Свойства статистических оценок

1. Выборка $X_1, \dots, X_n$ соответствует распределению R(0; θ). Доказать, что $\hat{\theta}$=$X_{(n)}$ является асимптотически несмещённой и состоятельной оценкой неизвестного параметра θ.

2. Выборка $X_1, \dots, X_n$ соответствует распределению Пуассона $\Pi(\theta)$. Показать, что оценка $\hat{\theta}$= $\bar{X}$ является эффективной по Рао-Крамеру оценкой неизвестного параметра θ.

3. Выборка $X_1, \dots, X_n$ соответствует распределению Пуассона $\Pi(\theta)$. Пользуясь критерием эффективности, постройте эффективную по Рао-Крамеру оценку параметра θ.

4. Выборка $X_1, \dots, X_n$ соответствует нормальному распределению $N(m, \theta)$ с известным параметром m. Найдите информацию Фишера $I_1(\theta)$ и покажите, что оценка $\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_1^n (x_i - m)^2$ является эффективной по Рао-Крамеру оценкой параметра θ.
Указание: Если СВ X имеет нормальное распределение $N(0, \sigma^2)$, то $EX^4 = 3\sigma^4$.

5. Выборка $X_1, \dots, X_n$ соответствует нормальному распределению $N(m, \theta)$ с известным параметром m. Пользуясь критерием эффективности, постройте эффективную по Рао-Крамеру оценку параметра θ.

Домашнее задание

1. Вычислите выборочный коэффициент корреляции между экзаменационными оценками студентов вашей группы по двум (на ваш выбор) предметам.

2. Выборка $X_1, \dots, X_n$ соответствует распределению R(0; θ). Пусть $\hat{\theta}$= $2\bar{X}$. Является ли оценка $\hat{\theta}$ несмещённой и состоятельной оценкой неизвестного параметра θ?

3. Выборка $X_1, \dots, X_n$ соответствует распределению R($\theta_1; \theta_2$). Доказать, что $\hat{\theta}$=$X_{(1)}$ является асимптотически несмещённой и состоятельной оценкой неизвестного параметра θ_1.

4. Найти математическое ожидание выборочной ковариации. Доказать, что выборочная ковариация является асимптотически несмещённой оценкой ковариации.

5. Выборка $X_1, \dots, X_n$ соответствует биномиальному распределению Bi(k,θ), k известно. Показать, что оценка $\hat{\theta}$= $\frac{\bar{X}}{k}$ является эффективной по Рао-Крамеру оценкой неизвестного параметра θ.

6. Выборка $X_1, \dots, X_n$ соответствует биномиальному распределению Bi(k,θ), k известно. Пользуясь критерием эффективности, постройте эффективную по Рао-Крамеру оценку параметра θ.

Св-ва статистических оценок

Св-во	Как проверить
Несмещенность	$E[\hat{\Theta}(Z_n)] = \Theta$
Асимптотическая (при $n \to \infty$)	$\lim\limits_{n\to\infty} E[\hat{\Theta}(Z_n)] = \Theta$
Состоятельность	$\hat{\Theta}(Z_n) \xrightarrow{P} \Theta$ при $n \to \infty$: $\lim\limits_{n\to\infty} P\{\lvert\hat{\Theta} - \overset{=E\hat{\Theta}}{\Theta}\rvert \le \varepsilon\} = 1 \Rightarrow D\hat{\Theta}$ Неравенство Чебышёва: $P\{\lvert X_n - EX\rvert > \varepsilon\} \le \frac{DX}{\varepsilon^2}$ $P\{\lvert X_n - EX\rvert \le \varepsilon\}$ $\lim\limits_{n\to\infty} P\{\lvert\hat{\Theta} - \Theta\rvert > \varepsilon\} = 0 \Rightarrow D\hat{\Theta} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
сильная состоятельн	$\hat{\Theta}(Z_n) \xrightarrow{п.н.} \Theta$ $P\{\omega : \lim\limits_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\} = 1$
эффективность (нужна несмещенность)	$D[\hat{\Theta}^*(Z_n)] \le D[\hat{\Theta}(Z_n)]$ Метод Рао–Крамера 0. Проверить несмещенность 1. Строим функцию правдоподобия → $\mathcal{L}(x_1, \Theta) = P\{X_1 = x_i\}$ → $\mathcal{L}(x_1, \Theta) = f_{X_1}(x_i)$ 2. Находим логарифм ФП: $\ln \mathcal{L}(x_1, \Theta)$ 3. Находим производную $\ln \mathcal{L}(x_1, \Theta)$ по параметру Θ: $\frac{\partial \ln \mathcal{L}(x_1, \Theta)}{\partial \Theta}$ 4. Находим информацию Фишера: $I_1(\Theta) = E\left[\left(\frac{\partial \ln \mathcal{L}(x_1, \Theta)}{\partial \Theta}\right)^2\right]$ 5. $I_n(\Theta) = n \cdot I_1(\Theta)$ 6. Находим $D[\hat{\Theta}]$ 7. Если $D[\hat{\Theta}] = \frac{1}{I_n(\Theta)}$, то $\hat{\Theta}$ — эффективна

