АиСД | SET-2 | A2

Потякин Арсений

TODO:

1. Для приведенных рекуррентных соотношений вычислите асимптотическую верхнюю границу временной сложности $O(g(n))$ с помощью основной теоремы о рекуррентных соотношениях (мастер–теоремы), если это возможно. Если применение мастер–теоремы невозможно, поясните причины.

2. Для рекуррентного(-ых) соотношения(-ий), не разрешимых с помощью мастер-теоремы, определите возможную асимптотическую верхнюю границу, используя метод итерации или метод подстановки.

- $T(n) = 7 \cdot T(\frac{n}{3}) + n^2$.
- $T(n) = 4 \cdot T(\frac{n}{2}) + \log_2 n$.
- $T(n) = 0.5 \cdot T(\frac{n}{2}) + \frac{1}{n}$.
- $T(n) = 3 \cdot T(\frac{n}{3}) + \frac{n}{2}$.
- $T(n) = T(n-1) + T(n-2) + n \cdot \log_2 n$.

Формула мастер-теоремы:

$$T(n) = a \cdot T(\frac{n}{b}) + O(\dots)$$

где $O(\dots)$ зависит от аргументов:

- $O(n^k \cdot f(n) \cdot \log n)$ при $k = \log_b a$
- $O(n^k \cdot f(n))$ при $k > \log_b a$
- $O(n^{\log_b a} \cdot f(n))$ при $k < \log_b a$

Task 1:
a = 7, b = 3, k = 2, $f(n) = 1 \Longrightarrow k > \log_b a \Longrightarrow 2 >$ 1.7713, тогда справедливо, что верхняя граница равна $O(n^2)$

Task 2:
a = 4, b = 2, k = 0, $f(n) = \log_2 n \Longrightarrow k < \log_b a \Longrightarrow 0 < 2$, тогда справедливо, что верхняя граница равна $O(n^{\log_2 4} \cdot \log_2 n) \Longrightarrow O(n^2 \log n)$

Task 3:
a = 0.5, b = 2, k = -1, так как k = -1, использовать мастер-теорему нельзя. Решим методом итерации. $T(\frac{n}{2}) = \frac{1}{2}T(\frac{n}{4}) + \frac{2}{n}$ подставим в исходное соотношение и получим $T(n) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}T(\frac{n}{4}) + \frac{2}{n}) + \frac{1}{n} = \frac{1}{4}T(\frac{n}{4}) + \frac{n}{2}$ и так далее. Все k шагов можно представить в виде формулы $T(n) = \frac{1}{2^k}T(\frac{n}{2^k}) + \Sigma_{i=0}^{k-1}\frac{1}{n} = \frac{1}{2^k}T(\frac{n}{2^k}) + \frac{k}{n}$. Остановка произойдет когда $\frac{n}{2^k} \leq 1$, то есть когда $k = \log_2 n$. Это представимо в виде $T(n) = O(\frac{1}{n}) + \frac{\log_2 n}{n} \Longrightarrow T(n) = O(\frac{\log n}{n})$, так как $\log n$ вносит больший вклад. Так как n растет стремительнее, чем $\log n$, можно сказать, что сложность равна $O(1)$.

Task 4:
a = 3, b = 3, k = 1, $f(n) = 1 \Longrightarrow k = \log_b a \Longrightarrow 1 = 1$, тогда справедливо, что верхняя граница равна $O(n \log n)$

Task 5:
В данном случае мастер-теорема не применима, так как соотношение не удовлетворяет формуле, так как оно имеет два рекурсивых вызова с разными аргументами. Решим методом итерации. Распишем первые две итерации:

$$T(n-1) = T(n-2) + T(n-3) + (n-1)\log_2 n - 1$$

$$T(n-2) = T(n-3) + T(n-4) + (n-2)\log_2 n - 2$$

Подставляем эти шаги в исходное соотношение и получаем: $T(n) = [T(n-2) + T(n-3) + (n-1)\log_2 n - 1] + [T(n-3) + T(n-4) + (n-2)\log_2 n - 2] + n\log_2 n$. Можно сделать вывод, что на каждом шаге возникают два новых рекурсивных вызова, т.е. сложность равна $O(2^n)$, а также на каждом шаге добавляется сложность $n \log_2 n$. Таким образом, верхняя граница составляет $O(2^n \cdot n \log n)$