Лекция 5

Задача 5

$x_1, \dots, x_{n_1} \sim N(m_1, \delta_1^2)$ δ_1, δ_2 – изв

$y_1, \dots, y_{n_2} \sim N(m_2, \delta_2^2)$ m_1, m_2 – неизв.

x и y независимые

ДИ для $\theta = m_1 - m_2$

$$T(x,y) = \frac{\bar{x} - \bar{y} - \theta}{\sqrt{\frac{\delta_1^2}{n_1} + \frac{\delta_2^2}{n_2}}}$$

Задача 6

Пусть $x_1, \dots, x_{n_1} \sim N(m_1, \delta^2)$ δ^2 – неизвест

$y_1, \dots, y_{n_2} \sim N(m_2, \delta^2)$

x и y – независимые

Утв: 1) $$\frac{\sum_{i=1}^{n_1} \frac{(x_i - \bar{x})^2}{\delta}}{\sum_{j=1}^{n_2} \frac{(y_j - \bar{y})^2}{\delta}} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

2) $$\frac{\bar{x} - \bar{y} - (m_1 - m_2)}{\sqrt{D(\bar{x} - \bar{y})}} = \frac{\bar{x} - \bar{y} - (m_1 - m_2)}{S\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$$

$$\boxed{\begin{gathered} D(\bar{x} - \bar{y}) = D\bar{x} + D\bar{y} = \frac{\delta^2}{n_1} + \frac{\delta^2}{n_2} = \delta^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) \\ S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (x_i - \bar{x})^2 + \sum_{j=1}^{n_2} (y_j - \bar{y})^2}{n_1 + n_2 - 2} \end{gathered}}$$

$$P\left(-t_{1-\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2} < \frac{\bar{x} - \bar{y} - \theta}{S\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} < t_{1-\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2}\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(-t_{1-\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2} \cdot S\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} - (\bar{x} - \bar{y}) < \theta < t_{1-\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2} \cdot S\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} - (\bar{x} - \bar{y})\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\bar{x} - \bar{y} - t_{1-\frac{\alpha}{2}, \dots} \cdot S\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} < \theta < \bar{x} - \bar{y} + t_{1-\frac{\alpha}{2}, \dots} \cdot S\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\right) = 1 - \alpha$$

АДИ (асимптотический доверительный интервал)

$x_1, \dots, x_n \sim F(x, \theta)$, $\theta \in \Theta \subset R^1$

$\hat{\theta}_n$ – сост. оценка θ,

$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow[n \to \infty]{d} U$, $U \sim N(0, \delta^2(\theta))$ и $\delta^2(\theta)$ непрерывна по θ

$$P\left(\tilde{z}_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)}{\delta(\hat{\theta})} < \tilde{z}_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \longrightarrow 1 - \alpha$$

$$P\left(\hat{\theta}_n - \frac{\tilde{z}_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \delta(\hat{\theta})}{\sqrt{n}} < \theta < \hat{\theta}_n + \frac{\tilde{z}_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \delta(\hat{\theta})}{\sqrt{n}}\right) \longrightarrow 1 - \alpha$$

Если $\exists$ R-эффективная оценка $\hat{\theta}_n$, то выборка её $D\hat{\theta}_n = \frac{1}{i_n(\theta)}$

$$P\left(\hat{\theta}_n - \frac{\tilde{z}_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n \cdot I_1(\hat{\theta})}} < \theta < \hat{\theta}_n + \frac{\tilde{z}_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n \cdot I_1(\hat{\theta})}}\right) \longrightarrow 1 - \alpha$$

Пример: $x_1, \dots, x_n \sim Bi(1, \theta)$, АДИ для θ

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$ – несмещ., сост., R-эффективная

$$Dx_i = \theta(1-\theta)$$

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow[n\to\infty]{d} U,\ U \sim N(0, \theta(1-\theta))$$

ДИ: $$P\left(\hat{\theta} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sqrt{\hat{\theta}(1-\hat{\theta})}}{\sqrt{n}} < \theta < \hat{\theta} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sqrt{\hat{\theta}(1-\hat{\theta})}}{\sqrt{n}}\right) \longrightarrow 1-\alpha$$

Статистические гипотезы

основная – та, которую рассматривают
альтернативная (-ые) – та (те), которая конкурирует с основной

$X_1, \dots, X_n \sim F_\xi(x, \theta)$
H_1: $\xi \sim N(m, \sigma^2)$ – сложная
H_2: $\xi \sim N(5, \sigma^2)$ – сложная
H_3: $\xi \sim N(5, 36)$ – простая

$\xi \sim N(m, 36)$
H_4: $m > 5$ – сложная | односторонние
H_5: $m < 5$ – сложная | односторонние
H_6: $m \neq 5$ – сложная, двусторонняя
H_7: $m \in [1;3]$ – сложная
H_8: сегодня хорошая погода – не явл. статистической

Опр: стат. критерием наз. правило, руководствуясь которым, на основании реализации $x_1, \dots, x_n$ выборки $X_1, \dots, X_n$ принимается решение о справедливости гипотезы H_0.

$P(X \in S_1 \mid \text{верна } H_0) = \alpha$ ← уровень значимости

$P(X \in S_0 / \text{верна } H_1) = 1 - \beta$

Опр: пусть критерий предназначен для проверки $H_0: \theta = \theta_0$ пр. $H_1: \theta \neq \theta_0$: функцией мощности критерия называется:

$$\beta(\theta) = P(X \in S_1, \theta)$$