Catatan Kuliah : Teori Modul

Version 1.0.1

26 Pebruari 2024

Subiono

Subiono — Email: subiono@its.ac.id

Alamat: Departemen Matematika-FSAD
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Sukolilo Surabaya
Indonesia

Copyright

Kata Pengantar

Alhamdulillahirabbilalamin, segala puji hanyalah milikmu ya Allah yang telah memberikan "kebebasan bertanggung jawab" kepada manusia semasa hidupnya untuk suatu kebaikan dalam melaksanakan amanatnya di hamparan bumi yang dihuni beragam manusia. Sholawat dan Salam kepadamu ya Nabi Muhammad beserta para keluarganya dan para pengikutnya sampai nanti di hari akhir.

Draft buku ini disusun dengan maksud untuk membantu dan mempermudah mahasiswa dalam mempelajari materi kuliah Aljabar Linier Lanjut. Selain dari pada itu juga dimaksudkan untuk menambah suatu wacana bagi para peminat lainnya dari berbagai disiplin ilmu yang membutuhkannya atau kalangan industri dan perguruan tinggi.

Dalam drat buku ini diberikan beberapa konsep pengertian dari materi yang disajikan setelah itu diikuti dengan beberapa contoh untuk mempermudah pemahaman, selain itu juga diberikan beberapa contoh aplikasi bila mungkin.

Topik bahasan disajikan dengan penekanan pada "matematika" tetapi tidaklah menjadikan para pemakai lain akan mengalami kesulitan dalam mempelajari buku ini, karena peletakan penekanan aspek matematika dibuat dengan porsi yang seimbang. Sehingga para peminat matematika tetap dapat menikmati dan menggunakan ilmunya terutama dalam Aljabar Linier, begitu juga untuk para pemakai yang lainnya diharapkan mendapat tambahan wawasan untuk melihat matematika sebagai alat yang dibutuhkan terutama dalam kajian Aljabar dan Aljabar Linier untuk menyelesaikan masalah-masalah praktis yang dihadapinya.

Untuk memudahkan pembaca mengikuti alur dari setiap topik bahasan dalam buku ini, diasumsikan pembaca mempunyai bekal pengetahuan "Aljabar" dan "Aljabar Linear" yang memadai.

Penulis pada kesempatan ini menyampaikan keaktifan pembaca dalam mengkaji buku ini untuk menyampaikan kritik dan saran guna perbaikan buku ini, sehingga pada versi yang mendatang "mutu buku" yang baik bisa dicapai. Kritik dan saran ini sangat penting karena selain alasan yang telah disebutkan tadi, penulis percaya bahwa dalam sajian buku ini masih kurang dari sempurnah bahkan mungkin ada suatu kesalahan dalam sajian buku ini baik dalam bentuk redaksional, pengetikan dan materi yang menyebabkan menjadi suatu bacaan kurang begitu bagus.

Draft buku ini dapat diperoleh secara gratis oleh siapapun tanpa harus membayar kepada penulis. Hal ini berdasarkan pemikiran penulis untuk kebebasan seseorang mendapatkan suatu bacaan yang tersedia secara bebas dengan maksud "kemanfaatan" dan "kejujuran". Yang dimaksud dengan kemanfaatan adalah bergunanya bacaan ini untuk kemudahan pembaca memperoleh informasi penting yang diperlukannya dan untuk pembelajaran. Sedangkan kejujuran adalah ikatan moral dari pembaca untuk tidak memdistribusi buku ini dengan tujuaan yang tidak bermanfaat.

Penulis menulis buku ini berdasarkan pemikiran "kebebasan menulis" (tidak harus menggunakan media cetak penerbit) dengan asas "kemanfaatan" menggunakan media yang tersaji masa kini. Beberapa alat bantu untuk penulisan buku ini juga didapat secara gratis, yaitu perangkat lunak LaTeX untuk Windows yaitu MIKTEX 2.12.22 sebagai salah satu media LaTeX editor. Beberapa gambar yang ada dalam buku ini menggunakan perangkat lunak LaTeXDraw 3.9 yang juga didapat secara gratis. Begitu juga beberapa bahan rujukan didapat secara gratis lewat internet. Selain itu untuk menyelesaikan beberapa contoh yang dibahas digunakan alat bantu perangkat lunak SAGEMATH, perangkat lunak ini juga didapat dari internet secara gratis.

Akhirnya, dengan segala kerendahan hati penulis memohon kepada Allah semoga penulisan ini bisa berlanjut untuk versi mendatang yang tentunya lebih "baik" dari Versi 1.0.0 yang tersedia saat ini dan semoga benar-benar buku yang tersaji ini bermanfaat bagi pembaca.

Surabaya, 26 Pebruari 2024

Penulis

Daftar Isi

Bab 1

Pendahuluan: Dasar Teori Himpunan dan Bilangan Bulat

Dalam bab ini, secara singkat dibahas beberapa topik yang dibutuhkan untuk menjebatani beberapa bahasan berikutnya. Bab ini adalah suatu ringkasan yang utamanya digunakan sebagai rujukan bahasan berikutnya.

Teori himpunan menempati tempat yang sangat menonjol dalam sains modern. Ada dua pendekatan umum untuk teori himpunan. Yang pertama disebut "teori himpunan naif" dan yang kedua disebut "teori himpunan aksiomatik", juga dikenal sebagai "teori himpunan Zermelo-Fraenkel". Kedua pendekatan ini berbeda dalam beberapa hal. "Teori himpunan naif" diprakarsai oleh ahli matematika Jerman Georg Cantor (1845-1918) sekitar tahun 1870. Menurut Cantor, "himpunan adalah kumpulan objek yang pasti dan dapat dibedakan dari intuisi kita atau kecerdasan kita untuk dipahami secara keseluruhan." Setiap objek dari suatu himpunan disebut sebagai elemen atau anggota himpunan. Ungkapan "objek intuisi atau intelek kita" menawarkan kebebasan untuk memilih objek dalam membentuk himpunan dan dengan demikian himpunan sepenuhnya ditentukan oleh objeknya. Ia mengembangkan teori matematika himpunan untuk mempelajari bilangan real dan deret Fourier. Richard Dedekind (1831-1916) juga memperkaya teori himpunan selama tahun 1870-an. Namun, teori himpunan Cantor tidak segera diterima oleh matematikawan kontemporernya. Definisinya tentang himpunan mengarah pada kontradiksi dan paradoks logis. Yang paling terkenal di antara mereka adalah paradoks Russell yang diberikan pada tahun 1918 oleh Bertrand Russell (1872-1970). Paradoks seperti itu menyebabkan aksioma teori himpunan intuitif Cantor melahirkan Teori Himpunan Zermelo-Fraenkel. Beberapa penulis lebih suka menyebutnya Teori Himpunan Zermelo-Fraenkel-Skolem. Alasannya adalah karena teori E.Zermelo tahun 1908 yang dimodifikasi oleh A.Fraenkel dan T.Skolem. Pada tahun 1910 Hilbert menulis "teori himpunan adalah bahwa disiplin matematika yang saat ini menempati peran luar biasa dalam sains kita dan memancarkan pengaruhnya yang kuat ke semua cabang matematika". Dalam bab ini, kita mengembangkan teori himpunan naif, yang merupakan teori non-formal yang menggunakan bahasa alami untuk menggambarkan himpunan dan sifat dasarnya. Untuk deskripsi yang tepat dari banyak gagasan aljabar modern dan juga untuk penalaran matematika, konsep relasi, Lemma Zorn, pemetaan (fungsi), kardinalitas himpunan, sangat penting. Mereka membentuk dasar-dasar teori himpunan dan dibahas dalam bab ini. Banyak contoh konkret didasarkan padanya. Himpunan bilangan bulat memainkan peran penting dalam perkembangan ilmu pengetahuan, teknologi, dan peradaban manusia. Teori bilangan, dalam pengertian umum, adalah studi tentang himpunan bilangan bulat. Telah lama menjadi salah satu mata pelajaran favorit tidak hanya bagi siswa tetapi juga bagi banyak orang lainnya. Dalam bab ini, beberapa konsep dasar dan sifat bilangan bulat, seperti aksioma Peano, prinsip terurut secara baik, algoritma pembagian, pembagi persekutuan terbesar, bilangan prima, teorema dasar aritmatika, dan aritmatika modular dipelajari.

1.1 Himpunan: Konsep Pengantar

Konsep "himpunan" sangat penting dalam semua cabang matematika. Kita menemukan istilah atau konsep tertentu yang maknanya tidak memerlukan penjelasan. Istilah semacam itu disebut istilah tidak terdefinisi dan dianggap sebagai konsep primitif. Jika seseorang mendefinisikan istilah "himpunan" sebagai "himpunan adalah kumpulan objek yang terdefinisi dengan baik", maka arti dari kumpulan tidak jelas. Seseorang dapat mendefinisikan "kumpulan" sebagai "agregat" objek. Apa yang dimaksud dengan "agregat"? Karena bahasa kita terbatas, sinonim lain, seperti "class", "family", dll. Matematikawan menerima bahwa ada istilah yang tidak terdefinisi dan "himpunan" akan menjadi istilah yang tidak terdefinisi. Tapi kita menerima ekspresi yang sudah dikenal, seperti "himpunan semua bilangan bulat", "himpunan semua bilangan asli", "himpunan semua bilangan rasional", "real semua bilangan real", dll.

Kita tidak akan mencoba untuk memberikan definisi formal dari himpunan atau mencoba untuk meletakkan dasar bagi teori aksiomatik himpunan. Sebaliknya kita akan mengambil pendekatan operasional dan intuitif untuk mendefinisikan suatu himpunan. Suatu himpunan adalah kumpulan objek yang terdefinisi secara baik dan objek ini dapat dibedakan dengan jelas.

Istilah 'terdefinisi dengan baik' menentukan bahwa hal itu dapat ditentukan apakah objek tertentu termasuk dalam himpunan yang dimaksud atau tidak. Di sebagian besar aplikasi, kita berurusan dengan objek yang agak spesifik, dan gagasan samar-samar tentang suatu, dalam hal ini, muncul sebagai sesuatu yang cukup dikenali. Kita biasanya menunjukkan himpunan dengan huruf kapital, seperti $A, B, C, \cdots$ Objek himpunan disebut elemen atau anggota himpunan dan biasanya dilambangkan dengan huruf kecil, seperti $a, b, c, \cdots$. Diberikan suatu himpunan A kita menggunakan notasi '$a \in A$' untuk menunjukkan bahwa elemen a adalah anggota himpunan A dan ini dibaca sebagai 'a adalah elemen dari A' atau 'a berada di A'; dan '$a \notin A$' untuk menunjukkan bahwa elemen a bukan anggota A dan ini dibaca sebagai 'a tidak berada di A'. Karena suatu himpunan secara tunggal ditentukan oleh elemen-elemennya, kita dapat mendeskripsikan suatu himpunan baik dengan sifat karakterisasi elemen atau dengan mendaftar elemen-elemennya. Cara baku untuk mendeskripsikan himpunan dengan mencantumkan elemen: yaitu mencantumkan elemen himpunan yang dipisahkan dengan koma, dengan tanda kurung. Jadi himpunan $A = \{a, b, c\}$ menunjukkan bahwa elemen dari A hanyalah a, b, c dan tidak ada yang lain. Jika B adalah himpunan yang berisi a, b, c dan mungkin lebih, maka secara notasional, ditulis $B = \{a, b, c, \cdots\}$. Di sisi lain, himpunan yang terdiri dari satu elemen x kadang-kadang disebut 'singleton' x, dilambangkan dengan $\{x\}$. Yang kita maksud dengan pernyataan adalah kalimat tentang objek tertentu yang memiliki nilai kebenaran 'benar' atau 'salah' tetapi tidak keduanya. Jika himpunan A dideskripsikan dengan sifat $P(x)$ dari elemen x, notasi $\{x : P(x)\}$ atau $\{x \mid P(x)\}$ juga sering digunakan, dan dibaca sebagai 'himpunan dari semua x sehingga pernyataan $P(x)$ tentang x benar'. Misalnya, $A = \{x : x$ adalah bilangan bulat positif $< 10\}$.

Implikasi adalah pernyataan dalam bentuk 'P berakibat Q' atau 'bila P, maka Q' ditulis sebagai $P \Rightarrow Q$. Implikasi **salah** bila P **benar** dan Q **salah**; ia benar dalam semua kasus lainnya. Sebuah **ekuivalen logis** atau **bikondisional** adalah pernyataan dalam bentuk 'P berakibat Q dan sebalinya Q berakibat P' dan disingkat **bila dan hanya bila** dan ditulis sebagai $P \Leftrightarrow Q$. Jadi $P \Leftrightarrow Q$ tepat **benar** ketika P dan Q adalah **benar** atau **salah**.

Dua elemen a dan b dari suatu himpunan S dikatakan sama, dilambangkan dengan $a = b$ bila mereka adalah elemen yang sama, bila tidak, kita menyatakan $a \neq b$. Dua himpunan X dan Y dikatakan sama, dilambangkan dengan $X = Y$ bila keduanya memiliki elemen-elemen yang sama. Misalnya, $\{2, 4, 6, 8\} = \{2x \mid x = 1, 2, 3, 4\}$.

Kita memperkenalkan suatu himpunan khusus yang kita sebut 'himpunan kosong'; dilambangkan dengan $\emptyset$, yang kita anggap sebagai 'himpunan yang tidak memiliki elemen'. Himpunan kosong hanyalah konvensi. Ini penting dalam konteks kelengkapan logis. Karena $\emptyset$ dianggap sebagai 'himpunan tanpa elemen', konvensi untuk setiap elemen x, hubungan $x \in \emptyset$ tidak berlaku. Jadi $\{x\ |$x adalah bilangan bulat genap sehingga $x^2 = 2\} = \emptyset$. Bila himpunan A sedemikian rupa sehingga $A \neq \emptyset$, maka A disebut himpunan tidak kosong (atau tidak hampa) Bila X dan Y adalah dua himpunan sedemikian sehingga setiap anggota X juga merupakan anggota Y, maka X disebut himpunan bagian dari Y, dilambangkan dengan $X \subseteq Y$ (atau cukup dengan $X \subset Y$), yang juga dikatakan X termuat dalam Y atau ekuivalennya, $Y \supseteq X$ atau hanya $Y \supset X$: yaitu Y memuat X. Misalnya, $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ dimana $\mathbb{N}$ adalah himpunan semua bilangan bulat tak-negatif dan $\mathbb{Z}$ adalah himpunan semua bilangan bulat. Begitu juga $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ dimana $\mathbb{Q}$ adalah himpunan semua bilangan rasional. Jelas, $X \subseteq X$ untuk setiap himpunan X.

Proposition 1.1.1 *(i) $X = Y$ bila dan hanya bila $X \subseteq Y$ dan $Y \subseteq X$. (ii) Semua subset himpunan kosong adalah sama.*

Bukti (i) Jelas sesuai dengan definisi dua himpunan sama. (ii) Misalkan A dan B adalah himpunan dan $\emptyset_A$ adalah sebarang himpunan bagian kosong dari A begitu juga $\emptyset_B$ adalah himpunan bagian kosong dari B. Bila $\emptyset_A \subseteq \emptyset_B$ tidak benar, maka setidaknya ada satu elemen di $\emptyset_A$ yang bukan di $\emptyset_B$. Tetapi hal ini tiak mungkin. Jadi $\emptyset_A \subseteq \emptyset_B$. Dengan argumentasi yang sama juga kita mempunyai $\emptyset_B \subseteq \emptyset_A$. Dengan demikian dari hasil (i), kita mempunyai $\emptyset_A = \emptyset_B$.

□

Catatan: Ada satu dan hanya satu himpunan kosong $\emptyset$ yang termuat di setiap himpunan.

Bila himpunan X adalah himpunan bagian dari himpunan Y dan terdapat setidaknya satu anggota Y yang bukan merupakan anggota X, maka X disebut himpunan bagian sejati dari Y , dilambangkan dengan $X \subsetneq Y$. Jika himpunan X adalah bukan himpunan bagian dari Y, kita tulis sebagai $X \nsubseteq Y$.

Proposition 1.1.2 *Himpunan X yang mempunyai n anggota memiliki sebanyak* 2^n *himpunan bagian.*

Bukti Banyaknya himpunan bagian yang memiliki $r \leq n$ elemen dari n anggota X merupakan banyaknya kombinasi dari n elemen yang diambil sebayak r pada suatu saat, yaitu:

$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Ingat bahwa rumus binomial

$$(a+b)^n = C_0^n a^n + C_1^n a^{n-1} b + \cdots + C_n^n b^n.$$

Dengan demikian banyaknya semua himpunan bagian termasuk X dan $\emptyset$ adalah

$$\sum_{r=0}^{n} C_r^n = C_0^n + C_1^n + \cdots + C_n^n = (1+1)^n = 2^n.$$

□

Untuk menghindari elemen diluar pembicaraan, kita mengasumsikan bahwa semua elemen yang dipertimbangkan termasuk dalam beberapa himpunan tetap tetapi sebarang, yang disebut himpunan universal, dilambangkan dengan $\mathbb{U}$.

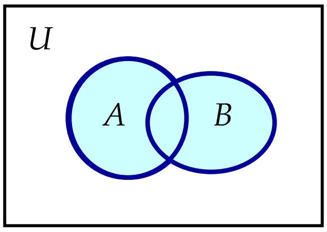
Diberikan dua himpunan, kita bisa menggabungkannya untuk membentuk himpunan baru. Kita dapat melakukan prosedur yang sama untuk sejumlah himpunan, terbatas atau tak terbatas. Kita melakukannya untuk dua himpunan terlebih dahulu, karena mengarah ke konstruksi umum.

Diketahui dua himpunan A dan B, kita dapat membentuk himpunan yang tepat berisi semua elemen A bersama-sama dengan semua elemen B. Ini disebut gabungan A dan B.

Definisi 1.1.1 *Gabungan (union atau join) dari dua himpunan A dan B, ditulis sebagai* $A \cup B$, *adalah himpunan*

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ atau } x \in B\}.$$

□



Gambar 1.1: Diagram Venn $A \cup B$

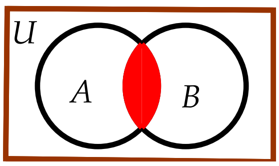
Digram Venn himpunan $A \cup B$ diberikan oleh Gambar 1.1.

Catatan: Dalam teori himpunan, kita nyatakan bahwa $x \in A$ atau $x \in B$. Ini berarti x berada di setidaknya salah satu dari A atau B dan mungkin berada di A dan B. Jelas, $A \cup A = A$; bila B adalah himpunan bagian dari A, maka $A \cup B = A$. Bila $A = \{1,2,3\}, B = \{3,7,8,9\}$, maka $A \cup B = \{1,2,3,7,8,9\}$. Unutuk sebarang himpunan A, maka $A \cup \emptyset = A$.

Diketahui dua himpunan A dan B, kita dapat membentuk himpunan semua anggotanya yang tepat terdiri dari semua elemen yang sama dengan A dan B. Ini disebut irisan dari A dan B.

Definisi 1.1.2 *Irisan (intersection atau meet) dari dua himpunan A dan B, ditulis sebagai $A \cap B$, adalah himpunan $A \cap B = \{x | x \in A$ dan $x \in B\}$.* □

Digram Venn himpunan $A \cap B$ diberikan oleh Gambar 1.2.



Gambar 1.2: Diagram Venn $A \cap B$

Jelas bahwa, $A \cap A = A$ untuk sebarang himpunan A. Bila $B \subseteq A$, maka $A \cap B = B$. Untuk sebarang himpunan A kita mempunyai $A \cap \emptyset = \emptyset$. Bila $A = \{1,3,5\}$ dan $B = \{3,5,7,8,9\}$, maka $A \cap B = \{3,5\}$.

Teorema 1.1.1 *Masing-masing operasi $\cup$ dan $\cap$ adalah*

(a) idempoten: $A \cup A = A = A \cap A$, untuk sebarang himpunan A;

(b) asosiatif: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ *dan* $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ *untuk sebarang tiga himpunan* A, B *dan* C*;*

(c) komutatif: $A \cup B = B \cup A$ *dan* $A \cap B = B \cap A$ *untuk sebarang dua himpunan* A *dan* B*;*

(d) $\cap$ *distributif terhadap* $\cup$ *dan* $\cup$ *distributif terhadap* $\cap$*:*

(i) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$*;*

(i) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cap C)$*.*

Bukti
Verifikasi (a)-(c) adalah **trivial**. Kita sekarang memberikan bukti teoretis himpunan (d)(i). Pembuktiannya dibagi menjadi dua bagian:

$$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

dan

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C).$$

Sekarang, diberikan sebarang $x \in A \cap (B \cup C)$, maka $x \in A$ dan $x \in B \cup C$. Sehingga didapat $x \in A$ dan $x \in B$ atau $x \in A$ dan $x \in C$ yang artinya $x \in A \cap B$ atau $x \in A \cap C$. Jadi $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Akibatnya $\boxed{A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C).}$ Sekarang kita membuktikan inklusi terbalik.

Karena $B \subseteq B \cup C$, maka $A \cap B \subseteq A \cap (B \cup C)$. Juga karena $C \subseteq B \cup C$, maka $A \cap C \subseteq A \cap (B \cup C)$. Sehingga kita mempunyai $\boxed{(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C).}$ Berdasarkan Proposisi 1.1.1 (i), maka (d)(i) dipenuhi. Dengan cara yang sama pembaca diharapkan membuktikan (d)(ii).

□

Definisi 1.1.3 *Dua himpunan tak-kosong* A *dan* B *dikatakan saling asing (disjoint) bila dan hanya bila* $A \cap B = \emptyset$*.*

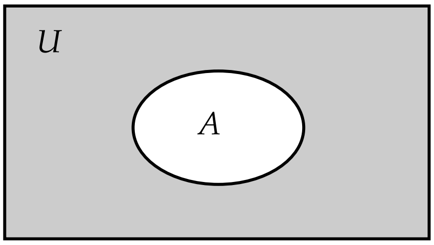
□

Contohnya, Bila A adalah himpunan semua bilangan **bulat negatif** dan N^+ adalah himpunan semua bilangan **bulat positif** maka $A \cap N^+ = \emptyset$.

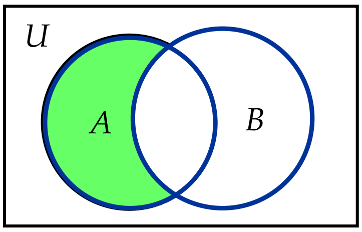
Definisi 1.1.4 *Komplemen (atau beda relatif) dari himpunan* B *sehubungan dengan himpunan* A*, dilambangkan oleh* $A - B$ *(atau* $A \setminus B$*) adalah himpunan yang semua anggotanya* ***berada di*** A *tetapi* ***tidak di*** B*, yaitu* $A - B = \{x \in A \mid x \notin B\}$*.*

Bila $\mathbb{U}$ *adalah himpunan universal, komplemen dari* A *dalam* $U\mathbb{U}$ *(yaitu, sehubungan dengan* $\mathbb{U}$*) dilambangkan dengan* A^c*. Hal ini berarti* $(A^c)^c = A, U^c = \emptyset,\ \emptyset^c = \mathbb{U}$ *dan* $A \cup A^c = \mathbb{U},\ A \cap A^c = \emptyset,\ B - A = B \cap A^c, B - A \neq A - B$ *untuk* $A \neq B$*.*

□



Gambar 1.3: Diagram Venn A^c



Gambar 1.4: Digram Venn $A - B$

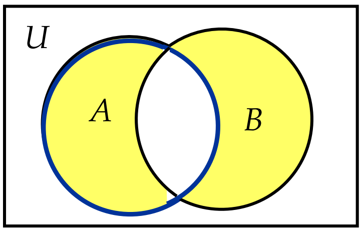
Secara diagram Venn himpunan A^c diberikan oleh Gambar 1.3. Sedangkan digram Venn himpunan $A - B$ diberikan oleh Gambar 1.4.

Definisi 1.1.5 *Himpunan **beda simetrik** dari A dan B didefinisikan oleh*

$$A \triangle B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) = \{x \,|\, x \in A \cap B^c \text{ atau } x \in A^c \cap B\}\,.$$

□

Digram Venn himpunan $A \triangle B$ diberikan oleh Gambar 1.5.



Gambar 1.5: Diagram Venn $A \triangle B$

Sangatlah berguna untuk membayangkan gambar geometris yang dengannya kita dapat memvisualisasikan himpunan dan operasi pada mereka. Cara mudah untuk melakukannya adalah dengan merepresentasikan himpunan universal $\mathbb{U}$ dengan luas persegi panjang dalam bidang dan elemen $\mathbb{U}$ dengan titik-titik luasnya. Himpunan dapat digambarkan dengan lingkaran dalam persegi panjang ini dan diagram dapat digambar untuk menggambarkan operasi pada himpunan dan hubungan di antara mereka. Diagram semacam itu dikenal sebagai diagram **Venn**, dinamai menurut John Venn (1834-1923), seorang ahli logika Inggris. Lima operasi himpunan kita diwakili oleh daerah yang diarsir pada Gambar 1.1, Gambar 1.2, Gambar 1.3, Gambar 1.4 dan Gambar 1.5.

Produk kartesian adalah salah satu konstruksi terpenting dari teori himpunan. Ini memungkinkan kita untuk mengekspresikan banyak konsep dalam himpunan. Konsep perkalian kartesian bergantung pada bidang koordinat dari geometri analitik. Ini menyatukan himpunan famili tertentu menjadi suatu himpunan baru. Dengan dua objek a, b ada sebuah objek baru (a, b), yang disebut **pasangan terurutnya**. Pasangan terurut tunduk pada satu syarat $(a, b) = (c, d)$ bila dan hanya bila $a = c$ dan $b = d$. Secara khusus, $(a, b) = (b, a)$ bila dan hanya bila $a = b$; dalam hal ini a disebut **koordinat pertama** dan b disebut **koordinat kedua** dari pasangan terurut (a, b). Nenek moyang konsep ini adalah bidang **koordinat geometri analitik**.

Definisi 1.1.6 *Misalkan A dan B adalah dua himpunan tak-kosong (berbeda atau tidak). Produk kartesian mereka $A \times B$ adalah himpunan yang ditentukan oleh $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$.* □

Contoh 1.1.1 *(i) Diberikan dua himpunan $\{1, 2\}$ dan $\{1, 2, 3\}$, didapat*

$$\{1, 2\} \times \{1, 2, 3\} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$$

dan

$$\{1, 2, 3\} \times \{1, 2\} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}.$$

Terlihat

$$\{1, 2\} \times \{1, 2, 3\} \neq \{1, 2, 3\} \times \{1, 2\}$$

sebab $(1, 3) \in \{1, 2\} \times \{1, 2, 3\}$, tetapi $(1, 3) \notin \{1, 2, 3\} \times \{1, 2\}$ dan

$$|\{1, 2\} \times \{1, 2, 3\}| = 2.3 = 6 = 3.2 = |\{1, 2, 3\} \times \{1, 2\}|.$$

(ii) Bila $A = B = \mathbb{R}$ dimana $\mathbb{R}$ adalah himpunan semua bilangan real. Maka $A \times B = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ adalah himpunan dari semua pasangan real yang terurut, mewakili titik pada bidang Euclidean.

□

Untuk lebih ringkas, pernyataan "bila dan hanya bila" kita singkat dengan **bhb**.

Proposisi 1.1.1 *$A \times B \neq \emptyset$ **bhb** $A \neq \emptyset$ dan $B \neq \emptyset$.*

Bukti
Bila $\boxed{A \times B \neq \emptyset}$, maka ada beberapa $(a, b) \in A \times B$ sedemikian hingga $a \in A$ dan $b \in B$. Jadi $\boxed{A \neq \emptyset}$ dan $\boxed{B \neq \emptyset}$. Sebaliknya, bila $\boxed{A \neq \emptyset}$ dan $\boxed{B \neq \emptyset}$, ada beberapa $a \in A$ dan $b \in B$. Dengan demikian sebagai pasangan terurut $(a, b) \in A \times B$, jadi $\boxed{A \times B \neq \emptyset}$. □

Proposisi 1.1.2 *Bila $C \times D \neq \emptyset$, maka $C \times D \subseteq A \times B$ **bhb** $C \subseteq A$ dan $D \subseteq B$.*

Bukti
Diberikan sebarang $c \in C$ dan $d \in D$ (sebab $C \times D \neq \emptyset$). Bila $\boxed{(c, d) \in C \times D \subseteq A \times B}$, maka $(c, d) \in A \times B$, akibatnya $c \in A$ dan $d \in B$. Jadi $\boxed{C \subseteq A}$ dan $\boxed{D \subseteq B}$. Sebaliknya, bila $\boxed{C \subseteq A}$ dan $\boxed{D \subseteq B}$. Hal ini berakibat untuk sebarang $(c, d) \in C \times D$, maka $c \in C$ dan $d \in D$. Sehingga kita mempunyai $c \in A$ (sebab $C \subseteq A$) dan $d \in B$ (sebab $D \subseteq B$). Jadi $(c, d) \in A \times B$. Dengan demikian $\boxed{C \times D \subseteq A \times B}$. □

Proposisi 1.1.3 *Untuk himpunan A dan B yang tidak kosong, $A \times B = B \times A$ **bhb** $A = B$ (operasi $A \times B$ tidak bersifat komutatif).*

Bukti
Bila $\boxed{A \times B = B \times A}$, maka $\{(a, b) \mid a \in A \text{ dan } b \in B\} = \{(b, a) \mid b \in B \text{ dan } a \in A\}$. Akibatnya $(a, b) = (b, a), \forall a \in A$, dan $\forall b \in B$. Jadi $a = b, \forall a \in A$, dan $\forall b \in B$. Dengan demikian $\boxed{A = B}$. Sebaliknya, bila $\boxed{A = B}$, maka $\boxed{A \times B = A \times A = B \times A}$. Untuk $A \times B \neq B \times A$ lihat Contoh 1.1.1. □

Bila himpunan A memiliki n anggota, maka himpunan $A \times A$ memiliki sebanyak n^2 anggota. Himpunan dari anggota-anggota $\{(a, a) \mid a \in A\}$ dalam $A \times A$ disebut diagonal $A \times A$.

Teorema 1.1.2 *"$\times$" distributif terhadap $\cup, \cap$ dan "$-$", yaitu untuk setiap himpunan A, B dan C berlaku:*

(i) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$,

(ii) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$,

(iii) $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$.

Bukti
(i) Diberikan sebarang $\boxed{(a, x) \in A \times (B \cup C)}$, maka $a \in A$ dan $x \in B \cup C$. Ini berarti $a \in A$ dan $x \in B$ atau $a \in A$ dan $x \in C$. Sehingga didapat $(a, x) \in A \times B$ atau $(a, x) \in A \times C$. Dengan demikian $\boxed{(a, x) \in (A \times B) \cup (A \times C)}$. Jadi $\boxed{A \times (B \cup C) \subseteq (A \times B) \cup (A \times C)}$. Selanjutnya, diberikan sebarang $\boxed{y \in (A \times B) \cup (A \times C)}$, maka $y \in (A \times B)$ atau $y \in (A \times C)$. Sehingga didapat $y = (a, b) \in A \times B$ untuk beberapa $a \in A$ dan beberapa $b \in B$ atau $y = (a, c) \in A \times C$ untuk beberapa $a \in A$ dan beberapa $c \in B$. Ini berarti bahwa $a \in A$ dan $b \in B$ atau $a \in A$ dan $c \in C$. Akibatnya $\boxed{y = (a, x) \in A \times (B \cup C)}$ dengan $x = b \in B$ atau $x = c \in C$. Jadi $\boxed{(A \times B) \cup (A \times C) \subseteq A \times (B \cup C)}$. Dengan demikian $\boxed{A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)}$.
Untuk (ii) dan (iii) pembaca bisa memcoba membuktikannya. □

Catatan: Definisi 1.1.6 diperluas ke hasil perkalian dari n himpunan untuk bilangan bulat positif $n \geq 2$. Jika A_i adalah himpunan yang tidak kosong untuk semua $1 \leq i \leq n$, maka perkaliannya $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ adalah himpunan semua n-pasangan terurut $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, di mana $a_i \in A_i$ untuk setiap $1 \leq i \leq n$. Jika secara khusus, $A = A_i$, $1 \leq i \leq n$, maka hasil kali mereka dilambangkan dengan simbol A^n. Ide-ide ini menghasilkan himpunan terkenal $\mathbb{R}^n$ dan $\mathbb{C}^n$, dengan masing-masing $\mathbb{R}$ dan $\mathbb{C}^n$ adalah himpunan semua bilangan real dan himpunan semua bilangan kompleks.

Secara umum operasi "$\times$" tidak asosiatif: $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$. Berdasarkan Proposisi 1.1.1, bila setidaknya satu dari himpunan A, B dan C adalah kosong, maka $(A \times B) \times C = \emptyset = A \times (B \times C)$. Sebaliknya, andaikan $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$ dengan masing-masing A, B dan C berbeda. Bila tak-satupun dari himpunan A, B dan C adalah kosong, maka ada setidaknya satu anggota $(a, c) \in (A \times B) \times C$, dimana $a \in A \times B$ dan $c \in C$. Dengan hipotesis $(a, c) \in A \times (B \times C)$. Hal berakibat $a \in A$ suatu kontrakdiksi dengan kenyataan bahwa $a \in A \times B$. Jadi haruslah $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$.

Famili dari himpunan: Misalkan $I \neq \emptyset$ adalah suatu himpunan. Bila untuk setiap $i \in I$ terdapat satu himpunan A_i, maka koleksi himpunan $\{A_i \mid i \in I\}$ disebut suatu **famili** dari suatu himpunan, dan I disebut himpunan **indeks** untuk famili tersebut. Untuk beberapa $i \neq j$, A_j mungkin sama dengan A_i.

Setiap koleksi yang tidak kosong dari himpunan dapat diubah menjadi famili dari himpunan dengan "pengindeksan diri". Kita menggunakan itu sendiri sebagai himpunan indeks dan menetapkan ke setiap anggota himpunan yang diwakilinya.

Kita memperluas pengertian gabungan dan irisan ke famili dari himpunan.

Definisi 1.1.7 *Misalkan A suau himpunan tertentu, dan $\{A_i \subseteq A \mid i \in I\}$. Gabungan $\bigcup_{i \in I} A_i$ (atau $\bigcup\{A_i \subseteq A \mid i \in I\}$ dari famili adalah himpunan $\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in A \mid x \in A_i$ untuk beberapa $i \in I\}$ dan irisan $\bigcap_{i \in I} A_i$ (atau $\bigcap\{A_i \subseteq A \mid i \in I\}$).* □

Jelas bahwa, untuk setiap himpunan A, $A = \bigcup\{\{x\} \mid x \in A\} = \bigcup_{a \in A}\{a\}$. Dalam kasus irisan dan gabungan tak berhingga, beberapa situasi **non-intuitif** dapat terjadi:

Contoh 1.1.2 *(i) Misalkan $A_p = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq p, p = 1, 2, 3, \ldots\}$. Maka $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$ dan setiap A_p tidak kosong sehingga setiap A_p memuat berikutnya, yaitu A_{p+1}. Jelas bahwa, $\bigcap_p A_p = \emptyset$.*

(ii) Misalkan interval tutup $A_n = [0, 1 - 2^{-n}]$ dan $B_n = [0, 1 - 3^{-n}]$ untuk setiap bilangan bulat positif n. Maka setiap A_n adalah himpunan bagian sejati dari B_n dan $A_n \neq B_r$ untuk setiap n dan r. Jelas bahwa,

$$\bigcup_n A_n = \bigcup_n B_n = [0, 1).$$

□

Definisi 1.1.8 *Misalkan A adalah himpunan tak-kosong. Himpunan pangkat $\mathcal{P}(A)$ adalah himpunan semua himpunan bagian dari A. Jadi $\mathcal{P}(A) = \{X \subseteq A\}$.* □

Jelas bahwa, $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ dan $A \in \mathcal{P}(A)$ untuk setiap himpunan A; disamping itu $B \subseteq A \Leftrightarrow B \in \mathcal{P}(A)$; juga $a \in A \Leftrightarrow \{a\} \in \mathcal{P}(A)$.

Proposition 1.1.3 $\bigcap\limits_i \mathcal{P}(A_i) = \mathcal{P}(\bigcap\limits_i A_i)$.

Bukti
Sebagai latihan! □

Catatan: Pada umumnya, $\bigcup\limits_i \mathcal{P}(A_i) \neq \mathcal{P}(\bigcup\limits_i A_i)$. Misalnya, $A_1 = \{1\}, A_2 = \{2\}$. Maka $\bigcup\limits_i \mathcal{P}(A_i) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$ dan $\mathcal{P}(\bigcup\limits_i A_i) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

1.2 Relasi pada Himpunan

Dalam matematika, dua jenis relasi yang sangat penting, seperti **relasi ekivalen** dan **relasi terurut** sering muncul. Kadang-kadang, kita membutuhkan studi dekomposisi dari himpunan X yang tidak kosong menjadi himpunan bagian saling asing yang gabungannya adalah seluruh himpunan X (yaitu, X diisi oleh himpunan bagian ini). Relasi ekivalen pada X menyediakan alat untuk menghasilkan dekomposisi X seperti itu dan menghasilkan himpunan baru yang memiliki hubungan natural dengan himpunan awalnya, yaitu X.

Suatu **relasi biner** R pada himpunan tidak kosong A adalah konsep matematika dan secara intuitif adalah proposisi sedemikian rupa sehingga untuk setiap pasangan terurut (a, b) dari anggota-anggota A, kita dapat menentukan apakah aRb (dibaca sebagai a berelasi dengan b melalui relasi R) benar atau salah. Kita mendefinisikannya secara formal dalam istilah konsep himpunan.

Definisi 1.2.1 *Suatu **relasi biner** R pada himpunan tidak kosong A adalah himpunan bagian $R \subseteq A \times A$ dan **relasi biner** S dari A ke B adalah himpunan bagian S dari $A \times B$. Pasangan $(a, b) \in R$ juga dilambangkan sebagai aRb.* □

Relasi biner S dari A ke B kadang-kadang ditulis sebagai $S : A \to B$. Sebagai ganti kita menulis relasi biner pada A, kita hanya menulis relasi pada A, kecuali jika ada kebingungan.

Contoh 1.2.1 *Untuk setiap himpunan $A \neq \emptyset$, diagonal $\Delta = \{(a, a) \mid a \in A\} \subseteq A \times A$ adalah relasi persamaan.* □

Dalam sebarang relasi R pada A, setiap pasangan dari elemen A tidak harus berelasi yaitu, (a, b) mungkin bukan anggota R untuk beberapa pasangan $(a, b) \in A \times A$. Misalnya, bila $a \neq b$, maka $(a, b) \notin \Delta$ dan, juga $(b, a) \notin \Delta$.

Contoh 1.2.2 *Relasi inklusi pada himpunan pangkat $\mathcal{P}(A)$ adalah himpunan $\{(A, B) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) \mid A \subseteq B\} \subseteq \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A)$.* □

1.2.1 Relasi Ekivalen

Konstruksi matematika fundamental adalah memulai dengan himpunan X yang tidak kosong dan menguraikan himpunan tersebut menjadi suatu keluarga himpunan bagian yang saling asing dari X sedangkan seluruh gabungannya adalah himpunan X, dan disebut partisi X serta membentuk himpunan baru yang disebut himpunan **hasil bagi** (**kuasi**) dari X yang diberikan oleh partisi. Anggota dari himpunan kuasi adalah himpunan bagian yang saling asing tersebut. Untuk tujuan ini, kita memperkenalkan konsep relasi ekivalen yang secara logis ekivalen dengan partisi.

Definisi 1.2.2 *Suatu relasi R pada A dikatakan suatu **relasi ekivalen** pada A **bhb***

*(a) R adalah **refleksif** : $(a, a) \in R$, $\forall a \in A$,*

*(b) R adalah **simetri** : bila $(a, b) \in R$, maka $(b, a) \in R$ untuk $a, b \in A$,*

*(c) R adalah **transitif** : bila $(a, b) \in R$ dan $(b, c) \in R$, maka $(a, c) \in R$ untuk $a, b, c \in A$.* □

Berbicara tentang himpunan bagian dari $A \times A$, kita juga dapat mendefinisikan relasi ekivalen seperti di bawah ini dengan menulis aRb pada $(a, b) \in R$.

Definisi 1.2.3 *Suatu relasi R pada A dikatakan suatu **relasi ekivalen** pada A **bhb***

*(a′) R adalah **refleksif** : aRa, $\forall a \in A$,*

*(b′) R adalah **simetri** : bila aRb, maka bRa untuk $a, b \in A$,*

*(c′) R adalah **transitif** : bila aRb dan bRc, maka aRc untuk $a, b, c \in A$.* □

Contoh 1.2.3 *Didefinisikan relasi R pada $\mathbb{Z}$ oleh: aRb **bhb** $a - b$ adalah kelipatan $n > 1$ untuk suatu $n \in \mathbb{Z}$ dengan n tetap. Maka R adalah relasi ekivelen. Sebab: (a) **Refleksif**, $a - a = 0 = 0.n$, $\forall a \in \mathbb{Z}$. (b) **Simetri**, bila $a - b = k_0 n$ untuk $a, b \in \mathbb{Z}$ dan suatu $k_0 \in \mathbb{Z}$, maka $b - a = -k_0 n = k_1 n$ dengan $k_1 = -k_0 \in \mathbb{Z}$. (c) **Transitif**, bila $a - b = k_0 n$ dan $b - c = k_1 n$ untuk $a, b, c \in \mathbb{Z}$ dan suatu $k_0, k_1 \in \mathbb{Z}$, maka $a - c = (a - b) + (b - c) = k_0 n + k_1 n = (k_0 + k_1) n = k_2 n$ dengan $k_2 = k_0 + k_1 \in \mathbb{Z}$.* □

Contoh 1.2.4 *Misalkan T adalah himpunan dari semua segitiga pada bidang Euclide. Didefinisikan $\alpha R\beta$ **bhb** α dan β similar untuk $\alpha, \beta \in T$. Maka R adalah suatu relasi ekivalen.* □

Definisi 1.2.4 *Suatu relasi R pada suatu himpunan A dikatkan **antisimetri**, **bhb** xRy dan yRx berakibat bahwa $x = y$ untuk $x, y \in A$.* □

Contoh 1.2.5 *Diberikan suatu himpunan A, kita tinjau relasi inklusi '$\subseteq$' pada $\mathcal{P}(A)$. Maka $P \subseteq Q$ dan $Q \subseteq P$ berakibat $P = Q$ untuk $P, Q \in \mathcal{P}(A)$. Jadi relasi '$\subseteq$' adalah antisimetri.* □

Catatan. Relasi: refleksif, simetri (atau antisimetri) dan transitif tidak tergantung satu dengan yang lainnya.

Contoh 1.2.6 *Suatu relasi yang **refleksi**, **simetri** tetapi **tidak transitif**: Misalkan R adalah suatu relasi pada $\mathbb{Z}$ diberikan oleh xRy **bhb** $x - y = 0, 5$ atau -5. Maka R adalah refleksif, sebab $x - x = 0$ akibatnya xRx, untuk semua $x \in \mathbb{Z}$. Relasi R adalah simetri, sebab xRy berakibat $x - y = 0, 5$ atau -5. Sehingga didapat $y - x = 0, -5$ atau 5, jadi yRx. Tetapi R tidak transitif, sebab $12R7$ dan $7R2$, tetapi $12 - 2 = 7 \neq 0, 5$ atau -5. Jadi $(12, 2) \notin R$.* □

Contoh 1.2.7 *Suatu relasi yang **refleksif** dan **transitif** tetapi tidak **simetri** atau **antisimetri**: Misalkan $\mathbb{Z}^*$ adalah himpunan dari semua bilangan bulat bukan-nol dan R adalah relasi pada $\mathbb{Z}^*$ diberikan oleh aRb **bhb** a adalah faktor dari b, yaitu, **bhb** $a \mid b$. Karena $a \mid a$ untuk semua $a \in \mathbb{Z}^*$; bila $a \mid b$ dan $b \mid c$, maka $a \mid c$ untuk semua $a, b, c \in \mathbb{Z}^*$. Jadi R refleksif dan transitif. Selanjutnya, $2 \mid 8$ tetapi $8 \nmid 2$; dengan demikian R tidak simetri. Sekali lagi $7 \mid -7$ dan $-7 \mid 7$ tetapi $7 \neq -7$; dengan demikian R tidak antisimetri.* □

Contoh 1.2.8 *Suatu relasi yang **simetri** dan **transitif** tetapi **tidak refleksif**: Misalkan $\mathbb{R}$ adalah himpunan semua bilangan real dan ρ adalah suatu relasi pada $\mathbb{R}$ yang diberikan oleh $(a, b) \in \rho$ **bhb** $ab > 0$. Jelas, ρ adalah **simetri** dan **transitif**. Karena $(0, 0) \notin \rho$, maka ρ tidak refleksif.* □

Definisi 1.2.5 *Misalkan X adalah himpunan tak-kosong. Maka suatu keluarga $\mathcal{P} = \{A_i \subseteq X \mid i \in I\}$ dari himpunan bagian dari X dikatakan sebagai partisi dari X **bhb**:*

(i) *Setiap A_i bukan himpunan kosong untuk $i \in I$.*

(ii) *$A_i \cap A_j = \emptyset$ untuk semua $i \neq j$, $i, j \in I$.*

(iii) *$\bigcup_{i \in I} \{A_i \in \mathcal{P}\} = X$.* □

Jadi, partisi pada himpunan X adalah kelas saling asing dari himpunan bagian $X \neq \emptyset$ yang gabungannya adalah himpunan X itu sendiri. Partisi dari X adalah hasil dari pemisahan himpunan X menjadi himpunan bagian tidak kosong sedemikian rupa sehingga setiap $x \in X$ adalah anggota dari satu dan hanya satu dari himpunan bagian yang diberikan.

Partisi suatu himpunan tidaklah tunggal. Misalnya, jika $X = \{1,2,3,4,5,6\}$, maka $\{1,3,5\}, \{2,4,6\}$ dan $\{1,2,3,4\}, \{5,6\}$ adalah dua partisi berbeda dari X.

