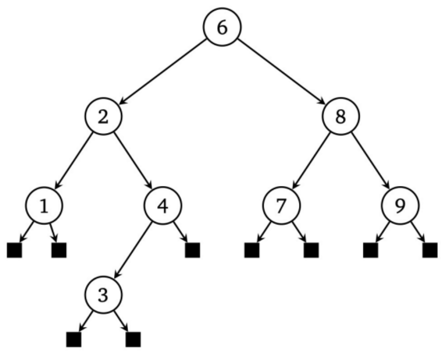
АиСД | ДЗ-6| 6.12.24

Потякин Арсений, БПИ-237

TODO:

1. Сравните конфигурации AVL-дерева, красно-черного дерева, 2-3(-4) дерева, которые возникают в результате последовательной вставки упорядоченной последовательности значений A $= \{1, 2, \ldots, n\}$. При создании какого из деревьев поиска было выполнено наименьшее число преобразований?

2. Найдите две различные правильные красно-черные раскраски вершин этого дерева



3. 1) Верно ли, что любое поддерево красно–черного дерева также само является правильным красно–черным деревом?
   2) Верно ли, что длина самого длинного пути от корня до листа в красно–черном дереве не более, чем в два раза превосходить длину самого короткого?

Task 1: (Сравнение конфигураций трех деревьев)

AVL-дерево: при вставке каждого следующего элемента каждый новый элемент вставляется как правый потомок предыдущего, после чего происходят операции вращения для сохранения свойств дерева (одно или два), в противном случае дерево потеряет свойства. Для каждого нового элемента выполняется следующее: для каждого узла от корня до нового узла проверяем баланс, и при необходимости совершаем вращения. Так как последовательность упорядоченная, то дисбаланс возникает на каждом уровне, а значит каждый уровень требует вращения. Таким образом, каждый новый элемент требует $O(\log n)$ операций, а всего n элементов, то обшее количество преобразований равно $O(n \log n)$

RB-дерево: при вставке каждого следующего элемента каждый новый элемент вставляется как в обычное BST дерево и окрашивается в красный цвет. При вставке упорядоченной последовательности дисбаланс возникает в двух случаях: 1. у красного узла красный родитель; 2. от корня до любого листа должно быть одинаковое число черных узлов. Практически во всех случаях дисбаланс устраняется перекраской узла без вращения. Тем не менее, вращение требуется в случае, если идут два красных узла подряд. Количество подобных исходов для n элементов упорядоченной последовательности можно оценить как $O(\log n)$.

2-3(-4) дерево: каждый новый элемент вставляется в листья, а значит дисбаланс возникает только при переполнении листа. Но переполнение узла влияет лишь на потомков, не влияя на остальную часть дерева. У этого дерева есть лишь две операции для восстановления баланса: разделение переполненного узла и подъем элемента на уровень выше. Переполнение и подъем элемента происходит раз в 3 добавления нового элемента в лист, тем не менее высота дерева наиболее близка к $O(\log n)$, а значит этому же значению пропорционально количество преобразований.

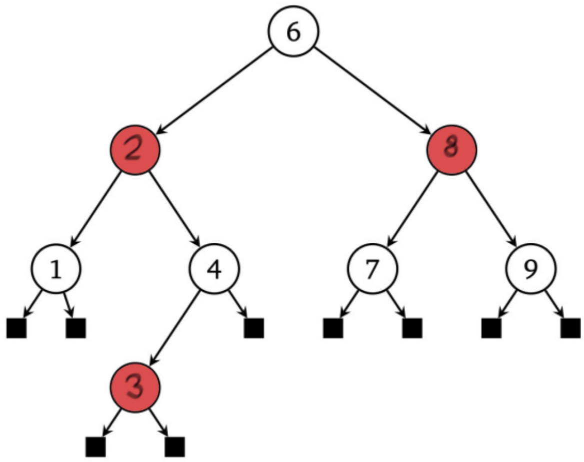
Таким образом, AVL требует наибольшее количество преобразований, а RB и 2-3(-4) дерево примерно равны, но при этом скрытая константа 2-3(-4) дерева меньше, чем у RB дерева, а значит 2-3(-4) дерево требует наименьшее число преобразований.

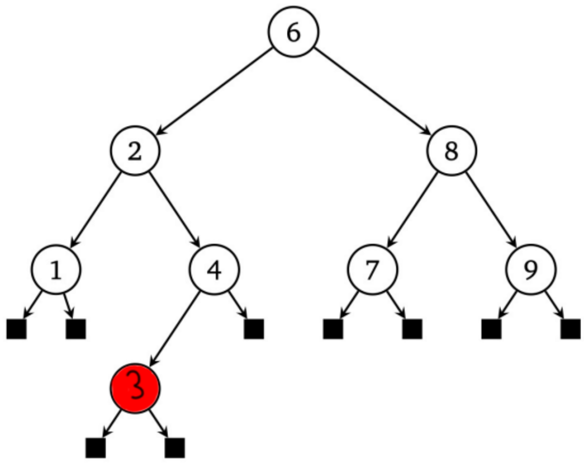
Task 2: (Различные раскраски)

У RB-дерева есть следующие ограничения:

1. Каждый узел красный или черный
2. Корень дерева всегда черный
3. Все листья дерева черные

4. У красного узла не может быть красных потомков
5. На пути от корня до любого из листьев должно быть одинаковое число черных узлов





Task 3.1: (RB поддерево)

Неверно, так как в поддереве корень может быть красным, а в RB дереве корень обязательно черный.

Task 3.2: (Длина пути в RB дереве)

Верно, это достигается в том случае, если длина самого короткого пути от корня до листа равна n, а длина самого длинного пути равна $2n$, на пути которого половина узлов - красные, что не нарушает балансировку RB дерева.