1. Выборка $X_1, \dots, X_n$ соответствует распределению R(0; θ). Доказать, что $\hat{\theta}=X_{(n)}$ является асимптотически несмещённой и состоятельной оценкой неизвестного параметра θ.

$X_{(n)} = \max(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$

θ асимптотически несмещенная по опр, если $\lim\limits_{n\to\infty} E[\hat{\theta}(X_n)] = \theta$

состоятельная: $\hat{\theta}$ сходится к θ

$X_1, \dots, X_n \sim R(0; \theta)$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & 0 \le x \le \theta \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \qquad F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x}{\theta}, & 0 \le x \le \theta \\ 1, & x > \theta \end{cases}$$

$$F_{X_{(n)}}(x) = P(X_{(n)} \le x) = [F_X(x)]^n = \left(\frac{x}{\theta}\right)^n, \quad 0 \le x \le \theta$$

$$f_{X_{(n)}}(x) = (F_{X_{(n)}}(x))' = \left(\left(\frac{x}{\theta}\right)^n\right)' = n \cdot \left(\frac{x}{\theta}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{\theta}, \quad 0 \le x \le \theta$$

$$F_{X_{(n)}}(x) = (F_X(x))^n$$

$$f_{X_{(n)}}(x) = F'_{X_{(n)}}(x) = ((F_X(x))^n)'$$

$$F_{X_{(n)}}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x^n}{\theta^n}, & x \in [0; n] \\ 1, & x > \theta \end{cases}$$

$$f_{X_{(n)}}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0; \theta] \\ n\frac{x^{n-1}}{\theta^n}, & x \in [0; \theta] \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} E(\hat{\theta}) = \lim_{n\to\infty} \frac{n\theta}{n+1} = \theta$$

асимптот. несмещенность

Чтобы доказать состоятельность нужно дойти до: $P(|X_{(n)} - \theta| > \varepsilon) \to 0, \ \forall \varepsilon > 0$

$P(|X - EX| > \varepsilon) \le \frac{DX}{\varepsilon^2}$ – неравенство Чебышева

$$P(|X_{(n)} - \underset{\theta}{\underset{\parallel}{EX_{(n)}}}| > \varepsilon) \le \frac{DX_{(n)}}{\varepsilon^2} = \frac{\theta^2 n}{\varepsilon^2 (n+1)^2 (n+2)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$DX_{(n)} = EX^2_{(n)} - (EX_{(n)})^2 = \frac{n \cdot \theta^2}{n+2} - \frac{n^2 \cdot \theta^2}{(n+1)^2} = \theta^2 n \left(\frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+1)^2 (n+2)}\right) = \frac{\theta^2 n}{(n+1)^2 (n+2)}$$

$$EX^2_{(n)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_{X_{(n)}}(x)\,dx = \int_0 x^2 \cdot \frac{n}{\theta^n} x^{n-1}\,dx = \frac{n}{\theta^n} \int_0^{\theta} x^{n+1}\,dx = \frac{n}{\theta^n} \frac{x^{n+2}}{n+2}\Big|_0^{\theta} = \frac{n \cdot \theta^{n+2}}{\theta^n (n+2)} = \frac{n \cdot \theta^2}{n+2}$$

