Семинар 9

1. Пусть выборка $X_1, \dots, X_n$ порождена СВ X с непрерывным распределением F(t-μ), а выборка $Y_1, \dots, Y_n$ - СВ Y с распределением F($\frac{t-\mu}{\Delta}$) , $\Delta > 0$. Предполагается, что DX< ∞, и выполняется условие $\int_{-\infty-}^{\infty} tf(t)dt = 0$. Покажите, что из справедливости гипотезы H_1: Δ< 1 следует, что DX>DY.

$$D_x = Ex^2 - \underbrace{(Ex)^2}_{0 \text{ (по усл.)}} = Ex^2$$

$$x \sim F(t-\mu)$$
$$y \sim F\left(\frac{t-\mu}{\Delta}\right)$$
$$\Delta^2 = \frac{D_y}{D_x}$$
$$\Delta = \frac{\delta_y}{\delta_x}$$

$H_0: \Delta = 1$

$H_a: \Delta < 1 \Rightarrow D_x > D_y \Rightarrow \frac{D_y}{D_x} < 1$

решение: $$Ey^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_y(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_x\left(\frac{t-\mu}{\Delta}\right)\cdot\frac{1}{\Delta}\,dt = \left|\begin{aligned} &\frac{t-\mu}{\Delta} = z \\ &t = \Delta z + \mu \\ &dt = \Delta dz \end{aligned}\right| = \int_{-\infty}^{+\infty}(\Delta z+\mu)^2 f_x(z)\cdot\frac{1}{\Delta}\Delta\,dz = \int_{-\infty}^{+\infty}(\Delta^2 z^2 + 2\Delta z\mu + \mu^2) f_x(z)\,dz = \Delta^2\int_{-\infty}^{+\infty} z^2 f_x(z)\,dz + 2\Delta\mu\int_{-\infty}^{+\infty} z f_x(z)\,dz +$$

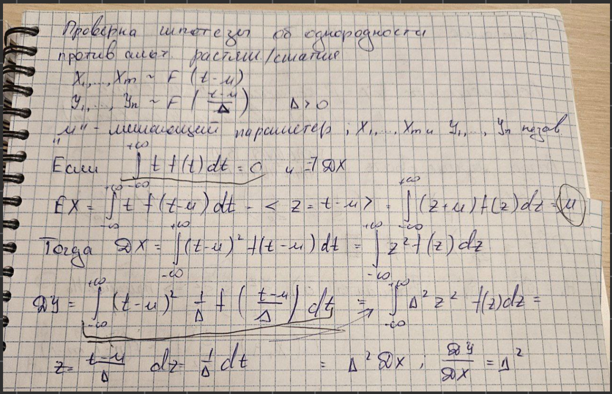
$$+\mu^2\int_{-\infty}^{+\infty} f_x(z)\,dz = \Delta^2 Ex^2 + 0 + \mu^2 = \Delta^2 D_x + \mu^2$$

$$x \sim H(t) = F(t-\mu)$$
$$y \sim G(t) = F\left(\frac{t-\mu}{\Delta}\right)$$

$$f_y(t) = f_x\left(\frac{t-\mu}{\Delta}\right)\cdot\frac{1}{\Delta}$$

$$Ey = \int t f\left(\frac{t-\mu}{\Delta}\right)\frac{1}{\Delta}\,dt = \left|\begin{aligned} &z = \frac{t-\mu}{\Delta} \\ &t = \Delta z + \mu \\ &dt = \Delta dz \end{aligned}\right| = \int_{-\infty}^{+\infty}(\Delta z + \mu) f(z)\frac{1}{\Delta}\Delta\,dz = \Delta\int_{-\infty}^{+\infty} z f(z)\,dz + \mu\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\,dz = 0 + \mu = \mu$$

Задачу скипнули



Проверка гипотезы об однородности против альт. растяж./сжатия

$X_1, \dots, X_m \sim F(t-\mu)$

$Y_1, \dots, Y_n \sim F\left(\frac{t-\mu}{\Delta}\right) \quad \Delta > 0$

"μ" - мешающий параметр ; $X_1, \dots, X_m$ и $Y_1, \dots, Y_n$ незав.

Если $\underline{\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,dt = 0}$ и $\exists DX$

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t-\mu)\,dt = \langle z = t-\mu \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}(z+\mu) f(z)\,dz = \mu$$

Тогда $$DX = \int_{-\infty}^{+\infty}(t-\mu)^2 f(t-\mu)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 f(z)\,dz$$

$$DY = \underline{\int_{-\infty}^{+\infty}(t-\mu)^2\frac{1}{\Delta} f\left(\frac{t-\mu}{\Delta}\right)dt} = \int_{-\infty}^{+\infty}\Delta^2 z^2 f(z)\,dz =$$

$$z = \frac{t-\mu}{\Delta} \quad dz = \frac{1}{\Delta}dt \qquad = \Delta^2 DX \,; \quad \frac{DY}{DX} = \Delta^2$$

решение с лекции

Спасибо Максиму Клычкову, поп-1 ФКН ПИ

2. Согласно опросам 29 семей, проводившимся в 1968 году в юго-западном регионе Англии, выборочное среднее арендной платы за меблированную квартиру составило 2,5£, а выборочная дисперсия 0,67 £^{2}. В Уэльсе выборочное среднее арендной платы 16 семей составило 2,06£, а выборочная дисперсия 0,42 £^{2}. Проверьте гипотезу о равенстве дисперсий арендной платы в двух регионах Великобритании. Уровень значимости считать равным 0.05. Предполагается, что все наблюдения имеют гауссовское распределение

$n = 16$

$m = 29$ для x

$\hat{D}_x = 0{,}67$

$\hat{D}_y = 0{,}42$

$$H_0: \Delta = \frac{\delta_y}{\delta_x} = 1$$

$$H_a: \Delta \neq 1$$

$$T = F_{n,m} = \frac{S_y^2}{S_x^2} = \frac{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}{\frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m}(x_j - \bar{x})^2} \sim F(n-1, m-1)$$

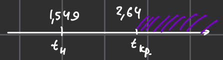
$$\hat{D}_x = \frac{1}{n}\sum(\ )^2 \xrightarrow{?} S_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum(\ )^2$$

$$\left.\begin{aligned} S_x^2 &= \hat{D}_x\frac{m}{m-1} = 0{,}67\cdot\frac{29}{28} = 0{,}694 \\ S_y^2 &= \hat{D}_y\frac{n}{n-1} = 0{,}42\,\frac{16}{15} = 0{,}448 \end{aligned}\right\}\text{ несмещённая}$$

$$S_x^2 > S_y^2 \Rightarrow T = \frac{1}{F_{n,m}} = F_{m,n} \sim F(m-1; n-1)$$

$$t_н = \frac{S_x^2}{S_y^2} = 1{,}549$$

$$t_{кр.} = f_{1-\frac{\alpha}{2}}(28,15) = f_{0,975}(\overset{k_1}{28}, \overset{k_2}{15}) = 2,64$$



НОО H_0