maka periksa karya terbaru Alain Badiou.)

Dua aljabar, aljabar bilangan yang dikurangi dan aljabar bilangan negatif "asing" bisa saja hidup berdampingan, berjejaring dengan berbagai bidang pengetahuan yang relevan; atau mungkin salah satu dari mereka bisa menindas dan menyerap yang lain istilahnya sendiri. Tetapi kita tahu bahwa pada saat itu otoritas agama (atau setidaknya para Yesuit yang berkuasa) lebih menyukai matematika yang menegaskan orde lama daripada pengenalan entitas baru yang dicurigai. Koalisi sosial para matematikawan yang sukses melibatkan kelas-kelas berorientasi perdagangan yang meningkat, sementara otoritas filosofis dan teologis yang lebih tua bertempur secara perlahan-lahan kalah.

Adapun Bombelli, kita harus mengoreksi kesan bahwa kita berurusan di sini dengan pengurangan monster aritmatika menjadi geometri. Bahkan, Bombelli menulis bahwa "kedua ilmu ini (yaitu Aritmatika dan Geometri) memiliki di antara mereka sedemikian rupa sehingga yang pertama adalah verifikasi yang terakhir dan yang terakhir adalah demonstrasi dari yang terdahulu" (Wagner 2010b , 234–35). Intinya bukan untuk mengurangi satu ke yang lain, tetapi untuk menggabungkan keduanya.

Seperti yang telah dinyatakan (Wagner 2010b; lihat juga bagian tentang Bombelli di bab 6, kemudian), penyatuan ini tidak sepenuhnya konservatif; itu harus menyesuaikan konten geometri dan aljabar. Tapi justru itu karena penyatuan transformatif ini bahwa geometri dan aljabar dapat dibuat lebih kuat. Di mana aritmatika tegang, satu bisa beralih ke geometri sebagai bukti; di mana geometri goyah, orang dapat beralih ke aritmatika untuk verifikasi. Proyek di sini bukanlah proyek pondasi, tetapi proyek penebalan jaringan hubungan yang membangun objek matematika yang relevan. Bahkan, sepanjang sejarah aritmatisasi matematika, kita dapat menemukan matematikawan yang meratapi hilangnya sudut pandang yang benar-benar geometris (misalnya, Poncelet, Poincaré, sekolah geometri aljabar awal abad ke-20 di Italia). Kemenangan teknis aritmatika di depan yayasan, bagaimanapun, tidak mencerminkan praktik matematika yang sebenarnya yang sangat bergantung pada intuisi geometris.

Pengamatan terakhir menyangkut masalah otoritas. Kami melihat itu koalisi matematika dan teologi sekolah-tua tidak muncul. Namun, bahkan Bombelli pragmatis berusaha menciptakan koalisi dengan otoritas klasik. Dalam lima belas atau dua puluh tahun antara naskah dan edisi cetaknya, Bombelli berkenalan Pekerjaan Diophantus. Reaksinya adalah mengubah terminologi dan berlatih masalah untuk mendekati presentasi aritmatika Diophantus yang lebih abstrak. Seperti halnya upaya untuk menyatukan geometri dan aljabar, upaya untuk menyatukan aljabar abbac dengan gaya Diophantine dimaksudkan untuk memperkuat sains yang muncul dan memberi otoritas Yunani klasik (yang telah mendapatkan rasa hormat sepanjang Renaisans) pada ide-ide baru.

Tujuan bab ini adalah untuk mengikuti abbacus dan aljabar Renaissans sebagai studi kasus untuk apa yang disebut di akhir bab sebelumnya "ya, tolong!" filsafat matematika. Daripada memutuskan antara pendekatan filosofis dan divisi yang mendasari mereka, disini ingin ditunjukkan bagaimana pendekatan filosofis yang bersaing menemukan ekspresi yang saling terkait dalam praktik matematika. Disini lebih disukai melihat pendekatan filosofis yang berbeda sebagai deskripsi aspek-aspek praktik matematika, daripada memilih di antara mereka penjelasan dasar atau memonopoli apa matematika itu. Platonisme atau empirisme; pendekatan nominalis, formalis, dan konstruktivis; pandangan priori sintetis; upaya untuk membatasi atau menjinakkan monster; konflik atau koalisi dengan otoritas intelektual lain, ini semua adalah bagian dari cara matematika bekerja dengan cara yang sangat konkret dan sederhana.

Bagaimanapun disadari, bahwa bagi banyak orang, pendekatan eklektik seperti itu terhadap filsafat matematika tidak cukup. Bab selanjutnya akan berusaha merumuskan pendekatan filosofis untuk matematika yang dapat berfungsi sebagai kerangka kerja integratif untuk wawasan berbagai filosofi matematika.

Bab 8

Suatu Filsafat Praktik Matematika Berbasis Kendala

Bab ini akan mengambil jalan memutar di sekitar sejumlah masalah yang dibahas dalam bab terdahulu untuk mengatasinya dari perspektif yang berbeda. Alih-alih mengajukan pertanyaan mendasar tentang landasan matematika, kebebasannya, posisinya yang unik, monsternya, atau sumber otoritasnya, akan diajukan beberapa pertanyaan tentang praktik matematika. Bagaimana pernyataan matematis digunakan? Bagaimana kabar orang bisa menyetujui mereka? Bagaimana mereka ditafsirkan?

Pengamatan yang dihasilkan akan diintegrasikan ke dalam filosofi matematika berbasis kendala: alih-alih memperdebatkan realitas entitas matematika, kita akan menganggap matematika sebagai bidang pengetahuan yang menegosiasikan berbagai jenis kendala nyata. Rangkaian kendala kontingen dan berbagai cara menyulapnya mengarah pada pembentukan berbagai budaya matematika yang berbeda.

Perspektif ini kemudian akan dibawa kembali untuk mengeksplorasi bidang masalah yang disajikan dalam bab pertama bersama dengan masalah realitas dan kebenaran. Namun jalan memutar kami akan menggeser fokus dan rentang masalah ini, dan menyarankan pandangan yang berbeda untuk mengelolanya.

8.1 Dismotivasi

Intinya adalah bahwa proposisi $25 \times 25 = 625$ mungkin benar dalam dua pengertian. . . .

Pertama, ketika digunakan sebagai prediksi tentang apa yang akan ditimbang sesuatu dalam hal ini mungkin benar atau salah, dan merupakan proposisi pengalaman. Akan disebut salah jika objek yang dimaksud tidak ditemukan berbobot 625 gram ketika dimasukkan dalam keseimbangan.

Dalam arti lain, proposisi ini benar jika perhitungan menunjukkan dapat dibuktikan, jika perkalian 25 dengan 25 menghasilkan 625 sesuai dengan aturan tertentu.

Ini mungkin benar dalam satu cara dan salah dalam cara yang lain, dan sebaliknya. Tentu saja dengan cara kedua kita biasanya menggunakan pernyataan bahwa $25 \times 25 = 625$. Kita membuat kebenaran atau ketidakbenaran yang tidak tergantung pada pengalaman. Di satu sisi itu kebebasan dari pengalaman, di satu sisi tidak.

Pengalaman yang bebas disebabkan tidak ada yang terjadi membuat kita menyebutnya salah atau menyerah. Bergantung pada pengalaman disebabkan anda tidak akan menggunakan perhitungan ini jika semuanya berbeda. Buktinya hanya disebut bukti karena memberikan hasil yang berguna dalam pengalaman. (Wittgenstein 1976, 40-41)

Sekilas, apa yang kita miliki dalam bagian ini adalah versi dari posisi positivis logis: pernyataan matematis dapat digunakan secara sintetik, sebagai pernyataan eksperimental, atau analitis, sebagai pernyataan yang dapat diturunkan dari konsep dan aturan. Tetapi Wittgenstein menambahkan pada cerita tersebut elemen temporal-kausal: pertama proposisi atau aturan perkalian diadopsi karena mereka memberikan deskripsi empiris yang sukses tentang penghitungan praktis, penimbangan, dan pengukuran. Hanya kemudian, karena keberhasilannya yang posteriori, apakah itu menjadi aturan yang tidak dapat disangkal oleh eksperimen.

Disini proses ini disebut sebagai "dismotivasi," menunjukkan hilangnya secara bertahap motivasi empiris pernyataan matematika dan landasan. Kita telah melihatnya bekerja pada bab sebelumnya: angka yang dikurangkan, yang pertama hanya dikurangkan dari angka yang lebih besar, dan kemudian secara empiris terkait dengan utang, diisolasi dan dilakukan dalam konteks ini, dan berubah menjadi entitas independen baru: angka negatif. Proses ini sangat berhasil sehingga hal-hal berjalan sebaliknya dalam teori kelompok komutatif kontemporer: ketika menggunakan notasi aditif, $-a$ idefinisikan sebagai kebalikan dari a, dan seseorang biasanya tidak bahkan mendefinisikan pengurangan. Jika didefinisikan sama sekali, $a - b$ didefinisikan sebagai $a + (-b)$, sehingga bilangan negatif berubah menjadi awal pengurangan.

Bab 9

Sejarah Matematika

9.1 Teorema Pythagoras

Teorema Pythagoras adalah titik awal yang paling tepat untuk suatu bahasan tentang matematika dan sejarahnya. Ini bukan hanya teorema matematika tertua, tetapi juga sumber dari tiga aliran pemikiran matematika: bilangan, geometri, dan ketakterhinggaan.

Sumber bilangan dimulai dengan triple Pythagoras; triple dari bilangan bulat (a, b, c) sehingga $a^2 + b^2 = c^2$. Sumber geometri dimulai dengan interpretasi a^2, b^2, dan c^2 sebagai kuadrat dari sisi segitiga siku-siku dengan sisi a, b, dan sisi miring c. Sumber ketakberhinggaan (*infinity*) dimulai dengan penemuan bahwa $\sqrt{2}$, sisi miring dari segitiga siku-siku yang sisi-sisinya panjang 1, adalah bilangan *irasional*.

Tiga sumber tersebut berasal dari para matematikawan Yunani. Geometri geometri berkaitan dengan aljabar. Dasar dari geometri aljabar adalah kemungkinan menggambarkan titik-titik dengan bilangan — koordinatnya — dan menggambarkan setiap kurva dengan persamaan yang dipenuhi oleh koordinat titik-titiknya.

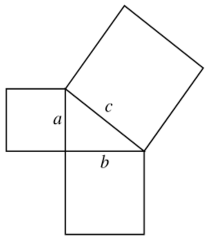
Penggabungan bilangan dengan geometri ini dieksplorasi dengan menggunakan rumus $a^2 + b^2 = c^2$ untuk mendefinisikan konsep jarak dalam hal koordinat.

9.1.1 Aritmatika dan Geometri

Jika ada satu teorema yang diketahui oleh semua orang yang terdidik secara matematis, pastilah teorema Pythagoras. Ini akan diingat sebagai sifat segitiga siku-siku: kuadrat sisi miring sama dengan jumlah kuadrat dari dua sisi lainnya (Gambar9.1). "Jumlah" tentu saja jumlah adalah luas suatu persegi dengan sisi l adalah l^2, itulah sebabnya dinamakan "l kuadrat." Dengan demikian teorema Pythagoras juga dapat diekspresikan oleh

$$a^2 + b^2 = c^2, \tag{9.1}$$

di mana a, b, c adalah panjang yang ditunjukkan oleh Gambar9.1.

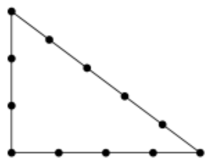


Gambar 9.1: Teorema Pythagoras

Sebaliknya, penyelesaian (9.1) dengan bilangan positif a, b, c dapat diubah oleh segitiga siku-siku dengan sisi a, b dan sisi miring c. Jelaslah bahwa kita dapat menggambar sisi tegak lurus a, b untuk bilangan positif tertentu a, b, dan kemudian sisi miring c harus menjadi penyelesaian (9.1) untuk memenuhi teorema Pythagoras. Pandangan sebaliknya dari teorema ini menjadi menarik ketika kita perhatikan bahwa (9.1) memiliki beberapa solusi yang sangat sederhana. Sebagai contoh,

$$\begin{array}{rcll} (a, b, c) & = & (3, 4, 5) & (3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2) \\ (a, b, c) & = & (5, 12, 13) & (5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2) \end{array}$$

Diperkirakan bahwa di zaman kuno penyelesaian seperti itu mungkin telah digunakan untuk pembangunan sudut siku-siku. Sebagai contoh, dengan merentangkan tali tertutup dengan 12 simpul yang berjarak sama, seseorang dapat memperoleh $(3, 4, 5)$ segitiga dengan sudut siku-siku antara sisi $3, 4$, seperti terlihat pada Gambar 9.2.



Gambar 9.2: Sudut siku-siku dengan peregangan tali

Apakah ini adalah metode praktis untuk membangun sudut siku-siku, keberadaan interpretasi geometris dari fakta aritmatika murni seperti

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

adalah cukup indah. Pada pandangan pertama, aritmatika dan geometri tampaknya merupakan bidang yang sama sekali tidak berhubungan. Aritmatika didasarkan pada penghitungan, lambang proses *diskrit* (atau *digital*). Fakta-fakta aritmatika dapat dipahami dengan jelas sebagai hasil dari proses penghitungan tertentu, dan orang tidak berharap mereka memiliki makna di luar ini. Geometri, di sisi lain, melibatkan benda *kontinu* daripada objek diskrit, seperti garis, kurva, dan permukaan. Objek kontinu tidak dapat dibangun dari elemen sederhana dengan proses diskrit, dan orang berharap untuk melihat fakta geometri daripada dengan perhitungan.

Teorema Pythagoras adalah petunjuk pertama dari hubungan yang tersembunyi dan lebih dalam antara aritmatika dan geometri, dan terus memegang posisi kunci antara dua bidang ini sepanjang sejarah matematika. Ini kadang-kadang merupakan posisi kerja sama dan kadang-kadang salah satu konflik, karena mengikuti penemuan bahwa $\sqrt{2}$ tidak rasional. Sering kali ide-ide baru muncul dari bidang-bidang ketegangan seperti itu, menyelesaikan konflik dan memungkinkan ide-ide yang sebelumnya tidak dapat didamaikan untuk berinteraksi dengan bermanfaat. Ketegangan antara aritmatika dan geometri, tanpa diragukan lagi, adalah yang paling mendalam dalam matematika, dan telah menyebabkan teorema yang paling mendalam. Karena teorema Pythagoras adalah yang pertama dari ini, dan yang paling berpengaruh, itu adalah subjek yang cocok bahasan ini.

9.1.2 Triple Pythagoras

Pythagoras hidup sekitar 500 SM, tetapi kisah teorema Pythagoras dimulai jauh sebelum itu, setidaknya sejauh 1800 SM di Babilonia. Buktinya adalah tablet tanah liat, yang dikenal sebagai Plimpton 322, yang secara sistematis mendaftar sejumlah besar pasangan bilangan bulat (a, c) yang mana ada bilangan bulat b dan memenuhi (9.1).

Terjemahan dari tablet ini, bersama dengan interpretasi dan latar belakang sejarahnya, pertama kali diterbitkan oleh Neugebauer dan Sachs (1945) (untuk diskusi yang lebih baru, lihat van der Waerden (1983), hal. 2). Tripel bilangan bulat (a, b, c) yang memenuhi (1), misalnya, $(3, 4, 5), (5, 12, 13)$ dan, $(8, 15, 17)$ dan sekarang dikenal sebagai triple Pythagoras. Agaknya orang Babilonia tertarik pada mereka karena interpretasi mereka sebagai sisi-sisi segitiga siku-siku, meskipun ini tidak diketahui secara pasti. Bagaimanapun, masalah menemukan tripel Pythagoras dianggap menarik dalam peradaban kuno lainnya yang diketahui memiliki teorema Pythagoras; van der Waerden (1983) memberikan contoh dari Cina (antara 200 SM dan 220 CE) dan India (antara 500 dan 200 SM). Pemahaman yang paling lengkap tentang masalah di zaman kuno dicapai dalam matematika Yunani, antara Euclid (sekitar 300

SM) dan Diophantus (sekitar 250 CE).

Sekarang kita tahu bahwa formula umum untuk menghasilkan tripel Pythagoras adalah

$$a = (p^2 - q^2)r, \qquad b = 2qpr, \qquad c = (p^2 + q^2)r. \tag{9.2}$$

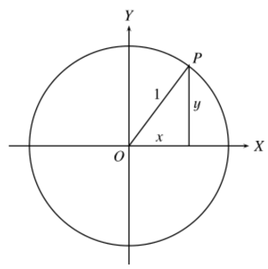
Dengan mudah terlihat bahwa $a^2+b^2 = c^2$ ketika a, b, c diberikan oleh rumus-rumus 9.2, dan tentu saja a, b, c akan menjadi bilangan bulat jika p, q, r adalah bilangan bulat. Meskipun orang Babel tidak memiliki keuntungan dari notasi aljabar, bahwa bahwa rumus ini masuk akal, atau untuk kasus khusus yaitu

$$a = p^2 - q^2, \qquad b = 2qp, \qquad c = p^2 + q^2 \tag{9.3}$$

(yang memberikan semua penyelesaian a, b, c, tanpa pembagi persekutuan) adalah dasar untuk tripel yang mereka daftarkan. Rumus yang kurang umum telah dikaitkan dengan Pythagoras sendiri (sekitar 500 SM) dan Plato (lihat Heath (1921), Vol. 1, hal. 80-81); penyelesaian yang setara dengan rumus umum diberikan dalam Elemen Euclid, Buku X (lemma setelah Prop.28). Sejauh yang kita tahu, ini adalah pernyataan pertama dari penyelesaian umum dan bukti pertama bahwa itu adalah penyelesaian umum. Bukti Euclid pada dasarnya adalah aritmatika, seperti yang orang harapkan karena masalahnya tampaknya ranah aritmatika.

Namun, ada solusi yang jauh lebih mencolok, yang menggunakan interpretasi geometris dari tripel Pythagoras. Ini muncul dari karya Diophantus, dan dijelaskan di bagian selanjutnya.

9.2 Titik Rasional di Lingkaran



Gambar 9.3: Lingkaran Satuan

Kita tahu dari pembahasan Bagian 9.1 bahwa triple Pythagoras (a, b, c) dapat direalisasikan oleh segitiga dengan sisi siku-siku a, b dan sisi miring c. Kini pada gilirannya menghasilkan segitiga dengan sisi siku-siku bilangan pecahan (atau rasional) $x = a/c, y = b/c$ dan sisi miring 1. Semua segitiga tersebut dapat dipasang di dalam lingkaran jari-jari 1 seperti yang ditunjukkan pada Gambar 9.3. Sisi x dan y menjadi apa yang sekarang kita sebut koordinat titik P pada lingkaran. Orang Yunani tidak menggunakan bahasa ini; Namun, mereka dapat menurunkan hubungan antara x dan y yang kita sebut persamaan lingkaran. Karena

$$a^2 + b^2 = c^2, \tag{9.4}$$

maka didapat

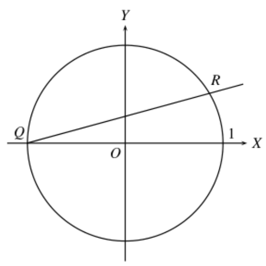
$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$

jadi hubungan antara $x = a/c$ dan $y = b/c$ adalah

$$x^2 + y^2 = 1. \tag{9.5}$$

Akibatnya, menemukan penyelesaian bilangan bulat dari (9.4) ekivalen dengan menemukan penyelesaian rasional dari (9.5), atau menemukan titik-titik rasional pada kurva (9.5).

Masalah seperti itu sekarang disebut ***Diophantine***, setelah Diophantus, merupakan orang pertama yang berurusan dengan mereka dengan serius dan berhasil. ***Persamaan Diophantine*** telah memperoleh konotasi persamaan yang lebih khusus untuk mencari penyelesaian integer, walaupun Diophantus sendiri hanya mencari penyelesaian rasional. (Ada masalah terbuka yang menarik yang mengubah perbedaan ini. Matiyasevich (1970) membuktikan bahwa tidak ada algoritma untuk menentukan persamaan polinomial mana yang memiliki penyelesaian bilangan bulat. Tidak diketahui apakah ada algoritma untuk menentukan persamaan polinomial mana yang memiliki penyelesaian ***rasional***.)



Gambar 9.4: Kontruksi Titik Rasional

Sebagian besar masalah yang diselesaikan oleh Diophantus melibatkan persamaan kuadratik atau kubik, biasanya dengan satu penyelesaian sederhana yang jelas. Diophantus menggunakan penyelesaian yang jelas sebagai batu loncatan bagi mereka yang tidak jelas, tetapi tidak ada penjelasan mengenai metodenya yang bertahan. Ini akhirnya direkonstruksi oleh Fermat dan Newton pada abad ke-17, dan konstruksi yang disebut garis-singgung (*chord tangent*) ini akan dibahas kemudian. Di sini, kita membutuhkannya hanya untuk persamaan $x^2 + y^2 = 1$, yang merupakan etalase ideal untuk metode dalam bentuk yang paling sederhana.

Penyelesaian sederhana dari persamaan ini adalah $x = -1, y = 0$, yang merupakan titik Q pada lingkaran satuan (Gambar 9.4). Setelah berpikir sejenak, orang menyadari bahwa garis melalui Q, dengan kemiringan rasional t,

$$y = t(x + 1) \tag{9.6}$$

akan memenuhi lingkaran pada titik rasional R. Ini karena substitusi $y = t(x+1)$ pada $x^2+y^2 = 1$ memberikan persamaan kuadratik dengan koefisien rasional dan satu penyelesaian rasional ($x = -1$); maka penyelesaian kedua juga harus merupakan nilai rasional x. Tetapi kemudian nilai y dari titik ini juga akan rasional, karena t dan x akan rasional pada (9.6). Sebaliknya, garis yang bergabung dengan Q ke titik rasional lainnya R pada lingkaran akan memiliki kemiringan yang rasional. Jadi dengan membiarkan t berjalan untuk semua nilai rasional, kita menemukan semua titik rasional $R \neq Q$ pada lingkaran satuan.

Apa poin-poin ini? Kami menemukannya dengan memecahkan persamaan yang baru saja dibahas. Dengan mensubstitusi $y = t(x + 1)$ pada $x^2 + y^2 = 1$ menghasilkan

$$x^2 + t^2(x + 1)^2 = 1,$$

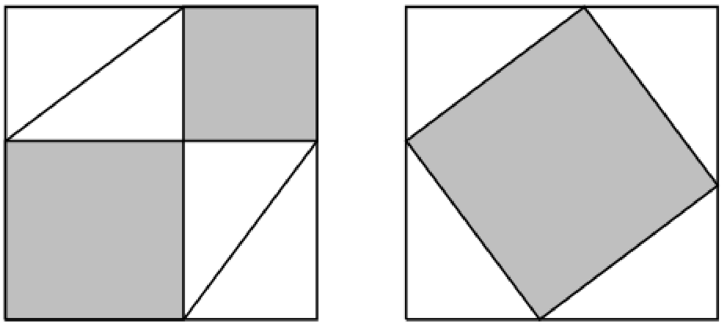
atau

$$x^2(1 + t^2) + 2t^2x + (t^2 - 1) = 0.$$

Persamaan kuadrat dalam x ini mempunyai penyelesaian -1 and $(1-t^2)/(1+t^2)$. Penyelesaian tak-trivial $x = (1-t^2)/(1+t^2)$, bila dsubstitusi pada (9.6), menghasilkan $y = 2t/(1 + t^2)$.

9.3 Segitiga Siku-siku

Sudah saatnya kita melihat teorema Pythagoras dari sudut pandang tradisional, sebagai teorema tentang segitiga siku-siku; Namun, kita akan bahas agak singkat tentang buktinya. Tidak diketahui bagaimana teorema pertama kali dibuktikan, tetapi mungkin itu dengan manipulasi sederhana dari suatu luasan, mungkin disarankan oleh penataan ulang ubin lantai. Betapa mudahnya untuk membuktikan teorema Pythagoras ditunjukkan oleh Gambar 9.5, diberikan oleh Heath (1925) dalam bukunya Euclid's Elements, Vol.1, hal.354. Setiap kotak besar berisi empat salinan dari segitiga siku-siku yang diberikan. Mengurangkan keempat segitiga ini dari daun persegi besar, di satu sisi (Gambar 9.5, kiri), jumlah dari bujur sangkar di kedua sisi segitiga. Di sisi lain (kanan), ia juga meninggalkan persegi pada sisi miring. Bukti ini, seperti ratusan lainnya yang telah diberikan untuk teorema Pythagoras, bertumpu pada asumsi geometris tertentu. Faktanya adalah mungkin untuk melampaui asumsi geometris dengan menggunakan bilangan sebagai dasar untuk geometri, dan teorema Pythagoran kemudian menjadi hampir benar menurut definisi, sebagai konsekuensi langsung dari definisi jarak. Namun,



Gambar 9.5: Bukti Pythagoras

bagi orang-orang Yunani, tampaknya tidak mungkin untuk membangun geometri berdasarkan bilangan, karena konflik antara pengertian mereka tentang bilangan dan panjang. Di bagian selanjutnya kita akan melihat bagaimana konflik ini muncul.

9.4 Bilangan Irasional

Telah disebutkan bahwa orang Babilonia, meskipun mungkin sadar akan makna geometrik teorema Pythagoras, mencurahkan sebagian besar perhatian mereka pada jumlah triple bilangan bulat yang dibawanya, yaitu triple Pythagoras. Pythagoras dan para pengikutnya bahkan lebih mengabdi pada bilangan bulat. Merekalah yang menemukan peran bilangan dalam harmoni musik: membagi string yang bergetar menjadi dua menaikkan nada dengan satu oktaf, membagi dalam tiga meningkatkan pitch kelima, dan seterusnya. Penemuan hebat ini, petunjuk pertama bahwa dunia fisik mungkin memiliki struktur matematika yang mendasari, mengilhami mereka untuk mencari pola numerik, yang bagi mereka berarti pola bilangan bulat, di mana-mana.

Bayangkan kekhawatiran mereka ketika mereka menemukan bahwa teorema Pythagoras menyebabkan kuantitas yang tidak dapat dihitung secara numerik. Mereka menemukan panjang yang tidak dapat dibandingkan (*incommensurable*), yaitu, tidak dapat diukur sebagai kelipatan bilangan bulat dari satuan (*unit*) yang sama. Oleh karena itu rasio antara panjang seperti itu bukan rasio dari bilangan bulat, maka dalam pandangan Yunani bukan rasio sama sekali, atau ***tidak rasional***.

Panjang yang tidak dapat dibandingkan yang ditemukan oleh Pythagoras adalah sisi dan diagonal dari persegi dengan sisi satu satuan. Ini mengikuti langsung dari teorema Pythagoras yaitu

$$(\text{diagonal})^2 = 1 + 1 = 2.$$

Karenanya jika diagonal dan samping berada dalam pecahan m/n (di mana m dan n dapat diasumsikan tidak memiliki pembagi persekutuan), maka didapat

$$m^2/n^2 = 2,$$

sehingga

$$m^2 = 2n^2.$$

Pythagoras tertarik pada bilangan ganjil dan genap, sehingga mereka mungkin mengamati bahwa persamaan terakhir, yang mengatakan bahwa m^2 adalah genap, juga menyiratkan bahwa m genap, katakan dalam hal ini $m = 2p$. Tapi bila

$$m = 2p,$$

maka

$$2n^2 = m^2 = 4p^2;$$

jadi

$$n^2 = 2p^2,$$

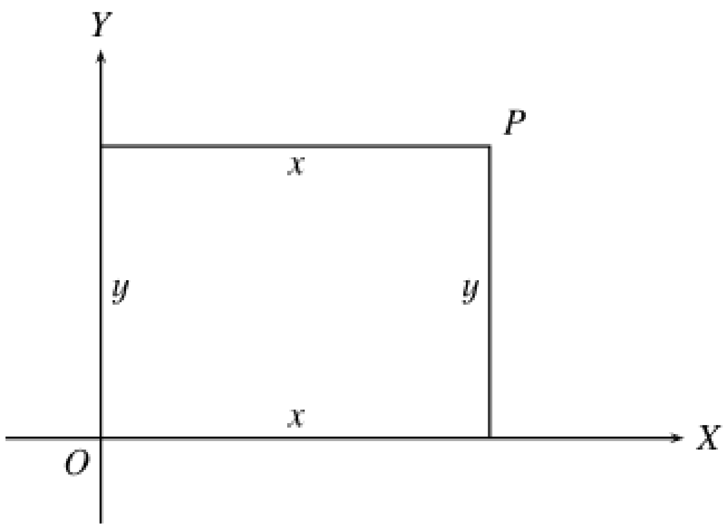
yang sama menyiratkan bahwa n adalah genap, bertentangan dengan hipotesis bahwa m dan n tidak memiliki pembagi persekutuan yang sama kecuali 1. (Bukti ini ada dalam Analisis Sebelum Aristoteles).

Penemuan ini memiliki konsekuensi besar. Legenda mengatakan bahwa Pythagoras pertama yang membuat hasilnya diumumkan tenggelam di laut (lihat Heath (1921), Vol.1, hal.65, 154). Ini menyebabkan perpecahan antara teori-teori bilangan dan ruang yang tidak sehat sampai abad ke-19 (jika kemudian, beberapa percaya). Pythagoras tidak dapat menerima $\sqrt{2}$ sebagai bilangan, tetapi tidak ada yang bisa menyangkal bahwa itu adalah diagonal dari satuan persegi. Akibatnya, kuantitas geometris harus diperlakukan secara terpisah dari bilangan atau, lebih tepatnya, tanpa menyebutkan bilangan apa pun kecuali rasional. Geometer Yunani kemudian mengembangkan teknik cerdik untuk penanganan tepat panjang sewenang-wenang dalam hal rasional, yang dikenal sebagai teori proporsi dan metode yang melelahkan (*exhaustion*).

Ketika Dedekind mempertimbangkan kembali teknik-teknik ini pada abad ke-19, ia menyadari bahwa teknik-teknik tersebut memberikan interpretasi aritmatika dari kuantitas irasional. Maka dimungkinkan, seperti yang ditunjukkan Hilbert (1899), untuk mendamaikan aritmatika dengan geometri. Peran kunci teorema Pythagoras dalam rekonsiliasi ini dijelaskan di bagian selanjutnya.

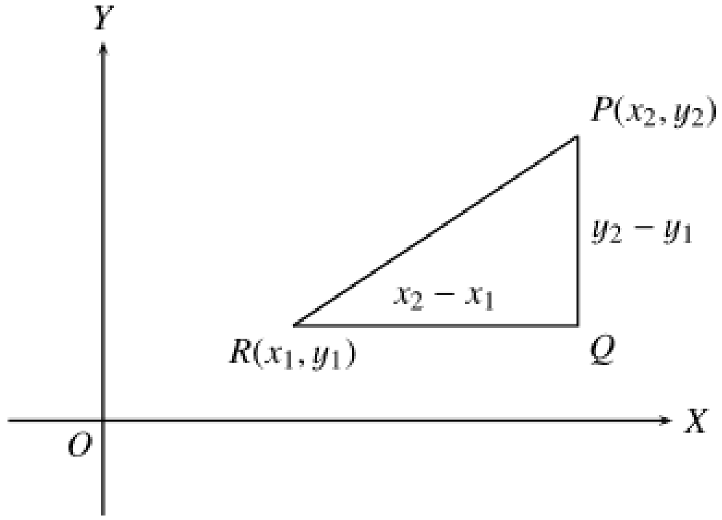
9.5 Definisi Jarak

Interpretasi numerik dari irasional memberikan setiap panjang ukuran numerik dan karenanya memungkinkan untuk memberikan koordinat x, y untuk setiap titik P di bidang. Cara paling sederhana adalah dengan mengambil sepasang garis tegak lurus (sumbu) OX, OY dan biarkan x, y menjadi panjang tegak lurus masing-masing dari P ke OX dan OY (Gamba 9.6). Sifat-sifat geometris P kemudian tercermin oleh hubungan aritmetika antara x dan y. Ini membuka kemungkinan geometri analitik. Di sini kita hanya ingin melihat bagaimana koordinat memberikan makna yang tepat pada gagasan geometri dasar tentang jarak.



Gambar 9.6: Sumbu Tegak Lurus

Telah disebutkan bahwa jarak tegak lurus dari P ke sumbu adalah bilangan x, y. Oleh karena itu jarak antara titik pada tegak lurus yang sama dengan sumbu harus didefinisikan sebagai selisih antara koordinat yang sesuai. Pada Gambar 1.11 ini adalah $x_2 - x_1$ untuk RQ dan $y_2 - y_1$ untuk PQ. Tapi kemudian teorema Pythagoras memberitahu kita bahwa jarak P diberikan oleh



Gambar 9.7: Definisi Jarak

$$PR^2 = RQ^2 + PQ^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Sedangkan jarak titik $P(x_2, y_2)$ ke $R(x_1, y_1)$ adalah

$$PR = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{9.7}$$

Karena konstruksi ini berlaku untuk sebarang titik P, R dalam bidang, sekarang telah dipunyai rumus umum untuk jarak antara dua titik.

Penurunan rumus ini sebagai konsekuensi dari asumsi geometris, khususnya teorema Pythagoras. Meskipun ini membuat geometri setuju dengan perhitungan aritmatika situasi yang sangat berguna, untuk memastikan itu tidak mengatakan bahwa geometri adalah aritmatika. Pada hari-hari awal geometri analitik, yang terakhir adalah pandangan yang sangat sesat. Namun, akhirnya, Hilbert (1899) menyadari bahwa itu bisa dijadikan fakta dengan mengambil (9.7) sebagai definisi jarak. Tentu saja, semua konsep geometris lainnya harus didefinisikan dalam hal bilangan juga, tetapi ini bermuara pada pendefinisian suatu titik, yang merupakan pasangan terurut bilangan (x, y). Persamaan (9.7) kemudian memberikan jarak antara titik (x_1, y_1).

Ketika geometri direkonstruksi dengan cara ini, semua fakta geometri menjadi fakta tentang bilangan (meskipun tidak selalu menjadi lebih mudah dilihat). Secara khusus, teorema Pythagoras menjadi benar dengan definisi karena telah dibangun ke dalam definisi jarak. Ini bukan untuk mengatakan bahwa teorema Pythagoras pada akhirnya adalah sepele. Sebaliknya, ini menunjukkan bahwa teorema Pythagoras adalah tepat yang diperlukan untuk menafsirkan fakta-fakta aritmatika sebagai geometri.

Disebutkan bahwa ide-ide yang lebih baru ini hanya untuk memperbarui teorema Pythagoras dan untuk memberikan pernyataan yang tepat tentang kekuatannya untuk mengubah aritmatika menjadi geometri. Pada zaman Yunani kuno, geometri lebih didasarkan pada penglihatan daripada pada perhitungan. Dalam bab berikutnya akan dilihat bagaimana orang-orang Yunani berhasil membangun geometri berdasarkan fakta-fakta yang terbukti secara visual.

9.6 Catatan Biografis: Pythagoras

Sangat sedikit yang diketahui secara pasti tentang Pythagoras, meskipun ia tokoh dalam banyak legenda. Tidak ada dokumen yang selamat dari periode di mana dia tinggal, jadi kita harus mengandalkan cerita yang diturunkan selama beberapa abad sebelum direkam. Tampaknya ia dilahirkan di Samos, sebuah pulau Yunani di dekat pantai yang sekarang disebut Turki, sekitar 580 SM. Ia melakukan perjalanan ke kota daratan terdekat di Miletus, tempat ia belajar matematika dari Thales (624-547 sM), yang secara tradisional dianggap sebagai pendiri matematika Yunani. Pythagoras juga melakukan perjalanan ke Mesir dan Babel, di mana ia mungkin mengambil ide matematika tambahan. Sekitar tahun 540 SM ia menetap di Croton, sebuah koloni Yunani di tempat yang sekarang menjadi Italia selatan.

Di sana ia mendirikan sebuah sekolah yang anggotanya kemudian dikenal sebagai Pythagoras. Moto sekolah adalah "Semua adalah angka," dan orang-orang Pythagoras mencoba membawa ranah sains, agama, dan filsafat semua di bawah aturan bilangan. Kata matematika ("apa yang dipelajari") dikatakan sebagai penemuan Pythagoras. Sekolah memberlakukan kode etik yang ketat pada para anggotanya, yang mencakup kerahasiaan, vegetarianisme, dan tabu penasaran tentang makan kacang. Kode kerahasiaan berarti bahwa hasil matematika dianggap sebagai milik sekolah, dan penemu perorangan mereka tidak diidentifikasi kepada orang luar. Karena itu, kita tidak tahu siapa yang menemukan teorema Pythagoras, irasionalitas $\sqrt{2}$, atau hasil aritmatika lainnya yang akan disebutkan dalam bab berikutnya.

Seperti disebutkan dalam Bagian 9.4, keberhasilan ilmiah yang paling menonjol dari aliran Pythagoras adalah penjelasan tentang harmoni musikal dalam hal rasio bilangan bulat. Keberhasilan ini mengilhami pencarian hukum numerik yang mengatur gerakan planet, "harmoni bola." Undang-undang semacam itu mungkin tidak dapat dinyatakan dalam istilah-istilah yang akan diterima oleh Pythagoras; namun demikian, tampaknya masuk akal untuk melihat perluasan konsep bilangan untuk memenuhi kebutuhan geometri (dan karenanya mekanik) sebagai perpanjangan alami dari program Pythagoras. Dalam pengertian ini, hukum gravitasi Newton mengungkapkan harmoni yang dimiliki oleh Pythagoras sedang mencari. Bahkan dalam arti yang paling ketat, Pythagorasisme masih sangat hidup saat ini. Dengan komputer digital, audio digital, dan pengkodean video digital semuanya, setidaknya kira-kira, ke dalam urutan bilangan bulat, kita lebih dekat dari sebelumnya ke dunia di mana “semua adalah bilangan.”

Apakah aturan bilangan yang lengkap itu bijaksana masih harus dilihat. Dikatakan bahwa ketika Pythagoras mencoba memperluas pengaruh mereka ke dalam politik, mereka bertemu dengan perlawanan rakyat. Pythagoras melarikan diri, tetapi dia dibunuh di Metapontum sekitar pada 497 SM.

Bab 10

Geometri Yunani

Pratinjau

Geometri adalah cabang matematika pertama yang sangat berkembang. Konsep "teorema" dan "bukti" berasal dari geometri, dan sebagian besar matematikawan sampai saat ini diperkenalkan pada subjek mereka melalui geometri dalam ***Euclid's Elements***.

Dalam ***Elements***, orang menemukan upaya pertama untuk mendapatkan teorema dari pernyataan yang konon terbukti sendiri yang disebut aksioma. Aksioma Euclid tidak lengkap dan salah satunya, aksioma paralel, tidak sejelas yang lain. Namun demikian, butuh lebih dari 2000 tahun untuk menghasilkan fondasi yang lebih jelas untuk geometri.

Klimaks dari ***Elemen*** adalah penyelidikan polihedra reguler, lima angka simetris dalam ruang tiga dimensi. Lima polyhedra reguler membuat beberapa penampilan dalam sejarah matematika, yang paling penting dalam teori simetri-teori grup yang dibahas dalam bab-bab mendatang.

Elements ini tidak hanya berisi bukti tetapi juga banyak konstruksi, oleh penggaris dan kompas. Namun, tiga konstruksi sangat mencolok dengan ketidakhadiran mereka: duplikasi kubus, pemotongan tiga sudut, dan mengkuadratkan lingkaran. Masalah-masalah ini tidak dipahami dengan baik sampai abad ke-19, ketika mereka diselesaikan (secara negatif) dengan aljabar dan analisis.

Satu-satunya kurva dalam ***Elemens*** adalah lingkaran, tetapi orang-orang Yunani mempelajari banyak kurva lainnya, seperti irisan kerucut. Lagi-lagi, banyak masalah yang tidak bisa diselesaikan orang-orang Yunani kemudian diklarifikasi dengan aljabar. Secara khusus, kurva dapat diklasifikasikan berdasarkan derajat, dan irisan kerucut adalah kurva derajat 2, seperti yang akan kita lihat di bab mandatang.

10.1 Metode Deduktif

"Dia berusia 40 tahun sebelum dia melihat Geometri; yang terjadi secara tidak sengaja. Berada di Perpustakaan Gentleman, Elemen Euclid terbuka, dan 'twill the 47 El.libri I. Dia membaca Proposisi. Oleh G-sayd dia (dia sekarang dan kemudian akan mengucapkan sumpah empati dengan penekanan) ini tidak mungkin! Jadi dia membaca Demonstrasi itu, yang merujuknya kembali ke Proposisi semacam itu; proposisi mana yang dia baca. Itu merujuknya kembali ke yang lain, yang juga dia baca ... bahwa akhirnya dia secara meyakinkan diyakinkan akan kebenaran itu. Ini membuatnya jatuh cinta dengan Geometri."

Kutipan ini tentang filsuf Thomas Hobbes (1588–1679), dari *Aubrey's Brief Lives*, dengan indah menangkap kekuatan kontribusi terpenting Yunani untuk matematika, metode deduktif. (Proposisi yang disebutkan, kebetulan, adalah teorema Pythagoras.)

Kita telah melihat bahwa hasil yang signifikan diketahui sebelum periode Yunani klasik, tetapi orang-orang Yunani adalah yang pertama membangun matematika dengan deduksi dari hasil yang ditetapkan sebelumnya, pada akhirnya bergantung pada pernyataan yang paling jelas yang mungkin, yang disebut ***aksioma***. Thales (624-547 SM) dianggap sebagai pencetus metode ini (lihat Heath (1921), hal.128), dan pada 300 sM telah menjadi begitu canggih sehingga ***Elements*** Euclid menetapkan standar untuk kesungguhan matematis hingga abad ke-19. ***Elements*** itu pada kenyataannya terlalu halus bagi kebanyakan ahli matematika, apalagi siswa mereka, sehingga pada saatnya geometri Euclid diringkas menjadi proposisi paling sederhana dan paling kering tentang garis lurus, segitiga, dan lingkaran. Bagian dari ***Elements*** ini didasarkan pada aksioma berikut (dalam terjemahan Heath (1925), hal.154), yang Euclid sebut ***postulat*** dan ***pengertian umum***.

Postulat (Dalil)

Misalkan yang berikut didalilkan:

1. Untuk menggambar garis lurus dari sebarang titik awal ke sebarang titik akhir.

2. Untuk menghasilkan suatu garis lurus terbatas kontinu dalam garis lurus.

3. Untuk menggambarkan lingkaran dengan pusat dan jarak sebarang.

4. Bahwa semua sudut siku-siku sama satu dengan lainnya.

Pengertian Umum

1. Hal-hal yang sama dengan hal yang sama juga sama satu dengan yang lainnya.
2. Jika sama ditambahkan ke sama, keseluruhannya sama.
3. Jika sama dikurangi dari sama, sisanya sama.
4. Hal-hal yang bertepatan satu sama lainnya, maka satu dengan yang lainnya sama.
5. Keseluruhan lebih besar daripada sebagian.

Definisi

Deskripsi yang tepat dan tidak ambigu tentang makna istilah matematika. Ini mencirikan arti kata dengan memberikan semua properti/sifat dan hanya properti/sifat itu yang harus benar.

Definisi:
Diberikan suatu himpunan tak-kosong G dan suatu operasi biner $* : G\times G \rightarrow G$ yaitu $*(a, b) = a * b \in G$ serta memenuhi sifat-sifat berikut

1. Assosiatif : $a * (b * c) = (a * b) * c,\ \forall a, b, c \in G$
2. Ada elemen netral $e \in G$ yang memenuhi : $a * e = a = e * a,\ \forall a \in G.$
3. Untuk setiap $a \in G$ ada invers a di G yang dinotasikan oleh $a^{-1} \in G$ dan memenuhi $a * a^{-1} = e = a^{-1} * a$.

Maka G dinamakan **grup**.

Teorema

Pernyataan matematis yang dibuktikan menggunakan penalaran matematis yang sangat teliti dan hati-hati (*rigorous*). Biasanya dalam makalah/paper/-artikel matematika, istilah teorema sering dicadangkan untuk ***hasil yang paling penting***. Atau, suatu ide yang diterima atau diusulkan sebagai kebenaran yang dapat dibuktikan sering sebagai bagian dari suatu teori umum.

Teorema (Teorema Fundamental Kalkulus-Bagian I)

Bila f kontinu pada interval-tutup $[a,b]$, maka fungsi g yang didefinisikan oleh:

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \qquad a \le x \le b$$

adalah kontinu pada $[a,b]$, terdiferensial pada (a,b) dan $f(x) = g'(x)$.

Bukti

Misalkan $x \in [a,b]$. Diberikan sebarang $\varepsilon > 0$ dan h memenuhi $x+h < b$ pilih δ yang memenuhi $0 < h < \delta$. Maka

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \frac{\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h} = \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h}$$

Karena f kontinu di x, didapat bila $|t-x| < \delta$, maka $|f(t)-f(x)| < \varepsilon$.

Khususnyam untuk $t \in [x, x+h]$ didapat $x \le t \le x+h$. Jadi, $0 \le t-x \le h < \delta$. Sehingga didapat

$$-\varepsilon < f(t) - f(x) < \varepsilon \qquad \text{atau} \qquad f(x) - \varepsilon < f(t) < f(x) + \varepsilon.$$

Pertidaksamaan terakhir integralkan pada $[x, x+h]$ didapat

$$\begin{aligned}
\int_x^{x+h} (f(x)-\varepsilon)dt &< \int_x^{x+h} f(t)dt < \int_x^{x+h} (f(x)+\varepsilon)dt \\
(f(x)-\varepsilon)\int_x^{x+h} dt &< \int_x^{x+h} f(t)dt < (f(x)+\varepsilon)\int_x^{x+h} dt \\
(f(x)-\varepsilon)(x+h-x) &< \int_x^{x+h} f(t)dt < (f(x)+\varepsilon)(x+h-x) \\
(f(x)-\varepsilon)h &< \int_x^{x+h} f(t)dt < (f(x)+\varepsilon)(h) \\
(f(x)-\varepsilon) &< \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h} < (f(x)+\varepsilon) \\
(f(x)-\varepsilon) &< \frac{g(x+h)-g(x)}{h} < (f(x)+\varepsilon) \\
-\varepsilon &< \frac{g(x+h)-g(x)}{h} - f(x) < \varepsilon \\
& \left| \frac{g(x+h)-g(x)}{h} - f(x) \right| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Pertidaksamaan yang terakhir berlaku untuk sebarang bilangan real $\varepsilon > 0$, akibatnya

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f(x)$$

Sehingga didapat

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=f(x) \qquad \text{atau} \qquad g'(x)=f(x).$$

Lemma

Hasil kecil yang tujuan utamanya adalah membantu dalam membuktikan teorema. Ini adalah batu loncatan di jalan menuju pembuktian teorema. Kadang-kadang, lemma dapat berdiri sendiri (lemma Zorn, lemma Urysohn, lemma Burnside, lemma Sperner).

Akibat (corollary)

Hasil di mana bukti (biasanya pendek) sangat bergantung pada teorema yang diberikan (kita sering mengatakan bahwa "ini adalah akibat dari Teorema A").

Proposisi

Hasil yang terbukti dan seringkali menarik, tetapi umumnya kurang begitu penting dibandingkan dengan teorema.

Dugaan (Conjecture)

Pernyataan yang belum terbukti kebenarannya, tetapi diyakini benar (dugaan Collatz, dugaan Goldbach, dugaan prima kembar).

Aksioma/Postulat

Pernyataan yang dianggap benar tanpa bukti. Ini adalah blok bangunan dasar dari mana semua teorema terbukti (lima dalil Euclid, aksioma Zermelo-Frankel, aksioma Peano).

Paradoks

Pernyataan yang dapat ditampilkan, menggunakan seperangkat aksioma dan definisi yang diberikan, menjadi benar dan salah. Paradoks sering digunakan untuk menunjukkan ketidakkonsistenan dalam teori yang cacat (Russell's paradox). Istilah paradoks sering digunakan secara informal untuk menggambarkan hasil yang mengejutkan atau berlawanan dengan intuisi yang mengikuti serangkaian aturan tertentu (Banach-Tarski paradox, Alabama paradox, horn Gabriel).

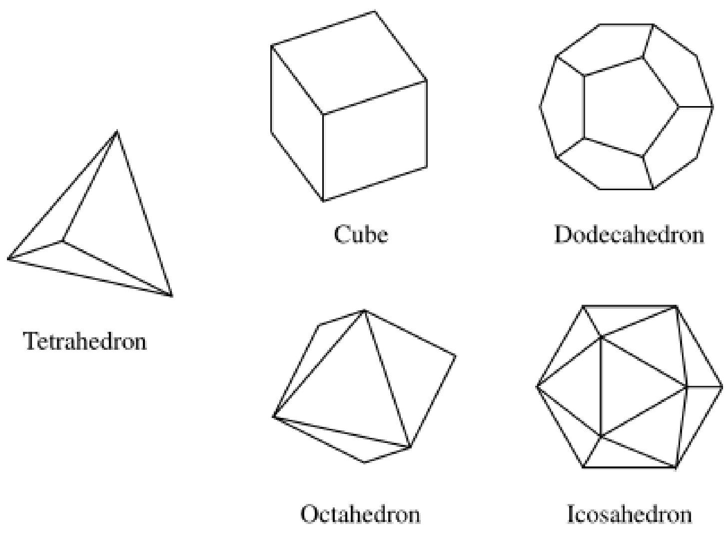
Tampaknya niat Euclid adalah untuk menyimpulkan proposisi geometrik dari pernyataan yang jelas secara visual (postulat) menggunakan prinsip-prinsip logika yang jelas (pengertian umum). Sebenarnya, ia sering menggunakan asumsi-asumsi yang masuk akal secara visual yang tidak ada di antara dalil-dalilnya. Proposisi pertamanya menggunakan asumsi yang tidak dinyatakan bahwa dua lingkaran bertemu jika pusat masing-masing berada di lingkaran yang lain (Heath (1925), hal. 242). Namun demikian, kekurangan tersebut tidak diketahui sampai abad ke-19, dan mereka diperbaiki oleh Hilbert (1899). Oleh mereka sendiri mungkin tidak akan cukup untuk mengakhiri menjalankan ***Elemen*** dari 22 abad sebagai buku teks terkemuka. ***Elemen*** digulingkan oleh pergolakan matematika yang lebih serius di abad ke-19. Apa yang disebut geometri non Euclidean, menggunakan alternatif untuk postulat kelima Euclid (aksioma paralel), dikembangkan ke titik di mana aksioma lama tidak lagi dapat dianggap sebagai bukti sendiri. Pada saat yang sama, konsep bilangan jatuh tempo ke titik di mana bilangan irasional menjadi dapat diterima, dan memang lebih disukai daripada konsep geometri intuitif, mengingat keraguan tentang apa sebenarnya kebenaran geometri yang sebenarnya.

Hasilnya adalah bahasa yang lebih mudah beradaptasi untuk geometri di mana "titik", "garis", dan sebagainya, dapat didefinisikan, biasanya dalam hal bilangan, sehingga sesuai dengan jenis geometri yang sedang diselidiki. Perkembangan seperti itu sudah lama tertunda, karena bahkan pada masa Euclid orang-orang Yunani menyelidiki kurva yang lebih rumit daripada lingkaran, yang tidak cocok dengan mudah dalam sistem Euclid. Descartes (1637) memperkenalkan metode koordinat, yang memberikan kerangka kerja tunggal untuk menangani geometri Euclid dan kurva yang lebih tinggi, tetapi pada awalnya tidak disadari bahwa koordinat memungkinkan geometri sepenuhnya dibangun kembali pada fondasi numerik.

Langkah yang relatif sepele (bagi kita) untuk beralih ke aksioma tentang bilangan dari aksioma tentang titik harus menunggu sampai abad ke-19, ketika aksioma geometris tentang titik kehilangan otoritas dan aksioma teori bilangan memperolehnya. Akan diulas lebih banyak tentang perkembangan ini nanti (dan masalah dengan otoritas aksioma pada umumnya, yang muncul pada abad ke-20). Untuk sisa bab ini kita akan melihat beberapa topik non-elementer penting dalam geometri Yunani, menggunakan kerangka kerja koordinat yang nyaman.

10.2 Polihedra Reguler

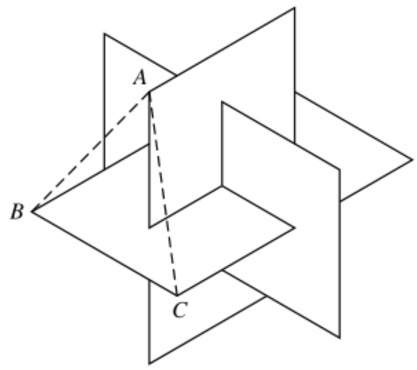
Geometri Yunani secara virtual lengkap sejauh sifat-sifat dasar gambar bidang diperhatikan. Adalah adil untuk mengatakan bahwa hanya segelintir proposisi dasar yang menarik tentang segitiga dan lingkaran telah ditemukan sejak zaman Euclid. Geometri benda padat jauh lebih menantang, bahkan hari ini, jadi dapat dimengerti bahwa itu dibiarkan dalam keadaan yang kurang lengkap oleh orang-orang Yunani. Namun demikian, mereka membuat beberapa penemuan yang sangat mengesankan dan berhasil menyelesaikan salah satu bab paling indah dalam geometri benda padat, enumerasi polihedra biasa. Lima kemungkinan polihedra biasa ditunjukkan pada Gambar 10.1.



Gambar 10.1: Polihedra Reguler

Setiap polihedron adalah cembung dan dibatasi oleh sejumlah permukaan poligon yang kongruen, jumlah permukaan yang sama bertemu di setiap titik, dan di setiap permukaan semua sisi dan sudut adalah sama, maka disebut ***polihedron reguler***. Polihedron biasa adalah gambar spasial yang dianalogikan dengan poligon reguler di dalam bidang. Tetapi sementara ada poligon reguler dengan bilangan sisi $n \geq 3$, hanya ada lima polihedra reguler.

Fakta ini mudah dibuktikan dan dapat kembali ke Pythagoras (lihat, misalnya Heath (1921), hal.159). Seseorang mempertimbangkan kemungkinan poligon yang dapat terjadi sebagai permukaan, sudutnya, dan jumlah mereka yang dapat terjadi pada suatu titik. Untuk 3-gon (segitiga) sudutnya adalah $\pi/3$, sehingga tiga, empat, atau lima dapat terjadi pada suatu titik, tetapi enam tidak dapat, karena ini akan memberikan sudut total 2π dan titik tersebut akan menjadi datar. Untuk 4-gon sudutnya adalah $\pi/2$, sehingga tiga dapat terjadi pada suatu titik, tetapi bukan empat. Untuk 5-gon sudutnya adalah $3\pi/5$, jadi tiga bisa terjadi pada satu titik, tetapi bukan empat. Untuk 6-gon sudutnya adalah $2\pi/3$, jadi tidak ada tiga yang bisa terjadi pada suatu titik. Tetapi setidaknya tiga permukaan harus bertemu di setiap sudut polihedron, jadi 6-gon (dan, sama halnya, 7-gon, 8-gon,...) tidak dapat muncul sebagai permukaan dari polihedron reguler. Ini hanya menyisakan lima kemungkinan yang baru saja didaftar, yang sesuai dengan lima polihedra reguler yang diketahui.

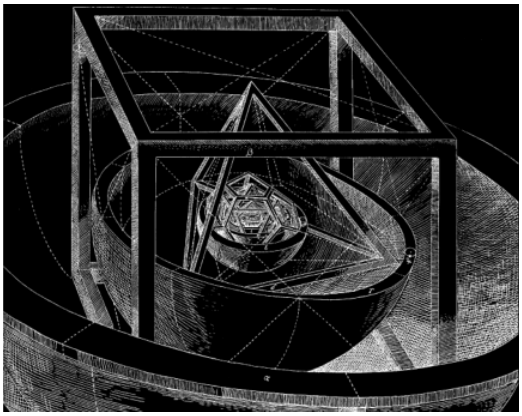


Gambar 10.2: Konstruksi icosahedron Pacioli

Tetapi apakah kita benar-benar tahu bahwa kelima ini ada? Tidak ada kesulitan dengan tetrahedron, kubus (cube), atau octahedron, tetapi tidak jelas bahwa, katakanlah, 20 segitiga sama sisi akan cocok untuk membentuk permukaan yang tertutup. Euclid menemukan masalah ini cukup sulit untuk ditempatkan di dekat akhir ***Elemen***, dan beberapa pembacanya pernah menguasai solusinya. Sebuah konstruksi langsung yang indah diberikan oleh Luca Pacioli, seorang teman Leonardo da Vinci, dalam bukunya *De divina proportione* (1509). Konstruksi Pacioli menggunakan tiga salinan persegi panjang emas (*golden rectangle*), dengan sisi 1 dan $(1+\sqrt{5})/2$, saling terkait seperti pada Gambar 10.2, 12 simpul mendefinisikan 20 segitiga seperti ABC, dan itu cukup untuk menunjukkan bahwa ini adalah sama sisi, yaitu, AB =

1.

Polihedra reguler akan membuat penampilan penting lainnya sehubungan dengan perkembangan abad ke-19 lainnya, teori grup berhingga dan teori Galois. Sebelum polihedra reguler membuat kembalinya kemenangan ini, mereka juga mengambil bagian dalam kegagalan terkenal: teori Kepler (1596) tentang jarak planet. Teori Kepler dirangkum oleh diagram yang terkenal (Gambar 10.3) dari lima polihedra, bersarang sedemikian rupa untuk menghasilkan enam bidang jari-jari yang sebanding dengan jarak enam planet yang dikenal. Sayangnya, meskipun matematika tidak dapat mengizinkan polihedra yang lebih teratur, alam dapat mengizinkan lebih banyak planet, dan teori Kepler hancur ketika Uranus ditemukan pada 1781.

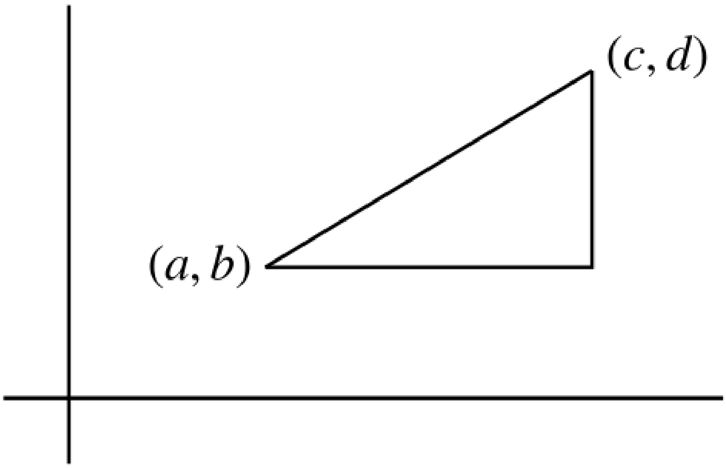


Gambar 10.3: Diagram Polihedra Kepler

10.3 Konstruksi Penggaris dan Kompas

Geometer Yunani membanggakan diri dengan kemurnian logisnya; Namun, mereka dibimbing oleh intuisi tentang ruang fisik. Salah satu aspek geometri Yunani yang secara khusus dipengaruhi oleh pertimbangan fisik adalah teori konstruksi. Sebagian besar geometri dasar garis lurus dan lingkaran dapat dilihat sebagai teori konstruksi oleh penggaris dan kompas. Subjek yang sangat, garis dan lingkaran, mencerminkan instrumen yang digunakan untuk menggambar mereka. Dan banyak masalah dasar geometri misalnya, membagi dua segmen garis atau sudut, mengkonstruksi tegak lurus atau menggambar lingkaran melalui tiga titik yang diberikan dapat diselesaikan dengan konstruksi penggaris dan kompas.

Ketika koordinat diperkenalkan, tidaklah sulit untuk menunjukkan bahwa titik yang dapat dikonstruksi dari titik $P_1, P_2, \cdots, P_n$ memiliki koordinat dalam himpunan bilangan yang dihasilkan dari koordinat $P_1, P_2, \cdots, P_n$ oleh operasi $+, -, \times, \div$, dan $\sqrt{}$ (lihat Moise (1963)). Akar kuadrat muncul, tentu saja, karena teorema Pythagoras: jika titik (a, b) dan (c, d) telah dikonstruksi, maka jarak diantaranya $\sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2}$ (Gambar 10.4). Sebaliknya, dimungkinkan untuk membuat $\sqrt{l}$ untuk panjang yang diberikan l.



Gambar 10.4:

Dilihat dari sudut pandang ini, konstruksi penggaris dan kompas terlihat sangat istimewa dan tidak mungkin menghasilkan bilangan seperti $\sqrt[3]{2}$, misalnya. Namun, orang-orang Yunani berusaha sangat keras untuk menyelesaikan masalah ini, yang dikenal sebagai duplikasi kubus (disebut karena menggandakan volume kubus seseorang harus melipatgandakan sisi $\sqrt[3]{2}$). Masalah terkenal lainnya adalah pemotongan sudut dan mengkuadratkan lingkaran. Masalah yang terakhir adalah untuk mengkonstruksi persegi sama di daerah untuk lingkaran yang diberikan atau untuk mengkonstruksi bilangan π, yang jumlahnya sama dengan penyusunan. Mereka tidak pernah menyerah tujuan-tujuan ini, meskipun kemungkinan solusi negatif diakui dan solusi dengan cara yang kurang mendasar ditoleransi. Kita akan melihat beberapa di bagian selanjutnya.

Ketidakmungkinan memecahkan masalah ini dengan konstruksi penggaris dan kompas tidak terbukti sampai abad ke-19. Untuk duplikasi kubus dan pemotongan sudut, ketidakmungkinan ditunjukkan oleh Wantzel (1837). Wantzel jarang menerima pujian karena menyelesaikan masalah-masalah ini, yang telah membingungkan para ahli matematika terbaik selama 2000 tahun, mungkin karena metodenya digantikan oleh teori Galois yang lebih kuat.

Ketidakmungkinan mengkuadratkan lingkaran dibuktikan oleh Lindemann (1882), dengan cara yang sangat kuat. Tidak hanya tidak dapat ditentukan oleh operasi rasional dan akar kuadrat; ia juga transendental, yaitu, bukan akar dari setiap persamaan polinomial dengan koefisien rasional. Seperti karya Wantzel, ini adalah contoh langka dari hasil besar yang dibuktikan oleh ahli matematika kecil. Dalam kasus Lindemann, penjelasannya mungkin adalah bahwa langkah besar telah diambil ketika Hermite (1873) membuktikan transendensi daribilangan irrasional e. Bukti yang dapat diakses dari kedua hasil ini dapat ditemukan di Klein (1924). Karier Lindemann berikutnya secara matematis tidak istimewa, bahkan memalukan. Menanggapi skeptis yang menganggap keberhasilannya dengan π telah menjadi kebetulan, ia membidik masalah yang paling tidak terpecahkan dalam matematika, "teorema terakhir Fermat". Usahanya gagal dalam serangkaian makalah yang tidak dapat disimpulkan, masing-masing mengoreksi kesalahan dalam yang sebelumnya. Fritsch (1984) telah menulis artikel biografi yang menarik tentang Lindemann.

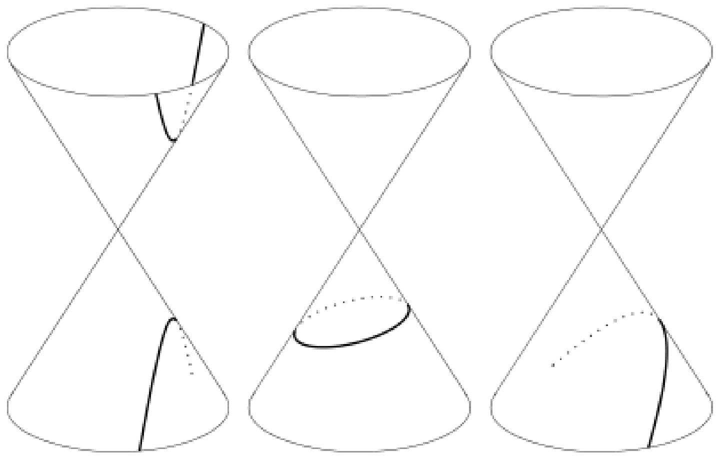
Satu masalah penggaris dan kompas masih terbuka: n-gon reguler mana yang dapat dikonstruksi? Gauss menemukan pada 1796 bahwa 17-gon dapat dibangun dan kemudian menunjukkan bahwa n-gon reguler dapat dibangun jika dan hanya jika $n = 2^m p_1 p_2 \cdots p^k$, dengan p_i adalah bilangan prima yang berbeda dari bentuk $2^{2^h} + 1$. (Masalah ini juga dikenal sebagai pembagian lingkaran, karena itu sama dengan membagi keliling lingkaran, atau sudut 2π, menjadi n bagian yang sama.) Bukti kebutuhan sebenarnya dilengkapi oleh Wantzel (1837). Namun, masih belum secara eksplisit diketahui apakah bilangan prima ini, atau bahkan apakah ada banyak jumlahnya. Satu-satunya yang diketahui adalah untuk $h = 0, 1, 2, 3, 4$.

10.4 Irisan Kerucut

Irisan kerucut adalah kurva yang diperoleh dengan memotong kerucut bundar dengan bidang: hiperbola, ellips (termasuk lingkaran), dan parabola (Gambar 10.5, kiri ke kanan). Sekarang kita mengetahui irisan kerucut lebih baik dalam hal persamaan mereka dalam koordinat kartesius:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= 1 && \text{(hiperbola)} \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 && \text{(ellips)} \\ y &= ax^2 && \text{(parabola).} \end{aligned}$$

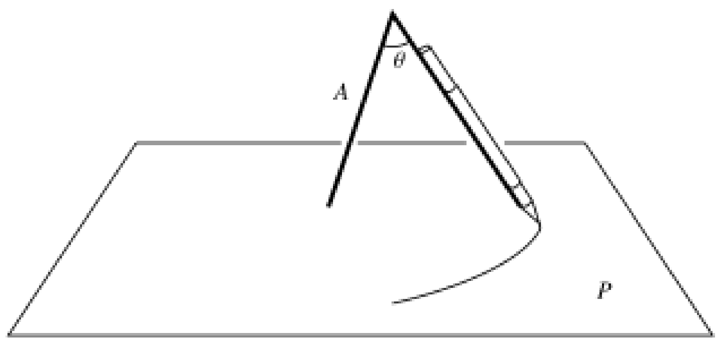
Lebih umum, persamaan derajat kedua mewakili irisan kerucut atau sepasang garis lurus, hasil yang dibuktikan oleh Descartes (1637).



Gambar 10.5: Irisan Kerucut

Penemuan irisan kerucut dikaitkan dengan Menaechmus (abad keempat SM), seorang kontemporer dari Alexander Agung. Alexander dikatakan telah meminta Menaechmus untuk kursus kilat dalam geometri, tetapi Menaechmus menolak, mengatakan, "Tidak ada jalan kerajaan ke geometri". Menaechmus menggunakan irisan kerucut untuk memberikan solusi yang sangat sederhana untuk masalah menduplikasi kubus. Dalam notasi analitik, ini dapat digambarkan sebagai menemukan interseksi parabola $y = \frac{1}{2}x^2$ dengan hiperbola $xy = 1$. Hasil ini adlah

$$x(\frac{1}{2}x^2) = 1 \qquad \text{atau} \qquad x^3 = 2.$$



Gambar 10.6: Kompas Umum

Meskipun orang-orang Yunani menerima ini sebagai "konstruksi" untuk menduplikasi kubus, mereka tampaknya tidak pernah membahas instrumen untuk benar-benar menggambar irisan kerucut. Ini sangat membingungkan karena generalisasi alami kompas segera menunjukkan dirinya (Gambar 10.6). Lengan A diatur pada posisi tetap relatif terhadap bidang P, sedangkan lengan lainnya berputar pada sudut tetap θ, menghasilkan kerucut dengan A sebagai sumbu simetri. Pensil, yang bebas untuk meluncur di lengan pada lengan kedua ini, menelusuri irisan kerucut yang tergeletak di bidang P. Menurut Coolidge (1945), hal.149, instrumen untuk menggambar irisan kerucut ini pertama kali digambarkan sekitar akhir 1000 M oleh ahli matematikawan Arab al-Kuji. Namun, hampir semua fakta teoretis yang ingin diketahui tentang irisan kerucut telah dikerjakan oleh Apollonius (sekitar 250-200 sM)!

Teori dan praktik irisan kerucut akhirnya bertemu ketika Kepler (1609) menemukan orbit planet menjadi elips, dan Newton (1687) menjelaskan fakta ini dengan hukum gravitasi. Ini pembenaran indah dari teori irisan kerucut telah sering dijelaskan dalam hal penelitian dasar menerima pahala yang lama tertunda, tetapi mungkin orang juga bisa melihatnya sebagai teguran terhadap penghinaan Yunani untuk aplikasi. Kepler tidak akan yakin yang mana. Hingga akhir hayatnya, ia paling bangga dengan teorinya yang menjelaskan jarak planet-planet dari segi lima polihedra reguler. Karakter Kepler yang menarik dan paradoks telah dijelaskan dengan hangat dalam dua buku yang sangat bagus, Koestler (1959) dan Banville (1981).

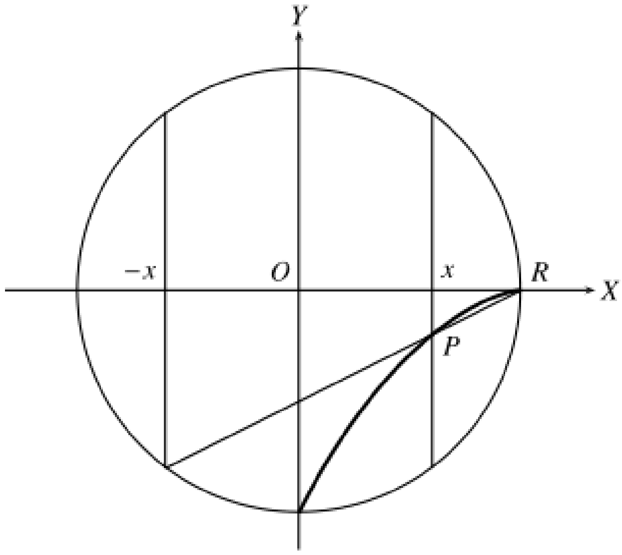
10.5 Kurva berderajad Tinggi

Orang Yunani tidak memiliki teori sistematis tentang kurva tingkat tinggi, karena mereka tidak memiliki aljabar sistematis. Mereka dapat menemukan apa yang setara dengan persamaan kartesius dari kurva individu "gejala," sebagaimana mereka menyebutnya; lihat van der Waerden (1954), hal.241 — tetapi mereka tidak mempertimbangkan persamaan secara umum atau memperhatikan sifat-sifat mereka yang relevan dengan studi kurva, misalnya, tingkatannya. Namun demikian, mereka mempelajari banyak kurva khusus yang menarik, yang Descartes dan para pengikutnya memotong gigi mereka ketika geometri aljabar akhirnya muncul pada abad ke-17. Akun yang sangat bagus dan digambarkan dengan baik dari investigasi awal ini dapat ditemukan di Brieskorn dan Knörrer (1981), Bab 1.

