PROPOSAL TESIS - KM 185401

PERJALANAN KUANTUM TIDAK BERATURAN ATAS ALJABAR MAX-PLUS

MOHAMAD ILHAM DWI FIRMANSYAH

NRP 6002201015

DOSEN PEMBIMBING:

Prof. Dr. Drs. Subiono, M.S

Prof. Dr. Drs. Subiono, M.S

Prof. Dr. Drs. Subiono, M.S

PROGRAM MAGISTER

DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS SAINS DAN ANALITIKA DATA

INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER

SURABAYA

2024

PROPOSAL THESIS - KM 185401

DISORDERED QUANTUM WALK OVER MAX-PLUS ALGEBRA

MOHAMAD ILHAM DWI FIRMANSYAH
NRP 6002201015

SUPERVISOR:
Prof. Dr. Drs. Subiono, M.S
Prof. Dr. Drs. Subiono, M.S
Prof. Dr. Drs. Subiono, M.S

MASTER PROGRAM
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
FACULTY OF SCIENCES AND DATA ANALYTICS
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2024

LEMBAR PENGESAHAN PROPOSAL

PERJALANAN KUANTUM TIDAK BERATURAN ATAS ALJABAR MAX-PLUS

Oleh:

MOHAMAD ILHAM DWI FIRMANSYAH

NRP. 6002201015

Tanggal Seminar : 1 Maret 2022

Disetujui oleh

Prof. Dr. Drs. Subiono, M.S
NIP 19570411 198403 1 001 Pembimbing

Prof. Dr. Drs. Subiono, M.S
NIP 19830517 200812 1 003 Pembimbing II

Prof. Dr. Drs. Subiono, M.S
NIP Pembimbing III

Dr. Mahmud Yunus, M.Si
NIP 19620407 198703 1 005 (Penguji)

Dr. Dieky Adzkiya, S.Si, M.Si
NIP 19830517 200812 1 003 (Penguji)

Sena Safarina, S.Si., M.Sc., D.Sc.
NIP 1990202012052 (Penguji)

PERJALANAN KUANTUM TIDAK BERATURAN ATAS ALJABAR MAX-PLUS

Nama Mahasiswa	:	Mohamad Ilham Dwi Firmansyah
NRP	:	6002201015
Pembimbing	:	1. Prof. Dr. Drs. Subiono, M.S
		2. Prof. Dr. Drs. Subiono, M.S
		3. Prof. Dr. Drs. Subiono, M.S

Abstrak

*Perjalanan kuantum (quantum walk) merupakan perumuman dari perjalanan acak sederhana (simple random walk). Perjalanan kuantum secara garis besar dibagi menjadi dua kelas, yaitu perjalanan kuantum waktum disktrit dan perjalanan kuantum waktu kontinu. Dalam perjalanan kuantum mengenal adanya operator koin unitary (*H*) yaitu operator yang menentukan arah perjalanan kuantum. Pada awalnya, untuk setiap waktu perjalanan, operator koin yang digunakan selalu sama. Jika operator koin pada setiap waktu bersifat acak maka disebut perjalanan kuantum tidak beraturan (disordered quantum walk). Pada tesis ini akan dibahas tentang perjalanan kuantum waktu diskrit tak beraturan atas aljabar max-plus. Lebih spesifik, pada tesis ini akan dikonstruksi model evolusi waktu perjalanan kuantum waktu diskrit tidak beraturan atas aljabar max plus yang analog dengan perjalan kuantum waktu diskrit tidak beraturan secara konvensional. Model evolusi waktu perjalanan kuantum yang dikonstruksi menggunakan pendekatan model evolusi waktu perjalanan kuantum pada (**?**). Selanjutnya akan ditentukan kuantitas yang dilestarikan (conserved quantity) dari model perjalanan kuantum atas aljabar max-plus, yang analog dengan perjalanan kuantum secara konvensional.*

Kata-kunci: *perjalanan kuantum, perjalanan kuantum tak beraturan, aljabar max-plus, operator koin unitary*

DISORDERED QUANTUM WALK OVER MAX-PLUS ALGEBRA

Name	:	Mohamad Ilham Dwi Firmansyah
NRP	:	6002201015
Supervisors	:	1. Prof. Dr. Drs. Subiono, M.S
		2. Prof. Dr. Drs. Subiono, M.S
		3. Prof. Dr. Drs. Subiono, M.S

Abstract

A quantum walk is a generalization of the simple random walk. The quantum walk in outline is divided into two classes, namely discrete-time quantum walk and continuous-time quantum walk. There is a unitary coin operator $(\mathbf{H})$ *on the quantum walk, which is an operator that determines the direction of the quantum walk. At first, for each walk time, the coin operator is always the same. If the coin operator at any time is random, this is called a disordered quantum walk. This thesis will discuss the disordered discrete-time quantum walk over max-plus algebra. In this thesis specifically, build an evolutionary model of disordered discrete-time quantum walk over max-plus algebra analog to the conventional disordered discrete-time quantum walk. The time evolution model of the quantum walk was constructed using an approach based on the time evolution model of the quantum walk on (Konno, 2008). After that, we will determine the conserved quantity of the quantum walk model on max-plus algebra, which is analogous to the conventional quantum walk model.*

Key-words: *quantum walk, disordered quantum walk, max-plus algebra, coin unitary operator*

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

BAB 1
PENDAHULUAN

Pada bab ini dijelaskan tentang latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, dan manfaat penulisan Tesis .

1.1 Latar Belakang

Perjalanan kuantum (*Quantum Walk*) merupakan teknik untuk membangun algoritma kuantum dan mensimulasikan sistem kuantum yang kompleks. Perjalanan kuantum pada awalnya dikembangkan dari perjalanan acak sederhana (*simple random walk*) namun dalam versi kuantum, oleh karena itu tidak mengherankan bahwa perjalanan kuantum sering disebut sebagai perumuman dari perjalanan acak sederhana (**?**). Secara garis besar terdapat dua jenis model perjalanan kuantum, yaitu perjalanan kuantum waktu disktrit dan perjalanan kuantum waktu kontinu (**?**).

Penelitian mengenai perjalanan kuantum pertama kali muncul pada tahun 1980-an oleh Grössing pada (**?**) yang menjelaskan tentang *quantum cellular automata*. Kemudian, bahasan tentang perjalanan kuantum mulai berkembang dan mulai sering dibahas pada periode akhir abad 20, misalnya pada (**?**; **?**) yang menjelaskan tentang perjalanan kuantum berserta beberapa aplikasi dari perjalanan kuantum tersebut. Misalnya pada penelitian (**?**) membahas tentang perjalanan kuantum untuk waktu diskrit beserta aplikasinya. Sedangkan untuk perjalanan kuantum untuk waktu kontinu dan aplikasinya pertama kali dibahas oleh Farhi dan Gutmann pada (**?**). Salah satu alasan mengenai penelitian perjalanan kuantum yaitu tidak hanya tentang efisiensi algoritma pencarian kuantum itu sendiri, tetapi juga tentang aplikasi kuantum sebagai simulator dari fenomena kuantum (pada perangkat komputasi kuantum) yang dikemukakan oleh Feynman pada (**?**) tentang komputasi kuantum. Seiring dengan berjalanannya waktu, perjalanan kuantum mengalami banyak perkembangan. Aplikasi dari perjalanan kuantum memiliki banyak algoritma yang lebih spesifik sebagai contoh yaitu *element disctinctness algorithm* (**?**) dan *constraint satisfiability algorithm* (**?**).

Berbicara lebih khusus tentang perjalanan kuantum waktu diskrit, Evolusi waktu dari perjalanan kuantum waktu-diskrit dijabarkan dengan iterasi operator *unitary* (operator satuan) pada beberapa ruang Hilbert yang dihasilkan oleh himpunan diskrit. Karena operator *unitary* evolusi waktu mempertahankan normanya, kita dapat mendefinisikan distribusi peluang pada setiap langkah waktu. Dalam hal ini, pembahasan dibatasi pada *lattice* berdimensi satu. Diberikan basis baku dalam $\mathbb{C}^2$ yang dinotasikan $|L\rangle = [1\ \ 0]^t$, $|R\rangle = [0\ \ 1]^t$ dengan ^{t} notasi transpos matriks. Dalama bahasa mekanika kuantum, notasi $|\cdot\rangle$ menyatakan matriks kolom, sedangkan notasi $\langle\cdot|$ menyatakan matriks baris. Sehingga didapat hubungan bahwa $|\cdot\rangle = (\langle\cdot|)^t$ begitu juga sebaliknya, dengan ^{t} menyatakan transpos dari suatu matriks. Misalkan $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, notasi A^* menyatakan konjugat transpos dari A, kemudian didefinisikan $\langle L| = (|L\rangle)^*$ dan $\langle R| = (|R\rangle)^*$. Misalkan H adalah operator *unitary* pada $\mathbb{C}^{2\times 2}$ yang dinyatakan dalam bentuk

$$\mathrm{H} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

dengan $a,b,c,d \in \mathbb{C}$ dan berlaku $|a|^2+|c|^2 = |b|^2+|d|^2 = 1, a\bar{c}+b\bar{d} = 0, c+\bar{b} = 0$, dan $d-\bar{a} = 0$. Didefinisikan matriks P dan Q sedemikian $\mathrm{H} = \mathrm{P}+\mathrm{Q}$ dengan

$$\mathrm{P} = |L\rangle\langle L|\mathrm{H} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{Q} = |R\rangle\langle R|\mathrm{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Notasi $\varphi(n,k)$ menyatakan evolusi waktu ke-n dengan n bilangan bulat tak-negatif dari perjalanan kuantum pada posisi di k dengan $k \in \mathbb{Z}$ yang memenuhi persamaan rekursif

