

1. для проверки мат. ожид.  
2. проверки гомогенности

Критерий Стьюдента  
из-за сдвига

гипотезы  
 $H_0: \theta = \mu_0 - \mu_1 = 0$   
 $H_1: \theta > 0$   
 $\theta < 0$   
 $\theta \neq 0$

методы статистич.

$$T = \frac{\bar{y} - \bar{x}}{S_{xy} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim t(N-2)$$

$$S_{xy} = \frac{(n-1)s_x^2 - (n-1)s_y^2}{N-2}$$

$$s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2}{m-1} \quad s_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n-1}$$

условия применения  
 $X_m \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$   
 $Y_n \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$   
выборки независимы  
дисперсии равны

1. для проверки мат. ожид.  
2. проверки гомогенности  
из-за сдвига

Критерий Вилкоксона

$H_0: \theta = 0$   
 $H_1: \theta > 0$   
 $H_2: \theta < 0$

$W_{m,n} = \sum_{j=1}^m R_j$  - ранги эл-тов y в образ. выборке  
 $E[W_{m,n}] = \frac{n}{2}(N+1)$   
 $D[W_{m,n}] = \frac{m \cdot n}{12} (N+1)$   
 $W^* = \frac{W - E[W]}{\sqrt{D[W]}} \sim N(0,1)$   
если есть связь:  
 $D_{jk}[W_{m,n}] = D[W] - \frac{\frac{1}{12} \sum_{k=1}^N (\epsilon_k (\epsilon_k - 1))}{N(N-1)}$   
l-число связей,  $\epsilon_k$  - длина k-ой связи

$X_m \sim F(\epsilon)$   
 $Y_n \sim F(\epsilon - \theta)$   
выборки независимы  
параметры неизвестны  
 $D_x = D_y$

зависимости  
Ранговый крит. Спирмена  
аналог: Кендалл, Пирсон\*

$H_0: \rho_s = 0$  (независимости)  
 $H_1: \rho_s < 0$   
 $H_2: \rho_s > 0$   
 $H_3: \rho_s \neq 0$

$\hat{\rho}_s = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n (R_{x_i} - R_{y_i})^2}{n^3 - n}$   
если есть связь:  
 $\hat{\rho}_s = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n (R_{x_i} - R_{y_i})^2}{n^3 - n}$   
 $u_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (u_{1i}^2 - u_{1i})$   
 $u_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (u_{2i}^2 - u_{2i})$   
q, g - кол-во связей,  $u_{ik}$  - размер связи

сравните до и после оценки и те же ситуации  
один из выборок уже упорядочена  
или тем же знаем эл-ты выборки (в отличие от Пирсона)

зависимости  
Критерий Кендалл  
аналог: Спирмен, Пирсон\*

$H_0: \rho_s = 0$  (независимости)  
 $H_1: \rho_s < 0$   
 $H_2: \rho_s > 0$   
 $H_3: \rho_s \neq 0$

$\hat{\rho}_s = 1 - \frac{4K}{n(n-1)}$ , K - число несовпадений  
вар  
 $\frac{3}{2} \sqrt{n} \hat{\rho}_s \sim N(0,1)$  если есть связь:  
 $\hat{\rho}_s = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{sgn}(x_i - x_j) \text{sgn}(y_i - y_j)}{n(n-1)}$   
 $u_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (u_{1i} - 1)$   
 $u_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (u_{2i} - 1)$

выборки довольно большие  
или тем же знаем эл-ты выборки (в отличие от Пирсона)

зависимости  
Критерий Пирсона  
аналог: Спирмен, Кендалл\*

$H_0: P_{ij} = P_{i.} \cdot P_{.j}$   
 $H_1: \exists (i,j): P_{ij} \neq P_{i.} \cdot P_{.j}$   
K.O. всегда  
критерию

$\chi^2 = n \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^k \frac{(n_{ij} - n_{i.} \cdot n_{.j} / n)^2}{n_{i.} \cdot n_{.j} / n}$   
row column  
если  $m, k \geq 2$   
 $\chi^2 = \frac{n(n_{11}n_{22} - n_{12}n_{21})^2}{n_{1.} \cdot n_{2.} \cdot n_{.1} \cdot n_{.2}}$

наилучшая шкала  
не знаем эл-ты выборки но знаем размер

зависимости  
Критерий основанный на  
выборочном коэфф. корреляции

$H_0: \rho_s = 0$  (независимости)  
 $H_1: \rho_s < 0$   
 $H_2: \rho_s > 0$   
 $H_3: \rho_s \neq 0$