2. Выборка $X_1, \dots, X_n$ соответствует распределению Пуассона П(θ). Показать, что оценка $\hat{\theta} = \bar{X}$ является эффективной по Рао-Крамеру оценкой неизвестного параметра θ.

$$P(X=k) = \frac{\theta^k}{k!} e^{-\theta}$$

$X \sim П(\theta)$

$EX = \theta$

$DX = \theta$

0) $E[\hat{\theta}] = E[\bar{X}] = E\left[\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} E[X] = \frac{1}{n} \cdot n \cdot EX = EX = \lambda = \theta$ (по Пуас)

1) строим ф-цию правдоподобия

$$\mathcal{L}(x_1, \theta) = P(X_1 = x_1) = \frac{\theta^{x_1}}{x_1!} e^{-\theta}$$

2) $\ln \mathcal{L}(x_1, \theta) = \ln \frac{\theta^{x_1}}{x_1!} + \ln e^{-\theta} = -\theta + \ln \frac{\theta^{x_1}}{x_1!} = -\theta + \ln \theta^{x_1} - \ln(x_1!) = -\theta + x_1 \ln \theta - \ln(x_1!)$

3) Находим производную по θ: $\frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \theta} = \frac{\partial(-\theta + x_1 \ln\theta - \ln(x_1!))}{\partial \theta} = \frac{x_1 - \theta}{\theta}$

4) Находим информ. Фишера: $I_1(\theta) = E\left[\left(\frac{\partial \ln \mathcal{L}(x_1, \theta)}{\partial \theta}\right)^2\right]$

$$E\left[\left(\frac{x_1 - \theta}{\theta}\right)^2\right] = E\left[\frac{(x_1 - \theta)^2}{\theta^2}\right] = \frac{1}{\theta^2} E[(X_1 - \theta)^2] = \frac{1}{\theta^2} E[(X_1 - EX_1)^2] = \frac{1}{\theta^2} \cdot DX_1 = \frac{1}{\theta^2} \cdot \theta = \frac{1}{\theta}$$

5) $I_n(\theta) = n I_1(\theta) = \frac{n}{\theta}$

6) находим $D[\hat{\theta}]$

$$D[\hat{\theta}] = D[\bar{X}] = D\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} DX_1 = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \underset{\theta}{\underset{\downarrow}{DX_1}} = \frac{\theta}{n}$$

7) $D[\hat{\theta}] = \frac{1}{I_n(\theta)}$, то $\hat{\theta}$ – эффективн

$$D[\hat{\theta}] = \frac{1}{\frac{n}{\theta}} = \frac{\theta}{n} \Rightarrow D[\hat{\theta}] = \frac{1}{I_n[\theta]} \Rightarrow \text{оценка эффективна}$$

3. Выборка $X_1, \dots, X_n$ соответствует распределению Пуассона $\Pi(\theta)$. Пользуясь критерием эффективности, постройте эффективную по Рао-Крамеру оценку параметра θ.

Оценка $\hat{\theta}(Z_n)$ параметра θ является R-эффективной $\Leftrightarrow$ когда $\exists$ некоторая функция $a\theta$ такая, что

$$\hat{\theta}(Z_n) - \theta = a(\theta)\cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \ln \mathcal{L}(x_k, \theta)}{\partial \theta}}$$

$$\hat{\theta} - \theta = a(\theta) \sim$$

нашли в задаче ранее

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \ln \mathcal{L}(x_k, \theta)}{\partial \theta} = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k - \theta}{\theta} = \frac{1}{\theta}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \theta) = \frac{1}{\theta}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{k=1}^{n}\theta\right) = \frac{1}{\theta}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k - n\theta\right) = \frac{1}{\theta}\sum_{k=1}^{n} x_k - n$$

$$\hat{\theta} - \theta = a(\theta)\cdot\left(\frac{1}{\theta}\sum_{k=1}^{n} x_k - n\right) = \underbrace{a(\theta)\frac{1}{\theta}}\cdot\sum_{k=1}^{n} x_k - \underbrace{a(\theta)\cdot n}$$

$$a(\theta)\cdot n = \theta \Rightarrow a(\theta) = \frac{\theta}{n} \qquad \Rightarrow \hat{\theta} = \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = \overline{x}}_{\text{вот это обязательно писать}}$$