Pada bagian ini kita harus membatasi diri pada komentar singkat tentang beberapa contoh.

Cissoid dari Diocles (sekitar 100 SM)
Kurva ini didefinisikan menggunakan lingkaran bantu, yang untuk kenyamanan kita anggap sebagai lingkaran satuan, dan garis vertikal melalui x dan $-x$.

Ini adalah himpunan semua titik P yang terlihat pada Gambar 10.7.



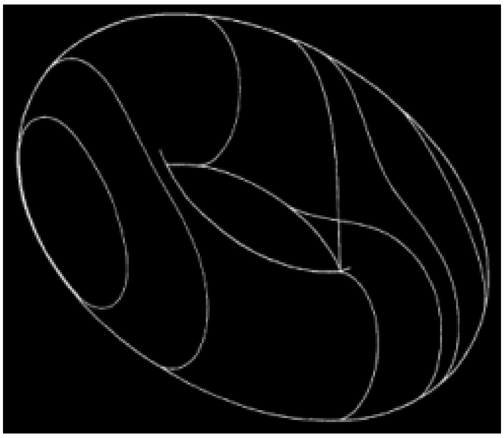
Gambar 10.7: Konstruksi Cissoid

Bagian yang diperlihatkan hasil dari memvariasikan x antara 0 dan 1. Kurva ini adalah kubik dengan persamaan kartesius

$$y^2(1+x) = (1-x)^3.$$

Persamaan ini menunjukkan bahwa jika (x, y) adalah titik pada kurva, maka demikian juga $(x, -y)$. Oleh karena itu kita mendapatkan gambaran lengkapnya dengan merefleksikan bagian yang ditunjukkan pada Gambar 10.7 pada sumbu x. Hasilnya adalah titik tajam di R, sebuah titik puncak, sebuah fenomena yang pertama kali muncul dengan kurva kubik. Diocles menunjukkan bahwa Cissoid dapat digunakan untuk menduplikasi kubus, yang masuk akal (meskipun masih belum jelas!) Begitu orang tahu bahwa kurva ini adalah kubik.

Irisan Spiric dari Perseus (sekitar 150 SM)
Terlepas dari bola, silinder, dan kerucut yang bagian-bagiannya semuanya irisan kerucut, salah satu dari sedikit permukaan yang dipelajari oleh orang Yunani adalah torus. Permukaan ini, dihasilkan dengan memutar secara melingkar tentang anaksi di luar lingkaran, tetapi dalam bidang yang sama, disebut *spira* oleh orang-orang Yunani, maka irisan *spiric* nama untuk irisan oleh bidang sejajar dengan sumbu. Irisan ini, yang pertama kali dipelajari oleh Perseus, memiliki empat bentuk berbeda secara kualitatif (lihat Gambar 10.8, yang diadaptasi dari Brieskorn dan Knörrer (1981), hal.20).

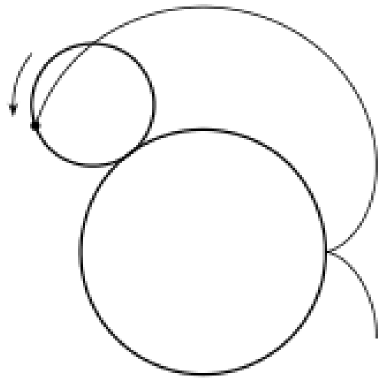


Gambar 10.8: Irisan Spiric

Bentuk-bentuk oval cembung, oval “diperas (squeezed)”, 8 gambar, dan pasangan oval ditemukan kembali pada abad ke-17 ketika geometer analitik melihat kurva derajat 4, di mana bagian *spiric* adalah contohnya. Untuk pilihan torus yang sesuai, kurva 8 gambar menjadi *lemniscate Bernoulli* dan oval cembung menjadi *oval Cassini*. Cassini (1625-1712) adalah seorang astronom terkemuka tetapi merupakan penentang teori gravitasi Newton. Dia menolak elips Kepler dan malah mengusulkan *oval Cassini* sebagai orbit untuk planet-planet.

Epicycles dari Ptolemy (140 M)
Kurva ini diketahui dari karya astronomi yang terkenal, *Almagest* dari Claudius Ptolemy. Ptolemeus sendiri menghubungkan ide itu dengan Apollonius. Tampaknya hampir pasti bahwa ini adalah Apollonius yang menguasai irisan kerucut, yang ironis, karena epiklus adalah kandidatnya untuk orbit planet, yang ditakdirkan untuk dikalahkan oleh irisan kerucut yang sama.

Suatu *epicycle*, dalam bentuknya yang paling sederhana, adalah jalur yang dilacak oleh titik pada lingkaran yang menggulung pada lingkaran lain (Gambar 10.9). *Epicycles* yang lebih rumit dapat didefinisikan dengan memiliki gulungan lingkaran ketiga pada lingkaran kedua, dan seterusnya. Orang-orang Yunani memperkenalkan kurva ini untuk mencoba mendamaikan pergerakan rumit dari planet-planet, relatif terhadap bintang-bintang tetap, dengan geometri yang didasarkan pada lingkaran. Pada prinsipnya, ini mungkin! Lagrange (1772) menunjukkan bahwa setiap gerakan di sepanjang khatulistiwa langit oleh gerakan *Epicycles*, dan versi yang lebih modern dari hasilnya dapat ditemukan di Sternberg (1969). Tetapi kesalahan Ptolemy adalah menerima kompleksitas yang tampak dari gerakan planet-planet sebagai yang sebenarnya terjadi. Seperti yang kita ketahui sekarang, gerakan menjadi sederhana ketika seseorang menganggap gerakan relatif terhadap matahari daripada ke bumi dan memungkinkan orbit menjadi ellips.



Gambar 10.9: Menghasilkan suatu *epicycle*

Epicycles masih memiliki peran dalam rekayasa, dan sifat matematika mereka menarik. Beberapa dari mereka adalah kurva tertutup dan berubah menjadi kurva aljabar (*algebraic*), yaitu, dari bentuk $p(x, y) = 0$ untuk polinomial p. Lainnya, seperti yang dihasilkan dari lingkaran bergulir yang jari-jarinya memiliki rasio irasional, terletak secara padat di daerah tertentu dari bidang dan karenanya tidak bisa aljabar (*algebraic*); kurva aljabar dalam bentuk $p(x, y) = 0$ dapat memenuhi garis lurus $y = mx+c$ hanya dalam jumlah titik terbatas, sesuai dengan akar persamaan polinom $p(x, mx + c) = 0$, dan *Episycles* padat sering berpotongan beberapa garis sebanyak takberhingga.

10.6 Catatan Biografis: Euclid

Bahkan lebih sedikit yang diketahui tentang Euclid daripada tentang Pythagoras. Kita hanya tahu bahwa ia berkembang sekitar 300 SM dan mengajar di Alexandria, kota Yunani di Mesir yang didirikan oleh Alexander Agung pada 322 SM. Dua kisah diceritakan tentang dia. Yang pertama : hal yang sama yang diceritakan tentang Menaechmus dan Alexander, meminta Euclid memberi tahu Raja Ptolemy I, "Tidak ada jalan kerajaan menuju geometri." Yang kedua menyangkut seorang siswa yang mengajukan pertanyaan abadi, "Apa yang harus saya dapatkan dari belajar matematika?" Euclid memanggil budaknya dan berkata, “Beri dia koin jika dia harus mendapat untung dari apa yang dia pelajari.”

Fakta paling penting dalam kehidupan Euclid tidak diragukan adalah tulisannya tentang *Elements*, meskipun kita tidak tahu berapa banyak matematika di dalamnya yang sebenarnya adalah karyanya sendiri. Tentu saja geometri dasar segitiga dan lingkaran telah diketahui sebelum zaman Euclid. Beberapa bagian yang paling canggih dari *Elements*, juga disebabkan oleh ahli matematika sebelumnya. Teori irasional dalam Buku V adalah karena Eudoxus (sekitar 400-477 SM), seperti halnya “metode kelelahan (*exhaustion*)” dari Buku XII (lihat Bab 4). Teori polyhedra reguler dari Buku XIII adalah karena, setidaknya sebagian, untuk Theaetetus (sekitar 415-369 SM).

Tetapi apa pun kontribusi “penelitian” Euclid mungkin, itu dikerdilkan oleh kontribusinya terhadap organisasi dan penyebaran pengetahuan matematika. Selama 2000 tahun, *Elements* tidak hanya inti dari pendidikan matematika tetapi juga inti dari budaya Barat. Upeti paling bersinar untuk *Elements* tidak, pada kenyataannya, berasal dari ahli matematika tetapi dari filsuf, politisi, dan lain-lain. Kami melihat respons Hobbes terhadap Euclid di Bagian 2.1. Berikut ini beberapa lainnya:

“Dia belajar dan hampir menguasai enam buku Euclid sejak itu dia adalah anggota Kongres. Dia menyesali keinginannya akan pendidikan, dan melakukan apa yang dia bisa untuk memenuhi keinginannya.”

“Abraham Lincoln (penulisan dirinya sendiri), Autobiografi Pendek... dia mempelajari Euclid sampai dia dapat menunjukkan dengan mudah semua proposisi dalam enam buku.”

Herndon’s *Life of Lincoln*

“Pada usia sebelas tahun, saya mulai Euclid. ... Ini salah satunya peristiwa besar dalam hidupku, sama memesonanya dengan cinta pertama. Saya tidak pernah membayangkan ada sesuatu yang begitu lezat di dunia.”

Bertrand Russell, *Autobiography*, vol. 1

Mungkin status budaya matematika yang rendah saat ini, belum lagi ketidaktahuan matematika politisi dan filsuf, mencerminkan kurangnya *Elements* yang cocok untuk dunia modern.

Bab 11

Teori Bilangan Yunani

Mungkin fitur matematika Yunani yang paling menarik dan paling modern adalah perawatannya yang tak terbatas. Orang-orang Yunani takut akan ketakterhinggaan dan mencoba menghindarinya, tetapi dengan melakukan itu mereka meletakkan dasar untuk perawatan yang ketat dari proses tak terbatas dalam kalkulus abad ke-19.

Kontribusi orisinal yang paling utama pada teori ketidakterbatasan pada zaman kuno adalah teori proporsi dan metode kelelahan. Keduanya dirancang oleh Eudoxus dan diuraikan dalam Buku V *Elements Euclid*.

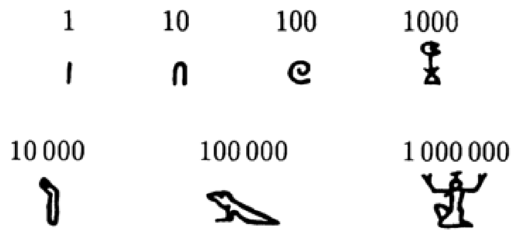
Teori proporsi mengembangkan gagasan bahwa "kuantitas" λ (apa yang sekarang kita namakan bilangan real) dapat diketahui dengan posisinya di antara bilangan rasional. Yaitu, λ diketahui jika kita mengetahui bilangan rasional kurang dari λ dan bilangan rasional lebih besar dari λ.

Metode kelelahan menggeneralisasi ide ini dari "kuantitas" ke daerah bidang atau ruang. Suatu daerah menjadi "dikenal" (dalam luas atau isi (*volume*)) ketika posisinya di antara luas atau volume yang diketahui. Sebagai contoh, kita mengetahui luas lingkaran ketika kita mengetahui luas poligon di dalamnya dan luas poligon di luarnya; kita tahu volume piramida ketika kita tahu volume tumpukan prisma di dalamnya dan di luarnya.

Dengan menggunakan metode ini, Euclid menemukan bahwa volume dari suatu tetrahedron sama dengan 1/3 dari luas dasarnya dikalikan tingginya, dan Archimedes menemukan luas segmen parabola. Keduanya mengandalkan proses tak terbatas yang mendasar bagi banyak perhitungan luas dan volume: penjumlahan dari deret geometri tak-terbatas.

11.1 Sejarah

1. Orang Mesir dan Babelonia. Simbol untuk bilangan ditemukan di sisa-sisa tulisan manusia yang paling awal. Bahkan di zaman batu awal kita menemukan mereka dalam bentuk takikan di tulang atau sebagai tanda di dinding gua. Itu adalah zaman ketika manusia hidup sebagai pemburu dan hari ini kita hanya dapat berspekulasi tentang apakah IIII misalnya dimaksudkan untuk mewakili ukuran pembunuhan. Sistem bilangan menandai awal aritmatika. Dokumen pertama kembali ke peradaban paling awal di lembah Sungai Nil, Efrat dan Tigris. Hieroglif untuk bilangan 10.000, 100.000 dan 1.000 ditemukan di gada Raja Narmer, dari dinasti Mesir pertama (sekitar 3000 SM). Jumlahnya direproduksi secara skematis di bawa ini:



Gambar-gambar yang digunakan dapat merujuk pada kejadian praktis yang terhubung dengan bilangan yang relevan; misalnya dapat menjadi simbol untuk pita pengukur dengan 100 satuan. Di sisi lain juga dimungkinkan bahwa simbol-simbol tersebut mewakili objek-objek yang huruf awalnya sama dengan kata untuk bilangan yang sesuai. Bilangan-bilangan baru dibentuk oleh notasi jumlah (*additive*) berdasarkan penjajaran, misalnya simbol = 221000 atau = 10010. Dengan demikian penambahan dan pengurangan tidak menimbulkan masalah. Misalnya, = 11 ditambahkan ke = 12 memberi = 23. Perkalian dan pembagian direduksi menjadi suksesi operasi kelipatan dan separuh. Pecahan yang dihasilkan dinyatakan sebagai jumlah pecahan satuan (pecahan yang pembilangnya 1), tanda digunakan untuk menunjukkan bahwa simbol bilangan di atasnya ditempatkan mewakili penyebut dari pecahan satuan. Jadi misalnya pecahan 1/12 ditulis sebagai . Untuk mewakili pecahan 3/12, perhitungan tiga kali satu per dua belas dilakukan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} 1).\ \frac{1}{12} &\quad \text{(yaitu satu kali } \frac{1}{12} = \frac{1}{12}\text{)} \\ 2).\ \frac{1}{6} &\quad \text{(dua kalinya dari } \frac{1}{12}\text{)} \end{aligned}$$

dengan demikian pecahan $\frac{3}{12}$ ditulis sebagai $\frac{1}{6}\ \frac{1}{12}$ dengan simbol .

Untuk melakukan perhitungan semacam ini dengan *pecahan umum*, kita harus mampu mengekspresikan *bagian* dan kelipatan pecahan satuan sebagai jumlah pecahan satuan dengan penyebut-penyebut ganjil. Papirus Rhind (sekitar 1650 SM) berisi tabel yang memberikan dekomposisi pecahan $2/n$ untuk bilangan bulat ganjil n. (Untuk perincian perhitungan Mesir, lihat *Papirus Moskow* [28] dan *Papirus Rhind* [23].)

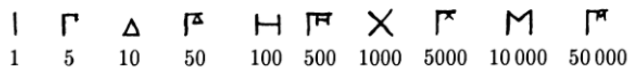
Orang Babilonia menggunakan simbol-simbol paku pada tablet tanah liat. Ini didasarkan pada notasi posisi desimal dan seksagesimal campuran: ▼ untuk $1, 60^1, 60^2, \cdots$; sedangkan $<$ untuk $10, 10.60^1, 10.60^2, \cdots$ dan seterusnya. Simbol nol tidak selalu digunakan oleh orang Babilonia, dan mereka tidak pernah menggunakan tanda seperti titik desimal sebagaimana yang digunakan. Dalam notasi posisi, peran nol adalah tanda yang menandai "celah (*gap*)". Sebuah tanda semacam ini, dua tanda ‹‹, sudah dapat ditemukan dalam teks Babelonia tua dari Susa (*Text* 12, hal. 4), tetapi hanya dalam kasus yang terisolasi (TROPFKE [29], hal. 28).

Dengan tidak adanya tanda seperti itu, nilai posisi harus disimpulkan dalam setiap kasus dari konteks. Jadi, misalnya, $<<$ ▼ $<$ bisa berarti bilangan apa saja $21\ .\ 60 + 10$ atau $21\ .\ 60^2 + 10\ .\ 60^1$ atau $21\ .\ 60^2 + 10$ dan seterusnya. Contoh pecahan sexagesimal adalah $<<<$ untuk $0,30 = 30/60 = 1/2$ atau ▼▼▼<< ▼▼▼<< untuk $0,64 = 6\frac{1}{60^1} + 40.\frac{1}{60^2} = \frac{1}{9}$. (Untuk perincian perhitungan Babilonia, lihat NEUGEBAUER [20], BRUINS-RuTTEN [7].)

Orang Babilonia menunjukkan diri mereka sangat berbakat ahli metologi dan aljabar. Mereka mengembangkan tabel canggih untuk digunakan dalam perhitungan yang melibatkan perkalian dan pembagian, dan untuk memecahkan persamaan kuadratik dan kubik. Mereka memberikan aturan untuk menyelesaikan persamaan kuadratik campuran dengan proses "menyelesaikan kuadrat" dan bahkan untuk memecahkan persamaan kubik campuran dengan bantuan tabel $x^2(x + 1)$. Juga akan disebutkan metode mereka mendekati akar persamaan dalam Bab berikutnya. Di semua acara, aman untuk menyatakan bahwa orang Babelonia, dengan metode perhitungan yang terampil dan cerdik mereka, memiliki pengaruh yang besar terhadap perkembangan aritmatika dan aljabar berikutnya.

2. Yunani. Sistem bilangan orang Yunani bersifat dekadik, meskipun tidak bersifat posisional. Sistem sebelumnya menggunakan simbol individu untuk langkah-langkah dekaden, yang merupakan huruf awal dari kata-kata yang sesuai untuk bilangan yang bersangkutan. Dengan menggabungkan simbol untuk 5 dengan simbol lainnya, langkah-langkah perantara $50, 500, \cdots$ dapat diwakili, sehingga himpunan simbol berjalan sebagai berikut:

Sistem yang kemudian mewakili angka dengan huruf (sekitar 450 SM)



digunakan dalam teks matematika. Ini terdiri dari 24 huruf alfabet Yunani standar dengan tiga simbol lebih lanjut dari tradisi oriental:

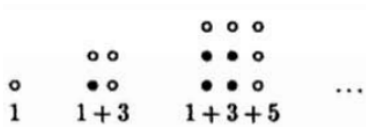
$1-9$	$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, ϛ, ζ, η, θ	(ϛ $=6$)
$10-90$	$\iota, \kappa, \lambda, \mu, \nu, \xi, o, \pi$, ϙ	(ϙ $=90$)
$100-900$	$\rho, \sigma, \tau, \upsilon, \varphi, \chi, \psi, \omega$, ϡ	(ϡ $=900$)
$1000-9000$	$,\alpha,\ ,\beta, \ldots$	(written with a subscript accent on the left)
$10\,000$	M	($M = M\upsilon\rho\iota\acute{\alpha}\varsigma$)

Menjumlah bilangan ditunjukkan oleh penjajaran simbol yang sesuai, sehingga misalnya $\iota\beta = 10 + 2 = 12, \sigma\kappa\beta = 200 + 20 + 2 = 222$, ${}_{\iota}\alpha\tau\varepsilon = 1000 + 300 + 5 = 1305$. Jumlah puluhan ribu (berjuta-juta) ditulis di atas simbol M, sehingga, misalnya

$$\overset{\beta}{M}\ ,\varepsilon\mu\gamma = 25\,000 + 40 + 3 = 25\,043.$$

Pecahan satuan biasanya ditunjukkan dengan aksen superskrip di sebelah kanan huruf yang menunjukkan penyebut pecahan. Pecahan yang lebih umum ditulis dalam berbagai cara yang berbeda (misalnya, dengan menulis simbol untuk pembilang di bawah simbol untuk penyebut). Sistem Yunani, tidak seperti notasi desimal yang biasa dikenal, oleh karena itu tidak murni posisi dan perhitungan agak membosankan.

Di samping aritmatika dengan bilangan-bilangan yang diwakili oleh simbol-simbol, orang dapat menemukan dari tahap awal sebuah representasi bilangan-bilangan dengan penghitung (seperti manik-manik sempoa, kerikil, dan sebagainya), yang merupakan sarana untuk menemukan teorema aritmetika. Demikian Aristoteles menyebutkan Eurytos Pythagoras yang dikatakan "telah menentukan berapa bilangan ($\dot{\alpha}\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma$) dari objek apa dan meniru bentuk-bentuk makhluk hidup dengan kerikil (wot) menurut cara mereka yang membawa bilangan ke dalam bentuk segitiga atau persegi" (ARISTOTLE [1], 1092b, 10.12). Misalnya, bilangan ganjil dapat diatur secara berurutan dengan cara yang diilustrasikan di bawah ini untuk membentuk persegi



Dengan membagi persegi menjadi bagian-bagian yang sejajar dengan salah satu diagonal dan menghitung jumlah kerikil di setiap baris kita dapat membacanya

$$2^2 = 1 + 2 + 1, \qquad 3^2 = 1 + 2 + 3 + 2 + 1,$$

dan, secara umum,

$$n^2 = 1 + 2 + \cdots + n + \cdots + 2 + 1,$$

sehingga

$$1 + 2 + \cdots + (n - 1) = \frac{1}{2}(n^2 - n)$$

(Aristoteles [2], III 4, 203a, 13-15, Becker [3], hal. 34ff).

Sementara orang-orang Mesir dan Babelonia puas dengan perkembangan teknik numerik yang sangat canggih, orang-orang Pythagoras terutama tertarik pada signifikansi filosofis angka. Dalam filosofi mereka, seluruh alam semesta dicirikan oleh bilangan-bilangan dan hubungan mereka, dan dengan demikian muncul masalah mendefinisikan secara umum apa itu bilangan. Euclid mendefinisikan dalam *Elements*, VII, 2, bilangan sebagai "kuantitas terdiri dari satuan (unit)" yang sebelumnya (*Elements*, VII, 1) mengatakan bahwa unit adalah "bahwa berdasarkan setiap hal yang ada masing-masing disebut satu." Karena sebuah unit tidak terdiri dari unit, baik Euclid maupun Aristoteles tidak menganggap unit sebagai bilangan, melainkan sebagai "dasar penghitungan, atau sebagai asal dari bilangan." Ada gema dari definisi Euclidean ini dalam definisi Cantor tentang bilangan kardinal sebagai himpunan yang terdiri dari unit-unit (Cantor [8], p. 283).

11.2 Takut pada Ketakberhinggaan

Penalaran tentang ketidakterbatasan adalah salah satu fitur karakteristik matematika serta sumber konflik utamanya. Kita melihat, dalam Bab 1, konflik yang muncul dari penemuan irasional, dan dalam bab ini kita akan melihat bahwa penolakan orang-orang Yunani terhadap bilangan irasional hanyalah bagian dari penolakan umum terhadap proses yang tak terbatas. Bahkan, hingga akhir abad ke-19 sebagian besar matematikawan enggan menerima ketakterbatasan sebagai lebih dari "potensi". Ketakterhinggaan suatu proses, koleksi, atau besarnya dipahami sebagai kemungkinan kelanjutannya yang tidak terbatas, dan tidak lebih pasti bukan kemungkinan penyelesaian akhirnya. Misalnya, bilangan asli $1, 2, 3, \cdots$, dapat diterima sebagai potensi tak hingga dihasilkan dari 1 dengan proses menambahkan 1 tanpa menerima bahwa ada totalitas lengkap $\{1, 2, 3, \cdots\}$. Hal yang sama berlaku untuk sebarang barisan $x_1, x_2, x_3, \cdots$ (dari bilangan rasional, katakanlah), di mana x_{n+1} diperoleh dari x_n oleh aturan yang pasti.

Namun kemungkinan yang menakjubkan muncul ketika x_n cenderung menuju x. Jika x adalah sesuatu yang sudah kami terima untuk alasan geometris, katakan maka sangat menggoda untuk melihat x sebagai "penyelesaian" dari barisan $x_1, x_2, x_3, \cdots$. Tampaknya orang-orang Yunani takut untuk menarik kesimpulan seperti itu. Menurut tradisi, mereka ketakutan oleh paradoks Zeno, sekitar 450 SM.

Kita tahu tentang argumen Zeno hanya melalui Aristoteles, yang mengutipnya dalam Fisika untuk membantahnya, dan tidak jelas apa yang ingin dicapai Zeno sendiri. Adakah, misalnya, kecenderungan spekulasi tentang ketidakterbatasan yang tidak disetujui? Argumen-argumennya sangat ekstrem sehingga hampir bisa menjadi parodi argumen longgar tentang ketidakterbatasan yang ia dengar di antara orang-orang sezamannya. Perhatikan paradoks pertamanya, dikotomi:
"*Tidak ada gerakan karena apa yang dipindahkan harus tiba di tengah (tentu saja) sebelum tiba di akhir.*"

Aristotle, Physics, Book VI, Ch. 9

Argumen lengkapnya barangkali adalah bahwa sebelum pergi ke suatu tempat orang harus terlebih dahulu mendapatkan setengah jalan, dan sebelum seperempat jalan, dan sebelumnya seperdelapan, sampai takberhingga langkah. Penyelesaian lengkap dari barisan takhingga ini tampaknya tidak lagi mustahil bagi sebagian besar matematikawan, karena ia mewakili tidak lebih dari sekumpulan titik tak terbatas dalam interval terbatas. Itu pasti telah menakuti orang-orang Yunani, karena dalam semua bukti mereka, mereka sangat berhati-hati untuk menghindari ketakberhinggaan dan limit untuk menyelesaikannya.

Proses matematika pertama yang kita kenali sebagai takberhingga mungkin dirancang oleh Pythagoras, misalnya, hubungan perulangan

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + 2y_n \\ y_{n+1} &= x_n + y_n. \end{aligned}$$

untuk menghasilkan penyelesaian bilangan bulat dari persamaan $x^2 - 2y^2 = \pm 1$. Ada kemungkinan bahwa hubungan ini muncul dari upaya untuk memahami $\sqrt{2}$, dan mudah bagi kita untuk melihat bahwa $x_n/y_n \to \sqrt{2}$ bila $n \to \infty$.

Namun, kecil kemungkinan bahwa Pythagoras akan melihatnya $\sqrt{2}$ sebagai hasil "limit" atau melihat barisan sebagai objek yang bermakna sama sekali. Yang paling bisa kita katakan adalah bahwa, dengan menyatakan pengulangan, Pythagoras menyiratkan barisann dengan limit n menuju takhingga menghasilkan $\sqrt{2}$, tetapi hanya generasi kemudian yang hebat matematika dapat menerima barisan yang tak berhingga seperti itu dan menghargai pentingnya menentukan limit.

Dalam masalah di mana kita akan menemukan itu alami untuk mencapai penyelesaian α dengan proses limit, orang-orang Yunani malah akan menghilangkan penyelesaian apa pun kecuali α. Mereka akan menunjukkan bahwa bilangan apa pun $< \alpha$ terlalu kecil dan bilangan apa pun $> \alpha$ terlalu besar untuk menjadi penyelesaiannya. Pada bagian berikut kita akan mempelajari beberapa contoh gaya pembuktian ini dan melihat bagaimana akhirnya menghasilkan buah dalam dasar matematika. Namun, sebagai metode untuk menemukan penyelesaian untuk masalah, itu steril: bagaimana seseorang menebak bilangan α di tempat pertama? Ketika matematikawan kembali ke masalah menemukan limit pada abad ke-17, mereka tidak menemukan gunanya untuk metode ketat (*rigorous*) orang-orang Yunani. Metode *infinitesimals* (sangat kecil sekali) abad ke-17 yang diragukan dikritik oleh Zeno pada waktu itu, Uskup Berkeley, tetapi sedikit yang dilakukan untuk memenuhi keberatannya sampai kemudian, karena infinitesimal tampaknya tidak mengarah pada hasil yang salah. Dedekind, Weierstrass, dan yang lainnya di abad ke-19 yang akhirnya memulihkan standar ketelitian Yunani.

Kisah tentang keketatan (rigor) yang hilang dan keketatan (rigor) kembali terjadi secara menakjubkan ketika manuskrip Archimedes yang sebelumnya tidak diketahui, *The Method*, ditemukan pada tahun 1906. Di dalamnya ia mengungkapkan bahwa hasil terdalamnya ditemukan menggunakan argumen ketakberhinggan yang meragukan, dan hanya kemudian terbukti dengan teliti. Karena, seperti yang dia katakan, "Tentu saja lebih mudah untuk menyediakan bukti ketika kita sebelumnya telah memperoleh beberapa pengetahuan tentang pertanyaan dengan metode ini, daripada menemukannya tanpa pengetahuan sebelumnya."

Pentingnya pernyataan ini melampaui pernyataan bahwa takberhingga dapat digunakan untuk menemukan hasil yang awalnya tidak dapat diakses oleh logika. Archimedes mungkin adalah ahli matematika pertama yang cukup terang untuk menjelaskan bahwa ada perbedaan antara cara teorema ditemukan dan cara mereka dibuktikan.

11.3 Teori Proporsi Eudoxus

Teori proporsi hasil peran serta Eudoxus (sekitar 400-350 SM) dan dijabarkan dalam Buku V *Element* Euclid. Tujuan dari teori ini adalah untuk memungkinkan panjang (dan jumlah geometris lainnya) untuk diperlakukan sebagai bilangan yang tepat, sementara hanya mengakui penggunaan bilangan rasional. Kami melihat motivasi untuk ini: orang-orang Yunani tidak dapat menerima bilangan irasional, tetapi mereka menerima jumlah geometris irasional seperti diagonal dari persegi satuan. Untuk menyederhanakan eksposisi teori, misalkan kita sebut panjang rasional jika mereka adalah kelipatan rasional dari suatu panjang tetap.

Gagasan Eudoxus adalah untuk mengatakan bahwa panjang λ ditentukan oleh panjang rasional yang kurang dari itu dan yang lebih besar dari itu. Lebih tepatnya, katanya $\lambda_1 = \lambda_2$ jika ada panjang rasional $< \lambda_1$ juga $< \lambda_2$, dan sebaliknya. Demikian juga $\lambda_1 < \lambda_2$ jika ada panjang rasional $> \lambda_1$ tetapi $< \lambda_2$. Definisi ini menggunakan rasional untuk memberikan gagasan panjang yang sangat tajam sambil menghindari penggunaan tak terhingga secara jelas. Tentu saja himpunan panjang rasional yang tak terbatas $<$ λ hadir dalam roh, tetapi Eudoxus menghindari menyebutkannya dengan membicarakan panjang rasional yang sewenang-wenang $< \lambda$.

Teori proporsi begitu sukses sehingga menunda pengembangan teori bilangan real selama 2000 tahun. Ini ironis, karena teori proporsi dapat digunakan untuk mendefinisikan bilangan irasional sama panjangnya. Namun dapat dimengerti, karena panjang irasional yang umum, seperti diagonal dari persegi satuan, muncul dari konstruksi yang secara intuitif jelas dan terbatas dari sudut pandang geometris. Setiap pendekatan aritmatika ke $\sqrt{2}$, baik dengan barisan, desimal, atau pecahan kontinu, adalah takberhingga dan karenanya kurang intuitif. Sampai abad ke-19 ini tampaknya alasan yang baik untuk mempertimbangkan geometri menjadi fondasi yang lebih baik untuk matematika daripada aritmatika. Lalu masalah dari geometri muncul di kepala, dan matematikawan mulai takut intuisi geometris sebanyak yang mereka takutkan sebelumnya takut. Ada pembersihan alasan geometris dari buku teks dan rekonstruksi matematika yang rajin atas dasar bilangan dan himpunan bilangan. Teori himpunan dibahas lebih lanjut dalam Bab berikutnya. Cukup untuk mengatakan, untuk saat ini, teori himpunan tergantung pada penerimaan ketakberhinggaan secara utuh.

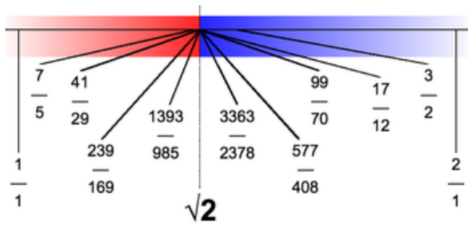
Keindahan teori proporsi adalah kemampuannya untuk beradaptasi dengan iklim baru ini. Sebagai ganti panjang rasional, ambil bilangan rasional. Sebagai ganti membandingkan panjang irasional yang ada dengan menggunakan panjang rasional, buatlah bilangan irasional dari awal dengan menggunakan himpunan rasional! Panjang $\sqrt{2}$ ditentukan oleh dua himpunan rasional positif

$$L_{\sqrt{2}} = \{r \in \mathbb{Q} \,|\, r^2 < 2\}, \qquad U_{\sqrt{2}} = \{r \in \mathbb{Q} \,|\, r^2 \geq 2\}$$

Dedekind (1872) memutuskan untuk memisalkan $\sqrt{2}$ menjadi pasangan himpunan ini! Secara umum, misalkan sebarang partisi dari rasional positif ke dalam himpunan L, U sedemikian sehingga setiap anggota L lebih kecil dari setiap anggota U menjadi bilangan real positif. Gagasan ini sekarang dikenal sebagai potongan Dedekind, lebih dari sekadar geliat dari Eudoxus; itu memberikan konstruksi yang lengkap dan seragam dari semua bilangan real, atau titik-titik di garis, hanya menggunakan rasional. Singkatnya, ini adalah penjelasan dari kontinu dalam hal diskrit, akhirnya menyelesaikan konflik mendasar dalam matematika Yunani. Dimengerti Dedekind senang dengan prestasinya. Dia menulis

"Pernyataan itu begitu sering dibuat bahwa kalkulus diferensial berkaitan dengan besarnya kontinu, namun penjelasan tentang kontinuitas ini tidak diberikan di mana pun .... Hanya kemudian tetap menemukan asal mula sebenarnya dalam unsur-unsur aritmatika dan dengan demikian pada saat yang sama aman definisi nyata dari esensi kontinuitas. Saya berhasil pada tanggal 24 November 1858."

Dedekind (1872), p.2



Gambar 11.1: Dedekind menggunakan potongannya untuk membangun bilangan irasional dan real.

11.3.1 Tentang Potongan Dedekind (Dedekind Cuts)

Dalam matematika, Dedekind Cuts, nama Ahli matematika Jerman Richard Dedekind tetapi sebelumnya dipertimbangkan oleh Joseph Bertrand, adalah metode konstruksi untuk bilangan real dari bilangan-bilangan rasional. Potongan Dedekind adalah partisi dari bilangan rasional menjadi dua himpunan tidak kosong A dan B, sehingga semua elemen A lebih kecil dari semua elemen B, dan A tidak memuat elemen terbesar. Himpunan B mungkin atau tidak memiliki elemen terkecil di antara rasional. Jika B memiliki elemen terkecil di antara rasional, potongan yang sesuai adalah dengan rasional tersebut (lihat Gambar 11.1). Bila tidak, potongan itu mendefinisikan bilangan irasional tunggal yang, secara longgar, mengisi "celah" antara A dan B. Dengan kata lain, A berisi setiap bilangan rasional lebih kecil dari potongan, dan B berisi setiap bilangan rasional lebih besar dari atau sama dengan potongan. Potongan irasional disamakan dengan bilangan irasional yang tidak diatur. Setiap bilangan real, rasional atau tidak, disamakan dengan satu dan hanya satu potongan rasional.

Potongan Dedekind dapat digeneralisasi dari bilangan rasional ke setiap himpunan yang terurut secara total (*totally ordered set*) dengan mendefinisikan potongan Dedekind sebagai partisi dari urutan total yang diatur menjadi dua bagian A dan B yang tidak kosong, sehingga A adalah tertutup ke bawah (artinya untuk semua a di A, $x \leq a$ menyiratkan bahwa x ada di A juga) dan B tertutup ke atas, dan A tidak memuat elemen terbesar. Lihat juga kelengkapan (*completeness*) atau (teori urutan).

Sangat mudah untuk menunjukkan bahwa potongan Dedekind di antara bilangan real didefinisikan secara tunggal oleh potongan yang sesuai di antara bilangan rasional. Demikian pula, setiap potongan real identik dengan potongan yang dihasilkan oleh bilangan real spesifik (yang dapat diidentifikasi sebagai elemen terkecil dari himpunan B). Dengan kata lain, garis bilangan di mana setiap bilangan real didefinisikan sebagai potongan Dedekind dari rasional adalah sebuah kontinum lengkap tanpa kesenjangan (*gap*) lebih lanjut.

Definisi
Suatu potongan Dedekind adalah partisi dari rasional menjadi dua himpunan bagian A dan B sedemikian rupa sehingga

1. $A \neq \emptyset$.

2. $A \neq \mathbb{Q}$.

3. Bila $x, y \in \mathbb{Q}, x < y$ and $y \in A$, maka $x \in A$. (Adalah "tertutup kebawah".)

4. Bila sebarang $x \in A$, maka ada suatu $y \in A$ sedemikian hingga $y > x$. (Tidak memuat suatu elemen terbesar.)

Dengan melonggarkan dua persyaratan pertama, secara resmi diperoleh garis bilangan real yang diperpanjang (*extended*).

Representasi
Lebih simetris untuk menggunakan notasi (A, B) untuk pemotongan Dedekind, tetapi masing-masing A dan B menentukan yang lainnya. Ini bisa menjadi penyederhanaan, dalam hal notasi jika tidak lebih, untuk satu konsentrasi misalnya "setengah", yang lebih kecil dan memanggil setiap him-

punan ke bawah yang tertutup A tanpa elemen terbesar sebagai "potongan Dedekind".

Bila himpunan terurut S adalah lengkap, maka, untuk setiap potongan Dedekind (A, B) dari S, himpunan B harus memiliki elemen minimal b, sehingga didapat A adalah interval $(-\infty, b)$, dan B interval $[b, +\infty)$. Dalam hal ini, kita mengatakan bahwa b direpresentasikan oleh potongan (A, B).

Tujuan penting dari pemotongan Dedekind adalah untuk bekerja dengan himpunan bilangan yang tidak lengkap. Potongan itu sendiri dapat merepresentasikan bilangan yang tidak ada dalam koleksi bilangan pada aslinya (paling sering bilangan rasional). Potongan dapat merepresentasikan suatu bilangan b, meskipun bilangan-bilangan yang termuat dalam dua himpunan A dan B nyatanya tidak mancakup bilangan b yang direpresentasikan oleh potongan (A, B).

Misalnya bila A dan B hanya berisi bilangan rasional, mereka masih dapat dipotong pada $\sqrt{2}$ dengan meletakkan setiap bilangan rasional negatif dalam A, bersama dengan setiap bilangan non-negatif yang kuadratnya kurang dari 2; hal yang sama B akan berisi setiap bilangan rasional positif yang kuadratnya lebih besar dari atau sama dengan 2. Meskipun tidak ada nilai rasional untuk $\sqrt{2}$, bila bilangan rasional dipartisi menjadi A dan B dengan cara ini, partisi itu sendiri merepresentasikan bilangan irasional.

Urutan Potongan

Anggap satu potongan Dedekind (A, B) lebih kecil dari potongan Dedekind lainnya (C, D) (dari superset yang sama) jika A adalah himpunan bagian sejati dari C. Secara ekivalen, jika D adalah himpunan bagian sejati dari B. Juga potong (A, B) lebih kecil dari (C, D). Dengan cara ini, himpunan inklusi dapat digunakan untuk merepresentasikan urutan bilangan-bilangan, dan semua hubungan lainnya (lebih besar dari, lebih kecil dari atau sama dengan, sama dengan, dan seterusnya) dapat juga dibuat dari relasi yang sama.

Himpunan semua potongan Dedekind sendiri merupakan himpunan yang terurut secara linear (*linearly ordered set*) dari suatu himpunan. Selain itu, himpunan potongan Dedekind memiliki sifat batas-paling kecil, yaitu, setiap himpunan bagian tidak-kosong dari himpunan semua potongan Dedekind yang memiliki batas atas memiliki batas atas terkecil. Dengan demikian, membangun himpunan potongan Dedekind melayani tujuan menanamkan himpunan terurut S, yang mungkin tidak memiliki sifat batas-atas-terkecil, diantarnya (biasanya lebih besar) himpunan terurut secara linear yang memiliki sifat bermanfaat ini.

11.3.2 Konstruksi Bilangan Real

Potongan Dedekind khusus dari himpunan bilangan rasional $\mathbb{Q}$ diberikan oleh partisi (A, B) dengan

$$\begin{aligned} A &= \{a \in \mathbb{Q} \mid a^2 < 2 \text{ atau } a < 0\}, \\ B &= \{b \in \mathbb{Q} \mid b^2 \geq 2 \text{ atau } b \geq 0\}. \end{aligned}$$

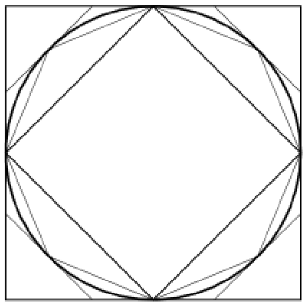
Potongan ini merepresentasikan bilangan irasional $\sqrt{2}$ dalam konstruksi Dedekind. Ide dasarnya adalah bahwa kita menggunakan himpunan, yang merupakan himpunan semua bilangan rasional yang kuadratnya lebih kecil dari 2, untuk "merepresentasikan" bilangan irasional $\sqrt{2}$, dan selanjutnya, dengan mendefinisikan operator aritmatika yang tepat atas himpunan ini (penjumlahan, pengurangan, penggandaan , dan pembagian), himpunan ini (bersama dengan operasi aritmatika ini) membentuk bilangan real yang sudah dikenal.

Untuk menetapkan ini, orang harus menunjukkan bahwa A itu benar-benar potongan (sesuai dengan definisi) dan barisan kuadrat di A, yaitu $A \times A$ (silakan merujuk ke tautan di atas untuk definisi yang tepat tentang bagaimana penggandaan pemotongan didefinisikan), adalah 2 (perhatikan bahwa berbicara dengan keras ini adalah potongan $\{x \mid x \in \mathbb{Q}, x < 2\}$). Untuk menunjukkan bagian pertama, ditunjukkan bahwa untuk sebarang rasional positif x dengan $x^2 < 2$, ada rasional y dengan $x < y$ dan $y^2 < 2$. Pilihannya adalah $y = \dfrac{2x+2}{x+2}$ bekerja, dengan demikian A memang merupakan suatu potongan. Sekarang dibekali dengan perkalian antar pemotongan, mudah untuk memeriksa bahwa $A \times A \leq 2$ (pada dasarnya, ini karena $x \times y \leq 2$, $\forall x, y \in A, x, y \geq 0$). Karena itu untuk menunjukkan bahwa $A \times A = 2$, ditunjukkan bahwa $A \times A \geq 3$, dan cukup ditunjukkan bahwa untuk sebarang $r < 2$, ada $x \in A, x^2 < r$. Untuk ini kita perhatikan bahwa jika $x > 0, 2 - x^2 = \varepsilon > 0$, maka $2 - y^2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$ untuk y yang dibangun di atas, ini berarti bahwa kita memiliki barisan di A yang kuadratnya bisa menjadi sangat dekat dengan 2, hal ini menyelesaikan buktinya.

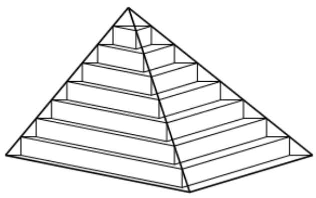
Perhatikan bahwa persamaan $b^2 = 2$ tidak dapat dipenuhi karena $\sqrt{2}$ tidak rasional.

11.4 Metode Keletihan (*Exhaustion*)

Metode kelelahan, juga peran serta dari Eudoxus, adalah generalisasi dari teori proporsinya. Sama seperti panjang irasional ditentukan oleh panjang rasional di kedua sisi itu, jumlah yang lebih umum tidak diketahui menjadi ditentukan dengan menutup perkiraan secara sebarang menggunakan bilangan yang dikenal. Contoh yang diberikan oleh Eudoxus (dan dijabarkan dalam Buku XII dari *Elemen* Euclid) adalah perkiraan lingkaran oleh poligon dalam dan luar (Gambar 11.2) dan perkiraan piramida oleh tumpukan prisma (Gambar 11.3, yang menunjukkan perkiraan paling jelas, bukan yang cerdik yang sebenarnya digunakan oleh Euclid). Dalam kedua kasus bilangan-bilangan yang mendekati adalah kuantitas yang diketahui, berdasarkan teori proporsi dan teorema bahwa luas segitiga $= \frac{1}{2}$alas $\times$ tinggi.



Gambar 11.2: Aproksimasi Lingkaran



Gambar 11.3: Aproksimasi Piramida

Di sisi lain, geometri dasar juga menunjukkan bahwa luas P_i sebanding dengan kuadrat R^2, dari jari-jari. Menulis luas sebagai $P_i(R)$ dan menggunakan teori proporsi untuk menangani rasio luas, didapat

$$P_i(R) : P_i(R') = R^2 : R'^2. \tag{11.1}$$

Misalkan $C(R)$ menyatakan luas dari lingkaran berjari-jari R, dan anggaplah

$$C(R) : C(R') < R^2 : R'^2. \tag{11.2}$$

Dengan memilih P_i yang mendekati C cukup dekat juga ddapatkan

$$P_i(R) : P_i(R') < R^2 : R'^2$$

yang bertentangan (11.1). Karenanya tanda $<$ di (11.2) salah, dan dengan cara yang sama dapat ditunjukkan bahwa $>$ juga salah. Jadi satu-satunya kemungkinan adalah

$$C(R) : C(R') = R^2 : R'^2,$$

yaitu, luas lingkaran sebanding dengan kuadrat jari-jarinya.

11.5 Membangun Persegi Ajaib Tripel Pythagoras

Pada bagian ini dibahas bagaimana membangun persegi ajaib dengan bilangan-bilangan tripel Pythagoras.

11.5.1 Persegi Ajaib dibangun oleh tripel $(8, 15, 17)$

Tripel bilangan $(8, 15, 17)$ memenuhi

$$8^2 + 15^2 = 17^2.$$

Sebagaimana diketahui jumlah berikut

$$F(n) = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2, n \geq 1. \tag{11.3}$$

Sehingga didapat

$$\begin{aligned} F(8) &= 1 + 3 + 5 + \cdots + 15 = 8^2 \\ F(15) &= 1 + 3 + 5 + \cdots + 19 = 15^2 \\ F(17) &= 1 + 3 + 5 + \cdots + 33 = 17^2. \end{aligned}$$

Dan dapat ditulis

$$15^2 = 17^2 - 8^2$$

sehingga didapat

$$\begin{aligned} F(15) &= 1 + 3 + 5 + \cdots + 33 - (1 + 3 + 5 + \cdots + 15) \\ &= 17 + 19 + 21 + 23 + 25 + 27 + 29 + 31 + 33 \end{aligned}$$

Jadi kita memiliki barisan 9 bilangan ganjil mulai dari 17 dan berakhir pada 33, yaitu, $(17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33)$. Sebagaimana telah diketahui bahwa bilangan-bilangan dalam dalam barisan yang merupakan kuadrat sempurna selalu memungkinkan untuk dibuat persegi ajaib. Dalam hal ini berukuran 3×3. Persegi ajaib dengan ukuran 3×3 menggunakan bilangan $(17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33)$ diberikan oleh

Persegi ajaib Gambar 11.4 berukuran 3×3 dengan setiap baris dan kolom serta diagonal jumlahnya 75 dan jumlah total semua elemnya adalah kuadrat sempurna yaitu : $225 = 15^2 = 17^2 - 8^2$.

			75
27	17	31	75
29	25	21	75
19	33	23	75
75	75	75	75

Gambar 11.4: Persegi Ajaib Tripel Pythagoras

11.5.2 Tes untuk Menghasilkan Persegi Ajaib dari Tripel Pythagoras

Selanjutnya kita lihat bagaimana kita dapat memeriksa bahwa tripel Pythagoras primitif yang diberikan menghasilkan jumlah kuadrat sempurna ajaib Dari (11.3), kita tahu bahwa sempurna Dari (3), kita tahu bahwa

$$F(n) = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2, n \geq 1.$$

Selanjutnya kita perhatikan,

$$F(m) = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2m-1) = m^2, m \geq 1, m \geq n.$$

Selisih $F(m) - F(n)$ diberikan oleh

$$F(m) - F(n) = 1+3+5+\cdots+(2m-1) - (1+3+5+\cdots+(2n-1) = m^2 - n^2$$

Setelah disederhanakan didapat

$$F(m) - F(n) = (2n+1) + (2n+3) + \cdots + (2m-1) = m^2 - n^2$$

Banyaknya suku diberikan oleh

$$b_s = \frac{(2m-1) - (2n+3)}{2} + 2 = m - n$$

Dengan demikian, jika banyaknya suku yaitu, $m-n$ adalah kuadrat sempurna dan lebih besar dari atau sama dengan 9, maka, kita dapat menulis persegi ajaib berorder $\sqrt{m-n} \geq 3$. Dengan demikian, persegi ajaib dibentuk oleh suku-suku

$$(2n+1), (2n+3), \cdots, (2m-1)$$

menghasilkan persegi ajaib jumlah kuadrat sempurna diberikan oleh $m^2 - n^2$. Dengan persegi ajaib jumlah kuadrat sempurna, dapat dipahami bahwa banyaknya elemen persegi ajaib adalah kuadrat sempurna.

Hasil 1 : Dalam tripel Pythagoras (a, b, c), sebarang selisih

$$c - a \text{ atau } c - b, \; c > a \; c > b$$

adalah suatu kudrat sempurnah lebih besar atau sama dengan 9, maka selalu bisa ditulis suatu persegi ajaib dengan jumlah kuadrat sempurnah.

Berikut ini. tinjau bentuk:

$$\{a, b, c\} \Rightarrow \{\text{order persegi ajaib, elemen pertama dari barisan, elemen terakhir barisan, jumlah ajaib, jumlah semua elemen persegi ajaib}\}$$

Contoh,

$$\{8, 15, 17\} \Rightarrow \{3, 17, 33, 75, 225\}. \tag{11.4}$$

Penyajian bilangan pada (11.4) mempunyai arti sebagai berikut

$$\begin{aligned} 3 &\rightarrow \text{order dari persegi ajaib} \\ 17 &\rightarrow \text{suku pertama barisan} \\ 33 &\rightarrow \text{suku terakhir barisan} \\ 75 &\rightarrow \text{jumlah persegi ajaib} \\ 225 &\rightarrow \text{jumlah seluruh elemen dari persegi ajaib adalah} \\ & \text{kuadrat sempurnah : } 225 = 15^2. \end{aligned}$$

Dalam hal ini, 9 ganjil ganjil berturut-turut yang menghasilkan persegi ajaib adalah $(17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33)$

Hasil 2 : Untuk mencapai hasil yang muncul dalam persamaan (11.4) didapat rumus berikut:

$$\{a, b, c\} \Rightarrow \left\{ \left\{ \frac{c^2 - a^2}{\sqrt{c-a}}, c^2 - a^2, 2a + 1, 2c - 1, \sqrt{c-a} \right\}, \left\{ \frac{c^2 - b^2}{\sqrt{c-b}}, c^2 - b^2, 2b + 1, 2c - 1, \sqrt{c-b} \right\} \right\} \tag{11.5}$$

Hasil 1 mudah digunakan untuk menguji keberadaan persegi ajaib sementara **Hasil 2** berguna untuk mengantisipasi semua nilai yang mungkin muncul dipersegi ajaib. Kita dapat menggunakan **Hasil 2** untuk menguji juga, tetapi akan lebih banyak pekerjaan.

11.5.3 Triples Primitif Menghasilkan Persegi Ajaib

Pengujian hanya hingga tiga digit tripel, yaitu, kurang dari 1000, ada sebanyak 158 tripel primitif. Menerapkan prosedur yang diberikan dalam **Hasil 1**, dapat ditemukan bahwa ada sebanyak 137 kemungkinan tripel primitif yang menghasilkan persegi ajaib. Di bawah ini adalah daftar kemungkinan tripel primitif yang menghasilkan persegi ajaib, dihitung berdasarkan rumus (11.5) hanya sampai 29 :

1. $\{8, 15, 17\} \Rightarrow \{3, 17, 33, 75, 225\}$.
2. $\{12, 35, 37\} \Rightarrow \{5, 25, 73, 245, 1225\}$.
3. $\{16, 63, 65\} \Rightarrow \{7, 33, 129, 567, 3969\}$.
4. $\{20, 21, 29\} \Rightarrow \{3, 41, 57, 147, 441\}$.
5. $\{20, 99, 101\} \Rightarrow \{9, 41, 201, 1089, 9801\}$.
6. $\{24, 143, 145\} \Rightarrow \{11, 49, 289, 1859, 20449\}$.
7. $\{28, 45, 53\} \Rightarrow \{5, 57, 105, 405, 2025\}$.
8. $\{28, 195, 197\} \Rightarrow \{13, 57, 393, 2925, 38025\}$.
9. $\{32, 255, 257\} \Rightarrow \{15, 65, 513, 4335, 65025\}$.
10. $\{33, 56, 65\} \Rightarrow \{3, 113, 129, 363, 1089\}$.
11. $\{36, 77, 85\} \Rightarrow \{7, 73, 169, 847, 5929\}$.
12. $\{36, 323, 325\} \Rightarrow \{17, 73, 649, 6137, 104329\}$.
13. $\{39, 80, 89\} \Rightarrow \{3, 161, 177, 507, 1521\}$.
14. $\{40, 399, 401\} \Rightarrow \{19, 81, 801, 8379, 159201\}$.
15. $\{44, 117, 125\} \Rightarrow \{9, 89, 249, 1521, 13689\}$.
16. $\{44, 483, 485\} \Rightarrow \{21, 89, 969, 11109, 233289\}$.
17. $\{48, 55, 73\} \Rightarrow \{5, 97, 145, 605, 3025\}$.
18. $\{48, 575, 577\} \Rightarrow \{23, 97, 1153, 14375, 330625\}$.
19. $\{51, 140, 149\} \Rightarrow \{3, 281, 297, 867, 2601\}$.
20. $\{52, 165, 173\} \Rightarrow \{11, 105, 345, 2475, 27225\}$.
21. $\{52, 675, 677\} \Rightarrow \{25, 105, 1353, 18225, 455625\}$.
22. $\{56, 783, 785\} \Rightarrow \{27, 113, 1569, 22707, 613089\}$.
23. $\{57, 176, 185\} \Rightarrow \{3, 353, 369, 1083, 3249\}$.
24. $\{60, 91, 109\} \Rightarrow \{7, 121, 217, 1183, 8281\}$.
25. $\{60, 221, 229\} \Rightarrow \{13, 121, 457, 3757, 48841\}$.
26. $\{60, 899, 901\} \Rightarrow \{29, 121, 1801, 27869, 808201\}$.
27. $\{65, 72, 97\} \Rightarrow \{5, 145, 193, 845, 4225\}$.
28. $\{68, 285, 293\} \Rightarrow \{15, 137, 585, 5415, 81225\}$.
29. $\{69, 260, 269\} \Rightarrow \{3, 521, 537, 1587, 4761\}$.

11.5.4 Persegi Ajaib dihasilkan oleh tripel $(12, 35, 37)$

Menurut triple $\{12, 35, 37\} \Rightarrow \{5, 25, 73, 245, 1225\}$, akan didapat persegi ajaib berukuran 5 dengan 25 bilangan ganjil berurutan mulai dari 25 dan berakhir pada 73, yaitu, $(25, 27, 29, \ldots, 71, 73)$. Persegi ajaib berukuran 5 ini adalah Persegi ajaib di atas adalah pan diagonal dengan jumlah ajaib

		245	245	245	245	245
	25	37	49	61	73	245
245	59	71	33	35	47	245
245	43	45	57	69	31	245
245	67	29	41	53	55	245
245	51	63	65	27	39	245
	245	245	245	245	245	245

$S_5 = 245$ dan jumlah semua elemen adalah nilai kuadrat sempurna $1225 = 35^2 = 37^2 - 12^2$.

11.5.5 Persegi Aljaib Dihasilkan oleh Triple $(16, 63, 65)$

Menurut triple $\{16, 63, 65\} \Rightarrow \{7, 33, 129, 567, 3969\}$, kandidapat persegi ajaib dengan order 7 dengan 49 bilangan ganjil berturut-turut mulai dari 33 dan berakhir pada 129, yaitu, $(33, 35, 37, \cdots, 127, 129)$. Persegi ajaib beroder 7 ini diberikan oleh Persegi ajaib di atas adalah pan diagonal dengan jumlah

		567	567	567	567	567	567	567
	33	49	65	81	97	113	129	567
567	111	127	45	47	63	79	95	567
567	77	93	109	125	43	59	61	567
567	57	73	75	91	107	123	41	567
567	121	39	55	71	87	89	105	567
567	101	103	119	37	53	69	85	567
567	67	83	99	115	117	35	51	567
	567	567	567	567	567	567	567	567

ajaib $S_{7\times7} = 567$, dan jumlah semua elemen memberikan kuadrat sempurna $3969 = 63^2 = 65^2 - 16^2$.

11.5.6 Persegi Ajaib Dihasilkan oleh Triple $(20, 99, 101)$

Menurut triple $\{20, 99, 101\} \Rightarrow \{9, 41, 201, 1089, 9801\}$, didapat persegi ajaib berorder 9 dengan 81 bilangan ganjil berturut-turut mulai dari 41 dan berakhir pada 201, yaitu $(41, 43, 45, \cdots, 199, 201)$. Di bawah ini adalah dua persegi ajaib beroder 9. Satu dengan nilai *normal* dan yang lainnya adalah kuadrat *bimagik* dengan nilai kuadrat untuk setiap anggota: Persegi ajaib

										1089
	41	75	85	109	119	135	159	169	197	1089
	105	115	143	149	183	193	55	65	81	1089
	163	173	189	51	61	89	95	129	139	1089
	93	49	59	137	99	127	187	161	177	1089
	133	107	123	201	157	167	83	45	73	1089
	191	153	181	79	53	69	147	103	113	1089
	67	77	57	117	145	101	179	195	151	1089
	125	141	97	175	185	165	63	91	47	1089
	171	199	155	71	87	43	121	131	111	1089
	1089	1089	1089	1089	1089	1089	1089	1089	1089	1089

di atas adalah pan diagonal dengan jumlah ajaib $S_{9\times 9} = 1089$, dan jumlah semua elemen memberikan kuadrat sempurna $9801 = 99^2 = 101^2 - 20^2$. Jumlah bimagik adalah $Sb_{9\times 9} = 151449$. Menariknya, 9801 adalah kebalikan dari 1089. Persegi bimagic diberikan oleh :

										151449
	1681	5625	7225	11881	14161	18225	25281	28561	38809	151449
	11025	13225	20449	22201	33489	37249	3025	4225	6561	151449
	26569	29929	35721	2601	3721	7921	9025	16641	19321	151449
	8649	2401	3481	18769	9801	16129	34969	25921	31329	151449
	17689	11449	15129	40401	24649	27889	6889	2025	5329	151449
	36481	23409	32761	6241	2809	4761	21609	10609	12769	151449
	4489	5929	3249	13689	21025	10201	32041	38025	22801	151449
	15625	19881	9409	30625	34225	27225	3969	8281	2209	151449
	29241	39601	24025	5041	7569	1849	14641	17161	12321	151449
	151449	151449	151449	151449	151449	151449	151449	151449	151449	151449

Bab 12

Pengantar tentang Pythagoras

Pada bagian pertama bab pembuka ini, kami meninjau dua bukti berbeda dari Teorema Pythagoras, satu karena Euclid dan satu lagi karena mantan presiden Amerika Serikat, James Garfield. Pada bagian yang sama kami juga meninjau beberapa analog berdimensi lebih tinggi dari Teorema Pythagoras. Kemudian dalam bab ini kita mendefinisikan tripel Pythagoras; jelaskan apa artinya triple Pythagoras menjadi primitif; dan memperjelas hubungan antara tripel dan poin Pythagoras dengan koordinat rasional pada lingkaran unit. Pada akhirnya, kami membuat daftar masalah yang akan kami minati dalam buku ini. Dalam catatan di akhir bab ini kita berbicara tentang Pythagoras dan kepercayaan mereka, terkadang aneh. sejarah tiga kali lipat Pythagoras.

12.1 Teorema Pythagoras

Teorema Pythagoras : Dalam segitiga siku-siku ABC kuadrat pada sisi miring AB sama dengan jumlah kuadrat di sisi lain AC dan BC, yaitu,

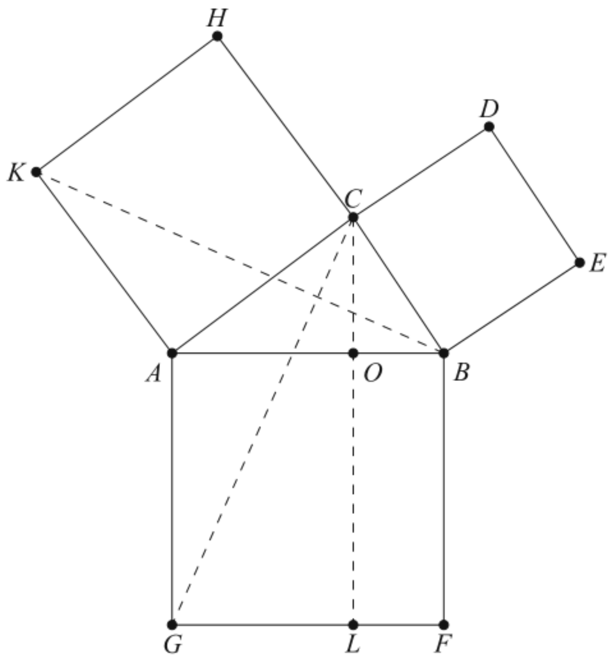
$$AB^2 = AC^2 + BC^2.$$

Teorema ini biasanya dikaitkan dengan Pythagoras (580 SM-500 SM) atau setidaknya ke aliran Pythagoras, dan untuk alasan itu persamaan

$$x^2 + y^2 = z^2, \tag{12.1}$$

dipenuhi oleh panjang sisi dari segitiga siku-siku, disebut sebagai Persamaan Pythagoras.

Ada ratusan bukti untuk Teorema Pythagoras. Disisni akan diberikan bukti yang terkandung dalam *Elemen Euclid* untuk sementara waktu. Buktinya benar-benar geometris dan sangat banyak dalam tradisi Pythagoras.



Gambar 12.1: Bukti Euclid Teorema Pythagoras

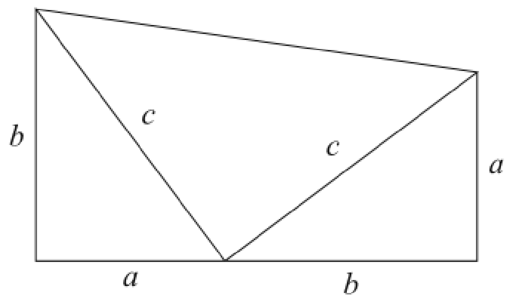
Dalam argumennya, AB^2 ditafsirkan sebagai luas persegi yang dibangun di sisi AB, dan teorema dibuktikan dengan menunjukkan bahwa luas persegi yang dibangun oleh sisi AB sama dengan jumlah luas persegi yang dibangun oleh sisi AC dan BC.

Bukti (Euclid). Gambarlah prsegi $ACHK$, $CBED$, dan $ABFG$ seperti pada Gambar 12.1. Pilih titik O pada AB sehingga $CO \perp AB$. Gambar ketinggian CO dari C dan perpanjang untuk memotong GF di L. Gambar CG dan KB.

Karena $ABFG$ adalah persegi, $AG = AB$. Demikian pula, $AC = AK$. Karena $\angle GAB$ dan $\angle CAK$ adalah sudut tegak lurus, $\angle GAC = \angle BAK$. Dengan kenyataan fakta-fakta ini, dapat disimpulkan $\triangle\ KAB \simeq \triangle\ CAG$. Khususnya luas segitiga ini adalah sama.

Karena sudut ACB dan HCA sama-sama sudut tegak lurus, segmen garis HB melewati C. Akibatnya, luas KAB adalah setengah dari luas $ACHK$ persegi. Selanjutnya, luas CAG adalah setengah luas persegi panjang $OLGA$ karena bentuk-bentuknya memiliki dasar AG yang sama dan memiliki ketinggian yang sama. Oleh karena itu, luas $ACHK$ sama dengan luas $OLGA$. Argumen serupa menunjukkan bahwa luas persegi $CBED$ sama dengan luas persegi panjang $OLFB$. Akhirnya, jumlah luas $OLGA$ dan $OLFB$ adalah luas $ABFG$ persegi. $\square$

Ini sama sekali bukan bukti termudah dari Teorema Pythagoras. Di sini kita mencatat bukti terkenal yang diterbitkan oleh James Garfield, presiden ke-20 Amerika Serikat, lima tahun sebelum ia menjabat. Bukti ini muncul dalam New England Journal of Education pada tahun 1876.



Gambar 12.2: Bukti Pythagoras Presiden James Garfield

Bukti (Garfield). Misalkan a, b dan c adalah sisi-sisi dari segitiga siku-siku. Perhatikan trapesium pada Gambar 12.2.

Dihitung luas trapesium dengan dua cara berbeda. Pertama-tama ingat rumus standar untuk luas trapesium: Jika sisi sejajar trapesium memiliki panjang x, y dan tinggi t, maka luas tersebut sama dengan $t(x+y)/2$. Dengan rumus ini, luas trapesium adalah $(a+b)^2/2$. Di sisi lain, trapesium adalah terdiri dari tiga segitiga siku-siku: dua dengan sisi siku-siku sama dengan a, b, dan satu dengan sisi siku-siku sama dengan c. Untuk alasan ini luas trapesium sama dengan

$$2.\frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}c^2.$$

Dengan dua ekspresi untuk luas yang sama satu dengan yang lainnya didapat

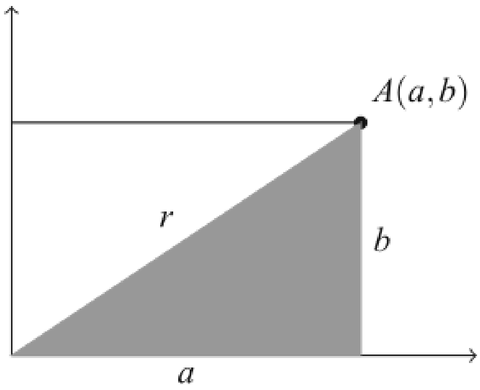
$$2.\frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}c^2 = \frac{1}{2}(a+b)^2.$$

Dengan menyederhanakan sisi-sisi persamaan memberikan Persamaan Pythagoras

$$c^2 = a^2 + b^2. \qquad \square$$

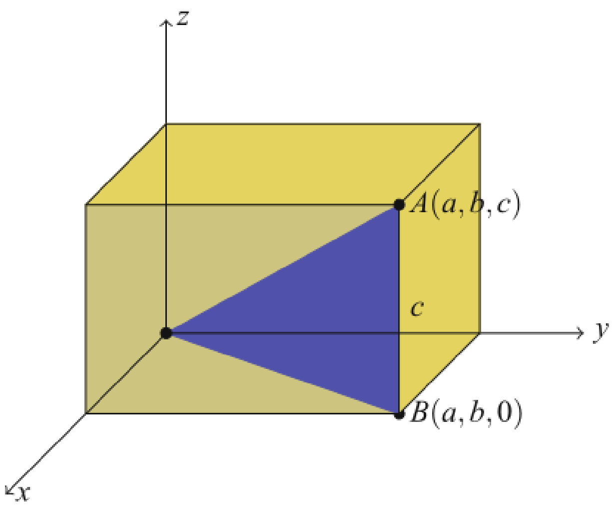
Teorema Pythagoras adalah teorema dasar dengan banyak aplikasi. Misalnya, identitas utama trigonometri, yaitu untuk setiap sudut θ

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$



Gambar 12.3: Teorema Pythagoras dalam Geometri Analitik

tidak lain adalah Teorema Pythagoras dalam segitiga siku-siku dengan sisi miring panjang 1. Teorema ini memiliki interpretasi yang menarik dalam geometri analitik. Misalkan kita memiliki titik A dengan koordinat (a, b) dalam bidang xy seperti pada Gambar 12.3. Jika r adalah jarak dari A



Gambar 12.4: Teorema Pythagoras dalam Geoemetri 3D

ke titik asal, maka gunakan Teorema Pythagoras ke segitiga warna abu-abu didapat

$$r^2 = a^2 + b^2.$$

Misalkan, di sisi lain, kita memiliki bilangan tetap $r > 0$ dan ingin diidentifikasi semua titik (x, y) yang memiliki jarak r ke titik asal. Ini tentu saja lingkaran jari-jari r yang berpusat pada titik asal dengan persamaan

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

Gambar ini dapat digeneralisasi ke dimensi yang lebih tinggi. Misalkan kita memiliki titik $A(a, b, c)$ dalam ruang tiga dimensi $\mathbb{R}^3$ seperti pada Gambar 12.4.

Sekali lagi misalkan r adalah jarak dari titik $A(a, b, c)$ ke titik asal $O(0, 0, 0)$. Menerapkan Teorema Pythagoras ke segitiga biru memberikan

$$r^2 = OB^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Demikian pula, jika kita memiliki titik dengan koordinat $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ di $\mathbb{R}^n$, jarak r ke titik asal memenuhi

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2. \tag{12.2}$$

Kita dapat menggunakan hasil ini untuk menuliskan persamaan bola dalam $\mathbb{R}^n$ dengan jari-jari r yang berpusat pada titik asal.

