Семинар 5

5. Имеются независимые выборки $X_1, \dots, X_n$ (соответствует распределению $N(m_1, \sigma^2)$) и выборка $Y_1, \dots, Y_k$ (соответствует распределению $N(m_2, \sigma^2)$). Пользуясь утверждением теоремы 4.2 из лекции 4, постройте центральный доверительный интервал для разности средних $m_1 - m_2$ гауссовских величин с одинаковыми, но неизвестными дисперсиями σ^2.

$X_1, \dots, X_n \sim N(m_1, \delta^2)$ $\qquad$ $Y_1, \dots, Y_k \sim N(m_2, \delta^2)$

$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ $\qquad$ $\bar{y} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} y_i$

$S_x^2 = \frac{1}{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ $\qquad$ $S_y^2 = \frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k}(y_i - \bar{y})^2$

$$S_{xy} = \sqrt{\frac{(n-1)S_x^2 + (k-1)S_y^2}{n+k-2}}$$

(1) $\frac{S_x^2}{S_y^2} \sim F(n-1; k-1)$

(2) $T = \frac{(\bar{x}-\bar{y}) - (m_1 - m_2)}{S_{xy}} \sim t(n+k-2)$

$$P(T_1 < m_1 - m_2 < T_2) = 1-\alpha$$

$$P(t_{\frac{\alpha}{2}} < m_1 - m_2 < t_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha$$

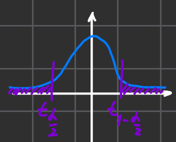
$$t_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{(\bar{x}-\bar{y}) - (m_1 - m_2)}{S_{xy}} < t_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

$$t_{\frac{\alpha}{2}}\cdot S_{xy} < (\bar{x}-\bar{y}) - (m_1 - m_2) < t_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot S_{xy}$$

$$t_{\frac{\alpha}{2}}\cdot S_{xy} - (\bar{x}-\bar{y}) < -(m_1 - m_2) < t_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot S_{xy} - (\bar{x}-\bar{y})$$

$$(\bar{x}-\bar{y}) - t_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot S_{xy} < m_1 - m_2 < (\bar{x}-\bar{y}) - t_{\frac{\alpha}{2}}\cdot S_{xy}$$

$$(\bar{x}-\bar{y}) - t_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot S_{xy} < m_1 - m_2 < (\bar{x}-\bar{y}) + t_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot S_{xy}$$



$\boxed{\text{концы ДИ: } (\bar{x}-\bar{y}) \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot S_{xy}}$

6. В метеорологии принято характеризовать температуру месяца ее средним значением (среднее значение температуры месяца равно сумме температур всех дней данного месяца, деленной на число дней в этом месяце). В таблице ниже приведены значения средней температуры января в г. Саратове и г. Алатыре.

Год	1891	1892	1893	1894	1895	1896	1897
Саратов	–19,2	–14,8	–19,6	–11,1	–9,4	–16,9	–13,7
Алатырь	–21,8	–15,4	–20,8	–11,3	–11,6	–19,2	–13,0

Год	1899	1911	1912	1913	1914	1915	
Саратов	–4,9	–13,9	–9,4	–8,3	–7,9	–5,3	
Алатырь	–7,4	–15,1	–14,4	–11,1	–10,5	–7,2	

Требуется построить доверительный интервал уровня надёжности 0.95 для разности средних значений январских температур в городах Саратове и Алатыре предполагая, что: а) дисперсия среднеянварской температуры в Саратове равна 22, а в Алатыре - 20; б) дисперсия температуры неизвестна, но одинакова для г. Саратова и г. Алатырь. Будем считать, что наблюдения имеют гауссовское распределение.

$n = 13$ $\quad$ а) $\delta_1^2 = 22$ $\quad$ $\bar{x} = -11,88$

$\gamma = 0,95$ $\quad$ $\delta_2^2 = 20$ $\quad$ $\bar{y} = -13,75$

$\alpha = 0,05$ $\quad$ $\bar{x} - \bar{y} = 1,87$

$\bar{x} - \bar{y} \sim N\left(m_1 - m_2, \frac{\delta_1^2}{n} - \frac{\delta_2^2}{n}\right)$

$\boxed{E\bar{x} = Ex_1 \quad D\bar{x} = \frac{Dx}{n}}$

$D(x-y) = D_x + D_y - 2\,cov(x,y)$

$$\frac{\bar{x}-\bar{y}-(m_1-m_2)}{\sqrt{\frac{\delta_1^2}{n}+\frac{\delta_2^2}{n}}} \sim N(0;1)$$

$$P(T_1 \le m_1-m_2 \le T_2) = 1-\alpha$$

$$\tilde{x}_{\frac{\alpha}{2}} \le \frac{\bar{x}-\bar{y}-(m_1-m_2)}{\sqrt{\frac{\delta_1^2}{n}+\frac{\delta_2^2}{n}}} \le \tilde{x}_{1-\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow (m_1-m_2) \in \left[\bar{x}-\bar{y} \pm \tilde{x}_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\delta_1^2}{n}+\frac{\delta_2^2}{n}}\right] \Rightarrow (m_1-m_2) \in \left[1{,}87 \pm 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{42}{13}}\right]$$

б) $P(T_1 \le m_1-m_2 \le T_2) = 0{,}95$

$x \sim N(m_1, \delta^2) \quad y \sim N(m_2, \delta^2)$

$$\frac{\bar{x}-\bar{y}-(m_1-m_2)}{\sqrt{\frac{(n-1)S_1^2+(n-1)S_2^2}{2n-2}}} \sim t(2n-2) \Rightarrow m_1+m_2 \in [1{,}87 \pm 2{,}064 \cdot 4{,}78]$$

$n=k$

$n+k-2 = 2n-2$

1. По выборке $X_1, \dots, X_n$,соответствующей распределению Пуассона $\Pi(\theta)$, постройте асимптотический доверительный интервал для параметра θ.

АДИ: $\left(\hat{\theta} \pm \tilde{x}_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\delta(\theta)}{\sqrt{n}}\right)$

$x_1, \dots, x_n - \Pi(\theta) \Rightarrow Ex = \theta$

$Dx = \theta$

$\delta_x = \sqrt{\theta}$

$\hat{\theta} = \bar{x}$ – сост. и эфф. оц. θ

$\delta(\theta) = \sqrt{\theta}$

$\delta(\hat{\theta}) = \sqrt{\hat{\theta}}$

по АДИ: $\boxed{\bar{x} \pm \tilde{x}_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\bar{x}}{n}}}$