$$\varphi(n,k) = P\varphi(n-1,k+1) + Q\varphi(n-1,k-1). \tag{1.1}$$

Dapat dikatakan matriks P matriks bobot ketika bergerak ke kiri dan matriks Q matriks bobot ketika bergerak ke kanan. Distribusi probabilitas pada waktu ke n dan posisi ke k pada perjalanan kuantum didefinisikan $\mu(n,k) = \parallel \varphi(n,k) \parallel^2$ atau bisa dianggap juga sebagai peluang perjalanan kuantum yang teramati. Untuk sembarang n dengan n tetap dan posisi di k didapat $\sum_k \mu(n,k) = 1$. Misalkan $\varphi(0,0)$ adalah inisial *state* (keadaan awal) dari perjalanan kuantum dengan $\parallel \varphi(0,0) \parallel = 1$, maka keadaan $\varphi(n,k)$ dapat dinyatakan oleh penjumlahan dari matriks bobot dimana banyaknya perkalian dari matriks P dan Q bersesuaian dengan panjang n langkah perjalanan kuantum dari keadaan awal ke keadaan $\varphi(n,k)$. Misalkan didefinisikan matriks bobot yang lain yaitu $A(n,k)$ sedemikian hingga persamaan (1.1) dapat dituliskan kembali menjadi $\varphi(n,k) = A(n,k)\varphi(0,0)$, matriks ini disebut dengan matriks *decision* (?) . Pada (?) telah diperoleh bentuk umum dari matriks $A(n,k)$, jika $l = \dfrac{n-k}{2}$ dan $m = \dfrac{n+k}{2}$ dimana berturut-turut menyatakan banyaknya langkah ke kiri dan ke kanan dari perjalanan kuantum ketika berada posisi k pada waktu ke n, sehingga diperoleh

$$A(n,k) = a^l d^m \sum_{r=1}^{\min(l,m)} \left(\frac{bc}{ad}\right)^r \binom{l-1}{r-1}\binom{m-1}{r-1}\left(\frac{l-r}{ar}\mathrm{P} + \frac{m-r}{dr}\mathrm{Q} + \frac{1}{c}\mathrm{R} + \frac{1}{b}\mathrm{S}\right) \tag{1.2}$$

dengan

$$\mathrm{R} = |L\rangle\langle R|\mathrm{H} = \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{S} = |R\rangle\langle L|\mathrm{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{bmatrix}.$$

Dapat juga dilihat sifat yang menarik dari perjalanan kuantum dalam *weak limit theorem* dan *central limit theorem* lebih lengkapnya dapat dilihat pada (?).

Gagasan lain tentang perjalanan kuantum dikemukaan oleh Watanabe dkk pada (?), pada penelitian tersebut Watanabe mengemukakan gagasan model perjalan kuantum waktu diskrit atas aljabar max-plus. Dimana Model evolusi waktu perjalanan kuantum pada persamaan (1.1) setiap operasinya diubah kedalam operasi atas aljabar max-plus yaitu operasi tambah " $+$ " dan operasi kali " $\times$ " pada persamaan (1.1) diubah berturut-turut menjadi operasi $\oplus(\max)$ dan $\otimes(+)$. Dari perubahan operasi tersebut, diperoleh beberapa sifat dari model perjalanan kuantum atas aljabar max-plus yang beranalogi dengan sifat-sifat pada (?). Sebagai contoh pada (?) diperoleh bentuk umum dari matriks $A(n,k)$ pada persamaan (1.2), pada (?) juga diperoleh bentuk umum dari $A(n,k)$ atas aljabar max-plus, tidak hanya itu diperoleh juga analogi dari bentuk matriks *unitary H* pada perjalanan kuantum waktu diskrit konvensional dengan perjalanan kuantum waktu diskrit atas aljabar max-plus. Selain itu juga, diperoleh kuantitas yang kekal *(conserved quantity)* dalam perjalanan kuantum waktu diskrit atas aljabar max-plus yang analog dengan perjalanan kuantum konvensional yaitu jika pada perjalanan kuantum waktu diskrit yang konvensional diperoleh bahwa

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \parallel \varphi(n,k) \parallel^2 = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \parallel A(n,k) \parallel_F^2 = 1.$$

diamana $\parallel A(n,k) \parallel_F$ menyatakn norma Frobenius dari matriks $A(n,k)$. Sedangkan pada perjalan kuantum waktu diskrit aljabar max-plus misalkan $\lambda(A(n,k))$ adalah nilai eigen aljabar max-plus dari matriks *decision* $A(n,k)$ berlaku $\sum_k \lambda(A(n,k)) = 0$. Dibahas juga masalah analisis spektra dari total evolusi waktu perjalanan kuantum waktu diskrit yang juga beranalogi dengan total evolusi waktu perjalanan kuantum yang dikemukakan oleh Konno.

Berbicara masalah operator matriks *unitary*, matriks *unitary* yang sesuai dengan evolusi perjalanan kuantum biasanya bersifat deterministik dan tetap untuk setiap waktu n. Pada (**?**) telah dibahas juga untuk kasus operator matriks *unitary* acak, dimana diperoleh jalan acak klasik dari perjalanan kuantum waktu diskrit yang bersifat fluktuasi acak independen pada setiap langkah waktu dan melakukan rata-rata ensambel dengan cara yang ketat berdasarkan pendekatan kombinatorial. Evolusi waktu dari perjalanan kuantum diberikan oleh operator matriks *unitary* yang bersifat acak dan tak terhingga $\{U_n \ : \ n = 1,2,3,\ldots\}$, atau dengan kata lain untuk setiap waktu n, operator matriks *unitary* tidak selalu sama. Untuk kasus ini disebut dengan perjalanan kuantum tidak beraturan (*disordered quantum walk*), kasus ini termotivasi dari hasil numerik yang diperoleh Mackay dkk (**?**) dan Ribeiro dkk (**?**). Perjalanan kuantum tidak beraturan (*disordered quantum walk*) telah banyak dibahas oleh para mematikawan, salah satunya oleh Nosrati pada (**?**) yang menjelaskan bahwa *quantum walk* dapat dianggap sebagai perangkat untuk membaca informasi tentang cacat dan gangguan yang terjadi pada jaringan yang kompleks. Tidak hanya itu Viera pada (**?**) telah membahas masalah keterjeratan kuantum dalam perjalanan kuantum waktu diskrit yang tidak beraturan.

Berdasarkan apa yang telah dibahas paragraf-paragraf sebelumnya, penelitian yang akan diusulkan pada tesis ini adalah akan dikonstruksi suatu model perjalanan kuantum waktu diskrit tak beraturan atas aljabar max-plus. Pendekatan pada penelitian ini menggunakan hasil penelitian dari (**?**) dan model kuantum perjalanan waktu diskrit yang digunakan adalah model pada (**?**). Salah satu masalah yang akan diteliti pada tesis ini adalah mengkonstruksi bentuk matriks $A(n,k)$ dan kemudian akan dianalisis spektra dari total evolusi waktu dari perjalanan kuantum waktu diskrit tak beraturan.

1.2 Rumusan Masalah

Dari latar belakang yang telah dipaparkan sebelumnya, maka konsep baru yang diangkat dalam perumusan masalah ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana model evolusi waktu perjalanan kuantum waktu diskrit tidak beraturan (*disordered quantum walk*) atas aljabar max-plus.

2. Bagaimana bentuk eksplisit matriks *decision* $A(n,k)$ dari model evolusi perjalanan waktu diskrit tidak beraturan atas aljabar max-plus.

3. Bagaimana kuantitas yang kekal (*conserved quantity*) oleh perjalanan kuantum waktu diskrit tak beraturan atas aljabar max-plus yang analog dengan perjalan kuantum tak beraturan konvensional.

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penelitian ini adalah :

1. Pendekatan Model evolusi waktu perjalanan kuantum yang digunakan adalah pendekatan model pada (**?**).

2. Perjalanan kuantum yang dibahas adalah perjalanan kuantum waktu diskrit.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah :

1. Mengkonstruksi model evolusi waktu perjalanan waktu diskrit tidak beraturan (*disordered quantum walk*) atas aljabar max-plus.

2. Mengkonstruksi bentuk umum dari matriks *decision* $A(n,k)$ dari model evolusi perjalanan waktu diskrit tidak beraturan atas aljabar max-plus.

3. Mengetahui kuantitas yang diturunkan oleh perjalanan kuantum waktu diskrit tak beraturan atas aljabar max-plus.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah :

1. Diperoleh wawasan pengetahuan di bidang matematika kuantum, khususnya konsep perjalanan kuantum.
2. Sebagai salah satu referensi dalam mengembangkan perjalanan kuantum aljabar max-plus dan penerapannya.

BAB 2
KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI

Pada bagian ini dipaparkan penelitian terdahulu yang berkaitan dengan penelitian ini. Demikian juga diberikan beberapa definisi, lemma, teorema serta beberapa contoh terkait sebagai dasar teori yang menjadi referensi dalam penelitian.

2.1 Penelitian Terdahulu

Penelitian mengenai perjalanan kuantum waktu diskrit pertama muncul pada tahun 1980-an, pertama kali dibahas oleh Gudder pada (**?**) yang menjelaskan tentang *quantum cellular automata*, kemudian oleh Meyer pada (**?**) yeng menyelidiki tentang model sebagai otomasi gas kisi kuantum. Selain itu, oleh Nayak pada (**?**) dan Ambainis pada (**?**) yang mempelajari secara intensif perilaku perjalanan kuantum waktu diskrit, khususnya untuk operator matriks *unitary* Hadamard. Kemudian, telah banyak juga diteliti dan dikembangkan pada waktu periode awal tahuan 2000-an tentang perjalanan kuantum dan aplikasinya. Salah satunya oleh Ambainis. A pada (**?**), pada penelitian tersebut membahas perjalanan kuantum lebih khusus tentang perjalanan kuantum waktu diskrit beserta aplikasinya mengenai algoritma pencarian kuantum (*quantum search algorithm*). Beberapa contoh algoritma pencarian kuantum yang dibahas oleh Ambainis adalah *searching hypercube algorithm*, *searching grid algorithm* dan *element distinctness algorithm*.