12.2 Pertanyaan-pertanyaan

Memahami solusi bilangan bulat dari Persamaan Pythagoras dan mengeksplorasi sifat-sifat baik dari segitiga siku-siku dengan sisinya bilangan bulat telah menjadi sumber inspirasi bagi matematikawan sepanjang sejarah matematika secara umum, dan teori bilangan pada khususnya. Tujuan kami dalam pembahasan ini adalah untuk mengeksplorasi sejumlah masalah teoretis yang muncul sehubungan dengan segitiga siku-siku. Seperti yang kita lihat beberapa saat yang lalu, studi tentang segitiga siku-siku dan solusi untuk Persamaan Pythagoras berhubungan erat dengan studi titik dengan koordinat rasional (atau bilangan bulat) pada lingkaran dan bola. Ini adalah beberapa pertanyaan yang kami bahas dalam bahasan ini:

1. Apa solusi primitif dari Persamaan Pythagoras? Apakah geometri ada hubungannya dengan menemukan solusi? Dibahas pertanyaan-pertanyaan ini di Bab berikutnya.

2. Bilangan bulat apa yang merupakan luas dari segitiga siku-siku? Ini adalah pokok bahasan Bab berikutnya.

3. Bilangan-bilangan bulat apa yang merupakan sisi dari segitiga siku-siku? Pertanyaan ini dijawab dalam Bab berikutnya.

4. Berapa banyak solusi yang ada untuk berbagai persamaan modulo Pythagoras? Kami menjawab pertanyaan ini di Bab berikutnya. Untuk apa artinya berbicara tentang bilangan modulo bilangan bulat, lihat Bab berikutnya.

5. Bagaimana titik-titik dari bilangan bulat didistribusikan di lingkaran yang luas? Beberapa hasil dalam arah ini diperoleh dalam Bab-bab berikutnya.

6. Kira-kira, berapa banyak tripel Pythagoras (x, y, z) yang ada dengan $z < B$, untuk bilangan B yang sangat besar? Jawaban untuk pertanyaan ini ada di Bab berikutnya.

7. Bagaimana titik dengan koordinat rasional didistribusikan pada lingkaran satuan yang berpusat pada titik asal dalam $\mathbb{R}^2$? Ini dibahas dalam Bab berikutnya.

Sisa buku ini dikhususkan untuk mengembangkan bahan latar belakang untuk hasil ini, atau menjelajahi topik terkait.

Catatan

Pythagoras

Pythagoras tentu saja layak mendapat pujian atas kontribusi mereka pada matematika, jika tidak ada yang lain untuk formalisasi konsep pembuktian mereka. Walaupun mereka mungkin sebenarnya adalah orang pertama dalam sejarah yang telah menulis bukti formal **Teorema Pythagoras**, tidak ada keraguan bahwa teorema itu sendiri sudah diketahui jauh sebelumnya. Sebagai contoh, tablet tanah liat Babilonia Plimpton 322 yang dijelaskan dalam [9, §2.6], bertanggal antara tahun 1900 dan 1600 SM, berisi lima belas pasang bilangan asli x, z, yang masing-masing satu diantarnya sisimiring dan sisi tegak dari segitiga siku-siku dengan sisi bilangan bulat. Meskipun tablet tidak mengandung diagram yang menunjukkan segitiga siku-siku, sulit membayangkan bilangan-bilangan ini akan muncul dalam konteks selain Teorema Pythagoras. Selain itu, mengingat ukuran entrinya, 8161 dan 18541, antara lain, adalah wajar untuk mengasumsikan bahwa bilangan-bilangan ini bukan hasil dugaan acak, dan bahwa matematikawan Babilonia yang bertanggung jawab atas isi tablet sebenarnya memiliki metode untuk menghasilkan solusi dengan bilangan bulat.

Matematikawan di Mesir juga tentu menyadari Teorema Pythagoras. Papirus Matematika Kairo, dijelaskan lagi dalam [9, §2.6], berisi berbagai masalah, beberapa di antaranya cukup canggih, berhadapan langsung dengan Teorema Pythagoras. Ada juga bukti yang menunjukkan bahwa teorema dan sesuatu yang menyerupai bukti geometris itu diketahui oleh ahli matematika Cina sekitar 300 tahun sebelum Euclid, c.f. [9, §3.3]. Dickson [16, Ch. IV] melaporkan bahwa ahli matematika India, Baudhayana dan Apastamba, telah memperoleh sejumlah solusi untuk Persamaan Pythagoras secara independen dari Yunani sekitar 500 SM.

Bagaimanapun, Pythagoras dituntun ke bilangan irasional dari Teorema Pythagoras. Kline [29, Ch. 3] menulis: "Penemuan rasio yang tidak dapat dibandingkan [bilangan irasional] dikaitkan dengan Hippasus dari Metapontum (abad ke-5 SM). Pythagoras seharusnya berada di laut pada saat itu dan telah melemparkan Hippasus ke laut karena telah menghasilkan elemen di alam semesta yang menyangkal doktrin Pythagoras bahwa semua fenomena di alam semesta dapat dikurangi menjadi bilangan bulat atau rasio mereka."

Ini kemungkinan besar merujuk pada penemuan $\sqrt{2}$. Beberapa sejarawan membantah cerita bahwa Hippasus dilemparkan ke laut. Argumen dasarnya adalah bahwa tenggelamnya para penemu terdengar tidak masuk akal, mengingat fakta bahwa pada saat penulisan ini, fundamentalisme dalam segala bentuk dan bentuknya telah diberantas di dunia, skeptisisme para sejarawan ini dibenarkan. Tampaknya tidak ada bukti historis bahwa Pythagoras sendiri pernah tahu tentang bilangan irasional yang, sesedikit yang kita ketahui tentang kehidupan lelaki itu, ini tidak mengejutkan. Referensi paling awal untuk bilangan irasional adalah dalam Plato's Theaetetus [38, hal 200] di mana dikatakan tentang Theodorus: "Sedang menulis untuk kami sesuatu tentang akar, seperti akar tiga atau lima, menunjukkan bahwa mereka tidak dapat dibandingkan oleh unit: ia memilih contoh lain hingga tujuh belas di sana ia berhenti."

Karena Theodorus melampui 2 maka agaknya ini berarti bahwa irasionalitas akar 2 pasti sudah diketahui. Bahkan ada yang menyebutkan hal ini dalam meneruskan Aristoteles Prior Analytics [3, §23] dan menulis di suatu tempat: "buktikan tesis awal dari sebuah hipotesis, ketika sesuatu yang mustahil dihasilkan dari asumsi kontradiktif. Misalnya, seseorang membuktikan bahwa diagonal tidak dapat dibandingkan karena bilangan ganjil ternyata sama dengan bahkan jika ada yang menganggap itu sepadan."

Untuk mempelajari lebih lanjut tentang Pythagoras dan sekolahnya, kami rujuk pembaca ke [9], terutama Bab 3. Untuk kontribusi filosofis dari Pythagoras, lihat buku fantastis Russell [42]. Untuk matematika Yunani secara umum, lihat Artman [5]. Untuk melihat beberapa tulisan asli dari para penguasa Yunani, lihat Thomas [51].

Tripel Pythagoras sepanjang sejarah

Proclus, dalam komentarnya tentang Euclid, menyatakan bahwa Pythagoras telah memperoleh rumpun tripel Pythagoras

$$\begin{cases} x = 2\alpha + 1, \\ y = 2\alpha^2 + 2\alpha, \\ z = 2\alpha^2 + 2\alpha + 1, \end{cases}$$

untuk α bilangan asli, lih. [16, §IV]. Seperti yang akan kita lihat di §3.1 rumpun ini tidak mencakup semua solusi. Euclid memperoleh solusi

$$\begin{cases} x = \alpha\beta\gamma, \\ y = \frac{1}{2}\alpha(\beta^2 - \gamma^2), \\ z = \frac{1}{2}\alpha(\beta^2 + \gamma^2), \end{cases}$$

Diophantus mungkin adalah orang pertama yang menulis solusinya

$$\begin{cases} x = m^2 - n^2, \\ y = 2mn, \\ z = m^2 + n^2. \end{cases} \tag{12.3}$$

Dickson [16, §IV] menyebutkan teks Arab anonim dari abad kesepuluh di mana kondisi yang diperlukan dan cukup diturunkan untuk bilangan bulat m, n sehingga triple Persamaan (12.3) primitif. Referensi yang sama berisi banyak karya lain oleh banyak ahli matematika yang menyediakan berbagai formulasi dari solusi dari Persamaan Pythagoras.

Tujuan kami di sini bukan untuk meninjau sejarah Persamaan Pythagoras secara keseluruhan referensi [9,16] melakukan pekerjaan yang mengesankan dalam meninjau sejarah subjek, meskipun, lihat Referensi Sejarah dalam Catatan untuk Bab 2. Tujuan kami dalam menyebutkan anekdot terisolasi di atas adalah untuk menyoroti fakta bahwa matematika, seperti semua cabang pengetahuan manusia lainnya, berkembang sangat lambat dan kadang-kadang apa yang di belakang terlihat sangat jelas, butuh bertahun-tahun, berabad-abad, dan kadang-kadang ribuan tahun, untuk berkembang dan menjadi dewasa. Kami kadang-kadang merasa lebih pintar daripada para pendahulu kami karena telah mempelajari karya-karya mereka, tetapi kenyataan bahwa orang-orang yang berpikiran statis tentang kemasyarakatan sama-sama cerdas dan bekerja keras seperti yang terbaik dari kita.

Bab 13

Teori bilangan dasar

Dalam bab ini kita membahas teori bilangan dasar dan mengatur notasi yang akan digunakan secara bebas di seluruh sisa buku ini. Bab ini dimulai dengan gagasan dasar tentang pembagian dan bilangan prima dengan tujuan untuk membuktikan Teorema Dasar Aritmatika, Teorema 2.19. Kita diberi teori Sisa Cina Teorema (Teorema 2.24), Teorema Kecil Fermat (Teorema 2.26), Teorema Euler (Teorema 2.31), didiskusikan sifat-sifat dasar dari fungsi totient ϕ, dan dipelajari polinomial modulo akhir dari diskusi singkat bilangan asli dan induksi; mengulas dua metode kriptografi standar berdasarkan teori bilangan; dan akhirnya, dinyatakan dugaan Artin akan akar primitif.

13.1 Bilangan alam, induksi matematika, dan Prinsip Terurut Secara Baik

Bilangan $1, 2, 3, \ldots$, disebut bilangan asli, dan himpunan semua bilangan asli dinotasikan oleh $\mathbb{N}$. Sifat yang menentukan himpunan bilangan alam adalah sebagai berikut:

Sifat 13.1.1 (Induksi matematika). Misalkan $A \subset \mathbb{N}$ sedemikian hingga

- $1 \in A$;
- $x \in A$, berakibat $x + 1 \in A$.

Maka $A = \mathbb{N}$. $\square$

Sifat 13.1.2 (Prinsip Terurut Secara Baik). Setiap subset tak-kosong dari himpunan bilangan asli memiliki elemen terkecil. $\square$

Sebagai contoh, jika kita mempertimbangkan himpunan bagian dari himpunan bilangan alam yang terdiri dari semua bilangan genap, maka elemen terkecil dari himpunan ini adalah bilangan 2; atau, jika himpunan bagian adalah himpunan semua kelipatan dari 15, maka elemen terkecil adalah 15. Secara intuitif, Prinsip Terurut Secara Baik adalah benar karena himpunan bilangan alam tidak turun sepenuhnya, meskipun ini tentu saja tidak sebuah bukti. Faktanya, Prinsip Terurut Secara Baik ekivalen dengan induksi matematika.

Teorema 13.1.1 Prinsip Terurut Secara Baik adalah logika ekivalen dengan induksi matematika.

Bukti. Pertama-tama ditunjukkan bahwa induksi matematika mengakibatkan Prinsip Terurut Secara Baik. Misalkan P_n adalah pernyataan berikut: Setiap subset $\mathbb{N}$ yang berisi bilangan x sehingga $x \leq n$ memiliki elemen terkecil. Jelas P_1 benar, karena dalam kasus ini subset akan berisi 1, dan 1 akan menjadi elemen terkecil. Jadi sekarang anggaplah kita tahu P_k benar untuk sebarang $k \in \mathbb{N}$, dan ditunjukkan P_{k+1} benar. Misalkan $A \subset \mathbb{N}$ sedemikian rupa sehingga A memuat beberapa elemen x dengan $x \leq k + 1$. Jika A memuat beberapa elemen y dengan $y \leq k$, maka validitas P_k menyiratkan bahwa A harus memiliki elemen terkecil. Jadi asumsikan tidak ada elemen dalam A yang kurang dari atau sama dengan k. Karena kami berasumsi bahwa A memuat beberapa elemen kurang dari atau sama dengan $k + 1$, tetapi tidak kurang dari atau sama dengan k. Hal ini menyimpulkan bahwa $k + 1 \in A$, dan bahwa $k + 1$ adalah elemen terkecil dari A.

Selanjutnya, ditunjukkan bahwa Prinsip Terurut Secara Baik mengakibatkan induksi matematika. Misalkan $A \subset \mathbb{N}$ sedemikian hingga

- $1 \in A$;
- sebarang $x \in A$ berakibat $x + 1 \in A$.
- Tetapi $A \neq \mathbb{N}$.

Misalkan $B = N - A$. Dengan asumsi $B \subset \mathbb{N}$ tidak kosong. Dengan Prinsip Terurut secara Baik B memiliki elemen terkecil b. Karena $1 \in A$, $b \neq 1$, dan sebagai hasilnya $b - 1 \in \mathbb{N}$. Di sisi lain, $b - 1 < b$, dan seperti yang kita asumsikan bahwa b adalah elemen terkecil dari B, ini berarti $b - 1 \notin B$. Akibatnya, $b - 1 \in A$, dan pernyataan terakhir ini menyiratkan bahwa $(b - 1) + 1 \in A$, yaitu, $b \in A$, suatu kontradiksi. Jadi haruslah $A = \mathbb{N}$. $\square$

13.2 Dapat dibagi dan faktorisasi prima

Definisi 13.2.1 Untuk bilangan bulat a, b dengan $b \neq 0$, kita katakan b **membagi** a jika ada $c \in \mathbb{Z}$ sedemikian rupa sehingga $a = bc$. Bilangan bulat b kemudian disebut **pembagi** a, dan a disebut **kelipatan** b. Dalam hal ini, kita menulis $b \,|\, a$. Suatu bilangan alam p disebut **prima** jika memiliki tepat empat pembagi yang berbeda. Untuk bilangan bulat a, b dan n, dengan $n \neq 0$, kita menulis $a \equiv b \mod n$, dan mengatakan a kongruen dengan b modulo n, jika $n \,|\, a - b$. □

Misalnya, $3 \,|\, (-6)$ sebab $-6 = 3.(-2)$. Bilangan 5 adalah bilangan prima, karena pembagi-nya adalah $\pm 1, \pm 5$; 6 bukan bilangan prima karena dapat dibagi oleh $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$, dan 1 bukan bilangan prima karena hanya memiliki dua pembagi ± 1. Akhirnya, $13 \equiv 7 \mod 3$ sebab $3 \mid (13 - 7) = 6$. Kongruensi modulo 0 adalah persamaan.

Lemma berikut berkaitan dengan relasi ekivalen.

Lemma 13.2.1 Untuk bilangan bulat n, modulo n kongruensi adalah relasi ekivalen.

Bukti. Misalkan R adalah modulo n kongruensi. Jadi untuk $a, b \in \mathbb{Z}$ yang memenuhi $a \equiv b \mod n$ bila dan hanya bila aRb dengan $a, b \in \mathbb{Z}$. Sehingga didapat

1. Untuk sebarang $a \in \mathbb{Z}$, maka $n \,|\, 0 = a - a$. Jadi $a \equiv a \mod n$. Dengan demikian aRa.

2. Misalkan aRb untuk $a, b \in \mathbb{Z}$. Hal ini berarti bahwa $a \equiv b \mod n$ atau $n \,|\, b - a = -(a - b)$. Akibatnya juga $n \,|\, a - b$. Jadi bRa dengan $a, b \in \mathbb{Z}$.

3. Misalkan aRb dan bRc untuk $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Maka $a \equiv b \mod n$ dan $b \equiv c \mod n$ atau $n \mid b - a$ dan $n \mid c - a$. Sehingga didapat $a - b = k_0 n$ untuk suatu $k_0 \in \mathbb{Z}$ dan $b - c = k_1 n$ untuk suatu $k_1 \in \mathbb{Z}$. Akibatnya $a - c - k_1 n = k_0 n$ atau $a - c = (k_0 + k_1)n$ dengan $k_0 + k_1\mathbb{Z}$ (sebab $k_0, k_1 \in \mathbb{Z}$). Jadi $n \,|\, (a - c)$ atau aRc untuk $a, c \in \mathbb{Z}$. □

Definisi 13.2.2 Kelas ekivalen hubungan kongruensi disebut *kelas kongruensi* modulo n. Kelas kongruensi dari suatu bilangan bulat $a \neq 0$ dilambangkan dengan $[a]_n$. Himpunan semua kelas kongruensi modulo n dilambangkan dengan $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. □

Lemma 13.2.2 Himpunan $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ memiliki struktur grup yang didefinisikan oleh

$$[a]_n + [b]_n := [a + b]_n.$$

Bukti. Elemen identitas operasi diberikan oleh $[0]_n$. Invers dari elemen $[a]_n$ adalah $[-a]_n$. Asosiatif langsung dari asosiatif operasi tambah grup $\mathbb{Z}$. $\square$

Teorema 13.2.1 (**Algoritma Pembagian**). Untuk bilangan bulat a, b, dengan $b \neq 0$, ada tunggal, bilangan bulat q_0, r_0 dengan $0 \leq r_0 < |b|$, sehingga

$$a = q_0 b + r_0.$$

Jika kita mengijinkan nilai negatif r, kita dapat memilih q_0, r_0 sedemikian hingga

1. $-\frac{|b|+1}{2} \leq r_0 \leq \frac{|b|-1}{2}$, bila b adalah ganjil;

2. $-\frac{|b|}{2} + 1 \leq r_0 \leq \frac{|b|}{2}$, bila b adalah genap.

Bukti. Dengan mengganti q dengan $-q$ jika perlu, cukup untuk membuktikan teorema untuk $b > 0$. Jika a, b, didefinisikan

$$S = \{a - qb \,|\, q \in \mathbb{Z}, a - qb \in \mathbb{N}\}.$$

Jelas bahwa $S \subset \mathbb{N}$. Kami mengklaim bahwa S tidak kosong. Untuk melihat ini, ada dua kasus:

- Bila $a > 0$, maka dipilih $q = 0$. Dalam hal ini $a - 0b = a > 0$,dan $a \in S$.

- Bila $a < 0$ dan $b > 0$, maka dipilih $q = 2a$. Dalam hal ini $a - qb = a - 2ab = -a(2b - 1) > 0$. Terlihat bahwa $S \neq \emptyset$.

Karena S adalah tak-kosong, Sifat 13.1.2 menyatakan bahwa S memiliki elemen terkecil, sebut saja x. Menurut definisi S, ada $q \in \mathbb{Z}$ sedemikian hingga $x = a - bq$. Kami sekarang mengklaim bahwa $x \leq b$. Andaikan $x = a - bq > b$, maka $x - b = a - (b + 1)q > 0$. Ini berarti $x - b \in S$, dan karena $x - b < x$, ini bertentangan dengan pilihan x sebagai yang terkecil elemen S. Jadi haruslah $x \leq b$.

Selanjutnya, jika elemen terkecil $x = b$, maka $a-(q+1)x = x-b = 0$, dan kita pilih $q_0 = q + 1$ dan $r_0 = 0$. Jika $x < b$, maka kita pilih $q_0 = q$ dan $r_0 = x$. Dengan demikian telah dibuktikan bagian pertama dari teorema. Kita dapat melanjutkan untuk membuktikan bagian kedua. Misalkan b ganjil, (untuk kasus genap bukti sama). Dengan menggunakan bagian pertama dari teorema kita dapat menulis

$$a = q_0 b + r_0,$$

dengan $0 \le r_0 < |b|$. Bila $0 \le r_0 \le \frac{|b|-1}{2}$, tidak ada lagi yang harus dibuktikan. Jadi, asumsikan bahwa $\frac{|b|-1}{2} < r_0 < |b|$, Didapat

$$a = bq_0 + |b| + (r_0 - |b|).$$

Perhatikan bahwa $bq_0 + |b|$ adalah kelipatan dari b. Selanjutnya, karena $\frac{|b|-1}{2} < r_0 < |b|$, didapat

$$\frac{|b|-1}{2} - |b| < r_0 - |b| < |b| - |b| = 0.$$

Untuk menyelesaikan bukti, kita perlu memverifikasi bahwa

$$\frac{|b|-1}{2} - |b| \ge -\frac{|b|+1}{2},$$

tetapi hal ini jelas dipenuhi. $\square$

Perhatikan bahwa dengan notasi Teorema 13.2.1, $[a]_b = [r_0]_b$. Pengamatan ini menyediakan cara yang mudah untuk menuliskan perwakilan untuk kelas ekivalen dalam $Z/b\mathbb{Z}$. Sebagai contoh, misalkan $b = 6$. Ketika kita membagi bilangan bulat dengan b, kita akan memiliki kemungkinan sisa $0, 1, 2, 3, 4, 5$. Akibatnya, himpunan $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ akan menyediakan satu himpunan representasi untuk $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

Lemma 13.2.3 Untuk sebarang bilangan bulat tak-nol n, $\#(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = |n|$.

Bukti. Kita definisikan suatu pemetaan

$$res_n : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \{0, 1, \ldots, |n| - 1\} = A,$$

oleh $res_n([a]_n) = r,\ \forall [a]_n \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, dimana $a = qn + r,\ 0 \le r < |n|$.

Karena definisi res_n melibatkan pilihan bilangan bulat, kita perlu menunjukkan bahwa $res_n([a]_n)$ tidak tergantung pada pilihan a. Misalkan bilangan bulat b sedemikian hingga $[b]_n = [a]_n$. Asumsi pada b menyatakan bahwa $a \equiv b \bmod n$, yaitu, ada bilangan bulat k sedemikian hingga $b - a = kn$. Jika kita menggunakan fakta bahwa $a = qn + r$, kita mendapatkan

$$b = kn + a = kn + qn + r = (k + q)n + r,$$

dengan $0 \le r < |n|$. Sehingga didapat $res_n([b]_n) = r = res_n([a]_n)$.

Kami sekarang menunjukkan bahwa res_n adalah bijektif. Bahwa res_n adalah pada sudah jelas. Yaitu, untuk setiap $r \in A$ dengan $0 \le r < |n|$, maka $r = res_n([r]_n)$. Untuk melihat bahwa res_n adalah satu-satu, misalkan bahwa $res_n(u) = res_n(u') = r$ dengan $u, u' \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dan beberapa r yang memenuhi $0 \leq r < |n|$. Tulis $u = [a]_n$ dan $u' = [b]_n$. Ini mengikuti dari definisi res_n bahwa $a = q_1 n + r$ dan $b = q_2 n + r$ untuk bilangan bulat q_1 dan q_2. Akibatnya, $a - b = q_1 n - q_2 n = (q_1 - q_2)n$ atau, $n \,|\, a - b$, atau $a \equiv b \mod n$. Ini berarti $[a]_n = [b]_n$. $\square$

Definisi 13.2.3 Misalkan n adalah bilangan bulat. Dengan **sistem lengkap modulo residu** n yang kami maksud adalah kumpulan dari n bilangan bulat $a_1, a_2 \ldots, a_n$ sedemikian rupa sehingga untuk setiap i, j dengan $1 \leq i, j \leq n$, kita memiliki $a_i \equiv a_j \mod n$ jika dan hanya jika $i = j$. Atau, sistem dari residu adalah suatu himpunan lengkap dari representasi untuk kelas kongruensi modulo n.

Pengertian ***pembagi persekutuan terbesar*** yang dijelaskan dalam definisi berikut secara mengejutkan penting:

Definisi 13.2.4 Untuk bilangan bulat a, b, ***pembagi persekutuan terbesar*** dari a, b, dinotasikan sebagai $\text{fpb}(a, b)$, adalah bilangan bulat positip g dengan sifat berikut:

- $g \,|\, a$ dan $g \,|\, b$.
- Bila d suatu bilangan bulat yang memenuhi $d \,|\, a$ dan $d \,|\, b$, maka $|d| \leq g$.

Bilangan bulat a, b disebut ***koprime*** atau ***relatif prima*** jika $\text{fpb}(a, b) = 1$. Kami juga mendefinisikan ***kelipatan persekutan terkecil*** dari bilangan bulat bukan nol a, b, dilambangkan dengan $\text{kpk}(a, b)$ adalah bilangan bulat positif l dengan sifat berikut:

- $a \,|\, l$ dan $b \,|\, l$.
- Bila m suatu bilangan bulat yang memenuhi $a \mid m$ dan $b \mid m$, maka $l \leq |m|$. $\square$

Pada dasarnya, pembagi persekutuan terbesar dari bilangan bulat a dan b adalah tepat seperti namanya: pembagi terbesar, persekutuan, a dan b, dan juga untuk kpk. Kami juga mendefinisikan fpb dan kpk lebih dari dua bilangan.

Teorema 13.2.2 Jika a, b adalah bilangan bulat, maka ada bilangan bulat x, y sedemikian hingga
$$ax + by = \text{fpb}(a, b).$$

Bukti. Teorema ini mudah jika a atau b bernilai nol. Misalnya, jika $a = 0$, maka $\text{fpb}(0, b) = b = (1 \times 0) + (1 \times b)$. Jadi kita dapat berasumsi bahwa a

atau b tidak nol. Dengan mengubah tanda-tanda x, y, jika perlu, kita dapat menganggap $a, b > 0$. Definisikan himpunan S oleh

$$S = \{xa + yb \,|\, x, y \in \mathbb{Z}, xa + yb \in \mathbb{N}\}.$$

Jelas $S \subset \mathbb{N}$ dan $S \neq \emptyset$ sebab sebagai hal khusus, $a, b \in S$. Dengan Sifat 13.1.2, himpunan S memiliki elemen terkecil g. Menurut definisi, ada bilangan bulat x_0, y_0 sedemikian hingga $g = x_0 a + y_0 b$ dan $g > 0$.

Jika d adalah pembagi persekutuan dari a, b, maka $d \mid x_0 a + y_0 b = g$. Akibatnya, $\text{fpb}(a, b) \,|\, g$.

Sekarang kami mengklaim setiap elemen S dapat dibagi oleh g. Misalkan $s = xa + yb \in S$. Bagilah s oleh g, dan gunakan Teorema 13.2.1 sehingga didapat

$$s = qg + r,$$

untuk beberapa $0 \leq r < g$. Bila $r = 0$, maka $g \mid s$ selesai sudah bukti. Andaikan $r \neq 0$, didapat

$$0 < r = s - qg = (xa + yb) - q(x_0 a + y_0 b) = (x - qx_0)a + (y - qy_0)b.$$

Sebagai hasilnya, $r \in S$. Karena $0 < r < g$, pernyataan terakhir ini bertentangan dengan asumsi bahwa g adalah elemen terkecil dari S. Oleh karena itu, telah ditetapkan klaim bahwa setiap elemen S dapat dibagi oleh g. Secara khusus, karena $a, b \in S$, kita melihat bahwa $g \,|\, a$ dan $g \,|\, b$, yaitu, g adalah pembagi persekutuan dari a, b. Akibatnya, $g \leq \text{fpb}(a, b)$. Karena kami sudah menetapkan bahwa $\text{fpb}(a, b) \,|\, g$, kami menyimpulkan $g = \text{fpb}(a, b)$. Dengan demikian terbukti

$$\text{fpb}(a, b) = ax_0 + by_0. \qquad \square$$

Akibat dari Teorema 13.2.2 ini, berikut hasil menarik:

Kesimpulan 13.2.1 Jika a, b, d adalah bilangan bulat sehingga $d \,|\, a, d \,|\, b$, maka $d|\text{fpb}(a, b)$.

Bukti. Karena d adalah pembagi a dan b, untuk sebarang bilangan bulat x, y didapat $d \,|\, xa + yb$. Sehingga dengan menggunakan Teorema 13.2.2 didapat $d|\text{fpb}(a, b)$. $\square$

Jelas, salah satu cara untuk menemukan pembagi persekutuan terbesar a dan b adalah dengan menulis daftar semua pembagi a dan b, mencari pembagi persekutuan, dan menemukan pembagi terbesar. Sebagai contoh, jika $a = 12$ dan $b = 18$, didapat pembagi dari a

$$\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$$

dan pembagi dari b adalah

$$\{\pm1, \pm2, \pm3, \pm6, \pm9, \pm18\}.$$

Pembagi persekutan dari a dan b adalah

$$\{\pm1, \pm2, \pm3, \pm6\}.$$

Sehingga didapat

$$\text{fpb}(a, b) = 6.$$

Perhatikan bahwa $6 = (+1).18 + (-1).12$ sesuai dengan Teorema 13.2.2.

Ini tentu saja tidak efisien, terutama ketika berhadapan dengan bilangan yang besar. Euclid menyajikan prosedur pintar untuk menghitung pembagi persekutuan terbesar dari dua bilangan bulat tanpa daftar pembagi bilangan bulat individu. Ini dikenal sebagai ***Algoritma Pembagian Euclidean***. Algoritma Euclidean didasarkan pada lemma berikut:

Lemma 13.2.4 Bila $a, b \in \mathbb{N}$ dengan $a\,|\,b$, maka $\text{fpb}(a, b) = a$. Bila $a, b \in \mathbb{N}$ dengan $a > b$, maka

$$\text{fpb}(a, b) = \text{fpb}(a - b, b).$$

Bukti. Pernyataan pertama itu mudah. Faktanya, $\text{fpb}(a, b) \leq a$ karena $\text{fpb}(a, b)$ adalah pembagi a. Di sisi lain, a adalah pembagi persekutuan dari a dan b, karenanya $a \leq \text{fpb}(a, b)$. Menggabungkan dua pengamatan ini menunjukkan bahwa $\text{fpb}(a, b) = a$. Sekarang kita buktikan pernyataan kedua dengan menunjukkan bahwa himpunan dari pembagi persekutuan a dan b sama dengan himpunan pembagi persekutuan $a - b$ dan b. Pernyataan ini menyiratkan bahwa unsur-unsur terbesar dari himpunan adalah sama. Untuk melihat persamaan kedua himpunan, anggaplah d adalah sebarang elemen pembagi persekutuan dari a dan b. Maka $d \mid a, d \mid b$, dan akibatnya $d \mid (a - b)$, yaitu, d adalah pembagi persekutuan dari b dan $a - b$. Oleh karena itu, himpunan pembagi persekutan a dan b adalah himpunan bagian dari himpunan pembagi persekutan b dan $a - b$. Sebaliknya, misalkan c adalah sebarang elemen pembagi persekutuan dari b dan $(a - b)$. Maka $c \mid b$ dan $c\,|\,(a - b)$. Sehingga didapat $b = k_0c$ dan $a - b = k_1c$ untuk suatu $k_0, k_1 \in \mathbb{Z}$. Dengan demikian $a = b + k_1c = k_0c + k_1c = (k_0 + k_1)c$.Jadi $c\,|\,a$. Akibatnya c adalah elemen dari pembegi persekutuan dari a dan b. Dengan demikian himpunan pembagi persekutan dari b dan $(a - b)$ adalah himpunan bagian dari himpunan pembagi pesekutuan dari a dan b. Jadi himpunan pembagi pesekutuan dari a dan b sama dengan himpunan pembagi pesekutuan dari b dan $(a - b)$. Dengan demikian $\text{fpb}(a, b) = \text{fpb}(a - b, b)$. $\square$

Sebagai contoh, menghitung fpb$(18, 12)$. Dengan menggunakan Lemma 13.2.4, didapat

$$\text{fpb}(18, 12) = \text{fpb}(18 - 12, 12) = \text{fpb}(6, 12) = 6.$$

Untuk melihat contoh yang sedikit lebih menarik, kita kaji fpb$(57, 12)$. Didapat

$$\begin{aligned} \text{fpb}(57, 12) &= \text{fpb}(57 - 12, 12) = \text{fpb}(45, 12) \\ &= \text{fpb}(33, 12) = \text{fpb}(21, 12) \\ &= \text{fpb}(9, 12) = \text{fpb}(12, 9) \\ &= \text{fpb}(3, 9) = 3. \end{aligned}$$

Pada tahap pertama, perlu mengurangi 57 dengan 12 empat kali. Akibatnya, apa yang telah dilakukan adalah bahwa telah diganti 57 dengan sisa pembagiannya oleh 12. Dalam praktiknya, kami melakukan hal berikut: Untuk menghitung fpb(a, b) dengan $a > b$, ditulis $a = bq + r$ dengan $0 \le r < b$; jika $r = 0$, maka fpb$(a, b) = b$; jika tidak, fpb$(a, b) =$ fpb(b, r). Karena $a > b > r$, telah diganti pasangan (a, b) dengan pasangan "lebih kecil" (b, r) dengan fpb yang sama. Selanjutnya dirumuskan prosedur ini sebagai lemma:

Lemma 13.2.5 (**Algoritma Euclidean**). Prosedur berikut menghitung fpb dari sepasang bilangan asli (a, b) dengan $a > b$:

1. Pasangan (a, b) diberikan dengan $a > b$;
2. Misalkan r adalah sisa dari pembagian a oleh b;
3. Jika $r = 0$, maka b adalah fpb dan selesai;
4. Jika $r > 0$, ganti (a, b) dengan (b, r), dan kembali ke (1). Lakukan hal ini sampai menghasilkan $r = 0$.

Algoritma dipastikan berhenti sampai langkah yang berhingga sebab semua nilai a, b dan r adalah berhingga. $\square$

Pada saat penulisan ini, kita tidak tahu bagaimana menemukan faktor prima dari bilangan bulat besar dan cepat. Sebaliknya, Algoritma Euclidean sangat cepat. Bahkan, dalam Teorema 12 dari ["*Elementary theory of numbers*", Ch. I, §3, oleh: Sierpiński, W,1988], awalnya sebuah teorema Lamé dari tahun 1844, banyaknya pembagian yang dibutuhkan paling banyak lima kali jumlah digit dalam ekspansi desimal dari bilangan yang lebih kecil b.

Algoritma Euclidean memungkinkan kita untuk membuat Teorema 13.2.2 efektif secara komputasi. Akan kita jelaskan ide tersebut dalam contoh berikut:

Contoh 1 Telah dihitung bahwa $\mathrm{fpb}(57, 12) = 3$. Kami ingin menemukan bilangan bulat x, y sedemikian hingga

$$57x + 12y = \mathrm{fpb}(57, 12) = 13.$$

Kita tulis

$$\begin{aligned} 57 &= 4 \times 12 + 9; \\ 12 &= 1 \times 9 + 3. \end{aligned}$$

Selanjutnya kita tulis

$$3 = 12 - 9 = 12 - (57 - 4 \times 12) = 12 - 57 + 4 \times 12 = -57 + 5 \times 12,$$

dalam hal ini, $x = -1$ dan $y = 5$. $\square$

Konsekuensi dari Teorema 13.2.2 adalah teorema penting berikut:

Teorema 13.2.3 Jika $a \,|\, bc$ dan $\mathrm{fpb}(a, b) = 1$, maka $a \,|\, c$.

Bukti. Karena $\mathrm{fpb}(a, b) = 1$, ada bilangan bulat x, y sedemikian hingga $xa + yb = 1$. Mengalikan dua ruas persamaan dengan c menghasilkan $c = xca + ybc$. Ruas di sisi kanan persamaan ini dapat dibagi oleh a: sebab xca jelas dapat dibagi oleh a, dan ybc dapat dibagi oleh a karena asumsi. Ini berarti c dapat dibagi oleh a dan selesai bukti. $\square$

Teorema berikut ini menyiratkan hasil Euclid (*Element*, Proposisi 30, Buku VII):

Kesimpulan 13.2.2 (**Teorema Pertama Euclid**). Misalkan p adalah bilangan prima, dan $p \,|\, ab$ untuk bilangan bulat a, b. Maka $p \,|\, a$ atau $p \,|\, b$.

Bukti. Misalkan $p \nmid a$. Kami mengklaim bahwa $\mathrm{fpb}(a, p) = 1$. Faktanya, jika $d = \mathrm{fpb}(a, p)$, maka $d \,|\, p$. Ini berarti bahwa $d = 1$ atau $d = p$. Kita tidak dapat memiliki $d = p$, sebab $p = d \,|\, a$ yang merupakan kontradiksi. Oleh karena itu, $d = 1$, dan hasilnya mengikuti dari Teorema 13.2.3. $\square$

Lemma Euclid adalah unsur utama dalam bukti pernyataan ketunggalan dari hasil dasar berikut:

Teorema 13.2.4 (**Teorema Dasar Aritmatika**). Setiap bilangan alam adalah produk bilangan prima dengan cara yang pada dasarnya tunggal. Yang dimaksud tunggal adalah : Dalam pernyataan teorema, pada dasarnya tunggal berarti menyusun ulang suku-suku. Misalnya, kita bisa menulis

$$12 = 3.2.2 = 2.3.2 = 2.2.3.$$

Bukti. Kami akan membuktikan keberadaan menggunakan induksi. Karena 1 adalah produk kosong bilangan prima, teorema ini berlaku untuk 1. Sekarang anggaplah n adalah bilangan alam, dan anggaplah kita tahu adanya faktorisasi prima untuk setiap bilangan asli yang lebih kecil dari n. Jika n adalah prima, tidak ada yang bisa dibuktikan lagi. Jika n bukan prima, maka ia memiliki pembagi tak-trivial y sehingga $1 < y < n$. Jelas, $1 < n/y < n$. Dengan asumsi induksi, $y = p_1 \cdots p_r$ dan $n/y = q_1 \cdots q_s$ untuk bilangan prima $p_1, \ldots, p_r$ dan $q_1, \ldots, q_s$. Maka,

$$n = y.n/y = p_1 \cdots p_r.q_1 \cdots q_s.$$

Ini memberikan keberadaan faktorisasi prima.

Selanjutnya dibuktikan ketunggalannya. Misalkan kita memiliki bilangan alam n yang memiliki dua faktorisasi prima yang berbeda:

$$P_1 \cdots P_k = Q_1 \cdots Q_l.$$

Himpunan bilangan prima $\{P_1, \ldots, P_k\}$ dan $\{Q_1, \ldots, Q_l\}$ mungkin memiliki beberapa elemen persekutuan/sama. Jika perlu kami menyederhanakan elemen-elemen yang sama dari kedua sisi persamaan untuk mendapatkan persamaan bentuk

$$P_1 \cdots P_u = Q_1 \cdots Q_v, \tag{13.1}$$

dengan kedua sisi persamaan tidak memiliki faktor persekutuan. Selanjutnya didapat

$$P_1 \,|\, Q_1 \cdots Q_v.$$

Suatu aplikasi mudah dari Teorema Pertama Euclid yaitu Kesimpulan 13.2.2, mengatakan bahwa ada sesuatu i sedemikian hingga

$$P_1 \,|\, Q_i.$$

Tetapi karena P_1 dan Q_i adalah bilangan prima, pembagian ini menyiratkan bahwa $P_1 = Q_i$, bertentangan dengan asumsi bahwa sisi-sisi Persamaan (13.1) tidak memiliki elemen yang sama. □

Adalah mudah untuk menuliskan faktorisasi prima suatu bilangan sebagai produk dari pangkat prima. Contoh, sebagai pengganti $12 = 2.3.2$, kita biasanya menulis $12 = 2^2.3$. Kami menunjukkan faktorisasi prima dari suatu tipe bilangan alam n dalam bentuk

$$p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r},$$

atau ungkapan serupa. Dalam ungkapan seperti itu, bahkan ketika kita tidak secara eksplisit menyebutkannya, kita asumsikan bahwa bilangan prima

$p_1, \ldots, p_r$ berbeda. Dalam hal ini kita menulis $p_i^{\alpha_i} \parallel n$, yang berarti $p_i^{\alpha_i} \mid n$ tetapi $p_i^{\alpha_i+1} \nmid n$, dan menamakan α_i sebagai multiplisitas p_i dalam n. Terkadang nyaman untuk membiarkan pangkat α_i sama dengan nol. Misalnya, jika

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r},$$

maka setiap pembagi n dapat ditulis dalam bentuk

$$m = p_1^{\beta_1} \cdots p_r^{\beta_r},$$

di mana untuk setiap $i, 0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$.

Teorema Dasar Aritmatika memiliki banyak aplikasi. Di sini kita daftar tiga konsekuensi. Kami menyerahkan bukti kepada pembaca sebagai Latihan.

Proposisi 13.2.1 Misalkan $m = \prod_i p^{r_i}$ dan $n = \prod_i p_{s_i}^{s}$. Maka

$$\text{fpb}(m, n) = \prod_i p_i^{\min(r_i, s_i)},$$

dan

$$\text{kpk}(m, n) = \prod_i p_i^{\max r_i, s_i}.$$

Lagipula

$$\text{fpb}(m, n)\text{kpk}(m, n) = m.n. \qquad \square$$

Proposisi berikut digunakan beberapa kali sepanjang pembahasan:

Proposisi 13.2.2 Misalkan a dan b adalah bilangan asli sedemikian hingga $\text{fpb}(a, b) = 1$. Jika $ab = m^k$ untuk bilangan asli m dan k, maka $a = m_1^k$ dan $b = m_2^k$ untuk bilangan asli m_1, m_2 sedemikian hingga $m_1 m_2 = m$. $\square$

Kesimpulan 13.2.3 Jika $n \in \mathbb{N}$ bukan pangkat k, tidak ada bilangan rasional γ sehingga $n = \gamma^k$. $\square$

13.3 Teorema Sisa Pembagian Cina

Teorema 13.2.2 adalah pernyataan tentang solvabilitas persamaan

$$ax + by = \text{fpb}(a, b)$$

dalam bilangan bulat x, y. Lebih umum, orang dapat bertanya tentang solvabilitas persamaan Diophantine linear umum

$$ax + by = c$$

dalam bilangan bulat x, y. Tidak sulit untuk melihat bahwa persamaan ini dapat dipecahkan bila dan hanya bila $\mathrm{fpb}(a, b) \,|\, c$. Misalnya jika $\mathrm{fpb}(a, b) = 1$, maka setiap persamaan $a + by = c$ dapat diselesaikan. Berikut ini adalah fakta yang berguna:

Teorema 13.3.1 Misalkan a, b adalah bilangan bulat relatif prima, dan misalkan $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ sedemikian hingga $ax_0 + by_0 = 1$. Lalu bila $x, y \in \mathbb{Z}$ memenuhi $ax + by = 1$, ada $h \in \mathbb{Z}$ sedemikian hingga

$$x = x_0 + bh, \quad y = y_0 - ah.$$

Secara umum, jika persamaan $ax + by = c$ dapat diselesaikan, maka karena $\mathrm{fpb}(a, b) \mid ax + by$, maka $\mathrm{fpb}(a, b) \mid c$. Sebaliknya, bila $\mathrm{fpb}(a, b) \mid c$, kita dapat menulis $c = c'.\mathrm{fpb}(a, b)$. Dengan Teorema 13.2.2 kita tahu bahwa ada bilangan bulat x_0, y_0 sedemikian hingga $ax_0 + by_0 = \mathrm{fpb}(a, b)$. Mengalikan persamaan dengan c' didapat $a(x_0c') + b(y_0c') = \mathrm{fpb}(a, b)c' = c$, dan sebagai hasilnya $x = x_0c'$ dan $y = y_0c'$ adalah bilangan yang memenuhi $ax + by = c$.

Diformulasikan dalam istilah persamaan kongruensi, hal ini ekivalen dengan persamaan

$$ax \equiv c \mod b \tag{13.2}$$

dapat diselesaikan bila dan hanya bila $\mathrm{fpb}(a, b) \,|\, c$. Khususnya bila $\mathrm{fpb}(a, b) = 1$, persamaannya dapat diselesaikan untuk setiap c. Kembali dalam kasus umum Persamaan (13.2), karena $\mathrm{fpb}(a, b) \,|\, c$, persamaannya ekivelen dengan

Bab 14

Penyelesaian bilangan bulat pada Persamaan Pythagoras

Dalam bab ini kami menyajikan dua metode yang berbeda untuk menemukan penyelesaian dari Persamaan Pythagoras, satu aljabar dan satu geometri. Kami kemudian menerapkan metode geometris untuk menemukan solusi dari beberapa persamaan lainnya. Kelas pertama dari persamaan non-Pythagoras yang akan kita terapkan metode ini adalah persamaan Pell, dan kelas kedua, persamaan derajat tiga. Sebagai aplikasi penyelesaian untuk Persamaan Pythagoras, kami akan membuktikan kasus khusus dari Teorema Terakhir Fermat. Dalam Catatan, kami meninjau secara singkat beberapa karya klasik yang terkait dengan Persamaan Pell atas bilangan bulat; jelaskan mengapa beberapa persamaan kubik disebut elips; berikan beberapa referensi terkait dengan Teorema Terakhir Fermat; dan dibahas dugaan *abc*.

Bab 15

Tentang Simetri

Simetri (dari bahasa Yunani Kuno: $\sigma\nu\mu\mu\varepsilon\tau\rho\iota\alpha$ **symmetria** "kesepakatan dalam dimensi, proporsi, pengaturan") dalam bahasa sehari-hari mengacu pada rasa proporsi dan keseimbangan yang harmonis dan indah. Dalam matematika, "simetri" memiliki definisi yang lebih tepat, dan biasanya digunakan untuk merujuk pada objek yang **invarian** dalam beberapa transformasi; termasuk **translasi**, **refleksi**, **rotasi** atau **penskalaan**. Meskipun kedua arti "simetri" ini kadang-kadang dapat dibedakan, keduanya terkait erat, dan karenanya dibahas bersama dalam artikel ini.

15.1 Filsafat Ilmu

Filsafat ilmu adalah cabang filsafat yang berkaitan dengan dasar, metode, dan implikasi ilmu. Pertanyaan sentral dari studi ini menyangkut apa yang memenuhi syarat sebagai sains, keandalan teori ilmiah, dan tujuan akhir sains. Disiplin ini tumpang tindih dengan metafisika, ontologi, dan epistemologi, misalnya, ketika mengeksplorasi hubungan antara sains dan kebenaran. Filsafat sains berfokus pada aspek metafisik, epistemik, dan semantik sains. Masalah etika seperti bioetika dan kesalahan ilmiah sering dianggap sebagai studi etika atau sains daripada filsafat sains.

Tidak ada konsensus di antara para filsuf tentang banyak masalah utama yang berkaitan dengan filsafat sains, termasuk apakah sains dapat mengungkapkan kebenaran tentang hal-hal yang tidak dapat diamati dan apakah penalaran ilmiah dapat dibenarkan sama sekali. Selain pertanyaan umum tentang sains secara keseluruhan, para filsuf sains mempertimbangkan masalah yang berlaku untuk sains tertentu (seperti biologi atau fisika). Beberapa filsuf sains juga menggunakan hasil sains kontemporer untuk mencapai kesimpulan tentang filsafat itu sendiri.

Sementara pemikiran filosofis yang berkaitan dengan sains sudah ada setidaknya sejak zaman Aristoteles, filsafat umum sains muncul sebagai disiplin yang berbeda hanya pada abad ke-20 setelah gerakan positivis logis, yang bertujuan untuk merumuskan kriteria untuk memastikan semua pernyataan filosofis. kebermaknaan dan menilainya secara objektif. Charles Sanders Peirce dan Karl Popper pindah dari positivisme untuk menetapkan seperangkat standar modern untuk metodologi ilmiah. Buku Thomas Kuhn tahun 1962 The Structure of Scientific Revolutions juga formatif, menantang pandangan kemajuan ilmiah sebagai perolehan pengetahuan yang mantap dan kumulatif berdasarkan metode percobaan sistematis yang tetap dan alih-alih berargumen bahwa setiap kemajuan relatif terhadap "paradigma", serangkaian pertanyaan, konsep, dan praktik yang mendefinisikan suatu disiplin ilmu dalam periode sejarah tertentu.

Selanjutnya, pendekatan koheren terhadap sains, di mana sebuah teori divalidasi jika membuat pengamatan masuk akal sebagai bagian dari keseluruhan yang koheren, menjadi menonjol karena W. V. Quine dan lainnya. Beberapa pemikir seperti Stephen Jay Gould berusaha mendasarkan sains pada asumsi aksiomatik, seperti keseragaman alam. Sebagian kecil filsuf yang vokal, dan khususnya Paul Feyerabend, berpendapat bahwa tidak ada yang namanya "metode ilmiah", jadi semua pendekatan terhadap sains harus diizinkan, termasuk pendekatan supranatural yang eksplisit. Pendekatan lain untuk berpikir tentang sains melibatkan mempelajari bagaimana pengetahuan diciptakan dari perspektif sosiologis, sebuah pendekatan yang diwakili oleh para sarjana seperti David Bloor dan Barry Barnes. Akhirnya, sebuah tradisi dalam filsafat kontinental mendekati sains dari perspektif analisis pengalaman manusia yang teliti.

Filsafat ilmu-ilmu tertentu berkisar dari pertanyaan tentang sifat waktu yang diangkat oleh relativitas umum Einstein, hingga implikasi ekonomi terhadap kebijakan publik. Tema utamanya adalah apakah istilah-istilah dari satu teori ilmiah dapat direduksi secara intra atau interteoretis menjadi istilah-istilah teori lainnya. Artinya, dapatkah kimia direduksi menjadi fisika, atau dapatkah sosiologi direduksi menjadi psikologi individu? Pertanyaan umum filsafat ilmu juga muncul dengan kekhususan yang lebih besar dalam beberapa ilmu tertentu. Misalnya, pertanyaan tentang validitas penalaran ilmiah terlihat dalam bentuk yang berbeda dalam dasar statistik. Pertanyaan tentang apa yang dianggap sebagai sains dan apa yang harus dikecualikan muncul sebagai masalah hidup atau mati dalam filsafat kedokteran. Selain itu, filosofi biologi, psikologi, dan ilmu sosial mengeksplorasi apakah studi ilmiah tentang sifat manusia dapat mencapai objektivitas atau pasti dibentuk oleh nilai dan hubungan sosial.

Pengertian Sain

Membedakan antara sains dan non-sains disebut sebagai masalah demarkasi. Misalnya, haruskah psikoanalisis, ilmu penciptaan, dan materialisme sejarah dianggap sebagai ilmu semu? Karl Popper menyebut ini pertanyaan sentral dalam filsafat sains. Namun, tidak ada catatan terpadu tentang masalah yang diterima di antara para filsuf, dan beberapa menganggap masalah itu tidak dapat dipecahkan atau tidak menarik. Martin Gardner berpendapat untuk penggunaan standar Potter Stewart ("Saya mengetahuinya ketika saya melihatnya") untuk mengenali pseudosains.

Upaya awal oleh positivis logis mendasarkan sains pada observasi sementara non-sains adalah non-observasional dan karenanya tidak berarti. Popper berpendapat bahwa properti utama sains adalah falsifiabilitas. Artinya, setiap klaim yang benar-benar ilmiah dapat dibuktikan salah, setidaknya secara prinsip.

Bidang studi atau spekulasi yang menyamar sebagai sains dalam upaya untuk mengklaim legitimasi yang tidak dapat dicapai dengan cara lain disebut sebagai pseudosains, sains pinggiran, atau sains sampah. Fisikawan Richard Feynman menciptakan istilah "ilmu kultus kargo" untuk kasus-kasus di mana para peneliti percaya bahwa mereka melakukan sains karena aktivitas mereka memiliki penampilan luar tetapi sebenarnya tidak memiliki "jenis kejujuran" yang memungkinkan hasil mereka dievaluasi secara ketat.

Penjelasan ilmiah

Pertanyaan yang terkait erat adalah apa yang dianggap sebagai penjelasan ilmiah yang baik. Selain memberikan prediksi tentang kejadian yang akan datang, masyarakat seringkali menggunakan teori-teori ilmiah untuk memberikan penjelasan atas kejadian yang biasa terjadi atau sudah terjadi. Filsuf telah menyelidiki kriteria yang dengannya teori ilmiah dapat dikatakan telah berhasil menjelaskan suatu fenomena, serta apa artinya mengatakan teori ilmiah memiliki kekuatan penjelas.

Salah satu penjelasan ilmiah awal dan berpengaruh adalah model deduktif-nomologis. Dikatakan bahwa penjelasan ilmiah yang berhasil harus menyimpulkan terjadinya fenomena tersebut dari hukum ilmiah. Pandangan ini telah menjadi sasaran kritik substansial, menghasilkan beberapa contoh tandingan yang diakui secara luas terhadap teori tersebut. Sangat menantang untuk mengkarakterisasi apa yang dimaksud dengan penjelasan ketika hal yang akan dijelaskan tidak dapat disimpulkan dari hukum apa pun karena itu adalah masalah kebetulan, atau sebaliknya tidak dapat diprediksi dengan sempurna dari apa yang diketahui. Wesley Salmon mengembangkan model di mana penjelasan ilmiah yang baik harus relevan secara statistik dengan hasil yang akan dijelaskan. Yang lain berpendapat bahwa kunci penjelasan yang baik adalah menyatukan fenomena yang berbeda atau menyediakan mekanisme sebab-akibat.

Membenarkan sains

Meskipun sering diterima begitu saja, sama sekali tidak jelas bagaimana seseorang dapat menyimpulkan validitas pernyataan umum dari sejumlah contoh spesifik atau menyimpulkan kebenaran teori dari serangkaian tes yang berhasil. Misalnya, seekor ayam mengamati bahwa setiap pagi petani datang dan memberinya makan, selama ratusan hari berturut-turut. Oleh karena itu ayam dapat menggunakan penalaran induktif untuk menyimpulkan bahwa peternak akan membawakan makanan setiap pagi. Namun, suatu pagi, petani datang dan membunuh ayam tersebut. Bagaimana penalaran ilmiah lebih dapat dipercaya daripada penalaran ayam?

Salah satu pendekatannya adalah mengakui bahwa induksi tidak dapat mencapai kepastian, tetapi mengamati lebih banyak contoh pernyataan umum setidaknya dapat membuat pernyataan umum lebih mungkin. Jadi ayam itu benar untuk menyimpulkan dari semua pagi itu bahwa kemungkinan besar peternak akan datang membawa makanan lagi keesokan paginya, bahkan jika itu tidak pasti. Namun, masih ada pertanyaan sulit tentang proses menafsirkan bukti yang diberikan menjadi kemungkinan bahwa pernyataan umum itu benar. Salah satu jalan keluar dari kesulitan khusus ini adalah dengan menyatakan bahwa semua keyakinan tentang teori ilmiah bersifat subjektif, atau pribadi, dan penalaran yang benar hanyalah tentang bagaimana bukti harus mengubah keyakinan subjektif seseorang dari waktu ke waktu.

Beberapa berpendapat bahwa apa yang dilakukan para ilmuwan bukanlah penalaran induktif sama sekali, melainkan penalaran abduktif, atau penyimpulan pada penjelasan terbaik. Dalam penjelasan ini, sains bukan tentang menggeneralisasi contoh-contoh spesifik, melainkan tentang menghipotesiskan penjelasan untuk apa yang diamati. Seperti dibahas pada bagian sebelumnya, tidak selalu jelas apa yang dimaksud dengan "penjelasan terbaik". Pisau cukur Ockham, yang menasihati untuk memilih penjelasan paling sederhana yang tersedia, dengan demikian memainkan peran penting dalam beberapa versi dari pendekatan ini. Kembali ke contoh ayam, apakah lebih mudah menganggap bahwa peternak peduli dan akan terus merawatnya tanpa batas waktu, atau bahwa peternak menggemukkannya untuk disembelih? Filsuf telah mencoba membuat prinsip heuristik ini lebih tepat dalam hal kekikiran teoretis atau ukuran lainnya. Namun, meskipun berbagai ukuran kesederhanaan telah diajukan sebagai kandidat potensial, secara umum diterima bahwa tidak ada ukuran kesederhanaan teori-independen. Dengan kata lain, tampaknya ada banyak ukuran kesederhanaan yang berbeda karena ada teori itu sendiri, dan tugas memilih di antara ukuran kesederhanaan tampaknya sama bermasalahnya dengan tugas memilih di antara teori. Nicholas Maxwell berpendapat selama beberapa dekade bahwa kesatuan daripada kesederhanaan adalah faktor non-empiris kunci dalam mempengaruhi pilihan teori dalam ilmu pengetahuan, preferensi gigih untuk teori terpadu pada dasarnya melakukan ilmu untuk penerimaan tesis metafisik tentang kesatuan di alam. Untuk memperbaiki tesis yang bermasalah ini, perlu direpresentasikan dalam bentuk hierarki tesis, setiap tesis menjadi semakin tidak penting seiring dengan naiknya hierarki.

Pengamatan tidak dapat dipisahkan dari teori

Saat melakukan pengamatan, para ilmuwan melihat melalui teleskop, mempelajari gambar di layar elektronik, merekam pembacaan meteran, dan sebagainya. Umumnya, pada tingkat dasar, mereka dapat menyetujui apa yang mereka lihat, misalnya termometer menunjukkan 37,9 derajat C. Namun, jika para ilmuwan ini memiliki gagasan berbeda tentang teori yang telah dikembangkan untuk menjelaskan pengamatan dasar ini, mereka mungkin tidak setuju tentang apa mereka sedang mengamati. Misalnya, sebelum teori relativitas umum Albert Einstein, para pengamat mungkin akan menafsirkan gambar salib Einstein sebagai lima objek berbeda di ruang angkasa. Namun, mengingat teori itu, para astronom akan memberi tahu Anda bahwa sebenarnya hanya ada dua objek, satu di tengah dan empat gambar berbeda dari objek kedua di sekeliling sisinya. Alternatifnya, jika ilmuwan lain mencurigai ada yang salah dengan teleskop dan hanya satu objek yang benar-benar diamati, mereka beroperasi di bawah teori lain. Pengamatan yang tidak dapat dipisahkan dari interpretasi teoretis dikatakan sarat teori.

Semua pengamatan melibatkan persepsi dan kognisi. Artinya, seseorang tidak melakukan pengamatan secara pasif, melainkan secara aktif terlibat dalam membedakan fenomena yang diamati dari data sensorik di sekitarnya. Oleh karena itu, pengamatan dipengaruhi oleh pemahaman mendasar seseorang tentang cara dunia berfungsi, dan pemahaman itu dapat memengaruhi apa yang dirasakan, diperhatikan, atau dianggap layak dipertimbangkan. Dalam pengertian ini, dapat dikatakan bahwa semua pengamatan sarat dengan teori.

Tujuan ilmu

Haruskah sains bertujuan untuk menentukan kebenaran tertinggi, atau adakah pertanyaan yang tidak bisa dijawab oleh sains? Realis ilmiah mengklaim bahwa sains mengarah pada kebenaran dan bahwa seseorang harus menganggap teori ilmiah sebagai benar, kira-kira benar, atau mungkin benar. Sebaliknya, anti-realis ilmiah berpendapat bahwa sains tidak mengarah (atau setidaknya tidak berhasil) pada kebenaran, terutama kebenaran tentang hal-hal yang tidak dapat diamati seperti elektron atau alam semesta lainnya. Instrumentalists berpendapat bahwa teori-teori ilmiah hanya harus dievaluasi pada apakah mereka berguna. Dalam pandangan mereka, apakah teori itu benar atau tidak, itu tidak penting, karena tujuan sains adalah membuat prediksi dan memungkinkan teknologi yang efektif.

Realis sering menunjuk pada keberhasilan teori-teori ilmiah terbaru sebagai bukti kebenaran (atau mendekati kebenaran) dari teori-teori saat ini. Antirealis menunjuk pada banyak teori palsu dalam sejarah sains, moral epistemik, keberhasilan asumsi pemodelan yang salah, atau kritik objektivitas postmodern yang secara luas disebut sebagai bukti melawan realisme ilmiah. Antirealis berusaha menjelaskan keberhasilan teori ilmiah tanpa mengacu pada kebenaran. Beberapa antirealis mengklaim bahwa teori-teori ilmiah bertujuan untuk menjadi akurat hanya tentang objek yang dapat diamati, dan berpendapat bahwa kesuksesan mereka terutama dinilai dari kriteria tersebut.

Nilai dan ilmu

Nilai bersinggungan dengan sains dengan cara yang berbeda. Ada nilai-nilai epistemik yang terutama memandu penelitian ilmiah. Perusahaan ilmiah tertanam dalam budaya dan nilai tertentu melalui praktisi individu. Nilai muncul dari ilmu pengetahuan, baik sebagai produk maupun proses dan dapat didistribusikan di antara beberapa budaya dalam masyarakat. Ketika datang ke pembenaran sains dalam arti partisipasi publik umum oleh praktisi tunggal, sains memainkan peran mediator antara mengevaluasi standar dan kebijakan masyarakat dan individu yang berpartisipasi, karenanya sains memang menjadi korban vandalisme dan sabotase. berarti sampai akhir.

Jika tidak jelas apa yang dianggap sebagai sains, bagaimana proses konfirmasi teori bekerja, dan apa tujuan sains, ada ruang yang cukup besar untuk nilai dan pengaruh sosial lainnya untuk membentuk sains. Memang, nilai dapat memainkan peran mulai dari menentukan penelitian mana yang akan didanai hingga mempengaruhi teori mana yang mencapai konsensus ilmiah. Misalnya, pada abad ke-19, nilai-nilai budaya yang dipegang oleh para ilmuwan tentang ras membentuk penelitian tentang evolusi, dan nilai-nilai tentang kelas sosial memengaruhi perdebatan tentang frenologi (dianggap ilmiah pada saat itu). Filsuf sains feminis, sosiolog sains, dan lainnya mengeksplorasi bagaimana nilai-nilai sosial memengaruhi sains.

Sejarah

Pra-modern

Asal usul filsafat ilmu dapat ditelusuri kembali ke Plato dan Aristoteles, yang membedakan bentuk penalaran perkiraan dan tepat, menetapkan skema rangkap tiga inferensi abduktif, deduktif, dan induktif, dan juga menganalisis penalaran dengan analogi. Polymath Arab abad kesebelas Ibn al-Haytham (dikenal dalam bahasa Latin sebagai Alhazen) melakukan penelitiannya di bidang optik melalui pengujian eksperimental terkontrol dan geometri terapan, terutama dalam penyelidikannya terhadap gambar yang dihasilkan dari refleksi dan pembiasan cahaya. Roger Bacon (1214–1294), seorang pemikir dan peneliti Inggris yang sangat dipengaruhi oleh al-Haytham, diakui oleh banyak orang sebagai bapak metode ilmiah modern. Pandangannya bahwa matematika sangat penting untuk pemahaman yang benar tentang filsafat alam dianggap telah ada 400 tahun sebelumnya.

Modern

Patung Francis Bacon di Gray's Inn, South Square, London Francis Bacon (tidak ada hubungan langsung dengan Roger, yang hidup 300 tahun sebelumnya) adalah seorang tokoh penting dalam filsafat ilmu pengetahuan pada masa Revolusi Ilmiah. Dalam karyanya Novum Organum (1620)—sebuah kiasan untuk Organon karya Aristoteles—Bacon menguraikan sistem logika baru untuk memperbaiki proses silogisme filosofis lama. Metode Bacon mengandalkan sejarah eksperimental untuk mengeliminasi teori-teori alternatif. Pada tahun 1637, René Descartes membentuk kerangka baru untuk mendasarkan pengetahuan ilmiah dalam risalahnya, Discourse on Method, menganjurkan peran sentral akal sebagai lawan dari pengalaman indrawi. Sebaliknya, pada tahun 1713, edisi ke-2 Philosophiae Naturalis Principia Mathematica karya Isaac Newton berpendapat bahwa "... hipotesis ... tidak memiliki tempat dalam filsafat eksperimental. Dalam filsafat ini [,] proposisi disimpulkan dari fenomena dan dibuat umum dengan induksi ." Bagian ini memengaruhi "generasi selanjutnya dari pembaca yang cenderung filosofis untuk mengumumkan larangan hipotesis kausal dalam filsafat alam". Secara khusus, kemudian di abad ke-18, David Hume terkenal mengartikulasikan skeptisisme tentang kemampuan sains untuk menentukan kausalitas dan memberikan formulasi definitif masalah induksi. Tulisan-tulisan John Stuart Mill abad ke-19 juga dianggap penting dalam pembentukan konsepsi metode ilmiah saat ini, serta dalam mengantisipasi laporan penjelasan ilmiah selanjutnya.

Positivisme logis

Instrumentalisme menjadi populer di kalangan fisikawan sekitar pergantian abad ke-20, setelah itu positivisme logis mendefinisikan bidang tersebut selama beberapa dekade. Positivisme logis hanya menerima pernyataan yang dapat diuji sebagai bermakna, menolak interpretasi metafisik, dan menganut verifikasionisme (seperangkat teori pengetahuan yang menggabungkan logika, empirisme, dan linguistik untuk mendasari filsafat atas dasar yang konsisten dengan contoh-contoh dari ilmu empiris). Berusaha merombak semua filsafat dan mengubahnya menjadi filsafat ilmiah baru, Lingkaran Berlin dan Lingkaran Wina mengajukan positivisme logis pada akhir 1920-an.

Menafsirkan filosofi bahasa awal Ludwig Wittgenstein, positivis logis mengidentifikasi prinsip atau kriteria kebermaknaan kognitif. Dari logika Bertrand Russell, mereka mencari reduksi matematika menjadi logika. Mereka juga menganut atomisme logis Russell, fenomenalisme Ernst Mach—di mana pikiran hanya mengetahui pengalaman indrawi aktual atau potensial, yang merupakan isi semua ilmu, baik fisika maupun psikologi—dan operasionalisme Percy Bridgman. Dengan demikian, hanya yang dapat diverifikasi yang bermakna ilmiah dan kognitif, sedangkan yang tidak dapat diverifikasi adalah "pernyataan semu" yang tidak ilmiah dan tidak bermakna secara kognitif—metafisik, emosional, atau semacamnya—tidak layak ditinjau lebih lanjut oleh para filsuf, yang baru ditugaskan untuk mengatur pengetahuan daripada mengembangkan pengetahuan baru.

Positivisme logis umumnya digambarkan mengambil posisi ekstrem bahwa bahasa ilmiah tidak boleh mengacu pada apa pun yang tidak dapat diamati, bahkan gagasan inti kausalitas, mekanisme, dan prinsip yang tampaknya, tetapi itu berlebihan. Pembicaraan yang tidak dapat diamati seperti itu dapat diizinkan sebagai pengamatan langsung metaforis yang dilihat secara abstrak atau paling buruk metafisik atau emosional. Hukum teoretis akan direduksi menjadi hukum empiris, sedangkan istilah teoretis akan mendapatkan makna dari istilah pengamatan melalui aturan korespondensi. Matematika dalam fisika akan direduksi menjadi logika simbolik melalui logika, sementara rekonstruksi rasional akan mengubah bahasa biasa menjadi padanan standar, semuanya terhubung dan disatukan oleh sintaks logis. Sebuah teori ilmiah akan dinyatakan dengan metode verifikasinya, dimana kalkulus logis atau operasi empiris dapat memverifikasi kepalsuan atau kebenarannya.

Pada akhir 1930-an, positivis logis meninggalkan Jerman dan Austria ke Inggris dan Amerika. Pada saat itu, banyak yang telah menggantikan fenomenalisme Mach dengan fisikisme Otto Neurath, dan Rudolf Carnap telah berusaha mengganti verifikasi dengan konfirmasi sederhana. Dengan berakhirnya Perang Dunia II pada tahun 1945, positivisme logis menjadi lebih lunak, empirisme logis, yang sebagian besar dipimpin oleh Carl Hempel, di Amerika, yang menguraikan model hukum yang mencakup penjelasan ilmiah sebagai cara untuk mengidentifikasi bentuk penjelasan logis tanpa mengacu pada tersangka. pengertian “penyebab”. Gerakan positivis logis menjadi penopang utama filsafat analitik,[36] dan mendominasi filsafat Anglosfer, termasuk filsafat sains, sekaligus memengaruhi sains, hingga tahun 1960-an.

Namun gerakan tersebut gagal menyelesaikan masalah utamanya, dan doktrinnya semakin diserang. Namun demikian, hal itu membawa pembentukan filsafat ilmu sebagai subdisiplin filsafat yang berbeda, dengan Carl Hempel memainkan peran kunci.

Thomas Kun

Artikel utama untuk bagian ini adalah: The Structure of Scientific Revolutions Dalam buku The Structure of Scientific Revolutions tahun 1962, Thomas Kuhn berpendapat bahwa proses observasi dan evaluasi berlangsung dalam sebuah paradigma, "potret" dunia yang konsisten secara logis yang konsisten dengan observasi yang dilakukan dari pembingkaiannya. Paradigma juga mencakup serangkaian pertanyaan dan praktik yang mendefinisikan suatu disiplin ilmu. Dia mencirikan sains normal sebagai proses pengamatan dan "pemecahan teka-teki" yang terjadi dalam suatu paradigma, sedangkan sains revolusioner terjadi ketika satu paradigma menyusul paradigma lain dalam pergeseran paradigma.

Kuhn membantah bahwa adalah mungkin untuk mengisolasi hipotesis yang diuji dari pengaruh teori di mana pengamatan didasarkan, dan dia berpendapat bahwa tidak mungkin mengevaluasi paradigma yang bersaing secara mandiri. Lebih dari satu konstruk yang konsisten secara logis dapat melukiskan keserupaan dunia yang dapat digunakan, tetapi tidak ada landasan bersama untuk mengadu domba satu sama lain, teori melawan teori. Setiap paradigma memiliki pertanyaan, tujuan, dan interpretasi yang berbeda. Tidak ada yang memberikan standar untuk menilai yang lain, jadi tidak ada cara yang jelas untuk mengukur kemajuan ilmiah lintas paradigma.

Bagi Kuhn, pilihan paradigma ditopang oleh proses rasional, tetapi pada akhirnya tidak ditentukan oleh proses tersebut. Pilihan antara paradigma melibatkan pengaturan dua atau lebih "potret" terhadap dunia dan memutuskan kemiripan mana yang paling menjanjikan. Bagi Kuhn, penerimaan atau penolakan suatu paradigma adalah proses sosial sekaligus proses logis. Posisi Kuhn, bagaimanapun, bukanlah salah satu relativisme. Menurut Kuhn, pergeseran paradigma terjadi ketika sejumlah besar anomali pengamatan muncul dalam paradigma lama dan paradigma baru masuk akal. Artinya, pilihan paradigma baru didasarkan pada observasi, meskipun observasi tersebut dilakukan dengan latar belakang paradigma lama.