Kita akan menunjukkan dalam Teorema 1.2.1 bahwa ada korespondensi bijektif antara himpunan relasi ekivalen pada himpunan $X \neq \emptyset$ dan himpunan semua partisi pada X.

Teorema 1.2.1 *Misalkan ρ adalah relasi ekivalen pada himpunan $X \neq \emptyset$ dan misalkan untuk setiap $x \in X$, kelas dari x, dinotasikan oleh $[x]_\rho$, dan didefinisikan sebagai $[x]_\rho \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in X \mid (x,y) \in \rho\}$. Maka*

(i) *Untuk setiap $x \in X$, maka $x \in [x]_\rho$;*

(ii) *Jika $x, y \in X$, maka salah satu dari $[x]_\rho = [y]_\rho$ atau $[x]_\rho \cap [y]_\rho = \emptyset$;*

(iii) $\bigcup_{x \in X} \left\{[x]_\rho\right\} = X$;

(iv) *Bila $\mathcal{P}_\rho = \left\{[x]_\rho \mid x \in X\right\}$, maka $\mathcal{P}_\rho$ adalah suatu partisi dari X, disebut partisi yang diinduksi oleh ρ dan dilambangkan dengan X/ρ.*

Bukti

(i) Karena ρ refleksif, maka $(x,x) \in \rho$ untuk setiap $x \in X$. Jadi menurut definisi $[x]_\rho$, maka $x \in [x]_\rho$.

(ii) Misalkan $[x]_\rho \cap [y]_\rho \neq \emptyset$. Maka ada beberapa $z \in [x]_\rho \cap [y]_\rho$. Karena itu, $(x,z) \in \rho$ dan $(y,z) \in \rho$ menurut definisi kelas. Misalkan w adalah sebarang elemen di X sedemikian rupa sehingga $w \in [x]_\rho$. Maka $(x,w) \in \rho$. Selanjutnya $(x,z) \in \rho$, maka $(z,x) \in \rho$ sebab ρ simetri. Jadi, $(z,x) \in \rho$ dan $(x,w) \in \rho$ akibatnya $(z,w) \in \rho$ sebab ρ bersifat transitif, dan karenanya

$$(y,z) \in \rho \text{ dan } (z,w) \in \rho \Rightarrow (y,w) \in \rho \Rightarrow w \in [y]_\rho \Rightarrow \boxed{[x]_\rho \subseteq [y]_\rho}. \tag{1.1}$$

Mengganti peran dari x dengan y dan menggunakan sifat simetris dari ρ, kita mempunyai

$$\boxed{[y]_\rho \subseteq [x]_\rho}. \tag{1.2}$$

Dari Persamaan 1.1 dan 1.2, kita mempunyai $[x]_\rho = [y]_\rho$.

(iii) Karena untuk setiap $x \in X$, maka $x \in [x]_\rho \subseteq \bigcup_{x \in X} \left\{[x]_\rho\right\}$, sehingga didapat

$$X \subseteq \bigcup_{x \in X} \left\{[x]_\rho\right\} \tag{1.3}$$

Lagi, karena $[x]_\rho \subseteq X,\ \forall x \in X$, maka

$$\bigcup_{x\in X}\left\{[x]_\rho\right\} \subseteq X. \tag{1.4}$$

Dari Persamaan 1.3 dan 1.4, kita mempunyai $\bigcup\limits_{x\in X}\left\{[x]_\rho\right\} = X$.

(iv) Dengan menggunakan (ii) dan (iii), juga menurut definisi dari suatu partisi, maka $\mathcal{P}_\rho$ adalah suatu partisi dari X.

□

Himpunan $[x]_\rho$ disebut kelas ekivalen (sehubungan dengan relasi ekivalen ρ) yang diwakili oleh elemen x.

Kebalikan dari Teorema 1.2.1 juga benar, sebagaimana ditunjukkan oleh teorema berikut.

Teorema 1.2.2 *Misalkan $\mathcal{P}$ adalah suatu partisi tertentu pada himpunan tak-kosong X. Didefinisikan relasi $\rho = \rho_{\mathcal{P}}$ (bergantung pada $\mathcal{P}$) pada X dengan $(x, y) \in \rho_{\mathcal{P}}$ **bhb** terdapat $A \in \mathcal{P}$ sehingga $x, y \in A$ (yaitu , **bhb** y berada pada kelas yang sama dengan x). Maka $\rho_{\mathcal{P}}$ adalah relasi ekivalen, yang diinduksi oleh $\mathcal{P}$. Selain itu,*

(a) $\mathcal{P}(\rho_{\mathcal{P}}) = \mathcal{P}$ *(partisi diinduksi oleh $\rho_{\mathcal{P}}$);*

(b) $\rho_{\mathcal{P}_\rho} = \rho$ *(relasi ekivalen yang diinduksi oleh partisi $\mathcal{P}_\rho$).*

Bukti

Misalkan sebarang $x \in X$. Karena $\mathcal{P}$ adalah suatu partisi pada X, maka kita bisa memilih $A \in \mathcal{P}$ yang memenuhi $x \in A$. Jadi, $(x, x) \in \rho$. Ini berarti relasi ρ **refleksif**. Bila $(x, y) \in \rho$, maka dari definisi ρ didapat $(y, x) \in \rho$. Jadi, relasi ρ adalah **simetri**. Misalkan $(x, y) \in \rho$ dan $(y, z) \in \rho$. Maka ada $A, B \in \mathcal{P}$ sehingga $x, y \in A$ dan $y, z \in B$. Akibatnya, $y \in A \cap B$. Karena $\mathcal{P}$ adalah suatu partisi, maka $A = B$. Akibatnya, $x, z \in A \in \mathcal{P}$; oleh karena itu, $(x, z) \in \rho$. Jadi, relasi ρ bersifat **transitif**. Akibatnya relasi ρ adalah **relasi ekivalen**.

(a) Sekarang kita tunjukkan bahwa $\mathcal{P}(\rho_{\mathcal{P}}) = \mathcal{P}$. Misalkan sebarang $A \in \mathcal{P}$ dan $x \in A$. Maka untuk setiap $y \in A$, $(x, y) \in \rho_{\mathcal{P}}$. Akibatnya, $y \in [x]_{\rho_{\mathcal{P}}}$, dengan demikian $\boxed{A \subseteq [x]_{\rho_{\mathcal{P}}}}$. Selanjutnya misalkan $z \in [x]_{\rho_{\mathcal{P}}}$. Maka ada beberapa $B \in \mathcal{P}$ sedemikian sehingga $x, z \in B$. Tetapi $x \in A$ akibatnya $x \in A \cap B$. Dengan demikian berdasarkan sifat partisi, maka $A = B$. Akibatnya, $z \in A$. Jadi, $\boxed{[x]_{\rho_{\mathcal{P}}} \subseteq A}$. Akibatnya,

$$[x]_{\rho_{\mathcal{P}}} = A,\ \text{tetapi } [x]_{\rho_{\mathcal{P}}} \in \mathcal{P}(\rho_{\mathcal{P}});$$

dengan demikian kita mempunyai $\boxed{\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}(\rho_{\mathcal{P}})}$. Selain itu, $\mathcal{P}$ dan $\mathcal{P}(\rho_{\mathcal{P}})$ adalah partisi dari himpunan yang sama yaitu X. Dengan demikian $\boxed{\mathcal{P}(\rho_{\mathcal{P}}) \subseteq \mathcal{P}}$. Jadi $\mathcal{P}(\rho_{\mathcal{P}}) = \mathcal{P}$.

(b) Untuk membuktikan $\rho_{\mathcal{P}_\rho} = \rho$, misalkan $(x, y) \in \rho$. Maka $y \in [x]_\rho \in \mathcal{P}_\rho$. Akibatnya $(x, y) \in \rho_{\mathcal{P}_\rho}$. Jadi, $\rho \subseteq \rho_{\mathcal{P}_\rho}$. Sekali lagi $(x, y) \in \rho_{\mathcal{P}_\rho}$, maka ada kelas ekivalen $[z]_\rho$ sedemikian sehingga $x, y \in [z]_\rho$. Akibatnya, $(z, x) \in \rho$ dan $(z, y) \in \rho$. Jadi, $(x, z) \in \rho$ dan $(z, y) \in \rho$. Dengan demikian berdasarkan sifat transitif dari ρ, maka $(x, y) \in \rho$. Sehingga didapat $\rho_{\mathcal{P}_\rho} \subseteq \rho$. Akibatnya $\rho = \rho_{\mathcal{P}_\rho}$.

□

Kelas-kelas saling-asing $[x]_\rho$ dimana himpunan X dipartisi oleh relasi ekivalen ρ merupakan himpunan, disebut himpunan hasil bagi X oleh ρ, dilambangkan dengan X/ρ, dimana $[x]_\rho$ menunjukkan kelas yang memuat elemen $x \in X$. Setiap elemen x dari kelas $[x]_\rho$ disebut sebagai perwakilan dari $[x]_\rho$ dan himpunan yang dibentuk dengan mengambil satu elemen dari setiap kelas disebut suatu sistem perwakilan dari partisi.

Contoh berikut menunjukkan bahwa himpunan hasil bagi dari himpunan tak-berhingga mungkin berhingga.

Contoh 1.2.9 *(i) Himpunan kelas residu $\mathbb{Z}_n$: Dalam Definisi 1.2.3, kita telah mendefinisikan relasi ekivalen ρ pada $\mathbb{Z}$; ketika suatu bilangan bulat a (positif, negatif atau 0) dibagi dengan bilangan bulat positif n, ada n kemungkinan sisa, yaitu, $0, 1, \ldots, n-1$. Jika r adalah sisa dari a dibagi oleh n, maka $a-r$ habis dibagi oleh n, sehingga $a \in [r]_\rho = \{y \in \mathbb{Z} \mid y-r \text{ habis dibagi oleh } n\}$. Karenanya setiap bilangan bulat berada di satu dan hanya satu dari n kelas $[0]_\rho, [1]_\rho, \ldots, [n-1]_\rho$. Jadi himpunan hasil bagi $\mathbb{Z}/\rho$ terdiri dari n kelas yang berbeda $[0]_\rho, [1]_\rho, \ldots, [n-1]_\rho$; disebut himpunan kelas residu/sisa modulo n dan dilambangkan dengan $\mathbb{Z}_n$. Bilangan bulat $0, 1, \ldots, n-1$ membentuk sistem perwakilan dari partisi. Relasi ekivalen ρ pada $\mathbb{Z}$ yang didefinisikan dalam contoh ini disebut kongruensi modulo n. Dua bilangan bulat a dan b dalam kelas residu yang sama dikatakan kongruen, dilambangkan dengan $a \equiv b \pmod{()n}$. Himpunan $\mathbb{Z}_n$ memberikan struktur aljabar berbeda yang sangat kuat dan sering dibahas dalam kajian aljabar.*

(ii) Deskripsi Visual $\mathbb{Z}_{12}$: Kita dapat menggunakan suatu jam untuk mendeskripsikan Z_{12} secara visual. Ambil garis bilangan real $\mathbb{R}$ dan lilitkan di sekeliling lingkaran bertuliskan angka 1 sampai 12 seperti biasa pada jam. Karena R panjangnya tak terhingga, ia akan mengelilingi lingkaran berkali-kali tak terhingga, sehingga setiap "titik jam" pada jam akan bertepatan dengan banyak bilangan bulat tak terhingga. Bilangan bulat yang terletak pada jam r untuk $r = 1, 2, \ldots, 12$ adalah semua bilangan bulat x sehingga $x - r$ habis dibagi 12 yaitu, semua bilangan bulat kongruen dengan r modulo 12.

$\square$

Contoh 1.2.10 *Misalkan ρ adalah suatu relasi biner pada $\mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$ yang didefinisikan oleh $(a, b)\rho(c, d)$ **bhb** $ad = bc$. Maka relasi ρ adalah relasi ekivalen. Kita mengasumsikan hukum komutatif, asosiatif, dan kanselasi untuk perkalian pada $\mathbb{N}^+$. Relasi ρ jelas refleksif dan simetri. Selanjutnya anggaplah $(a, b)\rho(c, d)$ dan $(c, d)\rho(e, f)$. Maka $ad = bc$ dan $cf = de$. Sehingga didapat $(ad)(cf) = (bc)(de)$. Dengan demikian $af = be$. Jadi $(a, b)\rho(e, f)$. Hal ini berarti realsi ρ bersifat transitif. Akibatnya, ρ adalah relasi ekivalen pada $\mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$.*

$\square$

1.2.2 Relasi Terurut Parsial (*Partial Order Relations*)

Sejauh ini kita hanya menggunakan sedikit hukum refleksif, antisimetri, dan transitif. Kita familiar dengan urutan natural $\leq$ antara dua bilangan bulat positif. Contoh ini menyarankan konsep abstrak dari relasi terurut parsial, yang merupakan relasi **refleksif**, **anti simetri**, dan **transitif**. Hubungan urutan parsial dan tipe khususnya memainkan peran penting dalam matematika. Misalnya, hubungan urutan parsial sangat penting dalam **Lemma Zorn**, yang menyediakan alat yang sangat kuat dalam matematika dan **teori lattice** yang aplikasinya sangat besar dalam berbagai ilmu.

Definisi 1.2.6 *Relasi* ***refleksif****,* ***antisimetri****, dan* ***transitif*** ρ *pada himpunan yang tidak kosong* P *disebut* ***relasi terurut parsial****. Maka pasangan* (P, ρ) *disebut* ***himpunan terurut parsial*** *(****himtep****).*

□

Kita mengadopsi simbol "$\leq$" untuk mewakili relasi urutan parsial. Jadi menulis $a \leq b$ di tempat $a\rho b$, dari Definisi 1.2.6 mengikuti itu didapat

(i) $a \leq a$ untuk semua $a \in P$;

(ii) $a \leq b$ dan $b \leq a$ di $P \Rightarrow a = b$ untuk $a, b \in P$ dan

(iii) $a \leq b$ dan $b \leq c$ di $P \Rightarrow a \leq c$ untuk $a, b, c \in P$.

Tiga contoh berikut pada dasarnya sangat berbeda tetapi memiliki sifat penting yang identik.

Contoh 1.2.11

(i) $(\mathbb{R}, \leq)$ *adalah suatu* ***himtep****, di mana "*$\leq$*" menunjukkan urutan natural di* $\mathbb{R}$ *(yaitu,* $a \leq b \Leftrightarrow b - a \geq 0$*). Demikian pula,* $(\mathbb{R}, \geq)$ *adalah* ***himtep*** *dengan urutan natural* $\geq$ *dalam* $\mathbb{R}$*.*

(ii) $(\mathcal{P}(A), \leq)$ *adalah* ***himtep*** *di bawah relasi inklusi* $\subseteq$ *diantara himpunan-himpunan bagian dari* $A \neq \emptyset$*.*

(iii) $(\mathbb{N}^{+}, \leq)$ *adalah* ***himtep*** *di bawah hubungan dapat dibagi (yaitu,* $a \leq b \Leftrightarrow$ *a membagi b dalam* $\mathbb{N}^{+}$*, dilambangkan dengan* $a \mid b$*).*

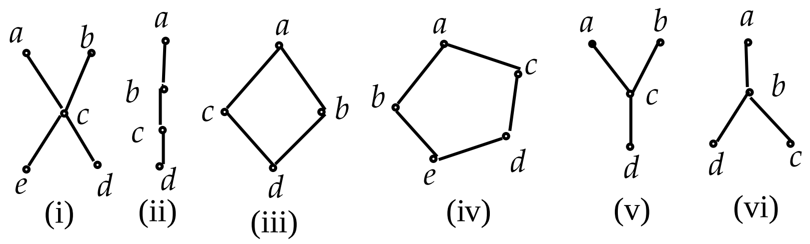
□

Gambar 1.6: Diagram Hasse mewakili $a < b$.

Suatu **himtep** dengan banyaknya elemen yang berhingga dapat dengan mudah diwakili dengan menggunakan diagram, yang disebut **diagram Hasse**, dimana $a < b$ diwakili dengan diagram bentuk seperti yang ditunjukkan pada Gambar 1.6, dimana a, b diwakili oleh lingkaran-lingkaran kecil, a tertulis di bawah b dan kedua lingkaran itu dihubungkan oleh sebuah garis lurus. Jadi kita memiliki contoh **himtep** berikut seperti yang dijelaskan pada Gambar 1.7 dari Contoh 1.2.12.

Contoh 1.2.12 *Pada Gambar 1.7, kita telah menunjukkan enam relasi urutan parsial yang berbeda ((i) - (vi)).*

□



Gambar 1.7: Relasi terurut parsial yang berbeda.

Dalam suatu **himtep** $(P, \leq)$, kita katakan $a < b$ **bhb** $a \leq b$ dan $a \neq b$. Jika $a < b$, kita katakan bahwa a mendahului b (atau a adalah pendahulu dari b).

Definisi 1.2.7 *Bila suatu **himtep** $(P, \leq)$ sedemikian rupa sehingga, untuk setiap pasangan elemen a, b di P, tepat satu dari $a < b, a = b, b < a$ yang dipenuhi (yaitu, jika ada dua elemen P yang bisa dibandingkan), maka $(P, \leq)$ disebut **himpunan terurut total** (**penuh** atau **linier**) atau secara ringkasnya **himpunan terurut** atau **suatu rantai**.* □

Catatan: Relasi urutan parsial dalam suatu rantai memiliki sifat keempat: 'dua elemen apa pun dapat dibandingkan', selain sifat yang diperlukan dalam Definisi 1.2.6.

Contoh 1.2.13

*(i) **Himtep** $(\mathbb{R}, \leq)$ (dalam Contoh 1.2.11 (i)) terurut total.*

*(ii) **Himtep** $(\mathbb{N}^{+}, \leq)$ (dalam Contoh 1.2.11 (iii)) bukan terurut total, sebab bilangan bulat 5 dan 8 tidak dapat dibandingkan, karena tidak ada yang membagi satu dengan lainnya.*

*(iii) **Himtep** $(\mathcal{P}(X), \leq)$ (dalam Contoh 1.2.11 (ii)) **bukan terurut total**, asalkan X memiliki setidaknya dua elemen. Misalnya, jika $X = \{1, 2, 3\}$ dan $A = \{1, 2\}, B = \{2, 3\} \in \mathcal{P}(X)$, maka baik $A \subseteq B$ maupun $B \subset A$ tidak berlaku.* □

Definisi 1.2.8 *Misalkan $(P, \leq)$ adalah suatu **himtep** dan $a, b \in P$. Suatu elemen $x \in P$, dengan $x \leq a$ dan $x \leq b$ disebut sebagai **batas bawah dari** a dan b. Bila x adalah batas bawah a, b di P dan $y \leq x$ berlaku untuk batas bawah y dari a dan b, maka x (ditentukan secara tunggal) disebut **batas bawah terbesar** (**bbb** atau **infimum** atau **meet**) dari a dan b dan dilambangkan oleh $a \wedge b$ (atau ab).*

*Demikian pula elemen $x \in P$, dengan $a \leq x$ dan $b \leq x$ disebut **batas atas** dari a dan b. Bila x adalah batas atas dari a, b di P dan $x \leq y$ berlaku untuk setiap batas atas y dari a dan b, maka x (ditentukan secara tunggal) disebut **batas atas terkecil** (**bak** atau **supremum** atau **join**) dari a dan b dan dilambangkan oleh $a \vee b$ (atau $a + b$).* □

Definisi 1.2.9 *Suatu **himtep** di mana setiap pasangan elemen:*
*(i) memiliki **bak** disebut **semilattice atas**;*
*(ii) memiliki **bbb** disebut **semilattice bawah**;*
*(iii) memiliki **bak** dan **bbb** disebut **lattice**.* □

Contoh 1.2.14

Contoh 1.2.12 (ii) - (iv), seperti yang ditunjukkan pada Gambar 1.7, kesemuanya adalah lattice atas dan bawah dan karenanya disebut lattice. Tetapi (i), (v) dan (vi) tidak demikian. Memang, Contoh 1.2.12 (i) bukanlah semilattice atas atau pun bukan semilattice bawah; Contoh 1.2.12 (vi) adalah semilattice atas tetapi bukan semilattice bawah; dan Contoh 1.2.12 (v) adalah semilattice bawah tetapi bukan semilattice atas.

□

Definisi batas bawah dan batas atas, **bbb** dan **bak**, dapat digeneralisasikan untuk koleksi dua atau lebih elemen **himtep** tertentu.

Definisi 1.2.10 *Lattice $(P, \leq)$ dikatakan **lengkap** jika setiap koleksi elemen P yang tidak kosong memiliki **bbb** dan **bak**.*

□

Contoh 1.2.15

*(i) $(\mathcal{P}(A), \leq)$ adalah suatu **himtep** (lih. Contoh Contoh 1.2.11 (ii)). Misalkan $P, Q \in \mathcal{P}(A)$. Maka $P \cap Q \subseteq P$ dan $P \cap Q \subset Q$, jadi $P \cap Q$ adalah batas bawah dari pasangan P, Q. Juga, bila R adalah batas bawah dari pasangan P, Q, yaitu $R \subseteq P$ dan $R \subseteq Q$, maka $R \subseteq P \cap Q$. Hal ini menunjukkan bahwa $P \cap Q$ adalah **bbb** dari pasangan $P, Q \in \mathcal{P}(A)$ yaitu, $P \wedge Q = P \cap Q$. Demikian pula, $P \vee Q = P \cup Q$. Jadi, setiap pasang elemen $\mathcal{P}(A)$ memiliki **bbb** dan **bak**. Dengan demikian $(\mathcal{P}(A), \leq)$ adalah **lattice**. Sekali lagi untuk setiap koleksi subset A yang tidak kosong, **meet** dan **join**nya masing-masing adalah **bbb** dan **bak** dari koleksi yang diberikan. Oleh karena itu $(\mathcal{P}(A), \leq)$ adalah **lattice lengkap**.*

*(ii) **Himtep** $(\mathbb{N}^+, \leq)$ pada Contoh 1.2.11 (iii) adalah suatu **lattice**, yang disebut **lattice dapat dibagi**, di mana $x \wedge y = \mathrm{fpb}(x, y)$ dan $x \vee y = \mathrm{kpk}(x, y)$, dimana $\mathrm{fpb}(x, y)$ dan $\mathrm{kpk}(x, y)$ masing-masing menunjukkan pembagi persekutuan terbesar dan kelipatan persekutuan terkecil dari $x, y \in \mathbb{N}^+$. Namun lattice ini tidak lengkap. Karena, subset $X = \{1, 2, 2^2, \ldots\}$ tidak memiliki **bak**.*

□

Catatan: Suatu himpunan yang yang terurut total adalah lattice, tetapi kebalikannya tidak benar secara umum. Dari Contoh 1.2.15 (ii) dan 1.2.13 (ii) tampak bahwa $(\mathbb{N}^+, \leq)$ adalah lattice, tetapi ia tidak terurut total.

Definisi 1.2.11 *Suatu lattice $(L, \leq)$ dikatakan **distributif**, **bhb** $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ (atau, ekuivalen, $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$) untuk semua $x, y, z \in L$.*

□

Definisi 1.2.12 *Suatu lattice $(L, \leq)$ dikatakan **modular** (atau **Dedekind**) **bhb** untuk $x, y, z \in L$, $x \vee y = z \vee y$, $x \wedge y = z \wedge y$ dan $x \leq z$ berarti $x = z$ (atau, ekuivalen, untuk $x, y, z \in L$, $x \leq z$, hukum modular $(x \vee y) \wedge z = x \vee (y \wedge z)$ berlaku di L).*

□

Contoh 1.2.16
(i) Lattice yang dapat dibagi $(\mathbb{N}^+, \leq)$ *bersifat* ***modular*** *dan* ***distributif****.*

*(ii) Setiap lattice distributif adalah modular tetapi kebalikannya tidak benar. [**Petunjuk**. (ii) Misalkan* $(L, \leq)$ *adalah lattice distributif dan* $x, y, z \in L$ *sedemikian sehingga* $x \leq z$*. Maka* $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) = (x \vee y) \wedge z$ *(karena L bersifat distributif). Berdasarkan Definisi 1.2.12 hal ini menunjukkan bahwa L adalah modular.]*

□

Sebagai catatan bahwa kebalikannya tidak selalu benar.

Teorema 1.2.3 *Bila dalam suatu* ***himtep*** $(P, \leq)$*, setiap subset (termasuk* $\emptyset$*) memiliki* ***bbb*** *di P, maka P adalah lattice lengkap.*

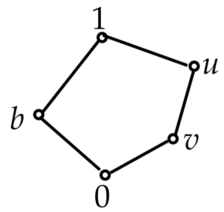
Bukti
Sebagai latihan!

□

Catatan: Setiap lattice lengkap tak-kosong berisi paling sedikit elemen 0 dan suatu elemen terbesar 1.

Kesimpulan 1.2.1 *Bila* ***himtep*** *P memiliki* 1*, dan setiap subset X yang tidak kosong dari P memiliki* ***bbb****, maka P adalah lattice lengkap.*

□



Gambar 1.8: Lattice Segi lima.

Contoh 1.2.17 *Lattice Segi lima* $(L, \leq)$ *tidak bersifat modular, sebab* $v(u+b) = v$ *dan* $u+vb = u$*. Karena* $u < v$ *dan* $u + vb < v(u + b)$*, hukum modular tidak berlaku di L; dan oleh karena itu L non-modular seperti yang ditunjukkan pada Gambar 1.8.*

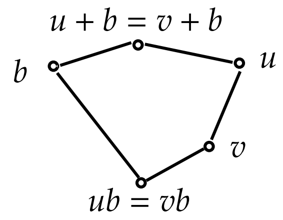
□

Teorema 1.2.4 *Lattice tak-modular* ***bhb*** *lattice berisi lattice pentagonal sebagai sub-lattice.*

Bukti
Misalkan $(L, \leq)$ adalah lattice tak-modular. Maka pada L terdapat lima elemen $u, v, b, u + b = v + b$ dan $ub = vb$, yang membentuk lattice segi lima seperti yang ditunjukkan pada Gambar 1.9.

Untuk validitas kebalikannya, lihat Contoh 1.2.17.

□



Gambar 1.9: Lattice Segi lima dengan u + b = v + b = 1 dan ub = vb = 0.

Definisi 1.2.13 *Misalkan* $(P, \leq)$ *adalah suatu* ***himtep****. Elemen* $x \in P$ *dikatakan sebagai* ***elemen minimal*** *dari P* ***bhb*** *sebarang* $a \in P$ *dengan* $a \leq x$ *berakibat* $a = x$*. Demikian pula, elemen* $y \in P$ *dikatakan sebagai* ***elemen maksimal*** *dari P* ***bhb*** *sebarang* $b \in P$ *dengan* $y \leq b$ *berakibat* $b = y$*.* □

Jadi elemen $x \in P$ minimal (atau maksimal) **bhb** tidak ada elemen lain dari P mendahului (atau melebihi) x.

Contoh 1.2.18

(i) ***Himtep*** $(\mathbb{R}, \leq)$ *(lihat Contoh 1.2.11 (i)) tidak memiliki minimal atau elemen maksimal.*

(ii) Elemen minimal dari ***himtep*** $(\mathcal{P}(X) - \{\emptyset\}, \leq)$ *adalah himpunan bagian dengan satu elemen dari X.*

(iii) Dalam lattice yang dapat dibagi, bilangan prima berfungsi sebagai elemen minimal. □

Catatan: Lattice digunakan di berbagai bidang, seperti ilmu komputer teoretis, mekanika kuantum, ilmu sosial, biosistem, musik, dll.

Tujuan utama kita sekarang adalah menyatakan '***Lemma Zorn***'. Kriteria non-konstruktif untuk keberadaan elemen maksimal diberikan oleh apa yang disebut prinsip maksimalitas, yang disebut ***Lemma Zorn*** (prinsip kembali ke Hausdorff dan Kuratowski, tetapi Zorn memberikan rumusannya yang sangat cocok untuk **aljabar**, **analisis** , dan **topologi**).

Lemma 1.2.1 *(****Lemma Zorn****) Misalkan* $(S, \leq)$ *adalah himpunan terurut parsial yang tidak kosong. Misalkan setiap himpunan bagian* $A \subseteq S$ *yang terurut total oleh* $\leq$ *memiliki batas atas (di S). Maka S memiliki setidaknya satu elemen maksimal.* □

Catatan: **Lemma Zorn** sangat diperlukan untuk membuktikan banyak hasil matematika yang menarik, salah satunya diberikan di bagian ini dan beberapa diberikan di bab berikutnya.

Aljabar Boolean abstrak memiliki hubungan yang erat dengan lattice. Berikut ini diperlukan untuk memahami konsep aljabar Boolean.

Yang kita maksud dengan koleksi dari himpunan berhingga adalah hal yang menyangkut himpunan kosong atau terdiri dari n himpunan untuk beberapa bilangan bulat positif n dan dengan gabungan berhingga dan irisan berhingga. Hal ini adalah gabungan dan irisan dari koleksi himpunan yang berhingga. Bila kita menyatakan bahwa koleksi $\mathcal{B}$ dari himpunan adalah tertutup terhadap pembentukan gabungan berhingga, kita maksudkan bahwa $\mathcal{B}$ berisi gabungan setiap sub-koleksi berhingganya; dan karena sub-koleksi kosong memenuhi syarat sebagai sub-koleksi berhingga dari $\mathcal{B}$, kita melihat bahwa gabungannya dan himpunan kosong, masing-masing harus merupakan elemen $\mathcal{B}$. Dengan cara yang sama, koleksi himpunan, yang tertutup terhadap pembentukan irisan berhingga tentu merupakan elemen $\mathcal{B}$.

Kita berasumsi bahwa himpunan semesta (universal) $U \neq \emptyset$.

Definisi 1.2.14 ***Aljabar Boolean*** *dari suatu himpunan adalah kumpulan $\mathcal{B}$ dari himpunan bagian yang tidak kosong dari himpunan semesta U yang memenuhi kondisi berikut:*
(i) $A \in \mathcal{B}$ dan $B \in \mathcal{B}$ maka $A \cup B \in \mathcal{B}$;
(ii) $A \in \mathcal{B}$ dan $B \in \mathcal{B}$ maka $A \cap B \in \mathcal{B}$;
(iii) $A \in \mathcal{B}$ maka $A^c \in \mathcal{B}$.

Karena $\mathcal{B} \neq \emptyset$, ia memuat setidaknya satu himpunan A. □

Kondisi (iii) menunjukkan bahwa A^c dan juga A ada di $\mathcal{B}$, dan karena $A \cap A^c = \emptyset$ dan $A \cup A^c = U$. Kondisi (i) dan (ii) menunjukkan bahwa $\emptyset \in \mathcal{B}$ dan $U \in matcalB$. Jelas, $\{U, \emptyset\}$ adalah aljabar Boolean dari himpunan dan setiap aljabar Boolean berisi himpunan tersebut. contoh lainnya adalah koleksi semua himpunan bagian $\mathcal{P}(U)$ dari himpunan semesta U, juga merupakan aljabar Boolean dari himpinan.

Misalkan $\mathcal{B}$ adalah aljabar Boolean dari himpunan. Bila $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ adalah sub-kumpulan berhingga yang tidak kosong dari $\mathcal{B}$, maka $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \in \mathcal{B}$ dan $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \in \mathcal{B}$. Selain itu $\emptyset, U \in \mathcal{B}$. Jelas, $\mathcal{B}$ tertutup terhadap pembentukan gabungan berhingga, irisan berhingga dan komplemen. Sebaliknya, misalkan $\mathcal{B}$ adalah koleksi himpunan yang tertutup terhadap pembentukan gabungan berhingga, irisan berhingga dan komplemen. Maka $\emptyset \in \mathcal{B}$ B dan $U \in \mathcal{B}$. Jelaslah, $\mathcal{B}$ adalah aljabar Boolean dari himpunan. Akibatnya, kita dapat mencirikan aljabar Boolean dari himpunan sebagai koleksi himpunan yang **tertutup** terhadap pembentukan **gabungan berhingga**, **irisan berhingga**, dan **komplemen**.

Catatan: Aljabar Boolean abstrak dapat didefinisikan dengan menggunakan lattice.

1.2.3 Operasi pada Operasi Biner

Operasi pada pasangan relasi biner muncul di banyak kesempatan dalam studi aljabar modern. Operasi seperti itu sekarang didefinisikan.

Misal $R : X \to Y$ dan $S : Y \to Z$ adalah dua relasi biner. Maka komposisi $S \circ R$ dari R dan S didefinisikan oleh

$$S \circ R \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, z) \in X \times Z \mid \text{ bila ada } y \in Y \text{ sehingga } (x, y) \in R \text{ dan } (y, z) \in S\} \subseteq X \times Z.$$

Terlihat bahwa, $S \circ R$ adalah relasi biner dari X ke Z. Bila R adalah relasi biner dari X ke Y , maka invers R^{-1} didefinisikan oleh

$$R^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \{(y, x) \mid (x, y) \in R\} \subseteq Y \times X.$$

Jadi R^{-1} adalah suatu relasi biner dari Y ke X.

Proposisi 1.2.1 *Misalkan R adalah suatu relasi pada X, maka* $(R^{-1})^{-1} = R$.

Bukti
Misalkan sebarang $(x, y) \in R$, maka $(y, x) \in R^{-1}$. Hal ini berakibat $(x, y) \in (R^{-1})^{-1}$. Jadi $R \subseteq (R^{-1})^{-1}$. Sebaliknya, misalkan sebarang $(x, y) \in (R^{-1})^{-1}$, maka $(y, x) \in R^{-1}$. Hal ini berakibat $(x, y) \in R$. Jadi, $(R^{-1})^{-1} \subseteq R$. Dengan demikian $R = (R^{-1})^{-1}$. □

Proposisi 1.2.2 *Misal $R : X \to Y$ dan $S : Y \to Z$ dan $T : Z \to W$ adalah relasi biner. Maka*
(i) $(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R)$ *(sifat asosiatif);*
(ii) $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$.

Bukti
(i) Jelas bahwa $(T \circ S) \circ R$ dan $T \circ (S \circ R)$ adalah relasi biner dari X ke W. Sekarang, untuk sebarang $(x, w) \in (T \circ S) \circ R \Leftrightarrow$ ada $y \in Y$ sehingga $(x, y) \in R$ dan $(y, w) \in T \circ S$, dimana $x \in X, w \in W \Leftrightarrow$ ada $y \in Y$ sedemikian sehingga $(x, y) \in R$ dan ada $z \in Z$ sedemikian rupa sehingga $(y, z) \in S$ dan $(z, w) \in T \Leftrightarrow$ ada $y \in Y$ dan $z \in Z$ sedemikian rupa sehingga $(x, y) \in R, (y, z) \in S$ dan $(z, w) \in T$. Jadi $(x, w) \in (T \circ S) \circ R \Leftrightarrow$ ada $z \in Z$ sehingga $(x, z) \in S \circ R$ dan $(z, w) \in T \Leftrightarrow (x, w) \in T \circ (S \circ R)$. Akibatnya, $(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R)$.
(ii) Lagi $S \circ R : X \to Z \Leftrightarrow (S \circ R)^{-1} : Z \to X$. Jelaslah bahwa, $(S \circ R)^{-1}$ dan $R^{-1} \circ S^{-1}$ adalah relasi dari Z ke X. Maka untuk $z \in Z, x \in X, (z, x) \in (S \circ R)^{-1} \Leftrightarrow (x, z) \in S \circ R \Leftrightarrow$ ada $y \in Y$ sedemikian rupa sehingga $(x, y) \in R$ dan $(y, z) \in S \Leftrightarrow$ ada $y \in Y$ sedemikian sehingga $(y, x) \in R^{-1}$ dan $(z, y) \in S^{-1} \Leftrightarrow$ ada $y \in Y$ sedemikian sehingga $(z, y) \in S^{-1}$ dan $(y, x) \in R^{-1} \Leftrightarrow (z, x) \in R^{-1} \circ S^{-1}$. Akibatnya, $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$. □

Proposisi 1.2.3 *Misalkan R, S dan T relasi pada X. Maka*
(i) $R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T)$,
(ii) $R \circ (S \cap T) \subseteq (R \circ S) \cap (R \circ T)$,
(iii) $(R \cup S) \circ T = (R \circ T)?(S \circ T)$,
(iv) $(R \cap S) \circ T \subseteq (R \circ T) \cap (S \circ T)$.

Bukti

(i) Misalkan $(x, y) \in R \circ (S \cup T)$. Hal ini berarti bahwa ada $z \in X$ sedimikian hingga $(x, z) \in S$ dan $(z, y) \in R$ atau $(x, z) \in T$ dan $(z, y) \in R$. Dengan demikian didapat $(x, y) \in (R \circ S)$ atau $(x, y) \in (R \circ T)$. Oleh karena itu, $(x, y) \in (R \circ S) \cup (R \circ T)$. Hal ini menunjukkan bahwa $R \circ (S \cup T) \subseteq (R \circ S) \cup (R \circ T)$. Demikian pula, kita bisa dapatkan bahwa $(R \circ S) \cup (R \circ T) \subseteq R \circ (S \cup T)$. Dengan demikian $R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T)$.
Untuk (ii)-(iv), kita bisa membuktikan dengan argumentasi yang serupa. □

Contoh 1.2.19 *Misalkan R adalah suatu relasi pada himpunan S. Maka R adalah relasi ekivalen pada S **bhb***
(i) $\Delta \subseteq R$, di mana $\Delta = \{(x,x) \mid x \in S\}$;
(ii) $R = R^{-1}$ dan
(iii) $R \circ R \subseteq R$
dipenuhi.

□

Contoh 1.2.20 *Diberikan $R = \{(a,b),(a,c)\}$ adalah suatu relasi pada himpunan $X = \{a,b,c\}$. Maka, $R^{-1} = \{(b,a),(c,a)\}$. Sekarang, $R \circ R^{-1} = \{(b,b),(c,c)\}$, dan $R^{-1} \circ R = \{(a,a)\}$. Jadi, di sini terlihat bahwa, $R \circ R^{-1} \neq R^{-1} \circ R$.*

□

1.2.4 Fungsi atau pemetaan

Konsep fungsi (pemetaan) mungkin merupakan gagasan paling penting dan universal yang digunakan di semua cabang matematika. Himpunan dan fungsi terkait erat. Mereka memiliki kapasitas untuk pembangunan yang luas dan rumit. Kita sekarang berada dalam posisi untuk mendefinisikan fungsi dalam istilah relasi biner.

Definisi 1.2.15 *Misalkan X dan Y himpunan tak-kosong. Himpunan bagian f dari $X \times Y$ disebut **fungsi** atau **pemetaan** dari X ke Y jika dua kondisi berikut berlaku.*
(i) Untuk semua $x \in X$ ada $y \in Y$sedemikian hingga $(x,y) \in f$.
(ii) Bila $(x,y_1) \in f$ dan $(x,y_2) \in f$, maka $y_1 = y_2$.

*Dalam hal ini X disebut **domain**, dan Y disebut **kodomain** dari f. Bila $(x,y) \in f$, kita tulis $y = f(x)$ dan disebut **image dari elemen** $x \in X$ oleh pemetaaan f. Jadi, di bawah notasi ini, $f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$.*

□

Secara intuitif, fungsi f dari X ke Y adalah korespondensi yang terkait dengan **setiap** $x \in X$ yang mengaitkan **dengan tunggal** $y \in Y$ yang kita nyatakan dengan $f(x)$. Jadi, untuk mendefinisikan pemetaan f dari X ke Y, cukup memberikan $f(x)$ tunggal di Y untuk semua $x \in X$. Dua fungsi f dan g dari X ke Y adalah sama **bhb** $f(x) = g(x)$ untuk semua $x \in X$.

Bab 2

Strukur Aljabar

Pada bab ini dibahas beberapa struktur aljabar yang mempunyai peranan penting untuk pengkajian aljabar linier. Kajian yang dibahas adalah Grup, Ring, Ideal, Ring Kuasi, Ideal Maksimal, Daerah Integral, Lapangan Pecahan.

2.1 Grup dan Subgrup

Grup adalah suatu himpunan $G \neq \emptyset$ bersama-sama dengan suatu operasi biner $* : G \times G \to G$ yang mana untuk setiap (a, b) di $G \times G$, $*(a, b)$ biasanya dinotasikan oleh $a * b$ sedemikian hingga sifat-sifat berikut dipenuhi:

1. $(a * b) * c = a * (b * c)$ untuk semua $a, b, c \in G$.

2. Ada $e \in G$ sedemikian hingga $e * a = a = a * e$ untuk semua $a \in G$.

3. Untuk setiap $a \in G$ ada $a^{-1} \in G$ yang memenuhi $a * a^{-1} = e = a^{-1} * a$.

Tambahan pula, bila masih memenuhi $a * b = b * a$ untuk semua $a, b \in G$, maka grup G dinamakan grup **komutatif/Abelian** . Bila operasi biner $*$ adalah $+$, maka penulisan $a * b$ ditulis sebagai $a + b$ dan dan invers dari a yaitu a^{-1} ditulis sebagai $-a$. Dalam hal ini elemen nol adalah elemen identitas. Juga untuk lebih ringkasnya penulisan $a * b$ ditulis ab.

Contoh 2.1.1 Himpunan

$$\mathcal{F} = \{f : S \to S \,|\, f \text{ adalah fungsi bijektif}\}$$

adalah suatu grup dengan operasi biner komposisi fungsi. Grup ini dinamakan **grup permutasi** dan tidak komutatif.

□

Contoh 2.1.2 Himpunan

$$\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) = \{M \,|\, M \text{ adalah matriks ukuran } m \times n \text{ dengan elemen} - \text{elemen di } \mathbb{R}\}$$

adalah suatu grup dengan operasi biner penjumlahan matriks. Tetapi terhadap perkalian matriks bukan grup, sebab tidak semua matriks mempunyai invers terhadap perkalian matriks.

□

Contoh 2.1.3 Himpunan

$$\mathbb{Z}^n \stackrel{\text{def}}{=} \{(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) \,|\, a_i \in \mathbb{Z}\}$$

dengan operasi biner tambah didefinisikan oleh

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) \stackrel{\text{def}}{=} (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$$

adalah suatu grup.

□

Suatu grup G adalah berhingga bila banyaknya elemen dari G adalah berhingga . Banyaknya elemen dari G dinamakan **order** dari G dan dinotasikan oleh $o(G)$ atau $|G|$. Contoh, himpunan bilangan bulat modulo n, $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ dengan operasi biner + adalah grup berhingga yang komutatif, tetapi $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ dan $\mathbb{Z}^n$ bukan grup berhingga.

Himpunan $S \subseteq G$ dengan $S \neq \emptyset$ adalah **subgrup** dari grup G bila S sendiri adalah grup terhadap operasi biner di G.

Grup G dinamakan **grup siklik** bila untuk beberapa $a \in G$,

$$G \stackrel{\text{def}}{=} \{a^i \,|\, i \in \mathbb{Z}\},$$

dengan $a^i a^j \stackrel{\text{def}}{=} a^{i+j}$, $\forall a^i, a^j \in G$. Dalam hal ini, grup G **dibangun** oleh elemen a dinotasikan sebagai $\langle a \rangle$ dan elemen a dinamakan **pembangun**. Jadi

$$\langle a \rangle = \{a^i \,|\, i \in \mathbb{Z}\}.$$

Grup siklik berhingga dengan order n yang dibagun oleh a dengan $a^n = 1$ dapat didefinisikan sebagai

$$C_n(a) = \{1 = a^0, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\},$$

elemen 1 adalah elemen netral dan

$$a^i a^j = a^{(i+j) \mod n}.$$

Elemen invers dari a^k adalah $a^{-k \mod n}$.

Contoh 2.1.4 Himpunan bilangan bulat modulo 8

$$\mathbb{Z}_8 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

dengan operasi biner tambah, jadi $4+7 = 11 \mod 8 = 3$ dan invers dari 6 adalah $-6 = 2$, elemen netral dari $\mathbb{Z}_8$ adalah 0. Elemen-elemen pembangun dari $\mathbb{Z}_8$ adalah $1, 3, 5$ dan 7. Sedangkan himpunan

$$\mathbb{U}_8 \stackrel{\text{def}}{=} \{1, 3, 5, 7\}$$

adalah grup komutatif terhadap operasi biner perkalian, jadi $5 \times 7 = 35 \mod 8 = 3$ dan invers dari 3 adalah $3^{-1} = 3$, elemen netral dari $\mathbb{U}_8$ adalah 1. Grup U_8 bukan grup siklik.

□

Contoh 2.1.5 Himpunan bilangan bulat modulo 7

$$\mathbb{Z}_7 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

dengan operasi biner tambah, jadi $5+6 = 11 \mod 7 = 4$ dan invers dari 6 adalah $-6 = 1$, elemen netral dari Z_7 adalah 0. Elemen-elemen pembangun dari $\mathbb{Z}_7$ adalah $1, 2, 3, 4, 5$ dan 6. Sedangkan himpunan

$$\mathbb{U}_7 \stackrel{\text{def}}{=} \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

adalah grup komutatif terhadap operasi biner perkalian, jadi $5 \times 6 = 30 \mod 7 = 2$ dan invers dari 3 adalah $3^{-1} = 5$, elemen netral dari $\mathbb{U}_7$ adalah 1. Grup U_7 adalah grup siklik dengan pembangun 3 dan 5.

□

Diskusikan lebih lanjut dan beri kesimpulan dari pembahasan Contoh 2.1.4 dan 2.1.5.

2.2 Ring, Subring, Ideal dan Lapangan

Suatu himpunan $R \neq \emptyset$ bersama dengan dua operasi biner **tambah** dan **perkalian** dinamakan ring bila memenuhi

1. R bersama dengan operasi tambah adalah grup komutatif
2. Untuk semua $a, b, c \in R$,
$$(ab)c = a(bc) \text{ assosiatif}$$
3. Untuk semua $a, b, c \in R$,
$$(a + b)c = ac + bc \text{ dan } c(a + b) = ca + cb \quad \text{distributif.}$$

Suatu ring R adalah komutatif bila $ab = ba$ untuk semua $a, b \in R$. Bila ring R memuat elemen e yang memenuhi

$$ea = a = ae,$$

untuk semua $a \in R$, maka R dinamakan **ring satuan**. Biasanya elemen e dinotasikan oleh 1.