Seiring berjalannya waktu, sudah banyak penelitian mengenai perjalanan kuantum entah perjalanan waktu disktrit maupun perjalanan kuantum waktu kontinu. Terbaru pada tahun 2020, Watanabe dkk pada (**?**) memberikan gagasan tentang perjalanan kuantum waktu diskrit atas aljabar max-plus yang analog dengan perjalanan kuantum yang konvensional. Pada penelitian tersebut model evolusi waktu perjalanan kuantum setiap operasinya diubah kedalam operasi aljabar max-plus yaitu operasi tambah "$+$" dan operasi kali "$\times$" diubah berturut-turut menjadi operasi max dan $+$. Dari perubahan operasi tersebut diperoleh beberapa sifat yang menarik, sebagai contoh pada penelitian tersebut diperoleh bentuk eksplisit dari mariks *decision* $A(n,k)$ dari perjalanan kuantum waktu diskrit aljabar max-plus. Pada perjalanan kuantum konvensional, norma ℓ^2 digunakan untuk mendefinisikan peluang pada setiap setiap langkah waktu dan posisi jika inisial *state* adalah vektor unit. Oleh karena itu dalam perjalanan kuantum, kuantitas yang independen untuk setiap waktu n adalah penjumlahan setiap norma ℓ^2 dari $\varphi(n,k)$ untuk setiap posisi k. Sebagai analoginya, Wanatabe mengusulkan kuantitas yang kekal dalam perjalanan kuantum waktu diskrit atas aljabar max-plus adalah pernjumlahan nilai eigen max-plus dari matriks *decision* $A(n,k)$ pada semua posisi. Sehingga misalkan $\lambda(A(n,k))$ adalah nilai eigen max-plus dari matriks *decision* $A(n,k)$ maka didefinisikan kuantitas yang diturunkan adalah $\sum_k \lambda(A(n,k))$=0. Tidak hanya itu, dibahas juga oleh Watanabe dkk masalah analisis spektra dari total evolusi waktu perjalanan kuantum waktu diskrit yang juga analogi dengan total evolusi waktu perjalanan kuantum yang dikemukakan oleh Konno pada (**?**).

Pada tesis ini, akan dikonstruksi model perjalanan kuantum waktu diskrit tak beraturan atas aljabar max-plus yang analog dengan perjalanan kuantum secara konvensional. Pendekatan pada tesis ini menggunakan hasil penelitian dari (**?**) dan model kuantum perjalanan waktu diskrit yang digunakan adalah model pada (**?**). Salah satu masalah yang akan diteliti pada tesis ini adalah mengkonstruksi bentuk matriks $A(n,k)$. kemudian akan dianalisis spektra dari total evolusi waktu dari perjalanan kuantum waktu diskrit tak beraturan. Selain itu juga, akan ditentukan kuantitas yang lestari (*conserved quantity*) dari perjalanan kuantum waktu diskrit tak beraturan atas aljabar max-plus yang analog dengan perjalanan kuantum tak beraturan konvensional.

2.2 Aljabar Max-Plus

2.2.1 Definisi dan Notasi Aljabar Max-Plus

Aljabar Max-Plus erat kaitannya dengan apa yang dinamakan **aljabar tropical**. Aljabar tropical adalah semiring idempoten sekaligus semifield. Salah satu contoh dari aljabar tropical yang memiliki struktur semiring idempoten sekaligus semifield yaitu aljabar max-plus. Berikut diberikan definisi dari aljabar max-plus(**?**). Diberikan himpunan $\mathbb{R}_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}$ dengan $\mathbb{R}$ adalah himpunan bilangan real dan $\varepsilon = -\infty$. Pada himpunan $\mathbb{R}_\varepsilon$, untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}_\varepsilon$ didefinisikan operasi

$$x \oplus y \stackrel{\text{def}}{=} \max\{x, y\} \quad dan \quad x \otimes y \stackrel{\text{def}}{=} x + y.$$

Operasi $\oplus$ dibaca *o-plus* dan operasi $\otimes$ dibaca *o-times*, sebagai contoh ambil $7, 8 \in \mathbb{R}_\varepsilon$ didapat $7 \oplus 8 = \max\{7, 8\} = 8$ dan $7 \otimes 8 = 7 + 8 = 15$. Kemudian, $(\mathbb{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ merupakan semiring dengan elemen netral ε dan elemen satuan $e = 0$. Selanjutnya, untuk mempermudah penulisan semiring $(\mathbb{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ dapat dtulis dengan $\mathbb{R}_{\max}$. Berikut diberikan definisi pangkat dalam aljabar max-plus. Diberikan $x \in \mathbb{R}_{\max}$ dan untuk setiap $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, notasi $x^{\otimes n}$ menyatakan x pangkat n dalam aljabar max-plus yang didefinisikan

$$x^{\otimes n} = \begin{cases} 0\,, & \text{untuk } n = 0, \\ \underbrace{x \otimes x \otimes \cdots \otimes x}_{n \;\; kali}\,, & \text{untuk } n \neq 0. \end{cases}$$

Perhatikan bahwa untuk setiap $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $x^{\otimes n}$ dapat dituliskan sebagai

$$x^{\otimes n} = \underbrace{x \otimes x \otimes \cdots \otimes x}_{n \;\; kali} = n \times x.$$

Terinspirasi oleh pengertian pangkat diatas, dengan cara serupa pangkat dalam aljabar max-plus ditulis sebagai $x^{\otimes \alpha} = \alpha \times x$ untuk $\alpha \in \mathbb{R}$. Sebagai contoh

$$7^{\otimes 8} = 8 \times 7 = 56, \quad 8^{\otimes -\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \times 8 = -4.$$

2.2.2 Vektor dan Matriks Aljabar Max-Plus

Himpunan matriks $n \times m$ dalam aljabar max-plus dinyatakan dalam $\mathbb{R}_{\max}^{n \times m}$. Misalkan diberikan $n \in \mathbb{N}$, didefinisikan $\underline{n} \stackrel{\text{def}}{=} \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Elemen dari matriks $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ pada baris ke$-i$ dan kolom ke$-j$ dinyatakan dengan

$a_{i,j}$ untuk $i \in \underline{n}$ dan $j \in \underline{m}$. Dalam hal ini matriks A ditulis sebagai

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{bmatrix},$$

biasanya elemen dari matriks A dinotasikan sebagai

$$[A]_{i,j} = a_{i,j}, \quad i \in \underline{n},\ j \in \underline{m}.$$

Berikut ini diberikan definisi tentang operasi penjumlahan dan perkalian matriks pada aljabar max-plus. Pada prinsipnya penjumlahan dan perkalian matriks dalam aljabar max-plus tidak sama dengan pejumlahan dan perkalian matriks dalam aljabar biasa, namun yang membedakan hanyalah operasi yang digunakan. Dalam hal ini operasi tambah "$+$" diganti dengan operasi *o-plus* "$\oplus$" dan operasi kali "$\times$" diganti dengan operasi *o-times* "$\otimes$".

Definisi 2.2.1. *(?) Diberikan $A, B \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$, perjumlahan matriks A dengan matriks B dalam aljabar max-plus dinotasikan $A \oplus B$ yang didefinisikan sebagai*

$$[A \oplus B]_{i,j} = a_{i,j} \oplus b_{i,j} = \max\{a_{i,j}, b_{i,j}\} \ \text{ untuk } i \in \underline{n},\ j \in \underline{m},$$

dengan $\underline{n} = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$ dan $\underline{m} = \{1, 2, 3, \cdots, m\}$.

Contoh 2.2.1. Diberikan $A, B \in \mathbb{R}_{\max}^{2 \times 2}$ dengan

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ \varepsilon & -1 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 5 & \varepsilon \end{bmatrix},$$

didapat

$$A \oplus B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ \varepsilon & -1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 5 & \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \oplus 0 & 0 \oplus 2 \\ \varepsilon \oplus 5 & -1 \oplus \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

Definisi 2.2.2. *(?) Diberikan $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times p}$ dan $B \in \mathbb{R}_{\max}^{p \times m}$, perkalian matriks A dengan matriks B dalam aljabar max-plus dinotasikan $A \otimes B$ yang didefinisikan untuk $i \in$*

$\underline{n}$, $j \in \underline{m}$ *sebagai*

$$[A \otimes B]_{i,j} = \bigotimes_{k=1}^{p} a_{i,k} \oplus b_{k,j} = \max_{k \in \underline{p}} \{a_{i,k} + b_{k,j}\}.$$

Misalkan $c \in \mathbb{R}_{\max}$*, perkalian skalar* c *dengan matriks* A *dinotasikan* $c \otimes A$ *yang didefinisikan*

$$[c \otimes A]_{i,j} = c \otimes a_{i,j} = c + a_{i,j}.$$

Contoh 2.2.2. Diberikan $A, B \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ dengan