подставляем $a(\theta) = \frac{\theta}{n}$

$$a(\theta)\cdot\frac{1}{\theta} = \frac{\theta}{n}\cdot\frac{1}{\theta} = \frac{1}{n}$$

4. Выборка $X_1, \dots, X_n$ соответствует нормальному распределению $N(m, \theta)$ с известным параметром m. Найдите информацию Фишера $I_1(\theta)$ и покажите, что оценка $\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_1^n (x_i - m)^2$ является эффективной по Рао-Крамеру оценкой параметра θ.

Указание: Если СВ X имеет нормальное распределение $N(0, \sigma^2)$, то $EX^4 = 3\sigma^4$.

выборка $\{x_1, \dots, x_n\} \sim N(m, \theta)$

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - m)^2$$

1) несмещенность

$$E\hat{\theta} = E\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - m)^2\right] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(x_k - m)^2 = \frac{1}{n}\cdot n\cdot E(x_1 - m)^2 = E(x_1 - m)^2 = Dx_1 = \theta$$

2) $\mathcal{L}(x_1, \theta) = f_{x_1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} e^{-\frac{(x - m)^2}{2\theta}}$

3) $\ln \mathcal{L}(x_1, \theta) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} e^{-\frac{(x_1 - m)^2}{2\theta}}\right) = -\frac{1}{2}\ln(2\pi\theta) - \frac{(x_1 - m)^2}{2\theta}$

4) $\frac{\partial \ln \mathcal{L}(x_1, \theta)}{\partial \theta} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{2\pi\theta} + \frac{(x_1 - m)^2}{2\theta^2} = \frac{(x_1 - m)^2 - \theta}{2\theta^2}$

5) $\left[\frac{(x_1 - m)^2 - \theta}{2\theta^2}\right]^2 = \frac{(x_1 - m)^4 - 2(x_1 - m^2)\theta + \theta^2}{4\theta^4}$

$$E\left[\frac{(x_1 - m)^4 - 2(x_1 - m)^2\theta + \theta^2}{4\theta^2}\right] = \frac{1}{4\theta^2}\Big(\underbrace{E\left[(x_1 - m)^4\right]}_{\substack{? \\ EX^4 = 3\theta^2 \\ \text{из условия}}} \underbrace{- 2\theta \underbrace{E(x_1 - m)^2}_{Dx = \theta} + \theta^2}_{-2\theta^2 + \theta^2 = -\theta^2}\Big) = \frac{1}{4\theta^4}(3\theta^2 - \theta^2) = \frac{1}{2\theta^2}$$

$$D\hat{\theta} = D\,\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - m)^2 - \left(-\frac{1}{n^2}\cdot n\, D(x_1 - m)^2\right) = \frac{1}{n}\Big(\underbrace{E(x - m)^4}_{3\theta^2} - \big(\underbrace{E(x - m)^2}_{Dx = \theta}\big)^2\Big) = \frac{1}{n}(3\theta^2 - \theta^2) = \frac{2\theta^2}{n}$$

$D\hat{\theta} = \frac{1}{I_n} \Rightarrow \hat{\theta}$ эффективн

на следующем семинаре ср

Домашняя работа семинар 2

1. Подготовьте данные для вычисления выборочного коэффициента корреляции между экзаменационными оценками студентов вашей группы по двум (на ваш выбор) предметам. (взято с дз к 1 семинару)

X – экзаменационные оценки за Теорвер

Y – экзаменационные оценки за Матстат

$X = \{10, 9, 8, 10, 7, 6, 10\}$

$Y = \{8, 10, 7, 9, 10, 6, 8\}$

$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{7}(10+9+8+10+7+6+10) = 8\frac{4}{7} \approx 8{,}57$

$\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{1}{7}(8+10+7+9+10+6+8) = 8\frac{2}{7} \approx 8{,}29$

