АиСД | ДЗ-4 | 2

Потякин Арсений

TODO:

1. Исследовать свойства дерева рекурсии (высоту, общее количество задач) и обосновать асимптотическую верхнюю границу временной сложности

$$T(n) = \begin{cases} 2 \cdot T(n/2) + n & n \mid 2 \\ 2 \cdot T(n-1) + n & n \nmid 2 \\ 1 & n = 1 \end{cases}$$

Task 1: (Исследование свойств дерева рекурсии)

Свойства:

1. Высота
   - **Для четных n:** значение n уменьшается вдвое, т.е. высота дерева в этом случае $\log_2 n$, т.е. $O(\log n)$
   - **Для нечетных n:** значение n уменьшается на 1, а значит высота дерева пропорциональна n, т.е. $O(n)$
2. Количество задач (узлов дерева)
   - **Для четных n:** Каждый узел порождает два новых узла, но количество задач растет как $O(n)$, потому что высота дерева логарифмическая
   - **Для нечетных n:** Каждый узел порождает два новых узла, но количество задач растет экспоненциально (как 2^n)

Верхняя граница:
Так как нечетная форма n порождает больше операций, возьмем ее за основу для нахождения верхней границы. Возьмем $n = 2^m - 1$ как начальное число по той причине, что при подстановке в функцию будет чередоваться четная и нечетная форма n, что порождает наибольшее число операций.
Заметим, что несмотря на экспоненциальную сложность функции для нечетных n, на самом деле это значение недостижимо, так как в худшем случае число будет нечетным лишь в половине случаев, а это означает, что доминирующим остается порядок, связанный с четным n.
Воспользуемся мастер-теоремой и найдем верхнюю границу для четных n. Так как $a = 2, b = 2, k = 1, f(n) = 1$, то формула имеет вид $T(n) = a \cdot T(\frac{n}{b}) + O(n^k \cdot f(n) \cdot \log n) \Longrightarrow O(n \log n)$