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & \varepsilon & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & \varepsilon & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix},$$

diperoleh

$$\begin{aligned}
[A \otimes B]_{1,1} &= (1 \otimes 0) \oplus (2 \otimes 2) \oplus (1 \otimes 1) = \max\{1+0, 2+2, 1+1\} = 4, \\
[A \otimes B]_{1,2} &= (1 \otimes 2) \oplus (2 \otimes \varepsilon) \oplus (1 \otimes -2) = \max\{1+2, 2+\varepsilon, 1+(-2)\} = 3, \\
[A \otimes B]_{1,3} &= (1 \otimes 1) \oplus (2 \otimes 1) \oplus (1 \otimes -1) = \max\{1+1, 2+1, 1+(-1)\} = 3, \\
[A \otimes B]_{2,1} &= (3 \otimes 0) \oplus (\varepsilon \otimes 2) \oplus (2 \otimes 1) = \max\{3+0, \varepsilon+2, 2+1)\} = 3, \\
[A \otimes B]_{2,2} &= (3 \otimes 2) \oplus (\varepsilon \otimes \varepsilon) \oplus (2 \otimes (-2)) = \max\{3+2, \varepsilon+\varepsilon, 2+(-2))\} = 5, \\
[A \otimes B]_{2,3} &= (3 \otimes 1) \oplus (\varepsilon \otimes 1) \oplus (2 \otimes (-1)) = \max\{3+1, \varepsilon+1, 2+(-1))\} = 4, \\
[A \otimes B]_{3,1} &= (1 \otimes 0) \oplus (0 \otimes 2) \oplus (1 \otimes 1) = \max\{1+0, 0+2, 1+1)\} = 2, \\
[A \otimes B]_{3,2} &= (1 \otimes 2) \oplus (0 \otimes \varepsilon) \oplus (1 \otimes (-2)) = \max\{1+2, 0+\varepsilon, 1+(-2))\} =, 3 \\
[A \otimes B]_{3,3} &= (1 \otimes 1) \oplus (0 \otimes 1) \oplus (1 \otimes (-1)) = \max\{1+1, 0+1, 1+(-1))\} = 2,
\end{aligned}$$

sehingga diperoleh

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix},$$

Misalkan ambil $7 \in \mathbb{R}_{\max}$, didapat

$$7 \otimes \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \otimes 1 & 7 \otimes 2 \\ 7 \otimes 3 & 7 \otimes \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7+1 & 7+2 \\ 7+3 & 7+\varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 10 & \varepsilon \end{bmatrix}.$$

Matriks $\varepsilon(n,m)$ menyatakan matriks ukuran $n \times m$ dengan semua elemennya adalah ε dan matriks $E(n,m)$ adalah matriks ukuran $n \times m$ yang didefinisikan oleh

$$[E(n,m)]_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} e\ , & \text{untuk } i=j, \\ \varepsilon\ , & \text{untuk } i \neq j. \end{cases}$$

Jika $n=m$, maka $E(n,n)$ disebut matriks identitas berordo n atas aljabar max-plus. Hal berikut jelas bahwa untuk setiap $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$ memenuhi

$$\begin{aligned} A \oplus \varepsilon(n,m) = A = \varepsilon(n,m) \oplus A. \\ A \otimes E(n,m) = A = E(n,m) \oplus A. \end{aligned}$$

Berikut diberikan teorema yang menunjukkan beberapa sifat operasi *o-plus* dan *o-times* pada matriks dalam aljabar max-plus.

Teorema 2.2.1. *(?) Beberapa sifat berikut berlaku untuk sebarang matriks A, B dan C dengan ukuran yang bersesuaian dan operasi matriks terdefinisi.*

(i). $(A \oplus B) \oplus = A \oplus (B \oplus C)$,

(ii). $(A \otimes B) \otimes = A \otimes (B \otimes C)$,

(iii). $A \otimes (B \oplus C) = (A \otimes B) \oplus (A \otimes C)$,

(iv). $(A \oplus B) \otimes C = (A \otimes C) \oplus (A \otimes C)$,

(v). $A \oplus A = A$.

Definisi 2.2.3. *(?) Diberikan $A \in \mathbb{R}_{\varepsilon}^{n\times n}$, pangkat ke- k dari A dinotasikan $A^{\otimes k}$ didefinisikan sebagai*

$$A^{\otimes k} \stackrel{def}{=} \underbrace{A\ \otimes\ A\ \otimes\ A\ \otimes \cdots \otimes\ A}_{k\ \ kali}.$$

untuk $k \in \mathbb{N}$ sedangkan untuk $k=0$ berlaku $A^{\otimes 0} \stackrel{def}{=} E(n,n)$.

Secara umum elemen baris ke-i dan kolom ke-j dari matriks $A^{\otimes^k}$ dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \left[A^{\otimes^k}\right] &= \bigotimes_{r_{k-1}=1}^{n} a_{i,r_{k-1}} \cdots \left(\bigotimes_{r_1=1}^{n} a_{r_2,r_1} \otimes a_{r_1,j} \right) \\ &= \max_{1 \leq r_1,\ldots,r_{k-1} \leq n} \{a_{i,r_{k-1}} + \cdots + a_{r_2,r_1} + a_{r_1,j}\} \end{aligned}$$

Berikut diberikan definisi dari determinan dari suatu matriks persegi dalam aljabar max-plus yang biasanya disebut dengan istilah *tropical determinan*,

Definisi 2.2.4. *(?) Misalkan $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$, didefinisikan tropdet$(A)$ dengan*

$$tropdet(A) = \bigoplus_{\sigma \in S_n} \left([A]_{1\sigma(1)} \otimes [A]_{2\sigma(2)} \otimes [A]_{3\sigma(3)} \otimes \cdots \otimes [A]_{n\sigma(n)} \right),$$

dengan S_n adalah grup simetri berorder n.

2.2.3 Matriks dan Graf Berarah Aljabar Max-Plus

Suatu graf berarah dari matriks $A \in \mathbb{R}_{\varepsilon}^{n\times m}$ adalah $G(A) = (E,V)$. Graf $G(A)$ mempunyai n verteks, himpunan semua verteks dari $G(A)$ dinyatakan oleh V. Jika $a_{i,j} \neq \varepsilon$ maka ada suatu sisi yang menghubungkan verteks j ke verteks i, sisi ini dinotasikan (j,i). Himpunan semua sisi dari $G(A)$ dinotasikan oleh E. Bobot dari sisi (j,i) adalah nilai dari elemen $a_{i,j}$ yang dinotasikan $w(j,i) = a_{i,j} \in R_{\max}$. Jika tidak ada sisi yang menghubungkan verteks j ke i maka $a_{i,j} = \varepsilon$ (**?**).

Suatu barisan sisi $(i_1,i_2),(i_3,i_4),\cdots,(i_{l-1},i_l)$ dari suatu graf dinamakan suatu *path*. Suatu *path* dikatakan elementer bila tidak ada verteks yang muncul dua kali dalam *path* tersebut. Suatu *path* dikatakan *path* elementer tertutup, yaitu $(i_1,i_2),(i_3,i_4),\cdots,(i_{l-1},i_1)$. Bobot dari suatu *path* $p = (i_1,i_2),(i_3,i_4),\cdots,(i_{l-1},i_l)$ dinotasikan dan diperoleh dengan

$$|p|_w = w(i_1,i_2) + w(i_3,i_4) + \cdots + w(i_{l-1},i_l) = (a_{i_2,i_1} + a_{i_4,i_3} + \cdots + a_{i_l,i_{l-1}}),$$

sedangkan panjang dari *path* p atau banyaknya sisi dalam *path* p dinotasikan $|p|_l$. Bobot rata-rata dari *path* p adalah bobot dari p dibagi oleh banyaknya garis dalam *path* p yaitu

$$\frac{|p|_w}{|p|_l} = \frac{(a_{i_2,i_1} + a_{i_4,i_3} + \cdots + a_{i_l,i_{l-1}})}{l-1}.$$

Sirkuit rata-rata adalah bobot rata-rata dari suatu sirkuit. Sebarang sirkuit dengan sirkuit rata-rata maksimum dinamakan **sirkuit kritis**. Suatu graf dikatakan *strongly connected* bila ada suatu *path* untuk setiap verteks i setiap vertkes j. Bila $G(A)$ adalah *strongly connected* , maka matriks A dikatakan *irreducible* (taktereduksi).

Proposisi 2.2.1. *(?) Diberikan matriks $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$, bobot maksimum dari matriks A pada graf $G(A)$ dapat dihitung dengan cara*

$$A^{+} = \bigoplus_{i=1}^{\infty} A^{\otimes^{i}} = A \oplus A^{\otimes^{2}} \oplus A^{\oplus^{3}} \oplus \cdots .$$

Jika bobot dari graf $G(A)$ mempunyai bobot sirkuit rata-rata yang kurang dari atau sama dengan nol maka

$$A^{+} = A \oplus A^{\otimes^{2}} \oplus A^{\oplus^{3}} \oplus \cdots A^{\otimes^{n}} \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}.$$

Permasalahan nilai eigen dan vektor eigen dari suatu matriks $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sering dijumpai dalam aljabar linier biasa, hal ini juga dijumpai dalam aljabar max-plus. Bila diberikan persamaan

$$A \otimes \mathrm{x} = \lambda \otimes \mathrm{x},$$

maka λ disebut dengan nilai eigen aljabar max-plus dari A dan x adalah vektor eigen aljabar max-plus yang bersesuaian dengan nilai eigen A. Berikut diberikan proposisi yang menjelaskan hubungan nilai eigen aljabar max-plus dari matriks $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ dengan sirkuit dan maksimum bobot dari matriks A pada graf $G(A)$.

Proposisi 2.2.2. *(?) Diberikan $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$, jika A memiliki nilai eigen $\lambda \neq \varepsilon$, maka terdapat sirkuit pada graf berbobot $G(A)$ yang rata-rata bobotnya adalah λ. Secara khusus, jika $G(A)$ strongly connected , maka hanya terdapat satu nilai eigen dari A yang merupakan bobot rata-rata maksimum dari semua sirkuit di $G(A)$.*

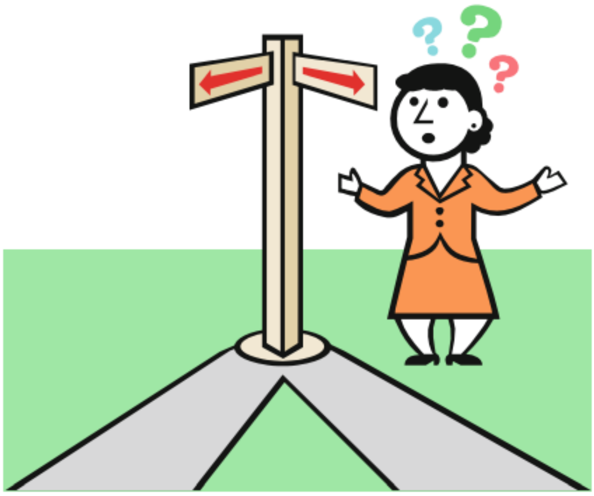
Proposisi 2.2.3. *(?) Misalkan $\lambda \neq \varepsilon$ adalah nilai eigen aljabar max-plus dari $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ dan x_i adalah kolom ke i dari matriks $(\lambda^{\otimes^{-1}} \otimes A)^{+}$. Jika sebuah verteks terkandung dalam sirkuit yang rata-rata bobotnya adalah λ maka x_i adalah eigen vektor aljabar max-plus yang bersesuaian dengan λ.*

2.3 Perjalanan Kuantum (*Quantum Walk*)

Terdapat dua jenis dari perjalanan kuantum, yaitu perjalanan kuantum waktu diskrit dan perjalanan kuantum untuk waktu kontinu. Masing-masing perjalanan kuantum tersebut muncul secara independen dari studi masalah fisik yang tidak terkait. Pada subbab ini dibahas khusus mengenai perjalanan kuantum waktu diskrit.

