$$I_n(\theta) = E\left(\frac{\partial \ln f(x,\theta)}{\partial\theta}\right)^2$$

Замечание 1: $E\left(\frac{\partial \ln f(x,\theta)}{\partial\theta}\right) = \int\limits_S \frac{\partial \ln f(x,\theta)}{\partial\theta} f(x,\theta)\,dx = 0$

$I_n(\theta) = D\left(\frac{\partial \ln f(x,\theta)}{\partial\theta}\right)$

Замечание 2: $I_n(\theta) = n I_1(\theta)$ $\quad f(x,\theta) = f(x_1,\dots,x_n,\theta) = \prod\limits_{i=1}^{n} f(x_i,\theta)$

$$E\left(\frac{\partial \ln f(x,\theta)}{\partial\theta}\right)^2 = E\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \ln f(x,\theta)}{\partial\theta}\right)^2 = \sum_{i\neq j}\underbrace{E\left(\boxed{\frac{\partial \ln f(x_i,\theta)}{\partial\theta}}\cdot\boxed{\frac{\partial \ln f(x_j,\theta)}{\partial\theta}}\right)}_{E(\;)\cdot E(\;)} + n\,E\left(\frac{\partial \ln f(x_1,\theta)}{\partial\theta}\right)^2 = 0 + n\cdot I_1(\theta)$$

Замечание 3: Пусть $x_1,\dots,x_n \sim N(\theta,\delta^2)$; $\hat\theta = \bar{x}$; $D\bar{x} = \frac{\delta^2}{n}$; $I_1(\theta) = E\left(\frac{\partial \ln f(x_1,\theta)}{\partial\theta}\right)^2 = E\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\delta}e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\delta^2}}\right)\right)^2 =$

$$= E\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\ln\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\delta} - \frac{(x-\theta)^2}{2\delta^2}\right)\right)^2 = E\left(\frac{x-\theta}{\delta^2}\right)^2 = \frac{1}{\delta^4}E(x-\theta)^2 = \frac{\delta^2}{\delta^4} = \frac{1}{\delta^2}$$

$$D\hat\theta \geqslant \frac{1}{n I_1(\theta)} = \frac{\delta^2}{n}$$

Критерий Эффективности

$x_1,\dots,x_n \sim F_\xi(x,\theta) \quad \theta\in\Theta\subset R^1$

выполнены условие регулярности

Опр: функцией вклада выборки $x_1,\dots,x_n$ называется $U(x,\theta) = \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial \ln f(x_i,\theta)}{\partial\theta}$

Пусть $0 < U(x,\theta) < \infty$

$\hat\theta = T(x_1,\dots,x_n)$ – эффективная оценка $\theta \iff \hat\theta - \theta = a(\theta)\cdot U(x,\theta)$, где $a(\theta) = D\hat\theta$

Док-во: "<="

Пусть $\hat\theta - \theta = a(\theta)U(x,\theta) \Rightarrow \hat\theta$ – эффф. оценка θ

$$E(\hat\theta-\theta) = a(\theta)\cdot E\,U(x,\theta) = a(\theta)\cdot\underbrace{\int\frac{\partial \ln f(x,\theta)}{\partial\theta}\cdot f(x,\theta)\,dx}_{=0} \Rightarrow E\hat\theta = \theta$$

$$D(\hat\theta-\theta) = a^2(\theta)\,D\,U(x,\theta) \Rightarrow D\hat\theta = \underbrace{a^2(\theta)}_{(D(\hat\theta))^2} I_n(\theta) \Rightarrow 1 = D\hat\theta\cdot I_n(\theta)$$

константа

$$I_n(\theta) = \frac{1}{D\hat\theta}$$

"=>"

Пусть $\hat\theta$ – эффф. оценка $\theta \Rightarrow \hat\theta - \theta = a(\theta)U(x,\theta)$

$\rho(\hat\theta, U(x,\theta)) = 1$

$$\mathrm{cov}(\hat\theta, U(x,\theta)) = E(\hat\theta-\theta)U(x,\theta) = E\,\hat\theta U(x,\theta) - \theta\underbrace{E\,U(x,\theta)}_{0} =$$

$$= \int\limits_S T(x)\,U(x,\theta)\cdot f(x,\theta)\,dx = \int\limits_S T(x)\frac{\partial \ln f(x,\theta)}{\partial\theta}\cdot f(x,\theta)\,dx$$