Теоретич. момент	Выборочн. момент
$\mu_r = E[X^r]$	$\hat{\mu}_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i)^r$
EX	$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
$D_r = E[(X-EX)^r]$	$\hat{D}_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^r$
$DX = E[(X-EX)^2]$	$\hat{D}x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$
$K_{xy} = E[(X-EX)(Y-EY)]$	$\hat{K}_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})$
$\rho_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sqrt{DX\cdot DY}}$	$\hat{\rho}_{xy} = \frac{\hat{K}_{xy}}{\sqrt{\hat{D}x\cdot\hat{D}y}}$

$\widehat{cov}(x,y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y}) = \frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7}(x_i-8{,}57)(y_i-8{,}29) =$

$= \frac{(10-8{,}57)(8-8{,}29)+(9-8{,}57)(10-8{,}29)+(8-8{,}57)(7-8{,}29)+}{7}$

$\frac{+(10-8{,}57)(9-8{,}29)+(7-8{,}57)(10-8{,}29)+(6-8{,}57)(6-8{,}29)+(10-8{,}57)(8-8{,}29)}{7} = \frac{10331}{70000} + \frac{9503}{17500} =$

$= \frac{48343}{70000} \approx 0{,}69$

$\hat{D}x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2 = \frac{(10-8{,}57)^2+(9-8{,}57)^2+(8-8{,}57)^2+(10-8{,}57)^2+(7-8{,}57)^2+(6-8{,}57)^2+(10-8{,}57)^2}{7} = 2{,}24$

$\hat{D}y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2 = \frac{(8-8{,}29)^2+(10-8{,}29)^2+(7-8{,}29)^2+(9-8{,}29)^2+(10-8{,}29)^2+(6-8{,}29)^2+(8-8{,}29)^2}{7} = 2{,}34$

$\hat{\rho}_{xy} = \frac{\widehat{cov}(x,y)}{\sqrt{\hat{D}x\,\hat{D}y}} = \frac{0{,}69}{\sqrt{2{,}24\cdot 2{,}34}} = \frac{23\sqrt{91}}{728} \approx 0{,}301$

2. Выборка $X_1, \dots, X_n$ соответствует распределению $R(0;\theta)$. Пусть $\hat{\theta} = 2\overline{X}$. Является ли оценка $\hat{\theta}$ несмещённой и состоятельной оценкой неизвестного параметра θ?

$X_1, \dots, X_n \sim R(0;\theta) \qquad \hat{\theta} = 2\overline{x} \qquad EX = \frac{\theta}{2} \Rightarrow \theta = 2EX$

из $R(0;\theta) \sim X$

$\hat{\theta}$ несмещенная если $E(\hat{\theta}) = \theta$

$E(\hat{\theta}) = E(2\overline{x}) = E\left(2\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = 2\cdot\frac{1}{n}\cdot n\cdot EX = 2EX = \theta$

$\Rightarrow$ несмещенная

состоятельность:

$P(|2\overline{x} - \theta| > \varepsilon) \to 0, \ \forall\varepsilon > 0$

$P(|X - EX| > \varepsilon) \le \frac{DX}{\varepsilon^2}$ – неравенство Чебышева

$P(|2\overline{x} - E(2\overline{x})| > \varepsilon) \le \frac{D(2\overline{x})}{\varepsilon^2} = \frac{\theta^2}{3n\cdot\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow$ состоятельная

$D(X_i) = \frac{\theta^2}{12}$ из равномерного распределения

$D(2\overline{x}) = 4D(\overline{x}) = 4\cdot\frac{\theta^2}{12n} = \frac{\theta^2}{3n}$

3. Выборка $X_1, \dots, X_n$ соответствует распределению $R(\theta_1;\theta_2)$. Доказать, что $\hat{\theta} = X_{(1)}$ является асимптотически несмещённой и состоятельной оценкой неизвестного параметра θ_1.