2.3.1 Perjalanan Acak Sederhana (*simple random walk*)

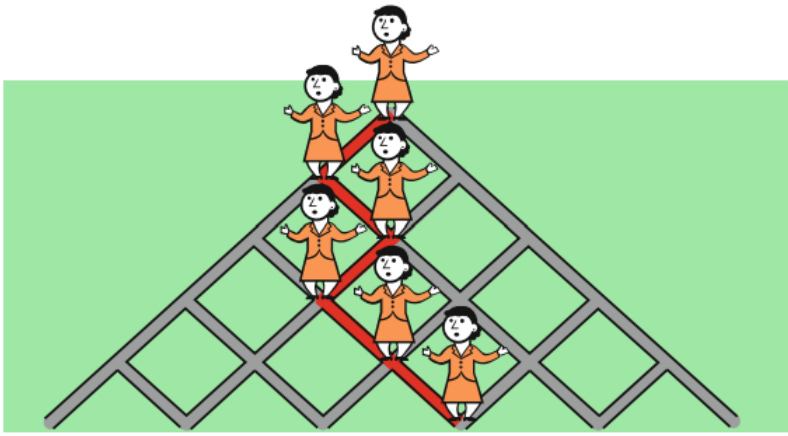
Sebelum membahas perjalanan kuantum waktu diskrit, terlebih dahulu dibahas mengenai perjalanan acak sederhana (*simple random walk*) yang merupakan latar belakang teoretis untuk kedua kelas perjalanan kuantum (**?**). Perhatikan gambar dibawah ini



Gambar 2.1: Seseorang yang berada di persimpangan menggunakan lemparan koin untuk memutuskan jalan mana yang harus diambil (Wang dkk., 2013).

Pertimbangan pemilihan jalan dari seseorang tersebut pada Gambar 2.1 dengan cara menggunakan pelemparan koin untuk menentukan akan bergerak ke kiri atau ke kanan. Misalkan $+$ dan $-$ masing-masing mewakili koin dengan sisi gambar dan dan koin dengan sisi angka. Kemudian misalkan P_+ dan P_- masing-masing merupakan probabilitas ketika mendapat $+$ dan $-$ maka dengan asumsi koin tidak cacat diperoleh $P_+ = P_- = 0,5$. Seseorang tersebut memutuskan untuk bergerak ke kanan jika mendapatkan $+$ dan bergerak ke kiri jika mendapatkan $-$. Jika semula orang tersebut berada pada posisi ke $x = 0$, maka bergerak ke kanan atau ke kiri mewakili langkah ke posisi $x = +1$ dan $x = -1$. Seseorang tersebut dapat melakukan pelemparan koin tersebut untuk bergerak di sepanjang pohon keputusan seperti pada Gambar 2.2. Prosedur ini dikenakan sebagai perjalanan acak sederhana. Diketahui bahwa untuk jalan acak seperti itu, distribusi probabilitas akhir adalah Gaussian.

Pada Tabel 2.1 menjelaskan probabilitas dari orang tersebut pada posisi x dan waktu ke t dengan asumsi posisi pada $x = 0$ dimana untuk entri tabel yang kosong untuk menandakan probabilitas pada posisi tersebut adalah



Gambar 2.2: Seseorang yang berada di persimpangan menggunakan lemparan koin untuk memutuskan jalan mana yang harus diambil (Wang dkk., 2013).

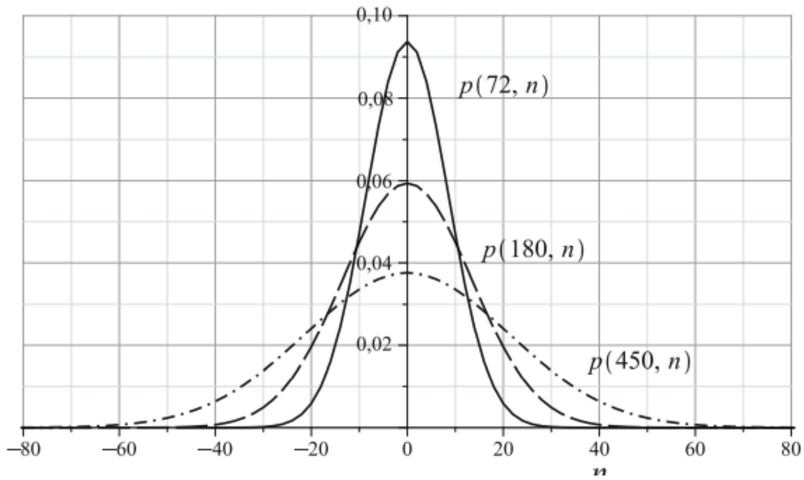
$t \setminus x$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
0						1					
1					$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$				
2				$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{4}$			
3			$\frac{1}{8}$		$\frac{3}{8}$		$\frac{3}{8}$		$\frac{1}{8}$		
4		$\frac{1}{16}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{3}{8}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{16}$	
5	$\frac{1}{32}$		$\frac{5}{32}$		$\frac{5}{16}$		$\frac{5}{16}$		$\frac{5}{32}$		$\frac{1}{32}$

Tabel 2.1: Probabilitas dari orang tersebut pada posisi x dan waktu ke t dengan asumsi posisi pada $x = 0$ (Wang dkk., 2013).

nol. Proses perjalanan tersebut berlangsung secara terus menerus, tidak dapat diketahui dengan pasti dimana posisi orang tersebut berada, tetapi dapat dihitung probabilitas orang tersebut pada posisi ke x dan waktu ke t. Misalkan orang pada Gambar 2.1 berada di titik asal pada waktu $t = 0$ maka diperoleh $p(t = 0, x = 0) = 1$. Sebagaimana ditunjukkan pada Tabel 2.1 untuk $t = 1$, orang dapat berada pada $x = -1$ dengan probabilitas $\frac{1}{2}$. Secara eksplisit diperoleh bahwa

$$p(t,x) = \frac{1}{2^t}\binom{t}{\frac{t+x}{2}}, \tag{2.1}$$

dengan $\binom{a}{b} = \dfrac{a!}{b!(a-b)!}$. Persamaan 2.1 terdefinisi jika $x+t$ ganjil dan $x \geq t$. Jika $x+t$ ganjil dan $x > t$ maka probabilitasnya nol. Untuk nilai t tetap yang relatif besar, probabilitas $p(n,t)$ sebagai fungsi dari n memiliki bentuk yang familiar. Gambar 3.2 (?) menggambarkan tiga kurva ketika nilai $t = 72, t = 180$, dan $t = 450$.



Gambar 2.3: Distribusi probabilitas perjalanan acak sederhana ketika $t = 72, t = 180$, dan $t = 450$ (Wang dkk., 2013).

2.3.2 Perjalanan Kuantum Waktu Diskrit

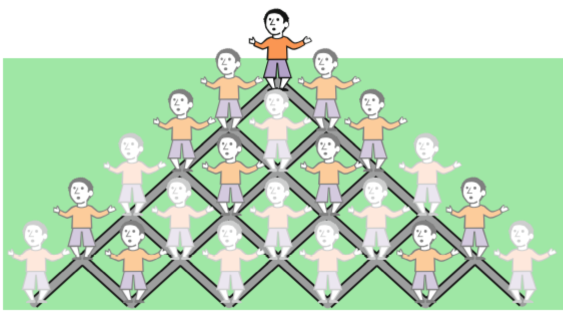
Telah disinggung pada bab sebelumnya, perjalanan kuantum waktu diskrit sering disebut sebagai perumuman dari perjalanan acak sederhana. (?). Analogi perjalanan kuantum waktu diskrit dengan perjalanan acak sederhana, dalam perjalanan kuantum menggunakan "koin kuantum" dengan dua "sisi" yang dalam bahasan mekanika kuantum disebut dengan keadaan basis dan dinotasikan dengan $|+\rangle$ dan $|-\rangle$ menggunakan notasi Dirac. Berbeda dengan koin pada perjalanan acak sederhana, koin kuantum memiliki sifat tidak intuitif yang dimana selama tidak dilakukan pengamatan atau pengukuran, kuantum dapat berada pada keadaan **superposisi**. Dengan kata lain $|c\rangle$ menyatakan keadaan koin kuantum setelah "dilempar", kuantum dapat secara bersamaan ada di kedua keadaan, sedemikian hingga dapat dinyatakan

$$|c\rangle = \alpha_+|+\rangle + \alpha_-|-\rangle, \tag{2.2}$$

dengan $\alpha_+ = \langle +|c\rangle$ dan $\alpha_+ = \langle -|c\rangle$ adalah amplitudo kompleks untuk koin berada pada setiap keadaan. Tetapi jika dilakukan pengamatan pada koin kuantum untuk menentukan arah mana yang harus dipindahkan, kemudian akan ditemukan koin di salah satu keadaan (dalam bahasa mekanika kuantum, keadaan koin telah runtuh menjadi salah satu keadaan dasar) dengan probabilitas $P_+ = |\alpha_+|^2$ dan $P_- = |\alpha_-|^2$. Pada persamaan (2.2), kondisi superposisi pada keadaan kuantum $|c\rangle$ dalam bahasa matematika dapat artikan sebagai kombinasi linier sebagai kombinasi linier dari konidisi basis $|+\rangle$ dan $|-\rangle$. Sedangkan α_+ dan α_- merupana skalar atau kordinat dari kombinasi linier tersebut, dimana dapat dicari dengan cara menghitung hasil kali dalam dari keadaan basis dengan $|c\rangle$.

