Семинар 3 — 25.01

суббота, 25 января 2025 г. 11:12

9. (Задача 7, Семинар 1) Выборка $X_1, \dots, X_n$соответствует распределению F(x), а $\widehat{F_n}(x)$ - эмпирическая функция распределения, построенная по выборке $X_1, \dots, X_n$. Используя неравенство Чебышёва, для любого t>0 укажите верхнюю границу для следующей вероятности
$$P(\sqrt{n}|\widehat{F_n}(x) - F(x)| > t).$$

св-ва $\hat{F}_n(x)$:
1) $E\hat{F}_n(x) = F(x)$ 2) $D\hat{F}_n(x) = \frac{F(x)(1-F(x))}{n}$

$X \sim F(x)$

$$P(\sqrt{n}|\hat{F}_n(x) - F(x) > t) \leq \frac{D\hat{F}(x)}{t^2} = \frac{F(x)(1-F(x))}{t^2} \leq \frac{1}{4t^2}$$

$Z = \sqrt{n}\,\hat{F}_n(x)$

$EZ = E(\sqrt{n}\hat{F}_n(x)) = \sqrt{n}F(x)$

$$DZ = D(\sqrt{n}\hat{F}_n(x)) = nD(\hat{F}_n(x)) = n\frac{F(x)(1-F(x))}{n} = F(x)(1-F(x))$$

$$D\hat{F}_n(x) \leq \frac{1}{4n} \leq n\cdot\frac{1}{4n} = \frac{1}{4}$$

10. (Задача 8, Семинар 1) Выборка $X_1, \dots, X_n$соответствует распределению F(x), а $\widehat{F_n}(x)$ - эмпирическая функция распределения, построенная по выборке $X_1, \dots, X_n$ достаточно большого объёма. Используя теорему Муавра-Лапласа, вычислите следующую вероятность $P\left(\sqrt{n}|\widehat{F_n}(x) - F(x)| > t\right)$ при любом t>0.

$$P(a \leq x \leq b) = P\left(\frac{a - Ex}{\sqrt{Dx}} \leq x^* \leq \frac{b - Ex}{\sqrt{Dx}}\right)$$

$$P(\underbrace{\sqrt{n}|\hat{F}_n(x)}_{Z} - \underbrace{F(x)}_{EZ}| > t)$$

$$\sqrt{n}(|\hat{F}_n(x) - E\hat{F}_n(x)|) \xrightarrow{d} N(0; \sigma^2) \text{ (по ЦПТ)}$$

$$P(y > t) = 1 - P(y \leq t) = 1 - P\left(\frac{y - 0}{\sqrt{\frac{F(x)(1-F(x))}{n}}} \leq \frac{t - 0}{\sqrt{\frac{F(x)(1-F(x))}{n}}}\right) = \Phi_0\left(\frac{t}{\sqrt{\frac{F(x)(1-F(x))}{n}}}\right) + 0{,}5$$

дисперсия

5. Выборка $X_1, \dots, X_n$ соответствует нормальному распределению $N(\mu, \sigma^2)$ с известным параметром σ^2. Является ли оценка $\hat{\mu} = \bar{X}$ эффективной и состоятельной?

$X_1, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$

$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_k - \bar{X})^2$

$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}$

1) $E\hat{\mu} = E\bar{x} = Ex = \mu$

2) $L(x_1, \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

3) $\ln L(x_1, \mu) = \dots$

4) $\frac{\partial \ln L(x_1, \mu)}{\partial \mu} = \dots$

5) $I_1(\mu) = E\left[\frac{\partial \ln L(\ )}{\partial \mu}\right]^2 = \dots$

6) $I_n(\mu) = n \cdot I_1(\mu)$

7) $D\hat{\mu} = \dots \overset{?}{=} \frac{1}{I_n(\mu)}$

проверка состоятельности:

$P(|\hat{\mu} - \mu| > \varepsilon) \to 0$

$P(|x - Ex| > \varepsilon) \leq \frac{Dx}{\varepsilon^2}$

$P(|\hat{\mu} - \mu| > \varepsilon) = P(|\hat{\mu} - E\hat{\mu}| > \varepsilon) \leq \frac{D\hat{\mu}}{\varepsilon^2}$

$D\hat{\mu} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$D\hat{\mu} = D\bar{x} = \frac{Dx}{n}$

Покажем, что $D\hat{\mu} \to 0$: $\lim_{n\to\infty} D\hat{\mu} = \lim_{n\to\infty}\frac{Dx}{n} = 0$

1) $L(x_1, \dots, x_n, \theta) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{n} P\{X_i = x_i\} & \text{дискрет} \\ \prod_{i=1}^{n} f_x(x_i) & \text{непрерыв} \end{cases}$

2) $\ln L(x_1, \dots, x_n, \theta)$

3) $\frac{\partial \ln L(x_1, \dots, x_n, \theta)}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \hat{\theta} = \dots$

хотим

Метод моментов:

$\mu_1 = Ex^1 = Ex$

$\mu_2 = Ex^2 = Dx + (Ex)^2$

$\begin{cases} \hat{\mu}_1 = \mu_1 \\ \hat{\mu}_2 = \mu_2 \end{cases}$

$\hat{\mu}_1 = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

$\hat{\mu}_2 = \bar{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$

3. Выборка $X_1, \dots, X_n$соответствует геометрическому распределению $G(\theta)$. Построить оценку МП и оценку по ММ для неизвестного параметра θ.

$X \sim G(\theta)$

ММ: $Ex = \frac{1}{\theta}$ $Dx = \frac{1-\theta}{\theta^2}$

$\mu_1 = Ex = \frac{1}{\theta}$

$\hat{\mu}_1 = \mu_1$

$\bar{x} = \frac{1}{\theta}$

$\hat{\theta}_{ММ} = \frac{1}{\bar{x}}$

ММП: 1) $L(x_1, \dots, x_n, \theta) = \prod_{i=1}^{n}(1-\theta)^{x_i - 1}\theta$

2) $\ln L(\ ) = \ln\prod_{i=1}^{n}(1-\theta)^{x_i-1}\theta = \sum_{i=1}^{n}\ln\left((1-\theta)^{x_i-1}\theta\right) = \sum_{i=1}^{n}\left[(x_i - 1)\ln(1-\theta) + \ln(\theta)\right] =$

$= \ln(1-\theta)\sum_{i=1}^{n}(x_i - 1) + n\cdot\ln(\theta) = \ln(1-\theta)\sum_{i=1}^{n}x_i - \ln(1-\theta)\cdot n + n\cdot\ln(\theta)$