15.2 Pendekatan saat ini

Asumsi aksiomatik naturalisme

Semua studi ilmiah pasti dibangun di atas setidaknya beberapa asumsi penting yang belum teruji oleh proses ilmiah. Kuhn sependapat bahwa semua sains didasarkan pada agenda yang disetujui dari asumsi yang tidak dapat dibuktikan tentang karakter alam semesta, bukan hanya pada fakta empiris. Asumsi paradigma ini terdiri dari kumpulan kepercayaan, nilai, dan teknik yang dipegang oleh komunitas ilmiah tertentu, yang melegitimasi sistem mereka dan menetapkan batasan untuk penyelidikan mereka. Bagi para naturalis, alam adalah satu-satunya realitas, satu-satunya paradigma. Tidak ada yang namanya 'supernatural'. Metode ilmiah akan digunakan untuk menyelidiki semua realitas, dan Naturalisme adalah filosofi implisit dari para ilmuwan yang bekerja.

Asumsi dasar berikut diperlukan untuk membenarkan metode ilmiah.
1. Adanya realitas objektif yang dimiliki oleh semua pengamat rasional. "Dasar rasionalitas adalah penerimaan realitas objektif eksternal." "Sebagai individu, kita tidak dapat mengetahui bahwa informasi sensorik yang kita rasakan dihasilkan secara artifisial atau berasal dari dunia nyata. Keyakinan apa pun bahwa itu muncul dari dunia nyata di luar kita sebenarnya adalah asumsi. Tampaknya lebih bermanfaat untuk berasumsi bahwa realitas objektif itu ada daripada hidup dengan solipsisme, sehingga orang cukup senang membuat asumsi ini. Faktanya, kita membuat asumsi ini secara tidak sadar ketika kita mulai belajar tentang dunia sebagai bayi. Dunia di luar diri kita tampaknya merespons dengan cara yang konsisten dengan kenyataan. ... Asumsi objektivisme sangat penting jika kita ingin melampirkan makna kontemporer pada sensasi dan perasaan kita dan membuatnya lebih masuk akal. " "Tanpa asumsi ini, hanya akan ada pikiran dan gambar dalam pikiran kita sendiri (yang akan menjadi satu-satunya pikiran yang ada) dan tidak akan diperlukan sains, atau apa pun."

2. Bahwa realitas objektif ini diatur oleh hukum alam. "Sains, setidaknya hari ini, mengasumsikan bahwa alam semesta mematuhi prinsip-prinsip yang dapat diketahui yang tidak bergantung pada waktu atau tempat, atau pada parameter subjektif seperti apa yang kita pikirkan, ketahui, atau bagaimana kita berperilaku." Hugh Gauch berpendapat bahwa sains mengandaikan bahwa "dunia fisik teratur dan dapat dipahami".

3. Realitas itu dapat ditemukan melalui pengamatan dan percobaan yang sistematis. Stanley Sobottka berkata: "Asumsi tentang realitas eksternal diperlukan agar sains berfungsi dan berkembang. Sebagian besar, sains adalah penemuan dan penjelasan dunia luar." "Sains berusaha menghasilkan pengetahuan yang seuniversal dan seobjektif mungkin dalam ranah pemahaman manusia."

4. Alam itu memiliki keseragaman hukum dan kebanyakan jika tidak semua hal di alam harus memiliki setidaknya penyebab alami. Ahli biologi Stephen Jay Gould merujuk pada dua proposisi yang terkait erat ini sebagai

ketetapan hukum alam dan pengoperasian proses yang diketahui. Simpson setuju bahwa aksioma keseragaman hukum, sebuah postulat yang tidak dapat dibuktikan, diperlukan agar para ilmuwan mengekstrapolasi inferensi induktif ke masa lalu yang tidak dapat diamati untuk mempelajarinya secara bermakna.

5. Bahwa prosedur percobaan akan dilakukan dengan memuaskan tanpa ada kesalahan yang disengaja maupun tidak disengaja yang akan mempengaruhi hasil.

6. Bahwa peneliti tidak akan bias secara signifikan oleh anggapan mereka.

7. Pengambilan sampel secara acak itu mewakili seluruh populasi. Sampel acak sederhana (SRS) adalah opsi probabilistik paling dasar yang digunakan untuk membuat sampel dari suatu populasi. Manfaat dari SRS adalah peneliti dijamin untuk memilih sampel yang mewakili populasi yang memastikan kesimpulan yang valid secara statistik.

Bab 16

Filsafat Ilmu [2, 5]

Filsafat ilmu adalah cabang filsafat yang berkaitan dengan landasan, metode, dan implikasi ilmu pengetahuan. Pertanyaan sentral dari studi ini berkaitan dengan apa yang memenuhi syarat sebagai sains, keandalan teori ilmiah, dan tujuan akhir sains. Disiplin ini tumpang tindih dengan metafisika ("Metafisika adalah cabang filsafat yang mempelajari hakikat dasar realitas. Ini mencakup prinsip-prinsip pertama: keberadaan atau keberadaan, identitas, perubahan, ruang dan waktu, sebab dan akibat, kebutuhan, aktualitas, dan kemungkinan".), ontologi ("Ontologi adalah studi filosofis tentang keberadaan, serta konsep-konsep terkait seperti keberadaan, keberadaan, dan realitas."), dan epistemologi ("Epistemologi dari bahasa Yunani Kuno $\varepsilon\pi\iota\sigma\tau\eta\mu\eta$ (episteme) 'pengetahuan', dan logi) adalah cabang filsafat yang berkaitan dengan pengetahuan, dan dianggap sebagai subbidang utama filsafat, bersama dengan subbidang utama lainnya seperti etika , logika, dan metafisika. Epistemolog mempelajari hakikat, asal usul, dan ruang lingkup pengetahuan, pembenaran epistemik, rasionalitas keyakinan, dan berbagai persoalan terkait."), misalnya ketika mengeksplorasi hubungan antara sains dan kebenaran. Filsafat ilmu berfokus pada aspek metafisika, epistemik, dan semantik ilmu pengetahuan. Masalah etika seperti bioetika dan pelanggaran ilmiah sering kali dianggap sebagai studi etika atau sains daripada filsafat sains.

Tidak ada konsensus di antara para filsuf tentang banyak masalah utama yang berkaitan dengan filsafat ilmu pengetahuan, termasuk apakah ilmu pengetahuan dapat mengungkapkan kebenaran tentang hal-hal yang tidak dapat diamati dan apakah penalaran ilmiah dapat dibenarkan. Selain pertanyaan-pertanyaan umum tentang sains secara keseluruhan, para filsuf sains mempertimbangkan masalah-masalah yang berlaku untuk sains tertentu (seperti biologi atau fisika). Beberapa filsuf sains juga menggunakan hasil sains kontemporer untuk mencapai kesimpulan tentang filsafat itu sendiri.

Meskipun pemikiran filosofis yang berkaitan dengan sains setidaknya sudah ada sejak zaman Aristoteles, filsafat umum sains baru muncul sebagai disiplin ilmu yang berbeda pada abad ke-20 setelah munculnya gerakan **positivis logis**, yang bertujuan untuk merumuskan kriteria untuk memastikan semua pernyataan filosofis. ' kebermaknaan dan menilainya secara objektif. Karl Popper mengkritik positivisme logis dan membantu menetapkan standar modern untuk metodologi ilmiah. Buku Thomas Kuhn tahun 1962, *The Structure of Scientific Revolutions*, juga bersifat formatif, menantang pandangan kemajuan ilmiah sebagai perolehan pengetahuan kumulatif yang stabil berdasarkan metode eksperimen sistematis yang tetap dan alih-alih berargumentasi bahwa kemajuan apa pun relatif terhadap "paradigma", serangkaian pertanyaan, konsep, dan praktik yang mendefinisikan suatu disiplin ilmu dalam periode sejarah tertentu.

Selanjutnya, pendekatan koheren terhadap sains, di mana suatu teori divalidasi jika pengamatannya masuk akal sebagai bagian dari keseluruhan yang koheren, menjadi menonjol karena W. V. Quine dan lain-lain. Beberapa pemikir seperti Stephen Jay Gould berusaha mendasarkan sains pada asumsi-asumsi aksiomatik, seperti keseragaman alam. Sebagian kecil filsuf, dan khususnya Paul Feyerabend, berpendapat bahwa tidak ada yang namanya "metode ilmiah", jadi semua pendekatan terhadap sains harus diperbolehkan, termasuk pendekatan yang secara eksplisit bersifat supranatural. Pendekatan lain dalam berpikir tentang sains melibatkan mempelajari bagaimana pengetahuan diciptakan dari perspektif sosiologis, sebuah pendekatan yang diwakili oleh para sarjana seperti David Bloor dan Barry Barnes. Terakhir, tradisi dalam filsafat kontinental mendekati sains dari perspektif analisis pengalaman manusia yang cermat.

Filsafat ilmu-ilmu tertentu berkisar dari pertanyaan tentang sifat waktu yang diajukan oleh relativitas umum Einstein, hingga implikasi ilmu ekonomi terhadap kebijakan publik. Tema sentralnya adalah apakah istilah-istilah suatu teori ilmiah dapat direduksi secara intra atau interteori menjadi istilah-istilah teori lainnya. Artinya, dapatkah ilmu kimia direduksi menjadi fisika, atau dapatkah sosiologi direduksi menjadi psikologi individu? Pertanyaan-pertanyaan umum filsafat ilmu juga muncul dengan kekhususan yang lebih besar dalam beberapa ilmu tertentu. Misalnya, pertanyaan tentang validitas penalaran ilmiah dilihat dalam bentuk yang berbeda dalam dasar-dasar statistik. Pertanyaan tentang apa yang dianggap sebagai sains dan apa yang harus dikecualikan muncul sebagai persoalan hidup atau mati dalam filsafat kedokteran. Selain itu, filsafat biologi, psikologi, dan ilmu-ilmu sosial mengeksplorasi apakah studi ilmiah tentang sifat manusia dapat mencapai objektivitas atau pasti dibentuk oleh nilai-nilai dan hubungan sosial.

Mendefinisikan sains

Membedakan sains dan non-sains disebut dengan masalah demarkasi. Misalnya, haruskah psikoanalisis, ilmu penciptaan, dan materialisme sejarah dianggap sebagai ilmu semu? Karl Popper menyebut hal ini sebagai pertanyaan sentral dalam filsafat ilmu pengetahuan. Namun, tidak ada penjelasan terpadu tentang masalah ini yang diterima di kalangan filsuf, dan beberapa orang menganggap masalah tersebut tidak dapat dipecahkan atau tidak menarik. Martin Gardner mendukung penggunaan standar Potter Stewart ("Saya mengetahuinya ketika saya melihatnya") untuk mengenali pseudosains.

Upaya awal yang dilakukan oleh kaum positivis logis mendasarkan sains pada observasi, sedangkan non-sains bersifat non-observasional dan karenanya tidak ada artinya. Popper berargumentasi bahwa sifat utama ilmu pengetahuan adalah kepalsuan. Artinya, setiap klaim yang benar-benar ilmiah dapat dibuktikan salah, setidaknya secara prinsip.

Bidang studi atau spekulasi yang menyamar sebagai sains dalam upaya untuk mengklaim legitimasi yang tidak dapat dicapai jika tidak dilakukan disebut sebagai pseudosains, sains pinggiran, atau sains sampah. Fisikawan Richard Feynman menciptakan istilah "ilmu pemujaan kargo" untuk kasus-kasus di mana para peneliti percaya bahwa mereka melakukan sains karena aktivitas mereka tampak seperti sains tetapi sebenarnya tidak memiliki "kejujuran" yang memungkinkan hasil mereka dievaluasi secara ketat.

Penjelasan ilmiah

Pertanyaan yang berkaitan erat adalah apa yang dianggap sebagai penjelasan ilmiah yang baik. Selain memberikan prediksi tentang kejadian yang akan datang, masyarakat juga sering menggunakan teori-teori ilmiah untuk memberikan penjelasan atas kejadian yang biasa terjadi atau sudah terjadi. Para filsuf telah menyelidiki kriteria dimana suatu teori ilmiah dapat dikatakan berhasil menjelaskan suatu fenomena, serta apa yang dimaksud dengan teori ilmiah yang mempunyai kekuatan penjelas.

Salah satu penjelasan ilmiah awal dan berpengaruh adalah model deduktif-nomologis. Dikatakan bahwa penjelasan ilmiah yang berhasil harus menyimpulkan terjadinya fenomena yang dimaksud dari hukum ilmiah. Pandangan ini telah mendapat banyak kritik, sehingga menghasilkan beberapa contoh tandingan yang diakui secara luas terhadap teori tersebut. Sangat sulit untuk mengkarakterisasi apa yang dimaksud dengan penjelasan ketika hal yang dijelaskan tidak dapat disimpulkan dari hukum apa pun karena hal tersebut merupakan suatu kebetulan, atau sebaliknya tidak dapat diprediksi secara sempurna dari apa yang diketahui. Wesley Salmon mengembangkan model di mana penjelasan ilmiah yang baik harus relevan secara statistik dengan hasil yang ingin dijelaskan. Ada pula yang berpendapat bahwa kunci dari penjelasan yang baik adalah menyatukan fenomena-fenomena yang berbeda atau menyediakan mekanisme sebab-akibat.

Membenarkan sains

Meskipun hal ini sering dianggap remeh, sama sekali tidak jelas bagaimana seseorang dapat menyimpulkan validitas suatu pernyataan umum dari sejumlah contoh spesifik atau menyimpulkan kebenaran suatu teori dari serangkaian pengujian yang berhasil. Misalnya, seekor ayam mengamati setiap pagi peternak datang dan memberinya makanan, selama ratusan hari berturut-turut. Oleh karena itu, ayam dapat menggunakan penalaran induktif untuk menyimpulkan bahwa peternak akan membawa makanan setiap pagi. Namun, suatu pagi, petani datang dan membunuh ayam tersebut. Mengapa penalaran ilmiah lebih dapat dipercaya dibandingkan penalaran ayam?

Salah satu pendekatannya adalah dengan mengakui bahwa induksi tidak dapat mencapai kepastian, namun mengamati lebih banyak contoh pernyataan umum setidaknya dapat membuat pernyataan umum tersebut lebih mungkin terjadi. Jadi ayam itu benar jika menyimpulkan dari pagi hari itu bahwa kemungkinan besar peternak akan datang membawa makanan lagi keesokan paginya, meskipun hal itu tidak dapat dipastikan. Namun, masih terdapat pertanyaan-pertanyaan sulit mengenai proses penafsiran bukti-bukti tertentu menjadi kemungkinan bahwa pernyataan umum itu benar. Salah satu jalan keluar dari kesulitan-kesulitan ini adalah dengan menyatakan bahwa semua keyakinan tentang teori-teori ilmiah bersifat subjektif, atau bersifat pribadi, dan penalaran yang benar hanyalah tentang bagaimana bukti harus mengubah keyakinan subjektif seseorang seiring berjalannya waktu.

Ada yang berpendapat bahwa apa yang dilakukan ilmuwan bukanlah penalaran induktif sama sekali, melainkan penalaran deduktif, atau inferensi terhadap penjelasan terbaik. Dalam hal ini, ilmu pengetahuan bukan tentang menggeneralisasi kejadian-kejadian spesifik melainkan tentang membuat hipotesis penjelasan atas apa yang diamati. Seperti yang telah dibahas pada bagian sebelumnya, tidak selalu jelas apa yang dimaksud dengan "penjelasan terbaik". Pisau cukur Ockham, yang menyarankan memilih penjelasan paling sederhana yang ada, memainkan peran penting dalam beberapa versi pendekatan ini. Kembali ke contoh ayam, apakah akan lebih mudah untuk menganggap bahwa peternak peduli terhadap ayam tersebut dan akan terus merawatnya tanpa batas waktu atau bahwa peternak sedang menggemukkannya untuk disembelih? Para filsuf telah mencoba menjadikan prinsip heuristik ini lebih tepat dalam kaitannya dengan kekikiran teoretis atau ukuran lainnya. Namun, meskipun berbagai ukuran kesederhanaan telah diajukan sebagai kandidat potensial, secara umum diterima bahwa tidak ada ukuran kesederhanaan yang tidak bergantung pada teori. Dengan kata lain, jumlah ukuran kesederhanaan sama banyaknya dengan jumlah teori itu sendiri, dan tugas untuk memilih di antara ukuran-ukuran kesederhanaan tampaknya sama problematisnya dengan tugas memilih di antara teori-teori. Nicholas Maxwell telah berargumentasi selama beberapa dekade bahwa kesatuan daripada kesederhanaan adalah faktor kunci non-empiris dalam mempengaruhi pilihan teori dalam ilmu pengetahuan, preferensi yang terus-menerus terhadap teori-teori terpadu yang pada dasarnya membuat ilmu pengetahuan menerima penerimaan tesis metafisika mengenai kesatuan di alam. Untuk menyempurnakan tesis yang bermasalah ini, perlu direpresentasikan dalam bentuk hierarki tesis, yang setiap tesis menjadi semakin tidak substansial seiring dengan naiknya hierarki.

Observasi tidak dapat dipisahkan dari teori

Saat melakukan observasi, ilmuwan melihat melalui teleskop, mempelajari gambar di layar elektronik, mencatat pembacaan meter, dan sebagainya. Umumnya, pada tingkat dasar, mereka bisa sepakat mengenai apa yang mereka lihat, misalnya termometer menunjukkan 37,9 derajat C. Namun, jika para ilmuwan ini mempunyai gagasan berbeda tentang teori yang telah dikembangkan untuk menjelaskan pengamatan dasar ini, mereka mungkin tidak setuju tentang apa yang mereka lihat. mereka mengamati. Misalnya, sebelum teori relativitas umum Albert Einstein, para pengamat kemungkinan besar menafsirkan gambar salib Einstein sebagai lima objek berbeda di luar angkasa. Namun, berdasarkan teori tersebut, para astronom akan memberi tahu Anda bahwa sebenarnya hanya ada dua objek, satu di tengah dan empat gambar berbeda dari objek kedua di sekitar sisinya. Alternatifnya, jika ilmuwan lain mencurigai ada sesuatu yang salah dengan teleskop dan hanya satu objek yang benar-benar diamati, maka mereka menggunakan teori lain. Observasi yang tidak lepas dari penafsiran teoritis dikatakan sarat teori.

Semua observasi melibatkan persepsi dan kognisi. Artinya, seseorang tidak melakukan observasi secara pasif, melainkan terlibat aktif dalam membedakan fenomena yang diamati dari data sensorik di sekitarnya. Oleh karena itu, pengamatan dipengaruhi oleh pemahaman mendasar seseorang tentang cara dunia berfungsi, dan pemahaman tersebut dapat mempengaruhi apa yang dirasakan, diperhatikan, atau dianggap layak untuk dipertimbangkan. Dalam pengertian ini, dapat dikatakan bahwa semua observasi sarat teori, terpisah dari penafsiran teoretis dikatakan sarat teori.

Tujuan ilmu pengetahuan

Haruskah sains bertujuan untuk menentukan kebenaran hakiki, atau adakah pertanyaan yang tidak dapat dijawab oleh sains? Kaum realis ilmiah mengklaim bahwa sains bertujuan untuk mencapai kebenaran dan bahwa seseorang harus menganggap teori-teori ilmiah sebagai sesuatu yang benar, kira-kira benar, atau mungkin benar. Sebaliknya, kaum anti-realis ilmiah berpendapat bahwa sains tidak bertujuan (atau setidaknya tidak berhasil) pada kebenaran, terutama kebenaran tentang hal-hal yang tidak dapat diamati seperti elektron atau alam semesta lainnya. Para instrumentalis berpendapat bahwa teori-teori ilmiah seharusnya hanya dievaluasi berdasarkan kegunaannya. Dalam pandangan mereka, benar atau tidaknya suatu teori tidaklah penting, karena tujuan sains adalah membuat prediksi dan memungkinkan teknologi yang efektif.

Kaum realis sering kali menunjuk pada keberhasilan teori-teori ilmiah terkini sebagai bukti kebenaran (atau mendekati kebenaran) teori-teori saat ini. Kaum antirealis menunjuk pada banyaknya teori palsu dalam sejarah sains, moral epistemik, keberhasilan asumsi pemodelan yang salah, atau kritik postmodern terhadap objektivitas sebagai bukti yang menentang realisme ilmiah. Kaum antirealis berusaha menjelaskan keberhasilan teori-teori ilmiah tanpa mengacu pada kebenaran. Beberapa penganut antirealis menyatakan bahwa teori-teori ilmiah bertujuan untuk menjadi akurat hanya pada objek-objek yang dapat diamati dan berpendapat bahwa keberhasilan mereka terutama dinilai berdasarkan kriteria tersebut.

Nilai dan ilmu

Nilai bersinggungan dengan sains dalam berbagai cara. Ada nilai-nilai epistemik yang menjadi pedoman utama penelitian ilmiah. Usaha ilmiah tertanam dalam budaya dan nilai-nilai tertentu melalui praktisi individu. Nilai-nilai muncul dari ilmu pengetahuan, baik sebagai produk maupun proses, dan dapat didistribusikan ke beberapa budaya dalam masyarakat. Ketika sampai pada pembenaran ilmu pengetahuan dalam arti partisipasi masyarakat umum oleh para praktisi tunggal, ilmu pengetahuan memainkan peran sebagai mediator antara mengevaluasi standar dan kebijakan masyarakat dan individu-individu yang berpartisipasi, oleh karena itu ilmu pengetahuan memang menjadi korban vandalisme dan sabotase yang mengadaptasi kondisi tersebut. berarti sampai akhir.

Jika tidak jelas apa yang dianggap sebagai sains, bagaimana proses konfirmasi teori bekerja, dan apa tujuan sains, terdapat ruang yang luas bagi nilai-nilai dan pengaruh sosial lainnya untuk membentuk sains. Memang benar bahwa nilai-nilai dapat berperan, mulai dari menentukan penelitian mana yang akan didanai hingga mempengaruhi teori mana yang mencapai konsensus ilmiah. Misalnya, pada abad ke-19, nilai-nilai budaya yang dianut oleh para ilmuwan tentang ras membentuk penelitian mengenai evolusi, dan nilai-nilai mengenai kelas sosial memengaruhi perdebatan mengenai frenologi (yang dianggap ilmiah pada saat itu). Para filsuf sains feminis, sosiolog sains, dan lainnya mengeksplorasi bagaimana nilai-nilai sosial memengaruhi sains.

16.1 Sejarah

Pra-modern

Asal usul filsafat ilmu dapat ditelusuri kembali ke Plato dan Aristoteles, yang membedakan bentuk penalaran perkiraan dan penalaran eksak, menetapkan tiga skema inferensi abduktif, deduktif, dan induktif, dan juga menganalisis penalaran dengan analogi. Polimatik Arab abad kesebelas Ibn al-Haytham (dikenal dalam bahasa Latin sebagai Alhazen) melakukan penelitiannya di bidang optik melalui pengujian eksperimental terkontrol dan geometri terapan, terutama dalam penyelidikannya terhadap gambar yang dihasilkan dari pemantulan dan pembiasan cahaya. Roger Bacon (1214–1294), seorang pemikir dan peneliti Inggris yang sangat dipengaruhi oleh al-Haytham, diakui oleh banyak orang sebagai bapak metode ilmiah modern. Pandangannya bahwa matematika penting untuk pemahaman yang benar tentang filsafat alam dianggap sudah 400 tahun lebih maju dari masanya.

Modern

Francis Bacon (tidak ada hubungan langsung dengan Roger, yang hidup 300 tahun sebelumnya) adalah tokoh penting dalam filsafat ilmu pengetahuan pada masa Revolusi Ilmiah. Dalam karyanya Novum Organum (1620) sebuah singgungan terhadap Organon karya Aristoteles dan Bacon menguraikan sistem logika baru untuk memperbaiki proses silogisme filosofis lama. Metode Bacon mengandalkan sejarah eksperimental untuk menghilangkan teori-

teori alternatif. Pada tahun 1637, René Descartes menetapkan kerangka kerja baru untuk mendasari pengetahuan ilmiah dalam risalahnya, *Discourse on Method*, yang menganjurkan peran sentral nalar dibandingkan dengan pengalaman indrawi. Sebaliknya, pada tahun 1713, edisi ke-2 Philosophiae Naturalis Principia Mathematica karya Isaac Newton menyatakan bahwa "... hipotesis ... tidak mempunyai tempat dalam filsafat eksperimental. Dalam filsafat ini, proposisi dideduksi dari fenomena dan dijadikan umum melalui induksi ." Bagian ini mempengaruhi "generasi pembaca yang cenderung filosofis selanjutnya untuk mengumumkan larangan hipotesis sebab-akibat dalam filsafat alam". Secara khusus, pada abad ke-18, David Hume dengan terkenal mengartikulasikan skeptisisme tentang kemampuan sains untuk menentukan kausalitas dan memberikan rumusan pasti tentang masalah induksi. Tulisan John Stuart Mill pada abad ke-19 juga dianggap penting dalam pembentukan konsepsi metode ilmiah terkini, serta mengantisipasi penjelasan ilmiah di kemudian hari.

Positivisme logis

Instrumentalisme menjadi populer di kalangan fisikawan sekitar pergantian abad ke-20, setelah itu positivisme logis mendefinisikan bidang ini selama beberapa dekade. Positivisme logis hanya menerima pernyataan yang dapat diuji sebagai sesuatu yang bermakna, menolak interpretasi metafisik, dan menganut verifikasiisme (seperangkat teori pengetahuan yang menggabungkan logikaisme, empirisme, dan linguistik untuk mendasari filsafat atas dasar yang konsisten dengan contoh-contoh dari ilmu-ilmu empiris). Berusaha merombak seluruh filsafat dan mengubahnya menjadi filsafat ilmiah baru, Lingkaran Berlin dan Lingkaran Wina mengemukakan positivisme logis pada akhir tahun 1920-an.

Menafsirkan filsafat bahasa awal Ludwig Wittgenstein, kaum positivis logis mengidentifikasi prinsip atau kriteria kebermaknaan kognitif yang dapat diverifikasi. Dari logikaisme Bertrand Russell mereka mencari reduksi matematika menjadi logika. Mereka juga menganut atomisme logis Russell, fenomenalisme Ernst Mach yang menyatakan bahwa pikiran hanya mengetahui pengalaman indrawi aktual atau potensial, yang merupakan isi dari semua ilmu pengetahuan, baik fisika maupun psikologi, dan operasionalisme Percy Bridgman. Dengan demikian, hanya yang dapat diverifikasi yang bersifat ilmiah dan bermakna secara kognitif, sedangkan yang tidak dapat diverifikasi adalah "pernyataan semu" yang tidak ilmiah, tidak bermakna secara kognitif, metafisik, emosional, atau sejenisnya yang tidak layak untuk ditinjau lebih lanjut oleh para filsuf, yang baru ditugaskan untuk mengorganisasikan pengetahuan daripada mengembangkan pengetahuan baru.

Positivisme logis umumnya digambarkan mengambil posisi ekstrem bahwa bahasa ilmiah tidak boleh mengacu pada apa pun yang tidak dapat diamati, bahkan gagasan inti tentang kausalitas, mekanisme, dan prinsip, tetapi hal ini berlebihan. Pembicaraan tentang hal yang tidak dapat diobservasi seperti itu dapat dianggap sebagai observasi langsung metaforis yang dilihat secara abstrak atau paling buruk bersifat metafisik atau emosional. Hukum teoretis akan direduksi menjadi hukum empiris, sedangkan istilah teoretis akan memperoleh makna dari istilah observasional melalui aturan korespondensi. Matematika dalam fisika akan direduksi menjadi logika simbolik melalui logikaisme, sementara rekonstruksi rasional akan mengubah bahasa biasa menjadi padanan standar, semuanya berjejaring dan disatukan oleh sintaksis logis. Sebuah teori ilmiah akan dinyatakan dengan metode pembuktiannya, dimana kalkulus logis atau operasi empiris dapat memverifikasi kepalsuan atau kebenarannya.

Pada akhir tahun 1930-an, kaum positivis logis meninggalkan Jerman dan Austria menuju Inggris dan Amerika. Pada saat itu, banyak yang menggantikan fenomenalisme Mach dengan fisikisme Otto Neurath, dan Rudolf Carnap berusaha mengganti verifikasi dengan sekadar konfirmasi. Dengan berakhirnya Perang Dunia II pada tahun 1945, positivisme logis menjadi lebih ringan, empirisme logis, sebagian besar dipimpin oleh Carl Hempel, di Amerika, yang menguraikan model hukum penutup penjelasan ilmiah sebagai cara untuk mengidentifikasi bentuk penjelasan logis tanpa referensi apa pun kepada tersangka. pengertian "sebab-akibat". Gerakan positivis logis menjadi landasan utama filsafat analitik, dan mendominasi filsafat Anglosfer, termasuk filsafat ilmu pengetahuan, sekaligus mempengaruhi ilmu pengetahuan, hingga tahun 1960an. Namun gerakan ini gagal menyelesaikan permasalahan utamanya, dan doktrin-doktrinnya semakin banyak diserang. Namun demikian, hal ini membawa pembentukan filsafat ilmu sebagai subdisiplin filsafat yang berbeda, dengan Carl Hempel memainkan peran kuncinya.

Thomas Kuhn

Dalam buku The Structure of Scientific Revolutions tahun 1962, Thomas Kuhn berpendapat bahwa proses observasi dan evaluasi terjadi dalam suatu paradigma, sebuah "potret" dunia yang konsisten secara logis dan konsisten dengan pengamatan yang dilakukan dari pembingkaiannya. Paradigma juga mencakup serangkaian pertanyaan dan praktik yang mendefinisikan suatu disiplin ilmu. Ia mencirikan sains normal sebagai proses observasi dan "pemecahan teka-teki" yang terjadi dalam suatu paradigma, sedangkan sains revolusioner terjadi ketika satu paradigma mengambil alih paradigma lain dalam suatu pergeseran paradigma.

Kuhn menyangkal bahwa hipotesis yang sedang diuji dapat diisolasi dari pengaruh teori yang mendasari pengamatannya, dan ia berpendapat bahwa tidak mungkin mengevaluasi paradigma yang bersaing secara independen. Lebih dari satu konstruksi yang konsisten secara logika dapat menggambarkan dunia yang serupa, namun tidak ada titik temu yang dapat digunakan untuk mengadu domba keduanya, teori melawan teori. Setiap paradigma mempunyai pertanyaan, tujuan, dan penafsiran tersendiri. Keduanya tidak memberikan standar yang dapat digunakan untuk menilai satu sama lain, sehingga tidak ada cara yang jelas untuk mengukur kemajuan ilmu pengetahuan di berbagai paradigma.

Bagi Kuhn, pilihan paradigma ditopang oleh proses rasional, namun pada akhirnya tidak ditentukan oleh proses rasional tersebut. Pilihan antara paradigma melibatkan penetapan dua atau lebih "potret" terhadap dunia dan memutuskan kemiripan mana yang paling menjanjikan. Bagi Kuhn, penerimaan atau penolakan suatu paradigma merupakan proses sosial dan juga proses logis. Namun, posisi Kuhn bukanlah relativisme. Menurut Kuhn, pergeseran paradigma terjadi ketika sejumlah besar anomali observasi muncul dalam paradigma lama dan paradigma baru membuat anomali tersebut masuk akal. Artinya, pemilihan paradigma baru didasarkan pada observasi, padahal observasi tersebut dilakukan dengan latar belakang paradigma lama.

16.2 Pendekatan saat ini

Asumsi aksiomatik Naturalisme

Menurut Robert Priddy, semua studi ilmiah pasti dibangun di atas setidaknya beberapa asumsi penting yang tidak dapat diuji dengan proses ilmiah; artinya, para ilmuwan harus memulai dengan beberapa asumsi mengenai analisis akhir atas fakta-fakta yang dibahas. Asumsi-asumsi ini kemudian dapat dibenarkan sebagian karena kepatuhannya terhadap jenis-jenis kejadian yang secara langsung kita sadari, dan sebagian lagi karena keberhasilannya dalam menyajikan fakta-fakta yang diamati dengan suatu keumuman tertentu, tanpa anggapan-dugaan yang bersifat ad hoc." Kuhn juga mengklaim bahwa semua ilmu pengetahuan didasarkan pada asumsi-asumsi tentang karakter alam semesta, bukan sekedar fakta-fakta empiris. Asumsi-asumsi ini sebuah paradigma yang terdiri dari kumpulan keyakinan, nilai-nilai dan teknik-teknik yang dianut oleh komunitas ilmiah tertentu, yang melegitimasi sistem mereka dan menetapkan batasan-batasan terhadap alam semesta. penyelidikan mereka. Bagi para naturalis, alam adalah satu-satunya realitas, paradigma yang "benar", dan tidak ada yang namanya supernatural, yakni segala sesuatu yang berada di atas, di luar, atau di luar alam. seluruh realitas, termasuk jiwa manusia.

Beberapa orang mengklaim bahwa naturalisme adalah filosofi implisit dari para ilmuwan yang bekerja, dan asumsi dasar berikut diperlukan untuk membenarkan metode ilmiah:

1. Bahwa ada realitas objektif yang dimiliki oleh semua pengamat rasional. "Dasar rasionalitas adalah penerimaan realitas objektif eksternal." “Realitas obyektif jelas merupakan hal yang penting jika kita ingin mengembangkan perspektif dunia yang bermakna. Namun keberadaannya tetap diasumsikan.” “Keyakinan kita bahwa realitas obyektif ada adalah sebuah asumsi yang muncul dari dunia nyata di luar diri kita. Saat masih bayi, kita membuat asumsi ini secara tidak sadar. Orang-orang dengan senang hati membuat asumsi ini yang menambah makna pada sensasi dan perasaan kita, daripada hidup dengan solipsisme. " "Tanpa asumsi ini, yang ada hanya pemikiran dan gambaran dalam pikiran kita sendiri (yang merupakan satu-satunya pikiran yang ada) dan tidak diperlukan ilmu pengetahuan, atau apa pun."

2. Bahwa realitas obyektif ini diatur oleh hukum alam; “Ilmu pengetahuan, setidaknya saat ini, berasumsi bahwa alam semesta mematuhi prinsip-prinsip yang dapat diketahui dan tidak bergantung pada waktu atau tempat, atau parameter subjektif seperti apa yang kita pikirkan, ketahui, atau bagaimana kita berperilaku.” Hugh Gauch berpendapat bahwa sains mengandaikan bahwa "dunia fisik itu teratur dan dapat dipahami".

3. Realitas tersebut dapat ditemukan melalui observasi dan eksperimen sistematis. Stanley Sobottka berkata: "Asumsi realitas eksternal diperlukan agar sains dapat berfungsi dan berkembang. Secara umum, sains adalah penemuan dan penjelasan dunia eksternal."[sumber yang diterbitkan sendiri?] "Ilmu pengetahuan berupaya menghasilkan pengetahuan itu bersifat universal dan seobjektif mungkin dalam jangkauan pemahaman manusia."

4. Bahwa Alam mempunyai hukum yang seragam dan sebagian besar atau bahkan semua hal di alam pasti mempunyai sebab alamiah. Ahli biologi Stephen Jay Gould menyebut dua proposisi yang berkaitan erat ini sebagai keteguhan hukum alam dan berjalannya proses yang diketahui. Simpson setuju bahwa aksioma keseragaman hukum, sebuah postulat yang tidak dapat dibuktikan, diperlukan agar para ilmuwan

dapat mengekstrapolasi inferensi induktif ke masa lalu yang tidak dapat diobservasi agar dapat mempelajarinya secara bermakna. “Asumsi mengenai invariansi spasial dan temporal dari hukum-hukum alam bukanlah hal yang unik dalam geologi karena asumsi tersebut merupakan jaminan bagi inferensi induktif yang, seperti yang ditunjukkan Bacon hampir empat ratus tahun yang lalu, merupakan cara berpikir dasar dalam sains empiris. Tanpa asumsi invarian spasial dan temporal ini, kita tidak punya dasar untuk mengekstrapolasi dari yang diketahui ke yang tidak diketahui dan, oleh karena itu, tidak ada cara untuk mencapai kesimpulan umum dari sejumlah pengamatan yang terbatas. (Karena asumsi itu sendiri dibenarkan oleh induksi, asumsi ini sama sekali tidak bisa "membuktikan" keabsahan induksi - sebuah upaya yang hampir ditinggalkan setelah Hume menunjukkan kesia-siaannya dua abad yang lalu)." Gould juga mencatat bahwa proses alami seperti "keseragaman proses" Lyell adalah sebuah asumsi: "Dengan demikian, ini adalah asumsi apriori yang dianut oleh semua ilmuwan dan bukan pernyataan tentang dunia empiris." Menurut R. Hooykaas: “Prinsip keseragaman bukanlah suatu undang-undang, bukan suatu aturan yang ditetapkan setelah perbandingan fakta-fakta, tetapi suatu prinsip, yang mendahului pengamatan fakta-fakta... Ini adalah prinsip logis dari kekikiran sebab-sebab dan perekonomian. gagasan-gagasan ilmiah. Dengan menjelaskan perubahan-perubahan di masa lalu melalui analogi dengan fenomena-fenomena masa kini, suatu batasan ditetapkan untuk dugaan, karena hanya ada satu cara yang membuat dua hal dianggap setara, namun ada banyak sekali cara yang dapat membuat keduanya dianggap berbeda."

5. Prosedur percobaan tersebut akan terlaksana dengan memuaskan tanpa adanya kesalahan baik disengaja maupun tidak disengaja yang akan mempengaruhi hasil.

6. Para peneliti tidak akan terlalu bias terhadap asumsi mereka.

7. Pengambilan sampel secara acak itu mewakili keseluruhan populasi. Sampel acak sederhana (SRS) adalah pilihan probabilistik paling dasar yang digunakan untuk membuat sampel dari suatu populasi. Manfaat SRS adalah peneliti dijamin memilih sampel yang mewakili populasi sehingga menjamin kesimpulan yang valid secara statistik.

Metodologis Naturalisme

Naturalisme metodologis Naturalisme metodologis, pengertian kedua dari istilah "naturalisme", (lihat di atas) adalah "pengadopsian atau asumsi naturalisme filosofis... dengan atau tanpa sepenuhnya menerima atau mempercayainya." Robert T. Pennock menggunakan istilah ini untuk mengklarifikasi bahwa metode ilmiah membatasi diri pada penjelasan alami tanpa mengasumsikan ada atau tidaknya hal supernatural. "Oleh karena itu, kita mungkin agnostik terhadap kebenaran hakiki naturalisme [filosofis], namun namun mengadopsinya dan menyelidiki alam seolah-olah alam adalah satu-satunya yang ada."

Menurut Ronald Numbers, istilah "naturalisme metodologis" diciptakan pada tahun 1983 oleh Paul de Vries, seorang filsuf Wheaton College.

Baik Schafersman maupun Strahler menegaskan bahwa tidak logis mencoba memisahkan kedua pengertian naturalisme. "Sementara sains sebagai suatu proses hanya memerlukan naturalisme metodologis, praktik atau adopsi naturalisme metodologis memerlukan keyakinan logis dan moral terhadap naturalisme filosofis, sehingga keduanya tidak dipisahkan secara logis." "Pandangan naturalistik [filosofis] ini didukung oleh sains sebagai asumsi fundamentalnya."

Namun Scott merasa penting untuk melakukan hal tersebut demi kepentingan memprogram ulang agama. "Para ilmuwan dapat meredakan penolakan terhadap evolusi dengan terlebih dahulu mengakui bahwa sebagian besar orang Amerika adalah orang-orang yang beriman dan sebagian besar orang Amerika ingin mempertahankan keyakinan mereka." Scott rupanya percaya bahwa "individu dapat mempertahankan keyakinan agama dan tetap menerima evolusi melalui naturalisme metodologis. Oleh karena itu, para ilmuwan harus menghindari penyebutan naturalisme metafisik dan sebagai gantinya menggunakan naturalisme metodologis." "Bahkan seseorang yang mungkin tidak setuju dengan logika saya... sering kali memahami alasan strategis untuk memisahkan naturalisme metodologis dari naturalisme filosofis jika kita ingin lebih banyak orang Amerika memahami evolusi.

Pendekatan Scott telah mencapai keberhasilan seperti yang diilustrasikan dalam penelitian Ecklund di mana beberapa ilmuwan agama melaporkan bahwa keyakinan agama mereka memengaruhi cara mereka berpikir tentang implikasi moral dari karya mereka, namun tidak mempengaruhi cara mereka mempraktikkan sains dalam naturalisme metodologis. Papineau mencatat bahwa "Para filsuf yang peduli dengan agama cenderung kurang antusias terhadap naturalisme metafisik dan bahwa mereka yang tidak terlalu didiskualifikasi tetap puas" dengan menetapkan standar 'naturalisme' lebih tinggi.

Berbeda dengan Schafersman, Strahler, dan Scott, Robert T. Pennock, seorang saksi ahli di persidangan Kitzmiller v. Dover Area School District dan dikutip oleh Hakim dalam Opini Memorandumnya.[68] menggambarkan "naturalisme metodologis" yang menyatakan bahwa hal itu tidak didasarkan pada naturalisme metafisik dogmatis.

Pennock lebih lanjut menyatakan bahwa karena agen dan kekuatan supernatural "berada di atas dan melampaui dunia alami serta agen dan kekuatannya" dan "tidak dibatasi oleh hukum alam", hanya ketidakmungkinan logis yang membatasi apa yang tidak dapat dilakukan oleh agen supernatural. Selain itu ia mengatakan: "Jika kita dapat menerapkan pengetahuan alam untuk memahami kekuatan supernatural, maka menurut definisi, kekuatan tersebut bukanlah kekuatan supernatural." "Karena hal-hal supernatural merupakan sebuah misteri bagi kita, hal ini tidak dapat memberikan dasar bagi seseorang untuk menilai model ilmiah." "Eksperimen memerlukan observasi dan pengendalian variabel.... Namun menurut definisi kita tidak memiliki kendali atas entitas atau kekuatan supernatural."

Pendapat bahwa studi tentang fungsi alam juga merupakan studi tentang asal usul alam berbeda dengan penentang yang berpendapat bahwa berfungsinya kosmos tidak ada hubungannya dengan asal usulnya. Meskipun mereka terbuka terhadap perintah supernatural dalam penemuan dan keberadaannya, selama studi ilmiah untuk menjelaskan fungsi kosmos, mereka tidak tertarik pada hal supernatural. Mereka sepakat bahwa membiarkan “sains menggunakan kekuatan supranatural yang belum teruji untuk menjelaskan bagaimana fungsi alam akan membuat tugas ilmuwan menjadi tidak berarti, melemahkan disiplin yang memungkinkan sains untuk membuat kemajuan, dan akan sama tidak memuaskannya dengan ketergantungan penulis naskah drama Yunani kuno pada deus ex. machina untuk mengeluarkan pahlawannya dari kesulitan yang sulit."

16.3 Apa itu Ilmu

Apa itu sains? Pertanyaan ini mungkin tampak mudah untuk dijawab: semua orang tahu bahwa mata pelajaran seperti fisika, kimia, dan biologi merupakan sains, sedangkan mata pelajaran seperti seni, musik, dan teologi tidak. Namun ketika sebagai filsuf kita bertanya apa itu sains, jawaban yang kita inginkan bukanlah itu. Kami tidak meminta sekedar daftar kegiatan yang biasa disebut ‘sains’. Sebaliknya, kita menanyakan ciri umum apa yang dimiliki oleh semua hal dalam daftar tersebut, yaitu apa yang membuat sesuatu menjadi ilmu. Dipahami dengan cara ini, pertanyaan kita tidaklah sepele.

Namun Anda mungkin masih menganggap pertanyaannya relatif mudah.

Tentunya sains hanyalah upaya untuk memahami, menjelaskan, dan memprediksi dunia tempat kita tinggal? Ini tentu merupakan jawaban yang masuk akal. Tapi apakah itu keseluruhan cerita? Bagaimanapun, berbagai agama juga berupaya memahami dan menjelaskan dunia, namun agama biasanya tidak dianggap sebagai cabang ilmu pengetahuan. Demikian pula, astrologi dan meramal adalah upaya untuk memprediksi masa depan, namun kebanyakan orang tidak akan menggambarkan aktivitas ini sebagai sains. Atau pertimbangkan sejarah. Sejarawan berusaha memahami dan menjelaskan apa yang terjadi di masa lalu, namun sejarah biasanya digolongkan sebagai mata pelajaran humaniora bukan mata pelajaran sains. Seperti banyak pertanyaan filosofis lainnya, pertanyaan 'apa itu sains?' lebih rumit daripada yang terlihat pada pandangan pertama.

Banyak orang percaya bahwa ciri khas sains terletak pada metode tertentu yang digunakan para ilmuwan untuk menyelidiki dunia. Saran ini cukup masuk akal. Banyak disiplin ilmu yang menerapkan metode penyelidikan khusus yang tidak digunakan dalam usaha non-ilmiah. Contoh nyatanya adalah penggunaan eksperimen, yang secara historis menandai titik balik dalam perkembangan ilmu pengetahuan modern. Namun tidak semua ilmu pengetahuan bersifat eksperimental para astronom jelas tidak dapat melakukan eksperimen di langit, melainkan harus puas dengan pengamatan yang cermat. Hal yang sama berlaku untuk banyak ilmu sosial. Ciri penting lainnya dari sains adalah konstruksi teori. Para ilmuwan tidak sekadar mencatat hasil eksperimen dan observasi dalam buku catatan mereka biasanya ingin menjelaskan hasil tersebut dalam teori umum. Hal ini tidak selalu mudah untuk dilakukan, namun ada beberapa keberhasilan yang mencolok. Salah satu tugas utama filsafat sains adalah memahami bagaimana teknik seperti eksperimen, observasi, dan konstruksi teori telah memungkinkan para ilmuwan mengungkap begitu banyak rahasia alam.

16.4 Asal usul ilmu pengetahuan modern

Di sekolah dan universitas saat ini, sebagian besar sains diajarkan dengan cara yang ahistoris. Buku teks menyajikan ide-ide kunci suatu disiplin ilmu dalam bentuk yang senyaman mungkin, dengan sedikit menyebutkan proses sejarah yang panjang dan seringkali berliku-liku yang mengarah pada penemuannya. Sebagai strategi pedagogi, hal ini masuk akal. Namun beberapa apresiasi terhadap sejarah gagasan ilmiah berguna untuk memahami isu-isu yang menarik perhatian para filsuf sains. Memang benar, seperti yang akan kita bahas, telah dikemukakan bahwa perhatian yang cermat terhadap sejarah ilmu pengetahuan sangat diperlukan untuk melakukan filsafat ilmu yang baik.

Asal usul ilmu pengetahuan modern terletak pada periode perkembangan ilmu pengetahuan yang pesat yang terjadi di Eropa antara tahun 1500 dan 1750, yang sekarang kita sebut sebagai revolusi ilmu pengetahuan. Tentu saja, penyelidikan ilmiah dilakukan pada zaman kuno dan abad pertengahan, dan revolusi ilmiah tidak muncul begitu saja. Pada periode-periode awal ini, pandangan dunia yang dominan adalah Aristotelianisme, yang diambil dari nama filsuf Yunani kuno Aristoteles, yang mengemukakan teori-teori terperinci dalam fisika, biologi, astronomi, dan kosmologi. Namun gagasan Aristoteles akan tampak sangat aneh bagi ilmuwan modern, begitu pula dengan metode penyelidikannya. Sebagai contoh saja, ia percaya bahwa semua benda di bumi hanya terdiri dari empat unsur: tanah, api, udara, dan air. Pandangan ini jelas bertentangan dengan apa yang disampaikan ilmu kimia modern kepada kita.

Langkah penting pertama dalam pengembangan pandangan dunia ilmiah modern adalah revolusi Copernicus. Pada tahun 1542 astronom Polandia Nicolas Copernicus (1473–1543) menerbitkan sebuah buku menyerang model geosentris alam semesta, yang menempatkan bumi diam sebagai pusat alam semesta dengan planet-planet dan matahari mengorbit di sekelilingnya. Astronomi geosentris, juga dikenal sebagai astronomi Ptolemaik yang diambil dari nama astronom Yunani kuno Ptolemy, merupakan inti dari pandangan dunia Aristoteles dan tidak tertandingi selama 1.800 tahun. Namun Copernicus menyarankan alternatif lain: matahari adalah pusat tetap alam semesta dan planet-planet, termasuk bumi, berada pada orbit yang mengelilinginya. Dalam model heliosentris ini, bumi hanya dianggap sebagai planet lain, sehingga kehilangan status unik yang diberikan tradisi. Teori Copernicus awalnya mendapat banyak penolakan, salah satunya dari Gereja Katolik yang menganggapnya bertentangan dengan Kitab Suci, dan pada tahun 1616 melarang buku-buku yang menganjurkan pergerakan bumi. Namun dalam waktu 100 tahun, Copernicanisme telah menjadi ortodoksi ilmiah yang mapan.

Inovasi Copernicus tidak hanya menghasilkan astronomi yang lebih baik. Secara tidak langsung mendorong perkembangan fisika modern melalui karya Johannes Kepler (1571–1630) dan Galileo Galilei (154–1642). Kepler menemukan bahwa planet-planet tidak bergerak dalam orbit melingkar mengelilingi matahari, seperti yang dipikirkan Copernicus, melainkan dalam bentuk elips. Ini adalah 'hukum pertama' tentang gerak planet; hukum kedua dan ketiganya menentukan kecepatan planet mengorbit matahari. Secara keseluruhan, hukum Kepler menghasilkan teori planet yang berhasil, memecahkan permasalahan yang membingungkan para astronom selama berabad-abad. Galileo adalah pendukung Copernicanisme seumur hidup dan salah satu pionir awal teleskop. Saat dia mengarahkan teleskopnya ke langit, dia menghasilkan banyak penemuan menakjubkan: gunung di bulan, beragam bintang, bintik matahari, bulan Jupiter, dan banyak lagi. Semua ini bertentangan dengan kosmologi Aristotelian, dan memainkan peran penting dalam mengubah komunitas ilmiah ke Copernicanisme.

Namun, kontribusi Galileo yang paling bertahan lama bukan terletak pada bidang astronomi melainkan bidang mekanika, di mana ia menyangkal teori Aristoteles bahwa benda yang lebih berat jatuh lebih cepat daripada benda yang lebih ringan. Sebagai pengganti teori ini, Galileo mengajukan gagasan yang berlawanan dengan intuisi bahwa semua benda yang jatuh bebas akan jatuh ke bumi dengan kecepatan yang sama, berapa pun beratnya. (Tentu saja dalam praktiknya, jika Anda menjatuhkan bulu dan bola meriam dari ketinggian yang sama, bola meriam tersebut akan mendarat terlebih dahulu, namun Galileo berpendapat bahwa hal ini hanya disebabkan oleh hambatan udara dalam ruang hampa, sehingga keduanya akan mendarat bersamaan). Lebih lanjut, ia berpendapat bahwa benda yang jatuh bebas mengalami percepatan secara seragam, yaitu memperoleh pertambahan kecepatan yang sama dalam waktu yang sama; ini dikenal sebagai hukum jatuh bebas Galileo. Galileo memberikan bukti yang persuasif meskipun tidak konklusif untuk hukum ini, yang menjadi inti dari mekanikanya.

Galileo umumnya dianggap sebagai fisikawan modern pertama. Dia adalah orang pertama yang menunjukkan bahwa bahasa matematika dapat digunakan untuk menggambarkan perilaku benda-benda material, seperti benda jatuh dan proyektil. Bagi kami hal ini tampak jelas—teori ilmiah masa kini secara rutin dirumuskan dalam bahasa matematika, tidak hanya dalam fisika tetapi juga dalam ilmu biologi dan sosial. Namun pada zaman Galileo, hal ini tidak jelas: matematika secara luas dianggap berhubungan dengan entitas yang murni abstrak, sehingga tidak dapat diterapkan pada realitas fisik. Aspek inovatif lainnya adalah penekanan Galileo pada pengujian hipotesis secara eksperimental. Bagi ilmuwan modern, hal ini mungkin tampak jelas. Namun pada zaman Galileo, eksperimen pada umumnya tidak dianggap sebagai cara yang dapat diandalkan untuk memperoleh pengetahuan. Penekanan Galileo pada eksperimen menandai awal dari pendekatan empiris dalam mempelajari alam yang berlanjut hingga saat ini.

Periode setelah kematian Galileo menyaksikan revolusi ilmu pengetahuan dengan cepat mendapatkan momentumnya. Filsuf-ilmuwan Perancis René Descartes (1596–1650) mengembangkan 'filsafat mekanis' baru yang radikal, yang menyatakan bahwa dunia fisik terdiri dari partikel-partikel materi yang berinteraksi dan bertabrakan satu sama lain. Hukum yang mengatur gerak partikel atau 'sel darah' ini memegang kunci untuk memahami struktur alam semesta, menurut Descartes. Filsafat mekanik berjanji untuk menjelaskan semua fenomena yang dapat diamati dalam kaitannya dengan pergerakan sel-sel ini, dan dengan cepat menjadi visi ilmiah yang dominan pada akhir abad ke-17; sampai batas tertentu hal itu masih ada pada kita saat ini. Versi filosofi mekanik dianut oleh tokoh-tokoh seperti Huygens, Gassendi, Hooke, dan Boyle; penerimaannya menandai kejatuhan terakhir pandangan dunia Aristotelian.

Revolusi ilmiah mencapai puncaknya pada karya Isaac Newton (1643-1727), yang mahakaryanya, Prinsip Matematika Filsafat Alam, diterbitkan pada tahun 1687.

Newton setuju dengan para filsuf mekanik bahwa alam semesta hanya terdiri dari partikel-partikel yang bergerak, dan berusaha memperbaiki teori Descartes. Hasilnya adalah teori dinamik dan mekanis tentang kekuatan besar, yang didasarkan pada tiga hukum gerak Newton dan prinsip gravitasi universal yang terkenal. Menurut prinsip ini, setiap benda di alam semesta memberikan gaya tarik gravitasi pada setiap benda lainnya; kekuatan tarik menarik antara dua benda bergantung pada hasil kali massa kedua benda tersebut dan kuadrat jarak antara kedua benda tersebut. Hukum gerak kemudian menentukan bagaimana gaya gravitasi ini mempengaruhi gerakan benda. Newton menguraikan teorinya dengan ketelitian dan ketelitian yang luar biasa, menciptakan teknik matematika yang sekarang kita sebut 'kalkulus'. Yang mengejutkan, Newton mampu menunjukkan bahwa hukum gerak planet Kepler dan hukum jatuh bebas Galileo (keduanya dengan sedikit modifikasi) merupakan konsekuensi logis dari hukum gerak dan gravitasinya. Jadi, satu set hukum dapat menjelaskan pergerakan benda baik di bumi maupun di angkasa, dan dirumuskan oleh Newton dalam bentuk kuantitatif yang tepat.

Fisika Newton memberikan kerangka bagi sains untuk 200 tahun berikutnya, dengan cepat menggantikan fisika Cartesian. Keyakinan ilmiah tumbuh pesat pada periode ini, sebagian besar disebabkan oleh keberhasilan teori Newton, yang diyakini secara luas telah mengungkap cara kerja alam yang sebenarnya, dan mampu menjelaskan segala sesuatu, setidaknya pada prinsipnya. Upaya mendetail dilakukan untuk memperluas cara penjelasan Newton ke lebih banyak fenomena. Abad ke-18 dan ke-19 menyaksikan kemajuan ilmu pengetahuan yang penting, khususnya di bidang kimia, optik, termodinamika, dan elektromagnetisme. Namun sebagian besar, perkembangan ini dianggap sesuai dengan konsepsi Newton tentang alam semesta. Para ilmuwan menerima konsepsi Newton sebagai sesuatu yang benar; yang masih harus dilakukan adalah mengisi rinciannya.

Keyakinan terhadap gambaran Newton hancur pada tahun-tahun awal abad ke-20, berkat dua perkembangan baru yang revolusioner dalam fisika: teori relativitas dan mekanika kuantum. Teori relativitas yang ditemukan oleh Einstein menunjukkan bahwa mekanika Newton tidak memberikan hasil yang tepat jika diterapkan pada benda yang sangat masif, atau benda yang bergerak dengan kecepatan sangat tinggi. Mekanika kuantum, sebaliknya, menunjukkan bahwa teori Newton tidak akan berhasil bila diterapkan pada skala yang sangat kecil, pada partikel subatom. Baik teori relativitas maupun mekanika kuantum, terutama yang terakhir, adalah teori yang aneh dan radikal, yang membuat klaim tentang hakikat realitas yang bertentangan dengan akal sehat, dan sulit diterima atau bahkan dipahami oleh banyak orang. Kemunculan mereka menyebabkan pergolakan konseptual dalam fisika, yang berlanjut hingga hari ini.

Sejauh ini penjelasan singkat kita tentang sejarah sains hanya terfokus pada fisika. Ini bukan suatu kebetulan, karena fisika bersifat historis penting dan dalam arti tertentu merupakan disiplin ilmu yang paling mendasar. Sebab objek-objek yang dipelajari oleh ilmu-ilmu lain itu sendiri terdiri dari entitas-entitas fisik, tetapi tidak sebaliknya. Misalnya mengenai botani. Ahli botani mempelajari tumbuhan, yang terdiri dari sel-sel, yang juga terdiri dari bio-molekul, yang pada akhirnya terdiri dari atom-atom, yang merupakan partikel fisik. Jadi botani berurusan dengan entitas yang kurang 'mendasar' dibandingkan fisika meskipun bukan berarti hal itu kurang penting. Hal inilah yang akan kita bahas kembali di pembahasan berikutnya. Namun penjelasan singkat tentang asal usul ilmu pengetahuan modern tidak akan lengkap jika kita menghilangkan semua penyebutan ilmu-ilmu non-fisik.

Dalam biologi, peristiwa yang menonjol adalah penemuan teori evolusi melalui seleksi alam oleh Charles Darwin, yang diterbitkan dalam *The Origin of Species* pada tahun 1859. Sampai saat itu, diyakini secara luas bahwa berbagai spesies diciptakan secara terpisah oleh Tuhan, sebagai makhluk hidup. Kitab Kejadian mengajarkan. Namun Darwin berpendapat bahwa spesies masa kini sebenarnya telah berevolusi dari nenek moyang mereka, melalui proses yang disebut seleksi alam. Seleksi alam terjadi ketika beberapa organisme meninggalkan lebih banyak keturunan dibandingkan yang lain, bergantung pada karakteristik fisiknya; Jika ciri-ciri tersebut kemudian diwarisi oleh keturunannya, lama kelamaan populasinya akan semakin baik dalam beradaptasi dengan lingkungan. Meskipun proses ini sederhana, dalam beberapa generasi hal ini dapat menyebabkan satu spesies berevolusi menjadi spesies yang benar-benar baru, kata Darwin. Begitu persuasifnya bukti yang dikemukakan Darwin untuk teorinya bahwa pada awal abad ke-20 hal ini diterima sebagai ortodoksi ilmiah, meskipun ada banyak penolakan teologis. Penelitian selanjutnya memberikan konfirmasi yang mengejutkan terhadap teori Darwin, yang menjadi inti pandangan dunia biologi modern.

Abad ke-20 menyaksikan revolusi lain dalam biologi yang belum selesai: munculnya biologi molekuler dan genetika. Pada tahun 1953 Watson dan

Crick menemukan struktur DNA, materi keturunan yang membentuk gen dalam sel makhluk hidup (lihat Gambar 2). Penemuan Watson dan Crick menjelaskan bagaimana informasi genetik dapat disalin dari satu sel ke sel lainnya, dan kemudian diturunkan dari induk ke keturunannya, sehingga menjelaskan mengapa keturunan cenderung mirip dengan induknya. Penemuan mereka membuka bidang penelitian biologi baru yang menarik yang dikenal sebagai biologi molekuler, yang mempelajari dasar molekuler dari fenomena biologis. Dalam enam puluh tahun sejak penelitian Watson dan Crick, biologi molekuler telah berkembang pesat, mengubah pemahaman kita tentang hereditas, perkembangan, dan proses biologis inti lainnya. Pada tahun 2003, upaya selama satu dekade untuk memberikan deskripsi tingkat molekuler tentang kumpulan gen lengkap pada manusia, yang dikenal sebagai Proyek Genom Manusia, akhirnya selesai; implikasinya terhadap kedokteran dan bioteknologi baru mulai dieksplorasi. Abad ke-21 kemungkinan besar akan menyaksikan perkembangan lebih lanjut yang menarik dalam bidang ini.

Lebih banyak sumber daya telah dicurahkan untuk penelitian ilmiah dalam enam puluh tahun terakhir dibandingkan sebelumnya. Salah satu dampaknya adalah munculnya disiplin ilmu baru, seperti ilmu komputer, kecerdasan buatan, dan ilmu saraf. Akhir abad ke-20 menyaksikan kebangkitan ilmu kognitif, yang mempelajari aspek kognisi manusia termasuk persepsi, memori, dan penalaran, serta telah mengubah psikologi tradisional. Sebagian besar dorongan bagi ilmu kognitif berasal dari gagasan bahwa pikiran manusia dalam beberapa hal mirip dengan komputer dan bahwa proses mental manusia dapat dipahami dengan membandingkannya dengan operasi yang dilakukan komputer. Sebaliknya, bidang ilmu saraf mempelajari cara kerja otak itu sendiri. Berkat kemajuan teknologi dalam pemindaian otak, para ilmuwan saraf mulai memahami dasar saraf yang mendasari kognisi manusia (dan hewan). Usaha ini memiliki kepentingan intrinsik yang besar dan juga dapat mengarah pada peningkatan pengobatan gangguan mental.

Ilmu-ilmu sosial, seperti ekonomi, antropologi, dan sosiologi, juga berkembang pesat pada abad ke-20, meskipun beberapa orang percaya bahwa ilmu-ilmu tersebut tertinggal dibandingkan ilmu-ilmu alam dalam hal kecanggihan dan kekuatan prediksi. Hal ini menimbulkan pertanyaan metodologis yang menarik. Haruskah ilmuwan sosial mencoba menggunakan metode yang sama seperti ilmuwan alam, atau apakah pokok bahasannya memerlukan pendekatan yang berbeda?

16.5 Apa itu filsafat ilmu?

Tugas utama filsafat ilmu adalah menganalisis metode penyelidikan yang digunakan dalam ilmu pengetahuan. Anda mungkin bertanya-tanya mengapa tugas ini harus menjadi tanggung jawab para filsuf, bukan para ilmuwan itu sendiri. Ini pertanyaan yang bagus. Salah satu jawabannya adalah bahwa refleksi filosofis dapat mengungkap asumsi-asumsi yang tersirat dalam penyelidikan ilmiah. Sebagai ilustrasi, pertimbangkan praktik eksperimental. Misalkan seorang ilmuwan melakukan percobaan dan mendapatkan hasil tertentu. Mereka mengulangi percobaan tersebut beberapa kali dan tetap mendapatkan hasil yang sama. Setelah itu mereka mungkin akan berhenti, yakin bahwa jika percobaan diulangi lagi dalam kondisi yang persis sama, maka hasil yang sama akan diperoleh. Asumsi ini mungkin tampak jelas, namun sebagai filsuf, kita ingin mempertanyakannya. Mengapa berasumsi bahwa pengulangan percobaan di masa depan akan menghasilkan hasil yang sama? Bagaimana kita tahu ini benar? Para ilmuwan kemungkinan besar tidak akan menghabiskan banyak waktu untuk memikirkan hal ini: mereka mungkin mempunyai hal-hal yang lebih baik untuk dilakukan. Ini adalah pertanyaan yang pada dasarnya bersifat filosofis.

Jadi bagian dari tugas filsafat sains adalah mempertanyakan asumsi-asumsi yang dianggap remeh oleh para ilmuwan. Namun keliru jika menyatakan bahwa para ilmuwan tidak pernah membahas sendiri isu-isu filosofis. Memang secara historis, para ilmuwan telah memainkan peran penting dalam perkembangan filsafat ilmu pengetahuan. Descartes, Newton, dan Einstein adalah contoh yang menonjol. Masing-masing dari mereka sangat tertarik dengan pertanyaan tentang bagaimana ilmu pengetahuan harus dikembangkan, metode penyelidikan apa yang harus digunakan, dan apakah ada batasan dalam pengetahuan ilmiah. Pertanyaan-pertanyaan ini masih menjadi inti filsafat ilmu pengetahuan kontemporer. Jadi isu-isu yang menjadi perhatian para filsuf ilmu pengetahuan telah menarik perhatian beberapa ilmuwan terbesar. Meskipun demikian, harus diakui bahwa banyak ilmuwan saat ini yang kurang tertarik pada filsafat ilmu pengetahuan, dan hanya mengetahui sedikit tentangnya. Meskipun disayangkan, hal ini bukan merupakan indikasi bahwa isu-isu filosofis sudah tidak relevan lagi. Hal ini justru merupakan konsekuensi dari semakin terspesialisasinya sifat sains, dan polarisasi antara sains dan humaniora yang menjadi ciri pendidikan modern.

Anda mungkin masih bertanya-tanya apa sebenarnya filsafat ilmu itu. Karena mengatakan bahwa ia 'mempelajari metode-metode ilmu pengetahuan' tidaklah berarti banyak. Daripada mencoba memberikan definisi yang lebih informatif, kami malah akan mengkaji isu klasik dalam filsafat ilmu.

16.6 Sains dan ilmu semu

Ingat pertanyaan yang kita mulai: apakah sains itu? Karl Popper, seorang filsuf sains abad ke-20 yang berpengaruh, berpendapat bahwa ciri mendasar dari sebuah teori ilmiah adalah bahwa teori tersebut harus dapat dipalsukan. Menyebut suatu teori dapat dipalsukan tidak berarti bahwa teori tersebut salah. Sebaliknya, ini berarti bahwa teori tersebut membuat beberapa prediksi pasti yang mampu diuji berdasarkan pengalaman. Jika prediksi tersebut ternyata salah, maka teori tersebut telah dipalsukan atau dibantah. Jadi teori yang dapat difalsifikasi adalah teori yang mungkin kita temukan salah, dan tidak sesuai dengan semua pengalaman yang ada. Popper berpendapat bahwa beberapa teori yang dianggap ilmiah tidak memenuhi kondisi ini dan karenanya tidak pantas disebut sains sama sekali; mereka hanyalah ilmu semu.

Teori psikoanalitik Freud adalah salah satu contoh pseudo-sains favorit Popper. Menurut Popper, teori Freud dapat diselaraskan dengan temuan empiris apa pun. Apapun perilaku pasiennya, penganut Freudian dapat menemukan penjelasannya berdasarkan teori mereka, mereka tidak akan pernah mengakui bahwa teori mereka salah. Popper mengilustrasikan maksudnya dengan contoh berikut. Bayangkan seorang pria yang mendorong seorang anak ke sungai dengan maksud untuk membunuhnya, dan pria lain yang mengorbankan nyawanya demi menyelamatkan anak tersebut. Para pengikut Freud dapat menjelaskan perilaku kedua pria tersebut dengan sama mudahnya: yang pertama ditekan, dan yang kedua mencapai sublimasi. Popper berpendapat bahwa melalui penggunaan konsep-konsep seperti represi, sublimasi, dan hasrat bawah sadar, teori Freud dapat dibuat kompatibel dengan data klinis apa pun; dengan demikian hal itu dapat dipalsukan.

Hal yang sama juga berlaku pada teori sejarah Marx, kata Popper. Marx menyatakan bahwa dalam masyarakat industri di seluruh dunia, kapitalisme akan digantikan oleh sosialisme dan pada akhirnya komunisme. Namun ketika hal ini tidak terjadi, alih-alih mengakui bahwa teori Marx salah, kaum Marxis malah menciptakan penjelasan sementara mengapa apa yang terjadi sebenarnya konsisten dengan teori mereka. Misalnya saja, mereka mungkin mengatakan bahwa kemajuan menuju komunisme yang tak terhindarkan untuk sementara telah diperlambat oleh bangkitnya negara kesejahteraan, yang 'melunakkan' kaum proletar dan melemahkan semangat revolusioner mereka. Dengan cara ini, teori Marx dapat dibuat kompatibel dengan segala kemungkinan kejadian, seperti halnya teori Freud. Oleh karena itu, tidak ada teori yang memenuhi syarat sebagai teori yang benar-benar ilmiah, menurut kriteria Popper.

Popper membandingkan teori Freud dan Marx dengan teori gravitasi Einstein, yang dikenal sebagai relativitas umum. Berbeda dengan teori Freud dan Marx, teori Einstein memberikan prediksi yang sangat pasti: bahwa sinar cahaya dari bintang yang jauh akan dibelokkan oleh medan gravitasi matahari. Biasanya, efek ini tidak mungkin diamati—kecuali saat gerhana matahari. Pada tahun 1919, ahli astrofisika Inggris Sir Arthur Eddington mengadakan dua ekspedisi untuk mengamati gerhana matahari tahun itu, satu ke Brasil dan satu lagi ke pulau Principe di lepas pantai Atlantik Afrika, dengan tujuan menguji prediksi Einstein. Ekspedisi tersebut menemukan bahwa cahaya bintang memang dibelokkan oleh matahari, hampir sama dengan jumlah yang diperkirakan Einstein. Popper sangat terkesan dengan ini. Teori Einstein telah menghasilkan prediksi yang pasti dan tepat, yang dikonfirmasi melalui observasi. Seandainya ternyata cahaya bintang tidak dibelokkan oleh Matahari, hal ini menunjukkan bahwa Einstein salah. Jadi teori Einstein memenuhi kriteria falsifiabilitas.

Upaya Popper untuk membedakan sains dari pseudo-sains secara intuitif cukup masuk akal. Pasti ada sesuatu yang mencurigakan tentang suatu teori yang dapat dibuat sesuai dengan data empiris apa pun. Namun, banyak filsuf menganggap kriteria Popper terlalu menyederhanakan. Popper mengkritik kaum Freudian dan Marxis karena menjelaskan data apa pun yang tampaknya bertentangan dengan teori mereka, daripada menerima bahwa teori tersebut telah dibantah. Ini jelas merupakan prosedur yang meragukan. Namun, ada beberapa bukti bahwa prosedur ini secara rutin digunakan oleh para ilmuwan terkemuka yang Popper tidak ingin dituduh terlibat dalam ilmu semu dan telah menghasilkan penemuan ilmiah yang penting.