Suatu ring komutatif F dengan elemen satuan dinamakan **lapangan** bila setiap elemen taknol mempunyai invers terhadap perkalian, yaitu bila $0 \neq a \in F$, maka ada $b \in F$ yang memenuhi $ab = 1$.

Contoh 2.2.1 Himpunan bilangan bulat modulo n

$$\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$$

dengan operasi biner tambah $\oplus$ dan perkalian $\odot$, yang didefinisikan sebagai berikut

$$a \oplus b \stackrel{\text{def}}{=} (a+b) \mod n \quad \text{dan} \quad a \odot b \stackrel{\text{def}}{=} ab \mod n, \quad a, b \in F.$$

elemen $1 \in \mathbb{Z}_n$ adalah elemen satuan. □

Contoh 2.2.2 Himpunan bilangan bulat genap E dengan operasi biner tambah dan perkalian sebagaimana di $\mathbb{Z}$ adalah ring komutatif tetapi tampa elemen satuan. □

Contoh 2.2.3 Himpunan

$$\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) = \{M \,|\, M \text{ adalah matriks ukuran } n \times n \text{ dengan elemen} - \text{elemen di } \mathbb{R}\}$$

dengan operasi biner penjumlahan dan perkalian matriks adalah ring tidak komutatif . Elemen satuan adalah $I_n \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. □

Contoh 2.2.4 Diberikan lapangan $\mathbb{R}$. Himpunan

$$\mathbb{R}[x] \stackrel{\text{def}}{=} \{p(x) \,|\, p(x) \text{ adalah polinomial dengan satu peubah } x \text{ dan koefisien di } \mathbb{R}\}$$

operasi biner penjumlahan dan perkalian polinomial sebagaimana biasanya adalah ring komutatif . Elemen satuan adalah 1. Serupa dengan $\mathbb{R}[x]$, himpunan polinomial dengan n peubah yaitu $\mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ juga ring komutatif terhadap operasi biner perkalian polinomial sebagaimana biasanya . □

Bila R dan S adalah ring, maka fungsi $f : R \to S$ adalah suatu **homomorpisma ring** bila memenuhi

$$\begin{aligned} f(a+b) &= f(a) \oplus f(b) \\ f(ab) &= f(a) \odot f(b) \\ f(1_R) &= 1_S, \end{aligned}$$

untuk semua $a, b \in R$.

Diberikan ring R dan $S \subseteq R$, maka S dinamakan **subring** dari R bila S sendiri adalah ring terhadap operasi-operasi biner yang sama di R dan juga mempunyai elemen satuan yang sama seperti di R.

Kondisi bahwa S mempunyai elemen satuan yang sama seperti di ring R dibutuhkan. Sebab bila diberikan ring $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, ring ini mempunyai elemen satuan terhadap perkalian matriks yaitu matriks identitas I_2. Tetapi himpunan bagian dari $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, yaitu

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \,\middle|\, a \in \mathbb{R} \right\}$$

terhadap operasi tambah dan perkalian matriks yang sama di $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, maka S adalah ring dengan elemen satuan

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tetapi S bukan subring dari $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, sebab elemen satuan di $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ adalah

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dari hasil pembahasan definisi subring, berikut ini diberikan teorema syarat perluh dan cukup yang berkaitan dengan pengertian subring.

Teorema 2.2.1 Diberikan ring R dan $S \subseteq R$ dengan $S \neq \emptyset$. Maka S adalah subring dari R bila dan hanya bila

1. Elemen satuan $1_R \in R$ juga merupakan elemen satuan di S.
2. Himpunan S tertutup terhadap operasi $-$, yaitu
$$a, b \in S \;\Rightarrow\; a - b \in S.$$
3. Himpunan S tertutup terhadap operasi perkalian, yaitu
$$a, b \in S \;\Rightarrow\; ab \in S.$$

Bukti
Syarat 1 jelas dibutuhkan telah dipenuhi. Syarat 2, berakibat bahwa S adalah grup terhadap operasi + dan syarat 3 menunjukkan bahwa S tertutup terhadap operasi perkalian yang sama berlaku di R. Sedangkan syarat assosiatif dan distributif otomatis diwarisi dari R sebab $S \subseteq R$.
□

Selain subring, ring mempunyai struktur yang penting lainnya sebagaimana diberikan pada difinisi berikut.

Diberikan ring R. Himpunan bagian $\mathcal{I} \subseteq R$ dengan $\mathcal{I} \neq \emptyset$ dinamakan **ideal** bila memenuhi

1. Himpunan $\mathcal{I}$ adalah subgrup dari R, yaitu
$$a, b \in \mathcal{I} \;\Rightarrow\; a - b \in \mathcal{I}.$$
2. Himpunan $\mathcal{I}$ tertutup terhadap operasi perkalian dengan semua elemen dari ring R, yaitu
$$a \in \mathcal{I}, r \in R \;\Rightarrow\; ar \in \mathcal{I} \text{ dan } ra \in \mathcal{I}.$$

Perluh diperhatikan bahwa bila $\mathcal{I}$ memuat elemen satuan, maka $\mathcal{I} = R$.

Contoh 2.2.5 Diberikan lapangan F dan $p(x)$ adalah suatu polinomial di $F[x]$. Himpunan dari semua kelipatan dari $p(x)$, yaitu
$$\langle p(x) \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \{q(x)p(x) \,|\, q(x) \in F[x]\}$$
adalah ideal di $F[x]$, dinamakan **Ideal yang dibangun** oleh $p(x)$.
□

Diberikan ring R dengan elemen satuan dan $S \subseteq R$. Himpunan dari semua kombinasi linier berhingga dari elemen-elemen S dengan koefisien di R
$$\langle S \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \{r_1 s_1 + r_2 s_2 + \ldots + r_n s_n \,|\, r_i \in R, s_i \in S, n \geq 1\}$$
adalah ideal di R, ideal ini dinamakan **Ideal yang dibangun** oleh S. Ideal $\langle S \rangle$ adalah ideal terkecil dalam makna himpunan inklusi, yaitu $\langle S \rangle$ adalah irisan dari semua ideal di R yang memuat S. Bila $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ adalah himpunan berhingga, maka
$$\langle s_1, s_2, \ldots, s_n \rangle = \{r_1 s_1 + r_2 s_2 + \ldots + r_n s_n \,|\, r_i \in R, s_i \in S\}\ .$$

Catatan bahwa difinisi yang baru saja dibahas, dibutuhkan bahwa R harus memuat elemen satuan. Hal ini untuk menjamin bahwa $S \subseteq \langle S \rangle$.

Teorema 2.2.2 Diberikan ring R.

1. Irisan dari sebarang koleksi
$$\bigcap_{k\in K}\{\mathcal{I}_k \,|\; \mathcal{I}_k \text{ adalah ideal di } R\}$$
adalah ideal di R.

2. Bila $\mathcal{I}_1 \subseteq \mathcal{I}_2 \subseteq \ldots$ adalah barisan menaik dari dari ideal, maka $\bigcup\limits_{k\in K} \mathcal{I}_k$ adalah ideal di R.

3. Secara lebih umum, bila
$$C = \{\mathcal{I}_i \,|\, i \in I\}$$
adalah **rantai** ideal di R, maka
$$\mathfrak{I} = \bigcup_{i\in I} \mathcal{I}_i$$
adalah ideal di R.

Bukti

1. Misalkan $\mathfrak{K} = \bigcap\limits_{k\in K} \mathcal{I}_k$. Maka bila $a, b \in \mathfrak{I}$, didapat $a, b \in \mathcal{I}_k$ untuk semua $k \in K$. Jadi, $a - b \in \mathcal{I}_k$ untuk semua $k \in K$. Dengan demikian juga $a - b \in \mathfrak{K}$. Juga, bila $r \in R$, maka $ra \in \mathcal{I}_k$ untuk semua $k \in K$, akibatnya $ra \in \mathfrak{K}$.

2. Adalah kasus khusus dari 3.

3. Bila $a, b \in \mathfrak{I}$, maka $a \in \mathcal{I}_i$ dan $b \in \mathcal{I}_j$ untuk beberapa $i, j \in I$. Karena satu dari $\mathcal{I}_i$ dan $\mathcal{I}_j$ termuat di yang lainnya, maka dapat diasumsikan bahwa $\mathcal{I}_i \subseteq \mathcal{I}_j$. Didapat $a, b \in \mathcal{I}_j$, dengan demikian $a - b \in \mathcal{I}_j \subseteq \mathfrak{I}$. Selanjutnya bila $r \in R$, maka $ra \in \mathcal{I}_j \subseteq \mathfrak{I}$. Jadi $\mathfrak{I}$ adalah ideal di R .

$\square$

Perluh diperhatikan bahwa, secara umum gabungan dari sebarang ideal belum tentu menghasilkan ideal. Tetapai apa yang baru dibuktikan pada Teorema 2.2.2, menunjukkan bahwa gabungan dari sebarang rantai dari ideal adalah ideal.

2.3 Ring kuasi dan Ideal Maksimal

Diberikan ring komutatif R dengan elemen satuan dan $S \subseteq R$. Misalkan $\equiv$ adalah relasi biner pada R yang didefinisikan oleh
$$a \equiv b \iff a - b \in S.$$

Dapat ditunjukkan bahwa $\equiv$ adalah relasi ekivalen. Bila $a \equiv b$, maka dikatakan bahwa a dan b **kongruen modulo** S. Istilah " mod " digunakan sebagai ungkapan yang baku untuk menyatakan modulo dan $a \equiv b$ sering ditulis sebagai

$$a \equiv b \mod S,$$

dan secara ringkas ditulis sebagai $a \equiv b$.

Untuk melihat seperti apa klas ekivalen yang baru saja dibahas, diberikan himpunan

$$\begin{aligned} [a] &= \{r \in R \,|\, r \equiv a\} \\ &= \{r \in R \,|\, r - a \in S\} \\ &= \{r \in R \,|\, r = a + s, \text{ untuk beberapa } s \in S\} \\ &= \{a + s \,|\, s \in S\} \\ &= a + S. \end{aligned}$$

Himpunan

$$a + S = \{a + s \,|\, s \in S\}$$

dinamakan **koset** dari S di R. Elemen a dinamakan dinamakan **suatu representasi koset** dari $a + S$.

Jadi, klas ekivalen dari kongruen mod S adalah koset $a + S$ dari S di R. Himpunan dari semua koset dinotasikan oleh

$$R/S = \{a + S \,|\, a \in R\}.$$

Himpunan R/S dibaca "$R \mod S$". Selanjutnya dibahas struktur R/S. Bila S adalah subgrup dari grup komutatif R, maka mudah ditunjukkan bahwa R/S adalah suatu grup komutatif dengan operasi + yang didefinisikan oleh

$$(a + S) + (b + S) \stackrel{\text{def}}{=} (a + b) + S.$$

Selanjutnya, agar supaya perkalian koset

$$(a + S)(b + S) \stackrel{\text{def}}{=} ab + S$$

terdifinisi dengan baik (well-defined), haruslah

$$b + S = b' + S \;\Rightarrow\; ab + S = ab' + S,$$

atau ekivalen dengan

$$b - b' \in S \;\Rightarrow\; a(b - b') \in S.$$

Tetapi, $b - b'$ mungkin sembarang elemen di S dan a mungkin sebarang elemen di R. Hal ini berakibat bahwa S haruslah suatu ideal. Sebaliknya, bila S suatu ideal, maka perkalian koset terdifinisi dengan baik. Suatu akibat dari apa yang baru dibahas didapat bahwa bila R adalah suatu ring komutatif dan mempunyai elemen satuan, $\mathcal{I}$ adalah suatu ideal dari R, maka $R/\mathcal{I}$ adalah suatu ring dengan operasi penjumlahan dan perkalian koset didefinisikan oleh

$$\begin{aligned}(a+\mathcal{I})+(b+\mathcal{I}) &\stackrel{\text{def}}{=} (a+b)+\mathcal{I}\\ (a+\mathcal{I})(b+\mathcal{I}) &\stackrel{\text{def}}{=} ab+\mathcal{I}\ .\end{aligned}$$

Dalam hal ini $R/\mathcal{I}$ dinamakan **Ring Kuasi** dari R modulo $\mathcal{I}$.

Suatu ideal $\mathcal{I}$ di suatu ring R adalah **Ideal Maksimal** bila $\mathcal{I} \neq R$ dan $\mathfrak{I}$ adalah suatu ideal yang memenuhi $\mathcal{I} \subseteq \mathfrak{I} \subseteq R$, maka $\mathfrak{I} = \mathcal{I}$ atau $\mathfrak{I} = R$.

Berikut ini satu alasan penting mengapa ideal maksimal adalah penting.

Teorema 2.3.1 Diberikan ring komutatif R yang mempunyai elemen satuan. Maka ring kuasi $R/\mathcal{I}$ adalah lapangan bila dan hanya bila $\mathcal{I}$ adalah ideal maksimal.

Bukti
Ideal $\mathcal{I}$ maksimal di R, maka $R/\mathcal{I}$ adalah komutatif (sebab R komutatif). Jelas bahwa $1+\mathcal{I}$ adalah elemen satuan di $R/\mathcal{I}$. Misalkan $a+\mathcal{I} \in R/\mathcal{I}$ dengan $a+\mathcal{I}$ bukan elemen nol di $R/\mathcal{I}$, maka $a \notin \mathcal{I}$. Selanjutnya didefinisikan himpunan

$$\mathfrak{I} = \{ra+b \mid r \in R, b \in \mathcal{I}\} \neq \emptyset,$$

sebab $0\,a+0 = 0 \in \mathfrak{I}$. Dapat ditunjukkan bahwa $\mathfrak{I}$ adalah ideal di R sebagai berikut : Diberikan $x, y \in \mathfrak{I}$, pilih $r_1, r_2 \in R$ dan $b_1, b_2 \in \mathcal{I}$ yang memenuhi

$$x = r_1a + b_1 \text{ dan } y = r_2a + b_2.$$

Didapat

$$x - y = (r_1a + b_1) - (r_2a + b_2) = \underbrace{(r_1 - r_2)}_{\in R}\, a + \underbrace{(b_1 - b_2)}_{\in \mathcal{I}} \in \mathfrak{I}.$$

Terlihat bahwa $(\mathfrak{I}, +)$ subgrup dari R. Juga $r\mathfrak{I} = \{rb \mid r \in R, b \in \mathfrak{I}\} \subset \mathfrak{I}$, jadi $\mathfrak{I}$ adalah ideal dari R. Karena ideal $\mathcal{I}$ maksimal dan $\mathcal{I} \subset \mathfrak{I}$, maka $\mathfrak{I} = R$. Akibatnya dapat dipilih $b \in R, m \in \mathcal{I}$ yang memenuhi $1 = ba + m$. Didapat

$$1 + \mathcal{I} = ba + \mathcal{I} = (b + \mathcal{I})(a + \mathcal{I}).$$

Juga karena R ring komutatif, didapat

$$1 + \mathcal{I} = ab + \mathcal{I} = (a + \mathcal{I})(b + \mathcal{I}).$$

Terlihat bahwa setiap elemen taknol $a + \mathcal{I}$ di $R/\mathcal{I}$ mempunyai invers $b + \mathcal{I}$. Jadi $R/\mathcal{I}$ adalah lapangan. Sebaliknya misalkan $\mathcal{I}$ ideal di R dan $R/\mathcal{I}$ adalah lapangan, maka

$0+\mathcal{I}=\mathcal{I}\in R/\mathcal{I}$ dan $1+\mathcal{I}\in R/\mathcal{I}$. Jadi $\mathcal{I}\neq\{0\}=\langle 0\rangle$. Selanjutnya misalkan $\Im$ suatu ideal di R dengan $\mathcal{I}\subset\Im$. Pilih $a\in\Im$ dan $a\neq\mathcal{I}$. Didapat $a+\mathcal{I}\in R/\mathcal{I}$ dan $a+\mathcal{I}$ taknol di $R/\mathcal{I}$. Karena $R/\mathcal{I}$ lapangan, maka pilih $b+\mathcal{I}\in R/\mathcal{I}$ yang memenuhi

$$(a+\mathcal{I})(b+\mathcal{I})=ab+\mathcal{I}=1+\mathcal{I}.$$

Akibatnya $ab+m=1$ untuk suatu $m\in\mathcal{I}$ dan $1\in\Im$. Jadi $r\,1=r\in\Im$ untuk semua $r\in R$. Dengan emikian $R\subset\Im$, tetapi $\Im\subset R$. Jadi $\Im=R$, maka dari itu $\mathcal{I}$ adalah ideal maksimal di R .

□

Hasil berikut memberikan bahwa ideal maksimal selalu ada.

Teorema 2.3.2 Sebarang ring komutatif taknol R dengan elemen satuan memuat ideal maksimal.

Bukti
Karena R bukan ring nol, maka $\{0\}$ adalah ideal sejati dari R. Jadi bila S adalah himpunan semua ideal sejati dari R, maka $S\neq\emptyset$. Selanjutnya bila

$$C=\{\mathcal{I}_i\,|\,i\in I\}$$

adalah suatu rantai dari ideal-sejati di R, maka $\Im=\bigcup_{i\in I}\mathcal{I}_i$ adalah ideal di R. Lagi pula bila $\Im=R$ adalah ideal taksejati, maka $1\in\Im$ dan juga $1\in\mathcal{I}_i$ untuk beberapa $i\in I$. Hal ini berakibat $\mathcal{I}_i=R$ adalah ideal taksejati. Dengan demikian $\Im$ adalah ideal sejati dan $\Im\in S$. Jadi sebarang rantai di S mempunyai suatu batas atas terbatas di S dan dengan menggunakan lemma Zorn didapat bahwa S mempunyai suatu elemen maksimal. Hal ini menunjukkan bahwa R mempunyai suatu ideal maksimal.

□

Berikut ini diberikan pengertian dari Daerah Integral. Misalkan R adalah suatu ring. Suatu elemen taknol $r\in R$ dinamakan suatu **pembagi nol** bila ada suatu elemen taknol $s\in R$ yang memenuhi $rs=0$. Suatu ring komutatif R yang memuat elemen satuan dinamakan **Daerah Integral** bila R tidak memuat pembagi nol.

Contoh 2.3.1 Bila n bukan bilangan bulat prima, maka ring $\mathbb{Z}_n$ memuat pembagi nol. Jadi $\mathbb{Z}_n$ bukan daerah integral. Hal ini bisa dilihat sebagai berikut. Karena n bukan prima, maka $n=ab$ di $\mathbb{Z}$ dengan $a,b\geq 2$. Tetapi di $\mathbb{Z}_n$, didapat

$$a\odot b=ab \mod n=0.$$

Jadi a dan b keduanya adalah pembagi nol.

□

Contoh 2.3.2 Ring polinomial $F[x]$ adalah daerah integral, sebab bila $p(x),q(x)\in F[x]$ dan $p(x)q(x)=0$, maka $p(x)=0$ atau $q(x)=0$.

□

Bila R adalah suatu ring dan $rx = ry$ dengan $r, x, y \in R$, maka secara umum tidak bisa dilakukan hukum kanselasi untuk r. Hal ini bila dilakukan didapat $x = y$. Contoh, di ring $\mathbb{Z}_4$, didapat $2 \,.\, 3 = 2 \,.1$. Bila dilakukan kanselasi terhadap 2, didapat $3 = 1$. Hal ini tentunya tidak benar. Bagaimanapun bila ring R mempunyai struktur daerah integral, maka dapat dilakukan hukum kanselasi. Pernyataan ini diberikan dalam teorema berikut dan buktinya sederhan kita tinggalkan.

Teorema 2.3.3 Diberikan ring komutatif R dengan elemen satuan. Maka R adalah Daerah Integral bila dan hanya bila berlaku hukum kanselasi

$$rx = ry, r \neq 0 \implies x = y.$$

□

2.4 Lapangan Pecahan dari suatu Daerah Integral

Sebarang daerah integral R bisa dilekatkan dalam suatu lapangan. **Lapangan Pecahan** dari R adalah lapangan yang dikonstruksi dari R seperti halnya mengkontruksi bilangan rasional dari bilangan bulat. Secara khusus, himpunan

$$R^+ \stackrel{\text{def}}{=} \{(p, q) \,|\, p, q \in R, q \neq 0\},$$

yang mana $(p, q) = (p', q')$ bila dan hanya bila $pq' = p'q$. Penjumlahan dan perkalian didefinisikan oleh

$$(p, q) + (r, s) \stackrel{\text{def}}{=} (ps + qr, qs)$$

dan

$$(p, q).(r, s) \stackrel{\text{def}}{=} (pr, qs).$$

Didalam kebiasaannya (p, q) ditulis dalam bentuk p/q. Catatan bahwa, bila R mempunyai pembagi nol, maka definisi tidak mempunyai arti. Sebab qs bisa sama dengan 0 walaupun q dan s keduanya tidak sama dengan 0. Hal ini mengisyaratkan bahwa dibutuhkan R adalah daerah integral.

Misalkan bahwa R adalah ring dengan elemen satuan dan $a \in R$. **Ideal Utama** yang dibangun oleh a adalah ideal

$$\langle a \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \{ra \,|\, r \in R\}.$$

Suatu daerah integral R yang mana setiap ideal adalah ideal utama dinamakan **Daerah Ideal Utama**.

Teorema 2.4.1 Himpunan bilangan bulat membentuk suatu Daerah Ideal Utama. Faktanya, sebarang ideal $\mathcal{I}$ di $\mathbb{Z}$ dibangun oleh oleh bilangan bulat positip terkecil yang termuat di $\mathcal{I}$.

□

Contoh, $\mathcal{I} = 2\mathbb{Z} \stackrel{\text{def}}{=} \{2n \,|\, n \in \mathbb{Z}\} = \langle 2 \rangle$ adalah ideal di $\mathbb{Z}$.

Teorema 2.4.2 Ring $F[x]$ adalah derah ideal utama. Faktanya sebarang ideal $\mathcal{I}$ di $F[x]$ dibangun oleh polinomial monik tunggal berderajad terkecil yang termuat di $\mathcal{I}$. Lagi pula, untuk polinomial $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x)$,

$$\langle p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x) \rangle = \langle \gcd\{p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x)\} \rangle .$$

Bukti
Misalkan $\mathcal{I}$ adalah ideal di $F[x]$ dan $m(x)$ adalah suatu polinomial monik dengan derajad terkecil di $\mathcal{I}$. Polinomial $m(x)$ tunggal di $\mathcal{I}$. Sebab bila $n(x) \in \mathcal{I}$ adalah monik dan $\deg(n(x)) = \deg(m(x))$, maka

$$b(x) = m(x) - n(x) \in \mathcal{I},$$

karena $\deg(b(x)) < \deg(m(x))$, maka haruslah $b(x) = 0$. Jadi $n(x) = m(x)$. Selanjutnya ditunjukkan bahwa $\mathcal{I} = \langle m(x) \rangle$. Karena $m(x) \in \mathcal{I}$, maka $\langle m(x) \rangle \subseteq \mathcal{I}$. Selanjutnya bila $p(x) \in \mathcal{I}$, maka lakukan pembagian $p(x)$ oleh $m(x)$, didapat

$$p(x) = q(x)m(x) + r(x),$$

dengan $r(x) = 0$ atau $0 \leq \deg(r(x)) < \deg(m(x))$. Tetapi $\mathcal{I}$ adalah ideal, didapat

$$r(x) = p(x) - q(x)m(x) \in \mathcal{I}$$

jadi $0 \leq \deg(r(x)) < \deg(m(x))$, hal ini adalah tidak mungkin. Dengan demikian haruslah $r(x) = 0$ dan

$$p(x) = q(x)m(x) \in \langle m(x) \rangle .$$

Hal ini menunjukkan bahwa $\mathcal{I} \subseteq \langle m(x) \rangle$. Jadi $\mathcal{I} = \langle m(x) \rangle$. Untuk membuktikan pernyataan kedua, misalkan

$$\mathcal{I} = \langle p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x) \rangle .$$

Dari pembahasan yang telah dibuktikan didapat

$$\mathcal{I} = \langle p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x) \rangle = \langle m(x) \rangle ,$$

dengan $m(x)$ adalah polinomial monik tunggal yang mempunyai derajad terkecil di $\mathcal{I}$. Khususnya, karena $p_i(x) \in \langle m(x) \rangle$, didapat $m(x)|p_i(x)$ untuk $i = 1, 2, \ldots, n$. Dengan kata lain, $m(x)$ adalah pembagi persekutuan dari $p_i(x)$. Lebih lanjut, bila $q(x)|p_i(x)$ untuk semua i, maka $p_i(x) \in \langle q(x) \rangle$ untuk semua i, hal ini berakibat bahwa

$$m(x) \in \langle m(x) \rangle = \langle p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x) \rangle \subseteq \langle q(x) \rangle ,$$

jadi $q(x)|m(x)$. Hal ini menunjukkan bahwa $m(x)$ adalah pembagi persekutuan terbesar dari $p_i(x)$.

$\square$

Contoh 2.4.1 Ring himpunanan polinomial dengan dua peubah x dan y, yaitu $F[x, y]$ bukan suatu daerah ideal utama. Untuk melihat hal ini, perhatikan bahwa $\mathcal{I}$ adalah himpunan dari semua polinomial dengan suku konstan nol adalah suatu ideal di R. Andaikan bahwa $\mathcal{I}$ adalah utama yaitu $\mathcal{I} = \langle p(x) \rangle$. Karena $x, y \in \mathcal{I}$, maka ada polinomial $a(x, y)$ dan $b(x, y)$ yang memenuhi

$$x = a(x, y)p(x, y) \ \text{ dan } \ y = b(x, y)p(x, y). \tag{2.1}$$

Tetapi $p(x, y)$ tidak bisa suatu konstan, maka didapat $\mathcal{I} = R$. Jadi $\deg(p(x, y)) > 1$ dan $a(x, y), b(x, y)$ keduanya harus konstan. Hal ini bertentangan kenyataan 2.1. Jadi $\mathcal{I}$ bukan ideal utama.

□

Teorema 2.4.3 Setiap Daerah Ideal Utama R memenuhi **kondisi rantai dengan urutan menaik**, yaitu R tidak bisa mempunyai barisan ideal yang naik

$$\mathcal{I}_1 \subset \mathcal{I}_2 \subset \cdots \tag{2.2}$$

dengan $\mathcal{I}_i \neq \mathcal{I}_{i+1}$.

Bukti
Andaikan ada barisan sebagaimana diberikan oleh 2.2 dan misalkan ideal

$$U = \bigcup \mathcal{I}_i,$$

maka haruslah $U = \langle a \rangle$ untuk beberapa $a \in U$. Jadi $a \in \mathcal{I}_k$ untuk beberapa k, akibatnya $\mathcal{I}_k = \mathcal{I}_j$ untuk semua $j \geq k$. Hal bertentangan dengan kenyataan $\mathcal{I}_i \neq \mathcal{I}_{i+1}$.

□

Berikut ini diberikan pengertian elemen prima pada sebarang daerah integral. Untuk $r, s \in R$, dikatakan bahwa r **membagi** s ditulis sebagai $r|s$ bila ada suatu $x \in R$ yang memenuhi $s = xr$.

Misalkan R adalah suatu daerah integral

1. Suatu elemen yang mempunyai invers terhadap perkalian dinamakan **unit**. Jadi, $u \in R$ adalah unit bila $uv = 1$ untuk beberapa $v \in R$.

2. Dua elemen $a, b \in R$ dikatakan **berasosiasi** bila ada unit u yang memenuhi $a = ub$, hal ini ditulis sebagai $a \sim b$.

3. Suatu elemen bukan-unit taknol $p \in R$ adalah **prima** bila

$$p|ab \ \Rightarrow \ p|a \text{ atau } p|b.$$

4. Suatu elemen bukan-unit taknol $r \in R$ adalah **tereduksi** bila

$$r = ab \;\Rightarrow\; a \text{ atau } b \text{ adalah unit.}$$

Catatan bahwa, pengertian unit $u \in R$ bila $uv = 1$ untuk beberapa $v \in R$, berakibat bahwa v juga unit dan perkalian dari dua unit u_1u_2 juga unit. Dari pengertian dua elemen yang berasosiasi, hal ini berakibat bahwa dua elemen tsb. ekivalen. Jadi pengertian berasosiasi adalah relasi ekivalen.

Teorema 2.4.4 Diberikan ring R.

1. Suatu elemen $u \in R$ adalah unit bila dan hanya bila $\langle u \rangle = R$.
2. Dua elemen $r, s \in$ berasosiasi yaitu $r \sim s$ bila dan hanya bila $\langle r \rangle = \langle s \rangle$.
3. Elemen r membagi s bila dan hanya bila $\langle s \rangle \subseteq \langle r \rangle$.
4. Elemen r **pembagi sejati** dari s, yaitu $s = xr$, yang mana x bukan suatu unit bila dan hanya bila $\langle s \rangle \subset \langle r \rangle$.

Bukti
Dibuktikan hanya pernyataan 2, sisanya bisa dibuktikan sendiri. Misalkan sebarang $x \in \langle r \rangle$ dan bila $r \sim s$ didapat,

$$x = ar \text{ untuk suatu } a \in R \text{ dan } r = us \text{ untuk suatu unit } u \in R.$$

Jadi $x = ar = a(us) = \overbrace{(au)}^{\in R} s$, terlihat bahwa $x \in \langle s \rangle$. Jadi $\langle r \rangle \subseteq \langle s \rangle$. Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan bahwa $\langle s \rangle \subseteq \langle r \rangle$. Sebaliknya bila $\langle r \rangle = \langle s \rangle$, maka $r \in \langle s \rangle$ dan $s \in \langle r \rangle$ atau

$$r = as, \text{ untuk suatu } a \in R \text{ dan } s = br, \text{ untuk suatu } b \in R.$$

Didapat $r = as = a(br) = (ab)r$. Jadi, $ab = 1$. Hal ini berakibat a dan b adalah unit di R. Dengan demikian $r \sim s$ atau r berasosiasi dengan s.

□

Pada himpunan bilangan bulat, suatu bilangan bulat adalah prima bila dan hanya bila bilangan tsb. adalah tattereduksi. Pada sebarang Daerah Integral elemen-elemen prima adalah taktereduksi. Tetapi sebaliknya belum tenetu benar. Cotoh, pada ring

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-5} = \{a + b\sqrt{-5} \,|\, a, b \in \mathbb{Z}\},$$

elemen 2 membagi hasil perkalian

$$\left(1 + \sqrt{-5}\right)\left(1 - \sqrt{-5}\right) = 6,$$

tetapi tidak membagi $\left(1 + \sqrt{-5}\right)$ dan juga tidak membagi $\left(1 - \sqrt{-5}\right)$. Apapun itu, pada daerah ideal utama, dua konsep keprimaan dan ketaktereduksian adalah ekivalen.

Teorema 2.4.5 Misalkan R adalah Daerah Ideal Utama.

1. Suatu elemen $r \in R$ taktereduksi bila dan hanya bila $\langle r \rangle$ adalah maksimal.
2. Suatu elemen $p \in R$ adalah prima bila dan hanya bila p adalah taktereduksi.
3. Elemen $a, b \in R$ adalah **prima relatif**, yaitu tidak mempunyai faktor persekutuan bukan unit, bila dan hanya bila ada $r, s \in R$ yang memenuhi

$$ra + sb = 1.$$

Hal ini ditulis sebagai $(a, b) = 1$.

Bukti

1. Misalkan bahwa r taktereduksi dan $\langle r \rangle \subseteq \langle a \rangle \subseteq R$. Maka

$$r \in \langle a \rangle \text{ dan juga } r = xa, \text{ untuk beberapa } x \in R.$$

Ketaktereduksian dari r berakibat bahwa a atau x adalah suatu unit. Bila a adalah unit, maka $\langle a \rangle = R$ dan bila x unit, maka $\langle a \rangle = \langle xa \rangle = \langle r \rangle$. Didapat $\langle r \rangle \neq R$ sebab r bukan unit. Hal ini menunjukkan bahwa $\langle r \rangle$ maksimal. Sebaliknya, andaikan bahwa r tereduksi, yaitu $r = ab$ yang mana a atau b bukan unit. Maka $\langle r \rangle \subseteq \langle a \rangle \subseteq R$. Tetapi, bila $\langle a \rangle = \langle r \rangle$, maka $r \sim a$, hal ini berakibat bahwa b adalah unit. Jadi $\langle r \rangle \neq \langle a \rangle$. Juga, bila $\langle a \rangle = R$, maka a harus suatu unit. Dengan demikian $\langle r \rangle$ bukan ideal maksimal sebagaimana yang diharapkan.

2. Misalkan bahwa p dan $p = ab$. Maka $p|a$ atau $p|b$. Dari sini didapat $p|a$, jadi $a = px = (ab)x = a(bx)$. Gunakan hukum kanselasi, didapat $1 = bx$. Terlihat bahwa b adalah unit. Jadi p adalah taktereduksi. Sebaliknya, misalkan bahwa r taktereduksi dan $r|ab$. Akan ditunjukkan bahwa $r|a$ atau $r|b$. Ideal $\langle r \rangle$ adalah maksimal, maka $\langle r, a \rangle = \langle r \rangle$ atau $\langle r, a \rangle = R$. Dari $\langle r, a \rangle = \langle r \rangle$, didapat $a \in \langle r \rangle$. Jadi $a = xr$ untuk beberapa $x \in R$, dengan demikian $r|a$. Sedangkan dari $\langle r, a \rangle = R$, didapat

$$1 = xa + yr, \text{ untuk beberapa } x, y \in R.$$

Didapat

$$b = xab + yrb.$$

Karena r membagi $xab + yrb$, maka $r|b$.

3. Misalkan a dan b prima relatif maka ideal $\langle a, b \rangle$ adalah ideal utama, yaitu $\langle a, b \rangle = \langle x \rangle$ untuk suatu $x \in R$. Maka $x|a$ dan $x|b$ dan haruslah x suatu unit. Hal ini berakibat bahwa $\langle a, b \rangle = R$. Jadi, ada $r, s \in R$ yang memenuhi $ra + sb = 1$. Sebaliknya bila $ra + sb = 1$ untuk beberapa $r, s \in R$, maka jelas bahwa 1 pembagi persekutuan dari a dan b.

$\square$

2.5 Daerah Faktorisasi Tunggal

Suatu Daerah Integral R dinamakan suatu **Daerah Faktorisasi Tunggal** bila mempunyai sifat-sifat faktorisasi berikut:

1. Setiap elemen bukan-unit taknol $r \in R$ bisa ditulis sebagai produk dari sebanyak berhingga elemen taktereduksi $r = p_1 \dots p_n$.
2. Faktorisasi menjadi elemen-elemen taktereduksi adalah tunggal dengan makna bila $r = p_1 \dots p_n$ dan $r = q_1 \dots q_m$ dua faktorisasi dari r, maka $m = n$ dan setelah diatur pengindeksan ulang, maka $p_i \sim q_i$.

Faktorisasi tunggal secara jelas adalah suatu sifat yang diperlukan. Daerah Ideal Utama adalah daerah faktorisasi tunggal sebagaimana diberikan pada pernyataan berikut.

Teorema 2.5.1 Setiap Daerah Ideal Utama R adalah suatu Daerah faktorisasi Tunggal.

Bukti
Misalkan $r \in R$ adalah bukan-unit taknol. Bila r taktereduksi sesuatu yang jelas sebagaimana diinginkan. Bila tidak, maka $r = r_1 r_2$ dengan r_1 dan r_2 bukan-unit. Bila r_1 dan r_2 adalah taktereduksi, maka didapat sesuai dengan yang diinginkan. Bila tidak, misalkan r_2 tereduksi. Maka $r_2 = r_3 r_4$ dengan r_3 bukan-unit atau r_4 bukan-unit. Lakukan cara faktorisasi ini bila perluh menyusun ulang indeksnya sehingga didapat bentuk

$$r = r_1 r_2 = r_1(r_3 r_4) = (r_1 r_3)(r_5 r_6) = (r_1 r_3 r_5)(r_7 r_8) = \dots$$

Masing-masing langkah adalah suatu faktorisasi r menjadi suatu perkalian dari bukan-unit. Bagaimanapun proses yang telah dilakukan berhenti sampai berhingga langkah. Bila tidak hal ini akan menghasilkan suatu barisan bukan-unit di R, yaitu $s_1, s_2, \dots$ yang mana s_{i+1} pembagi sejati dari s_i. Tetapi ini memberikan rantai urutan menaik dari ideal

$$\langle s_1 \rangle \subset \langle s_2 \rangle \subset \langle s_2 \rangle \subset \langle s_4 \rangle \subset \dots$$

Hal ini bertentangan dengan fakta bahwa suatu daerah ideal utama memenuhi kondisi rantai yang menaik. Jadi, disimpulkan bahwa setiap bukan-unit taknol mempunyai suatu faktorisasi elemen-elemen taktereduksi. Untuk ketunggalan, bila

$$r = p_1 \dots p_n \text{ dan } r = q_1 \dots q_m$$

adalah dua faktorisasi dari r, maka karena R adalah daerah integral, dapat dilakukan kanselasi faktor yang sama melalui kedua persamaan. Sehingga didapat $p_i \neq q_j$ untuk semua i, j. Bila tidak ada faktor dikedua sisi persamaan, didapat hal yang diinginkan. Bila satu sisi tidak mempunyai faktor kiri, maka 1 adalah suatu pengali dari elemen-elemen taktereduksi. Hal ini tidak mungkin, sebab elemen-elemenn taktereduksi adalah bukan-unit. Misalkan kedua sisi mempunyai faktor kiri, maka

$$p_1 \dots p_n = q_1 \dots q_m, \text{ dengan } p_i \neq q_j,$$

dan andaikan $n \neq m$. Didapat $q_m | p_1 \ldots p_n$, hal ini berakibat $q_m | p_i$ untuk beberapa i. Dengan melakukan pengindeksan ulang didapat $p_n = a_n q_m$. Karena p_n takterreduksi, a_n harus suatu unit. Ganti p_n dengan $a_n q_m$ dan lakukan kanselasi q_m. Didapat

$$a_n p_1 \ldots p_{n-1} = q_1 \ldots q_{m-1}.$$

Ulangi proses sampai habis q atau p nya. Bila q nya habis lebih dulu, didapat bentuk

$$up_1 \ldots p_k = 1, \text{ dengan } u \text{ adalah unit.}$$

Hal ini tidak mungkin sebab p_i bukan-unit. Dengan alasan yang sama bila q nya habis lebih dulu didapat

$$1 = vq_1 \ldots q_r, \text{ dengan } v \text{ adalah unit.}$$

Hal ini tidak mungkin sebab q_j bukan-unit. Dari kedua proses q nya habis lebih dulu atau p nya habis lebih dulu didapat hal yang kontradiksi. Jadi haruslah $n = m$ dan $p_i \sim q_i$.

□

Diberikan lagi suatu konsep yang telah dibahas yaitu pengertian dari **lapangan** atau **field**.

Suatu himpunan F dengan dua operasi biner **tambah** dan **perkalian** adalah suatu **lapangan** bila setidaknya memuat dua elemen yang memenuhi

1. Himpunan F terhadap operasi tambah adalah grup komutatif.
2. Himpunan semua elemen taknol di F, yaitu F^* adalah grup komutatif terhadap operasi perkalin.
3. Untuk semua $a, b, c \in F$, berlaku

$$(a + b)c = ac + bc \text{ dan } c(a + b) = ca + cb.$$

Contoh 2.5.1 Himpunan $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ dan $\mathbb{C}$ adalah lapangan terhadap operasi tambah dan perkalian sebagaimana biasa dilakukan pada bilangan rasional, riil dan kompleks. □

Contoh 2.5.2 Ring $\mathbb{Z}_n$ adalah lapangan bila dan hanya bila n adalah bilangan prima. Sebelumnya sudah diberikan contoh bahwa $\mathbb{Z}_n$ bukan lapangan bila n bukan prima. Karena lapangan adalah daerah integral dan misalkan $n = p$ adalah prima. Didapat Z_p adalah daerah integral. Tinggal menunjukkan bahwa setiap elemen taknol mempunyai invers terhadap operasi perkalian. Misalkan $0 \neq a \in \mathbb{Z}_p$. Karena $a < p$, a dan p prima relatif, maka dapat dipilih bilangan bulat u dan v yang memenuhi

$$ua + vp = 1.$$

Jadi

$$ua \equiv (-vp + 1) \equiv 1 \mod p,$$

dengan demikian $u \odot a = 1$ di $\mathbb{Z}_p$. Terlihat bahwa u adalah invers dari a terhadap operasi perkalian.

□

Contoh 2.5.2 menunjukkan bahwa lapangan yang dibahas adalah lapangan berhingga. Faktanya lapangan berhingga memainkan peranan yang sungguh penting dalam berbagai area abstrak dan terapan matematika.

Suatu lapangan F dinamakan **tertutup secara aljabar** bila setiap polinomial takkonstan atas F mempunyai suatu akar di F atau ekivalen setiap polinomial takkonstan dapat dibagi atas F. Contoh, lapangan kompleks $\mathbb{C}$ adalah **tertutup secara aljabar** sedangkan lapangan riil $\mathbb{R}$ tidak **tertutup secara aljabar**. Tanpa dibuktikan, dapat dikatakan bahwa setiap lapangan F termuat di suatu himpunan **tertutup secara aljabar** $\overline{F}$ yang dinamakan **penutup aljabar** dari F. Contoh, lapangan kompleks adalah **penutup aljabar** dari lapangan riil, yaitu $\mathbb{C} = \overline{\mathbb{R}}$.

2.6 Karakteristik dari suatu Ring

Diberikan ring R dengan elemen satuan. Bila n adalah suatu bilangan bulat positip, maka $n.r$ adalah

$$n.r \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{r + r + \cdots + r}_{n}.$$

Selanjutnya, apa akibatnya bila ada bilangan bulat positip n sehingga

$$n.1 = 0.$$

Contoh, dalam $\mathbb{Z}_n$, didapat $n.1 = n = 0$. Dilain pihak, dalam $\mathbb{Z}$, persamaan $n.1 = 0$ berakibat $n = 0$. Jadi bilangan bulat positip n tidak mungkin ada.

Catatan bahwa, dalam sebarang ring berhingga, ada bilangan bulat n yang memenuhi sebagaimana dibahas, sebab barisan takberhingga bilangan

$$1.1, 2.1, 3.1, \ldots$$

adalah tidak semuanya berbeda, jadi $i.1 = j.1$ untuk beberapa $i < j$, bilamana $(j - i).1 = 0$.

Diberikan ring R dengan elemen satuan. Bilangan bulat positip terkecil k yang memenuhi $k.1 = 0$ dinamakan **karakteristik** dari R. Bila k tidak ada, maka R mempunyai karakteristik 0. Karakteristik dari R dinotasikan oleh $\mathrm{char}(R)$.

Bila $\mathrm{char}(R) = k$, maka untuk setiap $r \in R$, didapat

$$k.r = \underbrace{r + r + \cdots + r}_{k} = \underbrace{(1 + 1 + \cdots + 1)}_{k}\, r = 0.r = 0.$$

Teorema 2.6.1 Sebarang ring berhingga mempunyai karakteristik taknol. Sebarang daerah integral berhingga mempunyai karakteristik prima.

Bukti
Telah dibahas sebelumnya bahwa suatu ring berhingga mempunyai karakteristik taknol. Misalkan bahwa F adalah daerah integral berhingga dan char$(F) = k > 0$. Andaikan k tidak prima, maka $k = pq$, dengan $p, q < k$. Jadi $pq.1 = 0$, dengan demikian $(p.1)(q.1) =$. Hal ini berakibat $p.1 = 0$ atau $q.1 = 0$. Terlihat bertentangan dengan kenyataan bahwa k adalah bilangan positip terkecil yang memenuhi $k.1 = 0$. Jadi haruslah k adalah prima.

□

Catatan bahwa, dalam sebarang lapangan F yang mempunyai karakteristi sama dengan 2, didapat $2a = 0$ untuk semua $a \in F$. Jadi di F,

$$a = -a, \text{ untuk semua } a \in F.$$

Sifat lapangan berkarakter 2 cukup luar biasa. Sebagaimana terjadi, terdapat banyak kegunaan dari lapangan yang mempunyai karakteristik 2. Hal ini dapat ditunjukkan bahwa semua lapangan berhingga yang banyaknnya elemen adalah p^n dengan p adalah prima dan untuk setiap pangkat prima p^n ada suatu lapangan yang banyaknya elemen adalah p^n. Faktanya, sesuai dengan makna isomorpisma ada tepat one lapangan berhingga yang banyaknya elemen sama dengan p^n.

Pembahasan yang terakhir pada bagian ini berkaitan struktur aljabar yang akan mempunyai kegunaan adalah suatu kombinasi dari suatu ruang vektor dan suatu ring. (Ruang vektor belum didefinisikan secara formal, tatapi diberikan lebih dulu sebelum definisi berikut yang dibutuhkan untuk suatu kemudahan).

Suatu **aljabar** $\mathcal{A}$ atas suatu lapangan F adalah suatu himpunan takkosong $\mathcal{A}$, bersama-sama dengan tiga operasi **tambah** (+), **perkalian** dan **perkalian skalar** yang memenuhi

1. Himpunan $\mathcal{A}$ adalah ruang vektor atas F terhadap **tambah** dan **perkalian skalar**.
2. Himpunan $\mathcal{A}$ adalah ring terhadap **tambah** dan **perkalian**.
3. bila $r \in F$ dan $a, b \in \mathcal{A}$, maka

$$r(ab) = (ra)b = a(rb).$$

Jadi, suatu aljabar adalah suatu ruang vektor yang mana dapat dilakukan perkalian vektor dengan skalar di ring melalui perkalian setiap komponen vektornya.

Bab 3

Ruang Vektor

Pada bab ini dibahas pengertian dari ruang vektor serta beberapa hal yang terkait.