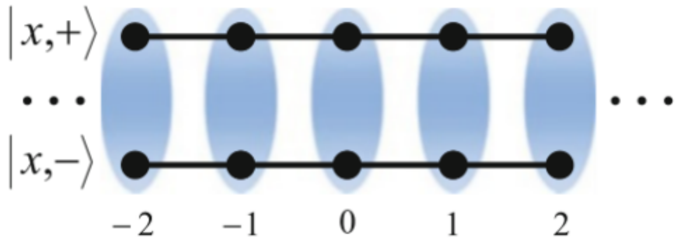
Oleh sebab itu, jika ditentukan keadaan koin kuantum pada setiap langkah, distribusi probabilitas akhir akan identik dengan perjalanan acak sederhana. Sebaliknya, ketika koin kuantum berada dalam keadaan superposisi sebagai perjalanan kuantum itu sendiri, maka kuantum secara bersamaan bergerak ke kanan dan ke kiri dengan aplitudo masing-masing α_+ dan α_-.

Serupa dengan situasi pada koin kuantum, jika ingin mencari tahu di mana kuantum sebenarnya setelah bergerak, tindakan pengamatan akan meruntuhkan keadaan posisi kuantum dan akan ditemukan di salah satu keadaan dengan probabilitas $P_+ = |\alpha_+|^2$ dan $P_- = |\alpha_-|^2$. Kuantum membuat jalan melalui pohon keputusan menggunakan perjalanan acak kuantum waktu diskrit. Berbagai corak gambarnya merupakan kesan fungsi gelombang kuantum karena menyebar ke seluruh pohon menghasilkan pola interferensi antara amplitudo yang melintasi jalur yang berbeda, dapat dilihat pada Gambar 2.4



Gambar 2.4: Ilustrasi perjalanan kuantum (Wang dkk., 2013).

Pada Gambar 2.5 mengilustrasikan perjalanan struktur dasar kuantum pada sebuah garis. Verteks pada sepanjang sembu horizontal mewakili keadaan posisi $|x\rangle$ dari perjalanan kuantum dengan nilai $x \in \mathbb{Z}$, sedangkan setiap verteks terdiri dari dua sub-verteks atau sub-keadaan dilabeli oleh $|+\rangle$ dan $|-\rangle$ atau sering disebut juga dengan keadaan internal pada posisi tersebut. Dengan demikian, keadaan menyeluruh dari sistem koin



Gambar 2.5: Keadaan perjanan kuantum waktu diskrit pada sebuah garis (Wang dkk., 2013).

kuantum dapat digambarkan sebagai superposisi dari semua keadaan yang diberikan dalam persamaan

$$|\varphi\rangle = \sum_x \alpha_{x,-}|x,-\rangle + \alpha_{x,+}|x,+\rangle, \tag{2.3}$$

dimana $\alpha_{x,+} = \langle x,+|\varphi\rangle$ dan $\alpha_{x,-} = \langle x,-|\varphi\rangle$ adalah amplitudo kompleks untuk koin yang masing-masing berada dalam keadaan $|+\rangle$ dan $|-\rangle$. Untuk sembarang posisi x pada perjalanan kuantum pada suatu waktu yang tetap diperoleh bahwa

$$\sum_x |\alpha_{x,+}|^2 + |\alpha_{x,-}|^2 = 1. \tag{2.4}$$

Dalam sistem perjalanan kuantum ini, "lemparan koin" memiliki arti baru. Berbeda dengan perjanan acak sederhana dimana membalik koin menghasilkan satu keadaan (gambar dan angka) dengan probabilitas P_+ atau P_- dalam kasus kuantum itu sesuai dengan rotasi *unitary* dari keadaan basis koin yang diberikan oleh

$$\begin{bmatrix} \alpha'_+ \\ \alpha'_- \end{bmatrix} = \hat{C} \begin{bmatrix} \alpha_+ \\ \alpha_- \end{bmatrix}, \tag{2.5}$$

dimana (α'_+, α'_-) dan (α_+, α_-) berturut-turut merupakan representasi vektor keadaan sebelum dan sesudah pelemparan koin dan $\hat{C}$ disebut dengan **operator koin**. Operator koin yang telah diselidiki secara ekstensif dalam penelitian perjalanan kuantum waktu diskrit sering disebut operator **koin Hadamard** (**?**) yaitu

$$\hat{C} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

2.3.3 Evolusi Waktu Total Perjalanan Kuantum Waktu Diskrit

Pada bagian ini dijelaskan masalah evolusi waktu perjalanan kuantum waktu diskrit. Model perjalanan kuantum dan evolusi waktu perjalanan kuantum yang dijelaskan pada bagian ini merujuk pada (**?**). Misalkan H adalah operator koin *unitary* pada $\mathbb{C}^{2\times 2}$

$$\mathrm{H} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

dengan $a,b,c,d \in \mathbb{C}$ dan berlaku $|a|^2+|c|^2 = |b|^2+|d|^2 = 1$, $a\bar{c}+b\bar{d} = 0$, $c+\bar{b} = 0$, dan $d-\bar{a} = 0$. Didefinisikan matriks P dan Q sedemikian $\mathrm{H} = \mathrm{P}+\mathrm{Q}$ dengan

$$\mathrm{P} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Notasi $\varphi(n,k)$ menyatakan evolusi waktu ke-n dengan n bilangan bulat tak-negatif dari perjalanan kuantum pada posisi di k dengan $k \in \mathbb{Z}$ yang memenuhi persamaan rekursif

$$\varphi(n,k) = \mathrm{P}\varphi(n-1,k+1)+\mathrm{Q}\varphi(n-1,k-1).$$

Dapat dikatakan matriks P matriks bobot ketika bergerak ke kiri dan matriks Q matriks bobot ketika bergerak ke kanan. Peluang pada waktu ke n dan posisi ke k didefinisikan $\mu(n,k) = \parallel \varphi(n,k) \parallel^2$ atau bisa dianggap juga sebagai peluang perjalanan kuantum yang teramati. Kemudian untuk sembarang n dengan n tetap dan posisi di k didapat $\sum_k \mu(n,k) = 1$. Keadaan qubit awal adalah salah satu bagian penting dalam perjalanan kuantum, jadi didefinisikan himpunan qubit awal yang dinyatakan oleh

$$\mathbf{\Phi} = \left\{ \varphi(0,0) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2 \middle| a^2+b^2 = 1 \right\}.$$

Misalkan diambil keadaan awal

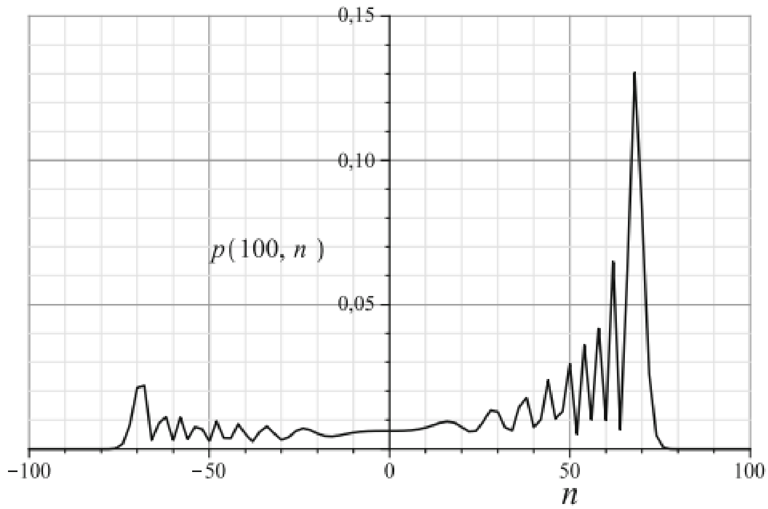
$$\varphi(0,0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

maka diperoleh distribusi peluang perjalanan kuantum waktu diskrit dengan menggunakan operator koin Hadamard terdapat pada Tabel 2.2

dan beserta grafiknya setelah 100 langkah pada Gambar 2.6

$t \backslash x$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
0						1					
1					$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$				
2				$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{4}$			
3			$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{8}$		$\frac{5}{8}$		$\frac{1}{8}$		
4		$\frac{1}{16}$		$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{8}$		$\frac{5}{8}$		$\frac{1}{16}$	
5	$\frac{1}{32}$		$\frac{5}{32}$		$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{8}$		$\frac{17}{32}$		$\frac{1}{32}$

Tabel 2.2: Distribusi Probabilitas perjalanan kuantum pada posisi k dengan kondisi awal pada persamaan (2.6) (Wang dkk., 2013).



Gambar 2.6: Distribusi peluang perjalanan kuantum dengan operator koin Hadamard setelah 100 langkah kondisi awal pada persamaan (2.6) (Wang dkk., 2013).

Misalkan didefinisikan matriks bobot yang lain yaitu $A(n,k)$ sedemikian hingga persamaan (1.1) dapat dituliskan kembali menjadi $\varphi(n,k) = A(n,k)\varphi(0,0)$, matriks ini disebut dengan matriks *decision* (**?**). Pada (**?**) telah diperoleh bentuk umum dari matriks $A(n,k)$ sebagaimana diberikan pada teorema berikut ini.