Contoh astronomi lain dapat menggambarkan hal ini. Teori gravitasi Newton, yang kita temui sebelumnya, membuat prediksi tentang jalur yang harus dilalui planet-planet saat mengorbit matahari. Sebagian besar prediksi ini dibuktikan melalui observasi. Namun, orbit Uranus yang diamati secara konsisten berbeda dari prediksi teori Newton. Teka-teki ini dipecahkan pada tahun 1846 oleh dua ilmuwan, Adams di Inggris dan Leverrier di Perancis, yang bekerja secara independen. Mereka berpendapat bahwa ada planet lain, yang belum ditemukan, yang memberikan gaya gravitasi tambahan pada Uranus. Adams dan Leverrier mampu menghitung massa dan posisi planet ini apakah tarikan gravitasinya memang bertanggung jawab atas perilaku aneh Uranus. Tak lama kemudian, planet Neptunus ditemukan, hampir persis seperti prediksi Adams dan Leverrier.

Jelas sekali kita tidak boleh mengkritik perilaku Adams dan Leverrier sebagai tindakan yang 'tidak ilmiah', karena hal itu mengarah pada penemuan planet baru. Namun mereka justru melakukan apa yang dikritik Popper oleh kaum Marxis. Mereka memulai dengan sebuah teori, teori gravitasi Newton yang membuat prediksi yang salah tentang orbit Uranus. Daripada menyimpulkan bahwa teori Newton pasti salah, mereka tetap berpegang pada teori tersebut dan berusaha menjelaskan pengamatan yang bertentangan dengan mendalilkan adanya planet baru. Demikian pula, ketika kapitalisme tidak menunjukkan tanda-tanda menyerah pada komunisme, kaum Marxis tidak menyimpulkan bahwa teori Marx pasti salah, namun tetap berpegang pada teori tersebut dan mencoba menjelaskan pengamatan yang bertentangan dengan cara lain. Jadi tentunya tidak adil untuk menuduh kaum Marxis terlibat dalam pseudo-sains jika kita membiarkan apa yang dilakukan Adams dan Leverrier dianggap sebagai sains yang baik dan patut dicontoh?

Hal ini menunjukkan bahwa upaya Popper untuk membedakan sains dari pseudo-sains tidak sepenuhnya benar, meskipun pada awalnya masuk akal. Contoh yang diberikan Adams/Leverrier sama sekali tidak lazim. Secara umum, para ilmuwan tidak meninggalkan teorinya begitu saja jika teorinya bertentangan dengan data observasi. Biasanya mereka mencari cara untuk menghilangkan konflik tanpa harus melepaskan teorinya. Selain itu, perlu diingat bahwa hampir setiap teori ilmiah bertentangan dengan beberapa pengamatan. Menemukan teori yang cocok dengan semua data dengan sempurna sangatlah sulit. Tentu saja, jika suatu teori terus-menerus bertentangan dengan semakin banyak data, dan tidak ada cara yang masuk akal untuk menjelaskan konflik tersebut, maka teori tersebut pada akhirnya harus ditolak. Namun hanya sedikit kemajuan yang bisa dicapai jika para ilmuwan mengabaikan teori mereka begitu ada tanda-tanda masalah.

Kegagalan kriteria demarkasi Popper memunculkan sebuah pertanyaan penting. Apakah mungkin untuk menemukan beberapa ciri umum yang dimiliki oleh semua orang dan hanya hal-hal yang kita sebut 'sains'? Popper berasumsi bahwa jawabannya adalah ya. Ia merasa bahwa teori-teori Freud dan Marx jelas-jelas tidak ilmiah, jadi pasti ada beberapa ciri yang tidak dimiliki teori-teori tersebut dan yang dimiliki oleh teori-teori ilmiah asli. Namun terlepas dari apakah kita menerima atau tidak penilaian negatif Popper terhadap Freud dan Marx, asumsinya bahwa sains mempunyai 'sifat esensial' patut dipertanyakan. Bagaimanapun, sains adalah aktivitas yang heterogen, mencakup berbagai disiplin ilmu dan teori. Mungkin saja keduanya memiliki seperangkat fitur tetap yang mendefinisikan apa itu ilmu pengetahuan, namun bisa juga tidak. Filsuf Ludwig Wittgenstein berpendapat bahwa tidak ada serangkaian fitur tetap yang mendefinisikan apa yang dimaksud dengan sebuah 'permainan'. Sebaliknya, ada sekelompok fitur longgar yang sebagian besar dimiliki oleh sebagian besar game. Namun game tertentu mungkin tidak memiliki fitur apa pun dalam cluster dan tetap merupakan game. Hal yang sama mungkin berlaku dalam sains. Jika demikian, kriteria sederhana untuk membedakan sains dari pseudosains tidak mungkin ditemukan.

Bab 17

Inferensi ilmiah

Para ilmuwan sering kali memberi tahu kita hal-hal tentang dunia yang sebelumnya tidak kita percayai. Misalnya saja, para ahli biologi mengatakan bahwa kita berkerabat dekat dengan simpanse, para ahli geologi mengatakan bahwa Afrika dan Amerika Selatan pernah bersatu, dan para kosmolog mengatakan bahwa alam semesta mengembang. Namun bagaimana para ilmuwan mencapai kesimpulan yang terdengar tidak terduga ini? Lagi pula, belum pernah ada orang yang melihat satu spesies berevolusi dari spesies lain, atau satu benua terpecah menjadi dua, atau alam semesta menjadi lebih besar. Jawabannya, tentu saja, para ilmuwan sampai pada keyakinan ini melalui proses penalaran atau kesimpulan. Namun alangkah baiknya mengetahui lebih banyak tentang proses ini. Apa sebenarnya hakikat inferensi ilmiah?

17.1 Deduksi dan induksi

Ahli logika membuat perbedaan penting antara inferensi deduktif dan induktif, atau disingkat deduksi dan induksi. Contoh inferensi deduktif adalah sebagai berikut:
Semua orang Indonesia menyukai anggur hijau
Tino adalah orang Indonesia

Oleh karena itu, Tino menyukai anggur hijau

Dua pernyataan yang berada di atas garis disebut **premis inferensi**, sedangkan pernyataan yang berada di bawah garis disebut **kesimpulan**. **Inferensi** ini **termasuk deduktif** karena mempunyai sifat-sifat sebagai berikut: jika **premis-premisnya benar**, maka **kesimpulannya juga harus benar**.

Jika benar semua orang Indonesia menyukai anggur hijau, dan Tino adalah orang Indonesia, maka Tino memang menyukai anggur hijau. Hal ini kadang-kadang diungkapkan dengan mengatakan bahwa premis-premis inferensi memerlukan kesimpulan. Tentu saja, premis kesimpulan ini hampir pasti tidak benar. Pasti ada orang Indonesia yang tidak menyukai anggur hijau. Tapi bukan itu intinya. Yang menjadikan inferensi bersifat deduktif adalah adanya hubungan yang sesuai antara **premis** dan **kesimpulan**, yaitu **kebenaran premis** menjamin **kebenaran kesimpulan**.

Tidak semua kesimpulan bersifat deduktif. Perhatikan contoh berikut:
Lima telur pertama di dalam kotak bagus.
Semua telur mempunyai cap tanggal terbaik-sebelum yang sama.

Oleh karena itu, telur keenam juga akan bagus.

Ini sepertinya alasan yang sangat masuk akal. Namun demikian, hal ini tidak bersifat deduktif, karena premis-premis tersebut tidak menghasilkan kesimpulan. Sekalipun lima telur pertama bagus, dan semua telur mempunyai cap tanggal yang sama, sangat mungkin telur keenam akan busuk. Artinya, secara logis premis-premis inferensi ini mungkin benar, namun kesimpulannya salah, sehingga inferensi tersebut tidak bersifat deduktif. Sebaliknya, ini dikenal sebagai inferensi induktif. Dalam inferensi induktif yang khas, kita berpindah dari premis tentang objek yang telah kita periksa ke kesimpulan tentang objek serupa yang belum kita periksa dalam contoh ini, telur.

Inferensi deduktif lebih aman daripada inferensi induktif. Ketika kita bernalar secara deduktif, kita dapat yakin bahwa jika kita memulai dengan premis-premis yang benar, kita akan mendapatkan kesimpulan yang benar. Sebaliknya, penalaran induktif cukup mampu membawa kita dari premis-premis yang benar menuju kesimpulan yang salah. Terlepas dari kekurangan ini, kita tampaknya mengandalkan penalaran induktif sepanjang hidup kita. Misalnya, saat Anda menyalakan komputer di pagi hari, Anda yakin komputer tersebut tidak akan meledak di depan Anda. Mengapa? Karena Anda menyalakan komputer setiap pagi, dan hingga saat ini komputer tidak pernah meledak. Namun kesimpulan dari 'sampai saat ini komputer saya tidak meledak ketika saya menyalakannya' hingga 'komputer saya tidak akan meledak kali ini' adalah induktif, bukan deduktif. Secara logis, komputer Anda mungkin akan meledak kali ini, meskipun hal ini belum pernah terjadi sebelumnya.

Apakah para ilmuwan juga menggunakan penalaran induktif? Jawabannya sepertinya ya. Pertimbangkan kondisi yang dikenal sebagai Sindrom Down (SD). Ahli genetika memberi tahu kita bahwa orang dengan SD memiliki tiga salinan kromosom 21, bukan dua salinan biasanya. Bagaimana mereka mengetahui hal ini? Jawabannya, tentu saja, adalah mereka memeriksa sejumlah besar orang dengan SD dan menemukan bahwa masing-masing orang memiliki salinan tambahan kromosom 21. Mereka kemudian beralasan secara induktif hingga menyimpulkan bahwa semua orang dengan SD, termasuk mereka yang belum mereka periksa, memiliki salinan kromosom 21 tambahan. memiliki salinan tambahan. Inferensi ini bersifat induktif bukan deduktif. Karena mungkin saja, meskipun kecil kemungkinannya, sampel yang diperiksa tidak representatif. Contoh ini bukanlah satu-satunya contoh. Akibatnya, para ilmuwan bernalar secara induktif setiap kali mereka beralih dari data terbatas ke kesimpulan yang lebih umum, dan hal ini selalu mereka lakukan.

Peran sentral induksi dalam sains terkadang dikaburkan oleh cara kita berbicara. Misalnya, Anda mungkin membaca laporan surat kabar yang mengatakan bahwa para ilmuwan telah menemukan 'bukti eksperimental' bahwa jagung hasil rekayasa genetika aman untuk dikonsumsi. Artinya, para ilmuwan telah menguji jagung pada banyak orang dan tidak ada yang menimbulkan bahaya. Namun sebenarnya hal ini tidak membuktikan bahwa jagung itu aman, seperti yang dikatakan para ahli matematika dapat membuktikan teorema Pythagoras. Karena kesimpulan dari 'jagung tidak merugikan siapa pun yang diuji' hingga 'jagung tidak akan merugikan siapa pun' adalah induktif, bukan deduktif. Laporan surat kabar tersebut seharusnya menyatakan bahwa para ilmuwan telah menemukan bukti kuat bahwa jagung aman bagi manusia. Kata 'bukti' sebaiknya hanya digunakan ketika kita berurusan dengan kesimpulan deduktif. Dalam arti sempit, hipotesis ilmiah jarang sekali bisa dibuktikan kebenarannya melalui data.

Kebanyakan filsuf berpendapat bahwa sudah jelas bahwa sains sangat bergantung pada induksi, bahkan sangat jelas sehingga hampir tidak perlu diperdebatkan. Namun hebatnya, hal ini dibantah oleh filsuf Karl Popper. Popper menyatakan bahwa ilmuwan hanya perlu menggunakan kesimpulan deduktif. Akan lebih baik jika hal ini benar, karena kesimpulan deduktif lebih aman daripada kesimpulan induktif, seperti yang telah kita lihat.

Argumen dasar Popper adalah ini. Meskipun suatu teori (atau hipotesis) ilmiah tidak akan pernah dapat dibuktikan kebenarannya dengan jumlah data yang terbatas, teori tersebut dapat dibuktikan salah atau disangkal. Misalkan seorang ilmuwan sedang menguji hipotesis bahwa semua potongan logam dapat menghantarkan listrik. Sekalipun setiap potongan logam yang mereka periksa menghantarkan listrik, hal ini tidak membuktikan bahwa hipotesis tersebut benar, karena alasan yang telah kita lihat. Namun jika ilmuwan menemukan sepotong logam saja yang gagal menghantarkan listrik, hal ini secara meyakinkan membantah teori tersebut. Karena penyimpulan dari 'sepotong logam ini tidak dapat menghantarkan listrik' hingga 'salah bahwa semua potongan logam dapat menghantarkan listrik' adalah suatu penyimpulan deduktif, maka premis tersebut memerlukan kesimpulan. Jadi jika seorang ilmuwan mencoba menyangkal teorinya, alih-alih membuktikan kebenarannya, tujuan mereka dapat tercapai tanpa menggunakan induksi.

Kelemahan argumen Popper sudah jelas. Sebab tujuan ilmu pengetahuan bukan semata-mata untuk menyangkal teori-teori, tetapi juga untuk menentukan teori-teori mana yang benar (atau mungkin benar). Ketika seorang ilmuwan mengumpulkan data eksperimen, tujuan mereka mungkin adalah untuk menunjukkan bahwa suatu teori tertentu mungkin salah. Namun kemungkinan besar, mereka mencoba meyakinkan orang bahwa teori mereka benar. Dan untuk melakukan hal tersebut, mereka harus menggunakan penalaran induktif. Jadi upaya Popper untuk menunjukkan bahwa ilmu pengetahuan dapat bertahan tanpa induksi tidak berhasil.

17.2 Masalah Hume

Meskipun penalaran induktif tidak masuk akal secara logis, tampaknya penalaran induktif merupakan cara yang masuk akal untuk membentuk keyakinan tentang dunia. Tentunya fakta bahwa matahari telah terbit setiap hari di masa lalu memberi kita alasan kuat untuk percaya bahwa matahari akan terbit besok? Jika Anda menjumpai seseorang yang mengaku sepenuhnya agnostik tentang apakah matahari akan terbit besok atau tidak, Anda akan menganggap mereka sebagai orang yang sangat aneh, bahkan tidak rasional.

Tapi apa yang membenarkan keyakinan yang kita tempatkan dalam induksi ini? Bagaimana cara kita meyakinkan seseorang yang menolak bernalar secara induktif bahwa mereka salah? Filsuf Skotlandia abad ke-18 David Hume (1711-76) memberikan jawaban sederhana namun radikal terhadap pertanyaan ini. Ia berpendapat bahwa penggunaan induksi sama sekali tidak dapat dibenarkan secara rasional. Hume mengakui bahwa kita selalu menggunakan induksi, dalam kehidupan sehari-hari dan dalam sains, namun bersikeras bahwa ini adalah masalah kebiasaan hewan yang kasar. Jika ditantang untuk memberikan alasan yang baik untuk menggunakan induksi, kami tidak dapat memberikan jawaban yang memuaskan, pikirnya.

Bagaimana Hume sampai pada kesimpulan yang mengejutkan ini? Dia memulai dengan mencatat bahwa setiap kali kita membuat kesimpulan induktif, kita tampaknya mengandaikan apa yang disebutnya 'keseragaman alam'. Untuk melihat apa yang dimaksud Hume dengan hal ini, ingat kembali contoh kita. Kami mendapat kesimpulan dari 'lima telur pertama di dalam kotak bagus' hingga 'telur keenam bagus'; dari 'pasien sindrom Down yang diperiksa memiliki kromosom ekstra' hingga 'semua pasien sindrom Down memiliki kromosom ekstra'; dan dari 'komputer saya belum pernah meledak sampai sekarang' menjadi 'komputer saya tidak akan meledak hari ini'. Dalam setiap kasus, alasan kita tampaknya bergantung pada asumsi bahwa objek yang belum kita periksa akan serupa, dalam hal yang relevan, dengan objek serupa yang telah kita periksa. Asumsi itulah yang dimaksud Hume dengan keseragaman alam.

Namun bagaimana kita tahu bahwa asumsi keseragaman itu benar? Bisakah kita membuktikan kebenarannya? Tidak, kata Hume, kita tidak bisa. Karena mudah untuk membayangkan sebuah dunia di mana alam tidak seragam namun berubah arah secara acak dari hari ke hari. Di dunia seperti ini, komputer terkadang bisa meledak tanpa alasan, air terkadang bisa membuat kita mabuk tanpa peringatan, dan bola bilyar terkadang berhenti mati saat bertabrakan. Karena dunia yang tidak seragam dapat dibayangkan, maka kita tidak dapat membuktikan bahwa asumsi keseragaman itu benar. Karena jika kita bisa, alam semesta yang tidak seragam akan menjadi sebuah kemustahilan yang logis.

Sekalipun kita tidak dapat membuktikan asumsi keseragaman tersebut, kita tetap berharap menemukan bukti empiris yang baik mengenai kebenarannya. Toh, anggapan tersebut masih bertahan hingga saat ini, jadi apakah ini bukti kebenarannya? Namun hal ini menimbulkan pertanyaan, kata Hume! Diakui bahwa alam telah berperilaku seragam hingga saat ini. Kita tidak bisa menggunakan fakta ini untuk berargumentasi bahwa alam akan terus seragam, kata Hume, karena hal ini mengasumsikan bahwa apa yang terjadi di masa lalu adalah panduan yang dapat diandalkan mengenai apa yang akan terjadi di masa depan yang merupakan keseragaman asumsi alam. Jika kita mencoba memperdebatkan asumsi keseragaman berdasarkan landasan empiris, kita akan berakhir dengan penalaran berputar-putar.

Kekuatan pendapat Hume dapat diapresiasi dengan membayangkan bagaimana Anda akan meyakinkan seseorang yang tidak mempercayai penalaran induktif bahwa mereka harus mempercayainya. Anda mungkin berkata: 'lihat, penalaran induktif telah berhasil dengan cukup baik hingga saat ini. Dengan menggunakan induksi, para ilmuwan telah membelah atom, mendarat di bulan, dan menemukan laser. Sedangkan orang yang tidak menggunakan induksi mengalami kematian yang mengenaskan. Mereka memakan arsenik dengan keyakinan bahwa arsenik dapat menyehatkan mereka, dan melompat dari gedung-gedung tinggi dengan keyakinan bahwa mereka dapat terbang. Oleh karena itu, Anda jelas akan mendapat manfaat jika berpikir secara induktif.' Namun hal ini tidak akan meyakinkan orang yang ragu. Karena berargumentasi bahwa induksi dapat dipercaya karena telah berhasil dengan baik hingga saat ini adalah bernalar secara induktif. Argumen seperti itu tidak akan berpengaruh bagi seseorang yang belum mempercayai induksi. Itulah poin fundamental Hume.

Argumen yang menarik ini telah memberikan pengaruh yang kuat terhadap filsafat ilmu pengetahuan. (Upaya Popper untuk menunjukkan bahwa sains hanya perlu menggunakan deduksi dimotivasi oleh keyakinannya bahwa Hume telah menunjukkan induksi tidak dapat dibenarkan.) Pengaruh argumen Hume tidak sulit untuk dipahami. Biasanya kita menganggap sains sebagai paradigma penyelidikan rasional. Kami sangat percaya pada apa yang dikatakan para ilmuwan tentang dunia. Namun sains bergantung pada induksi, dan argumen Hume tampaknya menunjukkan bahwa induksi tidak dapat dibenarkan secara rasional. Jika Hume benar, maka fondasi yang mendasari ilmu pengetahuan tidak tampak kokoh seperti yang kita harapkan. Keadaan yang membingungkan ini dikenal sebagai **masalah induksi Hume**.

Para filsuf telah menanggapi masalah Hume dengan berbagai cara; ini masih menjadi area penelitian aktif saat ini. Salah satu tanggapan mengatakan bahwa mencari ‘pembenaran atas induksi’, atau meratapi kekurangan hal tersebut, pada dasarnya tidak koheren. Peter Strawson, seorang filsuf Oxford dari tahun 1950-an, membela pandangan ini dengan analogi berikut. Jika seseorang khawatir apakah suatu tindakan tertentu sah, mereka dapat membaca buku hukum dan melihat apa yang tertulis di dalamnya. Namun misalkan seseorang khawatir tentang apakah undang-undang itu sah atau tidak. Ini memang merupakan kekhawatiran yang aneh. Karena hukum adalah standar yang digunakan untuk menilai legalitas hal-hal lain, dan tidak masuk akal untuk menanyakan apakah standar itu sendiri sah atau tidak. Hal yang sama berlaku untuk induksi, pendapat Strawson. Induksi adalah salah satu standar yang kita gunakan untuk memutuskan apakah keyakinan seseorang tentang dunia dapat dibenarkan. Jadi tidak masuk akal untuk bertanya apakah induksi itu sendiri bisa dibenarkan.

Apakah Strawson benar-benar berhasil meredakan masalah Hume? Beberapa filsuf mengatakan ya, yang lain mengatakan tidak. Namun sebagian besar setuju bahwa sangat sulit untuk melihat bagaimana adanya pembenaran yang memuaskan atas induksi. (Frank Ramsey, seorang filsuf Cambridge terkenal, menulis pada tahun 1919 bahwa meminta pembenaran induksi berarti 'menangis untuk bulan'.) Apakah ini sesuatu yang harus membuat kita khawatir, atau menggoyahkan kepercayaan kita pada sains, adalah sebuah pertanyaan yang sulit. yang harus Anda renungkan sendiri.

17.3 Inferensi penjelasan terbaik

Kesimpulan induktif yang telah kita periksa sejauh ini semuanya pada dasarnya memiliki struktur yang sama. Dalam setiap kasus, premisnya berbentuk 'semua F yang diperiksa adalah G', dan kesimpulannya berbentuk 'F lainnya juga G'. Singkatnya, kesimpulan-kesimpulan ini membawa kita dari contoh-contoh tertentu yang telah diperiksa ke contoh-contoh yang belum diperiksa.

Kesimpulan seperti itu banyak digunakan dalam kehidupan sehari-hari dan dalam sains, seperti yang telah kita lihat. Namun, ada jenis inferensi non-deduktif umum lainnya yang tidak sesuai dengan pola sederhana ini. Perhatikan contoh berikut:

> Keju di lemari makan telah hilang, kecuali beberapa remah.
> Suara garukan terdengar dari lemari makan tadi malam.
>
> ---
>
> Oleh karena itu, keju tersebut dimakan oleh tikus.

Jelaslah bahwa kesimpulan ini bersifat non-deduktif: premis-premisnya tidak memerlukan kesimpulan. Karena kejunya bisa saja dicuri oleh pelayannya, yang dengan cerdik meninggalkan sedikit remah-remah agar tampak seperti hasil karya tikus; dan suara garukan tersebut mungkin disebabkan oleh boiler yang terlalu panas. Meskipun demikian, kesimpulan tersebut jelas masuk akal. Sebab, hipotesis bahwa seekor tikus memakan keju nampaknya memberikan penjelasan data yang lebih baik dibandingkan hipotesis 'pembantu dan ketel'. Lagi pula, pelayan biasanya tidak mencuri keju, dan ketel uap modern jarang terlalu panas. Sedangkan tikus memang memakan keju jika ada kesempatan, dan mengeluarkan suara garukan. Jadi meskipun kita tidak dapat memastikan bahwa hipotesis tikus itu benar, secara keseluruhan hipotesis tersebut tampak masuk akal.

Penalaran semacam ini dikenal sebagai '**inferensi terhadap penjelasan terbaik**', atau disingkat **IPT**. Kebingungan terminologis tertentu seputar hubungan antara **IPT** dan induksi. Beberapa filsuf menggambarkan **IPT** sebagai jenis inferensi induktif; sebenarnya, mereka menggunakan 'inferensi induktif' yang berarti 'inferensi apa pun yang tidak deduktif'. Yang lain membandingkan **IPT** dengan induksi, seperti yang telah kita lakukan. Dalam cara memotong kue ini, 'induksi' dicadangkan untuk inferensi dari contoh-contoh tertentu yang telah diperiksa hingga yang belum diperiksa; **IPT** dan induksi merupakan dua jenis inferensi non-deduktif yang berbeda. Tidak ada yang bergantung pada pilihan terminologi mana yang kita sukai, selama kita mematuhinya secara konsisten.

Para ilmuwan sering menggunakan **IPT**. Misalnya, Darwin mengemukakan teori evolusinya dengan menarik perhatian pada berbagai fakta tentang dunia kehidupan yang sulit dijelaskan jika kita berasumsi bahwa spesies yang ada saat ini diciptakan secara terpisah, namun sangat masuk akal jika spesies yang ada saat ini berasal dari nenek moyang yang sama. sebagaimana teorinya dipegang. Misalnya, terdapat kemiripan anatomi antara kaki kuda dan zebra. Bagaimana kita menjelaskan hal ini jika Tuhan menciptakan kuda dan zebra secara terpisah? Agaknya, dia bisa membuat kaki mereka berbeda sesuka hatinya. Namun jika kuda dan zebra merupakan keturunan dari nenek moyang yang sama, hal ini memberikan penjelasan yang jelas tentang kesamaan anatomi mereka. Darwin berpendapat bahwa kemampuan teorinya untuk menjelaskan fakta-fakta tersebut merupakan bukti kuat kebenarannya. 'Hampir tidak dapat diasumsikan', tulisnya, 'bahwa sebuah teori palsu akan menjelaskan, dengan cara yang begitu memuaskan seperti halnya teori seleksi alam, beberapa kelompok besar fakta yang disebutkan di atas.'

Contoh lain dari **IPT** adalah karya Einstein yang terkenal tentang gerak Brown, yaitu gerak zig-zag partikel mikroskopis yang tersuspensi dalam cairan atau gas. Sejumlah upaya penjelasan tentang gerak Brown dikemukakan pada abad ke-19. Salah satu teori mengaitkan gerakan tersebut dengan gaya tarik-menarik listrik antar partikel, teori lainnya disebabkan oleh agitasi dari lingkungan luar, dan teori lainnya disebabkan oleh arus konveksi dalam fluida. Penjelasan yang benar didasarkan pada teori kinetik materi, yang mengatakan bahwa cairan dan gas terdiri dari atom atau molekul yang bergerak. Partikel tersuspensi bertabrakan dengan molekul di sekitarnya, menyebabkan pergerakannya tidak menentu. Teori ini diajukan pada akhir abad ke-19 namun tidak diterima secara luas, salah satunya karena banyak ilmuwan tidak percaya bahwa atom dan molekul adalah entitas nyata. Namun pada tahun 1905, Einstein memberikan perlakuan matematis yang cerdik terhadap gerak Brown, membuat sejumlah prediksi yang kemudian dikonfirmasi secara eksperimental. Setelah karya Einstein, teori kinetik dengan cepat disetujui untuk memberikan penjelasan yang lebih baik tentang gerak Brown dibandingkan alternatif lainnya, dan skeptisisme terhadap keberadaan atom dan molekul pun mereda.

Ide dasar di balik penalaran **IPT** dari data seseorang hingga teori atau hipotesis yang menjelaskan data tersebut sangatlah lugas. Namun bagaimana kita memutuskan hipotesis mana yang memberikan 'penjelasan terbaik' terhadap data? Kriteria apa yang menentukan hal ini? Salah satu jawaban yang populer adalah penjelasan yang baik harus sederhana atau pelit. Perhatikan kembali contoh keju di dalam lemari makan. Ada dua data yang perlu dijelaskan: keju yang hilang dan suara garukan. Hipotesis tikus mendalilkan hanya satu penyebab tikus menjelaskan kedua bagian data. Namun hipotesis pembantu dan ketel harus mendalilkan dua penyebab yaitu pembantu yang tidak jujur dan ketel yang terlalu panas untuk menjelaskan data yang sama. Jadi hipotesis tikus lebih pelit dan karenanya lebih baik. Contoh Darwin serupa. Teori Darwin dapat menjelaskan beragam fakta tentang kehidupan, bukan hanya kesamaan anatomi antar spesies. Masing-masing fakta ini pada prinsipnya dapat dijelaskan dengan cara lain, namun teori evolusi menjelaskan semua fakta sekaligus sehingga menjadikannya sebagai penjelasan terbaik atas data yang ada.

Gagasan bahwa kesederhanaan atau kekikiran merupakan ciri dari penjelasan yang baik cukup menarik, dan membantu menyempurnakan gagasan abstrak **IPT**. Namun jika para ilmuwan menggunakan kesederhanaan sebagai panduan untuk mengambil kesimpulan, hal ini menimbulkan pertanyaan mendalam. Apakah kita mempunyai alasan untuk berpikir bahwa alam semesta itu sederhana dan bukannya rumit? Memilih teori yang menjelaskan data dengan jumlah penyebab yang paling sedikit tampaknya masuk akal. Namun apakah ada dasar obyektif untuk berpikir bahwa teori semacam itu lebih mungkin benar dibandingkan teori lain yang tidak terlalu sederhana? Atau apakah kesederhanaan merupakan sesuatu yang dihargai oleh para ilmuwan karena membuat teori mereka lebih mudah dirumuskan dan dipahami? Para filsuf sains tidak sepakat mengenai jawaban atas pertanyaan sulit ini.

17.4 Inferensi kausal

Tujuan utama sains adalah menemukan penyebab fenomena alam. Seringkali pencarian ini berhasil. Misalnya, para ilmuwan perubahan iklim mengetahui bahwa pembakaran bahan bakar fosil menyebabkan pemanasan global; ahli kimia tahu bahwa memanaskan suatu cairan menyebabkannya menjadi gas; dan ahli epidemiologi mengetahui bahwa vaksin **MMR** *(Measles, Mumps, and Rubella*-**Campak**, **Gondongan**, dan **Rubella**) tidak menyebabkan autisme. Karena hubungan sebab-akibat tidak dapat diamati secara langsung (seperti pendapat terkenal David Hume), pengetahuan ilmiah semacam ini pasti merupakan hasil inferensi. Namun bagaimana sebenarnya cara kerja inferensi kausal?

Ada baiknya untuk membedakan dua kasus: menyimpulkan penyebab suatu peristiwa tertentu versus menyimpulkan prinsip sebab-akibat umum. Untuk mengilustrasikan perbedaan ini, perhatikan perbedaan antara 'hantaman meteorit menyebabkan kepunahan dinosaurus' dan 'merokok menyebabkan kanker paru-paru'. Yang pertama adalah pernyataan tunggal tentang penyebab suatu peristiwa sejarah tertentu, yang kedua adalah pernyataan umum tentang penyebab suatu peristiwa tertentu (terkena kanker paru-paru). Dalam kedua kasus tersebut, proses inferensi telah membuat para ilmuwan mempercayai pernyataan yang dipermasalahkan, namun inferensi tersebut bekerja dengan cara yang agak berbeda. Di sini kita fokus pada inferensi jenis kedua, yakni prinsip-prinsip sebab-akibat umum.

Misalkan seorang peneliti medis ingin menguji hipotesis bahwa obesitas menyebabkan depresi. Bagaimana seharusnya mereka melanjutkan? Langkah alami pertama adalah melihat apakah kedua atribut tersebut berkorelasi. Untuk menilai hal ini, mereka dapat memeriksa sampel besar orang-orang yang mengalami obesitas, dan melihat apakah kejadian depresi lebih tinggi pada kelompok ini dibandingkan pada populasi umum. Jika ya, maka kecuali ada alasan untuk menganggap sampel tersebut tidak representatif, masuk akal untuk menyimpulkan (dengan induksi biasa) bahwa obesitas dan depresi berkorelasi pada keseluruhan populasi.

Akankah korelasi tersebut menunjukkan bahwa obesitas menyebabkan depresi? Belum tentu. Siswa sains tahun pertama secara rutin diajari bahwa korelasi tidak berarti sebab akibat, dan itu memang beralasan. Karena ada kemungkinan penjelasan lain mengenai korelasi tersebut. Arah sebab akibat bisa jadi sebaliknya, yaitu depresi bisa menyebabkan orang makan lebih banyak sehingga menjadi gemuk. Atau mungkin tidak ada pengaruh kausal antara obesitas terhadap depresi atau sebaliknya, namun kedua kondisi tersebut merupakan efek gabungan dari penyebab yang sama. Misalnya, mungkin pendapatan rendah meningkatkan kemungkinan terjadinya obesitas dan juga meningkatkan kemungkinan depresi melalui jalur sebab akibat yang berbeda. Jika demikian, kita memperkirakan obesitas dan depresi mempunyai korelasi dalam populasi. Skenario 'penyebab umum' ini adalah alasan utama mengapa hubungan sebab akibat tidak selalu dapat disimpulkan secara andal dari data korelasional.

Bagaimana kita menguji hipotesis bahwa pendapatan rendah menyebabkan obesitas dan depresi? Hal yang jelas harus dilakukan adalah mencari sampel individu yang semuanya memiliki tingkat pendapatan yang sama, dan memeriksa apakah obesitas dan depresi berkorelasi dalam sampel tersebut. Jika kita melakukan hal ini pada sejumlah tingkat pendapatan yang berbeda, dan menemukan bahwa dalam setiap sampel pendapatan yang homogen, korelasinya hilang, maka hal ini merupakan bukti kuat yang mendukung hipotesis penyebab umum. Hal ini menunjukkan bahwa ketika pendapatan diperhitungkan, obesitas tidak lagi dikaitkan dengan depresi. Sebaliknya, jika terdapat korelasi kuat terhadap depresi obesitas bahkan di antara individu dengan tingkat pendapatan yang sama, hal ini merupakan bukti yang bertentangan dengan hipotesis penyebab umum. Dalam jargon statistik, prosedur ini dikenal sebagai 'pengendalian' pendapatan variabel.

Logika yang mendasarinya mirip dengan eksperimen terkontrol, yang merupakan andalan sains modern. Misalkan seorang ahli entomologi ingin menguji hipotesis bahwa membesarkan larva serangga pada suhu yang lebih tinggi menyebabkan berkurangnya ukuran tubuh serangga dewasa. Untuk mengujinya, ahli entomologi mengambil larva serangga dalam jumlah besar, memelihara sebagian di tempat sejuk dan sebagian lagi di suhu hangat, lalu mengukur ukuran larva serangga dewasa yang dihasilkan. Agar hal ini menjadi uji hipotesis sebab akibat yang efektif, semua faktor selain suhu harus dijaga konstan di antara kedua kelompok, sejauh mungkin. Misalnya, semua larva harus berasal dari spesies yang sama, jenis kelamin yang sama, dan diberi makanan yang sama. Jadi ahli entomologi harus merancang eksperimennya dengan hati-hati, mengendalikan semua variabel yang berpotensi mempengaruhi ukuran tubuh orang dewasa. Hanya dengan cara ini perbedaan ukuran tubuh orang dewasa antara kedua kelompok dapat dikaitkan dengan perbedaan suhu.

Kadang-kadang dikatakan bahwa eksperimen terkontrol adalah satu-satunya cara yang dapat diandalkan untuk membuat kesimpulan sebab akibat dalam sains. Para pendukung pandangan ini berpendapat bahwa data observasi murni, tanpa intervensi eksperimental apa pun, tidak dapat memberi kita pengetahuan tentang kausalitas. Namun, ini adalah tesis yang kontroversial. Meskipun eksperimen terkendali tentu saja merupakan cara yang baik untuk menyelidiki rahasia alam, teknik pengendalian statistik sering kali dapat menghasilkan sesuatu yang serupa. Dalam beberapa tahun terakhir, ahli statistik dan ilmuwan komputer telah mengembangkan teknik yang ampuh untuk membuat kesimpulan sebab akibat dari data observasi. Apakah terdapat perbedaan metodologi mendasar antara data eksperimen dan data observasi, dibandingkan dengan keandalan kesimpulan sebab akibat yang dapat diambil dari data tersebut, masih menjadi bahan perdebatan.

Dalam ilmu biomedis modern, jenis eksperimen terkontrol tertentu sering kali mendapat perhatian khusus. Ini adalah uji coba terkontrol secara acak (**UTA**), yang awalnya dirancang oleh R. A. Fisher pada tahun 1930an, dan sering digunakan untuk menguji efektivitas obat baru. Dalam **UTA** biasa, pasien dengan kondisi medis tertentu, misalnya. migrain parah, dibagi menjadi dua kelompok. Kelompok perlakuan menerima obat tersebut, sedangkan kelompok kontrol tidak. Para peneliti kemudian membandingkan kedua kelompok berdasarkan hasil yang diinginkan, misalnya. menghilangkan gejala migrain. Jika kelompok perlakuan memberikan hasil yang jauh lebih baik dibandingkan kelompok kontrol, ini merupakan bukti dugaan bahwa obat tersebut bekerja. Fitur utama dari **UTA** adalah pembagian awal pasien menjadi dua kelompok harus dilakukan secara acak. Fisher dan para pengikut modernnya berpendapat bahwa hal ini diperlukan untuk mempertahankan kesimpulan sebab akibat yang valid.

Mengapa pengacakan sangat penting? Karena membantu menghilangkan pengaruh faktor perancu pada hasil yang diinginkan. Biasanya hasilnya akan dipengaruhi oleh banyak faktor, misalnya. usia, pola makan, dan olahraga. Kecuali semua faktor ini diketahui, peneliti tidak dapat mengendalikannya secara eksplisit. Namun dengan mengalokasikan pasien secara acak ke dalam kelompok pengobatan dan kontrol, masalah ini dapat diatasi. Bahkan jika faktor-faktor selain obat memang mempengaruhi hasil, pengacakan memastikan bahwa faktor-faktor tersebut tidak terlalu terwakili baik dalam kelompok perlakuan atau kelompok kontrol. Jadi jika terdapat perbedaan hasil yang signifikan antara kelompok perlakuan dan kelompok kontrol, kemungkinan besar hal ini disebabkan oleh obatnya. Tentu saja hal ini tidak sepenuhnya membuktikan bahwa obat tersebut bertanggung jawab secara kausal, namun hal ini merupakan bukti yang kuat.

Dalam dunia kedokteran, **UTA** biasanya dianggap sebagai 'standar emas' untuk menilai kausalitas. Memang benar bahwa para pendukung gerakan yang dikenal sebagai 'pengobatan berbasis bukti' sering berpendapat bahwa hanya **UTA** yang dapat memberi tahu kita kapan suatu pengobatan tertentu efektif secara kausal. Namun posisi ini bisa dibilang terlalu kuat (dan penggunaan kata 'bukti' hanya merujuk pada **UTA** adalah hal yang menyesatkan). Di banyak bidang ilmu pengetahuan, **UTA** tidak mungkin dilakukan, baik karena alasan praktis maupun etis, namun kesimpulan sebab akibat masih sering dibuat. Selain itu, sebagian besar pengetahuan kausal yang kita miliki dalam kehidupan sehari-hari diperoleh tanpa **UTA**. Anak-anak kecil tahu bahwa memasukkan tangan mereka ke dalam api menyebabkan sensasi terbakar yang menyakitkan; tidak diperlukan uji coba secara acak untuk membuktikan hal ini. Meskipun **UTA** memang penting dan harus dilakukan jika memungkinkan, namun tidak benar bahwa **UTA** merupakan satu-satunya cara untuk menemukan hubungan sebab akibat.

17.5 Probabilitas dan inferensi ilmiah

Mengingat penalaran induktif tidak dapat memberi kita kepastian, wajar jika kita berharap konsep probabilitas akan membantu kita memahami cara kerjanya. Sekalipun bukti yang dimiliki ilmuwan tidak membuktikan bahwa hipotesisnya benar, tentu hal tersebut menjadikannya sangat mungkin terjadi? Sebelum mengeksplorasi gagasan ini kita perlu memperhatikan secara singkat konsep probabilitas itu sendiri.

Probabilitas mempunyai bentuk obyektif dan subyektif. Dalam bentuk obyektifnya, probabilitas mengacu pada seberapa sering hal-hal di dunia ini terjadi, atau cenderung terjadi. Misalnya, jika Anda diberi tahu bahwa kemungkinan seorang wanita Inggris hidup hingga usia 90 tahun adalah satu berbanding sepuluh, Anda akan memahami bahwa hal ini berarti sepersepuluh wanita Inggris mencapai usia tersebut. Demikian pula, pemahaman alami dari pernyataan 'probabilitas koin akan mendaratkan gambar adalah setengah' adalah bahwa dalam rangkaian pelemparan koin yang panjang, proporsi gambar akan mendekati setengah. Jika dipahami dengan cara ini, pernyataan tentang probabilitas secara objektif benar atau salah, terlepas dari apa yang diyakini orang.

Dalam bentuk subyektifnya, probabilitas adalah ukuran tingkat keyakinan rasional. Misalkan seorang ilmuwan memberi tahu Anda bahwa kemungkinan menemukan kehidupan di Mars sangatlah rendah. Apakah ini berarti bahwa kehidupan hanya terdapat pada sebagian kecil dari seluruh benda langit? Tentu saja tidak. Salah satu alasannya adalah tidak ada seorang pun yang tahu berapa banyak benda langit yang ada atau berapa banyak di antaranya yang mengandung kehidupan. Jadi gagasan lain tentang probabilitas berlaku di sini. Karena ada kehidupan di Mars atau tidak, pembicaraan tentang probabilitas dalam konteks ini mungkin mencerminkan ketidaktahuan kita terhadap keadaan dunia, bukan menggambarkan fitur obyektif dari dunia itu sendiri. Jadi wajar jika pernyataan ilmuwan tersebut mengartikan bahwa berdasarkan semua bukti, tingkat kepercayaan rasional terhadap hipotesis adanya kehidupan di Mars sangatlah rendah.

Gagasan bahwa tingkat keyakinan rasional terhadap suatu hipotesis ilmiah, jika diberi bukti, dapat dipandang sebagai suatu jenis probabilitas menunjukkan gambaran alami tentang cara kerja inferensi ilmiah. Misalkan seorang ilmuwan sedang mempertimbangkan hipotesis tertentu, H. Berdasarkan bukti-bukti yang ada hingga saat ini, ilmuwan tersebut memiliki tingkat kepercayaan tertentu terhadap H, yang dilambangkan dengan $P(H)$, yang merupakan bilangan antara nol dan satu. (Nama lain untuk $P(H)$ adalah 'kepercayaan' ilmuwan terhadap H.) Beberapa bukti baru kemudian terungkap, misalnya. dari percobaan atau observasi. Mengingat bukti baru ini, ilmuwan memperbarui kepercayaan mereka pada H menjadi $P_{\text{baru}}(H)$. Jika bukti baru mendukung teori tersebut, maka $P_{\text{baru}}(H)$ akan lebih besar dari $P(H)$, yaitu ilmuwan akan menjadi lebih yakin bahwa H benar.

Contoh mainan akan membantu menyempurnakan hal ini. Misalkan sebuah kartu remi diambil dari bungkusan yang telah dikocok dengan baik dan disembunyikan dari pandangan Anda. Misalkan H adalah hipotesis bahwa kartu adalah ratu hati. Berapakah nilai $P(H)$, yaitu kepercayaan rasional awal Anda terhadap H? Agaknya $1/52$. Karena ada lima puluh dua kartu dalam paket dan semuanya mempunyai peluang yang sama untuk dipilih. Misalkan Anda kemudian mengetahui bahwa kartu yang dipilih pastinya adalah hati. Sebut informasi ini e. Berdasarkan e, berapakah nilai $P_{\text{baru}}(H)$, yaitu kepercayaan Anda yang telah diperbarui terhadap H berdasarkan bukti baru? Jelasnya, $P_{\text{baru}}(H)$ harus sama dengan $1/13$ karena ada tiga belas hati di dalam paket dan Anda tahu bahwa kartu yang disembunyikan adalah salah satunya. Jadi mempelajari e telah meningkatkan kepercayaan Anda pada H dari $1/52$ menjadi $1/13$.

Ini semua cukup jelas, tapi apa aturan umum untuk memperbarui kepercayaan Anda berdasarkan informasi baru? Jawabannya disebut 'pengkondisian'. Untuk memahami aturan ini kita memerlukan konsep probabilitas bersyarat. Dalam contoh kartu, $P(H)$ adalah kepercayaan awal Anda pada hipotesis H. Kepercayaan awal Anda pada H tergantung pada asumsi bahwa e benar dilambangkan dengan $P(H/e)$. (Baca ini sebagai 'probabilitas H jika diberikan e'.) Berapakah nilai $P(H/e)$? Jawabannya adalah 1/13. Karena dengan asumsi e benar, yaitu kartu yang ditarik adalah hati, maka kepercayaan Anda terhadap hipotesis H sama dengan 1/13. Ketika Anda mengetahui bahwa e benar, kepercayaan baru Anda pada H, yaitu $P_{\text{baru}}(H)$, kemudian harus ditetapkan sama dengan kepercayaan awal Anda pada H tergantung pada e, sesuai dengan aturan pengkondisian.

17.6 Aturan pengkondisian

Setelah mempelajari bukti e, $P_{\text{baru}}(H)$ harus sama dengan $P(H/e)$.

Untuk lebih memahami aturan pengkondisian, perhatikan bahwa probabilitas bersyarat $P(H/e)$ menurut definisi sama dengan rasio $P(H$ dan e)/P(e). Dalam contoh kartu, $P(H$ dane) menunjukkan keyakinan awal Anda bahwa H dan e benar. Namun karena dalam hal ini H secara logika mengandung e karena jika kartu tersebut adalah ratu hati maka kartu tersebut pasti hati, maka $P(H$ dan e) sama dengan $P(H)$, yaitu 1/52. Bagaimana dengan $P(e)$? Ini adalah kepercayaan awal Anda bahwa kartu yang dipilih adalah hati. Karena tepat seperempat kartu dalam dek adalah hati, dan Anda menganggap semua kartu memiliki peluang yang sama untuk menjadi kartu terpilih, maka $P(e)$ adalah 1/4. Menerapkan definisi $P(H/e)$, memberi tahu kita bahwa $P(H/e)$ sama dengan 1/52 dibagi 1/4, yaitu 1/13 dari jawaban yang sama seperti yang kita hitung sebelumnya.

Aturan pengkondisian mungkin terdengar rumit, tetapi seperti banyak aturan logika lainnya, kita sering kali mematuhinya tanpa berpikir. Dalam contoh kartu, secara intuitif jelas bahwa mempelajari e akan meningkatkan kepercayaan rasional Anda pada H dari 1/52 menjadi 1/13, dan dalam praktiknya, inilah yang akan dilakukan kebanyakan orang. Dengan melakukan hal ini, mereka secara implisit mematuhi aturan pengkondisian meskipun mereka belum pernah mendengarnya. Selain penggunaannya secara implisit, aturan pengkondisian sering digunakan secara eksplisit oleh para ilmuwan, misalnya dalam penalaran statistik tertentu. Cabang statistik yang dikenal sebagai statistik Bayesian memanfaatkan pembaruan secara ekstensif dengan pengkondisian. (Nama 'Bayesian' mengacu pada pendeta Inggris abad ke-

17 Thomas Bayes, pionir awal teori probabilitas, yang menemukan aturan pengkondisian.)

Beberapa filsuf sains ingin menggunakan pemutakhiran melalui pengkondisian sebagai model umum untuk inferensi ilmiah, bahkan dapat diterapkan pada inferensi yang tidak secara eksplisit bersifat probabilistik. Idenya adalah bahwa setiap ilmuwan rasional dapat dianggap memiliki kepercayaan awal terhadap teori atau hipotesisnya, yang kemudian mereka perbarui berdasarkan bukti baru dengan mengikuti aturan pengkondisian. Sekalipun proses penalaran sadar ilmuwan tidak terlihat seperti ini, menurut para filsuf ini, ini adalah idealisasi yang berguna.

Pandangan 'Bayesian' tentang inferensi ilmiah ini cukup menarik, karena menyoroti aspek-aspek tertentu dari metode ilmiah. Pertimbangkan fakta bahwa ketika sebuah teori ilmiah membuat prediksi yang dapat diuji dan ternyata benar, hal ini biasanya dianggap sebagai bukti yang mendukung teori tersebut. Pada pembahasan sebelumnya kita mendapatkan contoh teori relativitas umum Einstein yang memperkirakan bahwa cahaya bintang akan dibelokkan oleh medan gravitasi matahari; ketika prediksi ini terkonfirmasi, hal ini meningkatkan kepercayaan para ilmuwan terhadap teori Einstein. Namun mengapa prediksi yang berhasil dapat meningkatkan keyakinan ilmuwan terhadap suatu teori, mengingat selalu ada kemungkinan penjelasan lain yang tidak dapat dikesampingkan? Apakah ini sekadar fakta kasar tentang cara para ilmuwan bernalar, atau apakah ada penjelasan yang lebih dalam?

Bayesian berpendapat bahwa hal tersebut memang memiliki penjelasan yang lebih dalam. Misalkan teori T memerlukan pernyataan e yang dapat diuji. Ilmuwan awalnya memiliki keyakinan $P(T)$ bahwa T benar dan $P(e)$ bahwa e benar. Kami berasumsi bahwa $P(T)$ dan $P(e)$ mengambil nilai nonekstrim, yaitu bukan nol atau satu. Misalkan ilmuwan kemudian mengetahui bahwa e pasti benar. Jika mereka mengikuti aturan pengkondisian, kepercayaan baru mereka pada teori T, yaitu $P_{\text{baru}}(T)$, maka harus lebih besar dari $P(T)$ secara logika. Dengan kata lain, setelah mengetahui bahwa teorinya telah membuat prediksi yang benar, seorang ilmuwan tentu akan meningkatkan keyakinannya terhadap teori tersebut selama mereka mematuhi aturan pengkondisian. Jadi fakta bahwa prediksi yang berhasil biasanya membuat para ilmuwan menjadi lebih percaya diri terhadap teori mereka memiliki penjelasan yang bagus, berdasarkan pandangan Bayesian tentang inferensi ilmiah.

Namun, pandangan Bayesian mempunyai keterbatasan. Banyak inferensi ilmiah yang menarik melibatkan penemuan teori atau hipotesis yang belum pernah terpikirkan sebelumnya. Kemajuan ilmiah besar yang dibuat oleh Copernicus, Newton, dan Darwin semuanya seperti ini. Masing-masing ilmuwan ini mengemukakan teori baru yang belum pernah diyakini oleh para pendahulu mereka. Alasan yang membawa mereka pada teori-teori ini tidak dapat dianggap sebagai alasan Bayesian. Sebab, kondisionalisasi menggambarkan bagaimana kepercayaan rasional seorang ilmuwan terhadap suatu teori harus berubah ketika mereka mendapatkan bukti baru; ini mengasumsikan bahwa teori tersebut telah dipikirkan. Jadi kesimpulan ilmiah yang berasal dari data ke teori yang benar-benar baru tidak dapat dipahami dalam konteks pengkondisian.

Keterbatasan lain dari pandangan Bayesian berkaitan dengan sumber kepercayaan awal, sebelum bukti baru diperbarui. Dalam contoh kartu, keyakinan rasional awal Anda bahwa kartu yang dipilih adalah ratu hati mudah ditentukan karena ada lima puluh dua kartu dalam satu tumpukan, masing-masing memiliki peluang yang sama untuk dipilih. Namun banyak hipotesis ilmiah yang tidak seperti ini. Pertimbangkan hipotesis bahwa pemanasan global akan melebihi empat derajat pada tahun 2100. Apa yang seharusnya menjadi kepercayaan awal seorang ilmuwan terhadap hipotesis ini, sebelum mendapatkan bukti yang relevan? Tidak ada jawaban yang jelas untuk pertanyaan ini. Beberapa filsuf ilmu pengetahuan Bayesian menjawab bahwa kepercayaan awal bersifat subjektif, artinya kepercayaan awal hanya mewakili 'tebakan terbaik' seorang ilmuwan mengenai hipotesis, sehingga kepercayaan awal sama baiknya dengan kepercayaan lainnya. Dalam pandangan Bayesian versi ini, terdapat cara yang secara obyektif rasional bagi seorang ilmuwan untuk mengubah kepercayaannya ketika mereka mendapatkan bukti baru, yaitu pengkondisian, tetapi tidak ada batasan obyektif mengenai apa yang seharusnya menjadi kepercayaan awal mereka.

Intrusi dimensi subjektif ini dianggap tidak disukai oleh banyak filsuf, sehingga membuat mereka menyimpulkan bahwa pandangan Bayesian tidak bisa menjadi keseluruhan cerita inferensi ilmiah. Selain itu, hal ini menunjukkan bahwa tidak mungkin ada 'solusi' Bayesian terhadap masalah induksi Hume. Gagasan bahwa kita bisa lepas dari masalah Hume dengan menggunakan probabilitas adalah gagasan lama. Sekalipun terbitnya matahari setiap hari di masa lalu tidak membuktikan bahwa ia akan terbit besok, tentunya hal ini membuat kemungkinan besar terjadi? Apakah respons terhadap Hume ini pada akhirnya akan berhasil atau tidak, merupakan persoalan rumit, namun kami dapat mengatakan hal berikut. Jika satu-satunya batasan obyektif adalah bagaimana kita harus mengubah kepercayaan kita, namun apa yang seharusnya menjadi kepercayaan awal kita sepenuhnya subyektif, maka individu dengan pendapat yang sangat aneh tentang dunia akan dianggap sebagai hal yang sempurna rasional. Jadi pelarian probabilistik dari masalah Hume tidak akan lepas dari pandangan inferensi ilmiah Bayesian.

Bab 18

Penjelasan dalam sains

Salah satu tujuan penting sains adalah mencoba menjelaskan apa yang terjadi di dunia sekitar kita. Terkadang kita mencari penjelasan untuk tujuan praktis. Misalnya, kita mungkin ingin mengetahui mengapa lapisan ozon menipis begitu cepat agar kita dapat mencoba melakukan sesuatu untuk mengatasinya. Dalam kasus lain, kita mencari penjelasan ilmiah hanya untuk memuaskan keingintahuan intelektual kita, kita ingin memahami lebih banyak tentang cara kerja dunia. Secara historis, pencarian penjelasan ilmiah dimotivasi oleh kedua tujuan tersebut.

Seringkali, ilmu pengetahuan modern berhasil mencapai tujuannya dalam memberikan penjelasan. Misalnya, ahli kimia dapat menjelaskan mengapa natrium berubah menjadi kuning saat terbakar. Para astronom dapat menjelaskan mengapa gerhana matahari terjadi. Para ekonom dapat menjelaskan mengapa nilai yen menurun pada tahun 1980an. Ahli genetika dapat menjelaskan mengapa kebotakan pada pria cenderung diturunkan dalam keluarga. Ahli neurofisiologi dapat menjelaskan mengapa kekurangan oksigen yang ekstrem menyebabkan kerusakan otak. Anda mungkin bisa memikirkan banyak contoh lain mengenai penjelasan ilmiah yang berhasil.

Namun apa sebenarnya penjelasan ilmiahnya? Apa sebenarnya yang dimaksud dengan fenomena yang bisa 'dijelaskan' oleh sains? Ini adalah pertanyaan yang telah ditanyakan para filsuf sejak Aristoteles, namun titik tolak kita adalah penjelasan ilmiah terkenal yang dikemukakan pada tahun 1950-an oleh filsuf Jerman-Amerika Carl Hempel. Pernyataan Hempel dikenal sebagai model penjelasan hukum yang mencakup, karena alasan-alasan yang akan menjadi jelas.

18.1 Penjelasan model hukum cakupan Hempel

Ide dasar dibalik model hukum cakupan sangatlah jelas. Hempel mencatat bahwa penjelasan ilmiah biasanya diberikan tanggapan terhadap apa yang disebutnya 'pertanyaan mencari-penjelasan-mengapa'. Pertanyaan-pertanyaan seperti 'mengapa bumi tidak bulat sempurna?' atau 'mengapa perempuan hidup lebih lama dibandingkan laki-laki?' merupakan pertanyaan yang memerlukan penjelasan. Memberikan penjelasan ilmiah berarti memberikan jawaban yang memuaskan terhadap pertanyaan penjelasan-mencari-mengapa. Jika kita dapat menentukan ciri-ciri penting yang harus dimiliki oleh jawaban tersebut, kita akan mengetahui apa penjelasan ilmiahnya.

Hempel berpendapat bahwa penjelasan ilmiah biasanya memiliki struktur argumen yang logis, yaitu serangkaian premis yang diikuti dengan kesimpulan. Kesimpulannya menyatakan bahwa fenomena yang perlu dijelaskan telah terjadi, dan premisnya memberi tahu kita mengapa kesimpulan tersebut benar. Jadi, misalkan seseorang bertanya mengapa gula larut dalam air. Ini adalah pertanyaan mencari penjelasan mengapa. Untuk menjawabnya, kata Hempel, kita harus membangun argumen yang kesimpulannya adalah 'gula larut dalam air' dan premisnya memberi tahu kita mengapa kesimpulan ini benar. Tugas memberikan penjelasan ilmiah kemudian menjadi tugas mengkarakterisasi dengan tepat hubungan yang harus ada antara serangkaian premis dan kesimpulan, agar premis-premis tersebut dianggap sebagai penjelasan atas premis-premis tersebut. Itulah masalah yang Hempel tentukan sendiri.

Jawaban Hempel terhadap masalah ini ada tiga. Pertama, premis harus memuat kesimpulan, yaitu argumen harus bersifat deduktif. Kedua, semua premisnya harus benar. Ketiga, premis tersebut harus terdiri dari setidaknya satu undang-undang umum. Hukum umum adalah seperti 'semua logam dapat menghantarkan listrik', 'percepatan suatu benda berbanding terbalik dengan massanya', dan 'semua tumbuhan mengandung klorofil'; hal ini kontras dengan fakta-fakta tertentu seperti 'potongan logam ini dapat menghantarkan listrik' dan 'tanaman di meja saya mengandung klorofil'. Hukum umum kadang-kadang disebut hukum alam. Hempel mengakui bahwa penjelasan ilmiah dapat menarik fakta-fakta tertentu dan juga hukum-hukum umum, namun ia berpendapat bahwa setidaknya satu hukum umum selalu penting. Jadi untuk menjelaskan suatu fenomena, menurut konsepsi Hempel, berarti menunjukkan bahwa kemunculannya mengikuti hukum umum secara deduktif, mungkin dilengkapi dengan hukum-hukum lain dan/atau fakta-fakta khusus, yang semuanya pasti benar.

Sebagai ilustrasi, misalkan kita mencoba menjelaskan mengapa tanaman di meja kami mati. Kita mungkin menawarkan penjelasan berikut. Karena minimnya cahaya di ruang kerja saya, tidak ada sinar matahari yang mencapai tanaman; tetapi sinar matahari diperlukan tanaman untuk berfotosintesis; dan tanpa fotosintesis, tumbuhan tidak dapat menghasilkan karbohidrat yang dibutuhkannya untuk bertahan hidup, sehingga akan mati; oleh karena itu tanaman saya mati. Penjelasan ini sangat cocok dengan model Hempel. Hal ini menjelaskan kematian tanaman dengan menyimpulkannya dari dua hukum yang benar—bahwa sinar matahari diperlukan untuk fotosintesis, dan bahwa fotosintesis diperlukan untuk kelangsungan hidup dan satu fakta khusus—bahwa tanaman tidak mendapatkan sinar matahari. Mengingat kebenaran kedua undang-undang tersebut dan fakta khususnya, kematian tanaman harus terjadi; itulah sebabnya penjelasan pertama merupakan penjelasan yang bagus untuk penjelasan kedua.

Secara skematis model penjelasan Hempel dapat dituliskan sebagai berikut:

Hukum Umum
Fakta Khusus
$\Longrightarrow$
Fenomena yang perlu dijelaskan.

Fenomena yang ingin dijelaskan disebut ***explanandum***, dan hukum-hukum umum serta fakta-fakta khusus yang menjelaskannya disebut penjelasan. Penjelasannya bisa bersifat khusus atau umum. Pada contoh sebelumnya, ada fakta khusus, yaitu kematian tanaman kami. Namun terkadang hal yang ingin kita jelaskan bersifat umum. Misalnya, kita mungkin ingin menjelaskan mengapa paparan sinar matahari sering kali menyebabkan kanker kulit. Ini sendiri merupakan fakta umum, bukan fakta khusus. Untuk menjelaskannya, kita perlu menyimpulkannya dari hukum yang lebih mendasar, mungkin hukum tentang dampak radiasi pada sel kulit, dikombinasikan dengan fakta tertentu tentang jumlah radiasi sinar matahari. Jadi struktur penjelasan ilmiah pada hakikatnya sama, baik ***explanandum***nya, yaitu hal yang ingin kita jelaskan, bersifat khusus atau umum.

Sangat mudah untuk melihat dari mana model hukum yang meliput mendapatkan namanya. Sebab, menurut model tersebut, inti dari penjelasan adalah untuk menunjukkan bahwa fenomena yang akan dijelaskan 'diliput' oleh suatu hukum alam yang umum. Tentu ada sesuatu yang menarik dari ide ini. Menunjukkan bahwa suatu fenomena merupakan konsekuensi dari suatu hukum umum menghilangkan misterinya dan menjadikannya lebih dapat dipahami. Dan banyak penjelasan ilmiah aktual yang sesuai dengan pola yang dijelaskan Hempel. Misalnya, Newton menjelaskan mengapa planet-planet bergerak dalam bentuk elips mengelilingi matahari dengan menunjukkan bahwa hal ini dapat disimpulkan dari hukum gravitasi universal, bersama dengan beberapa asumsi tambahan kecil. Penjelasan Newton sangat cocok dengan model Hempel: suatu fenomena dijelaskan dengan menunjukkan bahwa memang demikian adanya, mengingat hukum alam dan beberapa fakta tambahan. Setelah Newton, tidak ada lagi misteri mengapa orbit planet berbentuk elips.

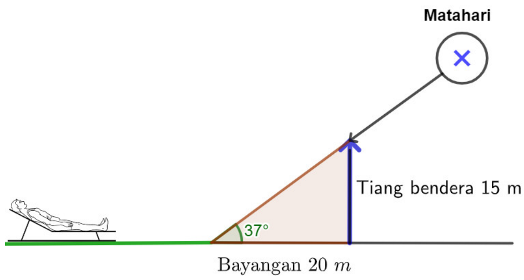
Hempel sadar bahwa tidak semua penjelasan ilmiah sesuai dengan modelnya. Misalnya, jika Anda bertanya kepada seseorang mengapa kabut asap di suatu kota semakin memburuk dalam beberapa tahun terakhir, mereka mungkin akan menjawab 'Karena meningkatnya pembakaran kayu dalam negeri'. Hal ini benar, dan merupakan penjelasan ilmiah yang dapat diterima, meskipun tidak menyebutkan hukum apa pun. Namun Hempel mengatakan bahwa jika penjelasannya dijabarkan secara rinci, hukum akan ikut berperan. Agaknya, ada undang-undang yang mengatakan sesuatu seperti 'jika emisi asap kayu melebihi tingkat tertentu di suatu wilayah dengan luas tertentu, dan jika angin cukup sepoi-sepoi, awan kabut asap akan terbentuk'. Penjelasan lengkap mengapa kabut asap di Athena semakin parah akan mengacu pada undang-undang ini, bersamaan dengan fakta bahwa pembakaran kayu di Athena telah meningkat dan tingkat angin di sana cukup rendah. Dalam praktiknya, kami tidak akan menjelaskan penjelasannya sedetail ini kecuali kami terlalu bertele-tele. Namun jika kita menguraikannya, hal itu akan cukup sesuai dengan pola hukum yang melingkupinya.

Hempel menarik konsekuensi menarik dari modelnya mengenai hubungan antara penjelasan dan prediksi. Ia berpendapat bahwa ini adalah dua sisi dari mata uang yang sama. Setiap kali kita memberikan penjelasan hukum yang mencakup suatu fenomena, hukum dan fakta tertentu yang kita kutip akan memungkinkan kita untuk memprediksi terjadinya fenomena tersebut, jika kita belum mengetahuinya. Sebagai ilustrasi, perhatikan kembali penjelasan Newton tentang mengapa orbit planet berbentuk elips. Fakta ini telah diketahui jauh sebelum Newton menjelaskannya dengan menggunakan teori gravitasinya yang ditemukan oleh Kepler. Namun jika hal ini tidak diketahui, Newton pasti bisa memprediksinya berdasarkan teori gravitasinya. Hempel mengungkapkan hal ini dengan mengatakan bahwa setiap penjelasan ilmiah berpotensi merupakan prediksi yang akan berfungsi untuk memprediksi fenomena yang dimaksud, seandainya fenomena tersebut belum diketahui. Kebalikannya juga benar, pikir Hempel: setiap prediksi yang dapat diandalkan berpotensi memiliki penjelasan. Sebagai ilustrasi, para ilmuwan memperkirakan bahwa gorila gunung akan punah pada tahun 2030, berdasarkan informasi tentang perusakan habitat mereka. Misalkan mereka ternyata benar. Menurut Hempel, informasi yang mereka gunakan untuk memprediksi kepunahan gorila sebelum hal tersebut terjadi akan menjelaskan fakta yang sama setelah hal tersebut terjadi. Penjelasan dan prediksi simetris secara struktural.

Meskipun model hukum yang mencakup ini mampu menangkap struktur dari banyak penjelasan ilmiah aktual dengan cukup baik, model ini juga menghadapi sejumlah contoh tandingan yang tidak lazim. Secara khusus, terdapat kasus-kasus yang sesuai dengan model hukum yang mencakup namun secara intuitif tidak dihitung sebagai penjelasan ilmiah yang asli. Kasus-kasus ini menunjukkan bahwa model Hempel terlalu liberal dan model ini mengizinkan hal-hal yang seharusnya dikecualikan. Kami fokus pada dua kasus serupa di sini.

18.2 Kasus (i): masalah simetri

Misalkan Anda sedang berbaring di pantai pada hari yang cerah, dan Anda memperhatikan bahwa sebuah tiang bendera menimbulkan bayangan 20 meter di atas pasir (lihat Gambar 18.1).



Gambar 18.1: Sebuah tiang bendera yang tingginya 15 meter mempunyai bayangan 20 meter ketika matahari berada 37° di atas kepala.

Seseorang meminta anda menjelaskan mengapa bayangan itu panjangnya 20 meter. Ini adalah pertanyaan mencari penjelasan mengapa. Jawaban yang masuk akal mungkin adalah sebagai berikut: 'sinar matahari menyinari tiang bendera yang tingginya tepat 15 meter. Sudut elevasi matahari adalah 37°. Karena cahaya merambat lurus, perhitungan trigonometri sederhana ($\tan 37° = 15/20$) menunjukkan bahwa tiang bendera akan menghasilkan bayangan sepanjang 20 meter.'

Ini sepertinya penjelasan ilmiah yang bagus. Dan dengan menulis ulang sesuai dengan skema Hempel, kita dapat melihat bahwa skema tersebut sesuai dengan model hukum yang mencakup:

Hukum umum	Cahaya merambat dalam garis lurus
	Hukum trigonometri
Fakta-fakta tertentu	Sudut elevasi matahari adalah 37°
	Tiang bendera tingginya 15 meter
Fenomena yang perlu dijelaskan	Bayangan tiang bendera panjangnya 20 meter

'Penjelasan' ini jelas juga sesuai dengan pola hukum yang berlaku. Ketinggian tiang bendera ditentukan dari panjang bayangan yang ditimbulkannya dan sudut elevasi matahari, serta hukum optik bahwa cahaya merambat lurus dan hukum trigonometri. Namun nampaknya sangat aneh untuk menganggap ini sebagai penjelasan mengapa tiang bendera itu tingginya 15 meter. Penjelasan sebenarnya mengapa tiang bendera itu tingginya 15 meter adalah diduga karena seorang tukang kayu sengaja membuatnya sehingga tidak ada hubungannya dengan panjang bayangan yang dihasilkannya. Jadi model Hempel terlalu liberal: model ini memungkinkan sesuatu dianggap sebagai penjelasan ilmiah, padahal sebenarnya tidak.

Pesan moral umum dari contoh tiang bendera adalah bahwa konsep penjelasan menunjukkan adanya asimetri yang penting. Ketinggian tiang bendera menjelaskan panjang bayangan, dengan mempertimbangkan hukum yang relevan dan fakta tambahan, namun tidak sebaliknya. Secara umum, jika x menjelaskan y, dengan memperhatikan hukum-hukum yang relevan dan fakta-fakta tambahan, maka tidak benar bahwa y menjelaskan x, jika diberi hukum-hukum dan fakta-fakta yang sama. Hal ini terkadang diungkapkan dengan mengatakan bahwa penjelasan adalah relasi asimetris. Model hukum cakupan Hempel tidak menghormati asimetri ini. Karena sama seperti kita dapat menyimpulkan panjang bayangan dari tinggi tiang bendera, berdasarkan hukum dan fakta tambahan, demikian pula kita dapat menyimpulkan tinggi tiang bendera dari panjang bayangan. Jadi model Hempel gagal untuk menangkap sepenuhnya apa yang dimaksud dengan penjelasan ilmiah, karena model tersebut menyiratkan bahwa penjelasan harus berupa hubungan simetris padahal kenyataannya penjelasan tersebut asimetris.

Kasus bayangan dan tiang bendera juga memberikan contoh tandingan terhadap tesis Hempel bahwa penjelasan dan prediksi adalah dua sisi dari mata uang yang sama. Alasannya jelas. Misalkan Anda tidak mengetahui seberapa tinggi tiang bendera itu. Jika seseorang memberi tahu Anda bahwa ia mempunyai bayangan 20 meter dan matahari berada 37° di atas kepala, Anda akan dapat memperkirakan ketinggian tiang bendera, mengingat Anda mengetahui hukum optik dan trigonometri yang relevan. Namun seperti yang baru saja kita lihat, informasi ini jelas tidak menjelaskan mengapa tiang bendera memiliki ketinggian yang sama. Jadi dalam contoh ini prediksi dan penjelasannya sebagian. Informasi yang berfungsi untuk memprediksi suatu fakta sebelum kita mengetahuinya tidak berfungsi untuk menjelaskan fakta yang sama setelah kita mengetahuinya, hal ini bertentangan dengan tesis Hempel.

18.3 Kasus (ii): masalah ketidakrelevanan

Misalkan seorang anak kecil berada di bangsal bersalin di sebuah rumah sakit. Anak tersebut memperhatikan bahwa satu orang di ruangan itu yaitu seorang pria bernama John tidak hamil, dan bertanya kepada dokter mengapa tidak hamil. Dokter menjawab: 'John telah meminum pil **KB** secara teratur selama beberapa tahun terakhir. Orang yang rutin mengonsumsi pil **KB** tidak akan pernah hamil. Oleh karena itu, John tidak hamil.' Anggap saja apa yang dikatakan dokter itu benar, John sakit jiwa dan memang meminum pil **KB**, yang menurutnya bisa membantunya. Meski begitu, jawaban dokter kepada anak tersebut jelas tidak membantu. Penjelasan yang benar mengapa John belum hamil tentu saja karena dia laki-laki dan laki-laki tidak bisa hamil.