Suatu himpunan V (elemen-elemennya dinamakan vektor) dengan dua operasi **tambah** dan **perkalian** dinamakan suatu. **Ruang vektor** atas lapangan F (elemen-elemennya dinamakan skalar) bila memenuhi:

1. Bila $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, maka $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$ dan
   - ⋄ $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
   - ⋄ $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
   - ⋄ Ada $\mathbf{0} \in V$ sehingga $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v} = \mathbf{0} + \mathbf{v},\ \forall \mathbf{v} \in V$
   - ⋄ Untuk setiap $\mathbf{v} \in V$ ada $-\mathbf{v} \in V$ sehingga
   $$\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = -\mathbf{v} + \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$
2. Bila $a, b \in F$ dan $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, maka $a\mathbf{v} \in V$ dan
   - ⋄ $(a + b)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v}$
   - ⋄ $a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$
   - ⋄ $(ab)\mathbf{v} = a(b\mathbf{v})$ dan $1.\mathbf{v} = \mathbf{v}$
   - ⋄ $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$.

Catatan bahwa, sifat yang pertama menyatakan bahwa V adalah grup komutatif terhadap operasi tambah.

Suatu ruang vektor atas lapangan F adakalanya dinamakan suatu **ruang-**F. Ruang vektor atas lapangan ril $\mathbb{R}$ dinamakan **Ruang Vektor Riil**, sedangkan ruang vektor atas lapangan kompleks $\mathbb{C}$ dinamakan **Ruang Vektor Kompleks**.

Misalkan $S \subseteq V$ dengan $S \neq \emptyset$ dan V adalah suatu ruang vektor. Suatu **kombinasi linier** dari vektor-vektor di S adalah suatu ungkapan berbentuk

$$a_1\mathbf{v_1} + a_2\mathbf{v_2} + \cdots + a_n\mathbf{v_n},$$

dengan $a_1, a_2, \ldots, a_n \in F$ dan $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n} \in S$. Skalar a_i dinamakan **koefisien** dari kombinasi linier. Suatu kombinasi linier adalah **trivial** bila setiap koefisien a_i adalah nol. Bila tidak demikian adalah **non-trivial**.

Contoh 3.0.1

1. Misalkan F adalah lapangan, himpunan semua fungsi

   $$F^F \stackrel{\text{def}}{=} \{f : F \to F\}$$

   adalah ruang vektor atas F dengan operasi tambah dan perkalian didefinisikan oleh
   $$(f+g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) + g(x)$$
   dan
   $$(af)(x) \stackrel{\text{def}}{=} a(f(x)).$$

2. Himpunan semua matriks berukuran $m \times n$ dengan elemen-elemen di suatu lapangan F, yaitu $M_{m\times n}(F)$ adalah suatu ruang vektor atas F terhadap operasi tambah dan perkalian matriks sebagaimana biasanya.

3. Diberikan suatu lapangan F, himpunan n-pasangan terurut F^n adalah suatu ruang vektor atas F. Operasi tambah dan perkalian dengan skalar didefinisikan sebagai berikut:

   $$(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) \stackrel{\text{def}}{=} (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$$

   dan
   $$c(a_1, a_2, \ldots, a_n) \stackrel{\text{def}}{=} (ca_1, ca_2, \ldots, ca_n).$$
   Ketika sesuai, elemen-elemen dari F^n juga dituliskan dalam bentuk kolom. Bila F adalah berhingga, lapangan F_q adalah lapangan dengan elemen-elemen q, maka ruang vektor F_q^m ditulis sebagai $V(m, q)$.

4. Berbagai ruang barisan adalah ruang vektor. Himpuan dari semua barisan berhingga dengan elemen-elemen di lapangan F, yaitu $\mathrm{Bar}(F)$ adalah suatu ruang vektor atas F dengan operasi tambah dan perkalian skalar diberikan oleh:

   $$(s_n) + (t_n) \stackrel{\text{def}}{=} (s_n + t_n)$$

   dan
   $$a(s_n) \stackrel{\text{def}}{=} (as_n).$$

Dengan cara yang sama, himpunan dari semua barisan bilangan kompleks yang konvergen ke 0, yaitu c_0 adalah ruang vektor atas $\mathbb{C}$ seperti halnya himpunan dari semua barisan kompleks terbatas, yaitu l^∞. Juga bila p adalah bilangan bulat positip, maka himpunan semua barisan bilangan bilangan kompleks (s_n), yaitu l^p yang memenuhi

$$\sum_{n=1}^{\infty} |s_n|^p < \infty$$

adalah ruang vektor atas $\mathbb{C}$. Untuk menunjukkan operasi tambah adalah operasi biner pada l^p digunakan **pertaksamaan Minkowski**

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |s_n + t_n|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |s_n|^p\right)^{1/p} + \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |t_n|^p\right)^{1/p}.$$

□

3.1 Ruang bagian

Kebanyakan struktur aljabar memuat sub-struktur, begitu halnya dengan reuang vektor.

Misalkan V adalah ruang vektor atas F dan suatu himpunan bagian takkosong $S \subset V$ dinamakan **ruang bagian** bila terhadap operasi yang sama di V, himpunan S memenuhi kondisi ruang vektor. Digunakan notasi $S \leq V$ untuk menyatakan S adalah ruang bagian dari V dan $S < V$ untuk menyatakan bahwa S adalah **ruang bagian sejati** dari V. **Ruang nol** dari V adalah $\{0\}$.

Berikut ini diberikan kondisi bahwa suatu himpunan bagian dari suatu ruang vektor adalah ruang bagian.

Teorema 3.1.1 Himpunan bagian takkosong S dari suatu ruang vektor V atas F adalah ruang bagian dari V bila dan hanya bila

$$a, b \in F, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in S \Rightarrow a\mathbf{u} + b\mathbf{v} \in S.$$

□

Contoh 3.1.1 Diberikan ruang vektor $V(n,2)$ adalah himpunan dari n-pasangan terurut dari elemen-elemen 0 dan 1. **Bobot** $W(\mathbf{v})$ dari suatu vektor $\mathbf{v} \in V(n,s)$ adalah banyaknya koordinat taknol di $\mathbf{v}$. Contoh, $W(101010) = 3$. Misalkan E_n adalah himpunan dari vektor-vektor di V dengan bobot genap. Maka E_n adalah ruang bagian dari $V(n,2)$. Sebab hal ini bisa diselidiki sebagai berikut

$$W(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = W(\mathbf{u}) + W(\mathbf{v}) - 2W(\mathbf{u}\cap\mathbf{v}),$$

dengan $\mathbf{u}\cap\mathbf{v}$ adalah vektor-vektor di $V(n,2)$ yang mempunyai komponen ke-i adalah hasil perkalian dari komponen ke-i dari vektor $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$, yaitu

$$(\mathbf{u}\cap\mathbf{v})_i = u_i.v_i\ .$$

Dengan demikian terlihat bahwa bila $W(\mathbf{u})$ dan $W(\mathbf{v})$ genap, maka $W(\mathbf{u}+\mathbf{v})$ juga genap. Selanjutnya, jelas bahwa perkalian atas skalar F_2 dengan vektor di $V(n,2)$ juga menghasilkan vektor di $V(n,2)$. Jadi E_n adalah ruang bagian dari $V(n,2)$. Ruang vektor E_n dinamakan **ruang-bagian berbobot genap** dari ruang $V(n,2)$. □

Contoh 3.1.2 Sebarang ruang-bagian dari ruang vektor $V(n,q)$ dinamakan ***linear code***. Dari berbagai *code*, *linear code* adalah yang paling penting. Sebab strukturnya memberikan effisiensi untuk *encoding* dan *decoding* suatu informasi.

Pembahasan berikut berkenaan dengan apa yang dinamakan **ruang-bagian *Lattice***. Diberikan ruang vektor V atas F dan himpunan dari semua ruang-bagian dari V yang dinotasikan oleh $S(V)$. Himpunan $S(V)$ adalah himpunan terurut secara parsial oleh inklusi himpunan. Ruang nol $\{0\}$ adalah elemen terkecil di $S(V)$ dan ruang V adalah elemen terbesar.

Bila $S,T\in S(V)$, maka $S\cap T$ adalah ruang-bagian terbesar termuat di S dan di T. Dalam istilah inklusi himpunan, $S\cap T$ adalah batas bawah terbesar dari S dan T:

$$S\cap T = \mathrm{glb}\{S,T\}.$$

Hal yang serupa, bila $\{S_i\,|\,i\in K\}$ sebarang koleksi dari ruang-bagian dari V, semua irisannya adalah batas bawah terbesar dari ruang-bagiannya:

$$\bigcap_{i\in K} S_i = \mathrm{glb}\{S_i\,|\,i\in K\}.$$

Dilain pihak, bila $S,T\in S(V)$ (dan F berhingga), maka $S\cup T\in S(V)$ bila dan hanya bila $S\subseteq T$ atau $T\subseteq S$.

Teorema 3.1.2 Suatu ruang vektor taktrivial V atas lapangan takberhingga F bukan gabungan dari sebanyak berhingga dari himpunan-himpunan ruan-bagian sejatinya.

Bukti
Andaikan bahwa V adalah gabungan dari sebanyak berhingga dari himpunan-himpunan

ruan-bagian sejatinya, yaitu $V = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n$, yang mana dalam hal ini dapat diasumsikan bahwa

$$S_1 \not\subseteq S_2 \cup \cdots \cup S_n,$$

dengan S_i adalah ruang-bagian dari V. Misalkan $\mathbf{w} \in S_1 \backslash (S_2 \cup \cdots \cup S_n)$ dan $\mathbf{v} \notin S_1$. Perhatikan himpunan tak berhingga berikut

$$A = \{r\mathbf{w} + \mathbf{v} \,|\, r \in F\}$$

adalah himpunan "garis" melalui $\mathbf{v}$, sejajar dengan $\mathbf{w}$. Jelas bahwa masing-masing S_i memuat setidaknya satu vektor dari himpunan A, sebab $A \subseteq V$. Selanjutnya dibahas dua keadaan elemen-elemen di A. Bila $r\mathbf{w} + \mathbf{v} \in S$, dengan $r \neq 0$, maka $\mathbf{w} \in S_1$. Hal ini berakibat $\mathbf{v} \in S_1$; dan bertetangan dengan syarat himpunan A. Selanjutnya bila $r_1\mathbf{w} + \mathbf{v} \in S_i$ dan $r_2\mathbf{w} + \mathbf{v} \in S_i$ untuk $i \geq 2$ dengan $r_1 \neq r_2$, didapat

$$(r_1\mathbf{w} + \mathbf{v}) - (r_2\mathbf{w} + \mathbf{v}) = (r_1 - r_2)\mathbf{w} \in S_i.$$

Karena S_i adalah ruang-bagian dari V, maka $\mathbf{w} \in S_i$, untuk $i \geq 2$. Hal ini bertentangan dengan syarat himpunan A. Jadi pengandaian $V = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n$ tidak benar. □

Untuk menentukan ruang-bagian terkecil dari V yang memuat ruang-bagian S dan T, diperluhkan pengertian berikut. Misalkan S dan T adalah ruang-bagian dari V. **Jumlah** $S + T$ didefinisikan oleh

$$S + T \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{u} + \mathbf{v} \,|\, \mathbf{u} \in S, \mathbf{v} \in T\}.$$

Secara lebih umum, **jumlah** sebarang koleksi dari ruang-bagian, yaitu $\{S_i \,|\, i \in K\}$ adalah himpunan dari semua jumlahan berhingga vektor-vektor di himpunan gabungan $\cup S_i$:

$$\sum_{i \in K} S_i \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \mathbf{s_1} + \mathbf{s_2} + \cdots + \mathbf{s_n} \,\middle|\, s_j \in \bigcup_{i \in K} S_i \right\}$$

Tampa kesulitan yang berarti, dapat dibuktikan bahwa jumlah dari sebarang koleksi ruang-bagian dari V adalah ruang bagian dari V dan jumlahan tersebut adalah batas atas terkecil dengan makna inklusi himpunan:

$$S + T = \text{lub}\{S, T\}.$$

Secara lebih umum,

$$\sum_{i \in K} S_i = \text{lub}\{S_i \,|\, i \in K\}.$$

Bila suatu himpunan terurut secara parsial P mempunyai sifat setiap pasangan elemen mempunyai suatu batas atas terkecil dan suatu elemen terbesar mempunyai sifat bahwa setiap koleksi dari elemen-elemen mempunyai suatu batas atas terkecil dan batas bawah terbesar, maka P dinamakan **lattice lengkap**. Batas atas terkecil dari suatu koleksi juga dinamakan ***join*** dari koleksi dan batas bawah terbesar dinamakan ***meet***.

Teorema 3.1.3 Himpunan semua ruang-bagian dari ruang vektor V, yaitu $S(V)$ adalah suatu lattice lengkap terhadap inklusi himpunan dengan elemen terkecil $\{0\}$, elemen terbesar dari V, yaitu *meet* adalah

$$\mathrm{glb}\{S_i \,|\, i \in K\} = \bigcap_{i\in K} S_i$$

sedangkan *join* adalah

$$\mathrm{lub}\{S_i \,|\, i \in K\} = \sum_{i\in K} S_i.$$

□

3.2 Jumlahan Langsung

Berikut ini dibahas mengkonstruksi ruang vektor baru dari ruang vektor yang diberikan.

Misalkan $V_1, V_2, \ldots, V_n$ adalah ruang vektor atas suatu lapangan F. **Jumlahan Langsung** dari $V_1, V_2, \ldots, V_n$ dinotasikan oleh

$$V = V_1 \boxplus V_2 \boxplus \cdots \boxplus V_n$$

adalah ruang vektor V yang mempunyai n-pasang terurut:

$$V = \{(v_1, v_2, \ldots, v_n) \,|\, v_i \in V_i, i = 1, 2, \ldots, n\}$$

dengan operasi tambah

$$(u_1, u_2, \ldots, u_n) + (v_1, v_2, \ldots, v_n) \stackrel{\text{def}}{=} (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n)$$

dan perkalian dengan skalar $r \in F$

$$r(v_1, v_2, \ldots, v_n) \stackrel{\text{def}}{=} (rv_1, rv_2, \ldots, rv_n)$$

Contoh 3.2.1 Ruang vektor F^n adalah jumlahan langsung dari F sebanyak n, yaitu

$$F^n = \underbrace{F \boxplus F \boxplus \cdots \boxplus F}_{n}.$$

□

Konstruksi tsb. dapat dibuat umum pada sebarang koleksi dari ruang vektor yaitu dari konsep n-pasang terurut $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ ke suatu fungsi $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \bigcup V_i$ dengan sifat $f(i) \in V_i$

Misalkan $\mathcal{F} = \{V_i \mid i \in K\}$ dengan V_i adalah ruang vektor atas F. **Produk Langsung** dari $\mathcal{F}$ adalah ruang vektor

$$\prod_{i \in K} V_i = \left\{ f : K \to \bigcup_{i \in K} V_i \;\middle|\; f(i) \in V_i \right\}.$$

Support dari suatu fungsi $f : K \to \bigcup\limits_{i \in K} V_i$ adalah himpunan

$$\operatorname{supp}(f) = \{i \in K \mid f(i) \neq 0\}.$$

Jadi, suatu fungsi f mempunyai **support berhingga** bila $f(i) = 0$ untuk semua, tetapi sebanyak berhingga $i \in K$. **Jumlahan Langsung Eksternal** dari $\mathcal{F}$ adalah ruang vektor

$$\bigoplus_{i \in K}^{\text{ext}} V_i = \left\{ f : K \to \bigcup_{i \in K} V_i \;\middle|\; f(i) \in V_i, f \text{ mempunyai support berhingga} \right\}.$$

Suatu kasus khusus penting terjadi bila $V_i = V$ untuk semua $i \in K$. Bila V^K menyatakan himpunan semua fungsi dari K ke V dan $(V^K)_0$ menyatakan himpunan semua fungsi di V^K yang mempunyai support berhingga, maka

$$\prod_{i \in K} V = V^K \;\text{ dan }\; \bigoplus_{i \in K}^{\text{ext}} V = \left(V^K\right)_0.$$

Catatan bahwa produk langsung dan jumlahan langsung eksternal adalah sama untuk suatu famili berhingga dari ruang-bagian.

Suatu versi internal dari konstruksi jumlahan langsung lebih sering relevan.

Suatu ruang vektor V adalah **jumlahan langsung (internal)** suatu famili

$$\mathcal{F} = \{S_i \mid i \in I\}$$

dari ruang-bagian V, ditulis

$$V = \bigoplus \mathcal{F} \;\text{ atau }\; V = \bigoplus_{i \in I} S_i,$$

bila memenuhi:

1. (**Join of the family**) V adalah jumlah (join) dari famili $\mathcal{F}$:

$$V = \sum_{i \in I} S_i.$$

2. (**Independence of the family**) Untuk setiap $i \in I$,

$$S_i \cap \left(\sum_{j \neq i} S_i \right) = \{0\}.$$

Dalam kasus ini, masing-masing S_i dinamakan suatu **penjumlah langsung** dari V. Bila $\mathcal{F} = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ adalah suatu famili berhingga, jumlahan langsung sering ditulis sebagai

$$V = S_1 \oplus S_2 \oplus \cdots \oplus S_n.$$

Bila $V = S \oplus T$, maka T dinamakan suatu **komplemen** dari S di V.

Catatan bahwa, kondisi pada bagian 2. dari difinisi yang telah dibahas sebelumnya adalah lebih kuat dari pada menyatakan bahwa anggota-anggota dari $\mathcal{F}$ adalah berpasangan saling asing:

$$S_i \cap S_j = \emptyset, \text{ untuk semua } i \neq j \in I.$$

Selanjutnya, bila S dan T adalah ruang bagian dari V, maka jumlahan $S + T$ selalu ada. Apapun itu, jumlahan langsung $S \oplus T$ ada berkibat bahwa $S \cap T = \{0\}$. Jadi jumlah $S + T$ selalu ada, tetapi jumlahan langsung $S \oplus T$ tidak selalu ada. Pernyataan yang dibahas ini dapat digunakan pada famili ruang bagian dari V.

Perluh diperhatikan bahwa, apa yang telah dibahas mengenai konsep pengertian jumlahan langsung internal dan eksternal adalah dua konsep yang ekivalen (isomorpik). Untuk alasan ini, maka istilah jumlahan langsung sering digunakan tampah menyebutkan kualifikasinya. Teorema berikut mudah dibuktikan.

Teorema 3.2.1 Sebarang ruang-bagian dari suatu ruang vektor mempunyai suatu komplemen, yaitu bila S adalah suatu ruang-bagian dari V, maka ada suatu ruang bagian T yang memenuhi $V = S \oplus T$.

$\square$

Perluh diperhatikan bahwa secara umum suatu ruang bagian mempunyai banyak komplemen (walaupun ruang-bagian tsb. isomorpik). Hal ini bisa diselidiki di $\mathbb{R}^2$.

Teorema 3.2.2 Misalkan $\mathcal{F} = \{S_i \mid i \in I\}$ adalah famili dari ruang-bagian yang berbeda di V. Maka berikut ini adalah ekivalen:

1. Untuk masing-masing $i \in I$,

$$S_i \cap \left(\sum_{j \neq i} S_j \right) = \{0\}.$$

2. Vektor nol 0 tidak dapat ditulis sebagai suatu jumlah dari vektor-vektor taknol dari ruang-bagian di $\mathcal{F}$.

3. Setiap vektor taknol $v \in V$ diungkapkan secara tunggal kecuali urutan suku-sukunya sebagai jumlahan

$$v = s_1 + s_2 + \cdots + s_n$$

dari vektor-vektor taknol dari ruang-bagian berbeda di $\mathcal{F}$.

Jadi, suatu jumlahan

$$V = \sum_{i \in I} S_i$$

adalah jumlahan langsung bila dan hanya bila $1 - 3$ dipenuhi.

Bukti
Andaikan bahwa 2. tidak dipenuhi, yaitu

$$0 = s_{j_1} + s_{j_2} + \cdots + s_{j_n},$$

dengan $s_{j_i} \neq 0$ dan $s_{j_i} \in S_{j_i}$. Maka untuk $n > 1$ didapat

$$-s_{j_1} = s_{j_2} + \cdots + s_{j_n}.$$

Hal ini bertentangan dengan 1. Jadi haruslah, bila memenuhi pernyataan 1. maka pernyataan 2. dipenuhi. Selanjutnya bila 2. dipenuhi dan

$$v = s_1 + s_2 + \cdots + s_n \text{ dan } v = t_1 + t_2 + \cdots + t_m.$$

Didapat

$$0 = s_1 + s_2 + \cdots + s_n - t_1 - t_2 \cdots - \cdots - t_m.$$

Dengan mengumpulkan suku-suku yang sama dari ruang bagian yang sama, dapatlah dituliskan sebagai

$$0 = (s_{i_1} - t_{i_1}) + \cdots + (s_{i_k} - t_{i_k}) + s_{i_{k+1}} + \cdots + s_{i_n} - t_{i_{k+1}} - \cdots - t_{i_m}$$

Karena pernyataan 2. dipenuhi, maka $n = m = k$ dan $_{i_p} = t_{i_p}$ untuk semua $p = 1, 2, \ldots, k$. Jadi, bila 2. dipenuhi berakibat bahwa 3. dipenuhi. Akhirnya, misalkan 3. dipenuhi. Andaikan sebarang vektor taknol v memenuhi

$$0 \neq v \in S_i \cap \left(\sum_{j \neq i} S_j \right),$$

maka $v = s_i \in S_i$ dan

$$s_i = s_{j_1} + \cdots + s_{j_n},$$

dengan $s_{j_k} \in S_{j_k}$ adalah vektor taknol. Hal ini bertentangan dengan 3. Jadi haruslah

$$\{0\} = S_i \cap \left(\sum_{j \neq i} S_j \right).$$

Dengan demikian bila 3. dipenuhi, maka berakibat 1. dipenuhi. □

Contoh 3.2.2 Sebarang matriks $A \in M_{n\times n}$ dapat ditulis sebagai

$$A = \frac{1}{2}(A + A^t) + \frac{1}{2}(A - A^t) = B + C, \tag{3.1}$$

dengan A^t adalah transpose dari A. Mudah ditunjukkan bahwa B adalah matriks simetri dan C adalah matriks simetri-miring. Jadi, bentuk 3.1 adalah suatu dekomposisi dari matriks A sebagai jumlah dari suatu matriks simetri dan matriks simetri-miring.

Karena himpunan Sym (himpunan semua matriks simetri) dan SkewSym (himpunan semua matriks simetri-miring) adalah ruang-bagian dari $M_{n\times n}$, didapat

$$M_{n\times n} = \text{Sym} + \text{SkewSym}.$$

Lagi pula, bila $S+T = S'+T'$, dengan S, S' simetri dan T, T' simetri-miring, maka matriks

$$U = S - S' = T - T'$$

adalah matriks simetri, sekaligus simetri-miring. Jadi, asalkan $\text{char}(F) \neq 2$, didapat $U = 0$. Dengan demikian $S = S'$ dan $T = T'$. Jadi

$$M_{n\times n} = \text{Sym} \oplus \text{SkewSym}.$$

□

3.3 Himpunan Pembentang dan Bebas Linier

Suatu himpunan vektor **membentang** suatu ruang vektor bila setiap vektor dapat dituliskan sebagai suatu kombinasi linier dari beberapa vektor di himpunan tsb. Berikut ini difinisi formalnya.

Ruang-bagian yang dibentangkan (juga dinamakan **Ruang bagian yang dibangun**) oleh $S \subset V$ dengan $S \neq \emptyset$ adalah himpunan semua kombinasi linier dari vektor-vektor di S yang dinotasikan sebagai:

$$\langle S \rangle = \text{span}(S) = \{r_1 v_1 + r_2 v_2 + \cdots + r_n v_n \,|\, r_i \in F, v_i \in S\}.$$

Bila $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ adalah suatu himpunan berhingga, digunakan notasi $\langle v_1, v_2, \ldots, v_n\rangle$ atau span$(v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Suatu himpunan himpunan $S \subset V$ dengan $S \neq \emptyset$ dikatakan **membentang** V atau **membangun** V, bila $V = \text{span}(S)$.

Jelas bahwa sebarang superset dari suatu himpunan pembentang juga suatu himpunan pembentang. Catatan bahwa, semua ruang vektor mempunyai himpunan pembentang, sebab V membangun dirinya sendiri.

Pengertian bebas linier adalah suatu konsep yang fundamental. Misalkan V adalah suatu ruang vektor atas lapangan F. Suatu $S \subset V$ dengan $S \neq \emptyset$ adalah **bebas linier** bila sebarang vektor berbeda $s_1, s_2, \ldots, s_n$ di S, memenuhi

$$a_1s_1 + a_2s_2 + \cdots + a_ns_n = 0 \ \Rightarrow \ a_i = 0, \text{ untuk semua} i.$$

Dengan kata lain, S bebas linier bila kombinasi linier dari vektor-vektor di S sama dengan nol, maka semua koefisiennya adalah nol. Bila S tidak bebas linier dinamakan **bergantungan linier**.

Perluh diperhatikan bahwa, suatu himpunan bebas linier tidak memuat vektor nol, sebab $1.0 = 0$ yang bertentangan dengan pengertian bebas linier.

Selanjutnya, ungkapan $0 = s_1 + (-1s_1)$ mempunyai dua intepretasi. Satu, $0 = as_1 + bs_1$, dengan $a = 1$ dan $b = -1$, tetapi hal ini tidak mencakup vektor-vektor yang berbeda. Jadi hal ini tidak relevan dengan pengertian bebas linier. Intepretasi yang lain adalah $0 = s_1 + t_1$, dengan $t_1 = -s_1 \neq s_1$ (asumsi bahwa $s_1 \neq 0$). Jadi, bila S bebas linier, maka S tidak bisa memuat s_1 dan $-s_1$ secara bersamaan.

Misalkan diberikan ruang vektor V dan $S \subset V$ dengan $S \neq \emptyset$ suatu vektor taknol $v \in V$ dikatakan **secara esensial tunggal** kombinasi linier dari vektor-vektor di S bila ada **hanya satu cara** mengungkapkan v sebagai suatu kombinasi linier

$$v = a_1s_1 + a_2s_2 + \cdots + a_ns_n,$$

dengan s_i adalah vektor-vektor yang berbeda di S dan koefisien a_i adalah taknol. Secara langsung, $v \neq 0$ secara esensial unggal t kombinasi linier dari vektor-vektor di S bila $v \in \langle S\rangle$ dan bilamana

$$v = a_1s_1 + a_2s_2 + \cdots + a_ns_n \text{ dan } v = b_1t_1 + b_2t_2 + \cdots + b_mt_m,$$

yang mana semua s_i dan t_i berbeda, dan semua koefisiennya taknol, maka $m = n$ dan bila perluh setelah diindeks ulang didapat $a_i = b_i$ dan $s_i = t_i$ untuk semua $i = 1, 2, \ldots, n$.

Berikut ini diberikan sifat dari bebas linier.

Teorema 3.3.1 Misalkan V adalah ruang vektor dan $\{0\} \neq S \subset V$. Pernyataan berikut adalah ekivalen:

1. Himpunan S bebas linier.

2. Setiap vektor taknol $v \in \text{span}(S)$ adalah secara esensial tunggal kombinasi linier dari vektor-vektor di S.

3. Tidak ada vektor di S sebagai suatu kombinasi linier dari vektor-vektor yang lainnya di S.

Bukti
Misalkan 1. dipenuhi, maka

$$0 \neq v = a_1 s_1 + a_2 s_2 + \cdots + a_n s_n = b_1 t_1 + b_2 t_2 + \cdots + b_m t_m,$$

dengan vektor-vektor s_i adalah berbeda begitu juga t_i dan semua koefisiennya taknol. Dengan mengurangi dan mengelompokkan s_i dan t_i yang sama, didapat

$$\begin{aligned} 0 &= (a_{i_1} - b_{i_1}) s_{i_1} + \cdots + (a_{i_k} - b_{i_k}) s_{i_k} \\ &\quad + a_{i_{k+1}} s_{i_{k+1}} + \cdots + a_{i_n} s_{i_n} \\ &\quad - b_{i_{k+1}} t_{i_{k+1}} - \cdots - b_{i_m} t_{i_m} \end{aligned}$$

Dengan kenyataan 1. dipenuhi, maka haruslah $n = m = k$, $a_{i_j} = b_{i_j}$ dan $s_{i_j} = t_{i_j}$ untuk semua $j = 1, 2, \ldots k$. Hal ini berakibat kondisi 2. dipenuhi. Bila 1. dipenuhi dan andaikan $s \in S$ adalah kombinasi linier dari vektor-vektor yang lainnya

$$s = a_1 s_1 + a_2 s_2 + \cdots + a_n s_n,$$

dengan $s_i \neq s_j$, untuk $i \neq j$ dan $s \neq s_j$ untuk semua $i =, 1, 2, \ldots, n$. Didapat

$$a.s + a_1 s_1 + a_2 s_2 + \cdots + a_n s_n = 0,\ a = -1.$$

Karena S bebas linier, maka $a_i = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n$ dan $a = 0$. Hal ini tidak mungkin sebab $a = -1$. Jadi haruslah $s \in S$ bukan kombinasi linier dari vektor-vektor yang lainnya di S. Misalkan 3. dipenuhi dan andaikan

$$a_1 s_1 + a_2 s_2 + \cdots + a_n s_n = 0,\ a_1 \neq 0,$$

dengan s_i adalah berbeda, maka

$$s_1 = -\frac{1}{a_1}(a_2 s_2 + \cdots + a_n s_n).$$

Hal ini bertentangan dengan kenyataan 3. dipenuhi. Jadi haruslah

$$a_1 s_1 + a_2 s_2 + \cdots + a_n s_n = 0,$$

dengan s_i berbeda berakibat $a_1 = 0$ untuk semua $i = 1, 2, \ldots, n$. Jadi S bebas linier. $\square$

Teorema berikut berkaitan dengan pengerttian himpunan pembentang dan bebas linier.

Teorema 3.3.2 Misalkan S adalah subset dari ruang vektor V atas lapangan F. Pernyataan berikut adalah ekivalen:

1. S bebas linier dan membangun V.
2. Setiap vektor taknol $v \in V$ adalah secara esensial tunggal kombinasi linier dari vektor-vektor di S.
3. S adalah suatu himpunan pembentang minimal, yaitu S membangun V tetapi sebarang himpunan bagian sejati dari S tidak bisa membangun V.
4. S adalah suatu himpunan bebas linier maksimal, yaitu S adalah bebas linier, tetapi sebarang superset sejati dari S tidak bebas linier.

Bukti
Dari hasil sebelumnya sudah ditunjukkan bahwa pernyataan 1. dan 2. adalah ekivalen. Misalkan pernyataan 1. dipenuhi. Maka S adalah suatu himpunan pembentang. Bila $S' \subset S$ juga membangun V, maka sebarang vektor di $v \in S - S'$ adalah kombinasi linier dari vektor-vektor di S'. Hal ini bertentangan dengan kenyataan bahwa vektor-vektor di S adalah bebas linier. Jadi pernyataan 1. berakibat pernyataan 3. Sebaliknya, bila S adalah himpunan pembentang minimal dan andaikan S tidak bebas linier, maka beberapa vektor $s \in S$ adalah kombinasi linier dari vektor-vektor lainnya di S. Jadi $S - \{s\}$ adalah himpunan pembentang subset sejati dari S. Hal ini bertentangan dengan kenyataan bahwa S adalah himpunan pembentang minimal. Jadi pernyataan 3. berkibat pernyataan 1. Lagi, misalkan pernyataan 1. dipenuhi dan andaikan S tidak maksimal. Maka ada $v \in V - S$ yang mana himpunan $S \cup \{v\}$ adalah bebas linier, tetapi v tidak di S. Hal ini bertentangan dengan kenyataan bahwa S membangun V. Jadi haruslah S himpunan maksimal yang bebas linier. Dengan demikian pernyataan 1. berakibat pernyataan 4. Sebaliknya, bila S adalah suatu himpunan maksimal bebas linier dan andaikan S tidak membangun V, maka bisa didapat suatu vektor $v \in V - S$ yang bukan merupakan kombinasi linier dari vektor-vektor di S. Jadi, $S \cup \{v\}$ adalah suatu suatu superset sejati dari S yang bebas linier. Hal ini bertentangan dengan kenyataan bahwa S adalah suatu himpunan maksimal bebas linier. Dengan demikian kita menunjukkan bahwa pernyataan 4., berakibat pernyataan 1.

□

Suatu himpunan vektor-vektor di V yang memenuhi sebarang kondisi di pernyataan Teorema 3.3.2 dinamakan suatu **basis** dari V. Berikut ini adalah kesimpulan dari beberapa sifat yang telah dibahas.

Kesimpulan 3.3.1 Suatu himpunan berhingga vektor-vektor di V, yaitu $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ adalah suatu basis dari V bila dan hanya bila

$$V = \langle v_1 \rangle \oplus \langle v_2 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle v_n \rangle .$$

□

Contoh 3.3.1 Vektor baku ke-i di F^n adalah vektor e_i yang semua posisi koordinatnya sama dengan nol kecuali pada posisi ke-i sama dengan satu. Vektor-vektor baku ini adalah

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0),\ e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots,\ e_n = (0, 0, \ldots, 1).$$

Himpunan $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ dinamakan **basis baku** untuk F^n.

$\square$

Teorema 3.3.3 Diberikan V adalah ruang vektor taknol. Misalkan I adalah suatu himpunan bebas linier di V dan S adalah suatu himpunan pembentang di V yang memuat I. Maka ada suatu basis $\mathcal{B}$ untuk V yang menenuhi $I \subseteq \mathcal{B} \subseteq S$. Khususnya,

1. Sebarang ruang vektor, kecuali ruang nol $\{0\}$ mempunyai suatu basis.
2. Sebarang himpunan bebas linier di V termuat di dalam suatu basis untuk V.
3. Sebarang himpunan pembentang dari V memuat suatu basis untuk V.

Bukti
Misalkan $\mathcal{A}$ adalah koleksi subset bebas linier dari V yang memuat I dan termuat di S. Koleksi ini tidak kosong, sebab $I \in \mathcal{A}$. Bila

$$C = \{I_k \,|\, k \in K\}$$

adalah suatu rantai, maka gabungan

$$U = \bigcup_{k \in K} I_k$$

adalah bebas linier dan memenuhi $I \subseteq U \subseteq S$. Terlihat bahwa $U \in \mathcal{A}$. Jadi sebarang rantai di $\mathcal{A}$ mempunyai batas atas di $\mathcal{A}$, dengan menggunakan lemma Zorn $\mathcal{A}$ memuat suatu elemen maksimal $\mathcal{B}$ yang bebas linier. Selanjutnya ditunjukkan bahwa $\mathcal{B}$ adalah suatu basis untuk ruang vektor $\langle S \rangle = V$. Ambil sebarang vektor $s \in S$ dan andaikan s bukan suatu kombinasi linier dari vektor-vektor di $\mathcal{B}$. Maka himpunan $\mathcal{B} \cup \{s\} \subseteq S$ adalah bebas linier. Hal ini bertentangan dengan $\mathcal{B}$ adalah maksimal. Jadi $S \subset \mathcal{B}$ dengan demikian $V = \langle S \rangle \subseteq \langle \mathcal{B} \rangle$.

$\square$

Teorema 3.3.3 dapat digunakan untuk membuktikan bahwa sebarang ruang bagian dari suatu ruang vektor mempunyai suatu komplemen.

3.4 Dimensi Ruang Vektor

Hasil berikut dengan bukti klasik yang ilegan menyatakan bahwa bila suatu ruang vektor V mempunyai suatu pembentang S yang berhingga, maka banyaknya elemen-elemen sebarang himpunan bebas linier tidak akan melampaui banyaknya elemen-elemen S.

Teorema 3.4.1 Diberikan ruang vektor V atas lapangan F. Misalkan vektor-vektor $v_1, v_2, \ldots, v_n$ bebas linier dan vektor-vektor $s_1, s_2, \ldots, s_m$ membentang V. Maka $n \leq m$.

Bukti
Andaikan $m < n$, buat daftar susunan dua himpunan vektor-vektor sebagai berikut :

$$s_1, s_2, \ldots, s_m \, ; \, v_1, v_2, \ldots, v_n.$$

Kemudian pindahkan v_1 sehingga didapat

$$v_1, s_1, s_2, \ldots, s_m \, ; \, v_2, \ldots, v_n.$$

Karena vektor-vektor $s_1, s_2, \ldots, s_m$ membentang V, maka v_1 adalah suatu kombinasi linier dari vektor-vektor s_i. Sehingga dapat dihapus satu dari vektor-vektor s_i dan bila perluh lakukan pengindeksan ulang supaya vektor-vektor yang tersisa tetap membentang V. Dalam hal ini s_1 dihapus, didapat

$$v_1, s_2, \ldots, s_m \, ; \, v_2, v_3 \ldots, v_n.$$

Perluh diperhatikan bahwa vektor-vektor $v_2, v_3 \ldots, v_n$ tetap bebas linier. Lakukan lagi proses yang serupa sehingga didapat

$$v_1, v_2, s_2, \ldots, s_m \, ; \, v_3 \ldots, v_n.$$

Seperti alasan sebelumnya, vektor s_2 dapat dihapus, didapat

$$v_1, v_2, s_3, \ldots, s_m \, ; \, v_3 \ldots, v_n,$$

yang mana vektor-vektor $v_1, v_2, s_3, \ldots, s_m$ tetap membentang V dan vektor-vektor $v_3 \ldots, v_n$ juga tetap bebas linier. Sehingga bila proses yang sama dilakukan berulang didapat

$$v_1, v_2, v_3, \ldots, v_m \, ; \, v_{m+1} \ldots, v_n,$$

yang mana vektor-vektor $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_m$ tetap membentang V dan vektor-vektor $v_{m+1} \ldots$, v_n juga tetap bebas linier. Tetapi hal ini berakibat vektor-vektor $v_{m+1} \ldots, v_n$ adalah kombinasi linier dari vektor-vektor $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_m$. Hal ini bertentangan dengan Teorema 3.3.1 bagian 3. Jadi haruslah $n \leq m$.

□

Kesimpulan 3.4.1 Bila ruang vektor V atas lapangan F mempunyai suatu himpunan pembentang berhingga, maka sebarang himpunan dua basis dari V mempunyai kardinalitas yang sama.

□

Berikut ini diberikan sifat yang lebih umum untuk sebarang ruang vektor.

Teorema 3.4.2 Bila V suatu ruang vektor atas lapangan F, maka sebarang dua himpunan basis mempunyai kardinalitas yang sama.

Bukti
Diasumsikan bahwa semua basis untuk V adalah himpunan takberhinnga, bila tidak hal ini sudah terlihat pada Kesimpulan 3.4.1. Misalkan $\mathcal{B} = \{b_i \,|\, i \in I\}$ adalah suatu basis untuk V dan $\mathcal{C}$ basis yang lain untuk V. Maka sebarang vektor $c \in \mathcal{C}$ bisa ditulis sebagai suatu kombinasi linier berhingga dari vektor-vektor di $\mathcal{B}$, dengan semua koefisiennya taknol, yaitu

$$c = \sum_{i \in U_c} r_i b_i.$$

Tetapi karena $\mathcal{C}$ adalah suatu basis, haruslah

$$\bigcup_{c \in \mathcal{C}} U_c = I.$$

Karena $|U_c| < \aleph_0$ untuk semua $c \in \mathcal{C}$, dengan $\aleph_0$ adalah kardinalitas dari himpunan semua bilangan natural, maka

$$|\mathcal{B} = |I| \leq \aleph_0 |\mathcal{C}| = |\mathcal{C}|.$$

Hal, ini bisa dilakukan sebaliknya, yaitu sebarang vektor di $\mathcal{B}$ bisa ditulis sebagai kombinasi linier berhingga dari vektor-vektor di $\mathcal{C}$. Sehingga didapat

$$|\mathcal{C}| = |I| \leq \aleph_0 |\mathcal{B}| = |\mathcal{B}|.$$

Jadi $|\mathcal{B}| = |\mathcal{C}|$.

□

Dari Terorema 3.4.2 dapat didefinisikan bahwa suatu ruang vektor V **berdimemsional-hingga** bila $V = \{0\}$ atau bila V mempunyai suatu basis yang berhingga. Semua ruang vektor yang tidak demikian adalah ruang vektor **berdimensional-takhingga**. **Dimensi** ruang vektor nol adalah 0 dan **dimensi** sebarang ruang vektor taknol V adalah kardinalitas dari sebarang basis untuk V. Bila suatu ruang vektor V mempunyai suatu basis dengan kardinalitas κ, maka V dikatakan **dimensional**-κ dan ditulis $\dim(V) = \kappa$.

Mudah ditunjukkan bahwa bila S adalah suatu ruang bagian dari V, maka $\dim(S) \leq \dim(V)$. Lagi pula, bila $\dim(S) = \dim(V) < \infty$, maka $S = V$.

Teorema 3.4.3 Diberikan V adalah ruang vektor atas lapangan F.

1. Bila $\mathcal{B}$ adalah suatu basis untuk V dan bila $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ dan $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$, maka

$$V = \langle \mathcal{B}_1 \rangle \oplus \langle \mathcal{B}_2 \rangle .$$

2. Misalkan $V = S \oplus T$. Bila $\mathcal{B}_1$ adalah suatu basis untuk S dan $\mathcal{B}_2$ adalah suatu basis untuk T, maka

$$\dim(S) + \dim(T) = \dim(S + T) + \dim(S \cap T).$$

Khususnya, bila T adalah sebarang komplemen dari S di V, maka

$$\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$$

dan

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$$

adalah suatu basis untuk V.

□

Teorema 3.4.4 Misalkan S dan T adalah ruang bagian dari V. Maka

$$\dim(S) + \dim(T) = \dim(S + T) + \dim(S \cap T).$$

Khususnya, bila T adalah sebarang komplemen dari S di V, maka

$$\dim(S) + \dim(T) = \dim(V),$$

yaitu

$$\dim(S \oplus T) = \dim(S) + \dim(T).$$

Bukti

Misalkan $\mathcal{B} = \{b_i \,|\, i \in I\}$ adalah suatu basis untuk $S \cap T$. Perluas basis ini menjadi suatu basis $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ untuk S yang mana $\mathcal{A} = \{a_j \,|\, j \in J\} \cap \mathcal{B} = \emptyset$. Juga perluas $\mathcal{B}$ menjadi suatu basis $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ untuk T yang mana $\mathcal{C} = \{c_k \,|\, k \in K\} \cap \mathcal{B} = \emptyset$. Akan ditunjukkan bahwa $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ adalah suatu basis untuk $S + T$. Jelas bahwa $\langle \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \rangle = S + T$. Untuk membuktikan bahwa $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ bebas linier, andaikan bahwa bahwa

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0, \tag{3.2}$$

$v_i \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ dan $\alpha_i \neq 0$ untuk semua i. Karena $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ dan $\mathcal{C} \cup \mathcal{B}$ bebas linier maka ada v_i yang memenuhi Persamaan 3.2 di $\mathcal{A} \cap \mathcal{C}$. Hal ini menunjukkan ada vektor taknol $x \in \langle \mathcal{A} \rangle \cap \langle \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \rangle$. Hal ini berakibat $x \in S \cap T$ dan $x \in \langle \mathcal{A} \rangle \cap \langle \mathcal{B} \rangle$. Jadi $x = 0$, kontradiksi. Jadi haruslah $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ bebas linier dan suatu basis untuk $S + T$. Selanjutnya

$$\begin{aligned} \dim(S) + \dim(T) &= |\mathcal{A} \cup \mathcal{B}| + |\mathcal{B} \cup \mathcal{C}| \\ &= |\mathcal{A}| + |\mathcal{B}| + |\mathcal{B}| + |\mathcal{C}| \\ &= |\mathcal{A}| + |\mathcal{B}| + |\mathcal{C}| + \dim(S \cap T). \end{aligned}$$

□

Perluh diperhatikan bahwa persamaan

$$\dim(S) + \dim(T) = \dim(S + T) + \dim(S \cap T)$$

berlaku untuk semua ruang vektor, tetapi penulisan

$$\dim(S + T) = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S \cap T)$$

tidak selalu benar, kecuali $S + T$ berdimensional-hingga.

3.5 Basis Terurut dan Matriks Koordinat

Pada bagian ini dibahas pengertian dari suatu basis terurut yang berkaitan dengan urutan dari anggota-anggotanya.

Misalkan V adalah suatu ruang vektor berdimensi-n atas lapangan F. Suatu **basis terurut** untuk V adalah n-pasangan terurut $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ dari vektor-vektor di V yang mana himpunan $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ adalah suatu basis untuk V.

Bila $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ adalah suatu basis terurut untuk V, maka untuk setiap $v \in V$ ada tunggal suatu n-pasangan terurut $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ dari skalar sehingga

$$v = r_1 v_1 + r_2 v_2 + \cdots + r_n v_n.$$

Berkaitan dengan hal yang demikian, didefinisikan **pemetaan koordinat** $\phi_{\mathcal{B}} : V \to F^n$ oleh

$$\phi_{\mathcal{B}}(v) = [v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}, \tag{3.3}$$

yang mana matriks kolom $[v]_{\mathcal{B}}$ disebut sebagai **matriks koordinat** dari v terhadap basis terurut $\mathcal{B}$. Jelas bahwa diketahuinya $[v]_{\mathcal{B}}$ adalah ekivalen dengan diketahuinya v asalkan basis $\mathcal{B}$ diketahui.

Lagi pula, mudah dipahami bahwa pemetaan koordinat $\phi_{\mathcal{B}}$ adalah bijektif dan mempertahankan operasi-operasi ruang vektor, yaitu

$$\phi_{\mathcal{B}}(r_1 v_1 + r_2 v_2 + \cdots + r_n v_n) = r_1 \phi_{\mathcal{B}}(v_1) + r_2 \phi_{\mathcal{B}}(v_2) + \cdots + r_n \phi_{\mathcal{B}}(v_n)$$

atau ekivalen dengan

$$[r_1 v_1 + r_2 v_2 + \cdots + r_n v_n]_{\mathcal{B}} = r_1 [v_1]_{\mathcal{B}} + r_2 [v_2]_{\mathcal{B}} + \cdots + r_n [v_n]_{\mathcal{B}}.$$

Fungsi dari satu ruang vektor ke ruang vektor lainnya yang mempertahankan operasi-operasi ruang vektor dinamakan *transformasi linier* yang merupakan topik pada bahasan berikutnya.

