10.01 Семинар

$Z_n = (X_1, \dots, X_n)$ – выборка (класс в программировании)

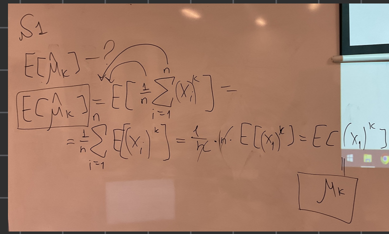
$z_n = (x_1, \dots, x_n)$ – реализация выборки (объект в программировании)

$X_{(1)} \le \dots \le X_{(n)}$ – вариационный ряд

экстремальные эл-ты выборки

Теоретич. мом.	Выборочные мом.
$\mu_k = E[x^k]$	$\hat{\mu}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i)^k$
Ex	$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$
$D_r = [(x - Ex)^r]$ центральный момент	$\hat{D}_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^r$
$Dx = E[(x-Ex)^2]$	$\hat{D}x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$
$cov(x,y) = K_{xy} = E[(x-Ex)(y-Ey)]$	$\hat{K}_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
$\rho_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sqrt{Dx\,Dy}}$	$\hat{\rho}_{xy} = \frac{\hat{K}_{xy}}{\sqrt{\hat{D}x\,\hat{D}y}}$

1. Найти математическое ожидание выборочных начальных моментов.



$E[\hat{\mu}_k]$ – ?

$$E[\hat{\mu}_k] = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i)^k\right] \overset{\text{по линейности мат. ож.}}{=\!=} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[(x_i)^k] =$$

$$= \frac{1}{\cancel{n}}\cdot\cancel{n}\cdot E[(x_1)^k] = E[(x_1)^k] = \mu_k$$

т.к. $x_1,\dots,x_n$ – незав. и один. распред. | $\Downarrow$ мат. ож. выбор момента равен теоретич.

2. Найти дисперсию выборочного среднего.

$D[\bar{x}]$ – ?

$$D[\bar{x}] = D\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right] = \frac{1}{n^2} D\left[\sum_{i=1}^{n} x_i\right] = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} D[x_i]\right) = \frac{1}{n} D[x_1]$$

$$D[\bar{x}] = \frac{Dx}{n} \qquad E[\bar{x}] = Ex$$

$$E[\bar{x}] = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right] = \frac{1}{n} E\left[\sum x_i\right] = \frac{1}{n}\sum x_i = \frac{1}{n}\cdot n\cdot Ex_1 = Ex_1$$

3. Найти математическое ожидание выборочной дисперсии.

$$d_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_k - \bar{x})^2$$

$$E\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})^2\right] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E[(x_k - \bar{x})^2] = (1)$$

$$d_x = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left((x_k - m_x) - (\bar{x} - m_x)\right)^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - m_x)^2 - 2(\bar{x} - m_x)\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - m_x) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\bar{x} - m_x)^2$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - m_x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k - \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} m_x}_{\frac{1}{n}\cdot n\cdot m_x} = \bar{x} - m_x$$

$$+ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\bar{x} - m_x)^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - m_x)^2 - 2(\bar{x} - m_x)^2 + (\bar{x} - m_x)^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - m_x)^2 - (\bar{x} - m_x)^2$$

$$(1) = \frac{1}{n} E\left[\sum_{k=1}^{n}(x_k - m_x)^2\right] - E[(\bar{x} - m_x)^2] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\underbrace{E[(x_k - m_x)^2]}_{Dx_k} - \underbrace{E[(\bar{x} - m_x)^2]}_{D\bar{x}} =$$

$$= \frac{1}{n}\cdot n\cdot D_{x_k} - D_{\bar{x}} = Dx - D_{\bar{x}} = Dx - \frac{Dx}{n} = Dx\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

4. Выборка $X_1, \dots, X_n$ соответствует распределению F(x). Найти распределение экстремальной порядковой статистики $X_{(n)}$.

$$F_{X_{(n)}}(x) = P(X_{(n)} \le x) = P(X_1 \le x, \dots, X_n \le x) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \le x) = F_X^n(x)$$

5. Выборка $X_1, \dots, X_n$ соответствует распределению F(x). Найти распределение экстремальной порядковой статистики $X_{(1)}$.

$$F_{X_{(1)}}(x) = P(X_{(1)} \le x) = 1 - P(X_{(1)} \ge x) = 1 - P(X_1 \ge x, \dots, X_n \ge x) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \underbrace{P(X_i \ge x)}_{1 - F_X(x)} = 1 - (1 - F_X(x))^n$$

$$f_{X_{(n)}}(x) = F'_{X_{(n)}}(x) = n f_X^{n-1}(x)$$

$$f_{X_{(1)}}(x) = n(1 - F_X(x))^{n-1} f_X(x)$$

6. Выборка $X_1, \dots, X_n$ соответствует распределению R(0,1). Найти математическое ожидание экстремальных порядковых статистик $X_{(1)}$ и $X_{(n)}$.

$$F_{X_{(1)}}(x) = \begin{cases} 1, & x > 1 \\ x, & x \in [0;1] \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$f_{X_{(1)}}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0;1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$F_{X_{(n)}}(x) = \begin{cases} 1, & x > 1 \\ x^n, & x \in [0;1] \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$f_{X_{(n)}}(x) = \begin{cases} n x^{n-1}, & x \in [0;1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$E[X_{(n)}] = \int_0^1 x f_{X_{(n)}}(x)\,dx = \int_0^1 n x^n\,dx = n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{n}{n+1}$$