$X_1, \dots, X_n \sim R(\theta_1;\theta_2) \qquad EX = \frac{\theta_2+\theta_1}{2}$

$X_{(1)} = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$

$\hat{\theta}$ асимптотически несмещенная

$E[\hat{\theta}] = E[X_{(1)}] =$

$f_{X_{(1)}}(x) = n(1-F_X(x))^{n-1} f_X(x)$

$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x<\theta_1 \\ \frac{x-\theta_1}{\theta_2-\theta_1}, & \theta_1 \le x \le \theta_2 \\ 1, & x > \theta_2 \end{cases} \qquad f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta_2-\theta_1}, & \theta_1 \le x \le \theta_2 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

$f_{X_{(1)}}(x) = \begin{cases} \frac{n}{\theta_2-\theta_1}\left(1-\frac{x-\theta_1}{\theta_2-\theta_1}\right)^{n-1}, & \theta_1 \le x \le \theta_2 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

$E[X_{(1)}] = \int_{\theta_1}^{\theta_2} x\,\frac{n}{\theta_2-\theta_1}\left(1-\frac{x-\theta_1}{\theta_2-\theta_1}\right)^{n-1}dx = n\cdot\frac{\theta_2-\theta_1}{n(n+1)} + n\cdot\theta_1\cdot\frac{1}{n} = \frac{\theta_2-\theta_1}{n+1} + \theta_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} \theta_1 \Rightarrow$ асимптотич. несмещенной

Состоятельность:

$$P(|X_{(1)}-\theta|>\varepsilon)\xrightarrow[n\to\infty]{}0,\ \forall\varepsilon>0$$

$$P(|X-EX|>\varepsilon)\le\frac{DX}{\varepsilon^2}$$ – неравенство Чебышева

$$P(|X_{(1)}-EX_{(1)}|>\varepsilon)\le\frac{DX_{(1)}}{\varepsilon^2}=\frac{(\theta_2-\theta_1)^2}{\varepsilon^2 n(n+1)}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

$$DX_{(1)}=E[(X_{(1)})^2]-(E(X_{(1)}))^2=\frac{(\theta_2-\theta_1)^2}{n(n+1)}$$

$$E[(X_{(1)})^2]=\frac{2(\theta_2-\theta_1)^2}{(n+1)(n+2)}+\frac{2\theta_1(\theta_2-\theta_1)}{n+1}+\theta_1^2$$

4. Найти математическое ожидание выборочной ковариации. Доказать, что выборочная ковариация является асимптотически несмещённой оценкой ковариации.

$$\hat{K}_{xy}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\overline{x}\,\overline{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i\right)$$

$$E[\hat{K}_{xy}]=E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_iy_j\right]=$$

$$E[x_i]=\mu_x$$

$$E[y_i]=\mu_y$$

$$E[\hat{K}_{xy}]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}k(x_i,y_i)+\mu_x\mu_y-\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mu_x\mu_y$$

$$E[\hat{K}_{xy}]=k(x,y)-\frac{1}{n}k(x,y)$$

$$E[\hat{K}_{xy}]=\frac{n-1}{n}k(x,y)$$

асимптотическая несмещенность:

$$\lim_{n\to\infty}E[\hat{K}_{xy}]=\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}k(x,y)=k(x,y)\Rightarrow$$ асимптотически несмещенная, ЧТД

5. Выборка $X_1,\dots,X_n$ соответствует биномиальному распределению $\mathrm{Bi}(\mathrm{k},\theta)$, k известно. Показать, что оценка $\hat{\theta}=\frac{\overline{X}}{k}$ является эффективной по Рао-Крамеру оценкой неизвестного параметра θ.

$$X_1,X_2,\dots,X_n\sim Bi(k,\theta)\qquad \hat{\theta}=\frac{\overline{X}}{k}$$

по биномиальному распределению: $EX=np=k\theta\Rightarrow\theta=\frac{EX}{k}$

$$P(x=m)=C_n^m p^m(1-p)^{n-m}=C_k^m\theta^m(1-\theta)^{k-m}$$

$$DX=(1-p)np=(1-\theta)\cdot k\theta$$

1) проверка несмещенности

$$E[\hat{\theta}]=E\left[\frac{\overline{X}}{k}\right]=E\left[\frac{1}{kn}\sum_{i=1}^{n}x_i\right]=\frac{1}{k}EX=\theta$$

