

**Свойства статистических оценок**

1. Выборка  $X_1, \dots, X_n$  соответствует распределению  $R(0; \theta)$ . Доказать, что  $\hat{\theta} = X_{(n)}$  является асимптотически несмещённой и состоятельной оценкой неизвестного параметра  $\theta$ .
2. Выборка  $X_1, \dots, X_n$  соответствует распределению Пуассона  $\Pi(\theta)$ . Показать, что оценка  $\hat{\theta} = \bar{X}$  является эффективной по Рао-Крамеру оценкой неизвестного параметра  $\theta$ .
3. Выборка  $X_1, \dots, X_n$  соответствует распределению Пуассона  $\Pi(\theta)$ . Пользуясь критерием эффективности, постройте эффективную по Рао-Крамеру оценку параметра  $\theta$ .
4. Выборка  $X_1, \dots, X_n$  соответствует нормальному распределению  $N(m, \theta)$  с известным параметром  $m$ . Найдите информацию Фишера  $I_1(\theta)$  и покажите, что оценка  $\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2$  является эффективной по Рао-Крамеру оценкой параметра  $\theta$ .  
Указание: Если СВ  $X$  имеет нормальное распределение  $N(0, \sigma^2)$ , то  $EX^4 = 3\sigma^4$ .
5. Выборка  $X_1, \dots, X_n$  соответствует нормальному распределению  $N(m, \theta)$  с известным параметром  $m$ . Пользуясь критерием эффективности, постройте эффективную по Рао-Крамеру оценку параметра  $\theta$ .

**Домашнее задание**

1. Вычислите выборочный коэффициент корреляции между экзаменационными оценками студентов вашей группы по двум (на ваш выбор) предметам.
2. Выборка  $X_1, \dots, X_n$  соответствует распределению  $R(0; \theta)$ . Пусть  $\hat{\theta} = 2\bar{X}$ . Является ли оценка  $\hat{\theta}$  несмещённой и состоятельной оценкой неизвестного параметра  $\theta$ ?
3. Выборка  $X_1, \dots, X_n$  соответствует распределению  $R(\theta_1; \theta_2)$ . Доказать, что  $\hat{\theta} = X_{(1)}$  является асимптотически несмещённой и состоятельной оценкой неизвестного параметра  $\theta_1$ .
4. Найти математическое ожидание выборочной ковариации. Доказать, что выборочная ковариация является асимптотически несмещённой оценкой ковариации.
5. Выборка  $X_1, \dots, X_n$  соответствует биномиальному распределению  $Bi(k, \theta)$ ,  $k$  известно. Показать, что оценка  $\hat{\theta} = \frac{\bar{X}}{k}$  является эффективной по Рао-Крамеру оценкой неизвестного параметра  $\theta$ .
6. Выборка  $X_1, \dots, X_n$  соответствует биномиальному распределению  $Bi(k, \theta)$ ,  $k$  известно. Пользуясь критерием эффективности, постройте эффективную по Рао-Крамеру оценку параметра  $\theta$ .