Namun penjelasan yang diberikan dokter sangat sesuai dengan model hukum yang mencakupnya. Dokter menyimpulkan fenomena yang ingin dijelaskan John tidak hamil berdasarkan hukum umum bahwa orang yang meminum pil **KB** tidak hamil dan fakta khusus bahwa John telah meminum pil **KB**. Karena hukum umum dan fakta khusus adalah benar, dan karena keduanya memerlukan penjelasan, maka menurut model hukum yang mencakup dokter telah memberikan penjelasan mengapa John tidak hamil. Tapi tentu saja hal ini belum.

Moral umumnya adalah penjelasan yang baik tentang suatu fenomena harus memuat informasi yang relevan dengan terjadinya fenomena tersebut. Di sinilah jawaban dokter terhadap anak tersebut menjadi salah. Meskipun apa yang dikatakan dokter kepada anak tersebut sepenuhnya benar, fakta bahwa John telah meminum pil **KB** tidak ada hubungannya dengan dia tidak hamil, karena dia tidak akan hamil meskipun dia tidak meminum pil tersebut. Inilah sebabnya mengapa jawaban dokter bukanlah jawaban yang baik atas pertanyaan anak. Model Hempel tidak menghormati fitur penting dari konsep penjelasan kita.

18.4 Penjelasan dan kausalitas

Karena model hukum cakupan menghadapi permasalahan, maka wajar jika mencari cara alternatif untuk memahami penjelasan ilmiah. Beberapa filsuf percaya bahwa kuncinya terletak pada konsep kausalitas. Ini merupakan saran yang cukup menarik. Karena dalam banyak kasus, menjelaskan suatu fenomena berarti mengatakan apa penyebabnya. Misalnya, jika penyelidik kecelakaan mencoba menjelaskan kecelakaan pesawat terbang, mereka jelas mencari penyebab kecelakaan tersebut. Memang benar, pertanyaan 'Mengapa pesawat itu jatuh?' dan 'Apa penyebab jatuhnya pesawat itu?' secara praktis sama artinya. Demikian pula, jika seorang ahli ekologi mencoba menjelaskan mengapa keanekaragaman hayati di hutan hujan tropis lebih sedikit dibandingkan sebelumnya, mereka akan mencari penyebab berkurangnya keanekaragaman hayati. Kaitan antara konsep penjelasan dan kausalitas cukup erat.

Terkesan dengan kaitan ini, sejumlah filsuf telah meninggalkan penjelasan hukum yang mencakup penjelasan dan memilih penjelasan berbasis kausalitas. Detilnya berbeda-beda, namun gagasan dasar di balik penjelasan ini adalah bahwa menjelaskan suatu fenomena berarti hanya dengan mengatakan apa penyebabnya. Dalam beberapa kasus, perbedaan antara hukum yang mencakup dan penjelasan sebab akibat sebenarnya tidak terlalu besar, karena menyimpulkan terjadinya suatu fenomena dari hukum umum sering kali hanya dengan memberikan penyebabnya. Misalnya, ingat kembali penjelasan Newton tentang mengapa orbit planet berbentuk elips. Kita melihat bahwa penjelasan ini sesuai dengan model hukum yang mencakup Newton yang menyimpulkan bentuk orbit planet dari hukum gravitasinya, ditambah beberapa fakta tambahan. Namun penjelasan Newton juga bersifat kausal, karena orbit planet berbentuk elips disebabkan oleh gaya tarik gravitasi antara planet dan matahari.

Namun, hukum yang mencakup dan penjelasan sebab akibat tidak sepenuhnya setara dalam beberapa kasus, keduanya berbeda. Memang benar, banyak filsuf lebih menyukai penjelasan kausal karena mereka berpikir hal ini dapat menghindari beberapa masalah yang dihadapi model hukum penutup. Ingat kembali masalah tiang bendera. Mengapa intuisi kita mengatakan bahwa tinggi tiang bendera menjelaskan panjang bayangan, sesuai hukum, namun tidak sebaliknya? Masuk akal, karena tinggi tiang bendera yang menjadi penyebab panjang bayangan 20 meter, namun panjang bayangan 20 meter bukanlah penyebab tinggi tiang bendera 15 meter. Jadi tidak seperti model hukum penutup, penjelasan kausal memberikan jawaban yang 'benar' dalam kasus tiang bendera. Hal ini menghormati intuisi kita bahwa kita tidak dapat menjelaskan tinggi tiang bendera dengan menunjuk pada panjang bayangan yang ditimbulkannya.

Moral umum dari permasalahan tiang bendera adalah bahwa model hukum penutup tidak dapat mengakomodasi kenyataan bahwa penjelasan merupakan hubungan yang asimetris. Sekarang kausalitas jelas merupakan hubungan asimetris juga: jika x adalah penyebab y, maka y bukan penyebab x. Misalnya saja, jika korsleting menyebabkan kebakaran, maka kebakaran tersebut jelas tidak menyebabkan korsleting. Oleh karena itu wajar jika kita berpendapat bahwa asimetri penjelasan berasal dari asimetri kausalitas. Jika menjelaskan suatu fenomena berarti mengatakan apa penyebabnya, maka karena kausalitas bersifat asimetris, kita dapat mengharapkan penjelasannya juga asimetris. Model hukum penutup menghadapi masalah tiang bendera justru karena model ini mencoba menganalisis konsep penjelasan ilmiah tanpa mengacu pada kausalitas.

Hal serupa juga terjadi pada kasus pil **KB**. Bahwa John meminum pil **KB** tidak menjelaskan mengapa ia tidak hamil, karena pil **KB** bukanlah penyebab ia tidak hamil. Sebaliknya, jenis kelamin John adalah penyebab dia tidak hamil. Itu sebabnya kami berpendapat bahwa jawaban yang benar atas pertanyaan 'Mengapa John tidak hamil?' adalah 'karena dia laki-laki, dan laki-laki tidak bisa hamil', bukan jawaban dokter. Jadi model hukum cakupan menghadapi masalah ketidakrelevanan justru karena model tersebut tidak secara eksplisit mensyaratkan penjelasan ilmiah untuk mengidentifikasi penyebab fenomena yang ingin kita jelaskan.

Sangat mudah untuk mengkritik Hempel karena gagal menghormati hubungan erat antara kausalitas dan penjelasan, seperti yang dilakukan banyak filsuf. Dalam beberapa hal, kritik ini agak tidak adil. Karena Hempel menganut doktrin filosofis yang disebut empirisme, dan kaum empiris secara tradisional mencurigai konsep kausalitas. Empirisme mengatakan bahwa semua pengetahuan kita berasal dari pengalaman. David Hume, yang kita temui di Bab 2, adalah seorang empiris terkemuka, dan dia berpendapat bahwa tidak mungkin mengalami hubungan sebab akibat. Jadi dia menyimpulkan bahwa mereka tidak ada. Kausalitas adalah sesuatu yang 'diproyeksikan' oleh kita sebagai manusia ke dunia! Ini adalah kesimpulan yang sangat sulit untuk diterima. Tentunya fakta obyektif bahwa menjatuhkan vas kaca menyebabkannya pecah? Hume membantahnya. Ia membenarkan bahwa merupakan fakta obyektif bahwa sebagian besar vas kaca yang dijatuhkan ternyata pecah. Namun gagasan kami tentang kausalitas mencakup lebih dari itu. Hal ini mencakup gagasan tentang hubungan sebab-akibat antara jatuhnya dan putusnya, yaitu bahwa yang pertama menyebabkan yang kedua. Menurut Hume, tidak ada hubungan seperti itu yang dapat ditemukan di dunia ini: yang kita lihat hanyalah sebuah vas yang dijatuhkan, dan kemudian pecah beberapa saat kemudian. Hal ini membuat kita percaya bahwa ada hubungan sebab akibat antara keduanya, namun kenyataannya tidak ada.

Hanya sedikit penganut empirisme yang langsung menerima kesimpulan mengejutkan ini. Namun sebagai hasil karya Hume, mereka cenderung menganggap kausalitas sebagai sebuah konsep yang harus diperlakukan dengan hati-hati. Jadi bagi seorang empiris, gagasan menganalisis penjelasan dalam kaitannya dengan kausalitas akan tampak salah. Jika tujuan seseorang adalah untuk memperjelas konsep penjelasan ilmiah, seperti tujuan Hempel, tidak ada gunanya menggunakan gagasan yang juga memerlukan klarifikasi. Jadi fakta bahwa model hukum yang mencakup tidak menyebutkan kausalitas bukan hanya kekeliruan dari pihak Hempel. Dalam beberapa tahun terakhir, empirisme agak menurun popularitasnya. Lebih jauh lagi, banyak filsuf sampai pada kesimpulan bahwa konsep kausalitas, meskipun bermasalah, sangat diperlukan dalam cara kita memahami dunia. Jadi gagasan penjelasan ilmiah berbasis kausalitas tampaknya lebih dapat diterima dibandingkan pada zaman Hempel.

Penjelasan berbasis kausalitas menangkap struktur dari banyak penjelasan ilmiah aktual dengan cukup baik, namun ada juga kasus di mana penjelasan tersebut kurang sesuai. Pertimbangkan apa yang disebut 'identifikasi teoretis' dalam sains, seperti 'air adalah H_2O' atau 'suhu adalah energi kinetik rata-rata molekuler'. Dalam kedua kasus tersebut, konsep sehari-hari yang familiar disamakan atau diidentikkan dengan konsep ilmiah yang lebih esoteris. Identifikasi teoretis seperti itu memberi kita penjelasan ilmiah. Ketika ahli kimia menemukan bahwa air adalah H_2O, mereka menjelaskan apa itu air. Demikian pula, ketika fisikawan menemukan bahwa suhu suatu benda adalah energi kinetik rata-rata molekulnya, mereka kemudian menjelaskan apa itu suhu. Namun tidak satu pun dari penjelasan ini yang bersifat kausal. Terbentuk dari H_2O tidak menyebabkan suatu zat menjadi air, ia hanya menjadi air. Memiliki energi kinetik molekul rata-rata tertentu tidak menyebabkan suatu cairan memiliki suhu yang sama, melainkan hanya memiliki suhu tersebut. Jika contoh-contoh ini diterima sebagai penjelasan ilmiah yang sah, maka hal ini menunjukkan bahwa penjelasan berdasarkan kausalitas bukanlah keseluruhan cerita.

18.5 Bisakah sains menjelaskan semuanya?

Ilmu pengetahuan modern dapat menjelaskan banyak hal tentang dunia yang kita tinggali. Namun ada juga banyak fakta yang belum dapat dijelaskan oleh ilmu pengetahuan, atau setidaknya belum dapat dijelaskan sepenuhnya. Asal usul kehidupan adalah salah satu contohnya. Kita tahu bahwa sekitar empat miliar tahun yang lalu, molekul dengan kemampuan menggandakan diri muncul dalam sup purba, dan kehidupan berevolusi dari sana. Namun, kita tidak memahami bagaimana molekul-molekul yang dapat mereplikasi diri ini bisa sampai di sana (walaupun beberapa kemungkinan skenario telah digambarkan). Contoh lainnya adalah fakta bahwa anak-anak penderita sindrom Asperger seringkali memiliki ingatan yang sangat baik. Sejumlah penelitian telah mengkonfirmasi fakta ini, namun belum ada yang berhasil menjelaskannya.

Banyak orang percaya bahwa pada akhirnya sains akan mampu menjelaskan fakta semacam ini. Ini adalah pandangan yang cukup masuk akal. Para ahli biologi molekuler sedang berupaya keras mengatasi masalah asal usul kehidupan, dan hanya orang yang pesimis yang akan mengatakan bahwa mereka tidak akan pernah menyelesaikannya. Memang benar, permasalahannya tidak mudah, apalagi karena sulitnya mengetahui seperti apa kondisi bumi empat miliar tahun lalu. Namun demikian, tidak ada alasan untuk berpikir bahwa asal usul kehidupan tidak akan pernah bisa dijelaskan. Begitu pula dengan kenangan luar biasa anak-anak pengidap Asperger. Ilmu pengetahuan tentang ingatan masih terbilang baru, dan masih banyak yang harus ditemukan mengenai dasar neurologis dari kondisi seperti sindrom Asperger. Tentu saja, kami tidak dapat menjamin bahwa penjelasannya pada akhirnya akan ditemukan. Namun mengingat banyaknya keberhasilan yang telah dicapai oleh ilmu pengetahuan modern, smart money pasti akan menjelaskan banyak fakta yang tidak dapat dijelaskan saat ini.

Namun apakah ini berarti sains pada prinsipnya dapat menjelaskan segalanya? Atau adakah fenomena yang harus selalu luput dari penjelasan ilmiah? Ini bukanlah pertanyaan yang mudah untuk dijawab. Di satu sisi, terkesan arogan jika menyatakan bahwa sains bisa menjelaskan segalanya. Di sisi lain, tampaknya tidak masuk akal untuk menyatakan bahwa fenomena tertentu tidak akan pernah bisa dijelaskan secara ilmiah. Ilmu pengetahuan berubah dan berkembang dengan cepat, dan sebuah fenomena yang tampaknya tidak dapat dijelaskan dari sudut pandang ilmu pengetahuan saat ini mungkin dapat dijelaskan dengan mudah di masa depan.

Menurut banyak filsuf, ada alasan logis mengapa sains tidak akan pernah mampu menjelaskan segalanya. Karena untuk menjelaskan sesuatu, apa pun itu, kita perlu menggunakan sesuatu yang lain. Tapi apa yang menjelaskan hal kedua? Sebagai ilustrasi, ingatlah bahwa Newton menjelaskan beragam fenomena menggunakan hukum gravitasinya. Tapi apa yang menjelaskan hukum gravitasi itu sendiri? Jika seseorang bertanya mengapa semua benda menimbulkan gaya tarik gravitasi satu sama lain, apa yang harus kita katakan kepada mereka? Newton tidak punya jawaban untuk pertanyaan ini. Dalam ilmu pengetahuan Newton, hukum gravitasi merupakan prinsip dasar: ia menjelaskan hal-hal lain, namun ia sendiri tidak dapat menjelaskannya.

Moralnya menggeneralisasi. Betapapun banyaknya ilmu pengetahuan di masa depan yang dapat menjelaskannya, penjelasan yang diberikannya harus menggunakan hukum dan prinsip dasar tertentu. Karena tidak ada sesuatu pun yang dapat menjelaskan dirinya sendiri, maka setidaknya sebagian dari hukum dan prinsip ini akan tetap tidak dapat dijelaskan.

Apapun pendapat orang tentang argumen ini, tidak dapat disangkal bahwa argumen ini sangatlah abstrak. Hal ini dimaksudkan untuk menunjukkan bahwa beberapa hal tidak akan pernah dijelaskan, namun tidak memberi tahu kita apa sebenarnya hal tersebut. Namun, beberapa filsuf telah memberikan saran konkrit tentang fenomena yang menurut mereka tidak dapat dijelaskan oleh sains. Contohnya adalah kesadaran, ciri pembeda makhluk berpikir dan perasaan seperti diri kita sendiri dan hewan tingkat tinggi lainnya. Banyak penelitian tentang hakikat kesadaran telah dan terus dilakukan oleh ahli saraf, psikolog, dan lain-lain. Namun, sejumlah filsuf baru-baru ini menyatakan bahwa apa pun penelitian yang dikemukakan, tidak akan pernah sepenuhnya menjelaskan hakikat kesadaran. Ada sesuatu yang secara intrinsik misterius tentang fenomena kesadaran, menurut mereka, yang tidak dapat dihilangkan oleh penyelidikan ilmiah sebanyak apa pun.

Apa yang mendasari pandangan ini? Argumen dasarnya adalah bahwa pengalaman sadar pada dasarnya tidak seperti apa pun di dunia ini, karena pengalaman tersebut mempunyai 'aspek subjektif'. Misalnya saja pengalaman menonton film horor yang menakutkan. Ini adalah pengalaman dengan 'rasa' yang sangat khas; dalam jargon saat ini, ada 'sesuatu seperti' memiliki pengalaman. Para ahli saraf mungkin suatu hari nanti dapat memberikan penjelasan rinci tentang kejadian kompleks di otak yang menimbulkan perasaan teror. Namun apakah ini akan menjelaskan mengapa menonton film horor terasa seperti itu, dibandingkan dengan perasaan lain? Beberapa filsuf berpendapat bahwa hal itu tidak akan terjadi. Dalam pandangan mereka, studi ilmiah tentang otak paling banyak dapat memberi tahu kita proses otak mana yang berkorelasi dengan pengalaman sadar mana. Hal ini tentu menjadi informasi yang menarik dan berharga. Namun, hal ini tidak memberi tahu kita mengapa pengalaman dengan 'perasaan' subjektif yang berbeda harus dihasilkan dari kejadian fisik di otak. Oleh karena itu kesadaran, atau setidaknya satu aspek penting darinya, tidak dapat dijelaskan secara ilmiah.

Meski cukup meyakinkan, argumen ini kontroversial dan tidak didukung oleh semua filsuf, apalagi semua ahli saraf. Memang benar, sebuah buku terkenal tahun 1991 karya filsuf Daniel Dennett yang secara menantang tidak mematuhi berjudul *Consciousness Explained.* Pendukung pandangan bahwa kesadaran tidak dapat dijelaskan secara ilmiah terkadang dituduh kurang berimajinasi. Sekalipun benar bahwa ilmu otak yang dipraktikkan saat ini tidak dapat menjelaskan aspek subjektif dari pengalaman sadar, tidak bisakah kita membayangkan munculnya jenis ilmu otak yang berbeda, dengan teknik penjelasan yang berbeda, yang dapat menjelaskan mengapa pengalaman kita terasa seperti itu? Ada tradisi panjang para filsuf yang mencoba memberi tahu para ilmuwan apa yang mungkin dan apa yang tidak mungkin, dan perkembangan ilmiah selanjutnya sering kali membuktikan bahwa para filsuf itu salah. Hanya waktu yang akan membuktikan apakah nasib yang sama menanti mereka yang berpendapat bahwa kesadaran harus selalu menghindari penjelasan ilmiah.

18.6 Penjelasan dan pereduksian

Berbagai disiplin ilmu dirancang untuk menjelaskan berbagai jenis fenomena. Menjelaskan mengapa karet tidak menghantarkan listrik adalah tugas fisika. Untuk menjelaskan mengapa penyu berumur panjang adalah tugas biologi. Untuk menjelaskan mengapa suku bunga yang lebih tinggi mengurangi inflasi adalah tugas ilmu ekonomi, dan seterusnya. Singkatnya, ada pembagian kerja antara ilmu-ilmu yang berbeda: masing-masing ilmu mengkhususkan diri dalam menjelaskan serangkaian fenomena tertentu. Hal ini menjelaskan mengapa sains biasanya tidak bersaing satu sama lain dan mengapa para ahli biologi, misalnya, tidak khawatir bahwa fisikawan dan ekonom akan melanggar batas wilayah mereka.

Meskipun demikian, secara luas diyakini bahwa berbagai cabang ilmu pengetahuan tidak semuanya setara: ada yang lebih mendasar dibandingkan yang lain. Fisika biasanya dianggap sebagai ilmu yang paling mendasar. Mengapa? Karena benda-benda yang dipelajari oleh ilmu-ilmu lain pada akhirnya tersusun dari partikel-partikel fisika. Misalnya organisme hidup. Organisme hidup terdiri dari sel-sel, yang juga terdiri dari air, asam nukleat, protein, gula, dan lipid, yang semuanya terdiri dari molekul atau rantai panjang molekul yang disatukan. Tapi molekul terdiri dari atom, yang merupakan partikel fisik. Jadi objek yang dipelajari para ahli biologi pada akhirnya hanyalah entitas fisik yang sangat kompleks. Hal yang sama juga berlaku pada ilmu-ilmu lainnya, bahkan ilmu-ilmu sosial. Ambil contoh bidang ekonomi. Ilmu ekonomi mempelajari perilaku perusahaan dan konsumen di pasar dan konsekuensi dari perilaku ini. Namun konsumen adalah manusia dan perusahaan terdiri dari manusia; dan manusia adalah organisme hidup, oleh karena itu merupakan entitas fisik.

Apakah ini berarti bahwa, pada prinsipnya, fisika dapat mencakup semua ilmu pengetahuan tingkat tinggi? Karena segala sesuatu terdiri dari partikel fisik, tentunya jika kita memiliki fisika lengkap, yang memungkinkan kita memprediksi dengan sempurna perilaku setiap partikel fisik di alam semesta, semua ilmu pengetahuan lainnya akan menjadi mubazir? Kebanyakan filsuf menolak pemikiran ini. Lagi pula, rasanya gila untuk menyatakan bahwa fisika suatu hari nanti bisa menjelaskan hal-hal yang dijelaskan oleh biologi dan ekonomi. Prospek untuk menyimpulkan hukum biologi dan ekonomi langsung dari hukum fisika tampaknya sangat kecil. Apa pun gambaran masa depan, kecil kemungkinannya bahwa perekonomian akan mampu memprediksi kemerosotan ekonomi. Ilmu-ilmu seperti biologi dan ekonomi tidak dapat direduksi menjadi fisika, namun sebagian besarnya tampak otonom.

Hal ini menimbulkan teka-teki filosofis. Bagaimana ilmu yang mempelajari entitas yang pada dasarnya bersifat fisik tidak dapat direduksi menjadi fisika? Memang benar ilmu pengetahuan tingkat tinggi tidak bergantung pada fisika, bagaimana mungkin? Menurut beberapa filsuf, jawabannya terletak pada kenyataan bahwa objek-objek yang dipelajari oleh ilmu-ilmu tingkat tinggi banyak diwujudkan pada tingkat fisik. Untuk mengilustrasikan gagasan tentang berbagai realisasi, bayangkan sekumpulan asbak. Setiap asbak jelas merupakan suatu entitas fisik, seperti segala sesuatu yang lain di alam semesta. Namun komposisi fisik asbak bisa sangat berbeda, ada yang terbuat dari kaca, ada yang terbuat dari alumunium, ada yang terbuat dari plastik, dan sebagainya. Dan mereka mungkin berbeda dalam ukuran, bentuk, dan berat. Hampir tidak ada batasan pada kisaran sifat fisik berbeda yang dimiliki asbak. Jadi tidak mungkin mendefinisikan konsep '**asbak**' hanya dalam istilah fisik. Kita tidak dapat menemukan pernyataan yang benar dalam bentuk 'x adalah **asbak** jika dan hanya jika x adalah ...' dimana bagian yang kosong diisi dengan ekspresi yang diambil dari bahasa fisika. Artinya asbak semakin banyak diwujudkan pada tingkat fisik.

Para filsuf sering kali menggunakan berbagai kesadaran untuk menjelaskan mengapa psikologi tidak dapat direduksi menjadi fisika atau kimia, namun pada prinsipnya, penjelasan tersebut berlaku untuk sains tingkat tinggi mana pun. Misalnya, perhatikan fakta biologis bahwa sel saraf hidup lebih lama dibandingkan sel kulit. Sel adalah entitas fisik, sehingga orang mungkin berpikir bahwa fakta ini suatu hari nanti akan dijelaskan oleh fisika. Namun, sel hampir pasti berkembang biak pada tingkat mikrofisika. Sel pada dasarnya terdiri dari atom, tetapi susunan atom yang tepat akan sangat berbeda pada sel yang berbeda. Jadi konsep 'sel' tidak dapat didefinisikan dalam istilah yang diambil dari fisika dasar. Tidak ada pernyataan benar dalam bentuk 'x adalah sel jika dan hanya jika x adalah ...' dimana bagian yang kosong diisi dengan ungkapan yang diambil dari bahasa mikrofisika. Jika ini benar, berarti fisika fundamental tidak akan pernah bisa menjelaskan mengapa sel saraf hidup lebih lama dari sel kulit, atau fakta lain tentang sel. Kosakata biologi sel dan kosakata fisika tidak dipetakan satu sama lain sesuai kebutuhan. Dengan demikian, kita mempunyai penjelasan mengapa biologi sel tidak dapat direduksi menjadi fisika, meskipun faktanya sel adalah entitas fisik. Tidak semua filsuf senang dengan doktrin realisasi ganda, namun doktrin ini menjanjikan penjelasan yang rapi tentang otonomi ilmu-ilmu tingkat tinggi, baik dari fisika maupun dari satu sama lain.

Bab 19

Realisme dan anti-realisme

Ada perdebatan kuno dalam filsafat antara dua aliran pemikiran yang berlawanan yang disebut realisme dan idealisme. Realisme berpendapat bahwa dunia fisik ada secara independen dari pemikiran dan persepsi manusia. Idealisme menyangkal hal ini, ia mengklaim bahwa dunia fisik dalam beberapa hal bergantung pada aktivitas sadar manusia. Bagi kebanyakan orang, realisme tampaknya lebih masuk akal dibandingkan idealisme. Realisme sangat cocok dengan pandangan yang masuk akal bahwa fakta-fakta tentang dunia berada 'di luar sana' menunggu untuk ditemukan. Sekilas, idealisme memang terdengar konyol. Karena bebatuan dan pepohonan akan terus ada meskipun umat manusia punah, dalam artian apa keberadaan mereka bergantung pada pikiran manusia? Faktanya, isu ini lebih halus dari ini dan terus dibahas oleh para filsuf saat ini.

Meskipun isu realisme/idealisme tradisional termasuk dalam bidang filsafat yang disebut metafisika, namun isu tersebut tidak ada kaitannya secara khusus dengan sains. Perhatian kami dalam bab ini adalah pada perdebatan kontemporer yang khususnya mengenai sains dan dalam beberapa hal analog dengan isu tradisional. Perdebatan terjadi antara posisi yang dikenal sebagai realisme ilmiah dan kebalikannya, yang dikenal sebagai anti-realisme atau instrumentalisme. Mulai saat ini, kita akan menggunakan kata 'realisme' yang berarti realisme ilmiah, dan 'realis' yang berarti realis ilmiah.

19.1 Realisme ilmiah dan anti-realisme

Ide dasar realisme ilmiah sangatlah jelas. Kaum realis berpendapat bahwa sains bertujuan untuk memberikan gambaran sebenarnya tentang dunia dan sering kali berhasil. Jadi teori ilmiah yang baik, menurut kaum realis, adalah teori yang benar-benar menggambarkan keadaan dunia. Ini mungkin terdengar seperti doktrin yang tidak berbahaya. Tentunya tidak ada yang berpikir bahwa sains bertujuan untuk menghasilkan gambaran yang salah tentang dunia? Tapi bukan itu yang dipikirkan kaum anti-realis. Sebaliknya, kaum anti-realis berpendapat bahwa tujuan sains adalah menemukan teori-teori yang memadai secara empiris, yaitu yang secara tepat memprediksi hasil eksperimen dan observasi. Jika suatu teori mencapai kecukupan empiris yang sempurna, pertanyaan selanjutnya apakah teori tersebut benar-benar menggambarkan dunia adalah hal yang mubazir bagi para anti-realis; bahkan ada yang berpendapat bahwa pertanyaan ini tidak masuk akal.

Kontras antara realisme dan anti-realisme sangat mencolok dalam ilmu-ilmu yang mengklaim wilayah realitas yang tidak dapat diobservasi. Fisika adalah contoh nyata. Fisikawan mengajukan teori tentang atom, elektron, quark, lepton, dan entitas aneh lainnya, yang tidak ada satupun yang dapat diamati dalam arti normal; terlebih lagi, teori-teori ini biasanya ditulis dalam bahasa yang sangat matematis. Jadi teori-teori fisika agak berbeda dari deskripsi-deskripsi dunia yang masuk akal yang diberikan oleh orang-orang non-ilmuwan. Meskipun demikian, menurut kaum realis, teori-teori ini merupakan upaya untuk menggambarkan dunia dalam dunia sub-atom dan ukuran keberhasilannya adalah apakah yang mereka katakan tentang dunia itu benar adanya. Dalam hal ini, teori ilmiah dan deskripsi dunia yang masuk akal setara.

Anti-realis berpendapat bahwa tujuan sebenarnya dari teori ilmiah adalah kecukupan empiris, bukan kebenaran. Fisikawan mungkin berbicara tentang entitas yang tidak dapat diamati, tetapi mereka hanyalah fiksi yang diperkenalkan untuk membantu memprediksi fenomena yang dapat diamati. Sebagai ilustrasi, perhatikan kembali teori kinetik gas, yang menyatakan bahwa setiap volume gas mengandung sejumlah besar benda sangat kecil yang bergerak. Molekul entitas ini tidak dapat diamati. Dari teori kinetik, kita dapat menyimpulkan berbagai konsekuensi terhadap perilaku gas yang dapat diamati, misalnya pemanasan sampel gas akan menyebabkan gas memuai jika tekanannya tetap konstan, yang dapat diverifikasi secara eksperimental. Anti-realis berpendapat bahwa satu-satunya tujuan menempatkan entitas yang tidak dapat diamati dalam teori kinetik adalah untuk menyimpulkan konsekuensi semacam ini. Apakah gas benar-benar mengandung molekul yang bergerak atau tidak, itu tidak menjadi masalah; inti dari teori kinetik bukanlah untuk benar-benar menggambarkan fakta-fakta yang tersembunyi, namun hanya untuk menyediakan cara yang mudah untuk memprediksi pengamatan. Kita dapat melihat mengapa anti-realisme terkadang disebut 'instrumentalisme' karena mereka menganggap teori-teori ilmiah sebagai instrumen untuk membantu kita memprediksi fenomena yang dapat diamati, bukan sebagai upaya untuk menggambarkan sifat dasar realitas.

Karena perdebatan realisme/anti-realisme berkaitan dengan tujuan sains, orang mungkin berpikir bahwa perdebatan tersebut dapat diselesaikan hanya dengan bertanya kepada para ilmuwan itu sendiri. Mengapa tidak melakukan jajak pendapat terhadap para ilmuwan, menanyakan tujuan mereka? Namun pendapat ini tidak tepat sasaran, karena ungkapan 'tujuan ilmu pengetahuan' terlalu harfiah. Ketika kita bertanya apa tujuan ilmu pengetahuan, kita tidak menanyakan tujuan masing-masing ilmuwan. Sebaliknya, kita bertanya bagaimana cara terbaik untuk memahami apa yang dikatakan para ilmuwan dan bagaimana cara menafsirkan upaya ilmiah tersebut. Meskipun menarik untuk mengetahui pandangan para ilmuwan mengenai perdebatan realisme/anti-realisme, isu ini pada dasarnya bersifat filosofis.

Salah satu motivasi anti-realisme berasal dari keyakinan bahwa kita tidak dapat benar-benar memperoleh pengetahuan tentang bagian realitas yang tidak dapat diamati, karena pengetahuan tersebut berada di luar jangkauan pengetahuan manusia. Keyakinan pesimistis ini berasal dari empirisme, doktrin filosofis yang menyatakan bahwa pengetahuan manusia terbatas pada apa yang pada prinsipnya dapat dialami. Jika diterapkan pada sains, doktrin empiris menjadi pandangan bahwa batasan pengetahuan ilmiah ditentukan oleh kekuatan observasi kita. Jadi sains bisa memberi kita pengetahuan tentang fosil, pohon, dan kristal gula, tapi tidak tentang atom, elektron, dan quark. Pandangan ini tidak sepenuhnya tidak masuk akal. Tidak seorang pun dapat meragukan keberadaan fosil dan pepohonan, namun hal yang sama tidak berlaku pada atom dan elektron. Seperti yang kita lihat di bab terakhir, pada akhir abad ke-19, banyak ilmuwan terkemuka yang meragukan keberadaan atom. Siapa pun yang menerima pandangan seperti itu jelas harus memberikan penjelasan mengapa para ilmuwan mengajukan teori-teori yang menyatakan entitas yang tidak dapat diobservasi jika pengetahuan ilmiah terbatas pada apa yang dapat diamati. Penjelasan yang diberikan oleh kaum anti-realis adalah bahwa mereka adalah fiksi yang dirancang untuk membantu memprediksi perilaku benda-benda di dunia yang dapat diamati.

Kaum realis tidak setuju bahwa pengetahuan ilmiah dibatasi oleh kekuatan observasi kita. Sebaliknya, mereka percaya bahwa kita telah mempunyai pengetahuan substansial tentang realitas yang tidak dapat diobservasi. Ada banyak alasan untuk percaya bahwa teori-teori ilmiah terbaik kita adalah benar, dan teori-teori tersebut berbicara tentang entitas yang tidak dapat diamati. Misalnya saja teori atom tentang materi, yang mengatakan bahwa semua materi terdiri dari atom. Teori atom mampu menjelaskan sejumlah besar fakta tentang dunia. Kaum realis menganggap hal ini sebagai bukti kuat bahwa teori tersebut benar, yaitu bahwa materi benar-benar terdiri dari atom-atom yang berperilaku sesuai teori tersebut. Tentu saja, teori tersebut mungkin salah, meskipun ada bukti nyata yang mendukungnya, namun teori apa pun juga bisa salah. Hanya karena atom tidak dapat diamati, maka tidak ada alasan untuk menafsirkan teori atom selain dari teori atom percobaan deskripsi realitas dan yang sangat sukses, di semua kemungkinan.

Motivasi yang berbeda terhadap anti-realisme berasal dari fakta bahwa teori-teori ilmiah mempunyai kekhasan tertentu yang tidak dimiliki oleh deskripsi biasa tentang dunia. Banyak teori ilmiah melibatkan konstruksi model, sering kali ditulis dalam bahasa matematika. Model seperti ini biasanya membuat asumsi-asumsi ideal yang diketahui keliru dalam dunia nyata, namun diperlukan untuk menjaga agar model tetap dapat ditelusuri. Dalam ilmu ekonomi, misalnya, banyak model berasumsi bahwa agen sangat rasional, memiliki informasi sempurna, dan mengambil keputusan yang memaksimalkan utilitasnya. Para ekonom mengetahui bahwa masyarakat di dunia nyata tidaklah seperti ini, namun mereka berharap bahwa model yang mereka buat dapat memberikan pencerahan terhadap perekonomian dunia nyata. Demikian pula, dalam biologi evolusioner, banyak model berasumsi bahwa ukuran populasi tidak terbatas dan perkawinan terjadi secara acak; asumsi ini sangat menyederhanakan matematika. Tidak ada populasi nyata yang dapat memenuhi asumsi ini, namun para ahli biologi berharap bahwa asumsi tersebut merupakan perkiraan yang cukup baik terhadap kenyataan agar model mereka dapat memilikinya. kekuatan penjelasan. Anti-realis sering berpendapat bahwa prevalensi model ideal dalam sains mendukung pandangan mereka. Tidak masuk akal untuk menganggap model-model tersebut sebagai upaya untuk benar-benar menggambarkan dunia, kata mereka karena mengandung asumsi-asumsi yang diketahui salah. Tujuan dari model tersebut adalah kecukupan empiris, bukan kebenaran.

Kaum realis tidak menganggap argumen ini sebagai sesuatu yang menentukan. Peran model ideal dalam teori ilmiah tidak memaksa kita untuk menolak gagasan bahwa sains bertujuan untuk mencapai kebenaran. Sebaliknya, kita perlu menerima bahwa perkiraan kebenaran, bukan kebenaran pasti, adalah tujuan dari model seperti itu, kata kaum realis. Misalnya saja model matematis perubahan iklim. Model seperti itu akan menggabungkan banyak asumsi penyederhanaan yang diketahui tidak sepenuhnya benar, misalnya. bahwa bahan bakar fosil adalah satu-satunya sumber karbon dioksida. Namun bukan berarti model tersebut hanya bertujuan menghasilkan prediksi yang benar. Sebaliknya, model ini bertujuan untuk memberikan gambaran yang kira-kira benar tentang faktor-faktor penyebab tersembunyi yang sebenarnya mempengaruhi perubahan iklim. Tentu saja, model perubahan iklim yang baik harus berhasil secara predikatif, namun tujuan sebenarnya adalah untuk merancang model yang secara akurat mewakili, sejauh mungkin, pengaruh sebab-akibat nyata terhadap iklim. Model yang diidealkan tidak akan pernah menjadi gambaran dunia yang sebenarnya, namun mungkin masih merupakan perkiraan yang baik, menurut kaum realis.

19.2 Argumen 'tampa keajaiban'

Banyak teori yang menyatakan entitas yang tidak dapat diamati berhasil secara empiris, dan teori tersebut memberikan prediksi yang sangat baik tentang perilaku objek makroskopis. Teori kinetik gas, yang dijelaskan pada bagian 'Realisme ilmiah dan anti-realisme', adalah salah satu contohnya, dan masih banyak lagi contoh lainnya. Selain itu, teori-teori seperti itu seringkali mempunyai penerapan teknologi. Misalnya, teknologi laser didasarkan pada teori tentang apa yang terjadi ketika elektron dalam atom berpindah dari tingkat energi yang lebih tinggi ke tingkat energi yang lebih rendah. Dan laser berfungsi, mereka memungkinkan kita mengoreksi miopia, mencetak teks berkualitas tinggi, menyerang musuh dengan peluru kendali, dan banyak lagi. Oleh karena itu, teori yang mendasari teknologi laser sangat berhasil secara empiris.

Keberhasilan empiris teori-teori yang mengemukakan entitas yang tidak dapat diobservasi merupakan dasar dari salah satu argumen utama realisme ilmiah, yang dikenal sebagai argumen 'tidak ada keajaiban'. Awalnya dirumuskan oleh Hilary Putnam, seorang filsuf terkemuka Amerika, argumen tidak ada keajaiban mengatakan bahwa akan menjadi suatu kebetulan yang luar biasa jika sebuah teori yang menyatakan elektron dan atom menghasilkan prediksi yang akurat kecuali entitas ini benar-benar ada. Jika tidak ada atom dan elektron, apa yang menjelaskan kesesuaian teori tersebut dengan data empiris? Demikian pula, bagaimana kita menjelaskan kemajuan teknologi yang dihasilkan oleh teori kita, kecuali dengan berasumsi bahwa teori tersebut benar? Jika atom dan elektron hanyalah 'fiksi belaka', seperti pendapat para anti-realis, lalu mengapa laser bisa berfungsi? Dalam pandangan ini, menjadi seorang anti-realis sama dengan mempercayai keajaiban. Karena lebih baik kita tidak percaya pada mukjizat jika ada alternatif yang tidak mukjizat, maka kita harus bersikap realistis secara ilmiah.

Argumen ini tidak dimaksudkan untuk membuktikan bahwa realisme benar dan anti realisme salah. Sebaliknya, ini adalah argumen yang masuk akal dan merupakan kesimpulan dari penjelasan terbaik. Fenomena yang ingin dijelaskan adalah kenyataan bahwa banyak teori yang mendalilkan entitas dan proses yang tidak dapat diobservasi memiliki tingkat keberhasilan empiris yang tinggi. Penjelasan terbaik mengenai fakta ini, katakanlah, para pendukung argumen tidak ada keajaiban, adalah bahwa teori-teori tersebut benar, bahwa entitas-entitas tersebut benar-benar ada dan berperilaku seperti yang dinyatakan oleh teori-teori tersebut. ecuali kita menerima penjelasan ini, keberhasilan empiris teori kita adalah sebuah misteri yang tidak dapat dijelaskan.

Salah satu tanggapan anti-realis terhadap argumen tidak ada keajaiban menarik perhatian sejarah sains. Secara historis, ada banyak contoh teori ilmiah yang berhasil secara empiris pada zamannya, namun kemudian ternyata salah. Dalam sebuah artikel terkenal dari tahun 1980-an, filsuf sains Amerika Larry Laudan mencantumkan lebih dari tiga puluh teori serupa, yang diambil dari berbagai disiplin ilmu dan era yang berbeda. Teori pembakaran flogiston adalah salah satu contohnya. Teori ini, yang diterima secara luas hingga akhir abad ke-18, menyatakan bahwa ketika suatu benda terbakar, ia akan melepaskan zat yang disebut 'flogiston' ke atmosfer. Ilmu kimia modern mengajarkan kita bahwa hal ini salah: tidak ada zat yang disebut flogiston. Sebaliknya, pembakaran terjadi ketika sesuatu bereaksi dengan oksigen di udara. Namun meskipun flogiston tidak ada, teori flogiston secara empiris cukup berhasil: teori ini cukup sesuai dengan data yang tersedia pada saat itu.

Contoh seperti ini menunjukkan bahwa argumen tidak ada keajaiban yang mendukung realisme ilmiah terlalu cepat. Para pendukung argumen tersebut menganggap keberhasilan empiris teori-teori ilmiah masa kini sebagai bukti kebenarannya. Namun, sejarah ilmu pengetahuan menunjukkan bahwa teori-teori yang berhasil secara empiris sering kali ternyata salah. Jadi bagaimana kita tahu bahwa nasib yang sama tidak akan menimpa teori-teori yang ada saat ini? Bagaimana kita tahu bahwa teori atom tentang materi, misalnya, tidak sejalan dengan teori flogiston? Ketika kita menaruh perhatian pada sejarah ilmu pengetahuan dan berargumentasi dengan kaum anti-realis, kita akan melihat bahwa kesimpulan dari keberhasilan empiris terhadap kebenaran teoretis agak lemah. Sikap rasional terhadap teori atom adalah agnostisisme, mungkin benar atau mungkin tidak. Kami hanya tidak tahu, kata kaum anti-realis.

Hal ini merupakan perlawanan yang kuat terhadap argumen tidak ada mukjizat, namun tidak menentukan. Kaum realis menanggapinya dengan memodifikasi argumen dalam dua cara. Modifikasi pertama adalah mengklaim bahwa keberhasilan empiris suatu teori merupakan bukti bahwa teori tersebut kurang lebih benar, bukan sepenuhnya benar. Klaim yang lebih lemah ini kurang rentan terhadap contoh tandingan dari sejarah ilmu pengetahuan. Hal ini juga lebih sederhana: memungkinkan kaum realis untuk mengakui bahwa teori-teori ilmiah saat ini mungkin tidak sepenuhnya benar, namun tetap berpendapat bahwa teori-teori tersebut secara umum berada di jalur yang benar. Dan seperti yang telah kita lihat, kaum realis memerlukan gagasan tentang perkiraan kebenaran, untuk menjelaskan model yang diidealkan. Modifikasi kedua dari argumen tidak ada keajaiban melibatkan penyempurnaan gagasan keberhasilan empiris. Beberapa realis berpendapat bahwa keberhasilan empiris bukan hanya soal mencocokkan data yang diketahui, namun juga memungkinkan kita memprediksi pengamatan baru yang sebelumnya tidak diketahui. Sehubungan dengan kriteria keberhasilan empiris yang lebih ketat ini, lebih sulit untuk menemukan contoh-contoh historis dari teori-teori yang berhasil secara empiris yang kemudian ternyata salah.

Apakah penyempurnaan ini dapat menyelamatkan argumen tidak ada keajaiban masih bisa diperdebatkan. Mereka tentu saja mengurangi jumlah contoh tandingan sejarah, namun tidak sampai nol. Salah satu yang masih tersisa adalah teori gelombang cahaya, yang pertama kali dikemukakan oleh Christian Huygens pada tahun 1690. Menurut teori ini, cahaya terdiri dari getaran seperti gelombang dalam medium tak terlihat yang disebut eter, yang seharusnya menembus seluruh alam semesta. (Saingan teori gelombang adalah teori partikel cahaya, yang didukung oleh Newton, yang berpendapat bahwa cahaya terdiri dari partikel-partikel sangat kecil yang dipancarkan oleh sumber cahaya.) Teori gelombang tidak diterima secara luas sampai fisikawan Perancis Auguste Fresnel merumuskan rumus matematika versi teori pada tahun 1815, dan menggunakannya untuk memprediksi beberapa fenomena optik baru yang mengejutkan. Eksperimen optik membenarkan prediksi Fresnel, meyakinkan banyak ilmuwan abad ke-19 bahwa teori gelombang cahaya pasti benar. Namun fisika modern mengatakan kepada kita bahwa teori tersebut tidak benar: tidak ada yang namanya eter, jadi cahaya tidak terdiri dari getaran di dalamnya. Sekali lagi, kita mempunyai contoh teori yang salah namun berhasil secara empiris.

Ciri penting dari contoh ini adalah bahwa contoh ini bertentangan dengan versi argumen tidak ada keajaiban sekalipun. Teori Fresnel memang membuat prediksi baru, sehingga memenuhi syarat sebagai sukses secara empiris, bahkan dibandingkan dengan gagasan sukses empiris yang lebih ketat. Dan sulit untuk melihat bagaimana teori Fresnel dapat disebut 'kira-kira benar', mengingat teori tersebut didasarkan pada gagasan tentang eter, yang tidak ada. Apa pun maksudnya agar suatu teori dianggap benar, syarat mutlaknya adalah entitas yang dibahas dalam teori tersebut benar-benar ada. Singkatnya, teori Fresnel secara empiris berhasil meskipun berdasarkan pemahaman yang ketat terhadap gagasan ini, namun tidak sepenuhnya benar. Pesan moral dari cerita ini, kata kaum anti-realis, adalah bahwa kita tidak boleh berasumsi bahwa teori-teori ilmiah modern bahkan secara kasar berada di jalur yang benar, hanya karena teori-teori tersebut secara empiris berhasil.

Dengan demikian, status argumen tidak ada mukjizat masih menjadi pertanyaan terbuka. Di satu sisi, argumen ini terbuka terhadap tantangan serius dari sejarah ilmu pengetahuan. Di sisi lain, ada sesuatu yang secara intuitif menarik dalam argumen tersebut. Sangat sulit untuk menerima bahwa atom dan elektron mungkin tidak ada ketika k ita mempertimbangkan kesuksesan luar biasa dari teori-teori yang mendalilkan entitas-entitas ini. Namun seperti yang ditunjukkan oleh sejarah, kita harus berhati-hati dalam berasumsi bahwa teori-teori ilmiah kita saat ini benar, betapapun cocoknya teori-teori tersebut dengan data kita. Banyak ilmuwan yang berasumsi demikian di masa lalu dan terbukti salah.

19.3 Perbedaan yang dapat diamati/tidak dapat diamati

Inti dari perdebatan antara realisme dan anti-realisme adalah perbedaan antara apa yang bisa diamati dan apa yang tidak. Sejauh ini kita hanya menganggap remeh pembedaan ini, meja dan kursi dapat diamati, sedangkan atom dan elektron tidak. Namun pada kenyataannya, pembedaan tersebut cukup problematis secara filosofis. Memang benar, salah satu argumen utama realisme ilmiah mengatakan bahwa tidak mungkin menarik perbedaan secara prinsip.

Mengapa hal ini harus menjadi argumen bagi realisme ilmiah? Karena kaum anti-realis berpendapat bahwa sains tidak dapat memberi kita pengetahuan tentang realitas yang tidak dapat diobservasi, yang menganggap bahwa terdapat perbedaan yang jelas antara apa yang dapat diamati dan apa yang tidak dapat diamati. Jika ternyata pembagian ini tidak dapat digambarkan secara memuaskan, maka anti-realisme jelas berada dalam kesulitan. Itulah sebabnya para realis ilmiah sering kali ingin menekankan permasalahan yang terkait dengan perbedaan yang dapat diamati/tidak dapat diamati.

Salah satu masalah tersebut menyangkut hubungan antara observasi dan deteksi. Entitas seperti elektron tidak dapat diamati dalam arti biasa, namun keberadaannya dapat dideteksi menggunakan peralatan khusus yang disebut detektor partikel. Detektor partikel yang paling sederhana adalah cloud chamber, yang terdiri dari wadah tertutup berisi udara yang telah jenuh dengan uap air. Ketika partikel bermuatan seperti elektron melewati ruangan, mereka bertabrakan dengan atom netral di udara, mengubahnya menjadi ion; uap air mengembun di sekitar ion-ion ini menyebabkan terbentuknya tetesan cairan, yang dapat dilihat dengan mata telanjang. Kita dapat mengikuti jalur elektron melalui ruang awan dengan mengamati jejak tetesan cairan tersebut. Apakah ini berarti elektron dapat diamati? Kebanyakan filsuf akan mengatakan tidak: ruang awan memungkinkan kita mendeteksi elektron, bukan mengamatinya secara langsung. Dengan cara yang sama, jet berkecepatan tinggi dapat dideteksi oleh jejak uap yang ditinggalkannya, namun mengamati jejak ini tidak berarti mengamati jet tersebut. Namun apakah selalu jelas bagaimana membedakan mengamati dan mendeteksi?

Dalam pembelaannya yang terkenal terhadap realisme ilmiah pada awal tahun 1960an, Grover Maxwell mengajukan masalah berikut bagi kaum anti-realis. Perhatikan rangkaian kejadian berikut: melihat sesuatu dengan mata telanjang, melihat sesuatu melalui jendela, melihat sesuatu melalui kaca mata yang kuat, melihat sesuatu melalui teropong, melihat sesuatu melalui mikroskop berdaya rendah, melihat pada sesuatu melalui mikroskop berkekuatan tinggi, dan sebagainya. Maxwell berpendapat bahwa peristiwa-peristiwa ini terletak pada suatu kontinum yang mulus. Jadi bagaimana kita memutuskan mana yang dianggap mengamati dan mana yang tidak? Bisakah seorang ahli biologi mengamati mikroorganisme dengan mikroskop berkekuatan tinggi, atau bisakah mereka mendeteksi keberadaannya seperti seorang fisikawan dapat mendeteksi keberadaan elektron di ruang awan? Jika sesuatu hanya dapat dilihat dengan bantuan instrumen ilmiah yang canggih, apakah hal tersebut termasuk dapat diamati atau tidak dapat diamati? Seberapa canggihkah instrumentasinya, sebelum kita dihadapkan pada kasus mendeteksi dan bukan mengamati? Tidak ada cara yang berprinsip untuk menjawab pertanyaan-pertanyaan seperti itu, kata Maxwell, sehingga upaya anti-realis untuk mengklasifikasikan entitas sebagai sesuatu yang dapat diamati atau tidak dapat diamati gagal.

Argumen Maxwell didukung oleh fakta bahwa para ilmuwan sendiri terkadang berbicara tentang ‘mengamati’ partikel dengan bantuan peralatan canggih. Dalam literatur filosofis, elektron biasanya dianggap sebagai contoh paradigma entitas yang tidak dapat diamati, namun para ilmuwan sering kali dengan senang hati membicarakan tentang ’mengamati’ elektron menggunakan detektor partikel. Tentu saja, hal ini tidak membuktikan bahwa para filsuf salah dan bahwa elektron memang dapat diamati, karena pembicaraan para ilmuwan mungkin lebih baik dianggap sebagai façon de parler. Demikian pula, fakta bahwa para ilmuwan berbicara tentang memiliki ’bukti eksperimental’ terhadap suatu teori tidak berarti bahwa eksperimen benar-benar dapat membuktikan kebenaran suatu teori, seperti yang kita lihat di pembahasan sebelumnya. Meskipun demikian, jika memang ada perbedaan yang secara filosofis penting dapat diamati/tidak dapat diamati, maka seperti pendapat kaum anti-realis, sungguh aneh bahwa hal ini sangat tidak sesuai dengan cara para ilmuwan sendiri berbicara.

Argumen Maxwell sangat kuat, namun tidak menentukan. Bas van Fraassen, seorang tokoh anti-realis kontemporer terkemuka, mengklaim bahwa argumen Maxwell hanya menunjukkan ’dapat diamati’ sebagai istilah yang samar-samar. Istilah yang tidak jelas adalah istilah yang kasusnya berada di ambang batas. ’Botak’ adalah contohnya. Karena kerontokan rambut terjadi secara bertahap, ada banyak pria dan sulit untuk mengatakan apakah mereka botak atau tidak. Namun van Fraassen menunjukkan bahwa istilah-istilah yang tidak jelas dapat digunakan dengan sempurna, dan dapat menandai perbedaan yang nyata di dunia. Tak seorang pun akan berpendapat bahwa perbedaan antara laki-laki botak dan laki-laki berbulu halus tidak nyata hanya karena 'botak' tidak jelas. Tentu saja, jika kita mencoba menggambar garis pemisah yang tajam, hal itu akan menjadi sewenang-wenang. Namun karena terdapat kasus yang jelas antara laki-laki yang botak dan laki-laki yang tidak botak, tidak adanya garis pemisah yang tajam tidak menjadi masalah. Hal yang sama juga berlaku pada 'yang dapat diamati', menurut van Fraassen. Ada kasus yang jelas mengenai entitas yang dapat diamati, misalnya kursi, dan entitas yang tidak dapat diamati, misalnya quark. Argumen Maxwell menyoroti fakta bahwa ada juga kasus-kasus yang berada di ambang batas, di mana kita tidak yakin apakah entitas tersebut dapat diamati atau hanya dideteksi. Jadi jika kita mencoba menggambar suatu garis pemisah yang tajam, pasti akan menjadi sewenang-wenang. Namun seperti halnya kebotakan, hal ini tidak menunjukkan bahwa perbedaan yang dapat diamati/tidak dapat diamati itu tidak nyata.

Seberapa kuat argumen ini? Van Fraassen mungkin benar bahwa keberadaan kasus-kasus garis batas, dan ketidakmungkinan untuk menarik batas yang tajam tanpa kesewenang-wenangan, tidak menunjukkan perbedaan yang dapat diamati/tidak dapat diobservasi sebagai sesuatu yang tidak nyata. Sejauh itu, argumennya melawan Maxwell berhasil. Namun, menunjukkan bahwa ada perbedaan nyata antara apa yang dapat diamati dan apa yang tidak dapat diamati adalah satu hal, dan menunjukkan bahwa perbedaan tersebut layak mendapatkan signifikansi yang diberikan oleh kaum anti-realis adalah satu hal. Bahkan jika kita mengabulkan pendapat van Fraassen bahwa terdapat kasus-kasus nyata mengenai entitas-entitas yang tidak dapat diobservasi dan bahwa hal tersebut sudah cukup bagi kaum anti-realis untuk melanjutkan, argumen masih diperlukan mengenai mengapa pengetahuan tentang realitas yang tidak dapat diobservasi adalah hal yang mustahil.

19.4 Argumen penentuan yang kurang

Salah satu argumen tersebut berfokus pada hubungan antara data empiris para ilmuwan dan teori mereka. Anti-realis menekankan bahwa data empiris yang menjadi tanggung jawab teori-teori ilmiah terdiri dari fakta-fakta tentang entitas dan proses yang dapat diamati. Sebagai ilustrasi, perhatikan kembali teori kinetik gas, yang mengatakan bahwa setiap sampel gas terdiri dari molekul-molekul yang bergerak. Karena molekul-molekul ini tidak dapat diamati, kita jelas tidak dapat menguji teori tersebut dengan mengamati secara langsung berbagai sampel gas. Sebaliknya, kita perlu menyimpulkan dari teori tersebut beberapa pernyataan yang dapat diuji secara langsung, yang selalu mengenai entitas yang dapat diamati. Seperti yang telah kita lihat, teori kinetik menyiratkan bahwa sampel gas pada tekanan konstan akan memuai jika dipanaskan. Pernyataan ini dapat diuji secara langsung, dengan mengamati pembacaan pada peralatan yang bersangkutan di laboratorium. Contoh ini mengilustrasikan kebenaran umum: fakta tentang fenomena yang dapat diobservasi memberikan data akhir bagi teori-teori yang mengemukakan entitas dan proses yang tidak dapat diamati.

Kaum anti-realis kemudian berargumentasi bahwa data empiris 'tidak dapat menentukan' teori-teori yang dikemukakan para ilmuwan berdasarkan data tersebut. Apa artinya ini? Artinya, data pada prinsipnya dapat dijelaskan oleh banyak teori yang berbeda dan saling bertentangan. Dalam kasus teori kinetik, kaum anti-realis akan mengatakan bahwa salah satu penjelasan yang mungkin mengenai data empiris adalah bahwa gas mengandung sejumlah besar molekul yang bergerak, seperti yang dinyatakan dalam teori kinetik. Namun mereka bersikeras bahwa ada kemungkinan penjelasan lain juga, yang bertentangan dengan teori kinetik. Jadi menurut kaum anti-realis, teori-teori ilmiah yang mengemukakan entitas yang tidak dapat diobservasi tidak ditentukan oleh data empiris—akan selalu ada sejumlah teori bersaing yang dapat menjelaskan data tersebut dengan sama baiknya.

Sangat mudah untuk melihat mengapa argumen underdetermination mendukung pandangan anti-realis terhadap sains. Misalkan seorang ilmuwan memercayai teori tertentu tentang entitas yang tidak dapat diobservasi, dengan alasan bahwa teori tersebut dapat menjelaskan sejumlah besar data empiris. Namun, jika data tersebut dapat dijelaskan dengan teori-teori alternatif, yang saling bertentangan, maka keyakinan ilmuwan tersebut tampaknya tidak tepat sasaran. Untuk alasan apa ilmuwan harus memilih teorinya daripada salah satu alternatifnya? Ketidakpastian secara alami mengarah pada kesimpulan anti-realis bahwa agnostisisme adalah sikap rasional terhadap teori-teori tentang wilayah realitas yang tidak dapat diobservasi.

Namun benarkah data empiris selalu dapat dijelaskan dengan berbagai teori, seperti yang dikemukakan oleh kaum anti-realis? Kaum realis biasanya menjawab bahwa hal ini hanya berlaku dalam arti yang sepele. Pada prinsipnya, akan selalu ada lebih dari satu kemungkinan penjelasan atas serangkaian observasi tertentu. Namun, menurut kaum realis, tidak berarti semua kemungkinan penjelasan tersebut sama baiknya. Salah satu teori mungkin lebih sederhana dibandingkan teori lainnya, misalnya, atau mungkin lebih cocok dengan teori dari bidang sains lain, atau mungkin mendalilkan lebih sedikit penyebab tersembunyi. Begitu kita mengakui bahwa ada kriteria pilihan teori yang lebih dari sekedar kesesuaian dengan data, maka masalah underdeterminasi akan teratasi, menurut kaum realis.

Pemikiran ini didukung oleh fakta bahwa hanya ada sedikit kasus nyata mengenai underdetermination dalam sejarah ilmu pengetahuan. Jika data empiris selalu dapat dijelaskan dengan banyak teori yang berbeda, seperti yang dikemukakan oleh kaum anti-realis, tentunya kita akan menemukan para ilmuwan yang hampir selalu berselisih paham satu sama lain? Namun bukan itu yang kami temukan. Memang benar, ketika kita memeriksa catatan sejarah, situasinya hampir persis kebalikan dari apa yang kita harapkan dari argumen penentuan yang kurang. Para ilmuwan tidak dihadapkan pada banyaknya penjelasan alternatif atas data mereka, namun mereka sering kali mengalami kesulitan menemukan satu teori saja yang cukup sesuai dengan data mereka. Hal ini mendukung pandangan kaum realis yang menyatakan bahwa underdetermination hanyalah kekhawatiran seorang filsuf, dan tidak ada hubungannya dengan praktik ilmiah yang sebenarnya.

Kelompok anti-realis sepertinya tidak akan terkesan dengan tanggapan ini. Bagaimanapun juga, kekhawatiran filosofis masih merupakan kekhawatiran yang tulus, meskipun implikasi praktisnya hanya sedikit. Terlebih lagi, anggapan bahwa kriteria seperti kesederhanaan dapat digunakan untuk memutuskan teori-teori yang saling bersaing segera mengundang pertanyaan janggal tentang mengapa teori-teori yang lebih sederhana harus dianggap lebih mungkin benar; kita telah membahas masalah ini di bab terdahulu.

Kaum anti-realis biasanya mengakui bahwa penentuan yang terlalu rendah dalam praktiknya dapat dihilangkan dengan menggunakan kriteria seperti kesederhanaan untuk membedakan antara penjelasan-penjelasan yang bersaing mengenai data kami. Namun, mereka menyangkal bahwa kriteria tersebut merupakan indikator kebenaran yang dapat diandalkan. Teori-teori yang lebih sederhana mungkin lebih nyaman untuk digunakan, namun secara intrinsik teori-teori tersebut tidak lebih mungkin terjadi dibandingkan teori-teori yang kompleks. Jadi argumen underdetermination berlaku: pada prinsipnya selalu ada banyak penjelasan mengenai data empiris, kita tidak punya cara untuk mengetahui mana yang benar, sehingga pengetahuan tentang realitas yang tidak dapat diobservasi tidak dapat diperoleh.

Namun, ceritanya tidak berakhir di sini; ada kembalinya realis lebih lanjut. Kaum realis menuduh kaum anti-realis menerapkan argumen penentuan yang kurang secara selektif. Jika argumen ini diterapkan secara konsisten, argumen tersebut tidak hanya mengesampingkan pengetahuan tentang dunia yang tidak dapat diamati, namun juga pengetahuan tentang sebagian besar dunia yang dapat diamati, kata kaum realis. Untuk memahami mengapa kaum realis mengatakan hal ini, perhatikan bahwa banyak hal yang dapat diamati tidak pernah benar-benar dapat diamati. Misalnya, sebagian besar organisme hidup di planet ini tidak pernah dapat diamati oleh manusia, namun mereka dapat diamati dengan jelas. Atau bayangkan suatu peristiwa seperti meteorit besar yang menghantam bumi. Tidak ada seorang pun yang pernah menyaksikan peristiwa seperti itu, tetapi peristiwa ini dapat diamati dengan jelas. Kebetulan tidak ada manusia yang berada di tempat dan waktu yang tepat. Hanya sebagian kecil dari apa yang dapat diamati yang benar-benar dapat diamati.

Poin kuncinya adalah ini. Kaum anti-realis menyatakan bahwa wilayah realitas yang tidak dapat diamati berada di luar batas pengetahuan ilmiah. Jadi mereka memungkinkan kita memiliki pengetahuan tentang objek dan peristiwa yang dapat diamati tetapi tidak dapat diamati. Namun teori-teori tentang hal-hal yang tidak teramati tidak kalah pentingnya dengan teori-teori tentang hal-hal yang tidak teramati yang ditentukan oleh data kami. Misalnya, seorang ilmuwan mengajukan hipotesis bahwa meteorit menabrak bulan pada tahun 1987. Mereka mengutip berbagai data pengamatan untuk mendukung hipotesis ini, misalnya. bahwa gambar satelit bulan menunjukkan kawah besar yang belum pernah ada sebelum tahun 1987. Namun, data ini pada prinsipnya dapat dijelaskan dengan hipotesis alternatif, mungkin letusan gunung berapi yang menyebabkan kawah tersebut atau gempa bumi. Atau mungkin kamera yang mengambil gambar satelit rusak dan tidak ada kawah sama sekali. Jadi hipotesis ilmuwan tidak dapat ditentukan oleh data, meskipun hipotesis tersebut adalah tentang peristiwa yang dapat diamati dengan sempurna, yaitu meteorit yang menabrak bulan. Jika kita menerapkan argumen penentuan yang kurang secara konsisten, misalnya kaum realis, kita terpaksa menyimpulkan bahwa sains hanya bisa memberi kita pengetahuan tentang hal-hal yang benar-benar telah diamati.

Kesimpulan ini bukanlah kesimpulan yang diterima oleh banyak filsuf ilmu pengetahuan. Banyak hal yang disampaikan sains kepada kita berkaitan dengan hal-hal yang belum pernah diamati, seperti zaman es, dinosaurus, dan pergeseran benua. Mengatakan bahwa pengetahuan tentang hal-hal yang tidak teramati adalah mustahil berarti mengatakan bahwa sebagian besar yang dianggap sebagai pengetahuan ilmiah sebenarnya bukanlah pengetahuan sama sekali. Kaum realis ilmiah menganggap hal ini untuk menunjukkan bahwa argumen penentuan yang kurang pastilah salah. Karena sains jelas memberi kita pengetahuan tentang hal-hal yang tidak teramati, meskipun terdapat fakta bahwa teori-teori tentang hal-hal yang tidak teramati tidak dapat ditentukan oleh data yang kita miliki, maka hal yang tidak dapat ditentukan bukanlah penghalang bagi pengetahuan. Jadi fakta bahwa teori-teori kita tentang hal-hal yang tidak dapat diobservasi juga tidak dapat ditentukan tidak berarti bahwa sains tidak dapat memberi kita pengetahuan tentang hal-hal yang tidak dapat diamati.

Faktanya, kaum realis yang berpendapat seperti ini mengatakan bahwa masalah underdetermination hanyalah masalah induksi terselubung Hume. Penentuan yang kurang berarti bahwa data dapat dipertanggungjawabkan dengan teori-teori alternatif. Namun hal ini sebenarnya hanya berarti bahwa data tidak memerlukan teori: kesimpulan dari data ke teori bersifat non-deduktif. Apakah teorinya tentang entitas yang tidak dapat diobservasi, atau tentang entitas yang dapat diobservasi namun tidak dapat diobservasi, tidak ada bedanya, logika situasinya sama dalam kedua kasus tersebut. Tentu saja, menunjukkan bahwa argumen underdeterminasi hanyalah sebuah versi dari masalah induksi tidak berarti bahwa argumen tersebut dapat diabaikan. Namun hal ini berarti tidak ada kesulitan khusus mengenai entitas yang tidak dapat diobservasi. Oleh karena itu, posisi anti-realis pada akhirnya bersifat sewenang-wenang, kata kaum realis. Masalah apa pun yang ada dalam memahami bagaimana sains dapat memberi kita pengetahuan tentang atom dan elektron, juga merupakan masalah dalam memahami bagaimana sains dapat memberi kita pengetahuan tentang objek makroskopis biasa.

Bab 20

Perubahan ilmiah dan revolusi ilmiah

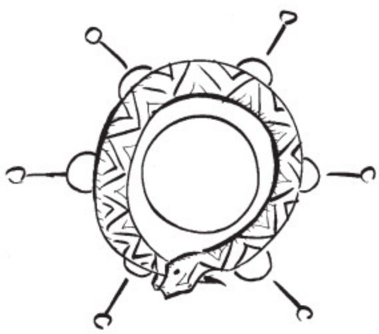
Ide-ide ilmiah berubah dengan cepat. Pilihlah hampir semua disiplin ilmu yang Anda suka, dan Anda dapat yakin bahwa teori-teori umum dalam disiplin ilmu tersebut akan berbeda dari teori lima puluh tahun yang lalu, dan sangat berbeda dari teori 100 tahun yang lalu. Dibandingkan dengan bidang upaya intelektual lainnya, sains merupakan aktivitas yang berubah dengan cepat. Sejumlah pertanyaan filosofis yang menarik berpusat pada isu perubahan ilmiah. Apakah ada pola yang jelas mengenai perubahan gagasan ilmiah seiring berjalannya waktu? Ketika para ilmuwan meninggalkan teori mereka dan memilih teori baru, bagaimana kita menjelaskan hal ini? Apakah teori-teori ilmiah yang muncul belakangan secara obyektif lebih baik daripada teori-teori ilmiah yang terdahulu?

Sebagian besar diskusi modern mengenai pertanyaan-pertanyaan ini diambil dari karya Thomas Kuhn, seorang sejarawan dan filsuf sains Amerika. Pada tahun 1963 Kuhn menerbitkan buku berjudul The Structure of Scientific Revolutions, yang mempunyai pengaruh besar terhadap filsafat ilmu pengetahuan selanjutnya. Dampak dari gagasan Kuhn juga dirasakan dalam disiplin akademis seperti sosiologi dan antropologi, dan dalam budaya intelektual pada umumnya. (Surat kabar *The Guardian* memasukkan *The Structure of Scientific Revolutions* ke dalam daftar 100 buku paling berpengaruh di abad ke-20.) Untuk memahami mengapa gagasan Kuhn menimbulkan kehebohan, kita perlu melihat sekilas keadaan filsafat ilmu pengetahuan sebelum membahasnya.

Kaum empiris logis sangat menghargai ilmu-ilmu alam, matematika, dan logika. Tahun-tahun awal abad ke-20 menyaksikan kemajuan ilmu pengetahuan yang menarik, khususnya di bidang fisika, yang sangat mengesankan mereka. Salah satu tujuan mereka adalah menjadikan filsafat itu sendiri lebih 'ilmiah', dengan harapan bahwa hal ini akan memungkinkan kemajuan serupa terjadi dalam filsafat. Apa yang mengesankan para empiris logis tentang sains adalah objektivitasnya. Berbeda dengan bidang lain, di mana banyak yang mengandalkan opini subjektif para peneliti, mereka percaya bahwa pertanyaan-pertanyaan ilmiah dapat diselesaikan dengan cara yang sepenuhnya obyektif. Teknik seperti pengujian eksperimental memungkinkan ilmuwan membandingkan teorinya secara langsung dengan fakta, sehingga menghasilkan keputusan yang terinformasi dan tidak memihak tentang keunggulan teori tersebut. Sains bagi kaum empiris logis merupakan aktivitas rasional secara paradigmatik, jalan paling pasti menuju kebenaran yang ada.

Meskipun mereka menjunjung tinggi ilmu pengetahuan, kaum empiris logis kurang menaruh perhatian pada sejarah gagasan ilmiah. Hal ini terutama terjadi karena mereka membedakan secara tajam antara apa yang mereka sebut sebagai 'konteks penemuan' dan 'konteks pembenaran'. Konteks penemuan mengacu pada proses sejarah aktual yang dengannya seorang ilmuwan sampai pada suatu teori tertentu. Konteks pembenaran mengacu pada cara ilmuwan mencoba untuk membenarkan teori setelah mereka memilikinya yang mencakup pengujian teori, mencari bukti yang relevan, dan membandingkannya dengan teori saingan. Kaum empiris logis percaya bahwa yang pertama adalah proses subjektif dan psikologis yang tidak diatur oleh aturan yang tepat, sedangkan yang terakhir adalah masalah logika yang obyektif. Para filsuf ilmu pengetahuan harus membatasi diri mereka pada mempelajari ilmu yang terakhir saja, kata mereka.

Sebuah contoh dapat membantu mengilustrasikan gagasan ini. Pada tahun 1865 ahli kimia Jerman Kekulé menemukan bahwa molekul benzena memiliki struktur heksagonal. Rupanya, dia menemukan hipotesis tentang struktur heksagonal setelah mimpi di mana dia melihat seekor ular mencoba menggigit ekornya sendiri (lihat Gambar 20.1).



Gambar 20.1: Kekulé sampai pada hipotesis struktur heksagonal benzena setelah bermimpi melihat seekor ular mencoba menggigit ekornya sendiri [2].