т.к. $\hat\theta$ – эффф. оценка θ, то $D\hat\theta = \frac{1}{I_n(\theta)}$

$D\,U(x,\theta) = I_n(\theta)$

$$\rho(\hat\theta, U(x,\theta)) = \frac{\mathrm{cov}(\hat\theta, U(x,\theta))}{\sqrt{D\hat\theta\cdot D\,U(x,\theta)}} = \frac{1}{1} = 1$$

$\rho(\hat\theta, U(x,\theta)) = 1 \Rightarrow \hat\theta = c_1 + c_2\,U(x,\theta)$

$E\hat\theta = c_1 + c_2\,E\,U(x,\theta) = c_1 = \theta$

$D\hat\theta = c_2^2 I_n(\theta) = \frac{1}{I_n(\theta)}$

Методы построения чего-то там

1) метод моментов: $x_1,\dots,x_n \sim F_\xi(x,\theta)$, $\theta\in\Theta\subset R^k$

$\exists\,\mu_i < \infty \quad j = \overline{1,k} \quad \mu_i(\theta) = E\xi^i = \int x^i\cdot f(x,\theta)\,dx$

$$\begin{cases}\hat\mu_i = \mu_1(\theta)\\ \vdots\\ \hat\mu_k = \mu_k(\theta)\end{cases} \quad (*)$$

ф-я от выборки; ф-я от параметра

Если система уравнений (*) однозначно разрешима относительно $\theta_1,\dots,\theta_k$, то решение $\hat\theta_1,\dots,\hat\theta_k$ назыв. оценками $\theta_1,\dots,\theta_k$ по методу моментов

Пример: $x_1,\dots,x_n \sim N(\theta_1,\theta_2^2)$

$\theta = (\theta_1,\theta_2^2)$

$\hat\mu_1 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i = \theta_1$

$\hat\mu_2 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2 = \theta_2^2 + \theta_1^2$

2) метод максимального правдоподобия (ММП)

Опр: функция правдоподобия назыв. ф-я $\mathcal{L}(x_1,\dots,x_n,\theta) = \begin{cases}\prod\limits_{i=1}^{n} f(x_i,\theta), & \text{если } \xi \text{ – непрерывная СВ}\\ \prod\limits_{i=1}^{n} P(\xi = x_i,\theta), & \text{если } \xi \text{ – дискретная СВ}\end{cases}$

Опр: оценкой макс. правдоподобия назыв. значение $\theta\in\Theta$, т.ч.

$$\hat\theta = \arg\max\mathcal{L}(x_1,\dots,x_n,\theta),\quad \theta\in\Theta$$

Опр: ф-я $\ln\mathcal{L}(x_1,\dots,x_n,\theta)$ назыв. логарифмической ф-ей правдоподобия

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\ln\mathcal{L}(x_1,\dots,x_n,\theta)}{\partial\theta_1} = 0 & (1)\\ \vdots\\ \dfrac{\partial\ln\mathcal{L}(x_1,\dots,x_n,\theta)}{\partial\theta_k} = 0 & (k)\end{cases}$$

Пример: $x_1,\dots,x_n \sim N(\theta_1,\theta_2^2)$

$$\mathcal{L}(x_1,\dots,x_n,\theta) = \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\theta_2}\cdot e^{-\frac{(x_i-\theta_1)^2}{2\theta_2^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n\cdot\left(\frac{1}{\theta_2}\right)^n\cdot e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2}{2\theta_2^2}}$$

$$\ln\mathcal{L}(x_1,\dots,x_n,\theta) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n - n\ln\theta_2 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_1)^2}{2\theta_2^2} = \begin{cases}(1) = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\hat\theta_1)}{\hat\theta_2^2} = 0\\ (2) = -\dfrac{n}{\hat\theta_2} + \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\hat\theta_1)^2}{\hat\theta_2^3} = 0\end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\hat\theta_1) = 0 \Rightarrow \hat\theta_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i = \bar{x}$$

$$-n\cdot\hat\theta_2^2 + \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 = 0 \Rightarrow \hat\theta_2^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$