3.6 Ruang Baris dan kolom dari suatu Matriks

Misalkan A matriks berukuran $m \times n$ atas lapangan F. Baris dari A membangun suatu ruang bagian dari F^n yang dinamakan **ruang baris** dari A dan kolom dari A membangun suatu ruang bagian dari F^m yang dinamakan **ruang kolom** dari A. Dimensi dari ruang-ruang bagian tsb. masing-masing dinamakan **rank baris** dan **rank kolom**. Ruang baris dan rank baris dinotasikan oleh $\mathrm{rs}(A)$ dan $\mathrm{rrk}(A)$, sedangkan ruang kolom dan rank kolom dinotasikan oleh $\mathrm{rc}(A)$ dan $\mathrm{crk}(A)$.

Perluh dicatat dan berguna bahwa fakta rank baris dari suatu matriks selalu sama dengan rank kolomnya walaupun $m \neq n$.

Bab **4**

Modul

Dalam matematika, modul adalah suatu struktur aljabar dasar yang digunakan dalam aljabar abstrak. Modul atas ring merupakan generalisasi dari gagasan ruang vektor atas lapangan, dimana skalar sesuai apabila elemen dari ring yang diberikan secara sembarang (dengan identitas) dan perkalian (di kiri dan/atau di kanan) didefinisikan antara elemen ring dengan elemen modul. Modul mengambil skalar dari ring R disebut modul-R.

Jadi, modul sebagai ruang vektor, adalah aditif grup abelian; produk didefinisikan antara elemen ring dan elemen modul distributif selama operasi penambahan setiap parameter dan kompatibel dengan perkalian ring.

Modul sangat erat kaitannya dengan teori representasi dari grup. Dan juga merupakan salah satu pengertian sentral aljabar komutatif dan aljabar homologi, dan digunakan secara luas dalam geometri aljabar dan topologi aljabar.

Konsep modul muncul melalui studi teori bilangan aljabar. Ini menjadi alat penting dalam aljabar di akhir 1920-an pada dasarnya karena wawasan E. Noether, yang merupakan ahli matematika pertama yang menyadari pentingnya. Modul adalah grup abelian aditif yang elemennya dikalikan secara sesuai dengan elemen dari beberapa **ring**. Modul ada di ring apa pun. Salah satu topik terpenting dalam aljabar modern adalah **teori modul**. Modul atas suatu ring adalah **generalisasi** dari grup abelian (yang merupakan modul atas $\mathbb{Z}$) dan juga generalisasi alami dari **ruang vektor** (yang merupakan modul atas ring pembagi (lapangan)). Banyak hasil dari ruang vektor digeneralisasikan dalam beberapa kelas modul khusus, seperti modul bebas dan modul yang dibuat secara halus melalui **DIU** (**D**aerah **I**deal **U**tama). Modul berkaitan erat dengan **teori representasi grup**. Salah satu konsep dasar yang mempercepat pengembangan aljabar komutatif adalah teori modul, karena modul memainkan peran sentral dalam aljabar komutatif. Modul juga banyak digunakan dalam teori struktur dari grup abelian yang dibangun secara berhingga, grup abelian berhingga dan **DIU**, aljabar homologi, dan topologi aljabar. Dalam bab ini kita mempelajari sifat-sifat dasar modul. Kita juga mempertimbangkan modul kelas khusus, seperti **modul bebas**, **modul atas suatu DIU** bersama dengan teorema struktur, **urutan modul yang tepat** dan **homomorpisma**

modul, **modul Noetherian** dan **Artinian**, **modul homologi** dan **kohomologi**. Studi kita berpuncak pada diskusi tentang topologi spektrum modul dan ring dengan referensi khusus untuk topologi dan skema **Zariski**. Dalam bab ini kami juga menunjukkan bagaimana membuat replika isomorpik dari semua gambar homomorpik dari modul abstrak tertentu.

Pada bagian ini diberikan pengertian dari suatu modul. Namum sebelumya diberikan suatu gambaran sebagai suatu motifasi untuk pengertian modul.

Motifasi

Dalam ruang vektor, himpunan skalar adalah suatu lapangan dan beroperasi pada vektor melalui perkalian skalar, tunduk pada aksioma tertentu seperti hukum distributif. Dalam modul, skalar hanya perlu berupa ring, sehingga konsep modul mewakili generalisasi yang signifikan. Dalam aljabar komutatif, baik ideal maupun ring hasil bagi adalah modul, sehingga banyak argumen tentang ideal atau ring hasil bagi dapat digabungkan menjadi satu argumen tentang modul. Dalam aljabar non-komutatif, perbedaan antara ideal kiri, ideal, dan modul menjadi lebih jelas, meskipun beberapa kondisi teori ring dapat dinyatakan baik tentang ideal kiri atau modul kiri.

Banyak teori modul terdiri dari upaya memperluas sebanyak mungkin sifat ruang vektor yang diinginkan ke ranah modul di atas ring yang "berperilaku baik", seperti daerah ideal utama. Namun, modul bisa jauh lebih rumit daripada ruang vektor; misalnya, tidak semua modul memiliki basis, dan bahkan untuk yang memilikinya (modul bebas), jumlah elemen dalam basis tidak perlu sama untuk semua basis (yaitu, mereka mungkin tidak memiliki rank tunggal) jika ring yang mendasarinya tidak memenuhi kondisi banyaknya basis invarian, tidak seperti ruang vektor, yang selalu memiliki basis (mungkin tak hingga) yang kardinalitasnya kemudian tunggal. (Dua pernyataan terakhir ini umumnya memerlukan aksioma pilihan, tetapi tidak dalam kasus ruang vektor berdimensi-hingga, atau ruang vektor berdimensi-tak-hingga yang berperilaku baik seperti ruang $\mathcal{L}^p$.)

Misalkan V adalah suatu ruang vektor atas suatu lapangan F dan $\tau \in \mathcal{L}(V)$. Maka, untuk sebarang polinomial $p(x) \in F[x]$ operator $p(\tau)$ adalah well-defined. Misalnya bila $p(x) = 1 + 2x + x^3$, maka

$$p(\tau) = \iota + 2\tau + \tau^3,$$

dimana ι adalah operator identitas dan τ^3 komposisi 3 kali dari τ yaitu $\tau \circ \tau \circ \tau$. Jadi, dengan menggunakan operator τ dapat didefinisikan suatu perkalian polinomial $p(x) \in F[x]$ dengan suatu vektor $\boldsymbol{v} \in V$ diberikan oleh

$$p(x)\boldsymbol{v} = p(\tau)(\boldsymbol{v}). \tag{4.1}$$

Perkalian ini memenuhi sifat-sifat biasa dari perkalian skalar dengan vektor, yaitu untuk semua $r(x), s(x) \in F[x]$ dan $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$, maka

$$\begin{aligned} r(x)(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) &= r(x)\boldsymbol{u} + r(x)\boldsymbol{v} \\ (r(x)+s(x))\boldsymbol{u} &= r(x)\boldsymbol{u} + s(x)\boldsymbol{u} \\ (r(x)s(x))\boldsymbol{u} &= r(x)(s(x)\boldsymbol{u}) \\ 1.\boldsymbol{u} &= \boldsymbol{u}. \end{aligned}$$

Jadi, untuk sebarang $\tau \in \mathcal{L}(V)$ tetap, di ruang vektor V dapat dilakukan operasi penjumlahan dan perkalian dari suatu elemen di V dengan suatu polinomial di $F[x]$. Bagaimanapun hal ini, karena $F[x]$ bukan suatu lapangan dua perkalian yang diberikan tidak bisa mengubah Vsebagai suatu ruang vektor. Apapun ini, situasi yang mana himpunan skalar-skalar membentuk suatu ring bukan suatu lapangan adalah penting tidak hanya dalam konteks ini tetapi dalam berbagai hal lainnya.

Pengertian modul adalah generalisasi konsep ruang vektor; di mana skalar dibatasi terletak pada sebarang ring (bukan lapangan untuk ruang vektor). Jadi, secara alami, modul dan ruang vektor memiliki beberapa sifat umum tetapi berbeda dalam banyak sifat.

Definisi Formal

Definisi 4.0.1 Suatu modul atas suatu ring komutatif R (modul-R atau modul atas R) adalah suatu grup komutatif M bersama-sama dengan suatu pemetaan dari $R \times M$ ke M diberikan sebagai $(r, m) \mapsto rm$ dan untuk semua $r, r_1, r_2 \in R$ dan semua $m, m_1, m_2 \in M$ memenuhi kondisi

M1 $r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2$,

M2 $(r_1 + r_2)m = r_1m + r_2m$,

M3 $(r_1r_2)m = r_1(r_2m)$.
Lagipula jika R memiliki elemen identitas 1_R,

M4 $1_R.m = m$.

Ring R dinamakan ring basis dari M. Untuk lebih membedakan, M yang memnuhi kondisi tersebut dinamakan juga **modul-kiri**-R. Defnisi yang sama juga untuk **modul-kanan**-R yang mana elemen-elemen dari R ditulis di sebelah kanan. □

Perlu diperhatikan bahwa aksiomatik dari suatu modul adalah suatu aksiomatik dari ruang vektor V atas suatu lapangan F. Yang membedakan adalah skalarnya. Dalam modul elemen-elemen skalarnya di ring R, sedangkan dalam ruang vektor elemen-elemen skalarnya berada di lapangan F.

Jika $R = \mathbb{Z}$, maka modul R hanyalah suatu grup Abelian aditif. Ring R itu sendiri dapat dianggap sebagai modul-R dengan menganggap perkalian skalar sebagai perkalian dengan elemen di R.

Catatan: Jika kita menuliskan $\mu(r, m)$ sebagai $f_r(m)$, maka $f_r : M \to M$, $m \mapsto rm$, maka menurut **M1** adalah suatu homomorpisma grup untuk sebarang tetap $r \in R$.

Contoh 4.0.1 Jika F adalah lapangan, maka ruang vektor-F (ruang vektor atas F) dan merupakan identik modul-F.

Contoh 4.0.2

1) Bila R adalah suatu ring, himpunan $M = R^n$ n-pasang terurut dengan komponen-komponen di R adalah modul-R, dengan penjumlahan dan perkalian dengan skalar didefinisikan oleh
$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$$
dan
$$r(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (ra_1, ra_2, \ldots, ra_n),$$
untuk $a_i, b_i, r \in R$. Misalnya, $\mathbb{Z}^2$ adalah $\mathbb{Z}$-modul.

2) Bila R adalah suatu ring, himpunan $M_{m\times n}(R)$ adalah himpunan semua matriks berukuran $m\times n$ adalah suatu modul-R terhadap operasi penjumlahan biasadalam matriks dan perkalian skalar di R dengan matriks di $M_{m\times n}(R)$. Satu contoh penting adalah $R = F[x]$, maka $M_{m\times n}(F[x])$ adalah $F[x]$-modul dari semua matriks berukuran $m \times n$ yang mempunyai elemen-elemen adalah polinomial.

3) Sebarang ring komutatif R disertai elemen satuan adalah suatu modul atas R sendiri. Yaitu R adalah modul-R.

$\square$

Berikut ini diberikan sifat-sifat dasar dari modul M atas suatu ring komutatif R.

Teorema 4.0.1 Bila M adalah suatu modul atas suatu ring komutatif R, maka untuk semua $r \in R$ dan $m \in M$ didapat
(1) $0_R.m = 0_M$
(2) $r.0_M = 0_M$
(3) $(-r)m = -(rm) = r(-m)$

Bukti
(1) $m = 1.m = (1 + 0_R)m = m + 0_R.m$. Kedua ruas persamaan tambahkan dengan invers terhadap $+$ dari m didapat $-m + m = (-m + m) + 0_R.m$. Sehingga didapat $0_M = 0_R.m$.
(2) $r.0_M = r(0_R.0_M) = (r.0_R).0_M = 0_R.0_M = 0_M$.
(3) Hitung $(-r).m + r.m = (-r + r)m = 0_R.m = 0_M$. Kedua ruas persamaan tambahkan dengan $-(r.m)$didapat $(-r).m = -(r.m)$. Dengan cara yang sama didapat $(-r).m = r.(-m)$
.

$\square$

Catatan: Grup abelian aditif tertentu M mungkin memiliki struktur modul-R yang berbeda (kiri dan kanan). Jika ring R komutatif, maka setiap M modul-R kiri dapat diberi struktur modul-R kanan dengan mendefinisikan

$$rm = mr, \ \forall r \in R \text{ dan } \forall m \in M.$$

Mulai sekarang, kecuali ditentukan lain, ring R berarti **ring komutatif** dan mempunyai **satuan** (**identitas**) 1_R dan modul-R berarti modul-R satuan (kiri).

Contoh 4.0.3

(i) Setiap aditif Abelian grup G adalah modul-$\mathbb{Z}$ satuan dengan ng ($n \in \mathbb{Z}, \ g \in G$) didefinisikan oleh

$$ng \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} g + g \cdots + g, & (n \text{ kali jika } n > 0); \\ 0_G, & (\text{jika } n = 0); \\ -g - g \cdots - g, & (|n| \text{ kali jika } n < 0). \end{cases}$$

(ii)Setiap ideal I dari ring R adalah modul-R dengan ri ($r \in R, \ i$ßI) adalah perkalian biasa di R. Secara khusus, R itu sendiri adalah modul-R.

(iii) Jika R adalah suatu pembagi dari lapangan F, maka modul-R disebut ruang vektor-F.

(iv) Jika M adalah suatu ring dan R adalah suatu subring dari M, maka M adalah modul-R dengan rm ($r \in R, \ m \in M$) adalah perkalian biasa sebagaimana di M. Secara khusus $R[[x]]$ dan $R[x]$ adalah modul-R.

(v) Jika I adalah suatu ideal dari R, maka I adalah subgrup aditif dari R dan R/I adalah grup Abelian. Jelasnya, R/I adalah modul-R dengan $r(t + I) \stackrel{\text{def}}{=} rt + I, \ \forall r, t \in R$.

(vi) Misalkan $(M, +)$ adalah suatu grup Abelian dan $\mathrm{End}(M)$ adalah ring dari semua endomorpisma $(M, +)$. Untuk $R = \mathrm{End}(M)$, M adalah modul-R melalui hukum eksternal komposisi $\mu : R \times M \to M$, didefinisikan oleh

$$\mu(f, x) = f \cdot x \stackrel{\text{def}}{=} f(x), \ \forall f \in R \text{ dan } \forall x \in M.$$

(vii) Jika R adalah suatu ring satuan dan n adalah bilangan bulat positif, maka grup Abelian $(R^n, +)$ (dengan operasi tambah secara komponen) adalah modul-R satuan melalui hukum eksternal komposisi $\mu : R \times R^n \to R^n$, didefinisikan oleh

$$\mu(r, x) = r \cdot x \stackrel{\text{def}}{=} (rx_1, rx_2, \cdots, rx_n), \ \forall r \in R \text{ dan } x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R^n.$$

Secara khusus, jika $R = F$ adalah lapangan, maka F^n adalah ruang vektor-F.

(viii) Misalkan R adalah suatu ring dan $(R^{\mathbb{N}^+}, +)$ adalah grup Abelian dari semua pemetaan $f : \mathbb{N}^+ \to R$ (yaitu, dari semua urutan elemen R) melalui operasi tambah yang didefinisikan oleh $(f + g)(n) \stackrel{\text{def}}{=} f(n) + g(n), \ \forall n \in \mathbb{N}^+$. Maka $(R^{\mathbb{N}^+}$ adalah modul-R melalui hukum eksternal komposisi $\mu : R \times R^{\mathbb{N}^+} \to R^{\mathbb{N}^+}$, didefinisikan oleh

$$(\mu(r, f))(n) = (r \cdot f)(n) \stackrel{\text{def}}{=} rf(n), \ \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

(ix) Misalkan $P_n(x)$ menyatakan himpunan semua polinomial derajat $\leq n$ dengan koefisien riil, maka $P_n(x)$ adalah suatu ruang vektor riil.

(x) Misalkan M adalah manifold yang halus (**smooth manifold**). Maka $C^\infty(M) = \{f : M \to R$ sedemikian rupa sehingga f adalah fungsi halus (**smooth**)$\}$ membentuk suatu ring. Maka himpunan S dari semua medan vektor halus (**smooth**) pada M membentuk modul atas ring $C^\infty(M)$.

(xi) Misalkan V adalah suatu ruang vektor berdimensi-n atas suatu lapangan F dan $T : V \to V$ adalah sebarang operator linier tetapi tetap. Maka V adalah modul-$F[x]$ melalui hukum eksternal komposisi halus (smooth)

$$F[x] \times V \to V, \ \ (f, v) \mapsto f(T)v.$$

□

Kita membahas ulang secara ringkas definisi dari suatu aljabar.

Definisi 4.0.2 Suatu Aljabar terdiri dari ruang vektor V atas suatu lapangan F bersama-sama dengan operasi perkalian biner pada himpunan vektor V , sehingga $\forall r \in F$ dan $x, y, z \in V$ memenuhi kondisi berikut:
(i) $(rx)y = r(xy) = x(ry)$;
(ii) $(x + y)z = xz + yz$;
(iii) $x(y + z) = xy + xz$.
Lebih lanjut, jika
(iv) $(xy)z = x(yz), \ \forall x, y, z \in V$, maka V dikatakan sebagai aljabar asosiatif atas F. □

Jika $\dim_F(V) = n$ sebagai ruang vektor atas F, maka aljabar V dikatakan berdimensi-n.

Contoh 4.0.4

(i) Misalkan G adalah suatu lapangan perluasan dari suatu lapangan F. Maka F adalah sublapangan dari G dan $V = G$ adalah aljabar asosiatif atas F, dimana penjumlahan dan perkalian elemen di V adalah penjumlahan dan perkalian lapangan sebagaimana biasa di G, dan perkalian skalar dengan elemen F lagi-lagi merupakan perkalian yang biasa di G.

(ii) Misalkan V adalah suatu ruang vektor atas suatu lapangan F. Maka himpunan $\mathcal{L}(V, V)$ dari semua transformasi linier pada V adalah aljabar atas F. □

Definisi 4.0.3 Untuk suatu ring komutatif R yang mempunyai elemen identitas, aljabar-R (atau aljabar atas R) adalah suatu ring K sedemikian rupa
(i) $(K, +)$ adalah suatu unitari modul-R (kiri);
(ii) $r(xy) = (rx)y = x(ry), \ \forall r \in R, \ x, y \in K$. □

Contoh 4.0.5
(i) Setiap ring R adalah aljabar-$\mathbb{Z}$.
(ii) Misalkan R adalah suatu ring komutatif dengan elemen identitas 1_R, maka

(a) ring grup $R(G)$ adalah aljabar-R dengan struktur modul-R dimana

$$r(\sum a_i x_i) = \sum r a_i x_i,\ \forall r, a_i \in R,\ x_i \in G.$$

(b) Ring $M_n(R)$ himpunan dari semua matriks persegi berorde n atas suatu ring R, adalah aljabar-R.

□

4.1 Submodul

Kita tertarik untuk menunjukkan bagaimana membuat replika isomorpik dari semua gambar homomorpik dari modul abstrak tertentu. Untuk tujuan ini, kita memperkenalkan konsep submodul yang berperan penting dalam menentukan struktur modul M dan sifat homomorpsisma dengan domain M.

Misalkan M adalah modul-R. Maka $(M, +)$ adalah grup Abelian. Kita sekarang menganggap subgrupnya $(N, +)$ yang stabil di bawah hukum komposisi eksternal yang ditentukan pada M modul-R.

Berbagai konsep dasar yang telah didefinisikan dalam ruang vektor juga dapat didefinisikan untuk modul walaupun mungkin sifat-sifatnya agak berbeda. Dimulai hal ini dengan pengertian submodul.

Definisi 4.1.1 Suatu submodul N dari suatu M modul-R adalah himpunan bagian takkosong N dari M terhadap operasi yang sama di M dan di R yang dikenakan terbatas pada N, maka N merupakan modul-R. Notasi $N \leq M$ menyatakan bahwa N adalah submodul dari M modul-R.

□

Jadi submodul N dari M tertutup terbatas terhadap penjumlahan dan perkalian skalar (didefinisikan pada M) pada N. Jelas, $\{0_M\}$ dan M adalah submodul dari M sesuai dengan sendirinya, yang disebut **submodul trivial** dari M.

Catatan: $\{0_M\}$ adalah **submodul terkecil** dari M dan M adalah **submodul terbesar** dari M. Jika ada submodul lain dari M, maka mereka disebut **submodul non-trivial** dari M. Setiap submodul dari M selain M disebut **submodul sejati** dari M.

Teorema 4.1.1 Suatu hipunan bagian takkosong $N \subseteq M$ dengan M adalah modul-R adalah submodul dari M bila dan hanya bila

$$r, s \in R, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in N, \quad \text{maka} \quad r\boldsymbol{u} + s\boldsymbol{v} \in N.$$

Bukti
Misalkan N submodul dari M dan

$$r, s \in R \text{ juga } \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in S,$$

maka

$$r\boldsymbol{u} \in N \text{ dan } s\boldsymbol{v} \in N.$$

Oleh karena itu,

$$r\boldsymbol{u} + s\boldsymbol{v}$$

juga di N. Sebaliknya, misalkan

$$r\boldsymbol{u} + s\boldsymbol{v} \in N$$

untuk setiap $r, s \in R$ dan $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in N$. Akan ditunjukkan bahwa N adalah subbmodul dari M modul-R. Sifat (**M1**)-(**M4**). dari M modul-R otomatis menurun ke N, begitu juga sifat*komutatif*, *assosiatif* di sifat M adalah grup komutatif terhadap operasi + menurun pada N. Selanjutnya, untuk $r = s = 1$ dan sebarang $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in S$ didapat

$$1\boldsymbol{u} + 1\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in N \text{ (tertutup).}$$

Untuk $r = s = 0$ didapat

$$0\boldsymbol{u} + 0\boldsymbol{v} = 0(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \mathbf{0}_M \in N.$$

Oleh karena itu, untuk $r = s = 1 \in R$ dan setiap $\boldsymbol{u} \in N$, didapat

$$1\,\boldsymbol{u} + 1\,\mathbf{0}_M = \boldsymbol{u} + \mathbf{0}_M = \boldsymbol{u} = \mathbf{0}_M + \boldsymbol{u} = 1\,\mathbf{0}_M + 1\,\boldsymbol{u} \in N.$$

Selanjutnya untuk $r = 1, s = -1 \in R$ dan setiap $\boldsymbol{u} \in N$ didapat

$$1\boldsymbol{u} + (-1)\boldsymbol{u} = (1 + (-1))\boldsymbol{u} = 0\boldsymbol{u} = \mathbf{0}_M$$

($\boldsymbol{u}$ punya invers yaitu $-\boldsymbol{u}$). Hal ini menujukan bahwa N terhadap operasi + adalah subgrup dari M.

□

Contoh 4.1.1

(i) Dalam Contoh 4.0.3 (i), jika $(G, +)$ adalah grup Abelian, maka G adalah modul-$\mathbb{Z}$. Submodul dari G modul-$\mathbb{Z}$ tepatnya adalah subgrupdari G. Secara khusus, $E = \{0, \pm 2, \pm 4, \ldots\}$ adalah submodul dari Z modul-$\mathbb{Z}$.

(ii) Dalam Contoh Contoh 4.0.3 (ii), setiap ring R dapat dianggap sebagai modul-R. Misalkan I adalah submodul dari R. Maka $I \subseteq R$ sedemikian sehingga $x - y \in I$ dan $rx \in I$, $\forall x, y \in I$ dan $\forall r \in R$. Akibatnya, I adalah ideal kiri dari R. Sebaliknya, misalkan I adalah ideal kiri dari R. Maka $I \subseteq R$ sedemikian sehingga $x - y \in I$ dan $rx \in I$, $\forall x, y \in I$ dan $\forall r \in R$. Jadi I adalah submodul dari R modul-R. Oleh karena itu submodul dari R modul-R tepatnya ideal kiri dari R. Akibatnya, submodul dari R modul-R (kiri) tepatnya adalah ideal kiri dari R.

Demikian juga, mengingat R sebagai modul-R kanan, submodul dari R merupakan ideal kanan dari R.

(iii) Submodul ring komutatif adalah ideal.

□

Sebagian besar operasi yang dipertimbangkan untuk grup memiliki mitra untuk modul.

Teorema 4.1.2 Bila S dan T adalah submodul dari M modul-R, maka $S \cap T$ juga submodul dari M modul-R.

Bukti Diberikan sebarang $r, s \in R$ dan sebarang $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in S \cap T$, maka dengan menggunakan Teorema 4.1.1 didapat

$$r\boldsymbol{u} + s\boldsymbol{v} \in S \quad (\text{sebab} \quad \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in S) \tag{4.2}$$

dan

$$r\boldsymbol{u} + s\boldsymbol{v} \in T \quad (\text{sebab} \quad \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in T). \tag{4.3}$$

Akibatnya, dari (4.2) dan (4.3) didapat

$$r\boldsymbol{u} + s\boldsymbol{v} \in S \cap T.$$

Dengan demikian $S \cap T$ adalah submodul dari M modul-R.

□

Teori 4.1.2 membahas irisan dari dua submodul, teorema berikut membahas irisan dari beberapa submodul.

Teorema 4.1.3 Misalkan M adalah modul-R dan $\{M_i\}_{\in I}$ adalah famili dari submodul M atas R. Maka irisan $\bigcap\limits_{i \in I} M_i$ adalah submodul dari M.

Bukti
Misalkan $A = \bigcap\limits_{i \in I} M_i$. Himpunan $A \neq \emptyset$ sebab $0_M \in M_i$, $\forall i \in I$. Selanjutnya bila $x - y \in M_i$ dan $rx \in M_i$ untuk setiap $i \in I$ dan setiap $x, y \in M_i$, $\forall r \in R$, kita mempunyai $x - y, rx \in A$. Jadi A adalah submodul dari M.

□

Catatan: Gabungan dua submodul dari suatu M modul-R pada umumnya bukanlah suatu submodul dari M. Alasannya adalah bahwa gabungan dua subgrup dalam suatu grup secara umum bukanlah suatu grup.

Contoh 4.1.2
(i) Misalkan $M_1 = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \ldots\}$ dan $M_2 = \{0, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \ldots\}$. Maka M_1 dan M_2 adalah submodul dari $\mathbb{Z}$ modul-$\mathbb{Z}$. Sekarang, $2 \in M_1 \cup M_2$ dan $3 \in M_1 \cup M_2$ tetapi $2 + 3 = 5 \notin M_1 \cup M_2$. Oleh karena itu $M_1 \cup M_2$ tidak bisa menjadi submodul dari Z modul-$\mathbb{Z}$.
(ii) Diberikan submodul $M_1 = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2\}$ dan $M_2 = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2\}$ dari $M = \mathbb{R}^2$ modul-$\mathbb{Z}$. Maka $(1, 0) \in M_1$ dan $(0, 1) \in M_2$ tetapi $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin M_1 \cup M_2$. Dengan demikian $M_1 \cup M_2$ bukan suatu subgrup dari M. Jadi, $M_1 \cup M_2$ tidak bisa menjadi suatu submodul dari M modul-$\mathbb{Z}$.

□

Latihan Buat contoh selain dalam Contoh 4.1.2 untuk menunjukkan bahwa bila S dan T adalah submodul dari M modul-$\mathbb{R}$, maka $S \cup T$ bukan submodul dari M modul-R. $\square$

Perlu diperhatikan bahwa suatu ring komutatif R dengan elemen satuan adalah suatumodul atas dirinya sendiri. Sebagaimana terlihat nanti, modul yang demikian ini menyajikan contoh yang bagus bahwa perilakunya bukan sebagai ruang vektor.

Ketika dibahas suatu ring R sebagai modul-R dari pada sebagai suatu ring, perkalian dalam R diperlakukan sebagai perkalian skalar. Hal ini mempunyai beberapa implikasi penting. Kususnya bila S adalah suatu submodul dari R, maka S harus tertutup terhadap perkalian skalar. Hal ini berarti bahwa tertutup terhadap perkalian oleh semua elemen-elemen di ring R. Dengan kata lain S adalah ideal dari R. Sebaliknya, bila $\mathcal{I}$ adalah suatu ideal dari ring R, mka $\mathcal{I}$ juga merupakan suatu modul dari modul-R. Jadi, submodul-submodul dari R modul-R adalah ideal-ideal dari ring R.

Misalkan M adlah suatu modul-R. Jika M_1 dan M_2 adalah submodul dari M, maka $M_1 \cap M_2$ adalah submodul terbesar dari M yang termuat di M_1 dan M_2.

Teorema 4.1.3 mengarah untuk menentukan submodul terkecil yang memuat himpunan bagian S tertentu (termasuk kemungkinan $S = \emptyset$) dari M modul-R.

4.2 Himpunan Pembentang

Konsep himpunan pembentang dalam ruang vektor juga terbawa dalam modul.

Definisi 4.2.1 Misalkan M adalah modul-R dan S adalah himpunan bagian dari M. Maka submodul yang **dibangun** atau **direntang** oleh S dilambangkan dengan $\langle S \rangle$ didefinisikan sebagai submodul terkecil dari M yang memuat S, yaitu $\langle S \rangle$ adalah submodul dari M diperoleh dari semua irisan submodul $M_i,\ i \in I$ dari M yang memuat S secara simbolik dituliskan sebagai

$$\langle S \rangle \overset{\text{def}}{=} \bigcap_{S \subset M_i} M_i$$

$\square$

Untuk menentukan elemen-elemen dari $\langle S \rangle$, kita memperkenalkan konsep kombinasi linier dari elemen-elemen S seperti yang didefinisikan dalam ruang vektor.

Definisi 4.2.2 Misalkan M adalah modul-R dan $S \neq \emptyset$ adalah himpunan bagian dari M. Maka elemen $x \in M$ dikatakan sebagai kombinasi linier dari elemen S bila dan hanya bila ada $x_1, x_2, \ldots, x_n \in S$ dan $r_1, r_2, \ldots, r_n \in R$ sehingga

$$x = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i. \tag{4.4}$$

Selanjutnya himpunan semua kombinasi linier dari elemen-elemen di S yang berbentuk 4.4 dinotasikan dengan $C(S)$. $\square$

Teorema 4.2.1 Misalkan M adalah modul-R yang mempunyai elemen satuan dan S adalah himpunan bagian tak-kosong dari M. Maka submodul $\langle S\rangle$ yang dibangun oleh S diberikan oleh

$$\langle S\rangle = \begin{cases} \{0_M\}, & \text{bila } S = \emptyset \\ C(S), & \text{bila } S \neq \emptyset. \end{cases}$$

Bukti
Jika $S = \emptyset$, maka submodul terkecil dari M yang memuat S adalah submodul nol $\{0_M\}$. Karenanya $\langle S\rangle = \{0_M\}$ jika $S = \emptyset$. Selanjutnya anggaplah $S \neq \emptyset$. Maka $C(S) \neq \emptyset$, sebab $1_R \in R$ dan untuk sebarang $x \in S$, $x = 1_R x \in C(S)$. Oleh karena itu $S \subseteq C(S)$. Kita akan tunjukkan bahwa $C(S)$ adalah submodul dari M. Misalkan $x, y \in C(S)$. Maka $x = \sum\limits_{i=1}^{n} r_i x_i$ dan $y = \sum\limits_{j=1}^{m} t_j y_j$ untuk beberapa $r_i, t_j \in R$ dan $x_i, y_j \in S$. Maka $x+y = \sum\limits_{i=1}^{n} rix_i + \sum\limits_{i=1}^{n} t_j y_j \in C(S)$ dan $rx = r\sum\limits_{i=1}^{n} r_i x_i = \sum\limits_{i=1}^{n}(rr_i)x_i \in C(S)$. Jadi $C(S)$ adalah submodul dari M yang memuat S. Akhirnya, misalkan N adalah sebarang submodul dari M sehingga $S \subseteq N$. Jika diberikan sebarang $x \in C(S)$, maka x dapat disajikan sebagai $x = r\sum\limits_{i=1}^{n} r_i x_i$, $r_i \in R$, $x_i \in S$. Sekarang $x_i \in S$ berakibat $x_i \in N$ dan juga $r_i x_i \in N$, $\forall i$. Akibatnya $\sum\limits_{i=1}^{n} r_i x_i \in N$, sebab N adalah submodul dari M. Jadi $x \in N$, $\forall x \in C(S)$. Dengan demikian $C(S) \subseteq N$ untuk semua submodul N dari modul M atas R dengan $S \subseteq N$. Jadi $C(S)$ adalah submodul terkecil dari M yang memuat S. Tetapi $\langle S\rangle$ juga merupakan submodul terkecil dari M yang memuat S. Akibatnya, $\langle S\rangle = C(S)$, jika $S \neq \emptyset$.

□

Definisi 4.2.3 Modul M atas R **dibentangkan** (**dibangun**) oleh himpunan bagian tak-kosong $S \subseteq M$ bila dan hanya bila $M = \langle S\rangle$ dan S dinamakan **pembangun** dari M. Secara khusus, jika $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ adalah himpunan bagian berhingga dari M sedemikian rupa sehingga $M = \langle S\rangle$, maka M dikatakan **dibangun secara berhingga oleh** S dan karenanya jika M adalah modul-R satuan, maka

$$M = \left\{ \sum_{i=1}^{n} r_i x_i \,\middle|\, r_i \in R \right\}.$$

Bila $S = \{x\}$, maka $\langle\{x\}\rangle = \langle x\rangle$ submodul yang dibangun oleh $\{x\}$ diberikan oleh

$$\langle x\rangle = \begin{cases} \{rx \mid r \in R\}, & \text{bila } M \text{ modul-}R \text{ satuan} \\ \{rx + nx \mid r \in R, n \in \mathbb{Z}\}, & \text{bila yang lainnya.} \end{cases}$$

Submodul $\langle x\rangle$ dinamakan **submodul siklik** dari M yang dibangun oleh $x \in M$ dan juga dinotasikan sebagai $Rx = \{rx \mid r \in R\}$. Jadi $Rx = \langle x\rangle$.

Bila M modul-R dibangun secara berhingga bila dan hanya bila $M = Rx_1 + Rx_2 + \cdots + Rx_n$, dimana

$$\sum_{i=1}^{n} Rx_i = \left\{ \sum_{i=1}^{n} y_i \,\middle|\, y_i \in Rx_i \right\}.$$

Dalam hal ini pembangun dari M adalah $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$.

Suatu subset tak-kosong S dari M dikatakan **bergantung secara linier** atas R bila dan hanya bila ada elemen-elemen berbeda $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \in S$ dan elemen-elemen yang tidak semuanya nol $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n \in R$ sedemikian hingga

$$r_1x_1 + r_2x_2 + r_3x_3 + \cdots + r_nx_n = 0_M.$$

Bila tidak demikian, S dikatakan **bebas linier** atas R. $\square$

Catatan:

(i) Himpunan $\{\mathbf{0}_M\}$ dan setiap himpunan bagian S (dari M) yang memuat $\mathbf{0}_M$ bergantung secara linier atas R.

(ii) Jika S bergantung secara linier atas R dan T adalah himpunan bagian dari M sehingga $S \subseteq T$, maka T juga bergantung secara linier atas R, yaitu, setiap himpunan bagian yang berisi himpunan bergantungan linier juga bergantung secara linier.

Satu hal yang penting dicatat bahwa bila suatu kombinasi linier taktrivial dari elemen-elemen $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ di M modul-R adalah sama dengan nol:

$$r_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + r_n\boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}_M$$

dimana tidak semua koefisien sama dengan $\mathbf{0}_R$, maka tidak bisa disimpulkan sebagai mana dalam ruang vektor. Yaitu elemen $\boldsymbol{v}_i$ adalah suatu kombinasi linier dari elemen lainnya, setelah dilakukan pembagian oleh satu koefisien yang mana hal ini mungkin tidak bisa dilakukan dalam suatu ring. Misalnya, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = M$ modul-$\mathbb{Z}$,

$$2(3,6) - 3(2,4) = (0,0),$$

maka tidak mungkin melakukan

$$(3,6) = \frac{3}{2}(2,4) \quad \text{juga} \quad (2,4) = \frac{2}{3}(3,6),$$

sebab $\frac{3}{2}, \frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$.

Contoh 4.2.1 Diberikan $\mathbb{Z}$ modul-$\mathbb{Z}$. Elemen $3, 4 \in \mathbb{Z}$ adalah bergantungan linier, sebab

$$4(3) - 3(4) = 0,$$

tetapi 3 bukan kombinasi linier dari 4 begitu sebaliknya. $\square$

Persoalan Contoh 4.2.1 adalah

$$r_1\boldsymbol{v}_1 + r_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + r_n\boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}_M,$$

berakibat bahwa

$$r_1\boldsymbol{v}_1 = -r_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots - r_n\boldsymbol{v}_n.$$

Tetapi, secara umum kita tidak bisa melakukan pembagian kedua sisi persamaan dengan r_1, karena mungkin r_1 tidak mempunyai invers terhadap perkalian di R.

Definisi 4.2.4 Misalkan M adalah suatu modul-R. Submodul N ($N \neq M$) dari M dikatakan **maksimal** bila dan hanya bila untuk submodul P dari M sehingga $N \subseteq P \subseteq M$, salah satu dari $P = N$ atau $P = M$, yaitu, tidak ada submodul P dari M yang memenuhi $N \subsetneq P \subsetneq M$.
□

Definisi 4.2.5 Suatu submodul N ($N = \{\mathbf{0}_M\}$) dari M dikatakan **minimal** bila dan hanya bila untuk submodul P dari M sehingga $P \subseteq N$, salah satu dari $P = \{\mathbf{0}_M\}$ atau $P = N$, yaitu satu-satunya submodul dari M yang termuat dalam N adalah $\{\mathbf{0}_M\}$ dan N.
□

Definisi 4.2.6 Suatu modul M atas-R ($M \neq \{\mathbf{0}_M\}$) dikatakan **sederhana** jika satu-satunya submodul dari M adalah $\{\mathbf{0}_M\}$ dan M sendiri.
□

Teorema 4.2.2 Misalkan M adalah suatu modul-R satuan. Maka M sederhana bila dan hanya bila untuk setiap elemen bukan nol $x \in M$, $M = Rx = \{rx \mid r \in R\}$, yaitu, bila dan hanya bila M dibangun oleh $\{x\}$ untuk setiap $x \neq \mathbf{0}_M$ di M.

Bukti
Misalkan M adalah suatu modul-R satuan sederhana. Maka untuk sebarang $x \neq \mathbf{0}_M$ di M. Kita mempunyai $x = \mathbf{1}_R x \in Rx$ akibatnya $Rx \neq \emptyset$. Selanjutnya misalkan $rx, tx \in Rx$, dimana $r, t \in R$. Maka $(rx+tx) = (r+t)x \in Rx$ dan $r(tx) = (rt)x \in Rx$. Akibatnya, Rx adalah submodul dari M. Karena untuk sebarang $x \neq \mathbf{0}_M$ di M dan $x = \mathbf{1}_R x \in Rx$, $Rx \neq \{\mathbf{0}_M\}$, dengan demikian $M \subseteq Rx$. Tetapi kita mengetahui bahwa $Rx \subseteq M$ jadi $M = Rx = \langle x \rangle$, dengan demikian M dibangun oleh $\{x \in M \mid x \neq \pm 0_M\}$.

Sebaliknya, misalkan $Rx = M$ untuk sebarang $x \in M$ dengan $x \neq \mathbf{0}_M$. Selanjutnya diberikan sebarang $N \neq \{\mathbf{0}_M\}$ adalah suatu submodul dari M. Maka ada elemen bukan nol y di N sedemikian rupa sehingga $ry \in Rx = M$, $\forall r \in R$ hal ini berakibat $ry \in N$ sebab N submodul dari M . Dengan demikian $M = Rx \subseteq N$. Karena $N \subseteq M$, maka $N = M$. Akibatnya, M adalah modul-R sederhana.
□

Kesimpulan 4.2.1 Jika R adalah suatu ring satuan, maka R adalah modul-R sederhana jika R adalah suatu ring pembagian.

Bukti
Misalkan R adalah suatu ring satuan. Maka R adalah modul satuan atas dirinya sendiri. Oleh karena itu, menurut Teorema 4.2.2, R adalah modul-R sederhana bila dan hanya bila $R = Rx$ untuk setiap $x \in R,\ x \neq \mathbf{0}_R$. Sekali lagi $\mathbf{1}_R \in Rx = R$ maka $\mathbf{1}_R = yx$ untuk beberapa $y \in R$ akibatnya x memiliki invers kiri di R. Jadi dapat disimpulkan bahwa setiap x bukan-nol di R memiliki invers kiri di R. Akibatnya, R adalah ring pembagian.

Sebaliknya, misalkan R adalah ring pembagian. Maka $\{\mathbf{0}_M\}$ dan R hanyalah ideal dari R dan ini adalah satu-satunya submodul dari R modul-R. Oleh karena itu R adalah modul sederhana atas dirinya sendiri.

□

Kesimpulan 4.2.2 Misalkan V adalah ruang vektor atas lapangan F. Maka untuk setiap elemen $x \in V,\ x \neq \mathbf{0}_V$ subruang $U_x = \{rx \mid r \in F\}$ sederhana. Secara khusus, setiap ruang vektor F atas F adalah sederhana.

□

Untuk teorema berikut menggunakan **Lemma Zorn**.

Lemma 4.2.1 *(Zorn)* Misalkan himpunan yang **terurut parsial** P memiliki sifat bahwa setiap **rantai** di P memiliki **batas atas** di P. Maka himpunan P memuat setidaknya satu **elemen maksimal**.

□

Teorema 4.2.3 Misalkan $M \neq \{\mathbf{0}_M\}$ adalah suatu modul-R yang dibangun secara berhingga. Maka setiap submodul sejati dari M termuat dalam suatu submodul maksimal dari M.

Bukti
Misalkan A adalah suatu submodul sejati dari M modul-R yang dibangun secara berhingga. Misalkan $M = \langle\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}\rangle$. Misalkan $\mathcal{D}$ adalah himpunan dari semua submodul B dari M modul-R yang memenuhi $A \subseteq B \subsetneq M$, sebagian diurutkan oleh inklusi himpunan. Maka $A \in \mathcal{D}$ akibatnya $\mathcal{D} \neq \emptyset$. Pertimbangkan rantai $\{B_i \in \mathcal{D} \mid B_i \neq M, i \in I\}$. Maka $T = \bigcup\limits_{i \in I} B_i \subset M$ adalah submodul dari M.

Kita tunjukkan bahwa bahwa T adalah submodul sejati dari M. Andaikan $T = M = \langle\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}\rangle$. Maka setiap generator x_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ akan berada di submodul B_{i_k} dari rantai $\{B_i\}_{i \in I}$. Karena hanya ada sebanyak berhingga B_{i_k}, yang satu memuat yang lainnya, sebut saja B_i. Jadi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ semua terletak pada hanya yang satu B_i ini. Akibatnya, $B_i = M$, yang tidak mungkin dilakukan kontrakdiksi dengan $B_i \neq M,\ \forall i \in I$. Jadi $T \neq M$, hal ini menunjukkan bahwa T adalah submodul sejati dari M. Sekali lagi $A \subseteq \bigcup\limits_{i \in I} B_i = T \subsetneq M$ akibatnya $T \in \mathcal{D}$. Oleh karena itu menurut **Lemma Zorn** famili $\mathcal{D}$ memuat elemen maksimal S. Maka S adalah submodul dari M dengan $A \subseteq S \subsetneq M$.

Kita tunjukkan bahwa S adalah **submodul maksimal** dari M. Untuk menunjukkan ini, Misalkan U adalah suatu submodul dari M yang memenuhi $S \subsetneq U \subseteq M$. Karena S adalah elemen maksimal dari famili $\mathcal{D}$, maka $U \notin \mathcal{D}$. Oleh karena itu, U tidak bisa menjadi submodul sejati dari M. Dengan demikian $U = M$. Ini menunjukkan bahwa S adalah **submodul maksimal** dari M yang memuat submodul sejati A dari M. □

Definisi 4.2.7 Misalkan M, N adalah modul-R (**kiri**). Maka hasil perkalian kartesian $M \times N$ adalah modul-R (**kiri**) dengan penjumlahan dan perkalian skalar yang didefinisikan dengan cara sebagaimana biasa

$$\begin{aligned} (x, y) + (s, t) &= (x + s, y + t), \qquad \text{dan} \\ r(x, y) &= (rx, ry),\ \forall (x, y), (s, t) \in M \times N \text{ dan } \forall r \in R. \end{aligned}$$

Modul $M \times N$ modul-R disebut **produk langsung** dari M dan N modul-R.

Secara lebih umum, jika $\{M_i\}_{i \in I}$ adalah suatu famili modul-R (**kiri**), maka $M = \prod\limits_{i \in I} M_i$ adalah modul-R (**kiri**) dengan cara sebagaimana biasa:

$$R \times M \to M,\ (r, (x_i)_{i \in I}) \mapsto (rx_i)_{i \in I}.$$

Modul $M = \prod\limits_{i \in I} M_i$ modul-R disebut **produk langsung** dari $\{M_i\}_{i \in I}$.

Secara khusus, $R^2 = R \times R$; $R^n = R \times R \times \cdots \times R$ (n faktor) dan $R^\infty = \prod\limits_{i=1}^{\infty} R$. □

Proposisi 4.2.1 Misalkan M adalah modul-R dan N_1, N_2 submodul dari M. Maka $N_1 + N_2 = \{n_1 + n_2 \mid n_1 \in N_1, n_2 \in N_2\}$ adalah submodul yang dibangun oleh $N_1 \cup N_2$.