Tentu saja Kekulé kemudian harus menguji hipotesisnya secara ilmiah sebelum dapat diterima. Ini adalah contoh ekstrem, namun ini menunjukkan bahwa hipotesis ilmiah dapat dicapai dengan cara yang paling tidak terduga. Hipotesis ini tidak selalu merupakan hasil pemikiran yang cermat dan sistematis. Kaum empiris logis berpendapat bahwa tidak ada bedanya bagaimana suatu hipotesis diajukan pada awalnya. Yang penting adalah bagaimana ilmu itu diuji ketika sudah ada, karena inilah yang menjadikan sains sebagai aktivitas rasional.

Tema lain dalam filsafat ilmu empiris logis adalah perbedaan antara teori dan fakta observasi; Hal ini terkait dengan perbedaan yang dapat diobservasi/tidak dapat diamati yang dibahas pada bab sebelumya. Para penganut empiris logis percaya bahwa perselisihan antara teori-teori ilmiah yang bersaing dapat diselesaikan dengan cara yang sepenuhnya obyektif dengan membandingkan teori-teori tersebut secara langsung dengan fakta-fakta pengamatan yang 'netral', yang dapat diterima oleh semua pihak. Bagaimana sebenarnya kumpulan fakta netral ini harus dikarakterisasi merupakan bahan perdebatan di kalangan empiris logis, namun mereka bersikeras bahwa fakta tersebut memang ada. Tanpa pembedaan yang jelas antara teori dan fakta pengamatan, rasionalitas dan objektivitas sains akan terganggu, dan mereka yakin bahwa sains itu rasional dan objektif.

20.1 Teori revolusi ilmiah Kuhn

Kuhn adalah seorang sejarawan sains melalui pelatihan dan sangat yakin bahwa para filsuf harus banyak belajar dari mempelajari sejarah sains. Kurangnya perhatian terhadap sejarah ilmu pengetahuan telah menyebabkan para empiris logis membentuk gambaran yang tidak akurat dan naif tentang usaha ilmiah, tegasnya. Seperti yang ditunjukkan oleh judul bukunya, Kuhn khususnya tertarik pada revolusi ilmiah, periode pergolakan besar ketika ide-ide ilmiah yang ada digantikan dengan ide-ide baru yang radikal. Contohnya termasuk revolusi Copernicus di bidang astronomi, revolusi Einstein di bidang fisika, dan revolusi Darwin di bidang biologi. Masing-masing revolusi ini menyebabkan perubahan mendasar dalam pandangan dunia ilmiah dan menggulingkan sekumpulan gagasan yang sudah ada oleh kumpulan gagasan yang sama sekali berbeda.

Tentu saja, revolusi ilmu pengetahuan relatif jarang terjadi ketika ilmu pengetahuan tertentu tidak berada dalam keadaan revolusi. Kunh menciptakan istilah 'sains normal' untuk menggambarkan aktivitas sehari-hari yang dilakukan para ilmuwan ketika disiplin ilmu mereka tidak mengalami perubahan revolusioner. Inti dari penjelasan Kuhn tentang sains normal adalah konsep paradigma. Sebuah paradigma terdiri dari dua komponen utama: pertama, seperangkat asumsi teoritis mendasar yang diterima oleh semua anggota komunitas ilmiah; kedua, serangkaian 'contoh' atau masalah-masalah ilmiah tertentu yang telah dipecahkan melalui asumsi-asumsi teoretis tersebut, dan yang muncul dalam buku-buku teks disiplin ilmu yang bersangkutan. Namun paradigma lebih dari sekedar teori (meskipun Kuhn terkadang menggunakan kata-kata tersebut secara bergantian). Ketika para ilmuwan mempunyai paradigma yang sama, mereka tidak hanya sepakat pada proposisi ilmiah tertentu, mereka juga sepakat tentang bagaimana penelitian masa depan di bidangnya harus dilakukan, masalah apa yang perlu diatasi, metode apa yang tepat untuk memecahkan masalah tersebut, dan sebagainya. seperti apa solusi yang dapat diterima untuk mengatasi permasalahan tersebut. Singkatnya, paradigma adalah keseluruhan pandangan ilmiah, sebuah konstelasi asumsi, keyakinan, dan nilai-nilai bersama yang menyatukan komunitas ilmiah dan memungkinkan terjadinya sains normal.

Apa sebenarnya yang termasuk dalam sains normal? Menurut Kuhn, hal ini pada dasarnya adalah masalah pemecahan teka-teki. Betapapun suksesnya sebuah paradigma, ia akan selalu menghadapi fenomena permasalahan tertentu yang tidak dapat diakomodasi dengan mudah, atau ketidaksesuaian antara prediksi teori dan fakta eksperimental. Tugas ilmuwan normal adalah mencoba menghilangkan teka-teki kecil ini sambil membuat perubahan paradigma sesedikit mungkin. Jadi sains normal adalah aktivitas konservatif yang para praktisinya tidak berusaha membuat penemuan-penemuan yang menggemparkan, namun hanya mengembangkan dan memperluas paradigma yang ada. Dalam kata-kata Kuhn, 'ilmu pengetahuan normal tidak bertujuan pada fakta atau teori baru, dan ketika berhasil, tidak akan menemukan hal baru. Yang terpenting, Kuhn menekankan bahwa ilmuwan normal tidak mencoba menguji paradigma tersebut. Sebaliknya, mereka menerima paradigma tersebut tanpa ragu dan melakukan penelitian dalam batasan yang ditetapkan. Jika ilmuwan biasa mendapatkan hasil eksperimen yang bertentangan dengan paradigma, mereka biasanya akan berasumsi bahwa teknik eksperimennya salah, bukan paradigmanya yang salah.

Biasanya, periode ilmu pengetahuan normal berlangsung selama beberapa dekade, bahkan terkadang berabad-abad. Selama masa ini para ilmuwan secara bertahap mengartikulasikan paradigma tersebut, menyempurnakannya, mengisi rinciannya, dan memperluas cakupan penerapannya. Namun seiring berjalannya waktu, anomali ditemukan fenomena yang tidak dapat diselaraskan dengan paradigma yang ada, betapapun kerasnya para ilmuwan berusaha. Jika anomalinya sedikit, maka anomali tersebut cenderung diabaikan begitu saja. Namun seiring dengan bertambahnya anomali, rasa krisis yang semakin besar menyelimuti komunitas ilmiah. Kepercayaan terhadap paradigma yang ada kini runtuh, dan proses sains yang normal pun terhenti. Hal ini menandai dimulainya periode 'ilmu pengetahuan revolusioner' sebagaimana Kuhn menyebutnya. Selama periode seperti itu, ide-ide ilmiah mendasar mulai diperebutkan. Berbagai alternatif terhadap paradigma lama diajukan, dan akhirnya terbentuklah paradigma baru. Biasanya diperlukan satu generasi sebelum semua anggota komunitas ilmiah dapat menerima paradigma baru, suatu peristiwa yang menandai selesainya revolusi ilmiah. Inti dari revolusi ilmu pengetahuan adalah peralihan dari paradigma lama ke paradigma baru.

Karakterisasi Kuhn tentang sejarah ilmu pengetahuan sebagai periode panjang ilmu pengetahuan normal yang diselingi oleh revolusi ilmu pengetahuan yang sesekali terjadi menarik perhatian banyak sarjana. Sejumlah contoh dari sejarah ilmu pengetahuan cukup sesuai dengan uraian Kuhn. Dalam transisi dari astronomi Ptolemeus ke Copernicus, misalnya, atau dari fisika Newton ke Einstein, banyak fitur yang dijelaskan Kuhn hadir. Para astronom Ptolemeus memang memiliki paradigma yang sama, berdasarkan teori bahwa bumi tidak bergerak di pusat alam semesta, yang menjadi latar belakang penyelidikan mereka yang tidak perlu dipertanyakan lagi. Hal serupa juga terjadi pada fisikawan Newton pada abad ke-18 dan ke-19, yang paradigmanya didasarkan pada teori mekanika dan gravitasi Newton. Dan dalam kedua kasus tersebut, penjelasan Kuhn tentang bagaimana paradigma lama digantikan oleh paradigma baru berlaku cukup akurat. Ada juga revolusi ilmiah yang tidak sesuai dengan model Kuhnian, misalnya revolusi molekuler dalam biologi pada tahun 1950an dan 1960an. Namun demikian, kebanyakan orang setuju bahwa uraian Kuhn tentang sejarah sains mengandung banyak nilai.

Mengapa gagasan Kuhn menimbulkan badai seperti itu? Selain klaim deskriptifnya tentang sejarah sains, Kuhn mengajukan beberapa tesis filosofis yang kontroversial. Biasanya, kita berasumsi bahwa ketika para ilmuwan menukar teori mereka yang sudah ada dengan teori baru, mereka melakukannya berdasarkan bukti. Namun, Kuhn berpendapat bahwa mengadopsi paradigma baru memerlukan tindakan keyakinan tertentu dari pihak ilmuwan. Ia mengakui bahwa seorang ilmuwan dapat mempunyai alasan yang baik untuk meninggalkan paradigma lama dan beralih ke paradigma baru, namun ia menegaskan bahwa alasan saja tidak akan pernah bisa memaksa perubahan paradigma secara rasional. 'Peralihan kesetiaan dari satu paradigma ke paradigma lain', tulis Kuhn, 'merupakan pengalaman konversi yang tidak bisa dipaksakan.' Dan dalam menjelaskan mengapa sebuah paradigma baru dengan cepat mendapat penerimaan dalam komunitas ilmiah, Kuhn menekankan adanya tekanan dari para ilmuwan terhadap satu sama lain. . Jika suatu paradigma tertentu mempunyai pendukung yang sangat kuat, maka paradigma tersebut kemungkinan besar akan diterima secara luas.

Banyak kritikus Kuhn yang terkejut dengan klaim ini. Jika pergeseran paradigma berhasil seperti yang dikatakan Kuhn, sulit untuk melihat bagaimana sains dapat dianggap sebagai aktivitas rasional. Tentunya para ilmuwan dimaksudkan untuk mendasarkan keyakinan mereka pada bukti dan alasan, bukan pada keyakinan dan tekanan dari teman sejawat? Dihadapkan pada dua paradigma yang saling bersaing, tentunya para ilmuwan harus membuat perbandingan obyektif terhadap kedua paradigma tersebut untuk menentukan paradigma mana yang memiliki lebih banyak bukti yang mendukungnya. Menjalani 'pengalaman konversi', atau membiarkan diri dibujuk oleh rekan ilmuwan yang paling kuat, sepertinya bukan cara yang rasional untuk berperilaku. Seorang kritikus menulis bahwa menurut Kuhn, pilihan teori dalam sains adalah 'masalahnya' psikologi massa.

Kuhn juga membuat beberapa klaim kontroversial tentang arah perubahan ilmiah secara keseluruhan. Menurut pandangan luas, ilmu pengetahuan berkembang menuju kebenaran secara linier, seiring dengan digantikannya gagasan-gagasan lama yang salah dengan gagasan-gagasan baru yang benar. Oleh karena itu, teori-teori yang lebih baru secara obyektif lebih baik daripada teori-teori sebelumnya, sehingga pengetahuan ilmiah terakumulasi seiring berjalannya waktu. Konsepsi sains yang linier dan kumulatif ini populer di kalangan orang awam dan ilmuwan, namun Kuhn berargumentasi bahwa konsep tersebut tidak akurat secara historis dan naif secara filosofis.

Misalnya, ia mencatat bahwa teori relativitas Einstein dalam beberapa hal lebih mirip dengan teori Aristotelian daripada fisika Newton sehingga sejarah mekanika bukan sekadar perkembangan linier dari salah ke benar. Selain itu, Kuhn mempertanyakan apakah konsep kebenaran objektif benar-benar masuk akal. Gagasan bahwa ada serangkaian fakta yang tetap tentang dunia, terlepas dari paradigma tertentu, memiliki koherensi yang meragukan, ia yakin. Kuhn menyarankan alternatif yang radikal: fakta-fakta tentang dunia bersifat relatif paradigma, dan dengan demikian berubah ketika paradigma berubah. Jika anggapan ini benar, maka tidak masuk akal untuk mempertanyakan apakah suatu teori tertentu sesuai dengan fakta 'sebagaimana adanya', dan juga tidak masuk akal untuk mempertanyakan apakah teori tersebut benar secara obyektif. Hal ini menyebabkan Kuhn mendukung bentuk radikal anti-realisme terhadap sains.

20.2 Ketidaksetaraan dan muatan teori data

Kuhn memiliki dua argumen filosofis utama untuk klaim ini. Pertama, ia berargumentasi bahwa paradigma-paradigma yang bersaing biasanya 'tidak dapat dibandingkan' satu sama lain. Untuk memahami gagasan ini, ingatlah bahwa bagi Kuhn, paradigma seorang ilmuwan menentukan keseluruhan pandangan dunia mereka. Jadi ketika paradigma yang ada digantikan dengan paradigma baru dalam revolusi ilmiah, para ilmuwan harus meninggalkan seluruh kerangka konseptual yang mereka gunakan untuk memahami dunia. Bahkan, Kuhn bahkan mengklaim, secara metaforis, bahwa sebelum dan sesudah perubahan paradigma, para ilmuwan 'hidup di dunia yang berbeda'.

Ketidaksetaraan (*incommensurability*) adalah gagasan bahwa dua paradigma mungkin sangat berbeda sehingga tidak mungkin ada perbandingan langsung antara keduanya dan tidak ada bahasa umum yang bisa digunakan untuk menerjemahkan keduanya. Akibatnya, para pendukung paradigma yang berbeda 'gagal melakukan kontak yang utuh dengan sudut pandang masing-masing', klaim Kuhn.

Ini adalah ide yang menarik, meski agak kabur. Doktrin ketidaksetaraan berasal dari keyakinan Kuhn bahwa konsep-konsep ilmiah memperoleh maknanya dari teori di mana konsep-konsep tersebut berperan. Jadi untuk memahami konsep massa Newton, misalnya, kita perlu memahami keseluruhan teori Newton bahwa konsep tidak dapat dijelaskan secara independen dari teori yang mendasarinya. Ide yang terkadang disebut 'holisme' ini ditanggapi dengan sangat serius oleh Kuhn. Dia berpendapat bahwa istilah 'massa' sebenarnya memiliki arti yang berbeda bagi Newton dan Einstein, karena teori yang mendasari istilah tersebut sangat berbeda. Hal ini menyiratkan bahwa Newton dan Einstein sebenarnya berbicara dalam bahasa yang berbeda, yang jelas mempersulit upaya untuk membandingkan teori mereka. Jika seorang fisikawan Newton dan Einstein mencoba melakukan diskusi rasional, mereka akhirnya akan saling berdiskusi.

Kuhn menggunakan tesis ketidaksetaraan untuk membantah pandangan bahwa pergeseran paradigma sepenuhnya bersifat 'objektif', dan untuk memperkuat gambaran non-kumulatifnya tentang sejarah sains. Filsafat ilmu pengetahuan tradisional tidak melihat adanya kesulitan besar dalam memilih teori-teori yang bersaing, seseorang cukup membuat perbandingan obyektif terhadap teori-teori tersebut berdasarkan bukti-bukti yang tersedia. Namun hal ini jelas mengandaikan adanya bahasa yang sama di mana kedua teori tersebut dapat diungkapkan. Jika Kuhn benar bahwa para pendukung paradigma lama dan paradigma baru saling berbicara satu sama lain, maka tidak ada penjelasan sederhana mengenai pilihan paradigma yang benar. Ketidaksetaraan juga merupakan masalah bagi gambaran linier tradisional sejarah ilmiah. Jika paradigma lama dan paradigma baru tidak dapat dibandingkan, maka tidak tepat jika menganggap revolusi ilmiah sebagai pengganti gagasan yang 'salah' dengan gagasan yang 'benar'. Karena menyebut satu gagasan benar dan gagasan lainnya salah menyiratkan adanya kerangka umum untuk mengevaluasi gagasan tersebut, dan hal ini justru dibantah oleh Kuhn. Ketidaksetaraan menyiratkan bahwa perubahan ilmiah, bukan merupakan kemajuan langsung menuju kebenaran, namun dalam arti tertentu tidak memiliki arah: paradigma-paradigma selanjutnya tidak lebih baik dari paradigma-paradigma sebelumnya, hanya saja berbeda.

Tidak banyak filsuf yang yakin dengan tesis Kuhn yang tidak dapat dibandingkan. Salah satu masalahnya adalah Kuhn juga menyatakan bahwa paradigma lama dan paradigma baru tidak sejalan. Klaim ini masuk akal, karena jika paradigma lama dan paradigma baru tidak bertentangan, maka tidak perlu ada pilihan di antara keduanya. Dalam banyak kasus, ketidaksesuaian tersebut terlihat jelas. Pernyataan Ptolemeus bahwa planet-planet berputar mengelilingi bumi jelas tidak sesuai dengan klaim Copernicus bahwa planet-planet berputar mengelilingi matahari. Namun seperti yang dengan cepat ditunjukkan oleh para pengkritik Kuhn, jika ada dua hal yang tidak dapat dibandingkan maka keduanya tidak dapat bertentangan. Untuk mengetahui alasannya, pertimbangkan proposisi bahwa massa suatu benda bergantung pada kecepatannya. Teori Einstein mengatakan proposisi ini benar, sedangkan teori Newton mengatakan proposisi ini salah. Namun jika doktrin ketidakterbandingan benar, maka sebenarnya tidak ada perselisihan antara Newton dan Einstein di sini, karena proposisi tersebut memiliki arti yang berbeda bagi masing-masingnya. Hanya jika proposisi tersebut memiliki arti yang sama dalam kedua teori barulah terdapat konflik yang nyata di antara keduanya. Karena semua orang (termasuk Kuhn) setuju bahwa teori Einstein dan Newton memang bertentangan, ini adalah alasan kuat untuk mencurigai tesis ketidaksetaraan tersebut.

Menanggapi keberatan ini, Kuhn sedikit melunakkan tesis ketidaksetaraannya. Ia berpendapat bahwa penerjemahan parsial antar paradigma dapat dicapai, sehingga para pendukung paradigma lama dan paradigma baru dapat berkomunikasi sampai batas tertentu: mereka tidak selalu saling membicarakan satu sama lain. Namun Kuhn terus bersikukuh bahwa pemilihan paradigma yang obyektif sepenuhnya adalah hal yang mustahil. Karena selain ketidaksetaraan yang disebabkan oleh kurangnya bahasa yang sama, ada juga yang disebutnya 'standar yang tidak dapat dibandingkan'. Ini adalah gagasan bahwa para pendukung paradigma yang berbeda mungkin tidak setuju mengenai ciri-ciri apa yang harus dimiliki oleh sebuah paradigma yang baik, permasalahan apa yang harus dapat dipecahkan, dan solusi yang dapat diterima untuk permasalahan tersebut. Jadi kalaupun mereka bisa berkomunikasi secara efektif, mereka tidak akan bisa mencapai kesepakatan tentang paradigma siapa yang lebih unggul. Dalam kata-kata Kuhn, 'setiap paradigma akan terlihat memenuhi kriteria yang ditentukannya sendiri dan tidak memenuhi beberapa kriteria yang ditentukan oleh lawannya'.

Argumen filosofis Kuhn yang kedua didasarkan pada gagasan yang dikenal sebagai 'keterikatan teori' pada data. Untuk memahami gagasan ini, misalkan Anda adalah seorang ilmuwan yang mencoba memilih di antara dua teori yang saling bertentangan. Hal yang jelas harus dilakukan adalah mencari sepotong data yang akan menentukan pilihan di antara keduanya, atau melakukan 'eksperimen penting' yang akan menyelesaikan masalah tersebut. Namun hal ini hanya mungkin terjadi jika terdapat data yang independen terhadap teori-teori tersebut, dalam arti bahwa seorang ilmuwan dapat menerima data mana pun dari kedua teori yang mereka yakini. Seperti yang telah kita lihat, para penganut empirisme logis percaya akan keberadaan data yang bersifat netral teori, yang dapat memberikan pengadilan banding yang obyektif di antara teori-teori yang bersaing. Namun Kuhn berpendapat bahwa cita-cita netralitas teori hanyalah ilusi, data selalu terkontaminasi oleh asumsi teoretis. Tidak mungkin mengisolasi sekumpulan data 'murni' yang dapat diterima oleh semua ilmuwan, terlepas dari keyakinan teoretis mereka, ujarnya.

Data yang sarat teori mempunyai dua konsekuensi penting bagi Kuhn. Pertama, hal ini berarti bahwa perselisihan antar paradigma yang bersaing tidak dapat diselesaikan hanya dengan mengacu pada 'data' atau 'fakta', karena apa yang dianggap oleh ilmuwan sebagai data atau fakta, akan bergantung pada paradigma mana yang mereka terima. Oleh karena itu, pilihan obyektif yang sempurna antara dua paradigma adalah mustahil: tidak ada sudut pandang netral untuk menilai klaim masing-masing paradigma. Kedua, gagasan tentang kebenaran obyektif dipertanyakan. Agar benar secara obyektif, suatu teori harus sesuai dengan fakta, namun gagasan tentang korespondensi semacam itu tidak masuk akal jika fakta itu sendiri dipengaruhi oleh teori kita. Inilah sebabnya Kuhn tergiring pada pandangan radikal bahwa kebenaran itu sendiri bersifat relatif terhadap suatu paradigma.

Mengapa Kuhn berpendapat bahwa semua data sarat dengan teori? Tulisan-tulisannya tidak sepenuhnya jelas mengenai hal ini, tetapi setidaknya ada dua argumen yang dapat dilihat. Yang pertama adalah gagasan bahwa persepsi sangat ditentukan oleh latar belakang keyakinan. Apa yang kita lihat sebagian bergantung pada apa yang kita yakini. Jadi seorang ilmuwan terlatih yang melihat sebuah peralatan canggih di laboratorium akan melihat sesuatu yang berbeda dari apa yang dilihat oleh orang awam, karena ilmuwan tersebut jelas mempunyai banyak keyakinan tentang peralatan yang tidak dimiliki oleh orang awam. Ada sejumlah eksperimen psikologis yang tampaknya menunjukkan bahwa persepsi sensitif terhadap latar belakang keyakinan, meskipun interpretasi yang benar atas eksperimen ini masih menjadi masalah yang kontroversial. Kedua, laporan eksperimen dan observasi para ilmuwan sering kali ditulis dalam bahasa yang sangat teoretis. Misalnya, seorang ilmuwan mungkin melaporkan hasil percobaannya dengan mengatakan 'Arus listrik mengalir melalui batang tembaga'. Namun laporan data ini jelas sarat dengan banyak teori. Hal ini tidak akan diterima oleh ilmuwan yang tidak memiliki keyakinan standar tentang arus listrik, sehingga jelas tidak netral secara teori.

Para filsuf berbeda pendapat mengenai manfaat argumen-argumen ini. Di satu sisi, banyak yang setuju dengan Kuhn bahwa netralitas teori murni tidak mungkin tercapai. Cita-cita empirisis logis mengenai kelompok pernyataan data yang sepenuhnya bebas dari komitmen teoretis ditolak oleh sebagian besar filsuf kontemporer—salah satunya karena belum ada seorang pun yang berhasil mengatakan seperti apa pernyataan tersebut. Namun hal ini tidak perlu mengkompromikan objektivitas perubahan paradigma secara keseluruhan. Misalkan seorang astronom Ptolemeus dan Copernicus sedang berdebat tentang teori siapa yang lebih unggul. Agar mereka dapat berdebat secara bermakna, diperlukan beberapa data astronomi yang dapat mereka sepakati. Namun mengapa hal ini harus menjadi masalah? Tentunya mereka bisa sepakat mengenai posisi relatif bumi dan bulan pada malam-malam yang berurutan, misalnya, atau waktu terbitnya matahari? Tentu saja, jika Copernicus bersikeras mendeskripsikan data dengan cara yang mengasumsikan kebenaran teori heliosentris, maka Ptolemeus akan keberatan. Tapi tidak ada alasan mengapa Copernicus harus melakukan itu. Pernyataan seperti 'pada tanggal 14 Mei matahari terbit pukul 7.10 pagi' dapat disetujui oleh seorang ilmuwan apakah mereka mempercayai teori geosentris atau heliosentris. Pernyataan-pernyataan tersebut cukup netral secara teori sehingga dapat diterima oleh para pendukung kedua paradigma tersebut, dan itulah yang penting.

Bagaimana dengan penolakan Kuhn terhadap kebenaran obyektif? Hanya sedikit filsuf yang mengikuti jejak Kuhn di sini. Salah satu masalahnya adalah, seperti banyak orang yang menolak konsep kebenaran obyektif, Kuhn gagal mengartikulasikan alternatif yang layak. Pandangan radikal bahwa kebenaran bersifat relatif paradigma pada akhirnya sulit untuk dipahami. Seperti semua doktrin relativis, doktrin ini menghadapi masalah kritis. Pertimbangkan pertanyaannya: apakah pernyataan bahwa kebenaran bersifat relatif-paradigma itu sendiri secara obyektif benar atau tidak? Jika pendukung relativisme menjawab 'ya', maka mereka mengakui bahwa konsep kebenaran obyektif memang masuk akal dan dengan demikian bertentangan dengan konsep mereka. Jika mereka menjawab 'tidak', maka mereka tidak punya alasan untuk berdebat dengan orang yang tidak sependapat dan mengatakan bahwa, menurut pendapat mereka, kebenaran tidak bersifat paradigmatik-relatif. Tidak semua filsuf menganggap argumen ini fatal bagi relativisme, namun argumen ini menyatakan bahwa mengabaikan konsep kebenaran objektif lebih mudah diucapkan daripada dilakukan. Kuhn tentu saja mengajukan beberapa keberatan terhadap pandangan tradisional yang menyatakan bahwa sejarah ilmu pengetahuan hanyalah sebuah kemajuan linier menuju kebenaran, namun alternatif relativis yang ia tawarkan sebagai gantinya tidak mudah diterima.

20.3 Kuhn dan rasionalitas ilmu pengetahuan

Struktur Revolusi Ilmiah ditulis dengan nada radikal. Kuhn memberi kesan ingin mengganti gagasan filosofis standar tentang perubahan teori dalam sains dengan konsepsi yang berbeda secara radikal. Doktrinnya tentang pergeseran paradigma, kesepadanan, dan saratnya teori terhadap data tampaknya sepenuhnya bertentangan dengan pandangan empiris logis tentang sains sebagai sesuatu yang rasional, obyektif, dan kumulatif. Dengan beberapa pembenaran, para pembaca Kuhn berpendapat bahwa sains adalah aktivitas yang sebagian besar tidak rasional, ditandai dengan kepatuhan dogmatis terhadap suatu paradigma pada periode normal, dan 'pengalaman pertobatan' yang tiba-tiba pada periode revolusioner.

Namun Kuhn sendiri tidak senang dengan interpretasi karyanya ini. Dalam sebuah Postscript pada edisi kedua Structure yang diterbitkan pada tahun 1970, dan dalam tulisan-tulisan berikutnya, Kuhn cukup memoderasi nadanya, menjauhkan dirinya dari pandangan-pandangan yang lebih radikal yang tampaknya ia dukung. Ia tidak bermaksud untuk meragukan rasionalitas ilmu pengetahuan, menurutnya, melainkan menawarkan gambaran yang lebih realistis dan akurat secara historis tentang bagaimana ilmu pengetahuan sebenarnya berkembang. Dengan mengabaikan sejarah ilmu pengetahuan, kaum empiris logis telah digiring pada penjelasan sederhana tentang cara kerja ilmu pengetahuan, dan tujuan Kuhn adalah memberikan perbaikan. Ia tidak berusaha menunjukkan bahwa ilmu pengetahuan itu tidak rasional, melainkan untuk memberikan penjelasan yang lebih baik tentang apa saja yang tercakup dalam rasionalitas ilmiah.

Beberapa komentator menganggap Postscript Kuhn sebagai perubahan, kemunduran dari posisi aslinya, dan bukan klarifikasi terhadapnya. Apakah ini merupakan penilaian yang adil bukanlah pertanyaan yang akan kami pertimbangkan di sini. Namun Postscript memang mengungkap satu isu penting. Dalam membantah tuduhan bahwa ia menggambarkan sains sebagai sesuatu yang tidak rasional, Kuhn membuat klaim terkenal bahwa 'tidak ada algoritma' untuk pemilihan teori dalam sains. Apa artinya ini? Algoritma adalah seperangkat aturan yang memungkinkan kita menghitung jawaban atas pertanyaan tertentu. Misalnya, algoritme perkalian adalah seperangkat aturan yang, jika diterapkan pada dua bilangan apa pun, akan memberi tahu kita hasil perkaliannya. Jadi algoritma untuk pemilihan teori adalah seperangkat aturan yang, ketika diterapkan pada dua teori yang bersaing, akan memberi tahu kita teori mana yang harus dipilih. Banyak filosofi tradisional yang berkomitmen, secara implisit atau eksplisit, terhadap keberadaan algoritma semacam itu. Para empiris logis sering menulis seolah-olah, dengan adanya sekumpulan data dan dua teori yang bersaing, 'prinsip-prinsip metode ilmiah' dapat digunakan untuk menentukan teori mana yang lebih unggul. Gagasan ini tersirat dalam keyakinan mereka bahwa meskipun penemuan adalah masalah psikologi, pembenaran adalah masalah logika.

Desakan Kuhn bahwa tidak ada algoritma untuk memilih teori dalam sains mungkin benar. Tentu saja, belum ada seorang pun yang berhasil menghasilkan algoritma seperti itu. Banyak filsuf dan ilmuwan telah memberikan saran yang masuk akal tentang apa yang harus dicari dalam kesederhanaan teori, luasnya cakupan, kesesuaian dengan data, dan sebagainya. Namun saran-saran ini tidak memberikan algoritma yang benar, seperti yang diketahui Kuhn dengan baik. Di satu sisi, mungkin ada trade-off: teori A mungkin lebih sederhana daripada teori B, namun B mungkin lebih cocok dengan data. Jadi unsur penilaian subjektif, atau akal sehat ilmiah, sering kali diperlukan untuk memutuskan teori-teori yang bersaing. Dilihat dari sudut pandang ini, saran Kuhn bahwa penerapan paradigma baru melibatkan tindakan keyakinan tertentu tampaknya tidak terlalu radikal, dan juga penekanannya pada persuasif para pendukung paradigma dalam menentukan peluangnya untuk memenangkan hati komunitas ilmiah.

Gagasan 'tanpa algoritma' mendukung pandangan bahwa penjelasan Kuhn tentang pergeseran paradigma bukanlah sebuah serangan terhadap rasionalitas sains. Karena kita bisa membaca Kuhn sebagai orang yang menolak konsepsi rasionalitas tertentu. Para empiris logis percaya, pada dasarnya, bahwa harus ada algoritma untuk pilihan teori karena perubahan ilmiah menjadi tidak rasional. Ini bukanlah pandangan yang gila: banyak kasus paradigma tindakan rasional yang melibatkan aturan atau algoritma. Misalnya, jika Anda ingin memutuskan apakah suatu barang lebih murah di Inggris atau Jepang, Anda menerapkan algoritme untuk mengubah pound menjadi yen; cara lain apa pun untuk mencoba memutuskan masalah ini adalah tidak rasional. Demikian pula, jika seorang ilmuwan mencoba untuk memutuskan antara dua teori yang bersaing, maka kita tergoda untuk berpikir bahwa satu-satunya cara rasional untuk melanjutkannya adalah dengan menerapkan algoritma untuk pemilihan teori. Jadi jika ternyata tidak ada algoritma seperti itu, seperti yang mungkin terjadi, kita punya dua pilihan. Kita dapat menyimpulkan bahwa perubahan ilmiah tidak rasional atau bahwa konsepsi rasionalitas terlalu menuntut. Dalam tulisannya selanjutnya, Kuhn mendukung pilihan terakhir. Pesan moral dari kisahnya bukanlah bahwa perubahan paradigma itu tidak rasional, namun diperlukan konsep rasionalitas yang lebih santai dan pragmatis untuk memahami perubahan tersebut.

20.4 Warisan Kuhn

Meskipun bersifat kontroversial, gagasan Kuhn mengubah filsafat ilmu pengetahuan. Hal ini sebagian karena Kuhn mempertanyakan banyak asumsi yang selama ini dianggap remeh, sehingga memaksa para filsuf untuk menghadapinya, dan sebagian lagi karena ia menarik perhatian pada serangkaian isu yang diabaikan oleh filsafat ilmu pengetahuan tradisional. Setelah Kuhn, gagasan bahwa para filsuf bisa mengabaikan sejarah ilmu pengetahuan tampak semakin tidak dapat dipertahankan, begitu pula gagasan tentang dikotomi tajam antara konteks penemuan dan pembenaran. Para filsuf ilmu pengetahuan masa kini memberikan perhatian yang jauh lebih besar terhadap perkembangan sejarah ilmu pengetahuan dibandingkan nenek moyang mereka sebelum Kuhnian. Bahkan mereka yang tidak bersimpati terhadap gagasan Kuhn yang lebih radikal akan menerima bahwa dalam hal ini pengaruhnya positif.

Dampak penting lainnya dari karya Kuhn adalah memusatkan perhatian pada konteks sosial di mana sains terjadi, sesuatu yang diabaikan oleh filsafat sains tradisional. Sains bagi Kuhn pada dasarnya adalah aktivitas sosial: keberadaan komunitas ilmiah, yang diikat oleh kesetiaan pada paradigma bersama, merupakan prasyarat untuk praktik sains normal. Kuhn juga memberikan perhatian besar pada bagaimana sains diajarkan di sekolah dan universitas, bagaimana ilmuwan muda dimasukkan ke dalam komunitas ilmiah, bagaimana hasil-hasil ilmiah dipublikasikan, dan hal-hal 'sosiologis' lainnya. Tidak mengherankan jika gagasan Kuhn berpengaruh di kalangan sosiolog sains. Secara khusus, sebuah gerakan yang dikenal sebagai 'program kuat' dalam sosiologi ilmu pengetahuan, yang muncul di Inggris pada tahun 1970an dan 1980an, berhutang banyak pada Kuhn.

Program yang kuat ini didasarkan pada gagasan bahwa sains harus dipandang sebagai produk masyarakat di mana sains dipraktikkan. Para sosiolog program yang kuat memahami gagasan ini secara harfiah: mereka berpendapat bahwa keyakinan para ilmuwan sebagian besar ditentukan oleh sosial. Jadi untuk menjelaskan mengapa seorang ilmuwan memercayai teori tertentu, misalnya, mereka akan mengutip aspek latar belakang sosial dan budaya ilmuwan tersebut. Alasan ilmuwan sendiri untuk mempercayai teori tersebut tidak pernah cukup memberikan penjelasan, tegas mereka. Program yang kuat ini meminjam sejumlah tema dari Kuhn, termasuk banyaknya teori dalam data, pandangan bahwa sains pada dasarnya adalah aktivitas sosial, dan gagasan bahwa tidak ada algoritma obyektif untuk pemilihan teori. Namun sosiolog program yang kuat lebih radikal dibandingkan Kuhn dan kurang berhati-hati. Mereka secara terbuka menolak gagasan tentang kebenaran dan rasionalitas, yang mereka anggap mencurigakan secara ideologis, dan memandang filsafat ilmu pengetahuan tradisional dengan penuh kecurigaan. Hal ini menyebabkan sejumlah ketegangan antara filsuf dan sosiolog sains, yang berlanjut hingga hari ini.

Lebih jauh lagi, karya Kuhn juga berperan dalam kebangkitan konstruksionisme sosial di bidang humaniora dan ilmu sosial. Konstruksionisme sosial adalah gagasan bahwa fenomena tertentu, misalnya. kategori rasial, adalah 'konstruksi sosial', yang bertentangan dengan keberadaan obyektif yang tidak bergantung pada pikiran. Mengingat penekanan Kuhn pada konteks sosial ilmu pengetahuan dan penolakannya terhadap gagasan bahwa teori-teori ilmiah 'sesuai dengan fakta objektif', mudah untuk melihat mengapa ia dapat dikatakan bahwa ilmu pengetahuan adalah sebuah 'konstruksi sosial'. Namun, ada ironi tersendiri di sini. Para pendukung gagasan bahwa ilmu pengetahuan adalah sebuah 'konstruksi sosial' biasanya memiliki sikap anti-ilmiah, sering kali menolak otoritas yang diberikan kepada ilmu pengetahuan dalam masyarakat modern. Namun Kuhn sendiri sangat pro-sains. Seperti halnya para empiris logis, ia menganggap sains modern sebagai pencapaian intelektual yang sangat mengesankan. Doktrin-doktrinnya mengenai pergeseran paradigma, ilmu pengetahuan yang normal dan revolusioner, ketidaksetaraan, dan sarat teori tidak dimaksudkan untuk meremehkan atau mengkritik upaya ilmiah, melainkan untuk membantu kita memahaminya dengan lebih baik.

Bab 21

Masalah filosofis dalam fisika, biologi dan psikologi

Permasalahan yang telah kita pelajari sejauh ini inferensi, penjelasan, realisme, dan perubahan ilmiah termasuk dalam apa yang disebut dengan 'filsafat umum ilmu pengetahuan'. Isu-isu ini menyangkut sifat penyelidikan ilmiah secara umum, bukan berkaitan secara khusus dengan kimia, misalnya, atau geologi. Namun, ada juga pertanyaan-pertanyaan filosofis menarik yang khusus untuk ilmu-ilmu tertent pertanyaan-pertanyaan tersebut termasuk dalam apa yang disebut 'filsafat ilmu-ilmu khusus'. Pertanyaan-pertanyaan ini biasanya bergantung sebagian pada pertimbangan filosofis dan sebagian lagi pada fakta empiris, yang membuatnya begitu menarik. Dalam bab ini, kita akan membahas tiga pertanyaan serupa, masing-masing dari fisika, biologi, dan psikologi.

21.1 Leibniz versus Newton dalam ruang absolut

Topik pertama kita adalah perdebatan antara Gottfried Leibniz (1646–1716) dan Isaac Newton (1642–1727), dua intelektual terkemuka abad ke-17, mengenai hakikat ruang dan waktu. Dalam Prinsip Filsafat Alamnya, Newton membela apa yang disebut konsepsi ruang yang 'absolut'. Menurut pandangan ini, ruang mempunyai eksistensi yang 'absolut' melebihi hubungan spasial antar objek. Newton menganggap ruang sebagai wadah tiga dimensi tempat Tuhan menempatkan alam semesta material pada saat penciptaan. Hal ini menyiratkan bahwa ruang sudah ada sebelum ada benda material, sama seperti sebuah wadah seperti kotak sereal sudah ada sebelum ada potongan sereal yang dimasukkan ke dalamnya. Satu-satunya perbedaan antara ruang dan wadah biasa seperti kotak sereal, menurut Newton, adalah bahwa wadah tersebut memiliki dimensi yang terbatas sedangkan ruang meluas tanpa batas ke segala arah.

Leibniz sangat tidak setuju dengan pandangan absolutis tentang ruang, dan banyak hal lain dalam filsafat Newton. Ia berpendapat bahwa ruang hanya terdiri dari totalitas hubungan spasial antar objek material. Contoh relasi spasial adalah 'atas', 'bawah', 'ke kiri', dan 'ke kanan', yaitu relasi yang dimiliki oleh objek-objek material satu sama lain. Konsepsi ruang yang 'relasionalis' ini menyiratkan bahwa sebelum ada objek material, ruang tidak ada. Leibniz berpendapat bahwa ruang angkasa muncul ketika Tuhan menciptakan alam semesta material; ia tidak ada sebelumnya, menunggu untuk diisi dengan benda-benda material. Jadi ruang tidak bisa dianggap sebagai sebuah wadah atau entitas apa pun. Pandangan Leibniz dapat dipahami secara analogi. A kontrak hukum terdiri dari hubungan antara dua pihak, pembeli dan penjual rumah, misalnya. Jika salah satu pihak meninggal dunia, maka kontrak tersebut tidak ada lagi. Maka akan menjadi gila jika dikatakan bahwa kontrak itu ada secara independen dari hubungan antara pembeli dan penjual, kontrak hanyalah hubungan itu. Demikian pula, ruang tidak lain adalah hubungan spasial antar obyek.

Alasan utama Newton memperkenalkan konsep ruang absolut adalah untuk membedakan gerak relatif dan gerak absolut. Gerak relatif adalah gerak suatu benda terhadap benda lain. Sejauh menyangkut gerak relatif, tidak masuk akal untuk menanyakan apakah suatu benda 'benar-benar' bergerak atau tidak, kita hanya dapat menanyakan apakah benda tersebut bergerak terhadap benda lain. Sebagai ilustrasi, bayangkan dua orang pelari berlari beriringan di sepanjang jalan lurus. Dibandingkan dengan pengamat di pinggir jalan, keduanya sedang bergerak, dan mereka semakin menjauh saat ini. Namun relatif satu sama lain, para pelari tidak bergerak, posisi relatif mereka tetap sama, selama mereka terus berlari ke arah yang sama dan kecepatan yang sama. Jadi suatu benda mungkin bergerak relatif terhadap suatu benda, tetapi diam terhadap benda lain.

Newton percaya bahwa selain gerak relatif, ada juga gerak absolut. Akal sehat mendukung pandangan ini. Bayangkan dua benda bergerak relatif, misalnya pesawat layang layang dan seorang pengamat di bumi. Sekarang gerak relatifnya simetris: sama seperti pesawat layang layang yang bergerak relatif terhadap pengamat di bumi, demikian pula pengamat yang bergerak relatif terhadap pesawat layang gantung. Namun secara intuitif, masuk akal untuk bertanya apakah pengamat atau pesawat layang gantung itu 'benar-benar' yang bergerak? Jika demikian, maka diperlukan konsep gerak mutlak.

Tapi apa sebenarnya gerak absolut itu? Menurut Newton, gerak suatu benda terhadap ruang mutlak. Newton berpendapat bahwa, setiap saat, setiap benda mempunyai lokasi tertentu dalam ruang absolut. Jika suatu benda berubah lokasinya dalam ruang absolut seiring waktu, maka benda tersebut bergerak absolut; jika tidak, ia berada dalam keadaan istirahat total. Jadi kita perlu menganggap ruang sebagai suatu entitas, di luar hubungan antara benda-benda material, untuk membedakan gerak relatif dan gerak absolut. Perhatikan bahwa alasan Newton bertumpu pada asumsi penting, yaitu bahwa semua gerak pasti bersifat relatif terhadap sesuatu. Gerak relatif adalah gerak relatif terhadap benda material lainnya; gerak absolut adalah gerak relatif terhadap ruang absolut itu sendiri. Jadi, dalam arti tertentu, gerak absolut pun bersifat 'relatif' bagi Newton. Akibatnya, Newton berasumsi bahwa gerak, baik absolut maupun relatif, bukanlah sebuah 'fakta kasar' tentang suatu benda; itu hanya fakta tentang hubungan objek dengan sesuatu yang lain. Sesuatu yang lain itu bisa berupa objek material lain, atau bisa juga berupa ruang absolut.

Leibniz menerima bahwa ada perbedaan antara gerak relatif dan gerak absolut, tetapi menyangkal bahwa gerak absolut harus dijelaskan sebagai gerak terhadap ruang absolut. Karena ia menganggap konsep ruang absolut tidak koheren. Dia mempunyai sejumlah argumen yang mendukung pandangan ini, banyak di antaranya bersifat teologis. Dari sudut pandang filosofis, argumen Leibniz yang paling menarik adalah bahwa ruang absolut bertentangan dengan apa yang disebutnya sebagai **Prinsip Identitas** yang tidak dapat di**Bedakan** (**PIB**). Karena Leibniz menganggap prinsip ini benar, dia menolak konsep ruang absolut.

PIB mengatakan bahwa jika dua benda tidak dapat dibedakan maka keduanya identik, yakni benar-benar merupakan satu dan satu benda yang sama. Menyebut dua objek tidak dapat dibedakan berarti mengatakan bahwa tidak ada perbedaan sama sekali yang dapat ditemukan di antara keduanya, keduanya mempunyai atribut yang persis sama. Jadi jika **PIB** benar, maka dua objek yang benar-benar berbeda harus berbeda dalam beberapa atribut, jika tidak maka keduanya akan menjadi satu, bukan dua. **PIB** secara intuitif cukup menarik. Tentu tidak mudah untuk menemukan contoh dua benda berbeda yang memiliki semua atribut yang sama, bahkan dua barang pabrik yang diproduksi secara massal biasanya akan berbeda dalam banyak hal. Apakah **PIB** benar secara umum merupakan pertanyaan kompleks yang masih diperdebatkan oleh para filsuf; jawabannya sebagian bergantung pada apa yang dianggap sebagai 'atribut', dan sebagian lagi pada persoalan sulit dalam fisika kuantum. Namun saat ini perhatian kami adalah penggunaan prinsip Leibniz.

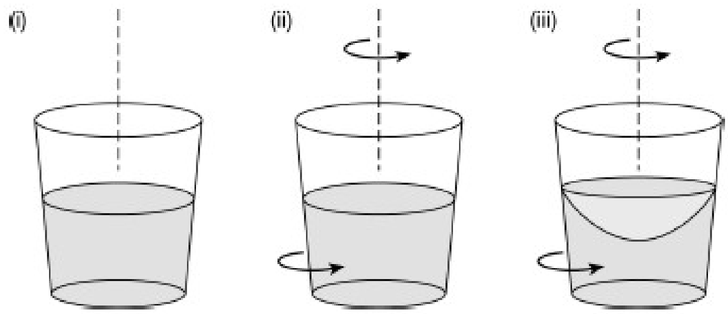
Leibniz menggunakan dua eksperimen pemikiran untuk mengungkap konflik antara teori ruang absolut Newton dan **PIB**. Pertama, Leibniz meminta kita membayangkan dua alam semesta berbeda, keduanya berisi objek yang persis sama. Di alam semesta satu, setiap objek menempati lokasi tertentu dalam ruang absolut. Di alam semesta dua, setiap objek telah dipindahkan ke lokasi berbeda dalam ruang absolut, dua kilometer ke arah timur (misalnya). Tidak ada cara untuk membedakan kedua alam semesta ini. Karena kita tidak dapat mengamati kedudukan suatu benda dalam ruang absolut, seperti yang diakui Newton sendiri. Yang bisa kita amati hanyalah posisi benda relatif terhadap satu sama lain, dan posisi ini sama di kedua alam semesta. Tidak ada observasi atau eksperimen yang dapat mengungkap apakah kita hidup di alam semesta satu atau dua.

Eksperimen pemikiran kedua Leibniz serupa. Ingatlah bahwa bagi Newton, beberapa benda bergerak melalui ruang absolut sementara yang lain diam. Artinya pada setiap momen, setiap benda mempunyai kecepatan mutlak tertentu. (Kecepatan adalah kecepatan dalam arah tertentu, jadi kecepatan absolut suatu benda adalah kecepatan pergerakannya melalui ruang absolut dalam arah tertentu.) Sekarang bayangkan dua alam semesta berbeda, keduanya berisi objek yang persis sama. Di Universe One, setiap benda memiliki kecepatan absolut tertentu. Di alam semesta dua, kecepatan absolut setiap benda telah ditingkatkan dengan jumlah yang tetap, katakanlah 300 kilometer per jam dalam arah tertentu. Sekali lagi, kita tidak akan pernah bisa membedakan kedua alam semesta ini. Kita tidak dapat mengamati seberapa cepat suatu benda bergerak terhadap ruang absolut, seperti yang diakui Newton, tetapi hanya mengamati seberapa cepat benda-benda tersebut bergerak relatif terhadap satu sama lain dan hal ini sama di kedua alam semesta.

Dalam setiap eksperimen pemikiran ini, Leibniz menggambarkan dua alam semesta yang menurut pengakuan Newton sendiri kita tidak akan pernah bisa membedakannya, keduanya sama sekali tidak dapat dibedakan. Namun menurut **PIB**, ini berarti kedua alam semesta sebenarnya adalah satu. Jadi jika **PIB** benar, maka teori Newton mempunyai konsekuensi yang salah: teori ini menyiratkan bahwa ada dua hal padahal hanya ada satu. Oleh karena itu, teori Newton salah, menurut Leibniz.

Leibniz berpendapat bahwa ruang absolut adalah gagasan kosong karena tidak ada perbedaan pengamatan. Jika lokasi benda-benda dalam ruang absolut maupun kecepatannya terhadap ruang absolut tidak dapat dideteksi, mengapa harus percaya pada ruang absolut? Leibniz mengacu pada prinsip yang cukup masuk akal bahwa kita hanya boleh mendalilkan entitas yang tidak dapat diamati dalam sains jika keberadaannya dapat membuat perbedaan yang dapat kita deteksi melalui observasi.

Tapi Newton mengira dia bisa menunjukkan bahwa ruang absolut memang memiliki efek pengamatan. Inilah inti dari argumennya yang terkenal mengenai 'ember berputar'. Dia meminta kita membayangkan sebuah ember berisi air, digantung pada seutas tali yang dijalin melalui lubang di alasnya (lihat Gambar 21.1). Mula-mula air diam relatif terhadap ember. Tali tersebut kemudian diputar beberapa kali dan dilepaskan. Saat terlepas, ember mulai berputar. Mula-mula air di dalam ember tetap diam, permukaannya rata; ember kemudian berputar relatif terhadap air. Namun setelah beberapa saat ember tersebut memberikan gerakannya pada air, dan air mulai berputar beriringan dengan ember; ember dan air kemudian diam relatif satu sama lain lagi. Pengalaman menunjukkan bahwa permukaan air kemudian melengkung ke atas pada sisi-sisinya.



Gambar 21.1: Eksperimen 'ember berputar' Newton. Tahap (i) ember dan air dalam keadaan diam; tahap (ii) ember berputar relatif terhadap air; tahap (iii) ember dan air berputar beriringan [2].

Apa yang menyebabkan permukaan air naik, tanya Newton? Jelas ini ada hubungannya dengan perputaran air. Tapi rotasi adalah salah satu jenis gerak, dan bagi Newton gerak suatu benda selalu relatif terhadap benda lain. Jadi kita harus bertanya: relatif terhadap apa putaran air? Tentu saja tidak relatif terhadap ember, karena ember dan air berputar beriringan sehingga relatif diam. Newton berpendapat bahwa air berputar relatif terhadap ruang absolut, dan hal ini menyebabkan permukaannya melengkung ke atas. Jadi ruang absolut sebenarnya mempunyai efek pengamatan.

Anda mungkin berpikir ada kesenjangan yang jelas dalam argumen Newton. Memang benar, air tidak berputar relatif terhadap ember, namun mengapa menyimpulkan bahwa air pasti berputar relatif terhadap ruang absolut? Air berputar relatif terhadap orang yang melakukan percobaan, relatif terhadap permukaan bumi, dan relatif terhadap bintang-bintang yang diam, jadi tentunya hal-hal tersebut mungkin menyebabkan permukaannya naik? Namun, Newton mempunyai respons sederhana terhadap langkah ini. Bayangkan sebuah alam semesta yang tidak berisi apa pun kecuali ember yang berputar. Di alam semesta seperti ini, kita tidak dapat menjelaskan permukaan air yang melengkung dengan mengacu pada rotasi air relatif terhadap benda-benda lain, karena tidak ada benda lain, dan seperti sebelumnya, air diam relatif terhadap ember. Ruang absolut adalah satu-satunya ruang yang tersisa bagi air untuk berotasi relatif. Jadi kita harus percaya pada ruang absolut karena rasa sakit karena tidak mampu menjelaskan mengapa permukaan air melengkung.

Sebenarnya, Newton mengatakan bahwa meskipun posisi dan kecepatan suatu benda terhadap ruang absolut tidak pernah dapat dideteksi, percepatannya terhadap ruang absolut dapat dideteksi. Ketika sebuah benda berputar, maka benda tersebut menurut definisinya mengalami percepatan, meskipun laju rotasinya konstan. Hal ini karena dalam fisika, percepatan diartikan sebagai laju perubahan kecepatan, dan kecepatan adalah kecepatan dalam suatu arah tertentu. Karena benda yang berputar terus-menerus mengubah arah geraknya, kecepatannya tidak konstan, sehingga mengalami percepatan. Permukaan air yang melengkung hanyalah salah satu contoh dari apa yang disebut efek 'efek inersia' yang dihasilkan oleh gerak yang dipercepat. Contoh lainnya adalah perasaan didorong ke belakang tempat duduk saat pesawat lepas landas. Satu-satunya penjelasan yang mungkin mengenai efek inersia, menurut Newton, adalah percepatan benda yang mengalami efek tersebut terhadap ruang absolut. Karena di alam semesta yang hanya berisi benda yang mengalami percepatan, ruang absolut adalah satu-satunya benda yang percepatannya relatif terhadapnya.

Argumen Newton sangat kuat namun tidak konklusif. Sebab, bagaimana Newton mengetahui bahwa permukaan air akan melengkung ke atas jika percobaan ember berputar dilakukan di alam semesta yang tidak mengandung benda material lain? Newton hanya berasumsi bahwa efek inersia yang kita temukan di dunia ini akan tetap sama jika dunia tidak memiliki materi lain.

Ini jelas merupakan asumsi yang cukup substansial, dan banyak orang mempertanyakan hak Newton atas asumsi tersebut. Jadi argumen Newton tidak membuktikan adanya ruang absolut. Sebaliknya, hal ini memberikan tantangan kepada pembela Leibniz untuk memberikan penjelasan alternatif mengenai efek inersia.

Leibniz juga menghadapi tantangan untuk menjelaskan perbedaan antara gerak absolut dan relatif tanpa menggunakan ruang absolut. Mengenai masalah ini, Leibniz menulis bahwa suatu benda berada dalam gerak sejati atau mutlak 'ketika penyebab langsung dari perubahan tersebut ada pada benda itu sendiri'. Ingat kasus pesawat layang layang dan pengamat di bumi, keduanya bergerak relatif satu sama lain. Untuk menentukan siapa yang 'sebenarnya' bergerak, Leibniz mengatakan bahwa kita perlu memutuskan apakah penyebab langsung dari perubahan tersebut (yaitu gerakan relatif) ada pada pesawat layang gantung atau pengamat. Saran tentang cara membedakan gerak absolut dan gerak relatif ini menghindari semua rujukan pada ruang absolut, namun tidak terlalu jelas. Leibniz tidak pernah menjelaskan secara tepat apa yang dimaksud dengan 'penyebab langsung perubahan' yang ada pada suatu objek. Namun bisa jadi ia bermaksud menolak anggapan Newton bahwa gerak suatu benda, baik relatif maupun absolut, hanya merupakan fakta tentang hubungan suatu benda dengan benda lain.

Salah satu hal yang menarik mengenai kontroversi absolut/relasional adalah bahwa kontroversi ini tidak mau hilang. Penjelasan Newton tentang ruang angkasa terkait erat dengan ilmu fisikanya, dan pandangan Leibniz merupakan reaksi langsung terhadap pandangan Newton. Jadi orang mungkin berpikir bahwa kemajuan fisika sejak abad ke-17 akan menyelesaikan masalah ini. Namun hal ini belum terjadi. Meskipun teori relativitas Einstein pernah diyakini secara luas telah memenangkan Leibniz, pandangan ini semakin mendapat serangan dalam beberapa tahun terakhir. Lebih dari 300 tahun setelah pertukaran Newton/Leibniz yang asli, perdebatan terus berlanjut.

21.2 Apa yang dimaksud dengan spesies biologis?

Para ilmuwan seringkali ingin mengklasifikasikan objek-objek yang dipelajarinya ke dalam jenis atau tipe umum. Ahli geologi mengklasifikasikan batuan sebagai batuan beku, sedimen, atau metamorf, bergantung pada bagaimana batuan tersebut terbentuk. Ahli kimia mengklasifikasikan unsur sebagai logam, metaloid, atau nonlogam, bergantung pada sifat fisik dan kimianya. Fungsi utama klasifikasi adalah menyampaikan informasi. Jika seorang ahli kimia memberi tahu Anda bahwa sesuatu itu logam, ini memberi tahu Anda banyak hal tentang kemungkinan perilakunya. Klasifikasi menimbulkan beberapa isu filosofis yang menarik. Sebagian besar, hal ini berasal dari fakta bahwa sekumpulan objek tertentu pada prinsipnya dapat diklasifikasikan dalam berbagai cara. Jadi bagaimana kita harus memilih di antara keduanya? Apakah ada cara yang 'benar' untuk mengklasifikasikan, atau apakah semua skema klasifikasi pada akhirnya bersifat arbitrer? Pertanyaan-pertanyaan ini mempunyai urgensi tertentu dalam konteks klasifikasi biologis atau taksonomi, yang akan menjadi perhatian kami di sini.

Unit dasar klasifikasi biologi adalah spesies. Dalam taksonomi tradisional, setiap organisme pertama-tama dimasukkan ke dalam suatu spesies, dilambangkan dengan nama Latin dengan dua bagian yang disebut binomial. Jadi, Anda milik Homo sapiens, kucing peliharaan Anda milik Felis catus, dan tikus di lemari makan Anda milik Mus musculus. Spesies kemudian disusun menjadi 'taksa yang lebih tinggi' genus, famili, ordo, kelas, filum, dan kingdom secara hierarkis. Dengan demikian Homo sapiens termasuk dalam genus Homo, yaitu dalam keluarga Hominid, ordo Primata, kelas Mamalia, filum Chordata, dan kingdom Hewan. Sistem klasifikasi ini disebut sistem Linnean, diambil dari nama naturalis Swedia abad ke-18 Carl Linnaeus (1707–78) yang menciptakannya, dan masih digunakan secara luas hingga saat ini.

Fokus kita di sini adalah pada tahap pertama tugas ahli taksonomi, yaitu bagaimana mengklasifikasikan organisme ke dalam spesies. Hal ini tidak sejelas kelihatannya, terutama karena para ahli biologi tidak sepakat mengenai apa sebenarnya suatu spesies, dan juga mengenai kriteria apa yang harus digunakan untuk mengidentifikasi spesies. Memang benar, definisi-definisi yang bersaing mengenai suatu spesies biologis, atau ‘konsep spesies’ sebagaimana definisi-definisi ini dikenal, berlimpah dalam biologi modern. Kurangnya konsensus ini kadang-kadang disebut sebagai ‘masalah spesies’.

Anda mungkin terkejut mendengar bahwa ada masalah spesies. Dari sudut pandang orang awam, tampaknya tidak ada masalah dalam menggolongkan organisme ke dalam spesies. Bagaimanapun juga, dari pengamatan biasa saja sudah jelas bahwa tidak semua organisme hidup sama. Beberapa berukuran sangat besar sementara yang lain berukuran kecil; beberapa bergerak sementara yang lain tidak; beberapa hidup selama bertahun-tahun dan yang lainnya hanya beberapa jam. Jelas juga bahwa keberagaman ini tidak berkesinambungan, melainkan mengelompok. Organisme nampaknya terbagi dalam beberapa tipe atau jenis, banyak di antaranya dapat dikenali oleh anak kecil. Seorang anak berusia 3 tahun dapat dengan yakin menilai bahwa dua hewan di taman tersebut adalah anjing, meskipun mereka berasal dari ras yang berbeda; dan seorang ahli biologi akan memastikan bahwa anak tersebut benar bahwa hewan tersebut memang termasuk dalam spesies yang sama, yaitu Canis familiaris. Oleh karena itu, wajar jika kita berpikir bahwa ada pembagian obyektif di antara organisme hidup yang merupakan tugas ahli biologi untuk menemukannya. Dalam pandangan ini, batas-batas spesies berada ‘di luar sana’ dan menunggu untuk ditemukan, bukan ditentukan oleh para ahli biologi. Kebanyakan non-ahli biologi tampaknya menerima pandangan ini tanpa ragu.

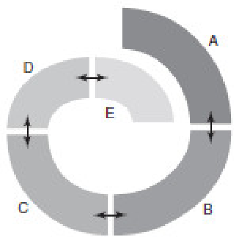
Sudut pandang yang masuk akal ini sesuai dengan doktrin filosofis tentang 'jenis alami', yang variannya telah populer sejak Aristoteles. Doktrin ini berpendapat bahwa terdapat cara-cara mengelompokkan benda-benda ke dalam jenis-jenis yang bersifat alami dalam arti sesuai dengan pembagian yang benar-benar ada di dunia, dan bukan mencerminkan kepentingan manusia. Unsur dan senyawa kimia merupakan paradigma alam. Misalnya saja semua sampel emas murni di alam semesta. Sampel-sampel ini termasuk dalam jenis 'emas' karena kesamaan mendasarnya: atom-atom penyusunnya mempunyai nomor atom 79. Sebaliknya, sampel emas bodoh (pirit besi) tidak termasuk dalam jenis tersebut, meskipun mirip dengan emas. dalam beberapa hal, karena ia merupakan senyawa yang dibentuk oleh atom-atom dari jenis yang berbeda (besi dan belerang). Para filsuf yang menganut realisme ilmiah sering berargumentasi bahwa bagian dari tugas sains apa pun adalah menemukan sifat-sifat alami dalam domainnya.

Gagasan bahwa spesies adalah jenis biologi alami merupakan gagasan yang menarik, namun menghadapi sejumlah tantangan. Salah satunya adalah mungkin terdapat unsur kesewenang-wenangan dalam hal yang dianggap sebagai suatu spesies. Untuk mengetahui alasannya, perhatikan bahwa para ahli biologi sering membagi spesies menjadi beberapa kelompok seperti ras, varietas, dan subspesies. Misalnya saja elang emas Aquila Chrysaetos yang biasanya dibagi menjadi enam subspesies, antara lain elang emas Eropa, Amerika, dan Jepang. Motivasi untuk memperkenalkan pengelompokan sub-spesifik adalah bahwa beberapa populasi dapat dikenali berbeda satu sama lain, namun tidak terlalu berbeda sehingga dianggap sebagai spesies yang terpisah. Tapi bagaimana kita menggambar garis yang tajam? Darwin memberikan pembahasan menarik mengenai hal ini dalam *The Origin of Species*, dengan alasan bahwa tidak ada batasan yang jelas antara spesies, subspesies, dan varietas. Ia menyimpulkan: 'terlihat bahwa saya melihat istilah spesies sebagai suatu istilah yang diberikan secara sewenang-wenang, demi kenyamanan, kepada sekumpulan individu yang sangat mirip satu sama lain, dan bahwa istilah ini pada dasarnya tidak berbeda dengan istilah keanekaragaman, yaitu diberikan kepada bentuk-bentuk yang kurang jelas dan lebih berfluktuasi.'

Pernyataan Darwin bahwa sekelompok individu dihitung sebagai suatu spesies adalah sesuatu yang arbitrer adalah suatu hal yang mengejutkan; tentu saja hal ini tidak sesuai dengan gagasan bahwa spesies adalah spesies alami. Namun apakah Darwin benar? Pada abad ke-20, banyak ahli biologi evolusi yang yakin bahwa spesies sebenarnya adalah unit nyata di alam, bukan kelompok sembarangan, karena mereka terisolasi secara reproduktif. Artinya, organisme dalam satu spesies dapat kawin silang satu sama lain, namun tidak dengan spesies lain. Mendefinisikan spesies biologis dalam istilah isolasi reproduksi diperjuangkan oleh ahli biologi Jerman Ernst Mayr, dan dikenal sebagai 'Konsep Spesies Biologis' (**KSP**). Para pendukung **KSP** menolak argumen Darwin yang menyatakan bahwa pembedaan varietas/spesies adalah sesuatu yang sewenang-wenang. Dalam pandangan mereka, elang emas Eropa dan Amerika merupakan varietas, bukan spesies terpisah, karena pada prinsipnya mereka dapat kawin silang dan menghasilkan keturunan yang mampu hidup (walaupun jarang terjadi). Sebaliknya, elang tutul dan elang emas merupakan spesies yang terpisah, karena anggotanya tidak dapat kawin silang.

KSP banyak digunakan dalam biologi kontemporer, namun memiliki keterbatasan. Ini hanya berlaku untuk organisme yang bereproduksi secara seksual; namun, banyak organisme hidup yang bereproduksi secara aseksual, termasuk sebagian besar organisme bersel tunggal, beberapa tumbuhan dan jamur, dan beberapa hewan. Jadi **KSP** merupakan solusi terbaik bagi permasalahan spesies. Terlebih lagi, isolasi reproduksi tidak selalu merupakan perkara yang sulit dan cepat. Spesies berkerabat dekat yang hidup di lokasi berdekatan seringkali mempunyai 'zona hibrida' di mana wilayah jelajahnya bertemu; di zona-zona ini, terjadi hibridisasi dalam jumlah terbatas, di mana keturunan subur dihasilkan setidaknya untuk beberapa waktu, namun kedua spesies tetap mempertahankan identitasnya yang berbeda. Zona hibrida sering kali muncul ketika satu spesies sedang dalam proses pembelahan menjadi dua. Di antara tumbuhan, khususnya, hibridisasi antara organisme yang termasuk dalam spesies yang jelas berbeda adalah hal yang cukup umum.

Masalah yang lebih besar lagi bagi **KSP** adalah fenomena spesies cincin. Hal ini terjadi ketika suatu spesies terdiri dari sejumlah populasi lokal yang tersusun secara geografis dalam sebuah cincin; setiap populasi dapat kawin silang dengan tetangga terdekatnya, namun populasi di ujung rantai tidak bisa. Misalnya, populasi A dapat kawin silang dengan B, B dengan C, C dengan D, D dengan E, tetapi A dan E tidak dapat kawin silang (lihat Gambar 21.2).



Gambar 21.2: Spesies cincin. Tanda panah berkepala dua menunjukkan perkawinan silang [2].

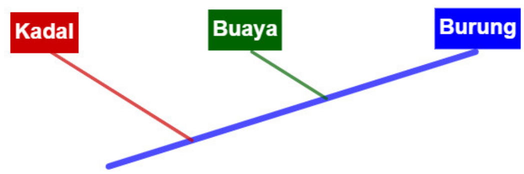
Spesies cincin merupakan semacam paradoks bagi BSC. Untuk mengetahui alasannya, tanyakan pada diri Anda apakah A dan E termasuk dalam spesies yang sama atau tidak. Karena mereka tidak bisa kawin silang, jawabannya seharusnya 'tidak'. Namun, A dan B bersifat spesifik menurut kriteria kawin silang, begitu pula B dan C, C dan D, serta D dan E, jadi tentu saja A dan E harus spesifik? Tidak jelas apa yang harus dikatakan mengenai situasi ini di **KSP**. Jadi desakan Darwin bahwa ada unsur kesewenang-wenangan dalam penghitungan spesies tidak sepenuhnya dapat diredakan dengan fokus pada isolasi reproduktif.

Sumber utama permasalahan spesies adalah evolusi itu sendiri. Biologi modern mengajarkan kita, mengikuti Darwin, bahwa semua organisme hidup berasal dari nenek moyang yang sama. Namun, taksonomi Linnean tradisional berasal dari masa ketika kreasionisme menjadi pandangan dunia yang dominan. Berdasarkan pandangan kreasionis, yang menyatakan bahwa Tuhan menciptakan setiap spesies secara terpisah, wajar jika kita berharap bahwa semua organisme dapat dimasukkan ke dalam spesies tanpa ambiguitas. Namun dari sudut pandang evolusi, tidak ada alasan untuk mengharapkan hal ini. Karena perubahan evolusioner terjadi secara bertahap, proses dimana suatu spesies nenek moyang menghasilkan spesies anak biasanya memerlukan waktu ribuan tahun. Seringkali hal ini melibatkan satu spesies yang secara bertahap terpecah menjadi dua, dan hubungan reproduksi antara dua spesies anak akhirnya terputus. Jadi bentuk peralihan, dan populasi yang statusnya sebagai spesies tidak jelas, adalah hal yang wajar saja. Selain itu, tidak ada alasan untuk mengharapkan bahwa definisi spesies tunggal akan berlaku untuk semua organisme, mulai dari bakteri hingga hewan bersel banyak.

Evolusi juga mengajarkan kita bahwa variasi di antara organisme kemungkinan besar akan menyebar luas. Variasi adalah mesin yang menggerakkan seleksi alam: jika organisme dalam suatu spesies tidak berubah, maka seleksi alam tidak dapat berjalan. Arti penting dari hal ini adalah bahwa hal ini melemahkan gagasan yang masuk akal bahwa semua anggota suatu spesies biologis harus memiliki beberapa ciri penting, misalnya. beberapa sifat genetik, yang membedakan mereka dari non-anggota. Gagasan ini adalah bagian dari pandangan 'jenis alami' terhadap spesies dan tampaknya diyakini oleh banyak orang non-ahli biologi. Namun secara empiris, terdapat variasi genetik yang luas di antara individu-individu dalam suatu spesies tertentu, yang terkadang melebihi variasi genetik antar spesies yang berkerabat dekat. Hal ini tidak berarti bahwa para ahli biologi sering kali dapat mengetahui spesies suatu organisme dengan mengurutkan DNA-nya. Namun, hal ini tidak selalu memungkinkan, dan hal ini tidak menunjukkan bahwa keanggotaan suatu spesies ditentukan oleh 'esensi genetik' yang tetap.

Oleh karena itu, evolusi sangat memperumit usaha taksonomi. Namun, usaha ini harus terus berjalan, karena membagi organisme menjadi spesies praktis tidak dapat dilakukan. Jika seorang ahli burung menemukan burung yang tidak biasa, misalnya, hal pertama yang ingin mereka ketahui adalah dari spesies apa burung tersebut berasal, karena hal ini memberikan informasi berharga tentang sifat, perilaku, dan ekologi burung tersebut. Situasi ini dengan fasih dijelaskan oleh ahli biologi Inggris John Maynard Smith, yang menulis: 'Setiap upaya untuk membagi semua organisme hidup, dulu dan sekarang, ke dalam kelompok-kelompok yang jelas dan tidak ada perantara, pasti akan gagal. Ahli taksonomi dihadapkan pada kontradiksi antara kebutuhan praktis dan ketidakmungkinan teoritis dalam melakukan tugasnya.' Jadi dalam praktiknya, para ahli biologi terus memperlakukan spesies seolah-olah mereka adalah jenis yang didefinisikan secara jelas, dengan kesadaran bahwa hal ini hanyalah perkiraan terhadap kenyataan.

