Чтобы стать большим-большим качком
В дверной проём вхожу бочком
Люблю печеньки с молочком

Лекция 3 24.01

$$I_n(\theta) = E\left(\frac{\partial \ln f(x,\theta)}{\partial\theta}\right)^2$$

Замеч 1

$$E\left(\frac{\partial \ln f(x,\theta)}{\partial\theta}\right) = \int\limits_S \frac{\partial \ln f(x,\theta)}{\partial\theta} f(x,\theta)\,dx = 0$$

$$I_n(\theta) = D\left(\frac{\partial \ln f(x,\theta)}{\partial\theta}\right)$$

Замеч 2

$$I_n(\theta) = n I_1(\theta)$$

$$f(x,\theta) = f(x_1,\dots,x_n,\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i,\theta)$$

$$E\left(\frac{\partial \ln f(x,\theta)}{\partial\theta}\right)^2 = E\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \ln f(x_i,\theta)}{\partial\theta}\right)^2 = \sum_{i\neq j} \underbrace{E\left(\frac{\partial \ln f(x_i,\theta)}{\partial\theta}\,\frac{\partial \ln f(x_j,\theta)}{\partial\theta}\right)}_{E(\;)E(\;)} + nE\left(\frac{\partial \ln f(x_1,\theta)}{\partial\theta}\right)^2 = 0 + nI_1(\theta)$$

Замеч 3

Пример $x_1,\dots,x_n \sim N(\theta,\sigma^2)$

$\hat\theta = \bar{x}$ $\quad D\bar{x} = \frac{\sigma^2}{n}$

$$I_1(\theta) = E\left(\frac{\partial \ln f(x_1,\theta)}{\partial\theta}\right)^2 = E\left(\frac{\partial \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}}\right)}{\partial\theta}\right)^2 = E\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\ln\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} - \frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}\right)\right)^2 = E\left(\frac{x-\theta}{\sigma^2}\right)^2 = \frac{1}{\sigma^4}E(x-\theta)^2 =$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sigma^4} = \frac{1}{\sigma^2}$$

$$D\hat\theta \geq \frac{1}{nI_1(\theta)} = \frac{\sigma^2}{n}$$

Критерий эффективности

$x_1, x_2, \dots, x_n \sim F_\xi(x,\theta)$ $\quad \theta \in \Theta \subset R^1$

выполнено условие регулярности

Опр Функцией вклада выборки $x_1,\dots,x_n$ называется

$$u(x,\theta) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \ln f(x_i,\theta)}{\partial\theta}$$

Пусть $0 < u(x,\theta) < \infty$

$\hat\theta = T(x_1,\dots,x_n)$ – эффективная оценка $\Leftrightarrow$ $\hat\theta - \theta = a(\theta)u(x,\theta)$, где $a(\theta) = D\hat\theta$

Док-во

Пусть $\hat\theta - \theta = a(\theta)u(x,\theta) \Rightarrow \hat\theta$ – эффективная оценка θ

$E(\hat\theta - \theta) = a(\theta)Eu(x,\theta) = a(\theta)\int \frac{\partial \ln f(x,\theta)}{\partial\theta} f(x,\theta)\,dx \Rightarrow E\hat\theta = \theta \Rightarrow$ оценка несмещенная

$$D(\hat\theta - \theta) = a^2(\theta)D(x,\theta) \Rightarrow D\hat\theta = \underset{(D(\hat\theta))^2}{\overset{\shortparallel}{a^2(\theta)}} I_n(\theta) \Rightarrow \frac{1}{I_n(\theta)} = D(\hat\theta)$$

Пусть $\hat\theta$ – эффективная оценка $\Rightarrow \hat\theta - \theta$

$\rho(\hat\theta, u(x,\theta)) = 1$

$$\operatorname{cov}(\hat\theta, u(x,\theta)) = E(\hat\theta - \theta)u(x,\theta) = E\hat\theta u(x,\theta) - \theta\underbrace{Eu(x,\theta)}_{0} = \int\limits_S T(x)u(x,\theta)f(x,\theta)\,dx = \int\limits_S T(x)\frac{\partial \ln f(x,\theta)}{\partial\theta}\cdot f(x,\theta)\,dx = 1$$