Teorema 2.3.1. *(?) Pada perjalanan kuantum dalam dimensi satu dengan* $abcd \neq 0$*, misalkan*

$$\mathrm{P} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \mathrm{R} = \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{bmatrix}.$$

dan $\Delta = \det(\hat{C})$ *dengan* $\hat{C} = P + Q$*. Jika* $l, m \geq 0$ *dengan* $l + m = n$ *dimana* $l = \dfrac{n-k}{2}$ *dan* $m = \dfrac{n+k}{2}$*, maka*

(a) Untuk $\min\{l,m\} \geq 1$*,*

$$\begin{aligned} & A(n,k) \\ = \;& a^l \bar{a}^m \Delta^m \textstyle\sum_{\gamma=1}^{\min l,m} \left(-\dfrac{|b|^2}{|a|^2}\right)^{\gamma} \binom{l-1}{\gamma-1}\binom{m-1}{\gamma-1} \left[\dfrac{l-\gamma}{a\gamma}\mathrm{P} + \dfrac{m-\gamma}{\Delta\bar{a}\gamma}\mathrm{Q} - \dfrac{1}{\Delta\bar{b}}\mathrm{R} + \dfrac{1}{b}\mathrm{S}\right], \end{aligned}$$

(b) Untuk $l \geq 0$ *dan* $m = 0$*,*

$$A(n,k) = a^{n-1}\mathrm{P},$$

(c) Untuk $l = 0$*, dan* $m \geq 1$*,*

$$A(n,k) = \Delta^{n-1}\bar{a}^{n-1}\mathrm{Q}.$$

2.4 Perjalanan Kuantum Takberaturan (*Disordered Quantum Walk)*

Pada (**?**) telah dibahas juga untuk kasus operator matriks *unitary* acak, dimana diperoleh jalan acak klasik dari perjalanan kuantum waktu diskrit yang bersifat fluktuasi acak independen pada setiap langkah waktu dan melakukan rata-rata ensambel dengan cara yang ketat berdasarkan pendekatan kombinatorial. Evolusi waktu dari perjalanan kuantum diberikan oleh operator matriks *unitary* yang bersifat acak dan tak terhingga $\{\mathrm{H}_n : n = 1,2,3,\ldots\}$, atau dengan kata lain untuk setiap waktu n, operator matriks *unitary* tidak sama. Untuk kasus ini disebut dengan perjalanan kuantum tidak beraturan (*disordered quantum walk*). Misalkan $\mathrm{H}_n \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ adalah operator koin *unitary* untuk setiap waktu n

$$\mathrm{H_n} = \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix},$$

dengan $a_n, b_n, c_n, d_n \in \mathbb{C}$ dan berlaku $|a_n|^2 + |c_n|^2 = |b_n|^2 + |d_n|^2 = 1$, $a_n\bar{c_n} + b_n\bar{d_n} = 0$, $c_n + \bar{b_n} = 0$, dan $d_n - \bar{a_n} = 0$. Didefinisikan matriks P_n dan Q_n sedemikian $\mathrm{H_n} = \mathrm{P_n} + \mathrm{Q_n}$ dengan

$$\mathrm{P}_n = \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{Q}_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c_n & d_n \end{bmatrix}.$$

Sebagai catatan juga P_n dan Q_n memenuhi

$$\mathrm{P}_n\mathrm{P}_n^* + \mathrm{Q}_n\mathrm{Q}_n^* = \mathrm{P}_n^*\mathrm{P}_n + \mathrm{Q}_n^*\mathrm{Q}_n = I_2, \;\; \mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n^* = \mathrm{Q}_n\mathrm{P}_n^* = \mathrm{Q}_n^*\mathrm{P}_n = \mathrm{P}_n^*\mathrm{Q}_n = O_2,$$

dimana I_2 adalah matriks identitas 2×2 dan O_2 adalah matriks nol 2×2. Notasi $\varphi(n,k)$ menyatakan evolusi waktu ke-n dengan n bilangan bulat tak-negatif dari perjalanan kuantum tak beraturan pada posisi di k dengan $k \in \mathbb{Z}$ yang memenuhi persamaan rekursif

$$\varphi(n,k) = \mathrm{P}_n\varphi(n-1,k+1) + \mathrm{Q}_n\varphi(n-1,k-1). \tag{2.7}$$

Didefinisikan himpunan semua keadaan awal (*initial qubit*) dari perjalanan kuantum tak beraturan yaitu

$$\Phi = \left\{ \varphi(0,0) = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2 \middle| \alpha^2 + \beta^2 = 1 \right\}.$$

Dapat didefinisikan perjalanan kuantum X_n pada waktu ke n dengan keadaan awal $\varphi \in \Phi$ dan didefinisikan probabilitas kuantum berada pada posis ke k pada waktu ke n adalah

$$P(X_n = x) = \parallel \varphi(n,k) \parallel^2,$$

sehingga diperoleh

$$\sum_{x=-n}^{n} P(X_n = x) = \sum_{x=-n}^{n} \parallel \varphi(n,k) \parallel^2 = \parallel \mathrm{H}_n\mathrm{H}_{n-1}\cdots\mathrm{H}_2\mathrm{H}_1\varphi \parallel^2 = \parallel \varphi \parallel^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

Pada tesis ini, akan dikonstruksi bentuk dari matriks *decision* $A(n,k)$ dari model evolusi waktu total perjalanan kuantum pada (2.7) dalam aljabar max-plus, sehingga berlaku $\varphi(n,k) = A(n,k)\varphi(0,0)$. Selanjutnya, dari bentuk matriks *decision* tersebut akan diteliti (*conserved quanitity*) dari perjalanan kuantum tak beraturan aljabar max-plus yang analogi dengan perjalanan kuantum tak beraturan secara konvensional.

BAB 3
METODE PENELITIAN

Pada bab ini diuraikan beberapa tahapan penelitian yang akan dikerjakan untuk mencapai tujuan penelitian.

3.1 Tahapan Penelitian

(a) Studi Literatur

Pada studi literatur, referensi–referensi yang diperlukan dapat diperoleh melalui jurnal–jurnal atau *paper* yang sesuai dengan topik pada tugas akhir ini. Selain melalui jurnal – jurnal atau *paper* yang terkait, studi literatur dapat diperoleh melalui buku teks yang berkaitan dengan perjalanan kuantum waktu diskrit dan aljabar max-plus.

(b) Mengkaji Perjalanan Kuantum pada Aljabar Max-Plus.

Pada bagian ini akan dikaji tentang perjalanan kuantum waktu diskrit atas aljabar max-plus yang dikemukakan oleh Watanabe pada (**?**). Kemudian dikaji masalah kuantitas yang kekal (*conserved quantity*) dalam perjalanan kuantum waktu diskrit atas aljabar max-plus terhadap perjalanan kuantum waktu disktrit konvensional. Langkah-langkah dalam pengkajian ini, akan menjadi landasan utama dalam mengkonstruksi model evolusi total Waktu perjalanan kuantum tak beraturan dalam aljabar max-plus.

(c) Mengkonstruksi Model Evolusi Total Waktu Perjalanan Kuantum Tak beraturan dalam Aljabar Max-Plus.

Pada bagian ini akan dikonstruksi bentuk model evolusi waktu perjalanan kuantum waktu diskrit atas aljabar max-plus. Kemudian akan dikonstruksi bentuk eksplisit dari matriks *decision* $A(n,k)$ dari model evolusi waktu perjalanan kuantum tersebut. Dalam mengkonstruksi model evolusi waktu perjalanan kuantum atas aljabar max-plus menggunakan pendekatan terhadap model evolusi waktu perjalanan kuantum yang dikemukakan oleh Konno pada (**?**). Cara untuk mengkonstruksi model evolusi waktu ini yaitu dengan mengganti operasi $+$ dan $\times$ pada model evolusi waktu total perjalanan kuantum tak beraturan pada (2.7) dengan operasi dalam aljabar max-plus yaitu $\oplus$(max) dan $\otimes(\times)$.

(d) Menentukan Kuantitas yang Kekal.

Pada bagian ini akan ditentukan kuantitas yang kekal (*conserved quantity*) atau dapat disebut juga kuantitas yang dipertahankan dalam perjalanan kuantum waktu diskrit tak beraturan atas aljabar max-plus yang analog dengan perjalanan kuantum waktu disktrit tidak beraturan secara konvensional yang terdapat pada (**?**). Bentuk-bentuk apa saja *conserved quantity* yang akan dicari dalam penelitian ini sama dengan bentuk kuantitas kekal perjalanan kuantum aljabar max-plus yang analog dengan perjalanan kuantum konvensional pada (**?**). Sebagai salah satu contoh kuantitas yang kekal, pada perjalanan kuantum diperoleh bahwa $\sum_k \parallel \varphi(n,k) \parallel^2 = 1$, analog dengan hal tersebut dalam perjalanan kuantum aljabar max-plus pada (**?**) berlaku $\sum\limits_{k\in Z} \lambda(A(n,k)) = 0$.

(e) Diseminasi.

Dari hasil penelitian disertasi ini akan diseminarkan di seminar internasional dan akan di submit di jurnal internasional bereputasi.

(f) Penyusunan Laporan Tesis.

Dari hasil pengkajian, pengembangan dan penyelidikan pada semua tahap sebelumnya maka seluruh hasil penelitian akan ditulis dan disusun dalam bentuk laporan tesis.

3.2 Jadwal Pelaksanaan

Rencana dan jadwal kerja penelitian, serta penyusunan tesis disajikan dalam Tabel 3.1 sebagai berikut:

No.	Jenis Kegiatan	Bulan ke-															
		1				2				3				4			
		1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
1	Studi literatur																
2	Mengkaji perjalanan kuantum pada Aljabar max-plus.																
3	Mengkonstruksi Model Evolusi Total Waktu Perjalanan Kuantum Tak beraturan.																
4	Menentukan Kuantitas yang kekal .																
5	Diseminasi.																
6	Penyusuan Laporan Tesis.																