Bukti

Karena $\mathbf{0}_M \in N_1 + N_2$, maka $N_1 + N_2 \neq \emptyset$. Diberikan sebarang $x, y \in N_1 + N_2$. Maka dapat dipilih $n_1, n_3 \in N_1$ dan $n_2, n_4 \in N_2$ yang memenuhi $x = n_1 + n_2$ dan $y = n_3 + n_4$. Sehingga dengan sifat komutatif dari M terhadap + dan untuk sebarang $r_1, r_2 \in R$ kita mempunyai

$$\begin{aligned} r_1 x + r_2 y &= r_1(n_1 + n_2) + r_2(n_3 + n_4) \\ &= (r_1 n_1 + r_1 n_2) + (r_2 n_3 + r_2 n_4) \\ &= (r_1 n_1 + r_2 n_3) + (r_1 n_2 + r_2 n_4) \in N_1 + N_2. \end{aligned}$$

Jadi, $N_1 + N_2$ adalah submodul dari M. Kita tunjukkan bahwa $N_1 \cup N_2 \subseteq N_1 + N_2$ dan $N_1 + N_2$ adalah **submodul terkecil** dari M yang memuat $N_1 \cup N_2$. Sekali lagi diberikan sebarang $n_1 \in N_1$ maka $n_1 = n_1 + \mathbf{0}_M \in N_1 + N_2$ akibatnya $N_1 \subseteq N_1 + N_2$. Dengan cara yang sama didapat, $N_2 \subseteq N_1 + N_2$. Akibatnya, $N_1 \cup N_2 \subseteq N_1 + N_2$. Misalkan N adalah sebarang submodul dari M yang dibangun oleh $N_1 \cup N_2$ dan misalkan sebarang $n_1 + n_2 \in N_1 + N_2$, dimana $n_1 \in N_1$ dan $n_2 \in N_2$. Oleh karena itu $N_1 \cup N_2 \subseteq N$ akibatnya $n_1, n_2 \in N$ dan $n_1 + n_2 \in N$. Dengan demikian $N_1 + N_2 \subseteq N$ dan karena $N_1 \cup N_2 \subseteq N_1 + N_2$, maka $N_1 + N_2$ adalah submodul terkecil dari M yang memuat $N_1 \cup N_2$. Akibatnya, kita mempunyai $\langle N_1 \cup N_2 \rangle = N_1 + N_2$. □

Kesimpulan 4.2.3 Jika N_1 dan N_2 adalah submodul dari M, maka $N_1 + N_2$ adalah submodul dari M yang memuat N_1 dan juga N_2. $\square$

Konsep jumlah $N_1 + N_2$ dari dua submodul M dapat digeneralisasikan untuk setiap famili $\{N_i\}_{i\in I}$ submodul dari M:

$$\sum_{i\in I} N_i = \left\{ \sum_{i\in I} n_i \;\middle|\; n_i \in N_i, n_i = \mathbf{0}_M \text{ untuk hampir semua } \; i \in I \right\}.$$

Ini adalah submodul dari M yang memuat setiap N_i, $i \in I$. Submodul $\sum\limits_{i\in I} N_i$ disebut sebagai **jumlah dari famili** submodul $\{N_i\}_{i\in I}$. Secara khusus, jika $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, maka submodul $\sum\limits_{i=1}^{n} N_i = N_1 + N_2 + \cdots + N_n$ disebut jumlah dari sebanyak n submodul $N_1, N_2, \ldots, N_n$ dari M.

Kami sekarang melanjutkan untuk mendefinisikan jumlah langsung dari dua submodul dari modul-R dalam dua cara ekivalen yang berbeda.

Definisi 4.2.8 Misalkan M dan N adalah modul-R (**kiri**). Maka $P = M \times N$ lagi-lagi suatu modul-R (**kiri**). **Jumlah langsung** dari modul M dan N yang dinotasikan dengan $M \oplus N$ didefinisikan oleh

$$M \otimes N \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, \mathbf{0}_N) + (\mathbf{0}_M, y) \mid x \in M, y \in N\} = \{(x, y) \in P \mid x \in M, y \in N\}$$

$\square$

Definisi 4.2.9 Misalkan M adalah modul-R dan A, B adalah dua submodul dari M. Maka M dikatakan sebagai **jumlah langsung** dari A dan B yang dinotasikan oleh $M = A \oplus B$ bila dan hanya bila $M = A + B$ dan $A \cap B = \{\mathbf{O}_M\}$. Jika $M = A \oplus B$, maka A dan B disebut sebagai **penjumlah langsung** dari M. Dalam hal ini A dinamakan **komplemen** dari B, begitu juga sebaliknya B dinamakan **komplemen** dari A. $\square$

Definisi 4.2.9 mengarah ke proposisi berikut.

Proposisi 4.2.2 Misalkan M adalah modul-R dan A, B adalah dua submodulnya. Maka $M = A \oplus B$ bila dan hanya bila setiap elemen $x \in M$ dapat diunkapkan secara tunggal sebagai $x = a + b$, $a \in A, b \in B$.

Bukti
$M = A \oplus B \Leftrightarrow M = A + B$ dan $A \cap B = \{\mathbf{0}_M\}$. Maka sebarang elemen $x \in M$ dapat diungkapkan sebagai $x = a + b$, $a \in A, b \in B$. Jika $x = a + b = c + d$, dimana $a, c \in A$ dan $b, d \in B$, maka $a - c = d - b \Rightarrow a - c \in A$ dan $d - b \in B$ akibatnya $a - c = d - b \in A \cap B = \{\mathbf{0}_M\}$. Jadi $a = c$ and $d = b$. Hal ini menunjukkan bahwa penulisan $x = a + b$, $a \in A, b \in B$

tunggal. Sebaliknya, misalkan penulisan sebarang elemen di $a + b = x \in M$, $a \in A, b \in B$ adalah tunggal. Hal ini berakibat $M = A + B$. Tinggal menunjukkan $A \cap B = \{\mathbf{0}_M\}$. Misalkan sebarang $x \in A \cap B$, maka ada $a \in A$ dan $b \in B$ sehingga $a + b = x = x + \mathbf{0}_M$ akibatnya $a = x, b = \mathbf{0}_M$. Juga $a + b = x = \mathbf{0}_M + x$ akibatnya $a = \mathbf{0}_M, b = x$. Jadi $x = \mathbf{0}_M$, dengan demikian $A \cap B = \{\mathbf{0}_M\}$. Karena $M = A + B$ dan $A \cap B = \{\mathbf{0}_M\}$, maka kita mempunyai jumlahan langsung $M = A \oplus B$.

□

Kesimpulan 4.2.4 Misalkan M adalah suatu modul-R dan A, B dalah dua submodul dari M. Maka $A \cap B = \{\mathbf{0}_M\}$ bila dan hanya bila setiap elemen $x \in A + B$ bisa diungkapkan secara tunggal sebagai $x = a + b$, dimana $a \in A$ dan $b \in B$.

□

Definisi 4.2.10 Suatu M modul-R disebut **jumlah langsung** dari famili submodul yang diberikan oleh $\{M_i\}_{i \in I}$ dilambangkan dengan $M = \bigoplus\limits_{i \in I} M_i$, bila dan hanya bila $M = \sum\limits_{i \in I} M_i$ dan setiap elemen $x \in M$ dapat diungkapkan secara tunggal sebagai $x = \sum\limits_{i \in I} x_i, xi \in M_i, x_i = \mathbf{0}_M$ kecuali hanya untuk berhingga i. Suatu modul bukan-nol M dikatakan **semi-simple** jika dapat diuraikan/didekomposisi menjadi jumlah langsung dari suatu famili submodul minimal M.

□

Jelas, ring lokal adalah semisimple jika ia adalah ring pembagian.

Catatan 1: Umumnya, $\bigoplus\limits_{i \in I} M_i \subseteq \prod\limits_{i \in I} M_i$, persamaan dipenuhi bila dan hanya bila I adalah suatu himpunan berhingga.

Catatan 2: **Catatan 1** menunjukkan bahwa Definisi 4.2.8 dan Definisi 4.2.9 adalah ekivalen.

Definisi 4.2.11 Submodul A dari M modul-R dikatakan sebagai **penjumlah langsung** dari M jika ada submodul B dari M sehingga $M = A \oplus B$. Submodul B dari M tersebut, disebut **suplemen** atau **komplemen** dari A dalam M.

□

Catatan:

(i) Setiap subruang dari ruang hasilkali dalam adalah **penjumlah langsung**.

(ii) Setiap submodul dari suatu modul secara umum tidak merupakan penjumlah langsung.

(iii) Jika submodul dari modul M adalah **penjumlah langsung**, suplemennya di M mungkin tidak tunggal.

(iv) Pertimbangkan $\mathbb{Z}$ modul-$\mathbb{Z}$. Subgrup bukan nol $\langle n \rangle$ dari $\mathbb{Z}$ bukan **penjumlah langsung**, karena **suplemen** yang merupakan siklik tak hingga harus isomorpik dengan grup kuasi $Z/\langle n \rangle ? = \mathbb{Z}_n$, yang tidak mungkin.

(v) Perhatikan ruang vektor $\mathbb{R}^2$ atas $\mathbb{R}$. Misalkan ℓ, m, n adalah tiga garis berbeda di $\mathbb{R}^2$ melalui titik asal $(0, 0)$. Maka ℓ, m, n adalah subruang dari $\mathbb{R}^2$ sedemikian sehingga m dan n adalah suplemen dari ℓ dalam $\mathbb{R}^2$. Oleh karena itu bila $m \neq n$ maka suplemen ℓ tidak tunggal.

Teorema 4.2.4 Misalkan M adalah suatu modul-R dan $s(M)$ adalah himpunan semua submodul dari M. Maka $s(M)$ adalah **lattice-modular** terhadap himpunan **inklusi**.

Bukti
Misalkan M adalah modul-R dan P, Q adalah submodul dari M. Maka $P + Q$ adalah submodul terkecil dari M yang memuat P dan Q, yaitu $P \subseteq P + Q$ dan $Q \subseteq P + Q$. Sekali lagi, $P \cap Q$ adalah submodul terbesar dari M yang termuat dalam P dan Q, yaitu, $P \cap Q \subseteq P$ dan $P \cap Q \subseteq Q$. Jadi dalam himpunan $s(M)$ dari semua submodul M, sebagian diurutkan oleh himpunan inklusi, setiap pasang elemen P dan Q memiliki $P + Q$ sebagai **lub** (atau **supremum**) dan $P \cap Q$ sebagai **glb** (atau **infimum**), yaitu gabungannya (**joint**) $P \vee Q = P + Q$ dan pertemuaannya (**meet**) $P \wedge Q = P \cap Q$. Oleh karena itu $s(M)$ adalah **lattice** terhadap himpunan **inklusi**. Selanjutnya kita tunjukkan bahwa **lattice** ini **modular**. Misalkan P, Q, N adalah submodul dari M sehingga $N \subseteq P$. Maka kita membuktikan bahwa $P \cap (Q + N) = (P \cap Q) + N$. Sekarang $N \subseteq P \Rightarrow P + N = P$. Sekali lagi, $(P \cap Q) + N \subseteq P + N$ dan $(P \cap Q) + N \subseteq Q + N \Rightarrow (P \cap Q) + N \subseteq (P + N) \cap (Q + N) = P \cap (Q + N)$. Untuk membuktikan inklusi sebaliknya, misalkan sebarang $x \in P \cap (Q + N)$. Maka $x \in P$ dan $x \in Q + N$. Maka ada $q \in Q$ dan $n \in N$ sehingga $x = q + n$. Karena $N \subseteq P$, kita memiliki $n \in P$ dan karenanya $q = x - n \in P$. Akibatnya, $q \in P \cap Q$. Oleh karena itu $x = q + n \in (P \cap Q) + N$. Jadi $P \cap (Q + N) \subseteq (P \cap Q) + N$. Oleh karena itu, $P \cap (Q + N) = (P \cap Q) + N$.

□

4.3 Elemen-elemen Torsi

Dalam suatu ruang vektor atas suatu lapangan F, himpunan $\{\boldsymbol{v}\} \subset V$ dengan $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}_V$ adalah bebas linier atau dengan kata yang lain untuk $r \neq 0_R$ dan $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}_V$ berakibat bahwa $r\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}_V$. Apapun hal ini, dalam suatu modul tidak selalu demikian.

Contoh 1 Himpunan bilangnan bulat modulo n, $\mathbb{Z}_n$ adalah $\mathbb{Z}$-modul dengan perkalian skalar didefinisikan oleh $m\,[a]_n$ untuk semua $m \in \mathbb{Z}$ dan semua $[a]_n \in \mathbb{Z}_n$. Tetapi, karena

$$n\,[a]_n = [0]_n, \quad \text{untuk semua} \quad [a]_n \in \mathbb{Z}_n,$$

maka himpunan $\{[a]_n\}$ bukan bebas linier. Bahkan sungguh $\mathbb{Z}_n$ tidak mempunyai himpunan bagian dengan satu elemen yang bebas linier.

□

Contoh 1 memotifasi pengertian berikut.

Definisi 4.3.1 Misalkan M adalah modul-R. Suatu elemen taknol $\boldsymbol{v} \in M$ yang memenuhi $r\boldsymbol{v} = \mathbf{0}_M$ untuk beberapa elemen taknol $r \in R$ dinamakan suatu **elemen torsi** dari M. Bila semua elemen dari M adalah elemen torsi, maka M dinamakan suatu **modul torsi**. Himpunan semua elemen torsi dari M bersama-sama dengan elemen nol $\mathbf{0}_M$ dinotasikan oleh M_{tor}. Bila dalam suatu modul M atas R tidak mempunyai elemen torsi dikatakan **bebas torsi**.

□

Perhatikan bahwa bila M adalah suatu modul atas suatu daerah integral, maka M_{tor} adalah submodul dari M dan M/M_{tor} adalah bebas torsi. Hal ini ditunjukkan dalam teorema berikut

Teorema 4.3.1 Diberikan M adalah suatu modul atas suatu daerah intgral R. Maka M_{tor} adalah submodul dari M dan M/M_{tor} adalah bebas torsi.

Bukti

Diberikan sebarang elemen $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in M_{\text{tor}}$ dan sebarang elemen $r_1, r_2 \in R$ dan pilih elemen tak nol $r, s \in R$ yang memenuhi $r\boldsymbol{v}_1 = \mathbf{0}_M$ dan $s\boldsymbol{v}_2 = \mathbf{0}_M$. Sehingga didapat

$$\begin{aligned}(rs)(r_1\boldsymbol{v}_1 + r_2\boldsymbol{v}_2) &= (rs)(r_1\boldsymbol{v}_1) + (rs)(r_2\boldsymbol{v}_2)\\ &= (sr_1)(r\boldsymbol{v}_1) + (rr_2)(s\boldsymbol{v}_2)\\ &= (sr_1)(\mathbf{0}_M) + (rr_2)(\mathbf{0}_M)\\ &= \mathbf{0}_M.\end{aligned}$$

Hal ini berakibat bahwa $r_1\boldsymbol{v}_1 + r_2\boldsymbol{v}_2 \in M_{\text{tor}}$, jadi M_{tor} adalah submodul dari M. Selanjutnya ditunjukkan bahwa M/M_{tor} adalah bebas torsi. Diberikan sebarang $\boldsymbol{v} + M_{\text{tor}}$ di M/M_{tor} dan misalkan elemen taknol $r \in R$ yang memenuhi $r(\boldsymbol{v} + M_{\text{tor}}) = M_{\text{tor}}$. Maka $r\boldsymbol{v} \in M_{\text{tor}}$. Selanjutnya pilih elemen taknol $s \in R$ yang memenuhi $s(r\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}_M$. Tetapi $s(r\boldsymbol{v}) = (rs)\boldsymbol{v}$. Karena R adalah daerah integral maka $rs \neq 0_R$, jadi $\boldsymbol{v} \in M_{\text{tor}}$. Dengan demikian $\boldsymbol{v} + M_{\text{tor}} = M_{\text{tor}}$, jadi elemen torsi di M/M_{tor} hanyalah elemen nol M_{tor}. Akibatnya M/M_{tor} adalah bebas torsi.

□

Annihilator

Pengertian yang cukup dekat dengan suatu elemen torsi adalah suatu yang dinamakan *annihilator*.

Definisi 4.3.2 Misalkan M adalah modul-R. **Annihilator** dari suatu elemen $\boldsymbol{v} \in M$ adalah himpunan

$$\text{ann}(\boldsymbol{v}) = \{r \in R \,|\, r\boldsymbol{v} = \mathbf{0}_M\}$$

dan **annihilator** dari suatu submodul N dari modul M adalah

$$\text{ann}(N) = \{r \in R \,|\, rN = \{\mathbf{0}_M\}\} \subset R,$$

dimana $rN = \{r\boldsymbol{v} \,|\, \boldsymbol{v} \in N\}$. Annihilator juga disebut **order ideal**.

□

Teorema 4.3.2 Diberikan M adalah modul-R, maka untuk sebarang tetap $\boldsymbol{v} \in M$ himpunan
$$\text{ann}(\boldsymbol{v}) = \{r \in R \,|\, r\boldsymbol{v} = \mathbf{0}_M\}$$
adalah suatu ideal dari R.

Bukti
Misalkan sebarang $r \in R$ dan sebarang $i \in \text{ann}(\boldsymbol{v})$ didapat
$$(ri)\boldsymbol{v} = r(i\boldsymbol{v}) = r.\mathbf{0}_M = \mathbf{0}_M \;\Rightarrow\; ri \in \text{ann}(\boldsymbol{v})$$
juga
$$(ir)\boldsymbol{v} = (ri)\boldsymbol{v} = r(i\boldsymbol{v}) = r.\mathbf{0}_M = \mathbf{0}_M \;\Rightarrow\; ir \in \text{ann}(\boldsymbol{v}).$$
Jadi ann($\boldsymbol{v}$) adalah ideal dari R.

□

Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan bahwa ann(N) adalah ideal dari R. Jelas bahwa, $\boldsymbol{v} \in M$ adalah suatu elemen torsi bila dan hanya bila $\text{ann}(\boldsymbol{v}) \neq \{\mathbf{0}_M\}$. Juga, bila A dan B adalah submodul dari M, maka
$$A \leq B \Rightarrow \text{ann}(B) \leq \text{ann}(A)$$

Contoh 4.3.1 Diberikan $\mathbb{Z}_3 = \{[0]_3, [1]_3, [2]_3\}$ adalah modul atas $\mathbb{Z}$. Misalkan akan ditentukan ann($[1]_3$). Karena diberikan $n \in \mathbb{Z}$ yang memenuhi $n[1]_3 = [n]_3 = [0]_3$, maka haruslah $3|n$. Jadi $\text{ann}([1]_3) = 3\mathbb{Z}$. Juga untuk $m \in \mathbb{Z}$ yang memenuhi $m[2]_3 = [2m]_3 = [0]_3$, maka haruslah $3|2m$ dan karena 2 adalah prima hal ini berakibat $3|m$. Jadi $\text{ann}([2]_3) = 3\mathbb{Z}$.

□

Bab 5

Homomorpisma Modul

Pada bab ini dibahas suatu topik yang sangat penting dalam aljabar struktur berkaitan dengan apa yang dinamakan dengan homomorspisma modul atas suatu ring.

5.1 Homomorpisma Modul atas suatu Ring

Pemetaan mempertahankan struktur, yang disebut **homomorpisma**, memainkan peran penting dalam teori grup dan juga teori ring. Ini adalah tugas penting dan mendasar untuk memperluas konsep ini ke teori modul.

Definisi 5.1.1 . Misalkan M dan N adalah modul-R. Suatu pemetaan $f : M \to N$ dinamakan suatu **homomorpisma modul** atau **homomorpisma modul**-R bila memenuhi

(i) $f(x+y) = f(x) + f(y),\ \forall x, y \in M$;

(ii) $f(rx) = rf(x),\ \forall r \in R, \forall x \in M$.

Pernyataan **(i)** dan **(ii)** bisa digabung menjadi satu sebagai berikut: Misalkan M dan N adalah modul-R. Suatu pemetaan $f : M \to N$ dinamakan suatu **homomorpisma modul** atau **homomorpisma modul**-R bila memenuhi

$$f(r_1\boldsymbol{m}_1 + r_2\boldsymbol{m}_2) = r_1 f(\boldsymbol{m}_1) + r_2 f(\boldsymbol{m}_2), \quad \text{untuk semua} \quad r_1, r_2 \in R \quad \text{dan} \quad \boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2 \in M.$$

Secara khusus, jika R adalah suatu **lapangan**, maka homomorpisma-R seperti biasa disebut **transformasi linier** dari ruang vektor. Modul **homomorpisma** dengan karakter khusus, membawa nama khusus, seperti **homomorpisma grup** khusus. □

Definisi 5.1.2 Misalkan $f : M \to N$ adalah homomorpisma modul-R. Maka f disebut sebagai

(i) **monomorpisma modul**-R bila dan hanya bila f **injektif** (**satu-satu**);

(ii) epimorpisma modul-R bila dan hanya bila f **surjektif** (**pada**);

(iii) isomorpisma modul-R bila dan hanya bila f **bijektif** (**satu-satu pada**) dan dalam hal ini dikatakan M dan N **isomorpik** dan dinotasikan sebagai $M \cong N$;

(iv) endomorpisma modul-R bila dan hanya bila $M = N$, yaitu bila dan hanya bila f adalah suatu homomorpisma modul-R dari M pada dirinya sendiri;

(v) automorpisma modul-R bila dan hanya bila $M = N$ dan f adalah suatu isomorpisma modul-R.

□

Untuk saat ini, jika kita melupakan perkalian skalar pada M, maka f dianggap homomorpisma grup $f : (M, +) \to (N, +)$. Karenanya ia mempertahankan **nol terhadap tambah** dan **invers terhadap tambah**. Lebih tepatnya kita mempunyai proposisi berikut.

Proposisi 5.1.1 Jika $f : M \to N$ adalah homomorpisma modul-R, maka $f(\mathbf{0}_M) = \mathbf{0}_N$ dan $f(-x) = -f(x),\ \forall x \in M$.

Bukti

$$f(\mathbf{0}_M) = f(\mathbf{0}_M + \mathbf{0}_M) = f(\mathbf{0}_M) + f(\mathbf{0}_M),$$

kedua ruas persamaan ditambah dengan $-f(\mathbf{0}_M)$ dan gunakan sifat assosiatif, didapat $f(\mathbf{0}_M) = \mathbf{0}_N$. Selanjutnya,

$$f(x) + f(-x) = f(x + (-x)) = f(\mathbf{0}_M) = \mathbf{0}_N,$$

kedua ruas persamaan ditambah dengan $-f(x)$ dan gunakan sifat assosiatif didapat: $f(-x) = -f(x),\ \forall x \in M$.

□

Definisi 5.1.3 Himpunan semua homomorpisma modul dari M ke N atas R dinotasikan oleh $\hom_R(M, N)$. Jadi

$$\hom_R(M, N) \stackrel{\text{def}}{=} \{f : M \to N \mid f \text{ adalah homomorpisma modul-}R\}$$

Bila $f \in \hom_R(M, N)$, maka himpunan

$$\ker(f) \stackrel{\text{def}}{=} \{m \in M \mid f(m) = \mathbf{0}_N\} \subseteq M$$

dinamakan **kernel** dari f. Sedangkan himpunan

$$\text{im}(f) \stackrel{\text{def}}{=} \{n \in N \mid n = f(m),\ \text{untuk beberapa } m \in M\} \subseteq N$$

dinamakan **image** dari f atau **peta** dari f.

□

Teorema 5.1.1 Bila $f \in \hom_R(M,N)$, maka $\ker(f)$ adalah submodul dari M. Selanjutnya bila f adalah monomorpisma modul-R bila dan hanya bila $\ker(f) = \{\mathbf{0}_M\}$. Tambahan pula bila $A \subseteq M$ adalah suatu submodul dari M, maka $f(A)$ adalah suatu submodul dari N.

Bukti
Misalkan diberikan sebarang $m_1, m_2 \in \ker(f)$ dan sebarang $r_1, r_2 \in R$, didapat

$$f(r_1 m_1 + r_2 m_2) = r_1 f(m_1) + r_2 f(m_2) = r_1 \cdot \mathbf{0}_N + r_2 \cdot \mathbf{0}_N = \mathbf{0}_N + \mathbf{0}_N = \mathbf{0}_N.$$

Jadi $r_1 m_1 + r_2 m_2 \in \ker(f), \forall m_1, m_2 \in \ker(f),\ \forall r_1, r_2 \in R$. Dengan demikian berdasarkan Teorema 4.1.1, $\ker(f)$ adalah submodul dari M atas R.

Berikutnya, misalkan bahwa f adalah monomorpisma modul-R dan m sebarang elemen di $\ker(f)$, kita mempunyai $f(m) = \mathbf{0}_N$. Berdasarkan Proposisi 5.1.1 kita mempunyai didapat $f(\mathbf{0}_M) = \mathbf{0}_N$ dan karena f adalah satu-satu, maka haruslah $m = \mathbf{0}_M$. Jadi $\ker(f) = \{\mathbf{0}_M\}$. Sebaliknya, misalkan $\ker(f) = \{\mathbf{0}_M\}$. Diberikan sebarang $m_1, m_2 \in M$ yang memenuhi $f(m_1) = f(m_2)$. Maka kita mempunyai

$$\mathbf{0}_N = f(m_1) - f(m_2) = f(m_1) + f(-m_2) = f(m_1 - m_2).$$

Terlihat bahwa $m_1 - m_2 \in \ker(f) = \{\mathbf{0}_M\}$. Jadi, $m_1 - m_2 = \mathbf{0}_M$ atau $m_1 = m_2$ dengan demikian f adalah satu-satu. Jadi f adalah monomorpisma modul-R.

Selanjutnya, misalkan A adalah sebarang submodul dari M. Kita tunjukkan bahwa $f(A) = \{b \in N \mid b = f(a), \text{ untuk semua } a \in A\} \subseteq N$ merupakan submodul dari N. Diberikan sebarang $x, y \in f(A)$, maka $x = f(a), y = f(b)$ untuk beberapa $a, b \in A$, Sehingga untuk sebarang $r_1, r_2 \in R$ didapat

$$\begin{aligned} r_1 x + r_2 y &= r_1 f(a) + r_2 f(b) \\ &= f(r_1 a + r_2 b) \in f(A) \text{ (sebab } A \text{ submodul dari } M \text{ dan } r_1 a + r_2 b \in A). \end{aligned}$$

Jadi $f(A)$ adalah submodul dari N.

□

Latihan: Tunjukkan bahwa bila $f \in \hom_R(M,N)$, maka $\mathrm{im}(f)$ adalah submodul dari N modul-R.

□

Contoh 5.1.1

(i) Setiap homomorpisma grup Abelian adalah homomorpisma modul-$\mathbb{Z}$. Untuk menunjukkan ini misalkan M dan N adalah grup Abelian. Maka M dan N dianggap sebagai modul-$\mathbb{Z}$. Misalkan $f : M \to N$ adalah homomorpisma grup. Maka $f(nx) = nf(x)$ dengan induksi pada $n \in \mathbb{N}^+$. Jelasnya, $f(nx) = nf(x),\ \forall n \in \mathbb{Z}$. Oleh karena itu, f adalah homomorpisma modul-$\mathbb{Z}$.

(ii) Misalkan M adalah suatu modul-R. Maka pemetaan identitas $\mathbf{1}_M : M \to M$ adalah automorpisma-modul-R.

(iii) Misalkan M adalah modul-R dan n adalah bilangan bulat positif. Maka pemetaan $p_t : M^n \to M$, didefinisikan oleh

$$p_t(x_1, x_2, \ldots, x_t, \ldots, x_n) = x_t,\ \forall (x_1, x_2, \ldots, x_t, \ldots, x_n) \in M^n$$

adalah epimorpisma modul-R, disebut proyeksi ke-t pemtaan dari M^n ke M; di sisi lain, pemetaannya $i_t : M \to M^n$, didefinisikan oleh $i_t(x) = (0, 0, \ldots, x, \ldots, 0)$ adalah monomorpisma modul-R, disebut pemetaan injeksi ke-t, untuk $t = 1, 2, \ldots, n$, di mana x berada di posisi ke-t.

(iv) Pemetaan $f : M_n(R) \to R$, didefinisikan oleh $f(A) = \text{trace}(A)$, $\forall A \in M_n(R)$ **trace** dari matriks persegi A berorde n atas R, adalah homomorpisma modul-R.

(v) Misal $S_n(R) = \{A \in M_n(R) \mid A \text{ simetri}\}$. Maka pemetaan $f : M_n(R) \to S_n(R)$, didefinisikan oleh $f(A) = A + A^t$, $\forall A \in M_n(R)$ merupakan epimorphisma modul-R, dimana A^t adalah matriks transpose dari A.

□

Seperti homomorpisma grup, kita dapat mendefinisikan komposisi homomorpisma modul-R yang memiliki sifat berikut:

Proposisi 5.1.2 Jika $f : M \to N$ dan $g : N \to P$ adalah homomorpisma modul-R, maka pemetaan komposisinya $g \circ f : M \to P$, didefinisikan oleh $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, $\forall x \in M$ juga merupakan homomorpisma modul-R yang memenuhi sifat-sifat berikut:

(a) f dan g adalah epimorpisma modul-R berakibat $g \circ f$ juga epimorpisma modul-R;

(b) f dan g adalah monomorpisma modul-R berakibat $g \circ f$ juga monomorpisma modul-R;

(c) $g \circ f$ adalah suatu epimorpisma modul-R berakibat g juga epimorpisma modul-R;

(d) $g \circ f$ adalah suatu monomorpisma modul-R berakibat f is juga monomorpisma modul-R.

Bukti

Untuk sebarang $x, y \in M$ dan sebarang $r, s \in R$, kita mempunyai

$$\begin{aligned} g \circ f(rx + sy) &= g(f(rx + sy)) \\ &= g(rf(x) + sf(y)) \\ &= rg(f(x)) + sg(f(y)) \\ &= r(g \circ f)(x) + s(g \circ f)(y). \end{aligned}$$

Jadi, $g \circ f$ adalah homomorpisma modul-R.

(a)-(d): Kerjakan sebagai latihan!

□

Proposisi 5.1.3 Misalkan M dan N adalah modul-R dan $f : M \to N$ adalah homomorpisma modul-R. Maka untuk sebarang submodul B dari N, himpunan $f^{\leftarrow}(B)$ didefinisikan oleh

$$f^{\leftarrow}(B) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in M \mid f(x) \in B\} \subseteq M$$

adalah submodul dari N atas R.

Bukti

Himpunan $f^{\leftarrow}(B) \neq \emptyset$. Sebab, berdasarkan Proposisi 5.1.1 kita mempunyai $f(\mathbf{0}_M) = \mathbf{0}_N \in B$, jadi $\mathbf{0}_M \in f^{\leftarrow}(B)$. Selanjutnya, misalkan sebarang $x, y \in f^{\leftarrow}(B)$ dan sebarang $r, s \in R$, maka $f(x), f(y) \in B$. Sehingga didapat $rf(x) + sf(y) \in B$ atau $f(rx + sy) \in B$. Akibatnya, $rx + sy \in f^{\leftarrow}(B)$. Jadi $f^{\leftarrow}(B)$ adalah submodul dari M atas R. □

Proposisi 5.1.4 Misalkan $f : M \to N$ adalah suatu homomorpisma modul-R, maka

(a) Bila A adalah suatu submodul dari M atas R, maka $f^{\leftarrow}(f(A)) = A + \ker(f)$.

(b) Bila B adalah suatu submodul dari N, maka $f(f^{\leftarrow}(B)) = B \cap \mathrm{Im}(f)$.

Bukti

(a) Diberikan sebarang $x \in A$ maka $f(x) \in f(A)$. Akibatnya $x \in f^{\leftarrow}(f(A))$. Jadi $A \subseteq f^{\leftarrow}(f(A))$. Sekali lagi, diberikan sebarang $y \in \ker(f)$ maka $f(y) = \mathbf{0}_N = f(\mathbf{0}_M) \in f(A)$. Akibatnya $y \in f^{\leftarrow}(f(A))$. Jadi $\ker(f) \subseteq f^{\leftarrow}(f(A))$. Berdasarkan Proposisi 5.1.3 $f^{\leftarrow}(f(A))$ adalah submodul dari M atas R, maka $A + \ker(f) \subseteq f^{\leftarrow}(f(A))$. Untuk mendapatkan inklusi yang sebaliknya, misalkan diberikan sebarang $x \in f^{\leftarrow}(f(A))$. Maka $f(x) \in f(A)$. Akibatnya $f(x) = f(a)$ untuk setidaknya satu elemen $a \in A$ dan $f(x-a) = f(x) - f(a) = \mathbf{0}_N$. Jadi $x - a \in \ker(f)$, akibatnya $x \in a + \ker(f) \subseteq A + ker(f)$. Dengan demikian $f^{\leftarrow}(f(A)) \subseteq A + \ker(f)$. Oleh karena itu, $f^{\leftarrow}(f(A)) = A + \ker(f)$.

(b) Diberikan sebarang $a \in f(f^{\leftarrow}(B))$, maka $a = f(x)$ untuk setidaknya satu elemen $x \in f^{\leftarrow}(B)$. Jadi $f(x) \in B$ akibatnya $a \in B$. Jadi $f(f^{\leftarrow}(B)) \subseteq B$. Selain itu, $f(f^{\leftarrow}(B)) \subseteq f(M)$. Jadi $f(f^{\leftarrow}(B)) \subseteq \mathrm{Im}(f)$. Oleh karena itu $f(f^{\leftarrow}(B)) \subseteq B \cap \mathrm{Im}(f)$. Untuk inklusi sebaliknya, misalkan sebarang $y \in B \cap \mathrm{im}(f)$. Maka $y \in B$ dan $y \in \mathrm{Im}(f)$. Sekarang $y \in \mathrm{Im}(f)$ maka $y = f(m)$ untuk beberapa $m \in M$. Akibatnya, $f(m) = y \in B$. Jadi, $m \in f^{\leftarrow}(B)$, dengan demkian $f(m) \in f(f^{\leftarrow}(B))$ akibatnya juga $y \in f(f^{\leftarrow}(B))$. Maka dari itu $B \cap \mathrm{im}(f) \subseteq f(f^{\leftarrow}(B))$. Oleh karena itu, $f(f^{\leftarrow}(B)) = B \cap \mathrm{im}(f)$. □

Kesimpulan 5.1.1

(a) Bila $f : M \to N$ adalah suatu monomorpisma modul-R dan A adalah suatu submodul dari M, maka $f^{\leftarrow}(f(A)) = A$.

(b) Bila $f : M \to N$ adalah suatu epimorpisma modul-R dan B adalah suatu submodul dari N, maka $f(f^{\leftarrow}(B)) = B$. □

Teorema 5.1.2 *(**Lemma Schur.**)* Misalkan M, N adalah modul-R. Maka

(a) bila M adalah modul-R sederhana, maka homomorpisma modul-R bukan-nol $f : M \to N$ adalah monomorpisma modul-R;

(b) bila N adalah suatu modul modul-R sederhana, maka setiap homomorpisma modul-R bukan-nol $f : M \to N$ adalah suatu epimorpisma modul-R;

(c) bila M adalah suatu modul-R sederhana, maka $\text{End}(M)$ adalah suat ring pembagian.

Bukti

(a) Himpunan $\ker(f)$ adalah submodul dari M modul-R. Karenanya, bila M sederhana, maka salah satu dari $\ker(f) = \{\mathbf{0}_M\}$ atau $\ker(f) = M$. Karena f bukan nol, maka $\ker(f) \neq M$. Dengan demikian $\ker(f) = \{\mathbf{0}_M\}$, jadi f adalah suatu monomorpisma modul-R.

(b) Himpunan $\text{Im}(f)$ adalah suatu submodul dari N modul-R. Oleh karena itu bila N sederhana, maka salah satu dari $\text{im}(f) = N$ atau $\text{Im}(f) = \{\mathbf{0}_N\}$. Karena f bukan nol, maka $\text{Im}(f) \neq \{\mathbf{0}_N\}$. Oleh karena itu $\text{Im}(f) = N$. Jadi f adalah epimorpisma modul-R.

(c) Secara khusus, misalkan $f : M \to M$ adalah homomorpisma modul-R bukan nol. Oleh karena itu bila M sederhana berdasarkan **(a)** dan **(b)** f adalah automorpisma modul-R. Jadi f mempunyai invers di dalam ring $\text{End}(M)$. Akibatnya $\text{End}(M)$ adalah ring pembagian.

$\square$

Definisi 5.1.4 Misalkan R adalah suatu ring komutatif dan M adalah modul-R. Maka untuk setiap $r \in R$ tetapi tetap, ada suatu endomorpisma modul-R $f_r : M \to M$, didefinisikan oleh $f_r(x) = rx$, $\forall x \in M$, dalam hal ini f_r disebut ***homothecy*** yang ditentukan berdasarkan r.

$\square$

Proposisi 5.1.5 Himpunan

$$H = \{f_r \mid r \in R \text{ dan } f_r \text{ adalah homothecy yang ditentukan berdasarkan } r\}$$

adalah subring dari ring $\text{End}(M)$.

Bukti

Pertimbangkan pemetaan $\psi : R \to \text{End}(M)$, didefinisikan oleh $\psi(r) = f_r$, $\forall r \in R$, dimana $f_r : M \to M$ didefinisikan oleh $f_r(x) = rx$, $\forall x \in M$. Sehingga untuk sebarang $r, s \in R$, kita mempunyai $f_{r+s}(x) = (r+s)x = rx + sx = f_r(x) + f_s(x)$, $\forall x \in M$. Jadi $f_{r+s} = f_r + f_s$. Juga $f_{rs}(x) = (rs)x = r(sx) = f_r(sx) = f_r f_s(x)$, $\forall x \in M$. Jadi $f_{rs} = f_r f_s$. Maka $\psi(r+s) = f_{r+s} = f_r + f_s = \psi(r) + \psi(s)$ dan $\psi(rs) = f_{rs} = f_r f_s = \psi(r)\psi(s)$, $\forall r, s \in R$, akibatnya ψ adalah homomorpisma ring. Jadi $H = \psi(R)$ adalah subring dari $\text{End}(M)$.

$\square$

Diberikan M modul-R dan endomorpisma modul-R $f : M \to M$, dapatkah kita mengungkapkan M sebagai jumlah langsung dari $\text{Im}(f)$ dan $\ker(f)$? Penyelesaian dari contoh berikut memberikan jawabannya.

Contoh 5.1.2 Misalkan $f : M \to M$ adalah suatu endomorpisma modul-R sehingga $f \circ f = f$. Apakah $M = \text{Im}(f) \oplus \ker(f)$ benar?

Jawab
Sebagaimana telah diketahui $\ker(f)$ dan $\text{Im}(f)$ keduanya adalah submodul dari M. Maka $\text{Im}(f)+\ker(f) \subseteq M$. Sekarang kita tunjukkan bahwa $\text{Im}(f)\oplus\ker(f) = M$. Untuk sebarang $m \in M$, maka $m = f(m) + (m - f(m))$. Sekali lagi $f(m - f(m)) = f(m) - (f \circ f)(m) = f(m) - f(m) = \mathbf{0}_M$. Akibatnya $m - f(m) \in \ker(f)$. Jadi, $m \in \text{Im}(f) + \ker(f)$. Dengan demikian $M \subseteq \text{Im}(f) + \ker(f)$. Oleh karena itu $M = \text{Im}(f) + \ker(f)$. Sekali lagi diberikan sebarang $x \in \text{Im}(f) \cap \ker(f)$, maka $f(x) = \mathbf{0}_M$ dan ada $y \in M$ sehingga $x = f(y)$. Sekarang $f(f(y)) = f(x) = \mathbf{0}_M$. Akibatnya $(f \circ f)(y) = \mathbf{0}_M$. Jadi $f(y) = \mathbf{0}_M$, dengan demikian $x = \mathbf{0}_M$. Jadi, $\text{Im}(f) \cap \ker(f) = \{\mathbf{0}_M\}$. Akibatnya kita mempunyai $M = \text{Im}(f) \oplus \ker(f)$. □

5.2 Modul Kuasi

Misalkan R adalah suatu ring komutatif dan mempunyai elemen satuan serta M adalah modul-R. Bila N adalah suatu submodul dari M dan suatu relasi $\sim$ di M didefinisikan sebagai berikut. Untuk setiap $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in M$, maka $\boldsymbol{u} \sim \boldsymbol{v}$ bila dan hanya bila $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} \in N$. Relasi $\sim$ memenuhi

1. **Refleksif** : Untuk setiap $\boldsymbol{u} \in M$ belaku $\boldsymbol{u} \sim \boldsymbol{u}$, sebab $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u} = \mathbf{0}_M \in N$.

2. **Simetri** : Bila $\boldsymbol{u} \sim \boldsymbol{v}$, maka $\boldsymbol{v} \sim \boldsymbol{u}$. Sebab bila $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} \in N$, maka $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u} = -(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) \in N$.

3. **Transitif** : Bila $\boldsymbol{u} \sim \boldsymbol{v}$ dan $\boldsymbol{v} \sim \boldsymbol{w}$, maka $\boldsymbol{u} \sim \boldsymbol{w}$. Sebab bila $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} \in N$ dan $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} \in N$, didapat
$$\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w} = (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}) \in N.$$

Jadi relasi $\sim$ pada M adalah relasi ekivalen. Klas ekivalen dari suatu elemen $\boldsymbol{u}$ adalah himpunan koset
$$\boldsymbol{u} + N = \{\boldsymbol{u} + \boldsymbol{n} \,|\, \boldsymbol{n} \in N\}.$$

Notasi M/N menyatakan himpunan semua klas ekivalen pada M relatif terhadap N adalah
$$M/N = \{\boldsymbol{u} + N \,|\, \boldsymbol{u} \in M\}.$$

Teorema 5.2.1 Misalkan M adalah modul-R dan N adalah submodul dari M. Maka untuk setiap $\boldsymbol{u}+N, \boldsymbol{v}+N$ di M/N berlaku salah satu dari $(\boldsymbol{u}+N)\cap(\boldsymbol{v}+N)=\emptyset$ atau $\boldsymbol{u}+N=\boldsymbol{v}+N$.

Bukti Untuk $(\boldsymbol{u}+N)\cap(\boldsymbol{v}+N)=\emptyset$ tidak adalagi yang perlu dibuktikan. Selanjutnya bila $(\boldsymbol{u}+N)\cap(\boldsymbol{v}+N)\neq\emptyset$, harus dibuktikan bahwa $\boldsymbol{u}+N=\boldsymbol{v}+N$. Diberikan $\boldsymbol{x}\in(\boldsymbol{u}+N)\cap(\boldsymbol{v}+N)$, pilih $\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\in N$ yang memenuhi

$$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}=\boldsymbol{n}_1 \quad \text{dan} \quad \boldsymbol{x}-\boldsymbol{v}=\boldsymbol{n}_2.$$

Sehingga didapat

$$\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}=\boldsymbol{n}_1-\boldsymbol{n}_2\in N \tag{5.1}$$

Misalkan sebarang elemen $\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{u}+N$, pilih $\boldsymbol{n}_3\in N$ yang memenuhi

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{n}_3.$$

Sehingga dengan menggunakan (5.1) didapat

$$\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{v}+(\boldsymbol{n}_2-\boldsymbol{n}_1))+\boldsymbol{n}_3=\boldsymbol{v}+(\boldsymbol{n}_2-\boldsymbol{n}_1+\boldsymbol{n}_3)\in\boldsymbol{v}+N.$$

Jadi

$$\boldsymbol{u}+N\subseteq\boldsymbol{v}+N. \tag{5.2}$$

Misalkan sebarang elemen $\boldsymbol{z}\in\boldsymbol{v}+N$, pilih $\boldsymbol{n}_4\in N$ yang memenuhi

$$\boldsymbol{z}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{n}_4.$$

Sehingga, lagi dengan menggunakan (5.1) didapat

$$\boldsymbol{z}=(\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{n}_1-\boldsymbol{n}_2))+\boldsymbol{n}_4=\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{n}_1-\boldsymbol{n}_2+\boldsymbol{n}_4)\in\boldsymbol{u}+N.$$

Jadi

$$\boldsymbol{v}+N\subseteq\boldsymbol{u}+N. \tag{5.3}$$

Dari (5.2) dan (5.3) didapat

$$\boldsymbol{u}+N=\boldsymbol{v}+N.$$

□

Teorema 5.2.1 menjelaskan bahwa koset dalam M mempartisi menjadi klas-klas ekivalen yang saling asing diantara koset yang satu dengan lainnya.

Selanjutnya dalam M/N didefinisikan operasi $+$ dan perkalian $\times$ dengan elemen di R sebagai berikut

$$(\boldsymbol{u}+N)+(\boldsymbol{v}+N)\overset{\text{def}}{=}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+N,\ \forall\boldsymbol{u}+N,\boldsymbol{v}+N\in M/N$$

dan

$$r(\boldsymbol{u}+N) \stackrel{\text{def}}{=} (r\boldsymbol{u})+N, \ \forall r \in R \ \text{ dan } \ \forall \boldsymbol{u}+N \in M/N.$$

Operasi yang telah didefinisikan tidak tergantung pada pemilihan dari koset yang ditentukan. Hal ini bisa ditunjukkan sebagai berikut: Misalkan $\boldsymbol{u}+N = \boldsymbol{u}_1+N$ dan $\boldsymbol{v}+N = \boldsymbol{v}_1+N$. Dapat dipilih $\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2 \in N$ yang memenuhi

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{n}_1 \quad \text{dan} \quad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{n}_2.$$

Sehingga didapat

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} &= (\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{n}_1)+(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{n}_2) \\ &= (\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{v}_1)+(\boldsymbol{n}_1+\boldsymbol{n}_2) \end{aligned}$$

dan

$$r\boldsymbol{u} = r(\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{n}_1) = r\boldsymbol{u}_1 + r\boldsymbol{n}_1.$$

Karena $\boldsymbol{n}_1+\boldsymbol{n}_2 \in N$ dan $r\boldsymbol{n}_1 \in N$ didapat

$$(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+N = (\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{v}_1)+N \quad \text{dan} \quad (r\boldsymbol{u})+N = (r\boldsymbol{u}_1)+N.$$

Teorema 5.2.2 Himpunan M/N dengan operasi + dan perkalian $\times$ dengan skalar di R sebagaimana telah didefinisikan adalah modul-R. Selanjutnya pemetaan $\pi : M \to M/N$ yang didefinisikan oleh $\pi(\boldsymbol{u}) \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{u}+N$ untuk semua $\boldsymbol{u} \in M$ adalah R-epimorpisma.

