Семинар 5

1. По выборке $X_1, \dots, X_n$,соответствующей распределению Пуассона $\Pi(\theta)$, постройте асимптотический доверительный интервал для параметра θ.

$\hat{p} \to p \Rightarrow \sigma(\hat{p}) \to \sigma(p)$

$X_i \sim \Pi(\theta) \Rightarrow \begin{matrix} Ex = \theta \\ Dx = \theta \end{matrix}$

$$\frac{\hat\theta - E\hat\theta}{\sqrt{D\hat\theta}} = \frac{\hat\theta - \theta}{\sqrt{\frac{\theta}{n}}} \overset{\text{ЦПТ}}{\sim} N(0;1)$$

$\hat\theta = \bar{x}$ – сост. и эффф.

$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

$\alpha = 1 - \gamma$

$E\bar{x} = E\hat\theta = \theta$

$D\bar{x} = \frac{Dx}{n} = \frac{\theta}{n}$

$P(T_1 < \theta < T_2) = \gamma$

$P\left(z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\hat\theta - \theta}{\sqrt{\frac{\theta}{n}}} < z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$

...

$\hat\theta - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat\theta}{n}} < \theta < \hat\theta + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat\theta}{n}}$

$\theta \in \left(\bar{x} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\bar{x}}{n}}\right)$

2. Для проверки качества деталей из большой партии выбрали 200 деталей. Среди выбранных деталей оказалось 12 бракованных. Постройте доверительный интервал уровня надёжности 0.95 для доли бракованных деталей.

$S_n = \sum x_i \sim Bi(p, n)$

$W_n = \frac{S_n}{n} = \frac{\sum x_i}{n} = \bar{x}$

по Муавру-Лапласу

$N\left(p, \frac{pq}{n}\right) \Rightarrow \frac{W_n - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \sim N(0;1)$

$\Downarrow$

$\sigma = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$

$\hat{p} \to p \Rightarrow \sigma(\hat{p}) \to \sigma(p) \Rightarrow \sigma(\hat{p}) = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$

$-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \le \frac{W_n - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \le z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

$\hat{p} = \bar{x}$ – сост. и эффф.

$-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \le \frac{\bar{x} - p}{\sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}}} \le z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

$-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}} \le \bar{x} - p \le z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}}$

$\hat{p} = \bar{x} = \frac{k}{n} = \frac{12}{200} = 0{,}06$

$0{,}0271 \le p \le 0{,}0929$

3. Проводится две серии независимых испытаний по схеме Бернулли. В первой серии проведено n_1 испытаний, во второй - n_2 испытаний. Предполагается, что n_1 и n_2 достаточно велики. Построить асимптотический доверительный интервал для разности вероятностей "успеха" в двух сериях. (Показать, что статистика $\frac{\hat{p}_1-\hat{p}_2-(p_1-p_2)}{\sqrt{\widehat{D}(\hat{p}_1-\hat{p}_2)}}$, где $\widehat{D}(\hat{p}_1-\hat{p}_2)=\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1}+\frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}$, имеет асимптотически стандартное нормальное распределение).

$X_1,\dots,X_n \sim Bi(1,p_1)$; $\bar{x}=\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} x_i \sim N\left(p_1,\frac{p_1q_1}{n_1}\right)$; $\bar{x}\to p_1$

$y_1,\dots,y_n \sim Bi(1,p_2)$; $\bar{y}=\frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} y_i \sim N\left(p_2,\frac{p_2q_2}{n_2}\right)$; $\bar{y}\to p_2$

$(\bar{x}-\bar{y})\sim N(p_1-p_2;\ D(\bar{x}-\bar{y}))$

$D(\bar{x}-\bar{y})=D\bar{x}+D\bar{y}-2\mathrm{cov}(\bar{x},\bar{y}) \xRightarrow{\bar{x},\bar{y}\text{ - незав.}} D(\bar{x})+D(\bar{y})$

$(\bar{x}-\bar{y})\sim N\left(p_1-p_2;\ \frac{p_1q_1}{n}+\frac{p_2q_2}{n}\right)$

$$\frac{(\bar{x}-\bar{y})-(p_1-p_2)}{\sqrt{\frac{p_1q_1}{n_1}+\frac{p_2q_2}{n_2}}}\sim N(0;1)$$

по т. о наследовании сходимости: $\hat{p}_1\xrightarrow{P}p_1 \Rightarrow \delta(\hat{p}_1)\xrightarrow{P}\delta(p_1)$

$$\frac{(\bar{x}-\bar{y})-(p_1-p_2)}{\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1}+\frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}}\sim N(0;1)$$

$P(T_1\le p_1-p_2\le T_2)=\gamma$

$z_{\frac{\alpha}{2}}\le\frac{\bar{x}-\bar{y}-(p_1-p_2)}{\sigma}\le z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

Ответ: $p_1-p_2\in \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1}+\frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}+(\bar{x}-\bar{y})$