Лекция 2

Выборочные моменты и их свойства

$X_1, \dots, X_n \sim F(x, \theta)$

Опр: k-ым начальным выборочным моментом назыв. $\hat{\mu}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$, $k=1,2,\dots$

$\hat{\mu}_1 = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ назыв. выборочным средним

Опр: k-ым центральным виб. моментом назыв. $\hat{\nu}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^k$, $k=2,3,\dots$

$\hat{\nu}_2 = S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ назыв. виб. дисперсией

Пусть $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ соотв. распред-ю $F(x, y, \theta)$

Опр: $\hat{K}_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ назыв. виб. ковариацией

Опр: $\hat{\rho}_{xy} = \frac{\hat{K}_{xy}}{\sqrt{S_x^2 \; S_y^2}}$ назыв. виб. коэфф. корелляции

Выборочные моменты (свойства)

1) $E\hat{\mu}_k = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E X_i^k = E X_1^k = \mu_k$

$E\bar{x} = m_{x_1}$

2) $D\hat{\mu}_k = D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D X_i^k = \frac{1}{n} D X_1^k = \frac{1}{n}\left(E X_1^{2k} - (E X_1^k)^2\right) = \frac{1}{n}\left(\mu_{2k} - \mu_k^2\right)$

$D\bar{x} = \frac{\sigma_{x_1}^2}{n}$

3) По УЗБЧ: $\hat{\mu}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k \xrightarrow[n\to\infty]{п.н.} E\hat{\mu}_k = \mu_k$

4) По УЗБЧ: $\hat{\nu}_k \xrightarrow{п.н.} \nu_k$

5) По ЦПТ $\dfrac{\hat{\mu}_k - \mu_k}{\sqrt{\frac{\mu_{2k} - \mu_k^2}{n}}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} U$, $U \sim N(0;1)$ $\qquad \dfrac{\sqrt{n}(\bar{x} - m_{x_1})}{\sigma} \xrightarrow[n\to\infty]{d} U$

6) $E\delta^2 = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right) = \frac{n-1}{n}\delta^2$ (не смещённая)

$\neq \frac{1}{n}\delta^2$ (смещённая)

7) $E\hat{k}_{xy} = \frac{n-1}{n}\,cov(x,y)$

Опр: оценкой $\hat{\theta}$ параметра θ назыв. ф-ия $\hat{\theta} = T(x_1,\dots,x_n)$, не зависящая от θ

Пример: $\hat{m} = \frac{2x_2+5x_5+10x_{10}}{3}$ является оценкой для среднего роста (смещённая)

Опр: оценка $\hat{\theta}$ назыв. несмещённой оценкой парам. θ, если $E\hat{\theta} = \theta$, $\forall\theta\in\Theta$

Опр: оценка $\hat{\theta}(x_1,\dots,x_n)$ назыв. асимптотической несмещённой оценкой θ, если $\lim\limits_{n\to\infty}\hat{\theta}(x_1,\dots,x_n) = \theta$

$\tilde{S}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$ – несмещённая (исправленная) выборочная дисперсия

Пример:
$$\left.\begin{aligned}\hat{m}_1 &= \frac{x_1+x_2+x_3}{3}\\ \hat{m}_2 &= \frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{10}\\ \hat{m}_3 &= \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\end{aligned}\right\}\text{несмещённые}$$

Опр: оценка $\hat{\theta}(x_1,\dots,x_n)$ назыв. состоятельной оценкой θ, если $\hat{\theta}(x_1,\dots,x_n)\xrightarrow[n\to\infty]{P}\theta$

назыв. сильно состоятельной, если сходится п. н.

$\hat{\theta}(x_1,\dots,x_n)\xrightarrow[n\to\infty]{\text{п. н.}}\theta$

Опр: Пусть $\hat{\theta}$ – несмёщ. оценка парам. θ. Если $D\hat{\theta}\le D\theta^*$, где θ^* – любая несмещ. оценка θ, то $\hat{\theta}$ назыв. эффективной оценкой парам. θ

R – эффективная оценка

$x_1,\dots,x_n \sim f(x,\theta)$, $\theta\in\Theta\subset R^1$

назовём модель $(S, f(x,\theta))$ регулярной, если она удовлетворяет:

1) ф-ия $f(x,\theta) = f(x_1,\dots,x_n,\theta) > 0$ $\forall x\in S$ и дифф. по θ

2) $\frac{\partial}{\partial\theta}\int\limits_S f(x,\theta)\,dx = \int\limits_S\frac{\partial}{\partial\theta}f(x,\theta)\,dx$

$\frac{\partial}{\partial\theta}\int\limits_S T(x)f(x,\theta)\,dx = \int\limits_S\frac{\partial}{\partial\theta}T(x)f(x,\theta)\,dx$

Пусть $T(x) = T(x_1, \dots, x_n)$ – несмещ. оценка парам. θ

$$0 = \int\limits_S \frac{\partial}{\partial\theta} f(x,\theta)\,dx$$

ловушка Наташи

$$1 = \int\limits_S \frac{\partial}{\partial\theta} T(x) f(x,\theta)\,dx$$

Опр: информация фишера о параметре θ, содержащейся в выборке $x_1, \dots, x_n$ назыв. велич.

$$I_n(\theta) = E\left(\frac{\partial \ln f(x,\theta)}{\partial\theta}\right)^2 = \int\limits_S \left(\frac{\partial \ln f(x,\theta)}{\partial\theta}\right)^2 f(x,\theta)\,dx$$

Теорема (нер-во Рао-Крамера)

Если $(S, f(x,\theta))$ – регулярная модель и $\hat\theta$ – несмещ. оц. θ, то $D\hat\theta \geq \frac{1}{I_n(\theta)}$

Неравенство Коши–Буняковского

$$\left(\int \varphi_1(x)\varphi_2(x)\,dx\right)^2 \leq \int \varphi_1^2(x)\,dx \int \varphi_2^2(x)\,dx$$

$$1 = \int\limits_S \frac{\partial}{\partial\theta} T(x) f(x,\theta)\,dx = \int T(x) \frac{\partial}{\partial\theta} f(x,\theta) \frac{f(x,\theta)}{f(x,\theta)}\,dx =$$

$$\parallel$$
$$\ln f(x,\theta)$$

$$= \int T(x) \frac{\partial \ln f(x,\theta)}{\partial\theta} f(x,\theta)\,dx$$ (применим нер-во К-Б) $\varphi_1(x) = (T(x) - \theta)\sqrt{f(x}$