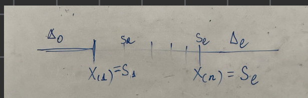
# Лекция 8

## Критерий $\chi^2$ Пирсона

$X_1, \dots, X_n \sim F_\xi(x,\theta),\ \theta \in \Theta \subset R^2$

$H_0: \xi \sim F_\xi(x,\theta)$

1. оценить пар-ры $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ по ММП
2. разбить $R^1$ на $(l+1)$ непересек. инт-валов




3. $\hat{p}_k = \frac{n_k}{n}$ $\quad k = \overline{1, l+1}$

$\underbrace{p_k^{(0)}(\hat\theta)}_{\parallel} = P_{H_0}(\xi \in \Delta_k) \quad k = \overline{0, l}$

$F(S_{k+1}, \hat\theta) - F(S_k, \hat\theta)$

$\hat\chi^2 = \sum_{k=0}^{l} \frac{n}{p_k^{(0)}(\hat\theta)} \left(\hat p_k - p_k^{(0)}(\hat\theta)\right)^2$

$n p_0^{(0)}(\hat\theta) + \sum_{k=1}^{l-1} \frac{n}{p_k^{(0)}} \left(\hat p_k - p_k^{(0)}(\hat\theta)\right)^2 + n p_l^{(0)}(\hat\theta)$

Утв. при $n \to \infty$, $p_k^{(0)}(\hat\theta) > 0$, $\sum_{k=0}^{l} p_k^{(0)}(\theta) = 1$ и соблюдении нек. услов.

$\hat\chi^2 \big|_{H_0} \sim \chi^2(l+1-1-m)$

$X_1, \dots, X_n \sim F_x(t)$

$Y_1, \dots, Y_n \sim F_y(t)$

Опр: выб-ки $X$ и $Y$ назыв. однородными, если $F_x(t) = F_y(t)\quad \forall t \in R^1$

$H_0: F_x(t) = F_y(t) \quad \forall t \in R^1$ (найти $\forall$ точку, где ф-ии не равны)

$X_1, \dots, X_n \sim F(t)$

$Y_1, \dots, Y_n \sim F(t-\theta)$

Пусть $EX_1 < \infty$, тогда $EY_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_y(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_x(t-\theta)\,dt = \left\langle \begin{matrix} t-\theta = z \\ t = z+\theta \end{matrix} \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (z+\theta) f_x(z)\,dz = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} z f_x(z)\,dz}_{Ex} + \theta \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f_x(t)\,dt}_{1} = Ex + \theta$

$H_0: \theta = m_y - m_x = 0$

$H_1: \theta < 0 \quad (m_y < m_x)$

$H_2: \theta > 0 \quad (m_y > m_x)$

$H_3: \theta \neq 0 \quad (m_y \neq m_x)$

## Критерий Стьюдента

$X_1, \dots, X_n \sim N(m_x, \sigma^2)$

$Y_1, \dots, Y_n \sim N(m_y, \sigma^2)$

выб-ки $X$ и $Y$ незав.; $\sigma^2$ неизв., но одинакова

$H_0: m_y - m_x = 0$

$T(x,y) = \frac{\bar y - \bar x}{S\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}}$

$$\boxed{S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m}(x_i - \bar x)^2 + \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar y)^2}{m+n-2}}$$

$T(x,y)\big|_{H_0} \sim t(n+m-2)$

$H_1: \theta < 0$ — $m_y - m_x$; К.О. — $t_{\alpha, m+n-2}$ — Д.О.

$H_2: \theta > 0$ — Д.О. — $t_{1-\alpha, m+n-2}$ — К.О.

$H_3: \theta \neq 0$ — К.О. — $t_{\frac{\alpha}{2}, m+n-2}$ — Д.О. — $t_{1-\frac{\alpha}{2}, m+n-2}$ — К.О.

# Ранговые критерии

Опр: $R(X_{(k)}) = k$

Опр: связка

размер связки

Если связка предшествует $k$ эл-тов вар. р. и связка имеет размер $m$, то все эл-ты связки имеют ранг $\frac{1}{m}\sum_{i=k+1}^{m+k} i$

## Ранговый критерий Вилкоксона (1945)

$x_1, \dots, x_m \sim F(t)$

$y_1, \dots, y_n \sim F(t-\theta)$

выб. $x$ и $y$ незав., $F(t)$ — непрер. распред.

$H_0: \theta = 0$

$W_{m,n} = \sum_{i=1}^{n} R_i$, где $R_i$ — ранг $y_i$ в объед. выборке: $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$

$\min W_{m,n} = \sum_{i=1}^{n} R_i = 1 + \dots + n = (n+1)\frac{n}{2}$

$\max W_{m,n} = \sum_{i=1}^{n} R_i = (n+2m+1)\frac{n}{2}$

$E W_{m,n}\Big|_{H_0} = (n+m+1)\frac{n}{2}$

$D W_{m,n} = \frac{mn}{12}(m+n+1)$