Семинар 2 — 17.01

пятница, 17 января 2025 г. 18:01

$\hat{\theta}$ – оценка $\theta$

| Свойство | Как проверить |
|---|---|
| Несмещённость | $E[\hat{\theta}(Z_n)] = \theta$ |
| Асимптотич. несмещённость при $n\to\infty$ | $\lim\limits_{n\to\infty} E[\hat{\theta}(Z_n)] = \theta$ |
| Состоятельность | $\hat{\theta}(Z_n) \xrightarrow{P} \theta$ при $n\to\infty$: $\lim\limits_{n\to\infty} P\{\lvert\hat{\theta}-\theta\rvert \le \varepsilon\} = 1 \Rightarrow D[\hat{\theta}]$ |

по нер-ву Чебышёва: $P\{|X_n - Ex| > \varepsilon\} \le \frac{Dx}{\varepsilon^2}$

$P\{|X_n - Ex| \le \varepsilon\}$

а значит $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|\hat{\theta}-\theta| > \varepsilon\} = 0 \Rightarrow D[\hat{\theta}] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Сильная состоятельность $\hat{\theta}(Z_n) \xrightarrow{п.н.} \theta$ $\quad P\{\omega: \lim\limits_{n\to\infty} x_n(\omega) = x(\omega)\} = 1$

Эффективность (нужна несмещённость) $\quad D[\hat{\theta}^*(Z_n)] \le D[\hat{\theta}(Z_n)]$

метод Рао–Крамера: $\quad \mathcal{L}(X_1,\theta) = f_{X_1}(x_1)$ (для непрерывных)

0. проверим несмещённость
1. строим ф-ию правдоподобия $\mathcal{L}(X_1,\theta) = P\{X_1 = x_1\}$
2. находим логарифм ф-ии правдоподобия: $\ln \mathcal{L}(x_1,\theta)$
3. находим производную по парам. $\theta$ от $\ln\mathcal{L}(x_1,\theta)$: $\frac{\partial \ln \mathcal{L}(x_1,\theta)}{\partial\theta}$
4. находим информацию Фишера: $I_1(\theta) = E\left[\left(\frac{\partial \ln\mathcal{L}(x_1,\theta)}{\partial\theta}\right)^2\right]$
5. $I_n(\theta) = n\cdot I_1(\theta)$
6. находим $D[\hat{\theta}]$
7. Если $D[\hat{\theta}] = \frac{1}{I_n(\theta)}$, то $\hat{\theta}$ эффективна

Ф-ия правдоподобия (общий сл.) $\quad \mathcal{L}(X_1,\dots,X_n,\theta) = \prod\limits_{i=1}^{n} P\{X_i = x_i\}$

1. Выборка $X_1,\dots,X_n$ соответствует распределению $R(0;\ \theta)$. Доказать, что $\hat{\theta}=X_{(n)}$ является асимптотически несмещённой и состоятельной оценкой неизвестного параметра $\theta$.

алгоритм: 1) $\lim E[\hat{\theta}] = \theta$ 2) $E[\hat{\theta}] \to Ex = \int\limits_a^b x f(x)\,dx \Rightarrow f_X(x) = F_X'(x)$

$X_i \sim R(0,\theta)$

$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ \frac{x}{\theta}, & x\in[0;\theta] \\ 1, & x>\theta \end{cases}$

$EX_{(n)}$

$F_{X_{(n)}}(x) = (F_X(x))^n$

$f_{X_{(n)}}(x) = F'_{X_{(n)}}(x) = ((F_X(x))^n)' = n(F_X(x))^{n-1}\cdot F_X'(x) = n\cdot(F_X(x))^{n-1}\cdot f_X(x)$

$F_{X_{(n)}}(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ \frac{x^n}{\theta^n}, & x\in[0;\theta] \\ 1, & x>\theta \end{cases} \qquad f_{X_{(n)}}(x) = \begin{cases} 0, & x\notin[0,\theta] \\ \frac{n x^{n-1}}{\theta^n}, & x\in[0,\theta] \end{cases}$

$$EX_{(n)} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_{X_{(n)}}(x)\,dx = \int\limits_0^{\theta} x\cdot n\frac{x^{n-1}}{\theta^n}\,dx = \frac{n}{\theta^n}\int\limits_0^{\theta} x^n\,dx = \frac{n}{\theta^n}\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^{\theta} = \frac{n}{\theta^n}\cdot\frac{\theta^{n+1}}{n+1} = \frac{n\cdot\theta}{n+1} \ne \theta$$

$\lim\limits_{n\to\infty} E[\hat{\theta}] = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\cdot\theta}{n+1} = \theta \Rightarrow$ асимптотически несмещённая

$\forall\varepsilon>0 \quad \lim\limits_{n\to\infty} P\{|X_{(n)}-\theta| < \varepsilon\} = 1$ – треб. состоям.

$P(|x - Ex| > \varepsilon) \le \frac{Dx}{\varepsilon^2}$ – нер. Чебышёва

Заметим, что $P(|X_{(n)} - \underset{\theta}{\underset{\|}{Ex}}| > \varepsilon) \le \frac{DX_{(n)}}{\varepsilon^2}$

$$DX_{(n)} = EX_{(n)}^2 - (EX_{(n)})^2 = \frac{n\cdot\theta^2}{n+2} - \frac{n^2\cdot\theta^2}{(n+1)^2} = \theta^2\cdot n\left(\frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+1)^2(n+2)}\right) = \frac{\theta^2\cdot n}{(n+1)^2(n+2)}$$

$$EX_{(n)}^2 = \int\limits_0^{\theta} x^2 f_{X_{(n)}}(x)\,dx = \int\limits_0^{\theta} x^2\frac{n}{\theta^n}x^{n-1}\,dx = \frac{n}{\theta^n}\int\limits_0^{\theta} x^{n+1}\,dx = \frac{n}{\theta^n}\cdot\frac{x^{n+2}}{n+2}\Big|_0^{\theta} = \frac{n\cdot\theta^{n+2}}{\theta^n\cdot(n+2)} = \frac{n\cdot\theta^2}{n+2}$$