Bukti Untuk setiap $\boldsymbol{u}+N, \boldsymbol{v}+N$ dan $\boldsymbol{w}+N$ di M/N maka

1. Tertutup terhadap operasi +:

$$(\boldsymbol{u}+N)+(\boldsymbol{v}+N) = (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+N \in M/N.$$

2. Komutatif terhadap operasi +:

$$(\boldsymbol{u}+N)+(\boldsymbol{v}+N) = (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+N = (\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u})+N = (\boldsymbol{v}+N)+(\boldsymbol{u}+N).$$

3. Assosiatif terhadap operasi +:

$$\begin{aligned} [(\boldsymbol{u}+N)+(\boldsymbol{v}+N)]+(\boldsymbol{w}+N) &= [(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+N]+(\boldsymbol{w}+N) \\ &= ((\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w})+N \\ &= (\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}))+N \\ &= (\boldsymbol{u}+N)+[(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})+N] \end{aligned}$$

4. Ada nol di M/N yaitu $N = \mathbf{0}_M + N$ yang memenuhi

$$(\mathbf{0}_M + N) + (\boldsymbol{u} + N) = (\mathbf{0}_M + \boldsymbol{u}) + N = \boldsymbol{u} + N$$

   dan

$$(\boldsymbol{u} + N) + (\mathbf{0}_M + N) = (\boldsymbol{u} + \mathbf{0}_M) + N = \boldsymbol{u} + N.$$

5. Untuk setiap $\boldsymbol{u} + N$ di M/N ada $-\boldsymbol{u} + N$ di M/N yang memenuhi

$$(-\boldsymbol{u} + N) + (\boldsymbol{u} + N) = (-\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}) + N = \mathbf{0}_M + N = N$$

   dan

$$(\boldsymbol{u} + N) + (-\boldsymbol{u} + N) = (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}) + N = \mathbf{0}_M + N = N.$$

Jadi terhadap operasi + himpunan M/N adalah grup komutatif. Selanjutnya terhadap operasi perkalian dengan skalar $a, b \in R$ berlaku:

1.
$$\begin{aligned} a((\boldsymbol{u} + N) + (\boldsymbol{v} + N)) &= a((\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + N) \\ &= (a(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v})) + N \\ &= (a\boldsymbol{u} + a\boldsymbol{v}) + N \\ &= (a\boldsymbol{u} + N) + (a\boldsymbol{v} + N) \end{aligned}$$

2.
$$(a + b)(\boldsymbol{u} + N) = (a + b)\boldsymbol{u} + N = (a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{u}) + N = (a\boldsymbol{u} + N) + (b\boldsymbol{u} + N).$$

3. $(ab)(\boldsymbol{u} + N) = (ab)\boldsymbol{u} + N = a(b\boldsymbol{u}) + N = a(b\boldsymbol{u} + N) = a(b(\boldsymbol{u} + N))$.

4. $1_R(\boldsymbol{u} + N) = (1_R\boldsymbol{u}) + N = \boldsymbol{u} + N$.

Jadi terhadap operasi + dan operasi perkalian dengan skalar M/N adalah modul-R. Berikutnya, misalkan sebarang $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in M$ dan sebarang $a, b \in R$, didapat

$$\begin{aligned} \pi(a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v}) &= (a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v}) + N \\ &= (a\boldsymbol{u} + N) + (b\boldsymbol{v} + N) \\ &= a(\boldsymbol{u} + N) + b(\boldsymbol{v} + N) \\ &= a\pi(\boldsymbol{u}) + b\pi(\boldsymbol{v}). \end{aligned}$$

Jadi π adalah R-homomorpisma. Selanjutnya, diberikan sebarang $\boldsymbol{u} + N$ di M/N selalu dapat dipilih $\boldsymbol{u}$ di M yang memenuhi $\pi(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u} + N$. Jadi pemetaan π adalah pada dengan demikian π adalah R-epimorpisma.

$\square$

Pemetaan $\pi : M \to M/N$ dalam Teorema 5.2.2 dinamakan **pemetaan natural**. Sedangkan modul M/N atas R dinamakan **modul kuasi**.

Berikut ini diberikan peranan pemetaan natural π dalam pemfaktoran homomorpisma modul.

Teorema 5.2.3 Diberikan M dan N adalah modul-R dan $f : M \to N$ adalah suatu R-homomorpisma. Maka ada dengan tunggal pemetaan $g : M/\ker(f) \to N$ R-homomorpisma yang bersifat satu-satu dan memenuhi $g \circ \pi = f$ dimana $\pi : M \to M/\ker(f)$ adalah pemetaan natural.

Bukti Pernyataan dalam teorema dapat diungkapkan dalam diagram komutatif yang diberikan oleh gambar berikut.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & N \\ M/\ker(f) \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Diberikan sebarang $\boldsymbol{m} \in M$, maka $f(\boldsymbol{m}) \in N$ dan didefinisikan pemetaan

$$g : M/\ker(f) \to N$$

oleh $g(\boldsymbol{m} + \ker(f)) = f(\boldsymbol{m})$, $\forall\, \boldsymbol{m} + \ker(f) \in M/\ker(f)$. Pemetaan g adalah well-defined, sebab bila $\boldsymbol{m}_1 + \ker(f) = \boldsymbol{m}_2 + \ker(f)$, maka $\boldsymbol{m}_1 - \boldsymbol{m}_2 \in \ker(f)$. Sehingga didapat

$$f(\boldsymbol{m}_1 - \boldsymbol{m}_2) = \boldsymbol{0}_N \;\Rightarrow\; f(\boldsymbol{m}_1) - f(\boldsymbol{m}_2) = \boldsymbol{0}_N \quad \text{atau} \quad f(\boldsymbol{m}_1) = f(\boldsymbol{m}_2).$$

Hal ini berakibat bahwa

$$g(\boldsymbol{m}_1 + \ker(f)) = f(\boldsymbol{m}_1) = f(\boldsymbol{m}_2) = g(\boldsymbol{m}_2 + \ker(f)).$$

Selanjutnya diberikan sebarang $\boldsymbol{m}_1 + \ker(f), \boldsymbol{m}_2 + \ker(f) \in M/\ker(f)$ dan skalar $r_1, r_2 \in R$ didapat

$$\begin{aligned} g(r_1[\boldsymbol{m}_1 + \ker(f)] + r_2[\boldsymbol{m}_2 + \ker(f)]) &= g([r_1\boldsymbol{m}_1 + \ker(f)] + [r_2\boldsymbol{m}_2 + \ker(f)]) \\ &= g((r_1\boldsymbol{m}_1 + r_2\boldsymbol{m}_2) + \ker(f)) \\ &= f(r_1\boldsymbol{m}_1 + r_2\boldsymbol{m}_2) \\ &= r_1 f(\boldsymbol{m}_1) + r_2 f(\boldsymbol{m}_2) \\ &= r_1 g(\boldsymbol{m}_1 + \ker(f)) + r_2 g(\boldsymbol{m}_2 + \ker(f)). \end{aligned}$$

Jadi pemetaan $g : M/\ker(f) \to N$ adalah R-homomorpisma. Selanjutnya ditunjukkan bahwa g adalah satu-satu. Bila $\boldsymbol{m}_1 + \ker(f), \boldsymbol{m}_2 + \ker(f) \in M/\ker(f)$ yang memenuhi $g(\boldsymbol{m}_1 + \ker(f)) = g(\boldsymbol{m}_2 + \ker(f))$, maka didapat

$$f(\boldsymbol{m}_1) = f(\boldsymbol{m}_2) \;\Rightarrow\; f(\boldsymbol{m}_1) - f(\boldsymbol{m}_2) = \boldsymbol{0}_N \quad \text{atau} \quad f(\boldsymbol{m}_1 - \boldsymbol{m}_2) = \boldsymbol{0}_N.$$

Jadi, $\boldsymbol{m}_1 - \boldsymbol{m}_2 \in \ker(f)$, akibatnya $\boldsymbol{m}_1 + \ker(f) = \boldsymbol{m}_2 + \ker(f)$. Dengan demikian g adalah pemetaan satu-satu. Berikutnya, diberikan sebarang $\boldsymbol{m} \in M$ didapat

$$(g \circ \pi)(\boldsymbol{m}) = g(\pi(\boldsymbol{m})) = g(\boldsymbol{m} + \ker(f)) = f(\boldsymbol{m}),$$

hal ini menunjukkan bahwa eksistensi g memenuhi $g \circ \pi = f$. Tinggal menunjukkan bahwa eksistensi g adalah tunggal. Misalkan g_1 adalah R-homomorpisma $g_1 : M/\ker(f) \to N$ yang memenuhi $g_1 \circ \pi = f$. Maka $g \circ \pi = g_1 \circ \pi$, sehingga untuk semua $\boldsymbol{m} + \ker(f) \in M/\ker(f)$ didapat

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{m} + \ker(f)) &= f(\boldsymbol{m}) \\ &= (g \circ \pi)(\boldsymbol{m}) \\ &= (g_1 \circ \pi)(\boldsymbol{m}) \\ &= g_1(\pi(\boldsymbol{m})) \\ &= g_1(\boldsymbol{m} + \ker(f)). \end{aligned}$$

Jadi $g = g_1$, dengan demikian eksistensi g adalah tunggal. □

Sebagai akibat dari Teorema 5.2.2 dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 5.2.4 Diberikan M dan N adalah modul-R dan pemetaan $f : M \to N$ adalah R-epimorpisma. Maka $M/\ker(f) \cong N$.

Bukti Berdasarkan Teorema 5.2.2, maka dapat dipilih R-monomorpisma $g : M \ker(T) \to N$ yang memenuhi $g \circ \pi = f$ dimana π adalah pemetaan homomorpisma natural $\pi : M \to M/\ker(f)$. Selanjutnya ditunjukkan bahwa g adalah pemetaan pada. Diberikan sebarang $\boldsymbol{n} \in N$, pilih $\boldsymbol{m} \in M$ yang memenuhi $\boldsymbol{n} = f(\boldsymbol{m})$ (sebab diketahui bahwa f adalah R-epimorpisma). Sehingga didapat

$$\boldsymbol{n} = f(\boldsymbol{m}) = g \circ \pi(\boldsymbol{m}) = g(\pi(\boldsymbol{m})) = g(\boldsymbol{m} + \ker(f)).$$

Dengan demikian diberikan sebarang $\boldsymbol{n}$ di N dapat dipilih $\boldsymbol{m} + \ker(f) \in M/\ker(f)$ yang memenuhi

$$\boldsymbol{n} = g(\boldsymbol{m} + \ker(f)),$$

jadi g adalah pemetaan pada. Karena g adalah R-homomorpisma satu-satu dan pada, maka g adalah R-isomorpisma. Jadi $M/\ker(f) \cong N$. □

Bab 6

Modul atas Daerah Ideal Utama

Dalam Bab 4 telah dibahas modul atas suatu lapangan, homomorpisma modul dan modul kuasi. Dalam bab ini dibahas pengertian modul atas Daerah Ideal Utama. Namum sebelumnya dibahas pengertian modul bebas dan modul Noetherian.

6.1 Modul Bebas dan Modul Notherian

Untuk membahas bagian ini perlu diingatkan lagi bahwa, Suatu ruang vektor V atas suatu lapangan F, maka sebarang vektor taknol $\boldsymbol{v}_1$ di V adalah bebas linier dan pembentangnya adalah ruang bagian $\langle \boldsymbol{v}_1 \rangle$. Ruang bagian tersebut dapat diperluas dengan memilih $\boldsymbol{v}_2 \notin \langle \boldsymbol{v}_1 \rangle$ sehingga didapat

$$\langle \boldsymbol{v}_1 \rangle \subset \langle \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v_2}\} \rangle$$

Dalam hal yang demikian vektor $\boldsymbol{v}_1$ dan $\boldsymbol{v}_2$ adalah bebas linier. Bila V berdimensi berhingga, misalnya n, maka proses perluasan dapat dilakukan dengan cara yang sama dan akan berhenti pada langkah yang berhingga, sehingga didapat

$$\langle \boldsymbol{v}_1 \rangle \subset \langle \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v_2}\} \rangle \cdots \subset \langle \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v_2}, \cdots \boldsymbol{v}_{n-1}, \boldsymbol{v}_n\} \rangle = V$$

Dalam hal ini $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v_2}, \cdots \boldsymbol{v}_{n-1}, \boldsymbol{v}_n$ adalah bebas linier dan merupakan suatu basis dari F. Dalam pembahasan bagian ini diberikan pengertian suatu basis dari suatu modul atas suatu ring R.

Definisi 6.1.1 Misalkan M adalah modul-R dan $S \subset M$ dengan $S \neq \varnothing$. Elemen $\boldsymbol{m} \in M$ dikatakan **kombinasi linier** dari S bila untuk semua elemen $\boldsymbol{s} \in S$ ada $\alpha_{\boldsymbol{s}} \in R$ yang hampir semua $\alpha_{\boldsymbol{s}} = 0_R$ dan memenuhi

$$\boldsymbol{m} = \sum_{\boldsymbol{s} \in S} \alpha_{\boldsymbol{s}} \boldsymbol{s}$$

Kombinasi linier ini dikatakan **tunggal** bila untuk kombinasi linier $\boldsymbol{m} = \sum\limits_{\boldsymbol{s} \in S} \beta_{\boldsymbol{s}} \boldsymbol{s}$ yang lain selalu berlaku $\alpha_{\boldsymbol{s}} = \beta_{\boldsymbol{s}}$ untuk semua $\boldsymbol{s} \in S$. □

Perlu diperhatikan bahwa dalam Definisi 6.1.1 yang dimaksud hampir semua $a_{\boldsymbol{s}} = 0_R$ adalah elemen-elemen $a_{\boldsymbol{s}}$ yang tidak sama dengan 0_R banyaknya berhingga.

Definisi 6.1.2 Misalkan M adalah modul-R dan B suatu himpunan bagian takkosong dari M. Maka B dikatakan bebas linier bila elemen nol $\mathbf{0}_M$ di M adalah kombinasi linier secara tunggal dari elemen-elemen B. Yaitu, kombinasi linier

$$\sum_{\boldsymbol{b}\in B} \alpha_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{b} = \mathbf{0}_M$$

hanya dipenuhi bila $\alpha_{\boldsymbol{b}} = 0_R$ untuk semua $\boldsymbol{b} \in B$.

□

Definisi 6.1.3 Misalkan M adalah modul-R dan N submodul dari M himpunan bagian takkosong X dari M dikatakan **membangun** N dinotasikan oleh $\langle\langle X\rangle\rangle$ bila semua elemen dari N adalah kombinasi linier dari elemen-elemen X, yaitu

$$N = \langle\langle X\rangle\rangle = \left\{ \sum_{\boldsymbol{x}\in X} \alpha_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{x} \;\middle|\; \alpha_{\boldsymbol{x}} \in R,\ \text{untuk hampir semua } \alpha_{\boldsymbol{x}} = 0_R \right\}.$$

Bila X membangun M, maka $M = \langle\langle X\rangle\rangle$.

□

Berikut ini diberikan pengertian dari suatu basis untuk suatu M modul-R.

Definisi 6.1.4 Himpunan bagian takkosong $B \subset M$ dengan M adalah modul-R dikatakan suatu **basis** dari M bila B bebas linier dan $M = \langle\langle B\rangle\rangle$.

□

Teorema 6.1.1 Misalkan B adalah suatu basis untuk M modul-R. Maka penulisan kombinasi linier sebarang elemen $\boldsymbol{m} \in M$ dari elemen-elemen B adalah tunggal.

Bukti misalkan kombinasi linier $\boldsymbol{m} = \sum\limits_{\boldsymbol{b}\in B} \alpha_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{b}$ dan $\boldsymbol{m} = \sum\limits_{\boldsymbol{b}\in B} \beta_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{b}$, maka didapat

$$\mathbf{0}_M = \sum_{\boldsymbol{b}\in B} \alpha_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{b} - \sum_{\boldsymbol{b}\in B} \beta_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{b} = \sum_{\boldsymbol{b}\in B} (\alpha_{\boldsymbol{b}} - \beta_{\boldsymbol{b}})\boldsymbol{b}.$$

Karena B adalah bebas linier, maka $\alpha_{\boldsymbol{b}} - \beta_{\boldsymbol{b}} = 0_R$ untuk semua $\boldsymbol{b} \in B$. Jadi $\alpha_{\boldsymbol{b}} = \beta_{\boldsymbol{b}}$ untuk semua $\boldsymbol{b} \in B$. Dengan demikian penulisan kombinasi linier sebrang elemen $\boldsymbol{m} \in M$ dari elemen-elemen di B adalah tunggal.

□

Definisi 6.1.5 Suatu M modul-R dikatakan **modul bebas** bila M mempunyai suatu basis untuk M.

□

Contoh 6.1.1 Dalam modul $M = \mathbb{Z}$ atas $\mathbb{Z}$, maka sebarang elemen $m \in M$ merupakan kombinasi liner dari $1 \in M$. Sebab $m = m.1$ untuk semua $m \in M$. Jadi $M = \langle\langle\{1\}\rangle\rangle$ dan $\{1\} \subset M$ adalah bebas linier sebab bila $n.1 = 0$, maka $n = 0$. Jadi $\{1\}$ adalah suatu basis untuk M, dengan demikian M $\mathbb{Z}$ modul adalah modul bebas. Basis yang lain untuk M adalah $\{-1\}$. Begitu juga dalam modul $M = \mathbb{Z}_n$ atas $\mathbb{Z}_n$, maka sebarang elemen $[m]_n \in M$ adalah kombinasi linier dari $[1]_n$, sebab $[m]_n = [m.1]_n = [m]_n\,[1]_n$. Jadi $M = \mathbb{Z}_n = \langle\langle\{[1]_n\}\rangle\rangle$. Himpunan $\{[1]_n\} \subset M$ adalah bebas linier, sebab bila

$$[k]_n\,[1]_n = [k.1]_n = [k]_n = [0]_n,$$

maka $k = 3p$, $\forall p \in \mathbb{Z}$. Jadi $[k]_n = [0]_n$. Dengan demikian $\{[1]_n\}$ adalah suatu basis dari $M = \mathbb{Z}_n$ atas $\mathbb{Z}_n$. Secara umum, diberikan sebarang ring komutatif R yang mempunyai elemen satuan 1_R, maka modul $M = R$ atas R sendiri adalah modul bebas dengan $\{1_R\}$ adalah suatu basis untuk $M = R$. Dengan demikian modul $M = R$ atas R adalah modul bebas.

□

Contoh 6.1.2 Diberikan modul $M = \mathbb{Z}_n$ atas $\mathbb{Z}$. Maka $\{[1]_n\}$ membangun $M = \mathbb{Z}_n$. Sebab, untuk sebarang elemen $[m]_n \in M$, didapat

$$[m]_n = m\,[1]_n = \begin{cases} \underbrace{[1]_n + [1]_n + \cdots + [1]_n}_{|m|}, & m > 0 \\ \underbrace{-[1]_n - [1]_n - \cdots - [1]_n}_{|m|}, & m < 0. \end{cases}$$

Tetapi $\{[1]_n\}$ tidak bebas linier, sebab

$$n\,[1]_n = \underbrace{[1]_n + [1]_n + \cdots + [1]_n}_{n} = [n]_n = [0]_n,\ n > 0.$$

Dengan demikian $\{[1]_n\}$ bukan suatu basis untuk $\mathbb{Z}_n$. Bahkan untuk sebarang elemen $[m]_n \in \mathbb{Z}_n$ didapat

$$n\,[m]_n = \underbrace{[m]_n + [m]_n + \cdots + [m]_n}_{n} = [nm]_n = [0]_n,\ n > 0.$$

terlihat bahwa semua elemen $[m]_n \in \mathbb{Z}_n$ tidak bebas linier. Jadi modul $M = \mathbb{Z}_n$ atas $\mathbb{Z}$ adalah tidak bebas.

□

Untuk pembahasan berikutnya dikenalkan suatu notasi $\underline{n}$ untuk $n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$ adalah himpunan

$$\underline{n} = \{1, 2, 3 \ldots, n\}.$$

Contoh 6.1.3 Misalkan ring komutatif R disertai elemen satuan 1_R, dan

$$M = R^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \,|\, a_i \in R,\ i \in \underline{n}\}.$$

Dalam M didefinisikan operasi tambah + oleh:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) \stackrel{\text{def}}{=} (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n),$$

untuk setiap $(a_1, a_2, \ldots, a_n), (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in M$. Sedangkan perkalian elemen skalar $\in R$ dengan elemen $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in M$ didefinisikan oleh

$$r(a_1, a_2, \ldots, a_n) \stackrel{\text{def}}{=} (ra_1, ra_2, \ldots, ra_n).$$

Maka M adalah modul atas R. Selanjutnya untuk $1 \leq j \leq n$ didefinisikan himpunan

$$B = \{\boldsymbol{e}_j = (\delta_{i,j})_{i \in \underline{n}} \in M \,|\, \delta_{i,j} = 1_R,\ i = j,\ \text{dan}\ \delta_{i,j} = 0_R,\ i \neq j\}.$$

Didapat B adalah bebas linier sebab bila

$$r_1\boldsymbol{e}_1 + r_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + r_n\boldsymbol{e}_n = \mathbf{0}_M$$

atau

$$(r_1, r_2, \ldots, r_n) = (0_R, 0_R, \ldots, 0_R),$$

didapat $r_1 = r_2 = \cdots = 0_R$. Selanjutnya diberikan sebarang elemen $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in M$ didapat

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{e}_n \in \langle\langle B \rangle\rangle.$$

Jadi $\langle\langle B \rangle\rangle = R^n$ dan karena B bebas linier, maka B adalah suatu basis dari modul $M = R^n$ atas R. Dengan demikian modul M atas R adalah bebas. Basis $B = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ dinamakan **basis baku** dari R^n modul atas R.

$\square$

6.2 Hasil Tambah Langsung

Dalam bagian ini dibahas pengertian hasil tambah langsung. Namum sebelumnya diberikan teorema berikut.

Teorema 6.2.1 Misalkan M_i untuk $i \in \underline{n}$ adalah submodul dari modul M atas R, dan

$$S = \sum_{i \in \underline{n}} M_i = \left\{ \sum_{i \in \underline{n}} \boldsymbol{m}_i \,\middle|\, \boldsymbol{m}_i \in M_i \right\}.$$

Maka S adalah submodul dari M.

Bukti Misalkan sebarang $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S$ dan sebarang $a, b \in R$, maka

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i \in \underline{n}} \boldsymbol{m}_i \quad \text{dan} \quad \boldsymbol{y} = \sum_{i \in \underline{n}} \boldsymbol{m}'_i.$$

Sehingga didapat

$$a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y} = a\sum_{i \in \underline{n}} \boldsymbol{m}_i + b\sum_{i \in \underline{n}} \boldsymbol{m}'_i = \sum_{i \in \underline{n}} a\boldsymbol{m}_i + \sum_{i \in \underline{n}} b\boldsymbol{m}'_i = \sum_{i \in \underline{n}} \overbrace{(a\boldsymbol{m}_i + b\boldsymbol{m}'_i)}^{\in M_i} \in S.$$

Jadi S adalah submodul dari M.

$\square$

Berikut ini diberikan pernyataan-pernyataan yang ekivalen tentang penulisan elemen-elemen di $\sum\limits_{i \in \underline{n}} M_i$ adalah tunggal.

Teorema 6.2.2 Misalkan M adalah modul-R dan $M_i,\ i \in \underline{n}$ adalah submodul dari M. Maka pernyataan berikut adalah ekivalen.

1. Penulisan setiap elemen di $\sum\limits_{i \in \underline{n}} M_i$ adalah tunggal.
2. $\sum\limits_{i \in \underline{n}} \boldsymbol{m}_i = \boldsymbol{0}_M$ dipenuhi hanya oleh $\boldsymbol{m}_i = \boldsymbol{0}_M$ untuk semua $i \in \underline{n}$.
3. $M_j \bigcap \sum\limits_{\substack{i \in \underline{n} \\ i \neq j}} M_i = \{\boldsymbol{0}_M\}$ untuk semua $j \in \underline{n}$.

Bukti

(1. $\Rightarrow$ 2.) Asumsikan 1. dipenuhi, dan misalkan $\sum\limits_{i \in \underline{n}} \boldsymbol{m}_i = \boldsymbol{0}_M$, juga $\sum\limits_{i \in \underline{n}} \boldsymbol{0}_M = \boldsymbol{0}_M$ ini berarti $\boldsymbol{0}_M \in \sum\limits_{i \in \underline{n}} M_i$. Karena Asumsi 1. dipenuhi, maka haruslah $\boldsymbol{m}_i = \boldsymbol{0}_M$ untuk semua $i \in \underline{n}$.

(2. $\Rightarrow$ 3.) Selanjutnya diberikan sebarang $j \in \underline{n}$ dengan j tetap, misalkan elemen $\boldsymbol{m} \in M_j \bigcap \sum\limits_{\substack{i \in \underline{n} \\ i \neq j}} M_i$, maka didapat

$$\boldsymbol{m} = -\boldsymbol{m}_j = \sum_{\substack{i \in \underline{n} \\ i \neq j}} \boldsymbol{m}_i$$

atau

$$\mathbf{0}_M = \sum_{\substack{i\in\underline{n}\\ i\neq j}} \boldsymbol{m}_i + \boldsymbol{m}_j = \sum_{i\in\underline{n}} \boldsymbol{m}_i.$$

Menurut 2., maka $\boldsymbol{m}_i = \mathbf{0}_M$ untuk semua $i \in \underline{n}$. Jadi $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{m}_j = \mathbf{0}_M$. Dengan demikian $M_j \bigcap \sum\limits_{\substack{i\in\underline{n}\\ i\neq j}} M_i = \{\mathbf{0}_M\}$ untuk semua $j \in \underline{n}$.

(3. $\Rightarrow$ 1.) Diberikan sebarang $\boldsymbol{m} \in \sum\limits_{i\in\underline{n}} M_i$, dan misalkan

$$\boldsymbol{m} = \sum_{i\in\underline{n}} \boldsymbol{m}_i = \sum_{i\in\underline{n}} \boldsymbol{m}'_i.$$

Didapat

$$\boldsymbol{m}_j - \boldsymbol{m}'_j = \sum_{\substack{i\in\underline{n}\\ i\neq j}} (\boldsymbol{m}'_i - \boldsymbol{m}_i) \in M_j \bigcap \sum_{\substack{i\in\underline{n}\\ i\neq j}} M_i = \{\mathbf{0}_M\}.$$

Sehingga berlaku $\boldsymbol{m}_j - \boldsymbol{m}'_j = \mathbf{0}_M$ untuk semua $j \in \underline{n}$, atau $\boldsymbol{m}_j = \boldsymbol{m}'_j$ untuk semua $j \in \underline{n}$. Hal ini berarti penulisan sebarang elemen $\boldsymbol{m} = \sum\limits_{i\in\underline{n}} \boldsymbol{m}_i$ di $\sum\limits_{i\in\underline{n}} M_i$ adalah tunggal.

□

Definisi 6.2.1 Submodul $\sum\limits_{i\in\underline{n}} M_i$ dari modul M atas R yang memenuhi Teorema 6.2.2 dinamakan **hasil tambah langsung** dan dinotasikan oleh $\bigoplus\limits_{i\in\underline{n}} M_i$. Jadi

$$\bigoplus_{i\in\underline{n}} M_i = \left\{ \sum_{i\in\underline{n}} \boldsymbol{m}_i \;\middle|\; \boldsymbol{m}_i \in M_i,\ M_j \bigcap \sum_{\substack{i\in\underline{n}\\ i\neq j}} M_i = \{\mathbf{0}_M\} \right\}.$$

Selanjutnya bila $M = \bigoplus\limits_{i\in\underline{n}} M_i$, maka dikatakan bahwa M adalah **hasil tambah langsung** dari $\{M_i \,|\, i \in \underline{n}\}$.

□

Teorema berikut membahas tentang modul bebas.

Teorema 6.2.3 Misalkan M adalah modul-R dan $M = M_1 \oplus M_2$. Misalkan $S_1 = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots \boldsymbol{u}_m\}$ adalah suatu basis untuk M_1 dan $S_2 = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots \boldsymbol{v}_n\}$ adalah suatu basis untuk M_2. Maka $T = S_1 \cup S_2$ adalah suatu basis dari M. Khususnya, bila M_1 dan M_2 adalah bebas, maka M adalah bebas dan banyaknya elemen basis untuk M adalah $m + n$.

Bukti Pertama ditunjukkan bahwa T adalah bebas linier. Misalkan bahwa

$$\sum_{i=1}^{m} a_i\boldsymbol{u}_i + \sum_{j=1}^{n} b_j\boldsymbol{v}_j = \mathbf{0}_M,\ a_i, b_j \in R.$$

Tulis $\boldsymbol{m}_1 = \sum\limits_{i=1}^{m} a_i\boldsymbol{u}_i \in M_1$ dan $\boldsymbol{m}_2 = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j\boldsymbol{v}_j \in M_2$, didapat

$$\boldsymbol{m}_1 + \boldsymbol{m}_2 = \mathbf{0}_M.$$

Karena $M = M_1 \oplus M_2$, maka penulisan $\mathbf{0}_M = \boldsymbol{m}_1 + \boldsymbol{m}_2$ adalah tunggal akibatnya $\boldsymbol{m}_1 = \boldsymbol{m}_2 = \mathbf{0}_M$. Sehingga didapat

$$\sum_{i=1}^{m} a_i\boldsymbol{u}_i = \mathbf{0}_M,$$

karena S_1 adalah basis untuk M_1, maka $a_i = 0_R$ untuk semua $i \in \underline{m}$. Juga, didapat

$$\sum_{j=1}^{n} b_j\boldsymbol{v}_j = \mathbf{0}_M,$$

karena S_2 adalah basis untuk M_2, maka $b_j = 0_R$ untuk semua $j \in \underline{n}$. Jadi, bila

$$\sum_{i=1}^{m} a_i\boldsymbol{u}_i + \sum_{j=1}^{n} b_j\boldsymbol{v}_j = \mathbf{0}_M,\ a_i, b_j \in R,$$

maka $a_i = 0_R$ untuk semua $i \in \underline{m}$ dan $b_j = 0_R$ untuk semua $j \in \underline{n}$. Dengan demikian T adalah bebas linier. Selanjutnya ditunjukkan bahwa T membangun M. Karena $M = M_1 \oplus M_2$, maka diberikan sebarang $\boldsymbol{m} \in M$ didapat

$$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{m}_1 + \boldsymbol{m}_2,\ \boldsymbol{m}_1 \in M_1,\ \boldsymbol{m}_2 \in M_2.$$

Tetapi S_1 adalah suatu basis dari M_1, maka

$$\boldsymbol{m}_1 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i\boldsymbol{u}_i, \quad \text{untuk beberapa } \alpha_i \in R.$$

Begitu juga, S_2 adalah suatu basis untuk M_2, maka

$$\boldsymbol{m}_2 = \sum_{j=1}^{n} \beta_i\boldsymbol{v}_j, \quad \text{untuk beberapa } \beta_j \in R.$$

Sehingga didapat

$$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{m}_1 + \boldsymbol{m}_2 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i\boldsymbol{u}_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_j\boldsymbol{v}_j \in \langle\langle S_1 \cup S_2\rangle\rangle.$$

Dengan demikian $M = \langle\langle T\rangle\rangle$. Bukti untuk pernyataan berikutnya dalam teorema mengikuti definisi dari modul-R bebas dan jelas bahwa $|T| = m + n$. □

Berikut ini diberikan kesimpulan dari hasil tambah langsung dari modul bebas.

Kesimpulan 6.2.1 Misalkan M adalah modul-R. Bila $M = \bigoplus_{i\in\underline{n}} M_i$ dengan masing-masing M_i adalah R-submodul bebas untuk $i \in \underline{n}$, maka M adalah modul bebas.

Bukti Mengikuti pembuktian dalam Teorema 6.2.3. $\square$

Definisi 6.2.2 Misalkan M adalah modul-R bebas. Banyaknya elemen dari sebarang basis untuk M dinamakan **rank** dan dinotasikan oleh $\mathrm{rk}_R(M)$. $\square$

Misalkan R adalah suatu daerah integral dan F adalah suatu lapangan pecahan dari R. Elemen-elemen di R mempunyai bentuk $a = \frac{a}{1} \in F$. Jadi $R \subset F$. Sehingga didapat

$$R^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \,|\, a_i \in R\} \subset F^n = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \,|\, \alpha_i \in F\}.$$

Telah diketahui bahwa R^n adalah modul-R dan misalkan $V \subset R^n$ adalah R-submodul dari R^n. Didefinisikan himpunan

$$FV \stackrel{\text{def}}{=} \{\alpha\boldsymbol{v} \,|\, \alpha \in F, \boldsymbol{v} \in V\}. \tag{6.1}$$

Teorema 6.2.4 Himpunan FV yang diberikan dalam (6.1) adalah ruang bagian dari F^n.

Bukti Cukup dibuktikan bahwa bila $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in FV$ dan $\lambda \in F$, maka $\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 \in FV$ dan $\lambda\boldsymbol{u}_1 \in FV$. Misalkan $\boldsymbol{u}_1 = \alpha_1\boldsymbol{v}_1$ dan $\boldsymbol{u}_2 = \alpha_2\boldsymbol{v}_2$ dengan $\alpha_1, \alpha_2 \in F$ dan $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$. Tulis $\alpha_1 = \frac{a_1}{b_1}$ dan $\alpha_2 = \frac{a_2}{b_2}$ dimana $a_1, a_2, b_1, b_2 \in R$ dan $b_1 \neq 0_R, b_2 \neq 0_R$. Sehingga didapat

$$\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2\boldsymbol{v}_2 = \frac{a_1}{b_1}\boldsymbol{v}_1 + \frac{a_2}{b_2}\boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{b_1b_2}(a_1b_2\boldsymbol{v}_1 + b_1a_2\boldsymbol{v}_2).$$

Karena V R-submodul dari R^n, maka $a_1b_2\boldsymbol{v}_1 + b_1a_2\boldsymbol{v}_2 \in V$ dan karena $\frac{1}{b_1b_2} \in F$, maka

$$\frac{1}{b_1b_2}(a_1b_2\boldsymbol{v}_1 + b_1a_2\boldsymbol{v}_2) \in FV.$$

Jadi $\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 = \alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2\boldsymbol{v}_2 \in FV$. Selanjutnya, juga didapat

$$\lambda\boldsymbol{u}_1 = \lambda(\alpha_1\boldsymbol{v}_1) = (\lambda\alpha_1)\boldsymbol{v}_1 \in FV.$$

Dengan demikian FV adalah ruang bagian dari F^n. $\square$

Definisi 6.2.3 Misalkan R adalah suatu daerah integral dan F adalah suatu lapangan pecahan dari R. Bila $V \subset R^n$ adalah R-submodul, maka rank $\text{rk}_R(V)$ didefinisikan oleh dimensi $\dim_F(FM)$. Jadi $\text{rk}_R(V) = \dim_F(FM)$.

□

Teorema 6.2.5 Misalkan R adalah suatu daerah integral dan F adalah lapangan pecahan dari R. Bila $V \subset R^n$ adalah R-submodul, maka

1. $0 \leq \text{rk}_R(V) \leq n$.
2. $\text{rk}_R(R^n) = n$.
3. Misalkan M_1, M_2 adalah R-submodul dari R^n dan $M = M_1 \oplus M_2$, maka
$$FM_1 \cap FM_2 = \{\mathbf{0}_{F^n}\}, FM_1 + FM_2 = F(M_1 + M_2)$$
dan
$$\text{rk}_R(M) = \text{rk}_R(M_1) + \text{rk}_R(M_2).$$
4. Misalkan $\boldsymbol{v} \in M$ dengan $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}_{R^n}$. Maka $\{\boldsymbol{v}\}$ adalah suatu basis dari $R\boldsymbol{v}$ dan $\text{rk}_R(R\boldsymbol{v}) = 1$.
5. Misalkan $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ adalah basis dari suatu submodul dari $M \subseteq R^n$. Maka $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ adalah basis dari FM, yaitu $\text{rk}_R(M) = r$.

Bukti Untuk 1. dan 2. : Karena $V \subset R^n$, maka menurut definisi didapat $FV \subset FR^n = F^n$. Dengan demikian F^n adalah ruang vektor atas F berdimensi $\dim_F(F^n) = n$ dan menurut Teorema 6.2.4 FV adalah subruang dari F^n. Sehingga didapat
$$0 \leq \text{rk}_R(V) = \dim_F(FV) \leq \dim_F(F^n) = n.$$
Untuk 3. Pertama ditunjukkan bahwa $FM_1 \cap FM_2 = \{\mathbf{0}_{F^n}\}$. Untuk hal ini misalkan $\alpha_1\boldsymbol{v}_1 \in FM_1$ dan $\alpha_2\boldsymbol{v}_2 \in FM_2$ dengan
$$\alpha_1 = \frac{a_1}{b_1},\ \alpha_2 = \frac{a_2}{b_2}, \tag{6.2}$$
untuk $\boldsymbol{v}_1 \in M_1, \boldsymbol{v}_2 \in M_2$ dan $a_1, a_2 \in R$, b_1, b_2 elemen-elemen taknol di R. Bila
$$\alpha_1\boldsymbol{v}_1 = \alpha_2\boldsymbol{v}_2 \in FM_1 \cap FM_2,$$
maka
$$\frac{a_1}{b_1}\boldsymbol{v}_1 = \frac{a_2}{b_2}\boldsymbol{v}_2,$$
sehingga didapat
$$\frac{a_1b_2}{b_1b_2}\boldsymbol{v}_1 = \frac{a_2b_1}{b_1b_2}\boldsymbol{v}_2.$$

Karena $b_1 b_2 \neq 0_R$, maka

$$(a_1 b_2)\boldsymbol{v}_1 = (a_2 b_1)\boldsymbol{v}_2 \in M_1 \cap M_2 = \{\mathbf{0}_{R^n}\} \quad (\text{sebab } M = M_1 \oplus M_2).$$

Karena $b_2 \neq 0_R$ dan $\mathbf{0}_{R^n} = \mathbf{0}_{F^n}$, maka

$$a_1 \boldsymbol{v}_1 = (b_2^{-1} a_2 b_1)\boldsymbol{v}_2 = \mathbf{0}_{F^n}.$$

Jadi $FM_1 \cap FM_2 = \{\mathbf{0}_{F^n}\}$. Berikutnya ditunjukkan bahwa

$$FM_1 + FM_2 = F(M_1 + M_2).$$

Misalkan, sebarang elemen-elemen $\boldsymbol{v}_1 \in M_1$ dan $\boldsymbol{v}_2 \in M_2$. Bila $\alpha \in F$, maka

$$\alpha(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = \alpha\boldsymbol{v}_1 + \alpha\boldsymbol{v}_2 \in (FM_1 + FM_2).$$

Jadi

$$F(M_1 + M_2) \subset FM_1 + FM_2. \tag{6.3}$$

Sebaliknya, misalkan $\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 \in FM_1$ dan $\alpha_2 \boldsymbol{v}_2 \in FM_2$ dengan α_1 dan α_2 sebagai mana diberikan dalam (6.2). Didapat

$$\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{b_1 b_2}(a_1 b_2 \boldsymbol{v}_1 + a_2 b_1 \boldsymbol{v}_2).$$

Karena $\frac{1}{b_1 b_2} \in F$ dan $a_1 b_2 \boldsymbol{v}_1 + a_2 b_1 \boldsymbol{v}_2 \in M_1 + M_2$, maka

$$\frac{1}{b_1 b_2}(a_1 b_2 \boldsymbol{v}_1 + a_2 b_1 \boldsymbol{v}_2) \in F(M_1 + M_2).$$

Jadi $\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 \in F(M_1 + M_2)$. Dengan demikian

$$FM_1 + FM_2 \subset F(M_1 + M_2). \tag{6.4}$$

Akibatnya, dari (6.3) dan (6.4) didapat

$$F(M_1 + M_2) = FM_1 + FM_2.$$

Dari pembahasan bukti 1. sampai 3. dan definisi rank, didapat

$$\mathrm{rk}_R(M) = \mathrm{rk}_R(M_1 + M_2) = \dim_F(F(M_1 + M_2)) = \dim_F(FM_1 + FM_2). \tag{6.5}$$

Tetapi dari pengetahuan aljabar linier diketahui bahwa bila V_1 dan V_2 adalah ruang bagian dari ruang vektor F^n atas lapangan F, maka

$$\dim_F(V_1 + V_2) = \dim_F(V_1) + \dim_F(V_2) - \dim_F(V_1 \cap V_2). \tag{6.6}$$

Sehingga bila dalam Persamaan 6.6 $V_1 = FM_1$ dan $V_2 = FM_2$ dan karena $FM_1 \cap FM_2 = \{\mathbf{0}_{F^n}\}$, maka Persamaan 6.5 menjadi

$$\mathrm{rk}_R(M) = \mathrm{rk}_R(M_1) + \mathrm{rk}_R(M_2). \tag{6.7}$$

Selanjutnya dibuktikan pernyataan 4. Jelas dari definisi $R.\boldsymbol{v} = \{r\boldsymbol{v} \mid r \in R\}$ vektor $\{\boldsymbol{v}\}$ membangun $R.\boldsymbol{v}$. Misalkan vektor taknol $\boldsymbol{v} \in R^n$, maka dengan menggunakan basis baku di R^n didapat

$$\boldsymbol{v} = r_1\boldsymbol{e}_1 + r_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + r_n\boldsymbol{e}_n,$$

untuk beberapa elemen taknol $r_i \in R$. Bila $a\boldsymbol{v} = \mathbf{0}_{R^n}$ untuk $a \in R$, didapat

$$(ar_1)\boldsymbol{e}_1 + (ar_2)\boldsymbol{e}_2 + \cdots + (ar_n)\boldsymbol{e}_n = \mathbf{0}_{R^n}$$

dan karena $\{\boldsymbol{e}_i \mid i \in \underline{n}\}$ adalah basis untuk R^n, maka $\boldsymbol{e}_i$, untuk $i = 1, 2, \ldots, n$ adalah bebas linier. Dengan demikian $ar_i = 0_R$ untuk semua $i \in \underline{n}$ dan karena $r_i \neq 0_R$ untuk beberapa $i \in \underline{n}$, maka $a = 0_R$ (sebab R adalah daerah integral). Jadi $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}_M$ di R^n adalah bebas linier di $R.\boldsymbol{v}$ dan karena $R.\boldsymbol{v} = \langle\langle \boldsymbol{v} \rangle\rangle$, maka $\boldsymbol{v}$ adalah suatu basis untuk $R.\boldsymbol{v}$. Terakhir dibuktikan pernyataan 5. dengan menggunakan induksi pada r. Dalam hal $r = 0$ adalah trivial dan $r = 1$ sudah dibuktikan dalam 4. Misalkan

$$M_1 = \bigoplus_{i=1}^{r-1} R\boldsymbol{v}_i,$$

maka $S_1 = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{r-1}\}$ adalah suatu basis untuk M_1. Dengan menggunakan induksi, S_1 adalah basis dari $FM_1 = \sum_{i=1}^{r-1} F.\boldsymbol{v}_i$ dan $\mathrm{rk}_R(M_1) = r - 1$. Selanjutnya pilih elemen taknol $\boldsymbol{v}_r \in R^n$ yang memenuhi $M_2 = R.\boldsymbol{v}_r$ dan $M = M_1 \oplus M_2$. Maka $\{\boldsymbol{v}_r\}$ adalah suatu basis untuk M_2 dan $\mathrm{rk}_R(M_2) = 1$. Dengan menggunakan Teorema 6.2.3, maka

$$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{r-1}, \boldsymbol{v}_r$$

adalah basis untuk $M = M_1 \oplus M_2$. Karena $M_1 \cap M_2 = \{\mathbf{0}_{R^n}\}$ dan dengan menggunakan hasil 3., maka $FM_1 \cap FM_2 = \{\mathbf{0}_{F^n}\}$ dan dengan menggunakan induksi didapat

$$FM = F(M_1 + M_2) = FM_1 + FM_2 = \sum_{i=1}^{r} F.\boldsymbol{v}_i,$$

dan dengan menggunakan definisi rank, maka $\mathrm{rk}_R(M) = \dim_F(FM) = r$. □

Teorema berikut penting tentang modul bebas M atas R yang dibangun secara berhingga isomorpik dengan modul bebas R^n atas R.

Teorema 6.2.6 Misalkan R adalah suatu daerah integral. Bila M adalah modul-R bebas dibangun secara berhingga, maka M dan R^n adalah isomorpik.

