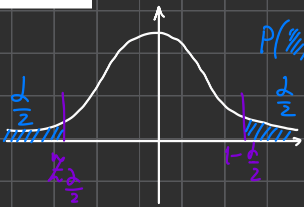
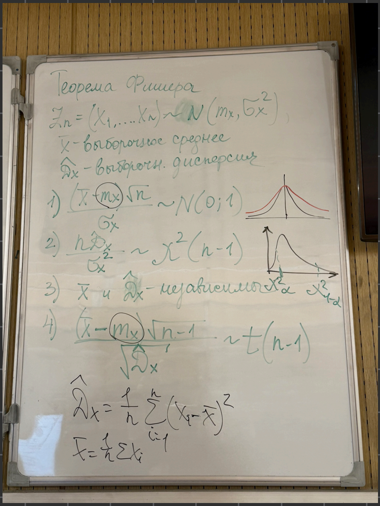
Семинар 4

1. Импортёр упаковывает чай в пакеты с номинальным весом 125 грамм. Известно, что упаковывающая машина работает с известным среднеквадратическим отклонением равным 10 г. Случайным образом для проверки было выбрано 50 пакетов чая. Выборочное среднее этих пакетов составило 125,8 г. Постройте доверительный интервал уровня надёжности 0.95 для среднего веса пакета. Найдите объём выборки n, при котором длина доверительного интервала будет равна 2г.



$P(\text{///}) = 0{,}05$



$n = 50$

$\bar{x} = 125{,}8$

$\sigma = 10$

$\gamma = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 0{,}05$

1) $P\{T_1 \le m_x \le T_2\} = \gamma$

$T_1, T_2 - ?$

$$T = \frac{(\bar{x} - m_x)\sqrt{n}}{\sigma_x} \sim N(0,1)$$

$$P\left\{ z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{(\bar{x} - m_x)\sqrt{n}}{\sigma_x} < z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right\} = \gamma$$

$$z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{(\bar{x} - m_x)\sqrt{n}}{\sigma_x} < z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

$$-z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{(\bar{x} - m_x)\sqrt{n}}{\sigma_x} < z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

$$-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_x < (\bar{x} - m_x)\sqrt{n} < z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_x$$

$$-\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_x}{\sqrt{n}} - \bar{x} < -m_x < \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_x}{\sqrt{n}} - \bar{x}$$

$$\boxed{z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}975} = z_{0{,}475} = 1{,}96}$$ из таблицы

$$125{,}8 - \frac{1{,}96 \cdot 10}{\sqrt{50}} < m_x < 125{,}8 + \frac{1{,}96 \cdot 10}{\sqrt{50}}$$

$$123{,}02 < m_x < 128{,}57$$

2) $$2 \cdot \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}\, \sigma_x}{\sqrt{n}} = 2$$

$$z_{1-\frac{\alpha}{2}}\, \sigma_x = \sqrt{n}$$

$$n = \left(z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_x\right)^2$$

$$n = 384{,}16 \Rightarrow n = 385$$

2. Покажите, что $s^2 = \widehat{\mu_2} - (\widehat{\mu_1})^2$.

$\| $
$\hat{D}_x$

$$\hat{\mu}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \overline{x^2} \qquad (\hat{\mu}_1)^2 = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = (\bar{x})^2$$

$$\hat{D}_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 - 2x_i\bar{x} + (\bar{x})^2\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\bar{x}\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n}(\bar{x})^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{2\bar{x}}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{n\cdot(\bar{x})^2}{n} =$$

$$= \overline{x^2} - 2\bar{x}\cdot\bar{x} + (\bar{x})^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2$$

3. Имеются следующие данные об урожайности пшеницы в России за 1998-2001 годы (в ц/га): 27.0; 31.0; 35.0; 47.0. Постройте доверительный интервал уровня надёжности 0.95 для среднего значения урожайности пшеницы.

$x = col(27, 31, 35, 47)$

$n = 4$

$\gamma = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 0{,}05$

$$P\{T_1 \le m_x \le T_2\} = \gamma$$

$T_1, T_2 - ?$

$$T = \frac{(\bar{x} - m_x)\sqrt{n-1}}{\sqrt{\hat{D}_x}} \sim t(n-1)$$

$$P\left\{t_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{(\bar{x} - m_x)\sqrt{n-1}}{\sqrt{\hat{D}_x}} < t_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\} = 0{,}95$$

$$\frac{t_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\hat{D}_x}}{\sqrt{n-1}} - \bar{x} < -m_x < \frac{t_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\hat{D}_x}}{\sqrt{n-1}} - \bar{x}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\bar{x} = 35 \\ &n-1 = 3 \\ &\hat{D}_x = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 = 56 \\ &t_{1-\frac{\alpha}{2}} = t_{0{,}975} = 3{,}182 \\ &t_{\frac{\alpha}{2}} = -3{,}182 \end{aligned}}$$

$$35 - \frac{3{,}182\sqrt{56}}{\sqrt{3}} < m_x < 35 + \frac{3{,}182\sqrt{56}}{\sqrt{3}}$$

$$21{,}252 < m_x < 48{,}758$$

4. Станок-автомат штампует валики. По выборке объёма n=17 вычислено выборочное среднее $\bar{X}$= 20,5 мм и выборочная дисперсия s^2= 16 (мм)^2 диаметра валиков. Постройте доверительные интервалы уровня надёжности 0,9 для среднего значения диаметра валика и для дисперсии диаметра валика. Предполагается, что диаметры валиков имеют гауссовское распределение.

$n = 17$

$\bar{x} = 20{,}5$

$\hat{D}_x = 16$

$\gamma = 0{,}9 \Rightarrow \alpha = 0{,}1$

1) найдём δ_x^2

$$P(T_1 \le \delta_x^2 \le T_2) = \gamma$$

$T_1, T_2 - ?$

$$T = \frac{n\hat{D}_x}{\delta_x^2} \sim \chi^2(n-1)$$

$$P\left(\chi^2_{\frac{\alpha}{2}} \le \frac{n\hat{D}_x}{\delta_x^2} \le \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = \gamma$$

$$P\left(\frac{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}}{n\hat{D}_x} \le \frac{1}{\delta_x^2} \le \frac{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{n\hat{D}_x}\right) = \gamma$$

$$P\left(\frac{n\hat{D}_x}{x^2_{1-\frac{\alpha}{2}}} \le \sigma^2_x \le \frac{n\hat{D}_x}{x^2_{\frac{\alpha}{2}}}\right) = \gamma$$

$x^2_{\frac{\alpha}{2}} = 7{,}96$ $\quad x^2_{1-\frac{\alpha}{2}} = 26{,}29$ (из таблички)

тогда: $\frac{17 \cdot 16}{26{,}29} \le \sigma^2_x \le \frac{17 \cdot 16}{7{,}96}$

$$\Downarrow$$

$$10{,}35 \le \sigma^2_x \le 34{,}17$$