Sejak akhir tahun 1960an dan seterusnya, biologi evolusioner semakin sepakat dengan gagasan bahwa klasifikasi harus dilakukan dengan cara yang 'konsisten' dengan evolusi. Inilah motif utama gerakan yang dikenal sebagai 'sistematika filogenetik', yang didirikan oleh ahli entomologi Jerman Willi Hennig. Gagasan kuncinya adalah untuk mengakui bahwa hanya pengelompokan biologis yang bersifat monofiletik saja yang asli, yang berarti bahwa pengelompokan tersebut berisi semua dan hanya keturunan dari beberapa nenek moyang yang sama. Banyak pengelompokan taksonomi tradisional, mis. kelas Reptilia (reptilia), dalam hal ini ternyata tidak bersifat monofiletik, karena nenek moyang semua reptilia juga melahirkan burung (lihat Gambar 21.3). Jadi para pendukung klasifikasi filogenetik bersikeras bahwa Reptilia bukanlah takson asli, dan tidak memiliki tempat dalam taksonomi yang benar. Sistematika filogenetik terutama berkaitan dengan cara membatasi taksa yang lebih tinggi, bukan spesies. Namun kriteria monofili dapat diterapkan pada spesies individu, sehingga menghasilkan apa yang dikenal sebagai 'konsep spesies filogenetik'; sebenarnya, konsep ini merupakan upaya untuk merumuskan secara tepat gagasan intuitif bahwa organisme dalam suatu spesies harus lebih dekat kekerabatannya satu sama lain dibandingkan dengan anggota spesies lain.



Gambar 21.3: Hubungan filogenetik antara kadal, buaya, dan burung

Dari sudut pandang filosofis, pentingnya pendekatan filogenetik adalah implikasinya bahwa dua organisme termasuk dalam kelompok spesies yang sama atau takson yang lebih tinggi karena nenek moyang mereka yang sama, bukan karena kesamaan intrinsiknya. Eksperimen pemikiran dapat membantu menyempurnakan hal ini. Misalkan para ilmuwan menemukan organisme di Mars yang tidak berasal dari materi biologis bumi, namun sama sekali tidak dapat dibedakan dari lalat rumah pada umumnya. (Hal ini sangat tidak mungkin, tentu saja, namun secara logika bisa dibayangkan.) Spesimen Mars terlihat seperti lalat, dapat kawin dengan lalat di Bumi, dan tidak dapat dibedakan dari lalat yang sebenarnya melalui tes genetik apa pun. Apakah itu lalat rumah? Jika spesies adalah spesies alami, jawabannya mungkin ya. Namun dari sudut pandang filogenetik, jawabannya adalah tidak. Untuk menjadi spesies lalat rumah (Musca domestica), suatu organisme perlu memiliki pola nenek moyang yang sesuai, terlepas dari ciri-ciri intrinsik yang dimilikinya.

Hal ini sesuai dengan saran menarik yang dibuat oleh ahli biologi Michael Ghiselin dan filsuf David Hull pada tahun 1970an. Mereka berpendapat bahwa spesies biologis tidak boleh dianggap sebagai suatu jenis atau tipe sama sekali, seperti asumsi tradisional, melainkan sebagai individu kompleks yang tersebar dalam ruang dan waktu. Seperti organisme individual, suatu spesies muncul pada tempat dan waktu tertentu, mempunyai umur yang terbatas, dan kemudian punah. Sebaliknya, jenis yang asli tidak dibatasi secara ruang dan waktu. Pertimbangkan emas. Sepotong materi di mana pun di alam semesta dianggap sebagai emas, terlepas dari asal usulnya, selama ia memiliki nomor atom 79. Jadi pada prinsipnya, semua emas di alam semesta dapat dimusnahkan dan bertahun-tahun kemudian emas lainnya dapat disintesis. Namun spesies tidak seperti itu, bantah Ghiselin dan Hull. Sekali suatu spesies punah, secara logika ia tidak akan pernah bisa hidup kembali, sama seperti Anda dan saya tidak dapat bertahan hidup dari kematian kita.

Gagasan bahwa spesies adalah individu terdengar aneh pada awalnya tetapi masuk akal jika direnungkan. Tentu saja, spesies tidak seperti individu 'biasa' karena bagian penyusunnya, yaitu organisme yang dikandungnya, tidak bersatu. Namun, perbedaan ini cukup dangkal. Serangga dalam sebuah koloni semut juga tidak bersatu, namun kami dengan senang hati menganggap koloni tersebut sebagai suatu kesatuan. Memperlakukan spesies sebagai individu memiliki keuntungan tersendiri. Salah satunya adalah cocok dengan prinsip sistematika filogenetik. Hal lainnya adalah bahwa hal ini membantu menyelaraskan intuisi yang tersebar luas bahwa spesies adalah unit 'nyata' di alam, bukan pengelompokan yang sewenang-wenang, dengan fakta bahwa variasi genetik intraspesifik tersebar luas dan bahwa spesies tidak memiliki 'esensi genetik'. Fakta-fakta ini masuk akal jika kita memandang spesies sebagai individu yang kompleks, namun menjadi kurang masuk akal jika kita menganggapnya sebagai spesies alami.

21.3 Apakah pikiran bersifat modular?

Merupakan fakta yang mengejutkan bahwa manusia mampu melakukan beragam tugas kognitif, seringkali dengan sedikit usaha sadar. Yang dimaksud dengan 'tugas kognitif' tidak hanya berarti menyelesaikan teka-teki silang, tetapi juga tugas sehari-hari seperti menyeberang jalan dengan aman, menangkap bola, memahami perkataan orang lain, mengenali wajah orang lain, dan banyak lagi. Tugas-tugas seperti itu begitu familiar bagi kita sehingga mudah dianggap remeh; namun, kemampuan kami untuk melakukannya sungguh luar biasa. Tidak ada robot yang mampu melakukan sebagian besar tugas ini sebaik manusia pada umumnya, meskipun memerlukan biaya yang besar. Entah bagaimana, otak kita memungkinkan kita melakukan tugas kognitif yang kompleks dengan sedikit usaha. Menjelaskan bagaimana hal ini bisa terjadi adalah bagian penting dari disiplin ilmu yang dikenal sebagai psikologi kognitif.

Fokus kita adalah perdebatan yang sedang berlangsung di kalangan psikolog kognitif mengenai arsitektur pikiran manusia. Menurut salah satu pandangan, pikiran manusia adalah 'pemecah masalah untuk tujuan umum'. Ini berarti bahwa pikiran mengandung seperangkat keterampilan pemecahan masalah umum, atau 'kecerdasan umum', yang diterapkan pada sejumlah besar tugas yang berbeda-beda. Jadi, serangkaian kapasitas kognitif yang sama digunakan, apakah seseorang sedang mencoba menghitung kelereng, memutuskan di restoran mana ia akan makan, atau belajar bahasa asing, tugas-tugas ini mewakili penerapan yang berbeda-beda dari kecerdasan umum seseorang. Menurut pandangan saingannya, pikiran manusia berisi sejumlah sub-sistem atau modul khusus, yang masing-masing dirancang untuk melakukan tugas tertentu dan tidak dapat melakukan hal lain. Ini dikenal sebagai hipotesis modularitas pikiran.

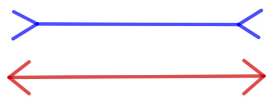
Salah satu contoh modularitas berasal dari karya ahli bahasa Noam Chomsky tentang pemerolehan bahasa pada tahun 1960an. Chomsky menegaskan bahwa seorang anak tidak belajar bahasa dengan mendengarkan percakapan orang dewasa dan kemudian menggunakan 'kecerdasan umum' mereka untuk mengetahui aturan bahasa yang digunakan. Hal ini tidak mungkin, menurutnya, karena data linguistik yang dimiliki anak-anak terlalu terbatas dan sangat bervariasi dari satu anak ke anak lainnya, namun semua anak memperoleh bahasa pada usia yang sama. Chomsky berpendapat bahwa ada modul berbeda yang disebut 'perangkat pemerolehan bahasa' di otak setiap anak. Perangkat ini beroperasi secara otomatis, dan fungsi satu-satunya adalah memungkinkan anak memperoleh bahasa. Hal ini dilakukan dengan mengkodekan prinsip-prinsip 'tata bahasa universal' yang dipatuhi oleh semua bahasa manusia, sehingga memungkinkan anak mempelajari tata bahasa dari bahasa apa pun dengan dorongan yang tepat. Chomsky memberikan serangkaian bukti yang mengesankan untuk klaim bahwa pemerolehan bahasa merupakan kapasitas modular seperti fakta bahwa bahkan mereka yang memiliki 'kecerdasan umum' rendah biasanya dapat belajar berbicara dengan baik.

Beberapa bukti paling kuat untuk hipotesis modularitas berasal dari penelitian terhadap pasien dengan kerusakan otak, yang dikenal sebagai 'studi defisit'. Jika pikiran manusia merupakan pemecah masalah untuk tujuan umum, kita memperkirakan kerusakan pada otak akan mempengaruhi semua kapasitas kognitif secara kurang lebih sama. Namun bukan ini yang kami temukan. Sebaliknya, kerusakan otak seringkali mengganggu beberapa kapasitas kognitif namun tidak mempengaruhi kapasitas kognitif lainnya. Misalnya, kerusakan pada bagian otak yang dikenal sebagai area Wernicke membuat pasien tidak dapat memahami pembicaraan, meskipun mereka masih mampu menghasilkan kalimat yang tata bahasanya lancar. Hal ini sangat menyarankan bahwa ada modul terpisah untuk produksi dan pemahaman kalimat, karena hal ini akan menjelaskan mengapa hilangnya kapasitas yang terakhir tidak berarti hilangnya kapasitas yang disebutkan sebelumnya. Pasien kerusakan otak lainnya kehilangan ingatan jangka panjang (amnesia), namun ingatan jangka pendek serta kemampuan berbicara dan memahami mereka tidak terganggu. Sekali lagi, hal ini tampaknya mendukung modularitas dan bertentangan dengan pandangan pikiran sebagai pemecah masalah untuk tujuan umum.

Meskipun meyakinkan, bukti neuropsikologis semacam ini tidak menyelesaikan masalah modularitas secara meyakinkan. Bukti-bukti tersebut relatif sedikit, dan kita jelas tidak dapat merusak otak seseorang sesuka hati hanya untuk melihat bagaimana kapasitas kognitif mereka terpengaruh. Selain itu, terdapat perbedaan pendapat mengenai bagaimana data harus diinterpretasikan, seperti yang biasa terjadi dalam sains. Beberapa orang berpendapat bahwa pola gangguan kognitif yang diamati pada pasien kerusakan otak tidak berarti modularitas. Bahkan jika pikiran merupakan pemecah masalah untuk tujuan umum, yaitu non-modular, masih ada kemungkinan bahwa kapasitas kognitif yang berbeda dapat dipengaruhi secara berbeda oleh kerusakan otak, demikian argumen mereka. Jadi kita tidak bisa begitu saja membaca arsitektur pikiran dari studi defisit; paling-paling, yang kedua memberikan bukti yang salah untuk yang pertama.

Sebagian besar minat terhadap modularitas baru-baru ini disebabkan oleh karya Jerry Fodor, seorang filsuf dan psikolog Amerika. Dalam sebuah buku tahun 1983 berjudul The Modularity of Mind, Fodor menawarkan penjelasan baru tentang apa itu modul, dan beberapa gagasan menarik tentang kapasitas kognitif mana yang bersifat modular dan mana yang tidak. Fodor berargumentasi bahwa modul mental mempunyai sejumlah ciri khas, tiga di antaranya sangat penting: (i) bersifat spesifik domain, (ii) pengoperasiannya bersifat wajib, dan (iii) dikemas secara informasi. Sistem non-modular tidak memiliki fitur-fitur ini. Fodor kemudian berpendapat bahwa pikiran sebagian, meskipun tidak sepenuhnya modular: kita menyelesaikan beberapa tugas kognitif menggunakan modul khusus, dan tugas lainnya menggunakan kecerdasan umum.

Mengatakan bahwa sistem kognitif bersifat spesifik domain berarti mengatakan bahwa sistem tersebut terspesialisasi: ia melakukan serangkaian tugas yang terbatas dan dibatasi secara tepat. Perangkat pemerolehan bahasa yang dipostulasikan Chomsky adalah contohnya. Fungsi alat ini hanyalah untuk memudahkan anak belajar bahasa, tidak membantu anak belajar bermain catur, berhitung, atau apa pun. Jadi perangkat mengabaikan masukan nonlinguistik. Mengatakan bahwa sistem kognitif itu wajib berarti kita tidak dapat memilih apakah akan menjalankannya. Persepsi bahasa adalah contohnya. Jika Anda mendengar sebuah kalimat diucapkan dalam bahasa yang Anda tahu, Anda pasti mendengarnya sebagai pengucapan sebuah kalimat. Jika seseorang meminta Anda untuk mendengarkan kalimat sebagai 'suara murni', Anda tidak dapat mematuhinya sekeras apa pun Anda berusaha. Fodor menunjukkan bahwa tidak semua proses kognitif bersifat wajib dengan cara ini. Berpikir jernih tidaklah demikian. Jika seseorang meminta Anda memikirkan momen paling menakutkan dalam hidup Anda, atau apa yang akan Anda lakukan jika memenangkan lotre, Anda jelas dapat mematuhi instruksi mereka. Jadi pemikiran dan persepsi bahasa sangat berbeda dalam hal ini.



Gambar 21.4: Ilusi Müller-Lyer

Bagaimana dengan enkapsulasi informasi? Gagasan ini paling baik diilustrasikan dengan sebuah contoh. Lihatlah dua garis sejajar pada Gambar 21.4. Bagi kebanyakan orang, garis atas terlihat sedikit lebih panjang daripada garis bawah. Namun sebenarnya ini adalah ilusi optik yang dikenal dengan ilusi Müller-Lyer. Garis-garis tersebut sebenarnya sama panjangnya. Berbagai penjelasan telah dikemukakan mengapa garis paling atas terlihat lebih panjang, namun hal tersebut tidak perlu menjadi perhatian kita di sini. Intinya adalah ini: garis-garis tersebut tetap terlihat tidak sama panjangnya, meskipun Anda tahu bahwa itu hanyalah ilusi optik. Menurut Fodor, fakta sederhana ini mempunyai implikasi penting untuk memahami arsitektur pikiran. Hal ini menunjukkan bahwa informasi bahwa kedua garis memiliki panjang yang sama disimpan di wilayah pikiran kognitif yang tidak dapat diakses oleh mekanisme persepsi kita. Jika persepsi visual tidak diringkas dengan cara ini tetapi dapat memanfaatkan semua informasi yang tersimpan dalam pikiran, maka ilusi akan hilang segera setelah Anda diberitahu bahwa garis-garis tersebut sebenarnya memiliki panjang yang sama.

Contoh lain dari enkapsulasi informasi berasal dari fenomena fobia manusia. Pertimbangkan ophidiophobia, atau ketakutan terhadap ular, yang tersebar luas di kalangan manusia. Meskipun Anda tahu bahwa ular tertentu tidak berbahaya, mis. karena Anda telah diberitahu bahwa kelenjar racunnya telah dihilangkan, kemungkinan besar Anda masih takut dan tidak ingin menyentuhnya. Fobia semacam ini seringkali bisa diatasi dengan pelatihan, tapi itu soal lain. Poin kuncinya adalah informasi bahwa ular itu tidak berbahaya tidak dapat diakses oleh bagian pikiran Anda yang menimbulkan reaksi ketakutan ketika Anda melihat ular. Hal ini menunjukkan bahwa mungkin ada modul 'ketakutan terhadap ular' yang tertanam dan dikemas secara informasi pada setiap manusia.

Anda mungkin bertanya-tanya mengapa masalah modularitas pikiran menjadi masalah para filsuf. Tentunya hanya sekedar pertanyaan fakta ilmiah apakah pikiran itu modular atau tidak? Hal ini memang benar, namun perdebatan ini mempunyai sejumlah dimensi filosofis. Yang pertama menyangkut bagaimana menghitung tugas dan modul kognitif. Pendukung modularitas berpendapat bahwa pikiran berisi modul khusus untuk melakukan tugas kognitif yang berbeda; lawan mereka menyangkal hal ini.

Namun bagaimana kita memutuskan apakah dua tugas kognitif itu sama atau berbeda? Apakah pengenalan wajah merupakan tugas kognitif tunggal atau terdiri dari dua tugas kognitif yang berbeda: mengenali wajah laki-laki dan mengenali wajah perempuan? Apakah pembagian panjang dan perkalian merupakan tugas kognitif yang berbeda, atau keduanya merupakan bagian dari tugas yang lebih umum dalam melakukan aritmatika? Pertanyaan semacam ini bersifat konseptual atau filosofis, bukan sekadar empiris, dan berpotensi penting dalam perdebatan modularitas. Misalkan penentang modularitas menghasilkan bukti eksperimental yang menunjukkan bahwa kita menggunakan kapasitas kognitif tunggal untuk melakukan berbagai jenis tugas kognitif. Lawan mereka mungkin menerima data eksperimen tetapi berargumen bahwa tugas-tugas kognitif yang dipermasalahkan semuanya berjenis sama, sehingga data tersebut sangat kompatibel dengan modularitas. Jadi agar perdebatan modularitas dapat terdefinisi dengan baik, diperlukan cara berprinsip dalam menghitung tugas dan modul kognitif.

Dimensi filosofis kedua muncul karena pendukung dan penentang modularitas menggunakan argumen apriori, selain bukti empiris langsung, untuk mendukung pandangan mereka. Fodor sendiri berpendapat bahwa meskipun persepsi dan bahasa mungkin bersifat modular, pemikiran dan penalaran tidak bisa bersifat 'holistik'. Untuk memahami argumen Fodor, misalkan Anda adalah anggota juri yang sedang mempertimbangkan keputusan apa yang akan diambil. Bagaimana Anda akan melakukan tugas Anda? Satu hal yang akan Anda pertimbangkan adalah apakah cerita terdakwa konsisten secara logika, apakah bebas dari kontradiksi? Dan Anda akan bertanya pada diri sendiri seberapa kuat bukti yang memberatkan terdakwa. Keterampilan penalaran yang Anda terapkan di sini, menguji konsistensi logis dan menilai bukti, bersifat umum; mereka tidak dirancang khusus untuk digunakan dalam layanan juri. Jadi kapasitas kognitif yang Anda gunakan dalam mempertimbangkan kesalahan terdakwa tidak spesifik pada domain tertentu. Juga tidak operasinya wajib, Anda harus secara sadar mempertimbangkan apakah terdakwa bersalah, dan dapat berhenti melakukannya kapan pun Anda mau, misalnya. saat istirahat makan siang. Terakhir, tidak ada enkapsulasi informasi juga. Tugas Anda adalah memutuskan apakah terdakwa bersalah, jadi Anda mungkin harus memanfaatkan informasi latar belakang yang Anda miliki jika Anda menganggapnya relevan. Misalnya, jika terdakwa bergerak-gerak gugup saat pemeriksaan silang, dan Anda yakin bahwa gerakan gugup sering kali merupakan tanda bersalah, Anda mungkin akan memanfaatkan keyakinan ini untuk mencapai keputusan Anda. Jadi tidak ada simpanan informasi yang tidak dapat diakses oleh mekanisme kognitif yang Anda gunakan untuk mencapai keputusan Anda (walaupun hakim mungkin meminta Anda untuk mengabaikan hal-hal tertentu). Singkatnya, tidak ada modul untuk memutuskan apakah seorang terdakwa bersalah. Anda mengatasi masalah kognitif ini menggunakan kecerdasan umum Anda.

Beberapa psikolog telah melangkah lebih jauh dari Fodor dan menyatakan bahwa pikiran sepenuhnya bersifat modular; ini dikenal sebagai 'hipotesis modularitas besar-besaran'. Para pendukung modularitas masif berpendapat secara umum bahwa kita mengharapkan pikiran manusia menunjukkan organisasi modular. Argumen utama mereka berasal dari pertimbangan adaptasi Darwinian. Pikiran manusia secara luas diperkirakan telah berevolusi pada zaman Pleistosen, yang memungkinkan nenek moyang hominid kita menghadapi tantangan sosial dan lingkungan yang mereka hadapi. Sarannya adalah organisasi modular menyediakan cara paling efisien untuk memecahkan tantangan-tantangan ini dan berperilaku adaptif. Seperangkat modul khusus, masing-masing dikhususkan untuk tugas tertentu, memungkinkan pemecahan masalah lebih cepat dan akurat. Analogi pisau tentara Swiss relevan di sini. Jelasnya, memiliki alat terpisah untuk membuka kaleng, membuka botol, dan mengencangkan sekrup lebih baik daripada memiliki satu alat serba guna yang dapat melakukan masing-masing hal tersebut. Demikian pula, pikiran dengan modul terpisah untuk pengenalan wajah, penguasaan bahasa, dan pilihan pasangan, misalnya, akan lebih efisien dibandingkan pikiran yang merupakan pemecah masalah untuk tujuan umum. Jadi pertimbangan desain yang optimal mendukung modularitas mental, demikian argumennya.

Argumen terkait menyatakan bahwa manusia tidak mungkin memperoleh semua informasi yang diperlukan untuk berperilaku adaptif dalam hidupnya. Kesempatan untuk belajar terlalu sedikit, demikian argumennya. Oleh karena itu, pikiran perlu memuat informasi bawaan, yang dikemas dalam sebuah modul, yang akan memungkinkan anak mengembangkan keterampilan kognitif yang sesuai dan dengan demikian berperilaku adaptif. Modul pemerolehan bahasa Chomsky menggambarkan hal ini. Modul ini berisi informasi bawaan tentang tata bahasa setiap bahasa manusia, memungkinkan anak memperoleh bahasa dengan masukan yang sangat minim. 'Kesenjangan' antara informasi yang diperlukan untuk menyelesaikan tugas kognitif dan informasi yang dapat diperoleh melalui pembelajaran sering kali digunakan untuk mendukung organisasi kognitif modular. Namun sebenarnya, ini adalah argumen yang menyatakan bahwa pikiran mengandung informasi bawaan, bukan modularitas itu sendiri. Ini adalah ide-ide yang berbeda secara logis, namun dalam praktiknya, para pembela modularitas cenderung percaya pada informasi bawaan dan sebaliknya.

Hubungan antara modularitas dan sifat bawaan ini menunjukkan hal lain yang secara filosofis penting dalam perdebatan modularitas. Gagasan bahwa pikiran mengandung informasi bawaan sangat bertentangan dengan filsafat empiris tradisional, yang menyatakan bahwa semua pengetahuan berasal dari pengalaman. Pada abad ke-17 dan ke-18, penganut empirisme seperti John Locke dan David Hume berargumen bahwa saat lahir, pikiran manusia adalah sebuah 'tabula rasa', atau papan tulis kosong, yang tidak ada tulisan apa pun di atasnya. Hanya melalui pengalaman manusia bisa mempunyai konsep dan pengetahuan. Doktrin empiris ini adalah doktrin yang terhormat, dan pada pandangan pertama, menurut banyak orang, doktrin ini jelas benar. Namun Chomsky berpendapat bahwa modul pemerolehan bahasanya, yang berisi informasi bawaan tentang tata bahasa universal, secara langsung menyangkal aspek filsafat empiris ini. Jika argumen Chomsky benar—sebuah poin yang diperdebatkan dengan hangat, maka argumen tersebut memberikan contoh menarik tentang bagaimana temuan ilmiah dapat menjadi masukan bagi perdebatan filosofis tradisional.

Masih terlalu dini untuk mengatakan apakah tesis modularitas besar-besaran akan terbukti dapat dipertahankan. Argumen apriori (yang mendukung dan menentang) tidak dapat menyelesaikan permasalahan dengan sendirinya; diperlukan bukti langsung. Fodor sendiri menolak modularitas besar-besaran, dan akibatnya, pesimistis terhadap kemungkinan psikologi kognitif dapat menjelaskan cara kerja pikiran manusia. Dia percaya bahwa hanya sistem modular yang dapat dipelajari secara ilmiah, sistem non-modular, karena tidak dikemas secara informasi, jauh lebih sulit untuk dimodelkan. Jadi menurut Fodor strategi penelitian terbaik bagi psikolog kognitif adalah fokus pada persepsi dan bahasa, mengesampingkan pemikiran dan penalaran. Namun tidak mengherankan, aspek pemikiran Fodor ini sangat kontroversial.

Bab 22

Sains dan kritiknya

Banyak orang yang menganggap remeh bahwa sains adalah hal yang baik, karena alasan yang jelas. Bagaimanapun juga, ilmu pengetahuan telah memberi kita listrik, air minum yang aman, penisilin, dan perjalanan udara yang semuanya tentu saja memberikan manfaat bagi umat manusia. Namun terlepas dari kontribusinya yang mengesankan terhadap kesejahteraan manusia, ilmu pengetahuan bukannya tanpa kritik. Ada yang berpendapat bahwa masyarakat menghabiskan terlalu banyak uang untuk ilmu pengetahuan dibandingkan seni; yang lain mengamati bahwa sains telah memberi kita kemampuan teknologi yang tanpanya kita akan lebih baik, misalnya. senjata pemusnah massal. Beberapa feminis berpendapat bahwa sains pada dasarnya bersifat bias laki-laki; mereka yang beragama sering merasa bahwa sains mengancam keimanan mereka; dan para antropolog menuduh sains Barat dengan arogan menganggap superioritasnya dibandingkan pengetahuan dan kepercayaan budaya asli. Hal ini tidak mencakup seluruh daftar kritik yang menjadi sasaran sains, namun di sini kami membatasi perhatian kami pada tiga kritik yang memiliki kepentingan filosofis tertentu.

22.1 Ilmiah

Kata 'ilmiah' telah memperoleh cap khusus di zaman modern. Jika seseorang menuduh Anda berperilaku tidak ilmiah, hampir pasti mereka sedang mengkritik Anda. Perilaku ilmiah bersifat rasional dan patut dipuji; perilaku tidak ilmiah adalah tidak rasional dan patut dihina. Sulit untuk mengetahui mengapa menyebut sesuatu yang ilmiah harus memiliki konotasi ini, namun hal ini mungkin berkaitan dengan tingginya status ilmu pengetahuan dalam masyarakat modern. Para ilmuwan diperlakukan sebagai ahli, pendapat mereka secara teratur dicari mengenai hal-hal yang penting secara sosial. Tentu saja, semua orang menyadari bahwa para ilmuwan terkadang melakukan kesalahan; misalnya, para penasihat ilmiah pemerintah Inggris pada awal tahun 1990-an menyatakan bahwa penyakit 'sapi gila' tidak menimbulkan ancaman bagi manusia, namun sayangnya hal ini terbukti keliru. Namun gangguan semacam ini yang kadang terjadi cenderung tidak menggoyahkan kepercayaan masyarakat terhadap sains, maupun harga diri para ilmuwan. Di banyak negara, ilmuwan dipandang seperti pemimpin agama: pemilik pengetahuan khusus yang tidak dapat diakses oleh orang awam.

'Ilmiah' adalah istilah merendahkan yang digunakan oleh beberapa filsuf untuk menggambarkan apa yang mereka lihat sebagai pemujaan terhadap sains atau sikap terlalu menghormati sains modern. Penentang saintisme berpendapat bahwa sains bukanlah satu-satunya bentuk upaya intelektual yang valid dan bukan satu-satunya cara untuk memahami dunia. Mereka sering menekankan bahwa mereka bukanlah anti-sains; yang ditentang mereka adalah asumsi bahwa metode ilmiah dapat diterapkan pada setiap pokok bahasan. Jadi tujuan mereka bukan untuk menyerang ilmu pengetahuan tetapi untuk menempatkannya pada tempatnya, dengan menolak gagasan bahwa pengetahuan ilmiah adalah seluruh pengetahuan yang ada.

Saintisme adalah sebuah doktrin yang agak kabur, dan mengingat istilah ini memiliki penggunaan yang merendahkan, hanya sedikit orang yang secara eksplisit mengakui bahwa mereka memercayainya. Meskipun demikian, sesuatu yang mirip dengan pemujaan terhadap sains adalah ciri asli dari lanskap intelektual. Hal ini belum tentu buruk, mungkin ilmu pengetahuan patut dipuja. Namun hal tersebut tentu saja merupakan fenomena nyata. Salah satu bidang yang sering dituduh sebagai pemujaan ilmu pengetahuan adalah filsafat anglophone kontemporer (yang mana filsafat ilmu hanyalah salah satu cabangnya). Secara tradisional, filsafat dianggap sebagai mata pelajaran humaniora, meskipun terdapat hubungan historis yang erat dengan matematika dan sains, dan hal ini memiliki alasan yang kuat. Filsafat mengajukan pertanyaan tentang hakikat pengetahuan, moralitas, dan kesejahteraan manusia, misalnya, yang tampaknya tidak dapat diselesaikan dengan metode ilmiah. Tidak ada cabang ilmu pengetahuan yang memberi tahu kita bagaimana kita harus menjalani hidup, apa itu pengetahuan, atau apa saja yang terlibat dalam perkembangan manusia; ini pada dasarnya adalah pertanyaan filosofis.

Mengingat hal ini, mungkin tampak mengejutkan bahwa beberapa filsuf bersikeras bahwa sains adalah satu-satunya jalan yang sah menuju pengetahuan. Mereka berpendapat bahwa pertanyaan-pertanyaan yang tidak dapat diselesaikan dengan cara-cara ilmiah bukanlah pertanyaan-pertanyaan yang asli. Pandangan ini didukung oleh filsuf terkenal Inggris abad ke-20, Bertrand Russell, yang menulis: 'Pengetahuan apa pun yang dapat dicapai, harus dicapai melalui metode ilmiah; dan apa yang tidak dapat ditemukan oleh sains, tidak dapat diketahui oleh umat manusia'. Landasan pandangan ini terletak pada doktrin yang disebut 'naturalisme', yang menekankan bahwa kita manusia adalah bagian tak terpisahkan dari alam, bukan sesuatu yang terpisah darinya, seperti yang selama ini diyakini. Karena ilmu pengetahuan mempelajari seluruh alam, tentunya ilmu pengetahuan harus mampu mengungkap kebenaran lengkap tentang kondisi manusia, tanpa menyisakan apa pun untuk filsafat? Dalam pandangan ini, filsafat tidak mempunyai pokok bahasan tersendiri. Sejauh hal ini mempunyai peran yang berguna, hal ini melibatkan 'klarifikasi konsep-konsep ilmiah' sehingga para ilmuwan dapat melanjutkan pekerjaan mereka.

Tidak mengherankan jika banyak filsuf menolak subordinasi disiplin mereka pada sains; ini adalah salah satu sumber penentangan terhadap saintisme. Mereka berargumentasi bahwa penyelidikan filosofis mempunyai metode tersendiri, yang dapat mengungkap kebenaran yang tidak dapat diungkapkan oleh sains. Para pendukung pandangan ini berpendapat bahwa filsafat harus bertujuan untuk konsisten dengan ilmu pengetahuan, dalam arti tidak mengajukan klaim yang bertentangan dengan apa yang diajarkan ilmu pengetahuan kepada kita. Mereka biasanya menerima bahwa kita manusia adalah bagian dari tatanan alam, sehingga tidak dikecualikan dari lingkup ilmu pengetahuan. Namun, menurut mereka, hal ini tidak berarti bahwa sains adalah satu-satunya sumber pengetahuan yang sah tentang dunia.

Apa sebenarnya metode penyelidikan filosofis ini? Hal ini mencakup penalaran logis, penggunaan eksperimen pemikiran, dan apa yang disebut 'analisis konseptual', yang mencoba membatasi suatu konsep tertentu dengan mengandalkan intuisi kita tentang apakah suatu kasus tertentu termasuk dalam konsep tersebut. Misalnya, pertanyaan filosofis klasik menanyakan apakah pengetahuan identik dengan keyakinan sejati. Kebanyakan filsuf mengatakan bahwa jawabannya adalah 'tidak', dengan dasar bahwa kita dapat menyusun kasus-kasus di mana seseorang benar-benar mempercayai suatu proposisi tertentu tetapi tidak dapat dikatakan mengetahuinya. (Contohnya, misalkan Anda percaya bahwa saat ini pukul enam lewat sepuluh karena itulah yang tertulis pada jam tangan Anda; pada kenyataannya, jam tangan Anda rusak, namun secara kebetulan, waktu sebenarnya menunjukkan pukul enam lewat sepuluh! Oleh karena itu, keyakinan Anda benar, namun secara intuitif Anda tidak tahu bahwa saat itu pukul enam lewat sepuluh, karena Anda hanya 'beruntung'.) Jadi dengan menggunakan analisis konseptual, kita dapat menetapkan bahwa pengetahuan dan keyakinan yang benar tidaklah identik, yang merupakan kebenaran filosofis substantif. Ini hanyalah salah satu contoh, namun menggambarkan gagasan bahwa penyelidikan filosofis dapat menghasilkan pengetahuan sejati dengan menggunakan metode non-ilmiahnya sendiri.

Bagaimana seharusnya perdebatan ini dinilai? Di satu sisi, tentu saja terdapat contoh-contoh pertanyaan filosofis yang tampaknya asli, tidak berasal dari ilmu pengetahuan apa pun, dan dapat dijawab dengan metode khas para filsuf. Namun, banyak pertanyaan yang dibahas dalam sejarah filsafat, misalnya. tentang persepsi, imajinasi, dan ingatan, ternyata menjadi persoalan bagi ilmu-ilmu empiris, khususnya psikologi. Memang benar, kumpulan pertanyaan yang digolongkan sebagai pertanyaan 'filosofis' telah menyusut selama berabad-abad, seiring dengan semakin banyaknya pertanyaan yang disesuaikan dengan ilmu pengetahuan. Selain itu, gagasan bahwa penyelidikan filosofis dan penyelidikan ilmiah bersifat otonom, masing-masing mengandalkan metodenya sendiri, telah dikritik sebagai angan-angan; Para penentangnya menyatakan bahwa meskipun ada kemajuan dalam ilmu pengetahuan, kemajuan dalam filsafat agak sulit dilihat.

Persoalan yang serupa berkaitan dengan hubungan antara ilmu-ilmu alam dan ilmu-ilmu sosial. Sama seperti para filsuf yang mengeluhkan 'pemujaan ilmu pengetahuan' dalam disiplin mereka, demikian pula ilmuwan sosial mengeluhkan 'pemujaan ilmu alam' dalam disiplin mereka. Seringkali ilmu-ilmu alam seperti fisika, kimia, dan biologi dirasakan lebih maju dibandingkan ilmu-ilmu sosial seperti ekonomi, sosiologi, dan antropologi; kelompok pertama dapat merumuskan hukum yang tepat dengan kekuatan prediksi yang besar, sedangkan kelompok kedua biasanya tidak bisa. Mengapa demikian? Hal ini tidak mungkin terjadi karena ilmuwan alam lebih pintar daripada ilmuwan sosial. Salah satu jawaban yang mungkin adalah metode ilmu pengetahuan alam lebih unggul. Jika hal ini benar, maka apa yang perlu dilakukan oleh ilmu-ilmu sosial untuk mengejar ketertinggalannya adalah dengan meniru metode ilmu-ilmu alam. Sampai batas tertentu, hal ini sudah terjadi. Meningkatnya penggunaan matematika dalam ilmu-ilmu sosial mungkin sebagian disebabkan oleh sikap ini. Fisika membuat lompatan maju yang besar ketika Galileo mengambil langkah menerapkan bahasa matematika pada deskripsi gerak, sehingga tergoda untuk berpikir bahwa lompatan maju yang sebanding mungkin dapat dicapai dalam ilmu-ilmu sosial jika ada cara 'matematisasi' materi pelajaran yang sebanding. dapat ditemukan.

Namun, beberapa ilmuwan sosial menolak saran bahwa mereka harus memandang ilmu alam dengan cara ini, dengan alasan bahwa metode ilmu alam belum tentu sesuai untuk mempelajari fenomena sosial. Mereka biasanya menyangkal bahwa ilmu-ilmu sosial lebih miskin jika dibandingkan dengan ilmu-ilmu alam, dan menunjukkan bahwa kompleksitas fenomena sosial, dan fakta bahwa eksperimen terkontrol biasanya tidak dapat dilakukan, berarti bahwa menemukan hukum yang tepat dengan kekuatan prediktif bukanlah suatu pilihan yang tepat. tolok ukur keberhasilan.

Versi berpengaruh dari argumen ini berasal dari sosiolog Jerman abad ke-19 Wilhelm Dilthey dan Max Weber. Mereka berpendapat bahwa fenomena sosial harus dipahami dari sudut pandang aktor yang bertanggung jawab atas fenomena tersebut. Yang membedakan fenomena sosial dengan fenomena alam adalah bahwa fenomena sosial merupakan hasil kesengajaan manusia. Oleh karena itu, suatu jenis pemahaman khusus, yang disebut verstehen, diperlukan untuk penyelidikan ilmu sosial; ini melibatkan upaya untuk memahami makna subjektif yang dimiliki suatu tindakan sosial bagi aktornya. Misalnya, seorang antropolog yang mempelajari suatu ritual keagamaan perlu memahami pentingnya ritual tersebut bagi para pesertanya; analisis yang murni 'objektif', seperti yang dapat diperoleh dengan menerapkan metode ilmu pengetahuan alam, tidak dapat menghasilkan pemahaman yang sejati mengenai ritual tersebut, karena analisis tersebut mengabaikan hal krusial mengenai makna ritual tersebut. Doktrin verstehen dengan demikian mengemukakan adanya diskontinuitas yang tajam antara ilmu-ilmu alam dan ilmu-ilmu sosial. Doktrin tersebut mempunyai pengaruh yang signifikan terhadap perkembangan antropologi dan sosiologi khususnya pada abad ke-20.

Baik isu saintisme maupun isu paralel tentang ilmu alam dan ilmu sosial tidak mudah untuk diselesaikan. Hal ini antara lain karena tidak sepenuhnya jelas apa sebenarnya yang dimaksud dengan 'metode ilmu pengetahuan', atau 'metode ilmu pengetahuan alam', yang sering diabaikan oleh kedua belah pihak dalam perdebatan. Jika kita ingin mengetahui apakah metode sains dapat diterapkan pada setiap mata pelajaran, atau apakah metode tersebut mampu menjawab setiap pertanyaan penting, kita tentu perlu mengetahui apa sebenarnya metode tersebut. Namun seperti yang telah kita lihat, pertanyaan ini tidak sejelas kelihatannya. Tentu saja, kita mengetahui beberapa ciri utama penyelidikan ilmiah: pengujian eksperimental, observasi, konstruksi teori, dan inferensi induktif. Namun daftar ini tidak memberikan definisi yang tepat tentang 'metode ilmiah'. Juga tidak jelas bahwa definisi seperti itu dapat diberikan. Ilmu pengetahuan berubah dengan cepat dari waktu ke waktu, sehingga asumsi bahwa ada 'metode ilmiah' yang tetap dan tidak berubah, yang digunakan oleh semua disiplin ilmu sepanjang waktu, tidak dapat dihindari. Namun asumsi ini tersirat baik dalam klaim bahwa sains adalah satu-satunya jalan menuju pengetahuan maupun dalam klaim tandingan bahwa beberapa pertanyaan tidak dapat dijawab dengan metode ilmiah. Hal ini menunjukkan bahwa, setidaknya sampai batas tertentu, perdebatan tentang saintisme mungkin bertumpu pada anggapan yang salah.

22.2 Sains dan agama

Ketegangan antara sains dan agama sudah lama terjadi. Mungkin contoh paling terkenal adalah perselisihan Galileo dengan Gereja Katolik. Pada tahun 1633, Inkuisisi memaksa Galileo untuk secara terbuka menarik kembali pandangan Copernicusnya dan menghukumnya untuk menghabiskan tahun-tahun terakhirnya sebagai tahanan rumah di Florence. Gereja menolak teori Copernicus karena tentu saja bertentangan dengan Kitab Suci. Dalam beberapa tahun terakhir, pertikaian sains/agama yang paling menonjol adalah pertikaian sengit antara kaum Darwinis dan pendukung 'perancangan cerdas' di Amerika Serikat, yang akan menjadi fokus kami di sini.

Penentangan teologis terhadap teori evolusi Darwin bukanlah hal baru. Ketika *The Origin of Species* diterbitkan pada tahun 1859, buku ini langsung menuai kritik dari kalangan gereja di Inggris. Alasannya jelas: teori Darwin menyatakan bahwa semua spesies yang ada saat ini, termasuk manusia, berasal dari nenek moyang yang sama dalam jangka waktu yang lama. Teori ini jelas bertentangan dengan Kitab Kejadian yang mengatakan bahwa Tuhan menciptakan semua makhluk hidup dalam jangka waktu enam hari. Beberapa penganut Darwin telah mencoba menyelaraskan keyakinan mereka akan evolusi dengan keyakinan Kristen mereka dengan menyatakan bahwa Kitab Kejadian tidak boleh ditafsirkan secara harfiah, melainkan harus dianggap sebagai kiasan atau simbolik. Namun, di AS, banyak penganut Protestan evangelis yang tidak mau mengubah keyakinan agama mereka agar sesuai dengan temuan ilmiah. Mereka bersikukuh bahwa kisah penciptaan dalam Alkitab benar adanya dan teori evolusi Darwin sepenuhnya salah.

Pendapat ini dikenal sebagai 'kreasionisme', dan diterima oleh sekitar 40 persen populasi orang dewasa di AS. Kreasionisme merupakan sebuah kekuatan politik yang sangat kuat, dan selama bertahun-tahun telah memberikan pengaruh yang besar terhadap pengajaran biologi di sekolah-sekolah menengah di Amerika, sehingga membuat para ilmuwan kecewa. Karena konstitusi Amerika melarang pengajaran agama di sekolah-sekolah umum, maka diciptakanlah 'ilmu penciptaan' yang menyatakan bahwa penjelasan alkitabiah tentang penciptaan adalah penjelasan ilmiah yang lebih baik mengenai kehidupan di bumi dibandingkan dengan teori evolusi Darwin. Jadi mengajarkan penciptaan berdasarkan Alkitab tidak melanggar larangan konstitusi, karena hal itu dianggap sebagai ilmu pengetahuan, bukan agama! Pada tahun 1981, sebuah undang-undang disahkan di Arkansas yang menyerukan agar guru biologi memberikan 'waktu yang sama' pada ilmu pengetahuan evolusi dan penciptaan. Namun, hal ini ditolak oleh hakim federal pada tahun berikutnya, dan pada tahun 1987 keputusan Mahkamah Agung memutuskan bahwa pengajaran ilmu penciptaan di sekolah umum adalah inkonstitusional.

Menyusul kekalahan hukum ini, gerakan sains penciptaan dengan cerdik mengubah namanya menjadi 'desain cerdas'. Nama tersebut mengacu pada argumen lama tentang keberadaan Tuhan, yang dikenal sebagai 'argumen dari desain', yang mengatakan bahwa keberadaan organisme biologis yang kompleks hanya dapat dijelaskan dengan asumsi bahwa dewa yang cerdas menciptakannya; dewa ini biasanya diidentikkan dengan Tuhan Kristen. Argumen mengenai desain adalah bagian dari arus utama intelektual pada era pra-Darwinian namun tentu saja ditolak oleh para ahli biologi kontemporer. Para pendukung rancangan cerdas telah menyadarkan kembali argumen tersebut, dengan mengklaim bahwa organisme biologis menunjukkan 'kompleksitas yang tidak dapat direduksi' yang tidak mungkin berevolusi dengan cara Darwin, dan dengan demikian merupakan bukti hasil karya Tuhan. Sistem yang 'kompleks dan tidak dapat direduksi' adalah sistem yang memiliki sejumlah bagian yang saling berinteraksi, yang masing-masing bagiannya sangat penting bagi berfungsinya sistem, jika salah satu bagian tersebut disingkirkan atau diubah, maka sistem akan rusak. Memang benar bahwa organisme biologis, dan memang sel-sel individual, dalam hal ini bersifat kompleks, karena fungsinya bergantung pada aktivitas terkoordinasi dari banyak komponen biokimia. Saling ketergantungan semacam ini tidak mungkin terjadi melalui seleksi alam, klaim kelompok perancang cerdas.

Meskipun baru-baru ini menonjol, argumen ini adalah anggur lama dalam botol baru. Dalam *The Origin of Species*, Darwin sendiri bertanya-tanya bagaimana mata vertebrata, sebuah organ yang sangat kompleks, bisa berevolusi melalui seleksi alam, dan ia menyatakan bahwa sekilas hal ini tampak 'tidak masuk akal'. Namun, Darwin percaya bahwa kesulitan ini dapat diatasi dengan membayangkan rangkaian mulai dari mata sederhana (mungkin hanya beberapa sel peka cahaya) hingga mata modern melalui serangkaian perbaikan bertahap, yang masing-masing memberikan keuntungan selektif. Dengan cara ini, sebuah organ yang sangat kompleks, dengan komponen-komponen yang telah diatur dengan baik, dapat berevolusi melalui seleksi alam. Darwin sendiri hanya dapat menebak apa saja tahap peralihan dalam evolusi mata. Namun karya ilmiah baru-baru ini telah menawarkan wawasan rinci tentang kemungkinan urutan tahapan, berdasarkan studi perkembangan embrio mata, dan melakukan analisis genetik terperinci, pada spesies vertebrata. Jadi anggapan bahwa mata tidak mungkin muncul melalui seleksi alam telah berhasil dibantah. Moralnya bersifat generalisasi: tidak ada bukti yang mendukung gagasan bahwa organisme menunjukkan ciri-ciri yang tidak mungkin dihasilkan oleh proses evolusi.

Selain penekanan mereka pada 'kompleksitas yang tidak dapat direduksi', para pendukung perancangan cerdas telah mencoba melemahkan pandangan dunia Darwin dengan cara lain. Mereka berargumentasi bahwa bukti-bukti yang mendukung Darwinisme tidak meyakinkan, sehingga Darwinisme tidak boleh dianggap sebagai fakta yang sudah mapan melainkan sebagai 'hanya sebuah teori'. Selain itu, mereka juga berfokus pada berbagai perselisihan internal di antara para penganut Darwin, dan mengambil beberapa pernyataan yang tidak hati-hati dari masing-masing ahli biologi, dalam upaya untuk menunjukkan bahwa ketidaksepakatan dengan teori evolusi adalah hal yang wajar secara ilmiah. Mereka menyimpulkan bahwa karena Darwinisme 'hanya sebuah teori', siswa juga harus dihadapkan pada teori-teori alternatif seperti teori bahwa dewa yang cerdas menciptakan semua organisme hidup.

Di satu sisi, memang benar bahwa Darwinisme 'hanya sebuah teori' dan bukan fakta yang terbukti. Seperti yang kita lihat di Bab 17, hal ini tidak mungkin terjadi membuktikan bahwa suatu teori ilmiah adalah benar, dalam arti pembuktian yang ketat, karena kesimpulan dari data ke teori selalu bersifat non-deduktif. Namun ini adalah poin umum yang tidak ada hubungannya dengan teori evolusi itu sendiri. Dengan cara yang sama, kita dapat berargumen bahwa 'hanya sebuah teori' bahwa bumi berputar mengelilingi matahari, atau bahwa air terbuat dari H_2O, atau bahwa benda-benda yang tidak didukung cenderung jatuh, sehingga siswa harus diberikan alternatif terhadap masing-masing teori tersebut. ini. Namun, para pendukung desain cerdas tidak membantah hal ini. Mereka tidak skeptis terhadap ilmu pengetahuan secara keseluruhan, namun terhadap teori evolusi secara khusus. Jadi, agar posisi mereka bisa dipertahankan, mereka tidak bisa begitu saja menyatakan bahwa data kami tidak menjamin kebenaran teori Darwin. Hal yang sama berlaku untuk setiap teori ilmiah, dan juga berlaku untuk sebagian besar keyakinan yang masuk akal.

Argumen rancangan cerdas lainnya adalah bahwa catatan fosil tidak lengkap, terutama jika menyangkut nenek moyang Homo sapiens. Ada beberapa kebenaran dalam tuduhan ini. Para evolusionis telah lama bingung mengenai kesenjangan dalam catatan fosil. Salah satu teka-teki yang masih ada adalah mengapa hanya ada sedikit sekali 'fosil transisi' makhluk peralihan antara dua spesies. Jika spesies kemudian berevolusi dari spesies sebelumnya seperti yang ditegaskan teori Darwin, tentu saja fosil transisi merupakan hal yang umum? Namun, hal ini bukanlah argumen yang baik untuk menentang teori Darwin. Fosil bukanlah satu-satunya atau bahkan sumber utama bukti teori evolusi. Sumber lain termasuk anatomi komparatif, embriologi, biogeografi, dan genetika. Misalnya saja fakta bahwa manusia dan simpanse mempunyai 98 persen DNA yang sama. Fakta ini dan ribuan fakta serupa sangat masuk akal jika teori evolusi benar, dan dengan demikian merupakan bukti bagus bagi teori tersebut. Tentu saja, seorang pendukung rancangan cerdas juga dapat menjelaskan fakta ini, dengan mengatakan bahwa sang perancang memilih untuk membuat manusia dan simpanse secara genetis serupa karena alasan mereka sendiri. Namun kemungkinan untuk memberikan 'penjelasan' semacam ini hanya menunjukkan bahwa teori Darwin tidak disertai bukti secara logis, sehingga pada prinsipnya, penjelasan lain dapat dibuat. Poin metodologis ini benar tetapi tidak menunjukkan sesuatu yang istimewa mengenai Darwinisme.

Meskipun argumen kelompok perancangan cerdas sama sekali tidak masuk akal, kontroversi tersebut menimbulkan pertanyaan serius mengenai pendidikan sains. Bagaimana seharusnya ketegangan antara sains dan agama diatasi dalam sistem pendidikan sekuler? Siapa yang harus menentukan isi kelas sains di sekolah menengah? Haruskah orang tua yang tidak ingin anaknya diajari tentang evolusi, atau materi ilmiah lainnya, ditolak oleh negara? Pertanyaan-pertanyaan ini biasanya hanya mendapat sedikit perhatian publik, namun pertentangan antara Darwinisme dan perancangan cerdas telah mengedepankan pertanyaan-pertanyaan ini.

22.3 Apakah sains bebas nilai?

Semua orang pasti setuju bahwa pengetahuan ilmiah terkadang digunakan untuk tujuan yang tidak etis, misalnya membuat senjata nuklir dan kimia. Namun, kasus-kasus seperti ini tidak menunjukkan bahwa ada sesuatu yang tidak pantas secara etis mengenai pengetahuan ilmiah itu sendiri. Penggunaan pengetahuan tersebutlah yang tidak etis. Memang benar, banyak filsuf akan mengatakan bahwa tidak masuk akal jika kita berbicara tentang sains atau pengetahuan ilmiah yang etis atau tidak etis. Sains berkaitan dengan fakta, dan fakta itu sendiri tidak memiliki signifikansi etis. Apa yang kita lakukan terhadap fakta-fakta itulah yang benar atau salah, bermoral atau tidak bermoral. Dalam pandangan ini, sains pada dasarnya adalah aktivitas bebas nilai yang tugasnya hanya memberikan informasi tentang dunia. Apa yang masyarakat pilih untuk dilakukan terhadap informasi tersebut adalah soal lain.

Tidak semua filsuf menerima gambaran sains ini sebagai sesuatu yang netral dalam kaitannya dengan pertanyaan tentang nilai, maupun dikotomi fakta/nilai yang mendasarinya. Beberapa orang menyatakan bahwa penyelidikan ilmiah selalu sarat dengan penilaian nilai. Salah satu argumen untuk hal ini berasal dari fakta nyata bahwa ilmuwan harus memilih apa yang akan dipelajari, tidak semuanya dapat diperiksa sekaligus. Jadi penilaian mengenai kepentingan relatif dari objek-objek studi yang berbeda harus dibuat, dan ini adalah penilaian nilai, dalam arti yang lemah. Argumen lain berasal dari fakta bahwa kumpulan data apa pun pada prinsipnya dapat dijelaskan dengan lebih dari satu cara. Oleh karena itu, pilihan teori seorang ilmuwan tidak akan pernah ditentukan secara unik oleh datanya. Beberapa filsuf menganggap hal ini untuk menunjukkan bahwa nilai selalu terlibat dalam pilihan teori, dan dengan demikian sains tidak bisa bebas nilai. Argumen ketiga adalah bahwa pengetahuan ilmiah tidak dapat dipisahkan dari penerapannya sebagaimana yang disyaratkan oleh kebebasan nilai. Berdasarkan pandangan ini, sangatlah naif jika kita menggambarkan para ilmuwan yang melakukan penelitian tanpa pamrih demi kepentingan mereka sendiri, tanpa memikirkan penerapan praktisnya. Fakta bahwa banyak penelitian ilmiah saat ini didanai oleh sektor swasta memperkuat pandangan ini.

Meskipun menarik, argumen-argumen ini agak abstrak dan bertujuan untuk menunjukkan bahwa sains tidak bisa bebas nilai sebagai sebuah prinsip, dibandingkan mengidentifikasi kasus-kasus aktual mengenai nilai yang berperan dalam sains. Namun tuduhan spesifik mengenai muatan nilai juga telah dilontarkan. Di sini kita fokus pada dua contoh, satu dari psikologi/biologi dan yang lainnya dari kedokteran.

Kasus pertama kami berkaitan dengan disiplin psikologi evolusioner, yang mencoba memahami susunan psikologis manusia, dan perilaku yang dihasilkannya, dengan menerapkan prinsip-prinsip Darwin. Sekilas, proyek ini terdengar sangat masuk akal. Manusia hanyalah salah satu spesies hewan, dan para ahli biologi sepakat bahwa teori Darwin dapat menjelaskan banyak hal tentang perilaku hewan dan landasan psikologisnya. Misalnya, ada penjelasan Darwin yang jelas tentang mengapa tikus secara naluriah takut terhadap kucing. Di masa lalu, tikus dengan rasa takut naluriah ini cenderung meninggalkan lebih banyak keturunan dibandingkan tikus yang tidak memiliki keturunan, karena tikus tersebut akan dimakan; dengan asumsi bahwa naluri tersebut didasarkan pada genetika, dan dengan demikian diturunkan dari orang tua ke keturunannya, selama beberapa generasi, maka naluri tersebut akan menyebar ke seluruh populasi. Para psikolog evolusi percaya bahwa banyak aspek psikologi manusia yang dapat diberikan penjelasan Darwinian semacam ini.

Sebagai ilustrasi, pertimbangkan preferensi kawin manusia. Terdapat bukti bahwa laki-laki dan perempuan secara sistematis berbeda dalam atribut yang mereka cari dari pasangan kawinnya. (Kekuatan bukti ini masih diperdebatkan.) Sebuah survei lintas budaya besar-besaran yang dilakukan oleh David Buss menemukan bahwa laki-laki rata-rata lebih memilih pasangan nikah perempuan mereka yang lebih muda dari mereka, dan memiliki usia yang hampir sama dengan puncak perempuan. kesuburan (sekitar 24 tahun). Sebaliknya, perempuan lebih memilih menikah dengan laki-laki yang lebih tua darinya. Selain itu, daya tarik fisik lebih penting bagi laki-laki, sedangkan potensi penghasilan lebih penting bagi perempuan. Buss dan psikolog evolusioner lainnya berpendapat bahwa preferensi ini mempunyai penjelasan

Darwin. Dari sudut pandang evolusi, strategi terbaik bagi pejantan adalah menemukan pasangan betina yang memiliki potensi reproduksi tinggi, karena hal ini akan memaksimalkan jumlah keturunan yang dapat dihasilkan oleh betina tersebut. Betina sebaiknya memilih pejantan berstatus tinggi, yang menguasai sumber daya dan mampu menafkahi keturunannya. (Perbedaan dalam strategi kawin yang optimal ini berasal dari fakta bahwa betina memiliki persediaan telur yang terbatas, sedangkan jantan memiliki sperma yang tidak terbatas, sehingga perawatan keturunan lebih penting bagi betina.) Oleh karena itu, ada pendapat bahwa preferensi kawin pada manusia modern bisa berbeda-beda. dijelaskan oleh seleksi alam Darwin.

Meskipun gagasan bahwa ciri-ciri psikologis manusia telah berevolusi melalui seleksi alam adalah masuk akal, psikologi evolusioner adalah bidang yang kontroversial, dan para praktisinya telah dituduh memiliki bias ideologis. Kontroversi ini bermula dari 'perang sosiobiologi' pada tahun 1970an dan 1980an. Sosiobiologi manusia adalah disiplin pendahulu psikologi evolusioner dan memiliki komitmen yang sama untuk mencari penjelasan Darwin tentang perilaku manusia. Serangkaian pertukaran sengit terjadi antara E. O. Wilson, yang bukunya tahun 1975 Sociobiology mendirikan bidang ini, dan rekannya di Harvard Richard Lewontin dan Stephen Jay Gould. Perselisihan ini muncul dari klaim Wilson bahwa banyak perilaku sosial manusia, termasuk agresi, pemerkosaan, dan xenofobia, mempunyai dasar genetik, dan merupakan adaptasi yang disukai oleh seleksi alam karena meningkatkan keberhasilan reproduksi nenek moyang kita.

Sosiobiologi menuai berbagai kritik, beberapa di antaranya sangat ilmiah. Kritikus menunjukkan bahwa hipotesis sosiobiologis sulit untuk diuji sehingga harus dianggap sebagai dugaan, bukan kebenaran yang pasti, dan bahwa pengaruh budaya terhadap perilaku manusia tidak boleh diremehkan. Namun pihak lain mengajukan keberatan yang lebih mendasar, dengan menyatakan bahwa seluruh upaya sosiobiologis secara ideologis patut dicurigai. Mereka melihatnya sebagai upaya untuk memaafkan perilaku anti-sosial, yang biasanya dilakukan oleh laki-laki, atau untuk mendukung keniscayaan pengaturan sosial tertentu. Dengan berargumentasi bahwa pemerkosaan, misalnya, mempunyai komponen genetik dan muncul melalui seleksi Darwin, para ahli sosiobiologi tampaknya menyiratkan bahwa hal tersebut 'alami' sehingga para pemerkosa tidak bertanggung jawab atas tindakan mereka—mereka hanya menuruti dorongan genetik mereka. Singkatnya, para kritikus menuduh bahwa sosiobiologi adalah ilmu yang sarat nilai, dan nilai-nilai yang terkandung di dalamnya sangat meragukan.

Dalam banyak hal, psikologi evolusioner modern mewakili kemajuan dibandingkan sosiobiologi pada tahun 1970an dan 1980an. Karya terbaik dalam psikologi evolusioner memiliki dasar empiris yang kuat dan memenuhi standar ilmiah yang paling ketat. Determinisme genetis yang naif dari para sosiobiolog awal telah memberikan gambaran yang lebih berbeda di mana faktor-faktor budaya, dan juga gen, diakui mempengaruhi perilaku, dan di mana keragaman lintas budaya tidak diabaikan. Namun, psikologi evolusioner terus menarik kritik, sebagian karena psikologi evolusioner sama dengan pendahulunya yang menekankan sisi 'gelap' dari sifat manusia, fokus pada hal-hal yang berkaitan dengan seks, perkawinan, dan pernikahan, serta dugaan adanya perbedaan psikologis bawaan. antara pria dan wanita. Fokus-fokus ini agak mengejutkan, mengingat psikologi manusia mencakup lebih dari itu. Oleh karena itu, tuduhan bahwa psikologi evolusioner berfungsi untuk memperkuat stereotip yang ada, meskipun secara tidak sengaja, sulit untuk sepenuhnya dihindari.

Salah satu tanggapan yang mungkin terhadap tuduhan ini adalah dengan menekankan perbedaan antara fakta dan nilai. Pertimbangkan saran yang dibuat oleh beberapa psikolog evolusioner bahwa perselingkuhan dalam perkawinan, atau 'persetubuhan ekstra-pasangan', adalah strategi berevolusi yang digunakan perempuan untuk memperoleh manfaat genetik bagi keturunannya ketika pasangan jangka panjang mereka memiliki kualitas genetik yang rendah. Benar atau tidaknya hal ini mungkin merupakan pertanyaan berdasarkan fakta ilmiah, meski tidak mudah untuk dijawab. Tapi fakta adalah satu hal, nilai adalah hal lain. Sekalipun persetubuhan ekstra-pasangan merupakan adaptasi evolusioner, hal itu tidak menjadikannya benar secara moral. Jadi tidak ada yang mencurigakan secara ideologis mengenai psikologi evolusioner, meskipun fokus penelitiannya agak selektif. Seperti semua sains, sains hanya mencoba memberi tahu kita fakta tentang dunia. Terkadang faktanya meresahkan, tapi kita harus belajar menghadapinya.

Contoh kedua kita mengenai kemungkinan muatan nilai datang dari psikiatri, cabang kedokteran yang menangani gangguan mental seperti depresi, skizofrenia, dan anoreksia. Terdapat perdebatan yang sedang berlangsung di kalangan psikiater dan filsuf mengenai bagaimana konsep gangguan mental (atau penyakit mental) harus dipahami. Ada kelompok yang menganut 'model medis', yang mengatakan bahwa masalah apakah sesuatu itu merupakan gangguan mental atau bukan merupakan hal yang obyektif; tidak ada penilaian nilai yang terlibat. Gangguan mental dan fisik sama dalam hal ini, demikian argumennya. Jika Anda menderita diabetes atau emfisema, misalnya, tubuh fisik Anda tidak berfungsi dengan baik; Demikian pula, jika Anda menderita depresi atau skizofrenia, pikiran Anda tidak bekerja dengan baik. Jadi batasan antara kesehatan mental dan penyakit sama obyektifnya dengan batasan antara kesehatan fisik dan penyakit, dalam model medis.

Pandangan alternatif menganggap gangguan mental sebagai kategori normatif yang melekat, yang melibatkan penilaian nilai implisit atau eksplisit.

Dalam pandangan ini, sesuatu disebut gangguan jiwa jika melibatkan pola perilaku yang menyimpang dari ekspektasi masyarakat, atau dianggap 'menyimpang' oleh orang lain. Misalnya, homoseksualitas dianggap sebagai gangguan mental di negara-negara Barat hingga saat ini; baru pada tahun 1973 *American Psychiatric Association* menghapus homoseksualitas dari **MDS** (Manual Diagnostik dan Statistik Gangguan Mental), dan tidak semua anggotanya setuju. Selain itu, para antropolog medis telah mendokumentasikan variasi lintas budaya yang cukup besar dalam gangguan mental yang diakui masyarakat, sesuatu yang telah lama sulit ditangani oleh **MDS**. Jadi pandangan bahwa gangguan jiwa merupakan konsep yang sarat nilai atau normatif tentu masuk akal. Para pendukung pandangan ini biasanya berpendapat bahwa gangguan jiwa bukanlah kategori medis yang sebenarnya, melainkan sebuah instrumen kontrol sosial. Versi radikal dari argumen ini dikemukakan oleh psikiater Amerika Thomas Szasz dalam buku terkenal tahun 1961 berjudul *The Myth of Mental Illness.*

Perdebatan antara 'model medis' dan pandangan bahwa gangguan mental pada dasarnya sarat dengan nilai adalah hal yang rumit. Salah satu permasalahannya adalah hubungan antara pikiran dan otak. Hal yang mendukung model medis ini adalah bahwa setidaknya beberapa gangguan mental diketahui memiliki dasar saraf atau neurokimia, yaitu kelainan otak, yang sering kali timbul dari kerusakan sirkuit otak. Hal ini semakin menjadi pandangan psikiatri arus utama. Karena otak merupakan bagian dari tubuh fisik, hal ini menunjukkan bahwa tidak ada dikotomi yang tajam antara gangguan mental dan fisik. Jadi jika kategori gangguan fisik dianggap objektif dan bukan sarat nilai, tentunya hal yang sama juga berlaku untuk gangguan mental?

Meskipun kuat, argumen ini tidak meyakinkan karena dua alasan. Pertama, untuk beberapa gangguan mental, seperti penyakit masa kanak-kanak autisme dan ADHD (*Attention Deficit Hyperactivity Disorder*/**Gangguan Kurang Perhatian dan Hiperaktivitas**), masih terdapat perbedaan pendapat mengenai apakah gangguan-gangguan tersebut merupakan gangguan yang tunggal dan terpadu. Gangguan ini ditandai dengan kumpulan gejala yang sering terjadi namun tidak selalu bersamaan, dan sangat bervariasi dari satu anak ke anak lainnya. (Inilah sebabnya autisme disebut sebagai 'gangguan spektrum'.) Selain itu, banyak dari gejala-gejala ini ditemukan pada tingkat tertentu pada anak-anak 'normal', yang tidak memenuhi ambang batas diagnosis. Hal ini menunjukkan bahwa ada unsur konvensionalitas atau kesewenang-wenangan dalam apa yang dianggap sebagai gangguan jiwa; jadi meskipun fungsi mental bergantung pada jaringan otak dan kimia otak, hal ini tidak berarti bahwa gangguan mental harus dimasukkan dalam kategori yang sama objektifnya dengan gangguan fisik.

Kedua, tidak semua pihak sepakat bahwa kelainan fisik merupakan kategori obyektif. Beberapa filsuf berpendapat bahwa pembicaraan apa pun tentang kelainan atau penyakit, baik fisik maupun mental, pada dasarnya bersifat normatif dan sarat nilai. Jika seseorang menderita kelainan fisik, berarti tubuhnya atau sebagiannya mengalami gangguan sehingga tidak berfungsi sebagaimana mestinya. Namun kata 'seharusnya' ini menunjukkan dimensi normatif. Siapa yang memutuskan bagaimana tubuh fisik 'seharusnya' bekerja? Bagaimanapun fisiologi manusia menunjukkan variasi yang cukup besar. Beberapa orang mempunyai penglihatan 20/20, yang lain sedikit kurang, dan yang lainnya jauh lebih buruk. Tentunya ada upaya untuk menarik garis dan mengatakan bahwa ini adalah cara kerja mata manusia yang 'seharusnya' melibatkan penilaian nilai? Dalam masyarakat di mana ketajaman penglihatan kurang penting, misalnya, batasannya mungkin ada di tempat lain. Jadi dalam pandangan ini, gangguan mental dan fisik keduanya merupakan kategori yang sarat nilai.

Terhadap hal ini, para filsuf lain telah mencoba untuk mendukung model medis dengan menyatakan bahwa secara normatif di sini hanya terlihat. Pembicaraan tentang bagaimana tubuh, atau pikiran, 'seharusnya' bekerja dapat didasarkan pada cara yang sepenuhnya obyektif, melalui konsep fungsi biologis, demikian pendapat mereka. Untuk memahami saran ini, perhatikan hati manusia. Jantung memompa darah ke seluruh tubuh, dan juga mengeluarkan bunyi berdebar teratur; Namun, hanya fungsi jantung saja yang pertama, dan suara berdebar hanyalah efek samping. Menurut pandangan luas, perbedaan antara fungsi dan efek samping ini mempunyai dasar objektif dalam fakta sejarah evolusi. Karena mereka memompa darah, bukan karena mengeluarkan suara berdebar, maka jantung disukai oleh seleksi alam, sehingga tetap ada saat ini. Oleh karena itu, jika jantung seseorang tidak memompa darah, maka secara objektif jantung tersebut tidak berfungsi. Ketika dokter berbicara tentang 'penyakit jantung', mereka tidak membuat penilaian apa pun, melainkan hanya mengacu pada fungsi jantung, dalam artian fungsi biologisnya yang telah berevolusi.

Kisah serupa juga bisa diceritakan mengenai gangguan mental. Otak dan subkomponennya mempunyai fungsi biologis; Ketika otak seseorang tidak menjalankan fungsinya dengan baik, hal ini berujung pada gangguan jiwa. Jadi dalam mengklasifikasikan kondisi seperti skizofrenia dan depresi sebagai gangguan mental, kami tidak membuat penilaian tetapi hanya mengacu pada fakta bahwa pada pasien dengan kondisi ini, beberapa bagian otak mereka tidak menjalankan fungsinya dengan baik. Jadi batasan antara gangguan mental dan kesehatan mental pada prinsipnya dapat ditarik secara objektif, melalui pengertian fungsi biologis. Dengan cara ini, para pendukung model medis berharap dapat menunjukkan bahwa apa yang dianggap sebagai gangguan mental bukanlah cerminan dari norma-norma sosial yang berlaku, melainkan memiliki dasar biologis yang obyektif. Namun, argumen ini kontroversial karena didasarkan pada asumsi tentang sejarah evolusi kita yang mungkin tidak benar. Karena alasan ini dan alasan lainnya, tidak semua psikiater dan filsuf menerimanya.

Terakhir, perhatikan bahwa dua contoh (dugaan) muatan nilai dalam sains berbeda jenisnya. Dalam kasus psikologi evolusioner, sarannya adalah bahwa hipotesis tertentu yang dipilih peneliti untuk diselidiki, dan jawaban yang mereka usulkan, berfungsi untuk memperkuat stereotip yang ada. Jika hal ini benar, maka pada prinsipnya masalah ini dapat diatasi dengan memodifikasi konten ilmu pengetahuan secara tepat, dengan hati-hati untuk mengecualikan segala kemungkinan bias, dan menerapkan standar ilmiah yang lebih ketat. Dalam kasus psikiatri, sarannya adalah bahwa kategori gangguan mental itu sendiri sarat dengan nilai, yang melibatkan penilaian nilai secara implisit. Jika hal ini benar, maka kurang jelas bagaimana cara memperbaikinya, karena gangguan mental adalah gagasan mendasar dalam psikiatri. Jadi muatan nilai dalam kasus ini berpotensi lebih mendalam.

Sebagai kesimpulan, tidak dapat dipungkiri bahwa usaha ilmiah harus mendapat kritik dari berbagai sumber, meskipun hal ini jelas memberikan manfaat bagi umat manusia. Ini juga merupakan hal yang baik, karena penerimaan yang tidak kritis terhadap segala sesuatu yang dikatakan dan dilakukan para ilmuwan akan menjadi tidak sehat dan dogmatis. Refleksi filosofis terhadap kritik yang dilontarkan terhadap sains mungkin tidak menghasilkan jawaban akhir, namun dapat membantu mengisolasi isu-isu utama dan mendorong diskusi yang rasional dan seimbang mengenai isu-isu tersebut.

Bibliografi

[1] ICME-13 Monographs, Paul Ernest Editor "The Philosophy of Mathematics Education Today", Springer International Publishing AG, part of Springer Nature 2018, (2018).

[2] Samir Okasha, "Philosophy of Science: A Very Short Introduction", second edition, Oxford University Press, (2016).

[3] Wikipedia, "Sejarah matematika", https://id.wikipedia.org/wiki/Sejarah_matematika. (Diakses 26 Pebruari 2024)

[4] Wikipedia, "Matematika", https://id.wikipedia.org/wiki/Matematika. (Diakses 26 Pebruari 2024)

[5] Wikipedia, "Filsafat Ilmu", https://id.wikipedia.org/wiki/Filsafat_ilmu. (Diakses 26 Pebruari 2024)