Bukti Misalkan $B = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ adalah suatu basis untuk M dan misalkan pemetaan $\phi : M \to R^n$ didefinisikan oleh $\phi(\boldsymbol{v}) \stackrel{\text{def}}{=} (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ untuk semua $\boldsymbol{v} = r_1\boldsymbol{v}_1 + r_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + r_n\boldsymbol{v}_n$ di M. Ditunjukkan bahwa ϕ adalah R-isomorpisma. Ditunjukkan dulu ϕ adalah R-homomorpisma. Diberikan sebarang elemen di M, yaitu

$$\boldsymbol{m}_1 = r_1\boldsymbol{v}_1 + r_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + r_n\boldsymbol{v}_n = \sum_{i=1}^{n} r_i\boldsymbol{v}_i$$

dan

$$\boldsymbol{m}_2 = s_1\boldsymbol{v}_1 + s_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + s_n\boldsymbol{v}_n = \sum_{i=1}^{n} s_i\boldsymbol{v}_i$$

dan sebarang elemen $a, b \in R$, didapat

$$\begin{aligned}
\phi(a\boldsymbol{m}_1 + b\boldsymbol{m}_2) &= \phi(a\sum_{i=1}^{n} r_i\boldsymbol{v}_i + b\sum_{i=1}^{n} s_i\boldsymbol{v}_i) \\
&= \phi(\sum_{i=1}^{n} ar_i\boldsymbol{v}_i + b\sum_{i=1}^{n} bs_i\boldsymbol{v}_i) \\
&= \phi(\sum_{i=1}^{n} (ar_i + bs_i)\boldsymbol{v}_i) \\
&= (ar_1 + bs_1, ar_2 + bs_2, \ldots, ar_n + bs_n) \\
&= (ar_1, ar_2, \ldots, ar_n) + (bs_1, bs_2, \ldots, bs_n) \\
&= a(r_1, r_2, \ldots, r_n) + b(s_1, s_2, \ldots, s_n) \\
&= a\phi(\boldsymbol{m}_1) + b\phi(\boldsymbol{m}_2).
\end{aligned}$$

Jadi ϕ adalah R-homomorpisma. Berikutnya ditunjukkan bahwa ϕ adalah satu-satu. Misalkan bahwa $\phi(\boldsymbol{m}) = \mathbf{0}_{R^n}$. Karena B adalah suatu basis, dapat dipilih dengan tunggal skalar $c_1, c_2, \ldots, c_n$ yang memenuhi

$$\boldsymbol{m} = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n.$$

Jadi,

$$\phi(\boldsymbol{m}) = (c_1, c_2, \ldots, c_n) = (0_R, 0_R, \ldots, 0_R)$$

hal berakibat bahwa $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$. Dengan demikian $\ker(\phi) = \{\mathbf{0}_M\}$, jadi ϕ adalah satu-satu. Selanjutnya diberikan sebarang elemen

$$\boldsymbol{y} = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$$

di R^n. Pilih elemen $\boldsymbol{m} \in M$ diberikan oleh $\boldsymbol{m} = r_1\boldsymbol{v}_1 + r_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + r_n\boldsymbol{v}_n$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \phi(\boldsymbol{m}) &= \phi(r_1\boldsymbol{v}_1 + r_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + r_n\boldsymbol{v}_n) \\ &= (r_1, r_2, \ldots, r_n) \\ &= \boldsymbol{y}, \end{aligned}$$

jadi ϕ adalah pada. Dengan demikian ϕ adalah suatu R-isomorpisma dan $M \cong R^n$. $\square$

Teorema berikut menjelaskan bahwa peranan basis dalam suatu monomorpisma modul tetap dipertahankan dalam imagenya.

Teorema 6.2.7 Misalkan R adalah suatu daerah integral dan masing-masing M dan N adalah modul-R bebas yang dibangun secara berhingga. Bila

$$B = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$$

adalah suatu basis untuk M dan $\phi : M \to N$ adalah suatu R-monomorpisma, maka

$$\{\phi(\boldsymbol{v}_1), \phi(\boldsymbol{v}_2), \ldots, \phi(\boldsymbol{v}_n)\}$$

adalah suatu basis untuk $\phi(M) \subset N$.

Bukti Ditunjukkan dulu

$$\phi(M) = \langle\langle\{\phi(\boldsymbol{v}_1), \phi(\boldsymbol{v}_2), \ldots, \phi(\boldsymbol{v}_n)\}\rangle\rangle.$$

Untuk menunjukkan bahwa dua himpunan sama adalah masing-masing merupakan himpunan bagian dari yang lainnya. Pertama, Bila $\boldsymbol{w} \in \phi(M)$, maka dapat dipilih suatu elemen $\boldsymbol{v} \in M$ yang memenuhi $\phi(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}$. Selanjutnya, karena B adalah suatu basis dari M, maka juga dapat dipilih $c_1, c_2, \ldots, c_n$ di R yang memenuhi

$$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n.$$

Sehingga didapat

$$\phi(\boldsymbol{v}) = \phi(c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n).$$

Karena ϕ adalah R-homomorpisma, didapat

$$\boldsymbol{w} = \phi(\boldsymbol{v}) = c_1\phi(\boldsymbol{v}_1) + c_2\phi(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + c_n\phi(\boldsymbol{v}_n).$$

Terlihat bahwa sebarang $\boldsymbol{w} \in \phi(M)$ merupakan kombinasi linier dari elemen-elemen

$$\phi(\boldsymbol{v}_1), \phi(\boldsymbol{v}_2), \ldots, \phi(\boldsymbol{v}_n).$$

Jadi

$$\boldsymbol{w} \in \langle\langle\{\phi(\boldsymbol{v}_1), \phi(\boldsymbol{v}_2), \ldots, \phi(\boldsymbol{v}_n)\}\rangle\rangle.$$

Dengan demikian
$$\phi(M) \subseteq \langle\langle\{\phi(\boldsymbol{v}_1), \phi(\boldsymbol{v}_2), \ldots, \phi(\boldsymbol{v}_n)\}\rangle\rangle.$$
Sebaliknya, misalkan bahwa sebarang elemen
$$\boldsymbol{w} \in \langle\langle\{\phi(\boldsymbol{v}_1), \phi(\boldsymbol{v}_2), \ldots, \phi(\boldsymbol{v}_n)\}\rangle\rangle.$$
Maka dapat dipilih elemen-elemen $k_1, k_2, \ldots, k_n$ di R yang memenuhi
$$\begin{aligned} \boldsymbol{w} &= k_1\phi(\boldsymbol{v_1}) + k_2\phi(\boldsymbol{v_2}) + \cdots + k_n\phi(\boldsymbol{v_n}) \\ &= \phi(k_1\boldsymbol{v_1}) + \phi(k_2\boldsymbol{v_2}) + \cdots + \phi(k_n\boldsymbol{v_n}) \\ &= \phi(k_1\boldsymbol{v_1} + k_1\boldsymbol{v_2} + \cdots + k_n\boldsymbol{v_n}). \end{aligned}$$
Terlihat bahwa $\boldsymbol{w}$ adalah image dari kombinasi linier
$$k_1\boldsymbol{v_1} + k_1\boldsymbol{v_2} + \cdots + k_n\boldsymbol{v_n}$$
yang merupakan suatu elemen dari M. Jadi $\boldsymbol{w} \in \phi(M)$, dengan demikian
$$\langle\langle\{\phi(\boldsymbol{v}_1), \phi(\boldsymbol{v}_2), \ldots, \phi(\boldsymbol{v}_n)\}\rangle\rangle \subseteq \phi(M).$$
Akibatnya $\phi(M) = \langle\langle\{\phi(\boldsymbol{v}_1), \phi(\boldsymbol{v}_2), \ldots, \phi(\boldsymbol{v}_n)\}\rangle\rangle$. Selanjutnya ditunjukkan bahwa
$$\{\phi(\boldsymbol{v}_1), \phi(\boldsymbol{v}_2), \ldots, \phi(\boldsymbol{v}_n)\}$$
adalah bebas linier di $\phi(M) \subset N$. Tinjau persamaan
$$c_1\phi(\boldsymbol{v}_1) + c_2\phi(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + c_n\phi(\boldsymbol{v}_n) = \mathbf{0}_N,\ c_i \in R \quad \text{untuk} \quad i \in \underline{n}$$
atau ekivalen dengan
$$\phi(c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n) = \mathbf{0}_N.$$
Karena ϕ adalah satu-satu, maka $\ker(\phi) = \{\mathbf{0}_M\}$, jadi
$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}_M.$$
Karena $B = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ adalah basis untuk M, maka B besas linier, jadi $c_1 = c_2 = \cdots c_n = 0_R$. Dengan demikian
$$\{\phi(\boldsymbol{v}_1), \phi(\boldsymbol{v}_2), \ldots, \phi(\boldsymbol{v}_n)\}$$
adalah suatu basis untuk $\phi(M)$.

□

Berikut ini diberikan definisi rank sebarang submodul bebas dari modul bebas M atas R yang dibangun secara berhingga melalui suatu isomorpisma modul.

Definisi 6.2.4 Misalkan R adalah suatu daerah integral dan M adalah modul bebas atas R yang dibangun secara berhingga. Diberikan suatu pemetaan
$$\phi : M \to R^n,$$
adalah R-isomorpisma. Misalkan $M_1 \subset M$ adalah R-submodul. Maka rank $\mathrm{rk}_R(M_1)$ didefinisikan sebagai rank $\mathrm{rk}_R(\phi(M_1))$, jadi $\mathrm{rk}_R(M_1) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{rk}_R(\phi(M_1))$.

□

Teorema berikut dari Teorema 6.2.5 tetapi M adalah sebarang modul-R bebas yang dibangun secara berhingga.

Teorema 6.2.8 Misalkan R adalah suatu daerah integral dan M adalah modul-R bebas yang dibangun secara berhingga dan $\phi : M \to R^n$ adalah R-isomorpisma. Maka

1. Misalkan $M_1, M_2 \subset M$ adalah R-submodul. Bila $M_1 \cap M_2 = \{\mathbf{0}_M\}$, maka
$$\mathrm{rk}_R(M_1 + M_2) = \mathrm{rk}_R(M_1) + \mathrm{rk}_R(M_2).$$
2. Misalkan $M_1 \subset M$ adalah suatu R-submodul dengan basis $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$. Maka $\mathrm{rk}_R(M_1) = r$.
3. Bila $M_1 \subset M$ adalah suatu R-submodul, maka
$$0 \leq \mathrm{rk}_R(M_1) \leq n.$$
4. Bila sebarang elemen taknol $\boldsymbol{v} \in M$, maka $\mathrm{rk}_R(R.\boldsymbol{v}) = 1$.

Bukti Untuk 1. Bila $M_1 \cap M_2 = \{\mathbf{0}_M\}$, misalkan $\phi(M_1) = N_1$ dan $\phi(M_2) = N_2$. Ditunjukkan bahwa $N_1 \cap N_2 = \{\mathbf{0}_{R^n}\}$. Misalkan sebarang elemen $\boldsymbol{y} \in N_1 \cap N_2$, maka pilih $\boldsymbol{x}_1 \in M_1$ dan $\boldsymbol{x}_2 \in M_2$ yang memenuhi
$$\boldsymbol{y} = \phi(\boldsymbol{x}_1) \quad \text{dan} \quad \boldsymbol{y} = \phi(\boldsymbol{x}_2).$$
Tetapi karena ϕ adalah R-isomorpisma, maka ϕ satu-satu. Jadi $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2$. Ini berarti $\boldsymbol{x}_1 \in M_2$ dan karena $M_1 \cap M_2 = \{\mathbf{0}_M\}$, maka $\boldsymbol{x}_1 = \mathbf{0}_M$. Akibatnya
$$\boldsymbol{y} = \phi(\boldsymbol{x}_1) = \phi(\mathbf{0}_M) = \mathbf{0}_{R^n}.$$
Sehingga didapat
$$N_1 \cap N_2 = \phi(M_1) \cap \phi(M_2) = \{\mathbf{0}_{R^n}\}.$$
Sehingga dengan menggunakan Teorema 6.2.5 bagian 3. didapat
$$\begin{aligned}\mathrm{rk}_R(\phi(M_1 + M_2)) &= \mathrm{rk}_R(\phi(M_1) + \phi(M_2)) \quad (\text{sebab } \phi \ R\text{-isomorpisma})\\ &= \mathrm{rk}_R(\phi(M_1)) + \mathrm{rk}_R(\phi(M_2)).\end{aligned}$$
Dengan demikian, menurut Definisi 6.2.4 didapat
$$\mathrm{rk}_R(M_1 + M_2) = \mathrm{rk}_R(M_1) + \mathrm{rk}_R(M_2).$$
Untuk 2., dari Teorema 6.2.7 himpunan
$$\{\phi(\boldsymbol{v}_1), \phi(\boldsymbol{v}_2), \ldots, \phi(\boldsymbol{v}_r)\}$$
adalah suatu basis untuk $\phi(M_1)$. Sehingga menurut Teorema 6.2.5 bagian 5. didapat $\mathrm{rk}_R(M_1) = r$. Untuk 3., Teorema 6.2.5 bagian 1. didapat bila $M_1 \subset M$ adalah R-submodul, maka $0 \leq \mathrm{rk}_R(M_1) \leq n$. Sedangkan untuk 4. gunakan Teorema 6.2.5 bagian 4 didapat bila elemen taknol $\boldsymbol{v} \in M$, maka $\mathrm{rk}_R(R.\boldsymbol{v}) = 1$.

□

6.2.1 Modul Noetherian

Diberikan $M = \mathbb{Z}$ modul atas $\mathbb{Z}$. Sebagaimana telah diketahui modul ini adalah modul bebas, sebab

$$\langle\langle 1\rangle\rangle = \{n.1 \,|\, n \in \mathbb{Z}\} = \{n \,|\, n \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}$$

dan $m.1 = 0$ berakibat $m = 0$. Terlihat bahwa 1 adalah suatu basis dari M dan elemen pembangun dari M berhingga yaitu satu. Disamping itu submodul-submodul dari M berbentuk:

$S_1 = 1\mathbb{Z} = \{1.n \,|\, n \in \mathbb{Z}\} = \{n \,|\, n \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z} = \langle\langle 1\rangle\rangle$
$S_2 = 2\mathbb{Z} = \{2.n \,|\, n \in \mathbb{Z}\} = \langle\langle 2\rangle\rangle$
$S_3 = 3\mathbb{Z} = \{3.n \,|\, n \in \mathbb{Z}\} = \langle\langle 3\rangle\rangle$
$S_4 = 4\mathbb{Z} = \{4.n \,|\, n \in \mathbb{Z}\} = \langle\langle 4\rangle\rangle$
$S_5 = 5\mathbb{Z} = \{5.n \,|\, n \in \mathbb{Z}\} = \langle\langle 5\rangle\rangle$
$S_6 = 6\mathbb{Z} = \{6.n \,|\, n \in \mathbb{Z}\} = \langle\langle 6\rangle\rangle$
$S_7 = 7\mathbb{Z} = \{7.n \,|\, n \in \mathbb{Z}\} = \langle\langle 7\rangle\rangle$
$S_8 = 8\mathbb{Z} = \{8.n \,|\, n \in \mathbb{Z}\} = \langle\langle 8\rangle\rangle$
$S_9 = 9\mathbb{Z} = \{3.n \,|\, n \in \mathbb{Z}\} = \langle\langle 9\rangle\rangle$
$S_{10} = 10\mathbb{Z} = \{10.n \,|\, n \in \mathbb{Z}\} = \langle\langle 10\rangle\rangle$

Secara umum untuk $k \in \mathbb{Z}$ dan $k \geq 1$ didapat submodul dari M adalah

$$S_k = k\mathbb{Z} = \{k.n \,|\, n \in \mathbb{Z}\} = \langle\langle k\rangle\rangle.$$

Terlihat bahwa untuk semua $k \in \mathbb{Z}$ dengan $k \geq 1$, semua submodul dari M yaitu S_k dibangun secara berhingga oleh satu elemen pembangun. Selain itu selalu ada **barisan rantai menaik** submodul-submodul dari M, misalnya

$$\{0\} \subset \cdots \subset \langle\langle 2^4\rangle\rangle \subset \langle\langle 2^3\rangle\rangle \subset \langle\langle 2^2\rangle\rangle \subset \langle\langle 2\rangle\rangle$$

berakhir dengan submodul tetap yaitu $\langle\langle 2\rangle\rangle$. Dengan cara yang sama untuk submodul-submodul berikut

$$\{0\} \subset \cdots \subset \langle\langle 3^4\rangle\rangle \subset \langle\langle 3^3\rangle\rangle \subset \langle\langle 3^2\rangle\rangle \subset \langle\langle 3\rangle\rangle$$

berakhir dengan submodul tetap yaitu $\langle\langle 3\rangle\rangle$.

Suatu modul M atas suatu ring R yang memenuhi kondisi **barisan rantai menaik submodul-submodul dari** M **yang berakhir dengan submodul tetap** dinamakan modul ***Noetherian***.

Dari apa yang dibahas, terlihat bahwa ada keterkaitan antara modul Noetherian M atas R yang memenuhi barisan rantai menaik submodul-submodul dari M yang berakhir dengan suatu submodul tetap dengan submodul-submodul tersebut dibangun secara berhingga. Juga, misalkan $M = \mathbb{Z}^2$ adalah modul atas $\mathbb{Z}$. Disini

$$M = \mathbb{Z}^2 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z} \right\}$$

dan $R = \mathbb{Z}$. Maka

$$S_1 = \left\langle\left\langle\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right\rangle\right\rangle = \left\{m\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \;\middle|\; m \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{\begin{bmatrix}m\\0\end{bmatrix} \;\middle|\; m \in \mathbb{Z}\right\}$$

dan

$$\begin{aligned} S_2 &= \left\langle\left\langle\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}\right\rangle\right\rangle \\ &= \left\{m\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + n\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \;\middle|\; m, n \in \mathbb{Z}\right\} \\ &= \left\{\begin{bmatrix}m\\n\end{bmatrix} \;\middle|\; m, n \in \mathbb{Z}\right\}. \end{aligned}$$

Jelas bahwa $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right\}$ adalah suatu basis untuk S_1 $\mathbb{Z}$-submodul dan $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$ adalah suatu basis untuk S_2 $\mathbb{Z}$-submodul dan $S_1 \subset S_2$. Modul $M = \mathbb{Z}^2$ atas $\mathbb{Z}$ dan submodul-submodulnya dibangun secara berhingga dan memenuhi setiap barisan rantai menaik submodul-submodul dari $\mathbb{Z}^2$ berakhir pada submodul yang tetap.

Teorema 6.2.9 Diberikan suatu modul M atas R adalah modul Noetherian bila dan hanya bila setiap submodul dari M dibangun secara berhingga.

Bukti ($\Leftarrow$) Misalkan semua submodul dari M dibangun secara berhingga dan M memuat suatu barisan takhingga submodul-submodul dari M yang menaik, yaitu

$$S_1 \subset S_2 \subset S_3 \subset S_4 \subset \cdots, \tag{6.8}$$

maka $S = \bigcup_j S_j$ adalah submodul dari M yang dibangun secara berhingga, dengan demikian didapat

$$S = \langle\langle\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}\rangle\rangle .$$

Terlihat bahwa $\boldsymbol{v}_i \in S$ untuk $i \in \underline{n}$, sehingga dapat dipilih indeks $k_i \in \underline{n}$ yang memenuhi $\boldsymbol{v}_i \in S_{k_i}$. Jadi bila

$$k = \max\{k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n\}$$

didapat

$$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \ldots, \boldsymbol{v}_n\} \subset S_k .$$

Dengan demikian

$$S = \langle\langle\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}\rangle\rangle \subset S_k \subset S_{k+1} \subset S_{k+2} \subset \cdots \subset S.$$

Hal ini menunjukkan bahwa kondisi (6.8) adalah barisan rantai menaik submodul-submodul dari M yang berakhir dengan submodul tetap S. Sebaliknya ($\Rightarrow$), misalkan bahwa M memenuhi kondisi barisan rantai menaik submodul-submodul dari M yang berakhir dengan suatu submodul tetap S. Pilih $\boldsymbol{u}_1 \in S$ dan misalkan

$$S_1 = \langle\langle \boldsymbol{u}_1 \rangle\rangle \subset S.$$

Bila $S_1 = S$, maka terlihat bahwa S dibangun secara berhingga, yaitu oleh satu elemen $\boldsymbol{u}_1$. Bila $S_1 \neq S$, pilih $\boldsymbol{u}_2 \in S - S_1$ dan misalkan

$$S_2 = \langle\langle \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\} \rangle\rangle \subset S.$$

Bila $S_2 = S$, proses pemilihan elemen di S dihentikan, sebab S dibangun secara berhingga oleh dua elemen $\boldsymbol{u}_1$ dan $\boldsymbol{u}_2$. Bila tidak, maka pilih elemen $\boldsymbol{u}_3 \in S - S_2$ dan misalkan

$$S_3 = \langle\langle \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\} \rangle\rangle \subset S.$$

Bila $S = S_3$, maka S dibangun secara berhingga oleh tiga elemen $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ dan $\boldsymbol{u}_3$. Bila $S \neq S_3$ proses pemilihan elemen di S dilanjutkan sebagaimana proses sebelumnya, sehingga didapat barisan rantai menaik submodul-submodul dari M, yaitu

$$\langle\langle \boldsymbol{u}_1 \rangle\rangle \subset \langle\langle \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\} \rangle\rangle \subset \langle\langle \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\} \rangle\rangle \subset \cdots \subset S \tag{6.9}$$

Bila taksatupun submodul-submodul dalam barisan (6.9) tidak sama dengan S, maka didapat suatu barisan takhingga rantai menaik submodul-submodul dari M yang masing-masing submodul termuat dalam submodul berikutnya. Hal ini bertentangan dengan kenyataan kondisi barisan rantai menaik submodul-submodul dari M yang berakhir dengan submodul tetap, dalam hal ini adalah S. Jadi haruslah

$$S = \langle\langle \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \ldots, \boldsymbol{u}_m\} \rangle\rangle,$$

untuk beberapa bilangan bulat positip m. Dengan demikian submodul S dibangun secara berhingga sebanyak m elemen.

□

6.3 Barisan Eksak

Definisi 6.3.1 Suatu barisan Modul M_i atas suatu ring R (mungkin takhingga dari dua sisi) dan R-homomorpisma yaitu

$$\ldots \to M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \to \ldots \tag{6.10}$$

dinamakan suatu **barisan eksak** di M_i bila $\mathrm{im}(f_{i-1}) = \ker(f_i)$, dan dinamakan **eksak** bila barisan tersebut eksak di M_j untuk semua j.

Untuk menyingkat tulisan, notasi $\{0\}$ cukup ditulis 0. Maka untuk sebarang modul M atas R ada dengan tunggal R-homomorpisma

$$0 \to M, \;\; 0 \mapsto 0$$

dan

$$M \to 0, \;\; m \mapsto 0, \forall m \in M.$$

Dalam masing-masing kasus yang dibahas diatas dinamakan **homomorpisma nol** dan dinotasikan oleh 0.

Beberapa kasus kusus

1. Barisan
$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2$$
adalah barisan eksak bila dan hanya bila $0 = \ker(f)$ bila dan hanya bila f adalah R-monomorpisma.

2. Barisan
$$M_1 \xrightarrow{g} M_2 \longrightarrow 0$$
adalah barisan eksak bila dan hanya bila $\mathrm{im}(g) = \ker(0) = M_2$ bila dan hanya bila g adalah R-epimorpisma.

3. Barisan
$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0$$
adalah barisan eksak bila dan hanya bila f R-monomorpisma, g R-epimorpisma dan $\mathrm{im}(f) = \ker(g)$. Dengan menggunakan teorema dasar homomorpisma didapat
$$M_2/\mathrm{im}(f) = M_2/\ker(g) \cong M_3.$$
Notasi coker, dibaca cokernel. Dalam hal ini $\mathrm{coker}(f)$ adalah $M_2/\mathrm{im}(f)$. Jadi
$$\mathrm{coker}(f) = M_2/\mathrm{im}(f) = M_2/\ker(g) \cong M_3.$$
Sehingga dalam hal ini M_2 adalah sebagai suatu perluasan dari
$$M_1 \cong \mathrm{im}(f) \text{ oleh } M_3.$$
Dalam kasus (3) ini dinamakan **barisan eksak pendek**.

Bila kedua sisi barisan eksak (6.3.1) adalah takberhingga maka dinamakan **barisan eksak panjang**.

Diberikan barisan eksak panjang

$$\ldots \to \; M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \to \ldots,$$

misalkan

$$N_{j+1} = \mathrm{im}(f_j) = \ker(f_{j+1}),\ \forall j.$$

Maka didapat diagram pemetaan berikut

$$\begin{tikzcd}
 & \cdots 0 \arrow[dr] & & 0 \arrow[dr] & & 0 \arrow[dr] & & 0 \cdots \arrow[dr] & \\
N_{i-2} \arrow[ur] \arrow[dr] & & N_{i-1} \arrow[ur] \arrow[dr] & & N_i \arrow[ur] \arrow[dr] & & N_{i+1} \arrow[ur] \arrow[dr] & & N_{i+2} \\
 & \cdots M_{i-2} \arrow[ur] \arrow[rr, "f_{i-2}"] & & M_{i-1} \arrow[ur] \arrow[rr, "f_{i-1}"] & & M_i \arrow[ur] \arrow[rr, "f_i"] & & M_{i+1} \cdots \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

dimana setiap bentuk diagram pemetaan persegi atau segitiga adalah komutatif dan untuk masing-masing i, barisan

$$0 \longrightarrow N_i \longrightarrow M_i \longrightarrow N_{i+1} \longrightarrow 0$$

adalah barisan eksak pendek. Sebaliknya, bila dipunyai suatu diagram pemetaan sebagaimana pembahasan tersebut, maka rantai homomorpisma modul-R yang dibawah membentuk barisan eksak panjang.

Ingat bahwa bila M dan N adalah modul atas R, maka himpunan

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_R(M,N) &= \mathrm{Hom}(M,N)\\ &= \{f : M \to N \mid f \text{ homomorpisma } R-\text{modul}\}\end{aligned}$$

adalah modul atas R terhadap operasi "tambah" fungsi dan "perkalian" skalar.

Berikut ini dibuktikan hubungan keeksakan dengan operator

$$\mathrm{Hom}(M,-) : X \mapsto \mathrm{Hom}(M,X)$$

dan

$$\mathrm{Hom}(-,N) : X \mapsto \mathrm{Hom}(X,N).$$

Teorema 6.3.1

(1) Barisan

$$M_1 \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M_2 \longrightarrow 0$$

adalah eksak bila dan hanya bila, untuk sebarang modul N atas R barisan

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(M_2,N) \xrightarrow{\bar{v}} \mathrm{Hom}(M,N) \xrightarrow{\bar{u}} \mathrm{Hom}(M_1,N)$$

adalah eksak.

(2) Barisan

$$0 \longrightarrow N_1 \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} N_2$$

adalah eksak bila dan hanya bila, untuk sebarang modul M atas R barisan

$$\mathrm{Hom}(M, N_1) \xrightarrow{\bar{u}} \mathrm{Hom}(M, N) \xrightarrow{\bar{v}} \mathrm{Hom}(M, N_2) \longrightarrow 0$$

adalah eksak.

Bukti Perluh diperhatikan bahwa untuk semua M dan N modul atas R, maka $\mathrm{Hom}(M, 0) \cong \mathrm{Hom}(0, N) \cong 0$.

(1) $(\Rightarrow)$ Misalkan bahwa barisan

$$M_1 \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M_2 \longrightarrow 0$$

adalah eksak dan N sebarang modul atas R.

(i) Ditunjukkan bahwa $\bar{v}$ adalah satu-satu. Misalkan bahwa $f, g \in \mathrm{Hom}(M_2, N)$ dan

$$f \circ v = \bar{v}(f) = \bar{v}(g) = g \circ v.$$

Bila $x \in M_2$, maka $x = v(y)$ untuk beberapa $y \in M$ (sebab v pemetaan pada). Jadi

$$f(x) = f(v(y)) = (f \circ v)(y) = (g \circ v)(y) = g(x).$$

Terlihat bahwa $f = g$, akibatnya $\bar{v}$ satu-satu.

(ii) Ditunjukkan bahwa $\ker(\bar{u}) \subseteq \mathrm{im}(\bar{v})$. Misalkan bahwa $f \in \ker(\bar{u})$, maka $f \circ u = \bar{u}(f) = 0$. Untuk $x \in M_2$, didefinisikan $g : M_2 \to N$ oleh $g(x) = f(y)$, dimana $x = v(y)$ untuk beberapa $y \in M$ (lagi, sebab v pada). Maka g terdefinisi secara baik, sebab bila $v(y) = v(y_0)$, maka

$$0 = v(y) - v(y_0) = v(y - y_0),$$

sehingga $y - y_0 \in \ker(v) = \mathrm{im}(u)$. Jadi $y - y_0 = u(z)$ untuk beberapa $x \in M_1$. Hal ini menghasilkan

$$f(y) = f((y-y_0)+y_0) = f(y-y_0)+f(y_0) = f(u(z))+f(y_0) = f(y_0) \text{ (sebab } f\circ u = 0).$$

Karena f adalah R-homomorpisma modul, maka otomatis g adalah juga R-homomorpisma modul. Jadi $g \in \mathrm{Hom}(M_2, N)$. Tetapi, bila $y \in M$, maka dengan menggunakan definisi g didapat

$$[\bar{v}(g)](y) = (g \circ v)(y) = g(v(y)) = f(y).$$

Jadi $\bar{v}(g) = f$, dengan demikian $f \in \mathrm{im}(\bar{v}$. Hal ini menunjukkan bahwa $\ker(\bar{u}) \subseteq \mathrm{im}(\bar{v}$.

(iii) Berikutnya, ditunjukkan bahwa $\text{im}(\bar{v}) \subseteq \ker(\bar{u})$. Misalkan $f = \bar{v}(g) \in \text{im}(\bar{v})$. Bila $z \in M_1$, maka

$$\begin{aligned} [\bar{u}(f)](z) &= [\bar{u}(\bar{v}(g)](z) \\ &= (g \circ v \circ u)(z) \\ &= g(v(u(z)) \\ &= g(0) = 0 \text{ (sebab } \text{im}(u) = \ker(v)). \end{aligned}$$

Jadi $\bar{u}(f) = 0$, dengan demikian $f \in \ker(\bar{u})$. Hal ini menunjukkan bahwa $\text{im}(\bar{v}) \subseteq \ker(\bar{u})$.

Dari fakta hasil (i), (ii) dan (iii) secara bersama didapat bahwa barisan

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(M_2, N) \xrightarrow{\bar{v}} \text{Hom}(M, N) \xrightarrow{\bar{u}} \text{Hom}(M_1, N)$$

adalah barisan eksak. Bukti sebaliknya ($\Leftarrow$) dapat dilakukan dengan mengikuti alur pembahasan yang telah dilakukan.

(2) Sebagai latihan!

Sifat
Diberikan suatu barisan homomorpisma modul atas R

$$\ldots \to M_{n-1} \xrightarrow{f_n} M_n \xrightarrow{f_{n+1}} M_{n+1} \to \ldots, \tag{6.11}$$

yang tidak harus merupakan barisan eksak. Maka $f_{n+1} \circ f_n = 0$ bila dan hanya bila $\text{Im} f_n \subseteq \ker f_{n+1}$ untuk setiap indeks n.

Bukti
Bila $\text{Im} f_n \subseteq \ker f_{n+1}$, maka

$$(f_{n+1} \circ f_n)(x) = f_{n+1}(f_n(x)) = 0_{M_{n+1}}, \forall x \in M_{n-1}. \tag{6.12}$$

Hal ini menunjukkan bahwa $f_{n+1} \circ f_n = 0$.

Sebaliknya, bila $f_{n+1} \circ f_n = 0$. Maka untuk sebarang $y \in \text{Im} f_n$, pilih $x \in M_{n-1}$ yang memenuhi $y = f_n(x)$. sehingga didapat

$$(f_{n+1} \circ f_n)(x) = f_{n+1}(f_n(x)) = f_{n+1}(y).$$

Jadi, $f_{n+1}(y) = 0_{M_{n+1}}$, akibatnya $y \in \ker f_{n+1}$. Dengan demikian $\text{Im} f_n \subseteq \ker f_{n+1}$. □

Kesimpulan
Bila barisan (6.11) adalah eksak, maka $f_{n+1} \circ f_n = 0$ untuk setiap indeks n.

Bukti
Barisan (6.11) adalah barisan eksak, maka untuk setiap indeks n didapat $\text{Im} f_n = \ker f_{n+1}$. Akibatnya $\text{Im} f_n \subseteq \ker f_{n+1}$ bila dan hanya bila $f_{n+1} \circ f_n = 0$. □

Kebalikan dari Kesimpulan yang baru saja dibahas tidak benar. Diberikan barisan homomorpisma modul atas $\mathbb{Z}$ sebagai berikut

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{Z}_3,$$

dimana masing-masing f dan g didefinisikan oleh $f(n) = 6n$ dan $g(n) = [n]_3, \forall n \in \mathbb{Z}$.

Selanjutnya, diberikan sebarang $x \in \text{Im} f$, pilih $n \in \mathbb{Z}$ yang memenuhi $x = f(n) = 6n$. Jadi $g(x) = g(6n) = [6n]_3 = [0]_3$. Hal ini menunjukkan bahwa $x \in \ker g$, akibatnya $\text{Im} f \subseteq \ker g$ bila dan hanya bila $g \circ f = 0$. Selanjutnya, untuk $3 \in \ker g$, tetapi $3 \notin \text{Im} f$. Dengan demikian $\ker g \neq \text{Im} f$, jadi barisan homomorpisma yang dibahas bukan barisan eksak.

Beberapa catatan penting

1. Jika barisan homomorpisma modul

   $$\mathbf{0} \longrightarrow M \xrightarrow{f} N,$$

   adalah eksak bila dan hanya bila f adalah monomorpisma.

2. Jika barisan homomorpisma modul

   $$M \xrightarrow{f} N \longrightarrow \mathbf{0},$$

   adalah barisan eksak bila dan hanya bila f adalah epimorpisma.

3. Jika barisan homomorpisma modul

   $$\mathbf{0} \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \longrightarrow \mathbf{0}$$

   adalah eksak bila dan hanya bila f isomorpima .

Kesimpulan

Bila barisan homomorpisma modul

$$\mathbf{0} \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow \mathbf{0}$$

adalah eksak, maka f adalah monomorpisma, g epimorpisma dan g menginduksi suatu isomorpisma

$$\bar{g} : N/\text{Im}(f) \to P.$$

Bukti

Jelas bahwa berdasarkan **Beberapa catatan penting**, f adalah monomorpisma dan g epimorpisma. Sehingga didapat diagram gambar berikut komutatif yaitu $\bar{g} \circ \pi = g$ dan

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi"'] & P \\ N/\ker(g) \arrow[ur, "\bar{g}"'] & \end{tikzcd}$$

$\bar{g}$ monomorpisma, dimana π adalah pemetaan natural (kanonik epimorpisma). Karena $\ker(g) = \mathrm{Im} f$ dan g epimorpisma, maka $\mathrm{Im}(g) = P$. Akibatnya $N/\mathrm{Im}(f) = N/\ker(g) \cong P$. Jadi $N/\mathrm{Im}(f) \cong P$. Dengan demikian $\bar{g}$ adalah isomorpisma modul atas R. $\square$

Contoh

(a) Misalkan $f : A \to B$ adalah homomorpisma dari grup Abelian. Maka masing-masing dari barisan berikut adalah barisan eksak pendek:

(i) $0 \to \ker(f) \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\pi} A/\ker(f) \to 0$, dimana $i : \ker(f) \hookrightarrow A$ adalah pemetaan inklusi dan $\pi : A \to A/\ker(f)$ adalah epimorpisma kanonik yang didefinisikan oleh $\pi(a) = a + \ker(f)$.

(ii) $0 \to \mathrm{im}(f) \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\pi} B/\mathrm{im}(f) \to 0$, dimana $i : \mathrm{im}(f) \hookrightarrow B$ adalah pemetaan inklusi dan $\pi : B \to B/\mathrm{im}(f)$ adalah epimorpisma kanonik yang didefinisikan oleh $\pi(b) = b + \mathrm{im}(f)$.

(b) Misalkan A adalah suatu modul-R dan B adalah suatu submodul dari A. Maka barisan $0 \to B \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\pi} A/B \to 0$ adalah eksak, dimana $i : B \hookrightarrow A$ adalah pemetaan inklusi dan $\pi : A \to A/B$ adalah epimorpisma modul-R kanonik didefinisikan oleh $\pi(a) = a + B$.

(c) Misalkan A dan B adalah modul-R dan $f : A \to B$ adalah suatu homomorpisma modul-R. Maka barisan $0 \to \ker(f) \xrightarrow{i} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{\pi} B/f(A) \to 0$ adalah eksak, dimana $i : \ker(f) \hookrightarrow A$ adalah pemetaan inklusi dan $\pi : B \to B/f(A)$ adalah epimorpisma modul-R kanonik didefinisikan oleh $\pi(b) = b + f(A)$.

(d) Diberikan modul A dan B atas R, ada setidaknya satu perluasan dari B oleh A. Apakah perluasan B oleh A tunggal untuk sembarang modul A dan B atas R? Pertimbangkan barisan eksak pendek

$$0 \to A \xrightarrow{f} A \oplus B \xrightarrow{g} B \to 0,$$

dimana $f(a) = (a, 0)$, $\forall a \in A$ dan $g(a, b) = b$, $\forall (a, b) \in A \oplus B$. Maka $A \oplus B$ adalah perluasan dari B oleh A. Selanjutnya, untuk $A = \mathbb{Z}$ dan $B = \mathbb{Z}_n$, maka didapat barisan eksak pendek

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{f_n} \mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{Z}_n \to 0,$$

dimana $f_n(x) = nx, \ \forall x \in \mathbb{Z}$ dan g adalah pemetaan proyeksi natural.

6.4 Modul Proyektif

Pada bagian ini dibahas pengertian modul proyektif dan beberapa hal terkait. Namum perluh kita mengingat kembali suatu hal berikut: Jika F adalah modul-R bebas dan $P \subseteq F$ adalah submodul maka P tidak perlu bebas meskipun P adalah penjumlahan langsung dari F.

Definisi 6.4.1 Suatu modul P atas R adalah modul **proyektif** jika terdapat suatu modul Q atas R sedemikian rupa sehingga $P \oplus Q$ adalah suatu modul bebas atas R. □

Contoh 6.4.1 Jika R adalah ring dengan elemen identitas maka setiap modul bebas atas R adalah modul proyektif. □

Kita berikan catatan untuk barisan eksak pendek yaitu: Jika M' adalah suatu submodul dari M atas suatu ring R, maka kita mempunyai suatu barisan eksak pendek:

$$0 \to M' \to M \to M/M' \to 0.$$

Selain itu, terkait isomorpisma, setiap barisan eksak pendek berbentuk sebagai berikut:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\cong"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "="] & K \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \ker(g) \arrow[r] & M \arrow[r] & M/\ker(g) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Definisi 6.4.2 Suatu barisan eksak pendek:

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} K \longrightarrow 0$$

adalah suatu barisan **eksak terpisah** (***split exact***) bila ada suatu isomorpisma

$$\varphi : M \longrightarrow N \oplus K$$

sedemikian sehingga diagram berikut komutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "="] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\varphi"] & K \arrow[r] \arrow[d, "="] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & N \oplus K \arrow[r] & K \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

□

Proposisi 6.4.1 Misalkan R adalah suatu ring dan diberikan barisan berikut:

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} K \longrightarrow 0$$

merupakan barisan eksak pendek homomorpisma modul-R. Kondisi berikut ekivalen

1. Barisan adalah eksak terpisah.
2. Ada suatu homomorpisma $h : K \to M$ sedemikian sehingga $gh = \mathrm{id}_K$.
3. Ada suatu homomorpisma $k : M \to N$ sedemikian sehingga $kf = \mathrm{id}_N$.

Bukti
Sebagai latihan!

□

Teorema 6.4.1 Misalkan R adalah suatu ring yang mempunyai elemen identitas dan misalkan P adalah modul-R. Kondisi berikut ekivalen.

(1) P adalah modul proyektif.

(2) Untuk sebarang homomorpisma $f : P \to N$ dan suatu epimorpisma $g : M \to N$ ada suatu homomorpisma $h : P \to M$ sedemikian sehingga diagram berikut komutatif:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "f"] \\ M \arrow[r, "g"'] & N \end{tikzcd}$$

(3) Setiap barisan eksak pendek $0 \to N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} P \to 0$ adalah terpisah.

Bukti

(1) ⇒ (2) Misalkankan Q adalah suatu modul sedemikian rupa sehingga $P \oplus Q$ adalah suatu modul bebas, dan misalkan $B = \{b_i\}_{i \in I}$ adalah suatu basis dari $P \oplus Q$. Karena g adalah suatu epimorpisma modul-R, maka untuk setiap $i \in I$ kita dapat menemukan $m_i \in M$ sedemikian rupa sehingga $g(m_i) = f(b_i)$. Kita definisikan

$$\tilde{h} : P \oplus Q \to M$$

sebagai

$$\tilde{h}\left(\sum_{i \in I} r_i b_i\right) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i \in I} r_i m_i.$$

Periksa: karena B adalah suatu basis dari $P \oplus Q$, pemetaan $\tilde{h}$ adalah homomorpisma modul-R yang terdefinisi dengan baik dan $g\tilde{h} = f$. Maka kita dapat mengambil pembatasan $h = \tilde{h}|_P$.

(2) ⇒ (3) Kita mempunyai suatu diagram berikut:

$$\begin{array}{ccc} & & P \\ & & \downarrow \mathrm{Id}_P \\ M & \xrightarrow{g} & P \end{array}$$

Karena g adalah suatu epimorpisma modul-R, maka ada $h : P \to M$ sedemikian sehingga $gh = \mathrm{id}_P$. Maka dari itu dengan menggunakan Proposisi 6.4.1 barisan eksak pendek $0 \to N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} P \to 0$ adalah terpisah.

(3) $\Rightarrow$ (1) Kita memiliki epimorpisma kanonik modul-R:

$$f : \bigoplus_{p \in P} Rp \to P.$$

Ini memberikan barisan eksak pendek

$$0 \longrightarrow \ker(f) \longrightarrow \bigoplus_{p \in P} Rp \xrightarrow{f} P \longrightarrow 0.$$

Dengan asumsi pada P, barisan tersebut terpisah. Jadi kami memperoleh

$$P \oplus \ker(f) \cong \bigoplus_{p \in P} Rp,$$

dengan demikian P adalah modul proyektif.

□

Kesimpulan 6.4.1 Jika R adalah ring yang mempunyai elemen satuan, P adalah modul-R proyektif dan $f : M \to P$ adalah epimorpisma modul-R maka $M \cong P \oplus \ker(f)$.

Bukti
Kita mempunyai barisan eksak pendek

$$0 \longrightarrow \ker(f) \longrightarrow M \xrightarrow{f} P \longrightarrow 0$$

yang terpisah berdasarkan Teorema 6.4.1.

□

6.5 Modul Proyektif atas Daerah Ideal Utama

Sebelum kita membahas modul proyektif atas suatu ideal utama, kita berikan teorema berikut.

Teorema 6.5.1 Bila R adalah suatu Daerah Ideal Utama, F adalah modul-R bebas dengan rank berhingga, dan $M \subseteq F$ adalah submodule maka M adalah modul bebas dan $\mathrm{rank}(M) \leq \mathrm{rank}(F)$.

Bukti

(Bandingkan dengan pembuktian Teorema 6.2.5). Kita bisa mengasumsikan bahwa $F = R^n$. Kita ingin menunjukkan bahwa: bila $M \subseteq R^n$ maka M adalah modul-R bebas dan $\text{rank}(M) \leq n$.

Kita melakukan induksi terkait dengan n: Bila $n = 1$ maka $M \subseteq R$, jadi M adalah ideal dari R. Karena R adalah suatu Daerah Ideal Utama, kita memiliki $M = \langle a \rangle$ untuk beberapa $a \in R$. Jika $a = 0$ maka $M = \{0\}$ adalah modul bebas dengan rank 0. Bila tidak, kita memiliki isomorpisma modul-R

$$f : R \xrightarrow{\cong} M, \;\; f(r) \overset{\text{def}}{=} ra, \; \forall r \in R$$

terlihat bahwa M adalah suatu modul bebas dengan rank 1.

Selanjutnya, asumsikan bahwa untuk beberapa n setiap submodule dari R^n adalah modul-R bebas dari dengan rank $\leq n$, dan misalkan $M \subseteq R^{n+1}$. Perhatikan homomorpisma modul-R berikut:

$$f : R^{n+1} \to R, \;\; f(r_1, r_2, \ldots, r_{n+1}) \overset{\text{def}}{=} r_{n+1}, \; \forall (r_1, r_2, \ldots, r_{n+1}) \in R^{n+1}.$$

Kita mempunyai

$$\ker(f) = \{(r_1, r_2, \ldots, 0) \in R^{n+1} \mid r_i \in R\} \cong R^n.$$

Kita mempunyai suatu epimorpisma modul-R:

$$f|_M : M \to \text{im}(f|_M).$$

Karena $\text{im}(f|_M) \subseteq R$, maka $\text{im}(f_M)$ adalah modul-R bebas, dan berdasarkan pembahasan Contoh 5.1.2 kita memiliki

$$M \cong \text{im}(f|_M) \oplus \ker(f|_M).$$

Kita juga punya:

$$\ker(f|_M) = \ker(f) \cap M.$$

Oleh karena itu $\ker(f|_M)$ adalah submodule dari $\ker(f)$, dan karena $\ker(f)$ adalah modul-R bebas dengan rank n dengan asumsi induksi kita dapatkan $\ker(f|_M)$ adalah modul-R bebas dengan rank $\leq n$. Dengan demikian

$$M \cong \underbrace{\text{im}(f|_M)}_{\text{bebas rank} \leq n} \oplus \overbrace{\ker(f|_M)}^{\text{bebas rank} \leq n},$$

jadi M adalah modul-R bebas dengan rank $\leq n + 1$. $\square$

Kesimpulan 6.5.1 Bila R adalah suatu Daerah Ideal Utama, maka setiap modul-R proyektif yang dibangun secara berhingga adalah bebas.

Bukti
Bila P adalah modul-R proyektif yang dibangun secara berhingga maka kita memiliki epimorpisma $f : R^n \to P$ untuk beberapa $n > 0$. Dengan Kesimpulan 6.4.1 kita memiliki isomorpisma

$$P \oplus \ker(f) \cong R^n.$$

Oleh karena itu, kita dapat mengidentifikasi P dengan submodul dari R^n, dan dengan demikian berdasarkan Teorema 6.5.1 P adalah modul bebas.

$\square$

Catatan: Teorema 6.5.1 juga berlaku untuk modul bebas yang dibangun secara tak-terhingga atas suatu Daerah Ideal Utama. Sebagai konsekuensinya, Kesimpulan 6.5.1 berlaku untuk semua modul proyektif (yang tidak perlu dibangun secara berhingga) atas suatu Daerah Ideal Utama.

Daftar Pustaka

[1] Steven Roman. "Advanced Linear Algebra, Third Edition", Springer, USA, (2008).

[2] Sean Sather-Wagstaff. "Rings, Modules, and Linear Algebra", Department of Mathematics, NDSU Dept # 2750, PO Box 6050, Fargo, ND 58108-6050 USA. URL: http://www.ndsu.edu/pubweb/ ssatherw/

[3] William A. Adkins and Steven H. Weintraub. "Algebra An Approach via Module Theory", Springer-Verlag, USA, (1999)

[4] Mahima Ranjan Adhikari and Avishek Adhikari. "Basic Modern Algebra with Applications", Springer India (2014)