Tabel 3.1: Rencana Pelaksanaan Penelitian

DAFTAR PUSTAKA

[1] Bernd Heidergott, Geert Jan Olsder, and Jacob van der Woude. " Max Plus at Work Modelling and Analysis of Synchronized System: A Course on Max-Plus Algebra and Its Application", Princeton University Press, Priceton and Oxford, 2006.

[2] Baccelli, F., G. Cohen, G.J. Olsder, and J.-P. Quadrat. "Synchronization and Linearity", John Wiley and Sons, Now York, 1992. Buku ini dapat juga di download dari Web site `http://www-rocq.inria.fr/metalau/cohen/SED/bookonline.html`

[3] Subiono. "On Classes of Min-Max-Plus Systems and Their Applications", PhD thesis, Delft University of Technology, The Netherlands, 2000. Buku ini dapat juga di download dari Web site /http://www.its.ac.id/personal/material.php?id=Subiono

[4] G.J. Olsder. "Eigenvalues of dynamic min-max systems". Journal of Discrete Event Dynamic Systems, 1:177-207, (1991).

[5] G.J. Olsder, "On structural properties of min-max systems", Report of The Faculty of Technical Mathematics and Informatics no. 93-95, TU Delft, (1993).

[6] L. Elsner, P. van den Driessche, "On the power method in max algebra", Linear Algebra and its Applications, 302-303:17-32, (1999).

[7] Subiono, J.W. van der Woude, "Power algorithms for (max,+)-and bipartite (min,max,+)-systems", Report of the faculty of Technical Mathematics and Informatics no. 98-29, TU Delft, (1998), also accepted for publication in Discrete Event Dynamic System.

[8] Subiono, and J.W. van der Woude. "Power Algorithms for (max,+)- and bipartite (min,max,+)-systems". Discrete Event Dynamic Systems, 10:369-389, 2000.

[9] Woude J.W. van der, and Subiono. ”Condition for the structural existtence of an eigenvalue of a bipartite (min,max,+) system”. Theoretical Computer Science, 293:13-24, 2003.

[10] Kistosil Fahim, Subiono and Jacob van der Woude. ”On a generalization of power algorithms over max-plus algebra”. Discrete Event Dynamic Systems, 27:181-203, 2017.

[11] Soto y Koelemeijer. ”On the Behaviour of Classes of Min-Max-Plus System”. PhD thesis, Delft University of Technology, The Netherlands, 2003.

[12] J.G. Braker, G.J. Olsder, ”The power algorithm in max algebra”, Linear Algebra and its Applications, 182:67-89, (1993).

[13] J.G. Braker, ”Algorithms and Applications in Timed Discrete Event Systems”. PhD thesis, Delft University of Technology, The Netherlands, 1993.

[14] J. Gunawardena, ”Min-max function”, Journal of Discrete Event Dynamic Systems, 4:377-407, (1994).

[15] Ratna Novitasari. ”Analisis Masalah Generator dari Possible dan Universal Eigenvector pada Matriks Interval dalam Aljabar Max-Plus”. Thesis S2, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya, 2009.

[16] Nur Shofiana. ”Analisis Kedinamikan Sistem pada Penjadwalan Flow Shop Menggunakan Aljabar Max-Plus”. Thesis S2, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya, 2009.

[17] Winarni. ”Penjadwalan Jalur Bus Dalam Kota dengan Aljabar Max-Plus” . Tesis S2, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya, 2009.

[18] Himmatul Mursyidah. ”Karakterisasi Nilai Eigen, Vektor Eogen, dan Eigenmode dari Matriks Tak-terduksi dan Terduksi dalam Aljabar Max-Plus”. Tesis S2, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan

Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya, 2014.

[19] Nahlia Rakhmawati, Subiono and Subchan, Busway Schedule Planning In Surabaya Using Max-Plus Algebra. *Proceedings of National Graduate Seminar XII - ITS, Surabaya*, July 12, 2012.

[20] Dyah Arum Anggraeni, Subchan and Subiono, Analysis of Aircraft Transit Timetable in Airport Using Max-Plus Algebra, *Journal POMITS Vol. 1, No. 1*, (2013), page: 1-5

[21] Fatma Ayu Nuning F.A., Modeling and Scheduling Integrated System of Monorail and Train in Surabaya City Using Max-Plus Algebra, *Final Project, Mathematics Department Faculty of Mathematics and Science, Sepuluh Nopember Institute of Technology*, 2013.

[22] Ema Enggar Wati, Subiono, and Subchan, Analysis Scheduling of Supply Chain Using Max-Plus Algebra (Case Study Terminal Bahan Bakar Minyak (TBBM) Manggis, Bali), *Journal POMITS Vol. 1, No.1*, (2014), page: 1-6

[23] Widdya P. Sierliawati and Subiono, Rancangan dan analisis penjadwalan distribusi pada rantai pasok bahan bakar minyak menggunakan Petri Net dan Aljabar Max-Plus, *Prosiding Seminar Nasional Pascasarjana XIV-ITS, ISBN 978-602-96565-7-2, Volume I, hal.73-80*, 2014.

[24] Shofiyatun Mufidah. "Model Rantai Pasok Menggunakan Petri Net dan Aljabar Max-Plus dengan Mempertimbangkan Prioritas Kapal Tanker". Tesis Jurusan Matematika FMIPA-ITS, 2015.

[25] B. De Schutter. "Max-Algebraic system Theory For Discrete Event Systems" . PhD. Thesis, Katholike Universiteit Leuven, Departement Elektrotechniek, 1996.

[26] G.J. Olsder, Subiono. "On Large Scale Max-Plus Algebra Models in Railway Systems". Proceeding of IFAC conference on System Structure and Control, Nantes, France, pp.681-685, 1998.

[27] Subiono, Dieky Adzkiya dan Kistosil Fahim. " Max-Plus Algebra Toolbox, ver. 2.0.0". Jurusan Matematika

ITS, Surabaya, 2014. File toolbox bisa didownload di: http://atoms.scilab.org/toolboxes/maxplus_petri

[28] Jörg Raisch. ”Course Notes Discrete Event and Hybrid Systems”. Technische Universität Berlin, 2009.

[29] Maria H.Andersen, ”Max-Plus Algebra: Properties and Applications”. Master of Science in Mathematic Thesis Department of Mathematics, Laramie, WY, May 2002.

[30] Cassandras, C.G. and Stephane Lafortune ”Introduction to Discrete Event Systems”, Second Edition Spriger, 2008.

[31] M.V. Menon, ”Some spectral properties of an operator associated with a pair of non-negative matrices”, Trans.Amer.Math.Soc., 132:369-376, (1968).

[32] Subiono, G.J. Olsder,”On bipartite min-max-plus systems”, CD-ROM of proceeding European Control Conference (ECC), Brussels, Belgium, paper in session Th-E-K4, (1997).

[33] Cochet-Terrasson, J., Cohen, G., Gaubert, S., Mc Gettrick, M., Quadrat, J.P., ”Numerical Computation of Spectral Elements in (max,+) Algebra”, IFAC Conference on System Structure and Control, Nantes, France, 1998.

[34] Howard, R.A., ”Dynamic Programming and Markov Processes”, MIT Press/Wiley, New York, 1960.

[35] History of Tropical Algebra, (diakses pada tanggal : 1 Mei 2015), /http://en.m.wikipidea.org/wiki/tropical_geometry

[36] Litvinov, G. L., ”The Maslov Dequantization, Idempotent and Tropical Mathematics”, arXiv : 0507014v1, 2005.

[37] Izhakian, Z., ”Tropical Arithmetic and Matrix Algebra”, *Communications in Algebra*, 37:4, hal. 1445-1468, 2009.

[38] Izhakian, Z., and Rowen, L., ”Supertropical Algebra”, *Advances in Mathematics*, 225, hal. 2222-2286, 2010a.

[39] Izhakian, Z., Knebush, M., and Rowen, L., ”Supertropical Linear Algebra”, *Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach*, ISSN 1864-7596, 2010b.

[40] Izhakian, Z., and Rowen, L., ”Supertropical Polynomial and Resultants”, *Journal of Algebra*, 324, hal. 1860-1886, 2010c.

[41] Izhakian, Z., and Rowen, L., ”Supertropical Matrix Algebra”, *Israel Journal Mathematics*, 182, hal. 383-424, 2011a.

[42] Izhakian, Z., and Rowen, L., ”Supertropical Matrix Algebra II: Solving Tropical Equations”, *Irael Journal Mathematics*, 186, hal. 69-97, 2011b.

[43] Izhakian, Z., and Rowen, L., ”Supertropical Matrix Algebra III: Power Matrices and their Supertropical Eigenvalues”, *Journal of Algebra*, 341, hal. 25-149, 2011c.

[44] Izhakian, Z., Knebush, M., and Rowen, L., ”Dual Space and Bilinear Forms in Supertropical Linear Algebra”, *Journal Linear and Multilinear Algebra*, 60:7, hal. 865-883, 2012.

[45] Niv, Adi.,, ”*Factorization of Supertropical Matrices*”, arXiv: 1202.3615v1, 2012.

[46] Izhakian, Z., Knebush, M., and Rowen, L., ”Supertropical Monoids : Basics and Canonical Factorization”, *Journal of Pure and Applied Algebra*, 217, hal. 2135-2162, 2013.

[47] Niv, Adi., ”Characteristic Polynomials of Supertropical Matrices”, *Communications in Algebra*, 42, hal. 528-539, 2014.

[48] Izhakian, Z., Knebush, M., and Rowen, L., ”Supertropical Quadratic Forms I”, *Journal of Pure and Applied Algebra*, article in pres, 2015a.

[49] Izhakian, Z., Knebush, M., and Rowen, L., ”Supertropical Quadratic Forms II”, arXiv : 1506.03404v1, 2015b.

[50] Niv, Adi., ”On Pseudo-Inverses of Matrices and Their Characteristic Polynomials in Supertropical Algebra”, *Linear Algebra and Its Applications*, 471, hal. 264-290, 2015.