$T = \frac{\sqrt{n-2} \hat{\rho}_{xy}}{\sqrt{1 - \hat{\rho}_{xy}^2}} \sim t(n-2)$  ковариация  
 $\hat{\rho}_{xy} = \frac{\hat{K}_{xy}}{\sqrt{\hat{D}_x \hat{D}_y}}$   
 $R_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x} \bar{y}$   
АДН для  $\rho_{xy}$ :  
 $\hat{\rho}_{xy} = \frac{\hat{r}_{xy} - \hat{r}_{xy}(1 - \hat{\rho}_{xy}^2)}{2n}$   
 $\frac{\hat{r}_{xy} - E \hat{r}_{xy}}{\sqrt{D \hat{r}_{xy}}} \sim N(0,1)$   
 $\sqrt{D \hat{r}_{xy}} \Rightarrow D \hat{r}_{xy} = \frac{(1 - \hat{\rho}_{xy}^2)^2}{n}$

выборки довольно большие  
или тем же знаем эл-ты выборки (в отличие от Пирсона)

1. для отношения дисперс  
2. проверки гомогенности  
из-за сдвига

Критерий Ансари-Брэдли  
ранговый

$H_0: \Delta = \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = 1$   
 $H_1: \Delta < 1$   
 $H_2: \Delta > 1$   
 $H_3: \Delta \neq 1$

$A_{m,n} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left( \frac{m+1}{2} - |R_i - \frac{m+1}{2}| \right) R_j$  - ранг  $X_i$  в образ. выбор.  
 $E[A_{m,n}] = \begin{cases} \frac{m(N+2)}{4}, N - \text{четн.} \\ \frac{m(N+1)}{4}, N - \text{нечетн.} \end{cases}$   
 $D[A_{m,n}] = \begin{cases} \frac{m \cdot n (N+2)(N-2)}{48(N-1)}, N - \text{четн.} \\ \frac{m \cdot n (N+3)(N+1)}{48N^2}, N - \text{нечетн.} \end{cases}$   
 $A^* = \frac{A - E[A]}{\sqrt{D[A]}} \sim N(0,1)$

$X_m \sim F(\epsilon - \mu)$   
 $Y_n \sim F(\frac{\epsilon - \mu}{\Delta})$   
выборки независимы

1. для отношения дисперс  
2. проверки гомогенности  
из-за сдвига

Критерий Фишера  
 $\epsilon_n$  всегда больше 1  
ко всегда правосторон.

$H_0: \Delta < 1$   
 $H_1: \Delta > 1$   
 $\Delta = \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \frac{s_y^2}{s_x^2} \sim F(m-1, n-1)$

$F_{m,n} = \frac{\frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (y_i - \bar{y})^2}{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\tilde{s}_y^2}{\tilde{s}_x^2} \sim F(m-1, n-1)$

зависимости  
 $X_m \sim N(\mu, \sigma_x^2)$   
 $Y_n \sim N(\mu, \sigma_y^2)$   
выборки независимы

$$H_a: \Delta \neq 0: \begin{cases} \tilde{S}_n > \tilde{S}_n^* \Rightarrow F_{n,m} \\ \tilde{S}_n < \tilde{S}_n^* \Rightarrow F_{n,n} \end{cases}$$

$$\tilde{S}_n - \frac{1}{2}$$

$$\tilde{S}_n - \frac{1}{2}$$

Оценка зависимости (Пирсон) сила связи:  $|[0; 0,3]|$  - слабая  
 $|[0,3; 0,7]|$  - умеренная  
 $|[0,7; 1]|$  - сильная

Коэфф. контингенции (для  $2 \times 2$ )

$$Q = \frac{n_{11}n_{22} - n_{12}n_{21}}{n_{1\cdot}n_{2\cdot} + n_{\cdot 1}n_{\cdot 2}} \in [-1; 1] \quad (\text{двусторонняя сила связи})$$

Коэфф. ассоциации (для  $2 \times 2$ )

$$Q = \frac{n_{11}n_{22} - n_{12}n_{21}}{n_{11}n_{21} + n_{12}n_{22}} \quad (\text{односторонняя сила связи})$$

Коэфф. Пирсона (не  $2 \times 2$ )

$$r = \sqrt{\frac{\chi^2}{\chi^2 + n}} \in [0; 1]$$

Коэфф. Крамера (улучшенный Пирсон)

$$c = \sqrt{\frac{\chi^2}{n \cdot \min\{m-1, k-1\}}} \in [0; 1]$$