Консультация 1 — 18.01

суббота, 18 января 2025 г. 11:03

2. Выборка $X_1, \dots, X_n$ соответствует распределению Пуассона $\Pi(\theta)$. Показать, что оценка $\hat{\theta} = \bar{X}$ является эффективной по Рао-Крамеру оценкой неизвестного параметра θ.

См. в файле Наташи

3. Выборка $X_1, \dots, X_n$ соответствует распределению Пуассона $\Pi(\theta)$. Пользуясь критерием эффективности, постройте эффективную по Рао-Крамеру оценку параметра θ.

Оценка $\hat{\theta}(Z_n)$ парам. θ является R-эффективная $\Longleftrightarrow$ $\exists$ ф-ия $a(\theta)$ такая, что

$$\hat{\theta}(Z_n) - \theta = a(\theta) \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \ln \mathcal{L}(x_k, \theta)}{\partial \theta}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \ln \mathcal{L}(x_k, \theta)}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_k - \theta}{\theta} \text{ (из задачи 2) } = \frac{1}{\theta} \sum_{k=1}^{n} (x_k - \theta) = \frac{1}{\theta}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{k=1}^{n} \theta\right) =$$

$$= \frac{1}{\theta}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k - n\theta\right) = \frac{1}{\theta} \sum_{k=1}^{n} x_k - n$$

$$\hat{\theta} - \theta = a(\theta) \cdot \left(\frac{1}{\theta} \sum_{k=1}^{n} x_k - n\right) = a(\theta) \frac{1}{\theta} \sum_{k=1}^{n} x_k - a(\theta) \cdot n \Rightarrow a(\theta) \cdot n = \theta \Rightarrow a(\theta) = \frac{\theta}{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k = \bar{x}$$

4. Выборка $X_1, \dots, X_n$ соответствует нормальному распределению $N(m, \theta)$ с известным параметром m. Найдите информацию Фишера $I_1(\theta)$ и покажите, что оценка $\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_1^n (x_i - m)^2$ является эффективной по Рао-Крамеру оценкой параметра θ.
Указание: Если СВ X имеет нормальное распределение $N(0, \sigma^2)$, то $EX^4 = 3\sigma^4$.

$$X \sim N(m, \theta) \qquad \hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (x_k - m)^2$$

1) $E[\hat{\theta}] = E\left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (x_k - m)^2\right] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} E[(x_k - m)^2] = \frac{1}{n} \cdot n\, E[(x_1 - m)^2] = E[(x_1 - m)^2] = D_{x_1} = \theta$

2) $\mathcal{L}(x_1, \theta) = f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\theta}}$

3) $\ln \mathcal{L}(x_1, \theta) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\theta}}\right) = \frac{-(x_1 - m)^2}{2\theta} - \ln\sqrt{2\pi\theta} = \frac{\theta \ln(2\pi\theta) - (x_1 - m)^2}{2\theta} = -\frac{1}{2}\ln(2\pi\theta) - \frac{(x_1 - m)^2}{2\theta}$

4) $\frac{\partial \ln \mathcal{L}(x_1, \theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial \frac{\theta \ln(2\pi\theta) - (x_1 - m)^2}{2\theta}}{\partial \theta} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{2\pi\theta} + \frac{(x_1 - m)^2}{2\theta^2} = \frac{(x_1 - m)^2 - \theta}{2\theta^2}$

5) $\left[\frac{(x_1 - m)^2 - \theta}{2\theta^2}\right]^2 = \frac{(x_1 - m)^4 - 2(x_1 - m)^2\theta + \theta^2}{4\theta^4}$; $E[\;] = \frac{1}{4\theta^4}\left(E[(x_1 - m)^4] \underbrace{- 2\theta E\underbrace{[(x_1 - m)^2]}_{D_x = \theta}}_{-2\theta^2 + \theta^2 = -\theta^2} + \theta^2\right) = \frac{1}{4\theta^4}(3\theta^2 - \theta^2) = \frac{1}{2\theta^2}$

Пусть $y = x_1 - m$
$D_y = D[x_1 - m] = D_{x_1} = \theta$
E_{y^4}
$D_{y^2} = E_{y^2} - (E_y)^2$
$\quad \| \qquad\quad \| \; \theta$
$D_y + m^2 = \theta + m^2$

$$I_n = n I_1 = \frac{n}{2\theta^2}$$

$$D[\hat{\theta}] = D \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (x_k - m)^2 = \frac{1}{n^2} \cdot n^2 D[(x_1 - m)^2] = \frac{1}{n}\left(E[(x - m)^4] - \left(\overbrace{E[(x - m)^2]}^{D_x}\right)^2\right) = \frac{1}{n}(3\theta^2 - \theta^2) = \frac{2\theta^2}{n}$$

$$D[\hat{\theta}] = \frac{1}{I_n(\theta)} \Rightarrow \frac{2\theta^2}{n} = \frac{2\theta^2}{n} \Rightarrow \text{оценка эффективна}$$