т.к. $\hat\theta$ – эффективная, то $D\hat\theta = \frac{1}{I_n(\theta)}$

$Du(x,\theta) = I_n(\theta)$

$$\rho(\hat\theta, u(x,\theta)) = \frac{\operatorname{cov}(\hat\theta, u(x,\theta))}{\sqrt{D\hat\theta\, Du(x,\theta)}} = \frac{1}{1} = 1$$

Пусть $\hat\theta$ – эффективн оценка

$\hat\theta - \theta = a(\theta)u(x,\theta)$

$\rho(\hat\theta, u(x,\theta)) = 1 \Rightarrow \hat\theta = c_1 + c_2 u(x,\theta)$

$E\hat\theta = c_1 + c_2 Eu(x,\theta) = c_1 = \theta$

$D\hat\theta = c_2^2 I_n(\theta) = \frac{1}{I_n(\theta)}$

Метод моментов

$x_1, \dots, x_n \sim F_\xi(x,\theta)$ $\qquad \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^k$

$\exists\, \mu_j < \infty \quad j = \overline{1,k}$ $\qquad \underset{\mu_j(\theta)}{\mu_j} = E\xi^j = \int x^j f(x,\theta)\,dx$

$$\begin{cases} \hat{\mu}_1 = \mu_1(\theta) \\ \hat{\mu}_k = \mu_k(\theta) \end{cases} (*)$$

Если система уравнения (*) однозначно разрешима относительно $\theta_1, \dots, \theta_k$, то решение $(*)$ $\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_k$ называется оценками параметров $\theta_1, \dots \theta_k$ по методу моментов

Пример

$x_1, \dots, x_n \sim N(\theta_1, \theta_2^2)$

$\theta = (\theta_1, \theta_2^2)$

$$\begin{cases} \hat{\mu}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i = \theta_1 & \Rightarrow \hat{\theta}_1 = \bar{x} \\ \hat{\mu}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2 = \theta_2^2 + \theta_1^2 & \Rightarrow \hat{\theta}_2^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x^2 - \bar{x}^2 \end{cases}$$

Метод максимального правдоподобия

Опр Функцией правдоподобия называется функция $\mathcal{L}(x_1, \dots, x_n, \theta) = \begin{cases} \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta), & \text{если } \xi - \text{непр СВ} \\ \prod_{i=1}^n P(\xi = x_i, \theta), & \text{если } \xi - \text{дискр СВ} \end{cases}$

Опр Оценкой максимального правдоподобия (ОМП) называется значение $\hat{\theta} \in \Theta$, т.ч. $\hat{\theta} = \arg\max \mathcal{L}(x_1, \dots, x_n, \theta) \quad \theta \in \Theta$

Опр Функция $\ln \mathcal{L}(x, \dots x_n, \theta)$ называется логарифм функцией правдоподобия

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \ln \mathcal{L}(x_1, \dots x_n, \theta)}{\partial \theta_1} = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial \ln \mathcal{L}(x_1, \dots x_n, \theta)}{\partial \theta_k} = 0 \end{cases}$$

Пример $x_1 \dots x_n \sim N(\theta_1, \theta_2^2)$

$$\mathcal{L}(x_1, \dots, x_n, \theta) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\theta_2} e^{-\frac{(x_i-\theta_1)^2}{2\theta_2^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^2 \left(\frac{1}{\theta_2}\right)^n e^{-\frac{\sum_{i=1}^n (x_1-\theta_1)^2}{2\theta_2^2}}$$

$$\ln(\mathcal{L}(x_1 \dots x_n\, \theta)) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^2 - n\ln\theta_2 - \frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\theta_1)^2}{2\theta_2^2}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \ln \mathcal{L}(x_1 \dots x_n, \theta)}{\partial \theta_1} = \dfrac{\sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\theta}_1)}{\hat{\theta}_2^2} = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial \ln \mathcal{L}(x_1 \dots x_n, \theta)}{\partial \theta_n} = -\dfrac{n}{\hat{\theta}_2} + \dfrac{\sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\theta}_1)^2}{\hat{\theta}_2^3} \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\theta}) = 0 \Rightarrow \hat{\theta}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}$$

$$-n\hat{\theta}_2^2 + \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = 0 \Rightarrow \hat{\theta}_2^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

оценка макс. правдоподобия точнее оценки метода моментов