2) строим функцию правдоподобия

$$L(x_1,\theta)=P(X_1=x_1)=C_k^{x_1}\theta^{x_1}(1-\theta)^{k-x_1}$$

3) $$\ln(L(x_1,\theta))=\ln\left(C_k^{x_1}\theta^{x_1}(1-\theta)^{k-x_1}\right)=x_1\cdot\ln(\theta)+(k-x_1)\cdot\ln(1-\theta)$$

4) производная по θ от 3 пункта

$$\frac{\partial(x_1\cdot\ln(\theta)+(k-x_1)\ln(1-\theta))}{\partial\theta}=\frac{x_i-k\theta}{\theta-\theta^2}$$

5) находим информацию Фишера:

$$I_i=E\left[\left(\frac{x_i-k\theta}{\theta-\theta^2}\right)^2\right]=-\left(-\frac{k}{\theta}-\frac{k}{1-\theta}\right)=\frac{k}{\theta}+\frac{k}{1-\theta}$$

так неочень удобно, сделаем через 2 производную

$$\frac{\partial^2\left(\frac{x_i-k\theta}{\theta-\theta^2}\right)^2}{\partial\theta^2}=-\frac{x_i}{\theta^2}-\frac{k-x_i}{(1-\theta)^2}$$

$$E\left[-\frac{x_i}{\theta^2}-\frac{k-x_i}{(1-\theta)^2}\right]=-\frac{1}{\theta^2}E[x_i]-\frac{1}{1-\theta^2}E[k-x_i]=$$

$$=-\frac{Ex}{\theta^2}-\frac{Ek-Ex}{1-\theta^2}=-\frac{k\theta}{\theta^2}-\frac{k-k\theta}{1-\theta^2}=-\frac{k}{\theta}-\frac{k}{1-\theta}$$

6) $I_n = n\left(\frac{k}{\theta} + \frac{k}{1-\theta}\right)$

7) $D[\hat{\theta}] = D\left[\frac{\overline{X}}{k}\right] = \frac{1}{k^2} D(\overline{X}) = \frac{1}{k^2} D\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right] = \frac{1}{k^2}\cdot\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Dx = \frac{1}{nk^2} Dx = \frac{1}{nk^2}\cdot(1-\theta)k\theta = \frac{\theta(1-\theta)}{nk}$

8) $D[\hat{\theta}] = \frac{1}{I_n(\theta)}$, то $\hat{\theta}$ – эффективная

$$\frac{\theta(1-\theta)}{nk} = \frac{1}{n\left(\frac{k}{\theta} + \frac{k}{1-\theta}\right)}$$

$$\cancel{\theta(1-\theta)}\, n\left(\frac{k \cancel{- k\theta + k\theta}}{\cancel{\theta - \theta^2}}\right) = nk$$

$nk = nk$, чтд, => $\hat{\theta}$ – эффективная

6. Выборка $X_1, \ldots, X_n$ соответствует биномиальному распределению Bi(k,θ), k известно. Пользуясь критерием эффективности, постройте эффективную по Рао-Крамеру оценку параметра θ.

$X_1, \ldots, X_n \sim Bi(k, \theta)$

$Ex = np = k\theta$

$Dx = (1-p)np = (1-\theta)k\theta$

$\hat{\theta} = \frac{\overline{X}}{k}$

$$\hat{\theta}(z_n) - \theta = a(\theta) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \ln \alpha(x_i, \theta)}{\partial \theta}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \ln(x_i, \theta)}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - k\theta}{\theta - \theta^2} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\theta - \theta^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{k\theta}{\theta - \theta^2}$$

$$\hat{\theta} - \theta = a(\theta)\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\theta - \theta^2} - a(\theta)\sum_{i=1}^{n} \frac{k\theta}{\theta - \theta^2}$$

$$\frac{nk\theta}{\theta - \theta^2} = \frac{nk}{1-\theta}$$

$$\frac{a(\theta)\cdot nk}{1-\theta} = \theta$$

$$a(\theta) = \frac{\theta(1-\theta)}{nk}$$

$$\frac{\theta(1-\theta)}{nk}\cdot\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\theta - \theta^2} =$$

$$= \frac{\cancel{\theta(1-\theta)}}{\cancel{\theta(1-\theta)}nk}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{\overline{x}}{k} = \hat{\theta}$$