$$\hat{\theta} - \theta = a(\theta)\frac{1}{2\theta^2}\sum_{k=1}^{n}(x_k - m)^2 - a(\theta)\cdot\frac{n}{2\theta}$$

$$\theta = a(\theta)\cdot\frac{n}{2\theta}$$

$$a(\theta) = \frac{\theta\cdot 2\theta}{n} = \frac{2\theta^2}{n}$$

$$\hat{\theta} = \frac{2\theta^2}{n}\cdot\frac{1}{2\theta^2}\cdot\sum_{k=1}^{n}(x_k - m)^2 = \frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k-m)^2}{n}$$

Консультация

$x_n \sim Bi(k, \theta)$ k известно

построить эфф. оценку θ

$$\hat{\theta} - \theta = a(\theta)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \ln L(x_i,\theta)}{\partial\theta}$$

2. (ДЗ, Семинар 2) Выборка $X_1, \dots, X_n$ соответствует биномиальному распределению Bi(k,θ), k известно. Пользуясь критерием эффективности, постройте эффективную по Рао-Крамеру оценку параметра θ.

1) $L(x_1, \theta) = P_\theta\{X = x_1\} = C_k^{x_1}\theta^{x_1}(1-\theta)^{k-x_1}$

2) $\ln L(x_1,\theta) = \ln(C_k^{x_1}\theta^{x_1}(1-\theta)) = \ln C_k^{x_1} + x_1\ln\theta + (k-x_1)\ln(1-\theta)$

3) $\frac{\partial \ln L(x_1,\theta)}{\partial\theta} = \frac{x_1}{\theta} + \frac{k-x_1}{1-\theta}(1-\theta)' = \frac{x_1}{\theta}^{\backslash 1-\theta} - \frac{k-x_1}{1-\theta}^{\backslash\theta} = \frac{x_1 - \theta x_1 - \theta k + \theta x_1}{\theta(1-\theta)} = \frac{x_1 - \theta k}{\theta(1-\theta)}$

4) $\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \ln L(x_i,\theta)}{\partial\theta} = \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i - \theta x}{\theta(1-\theta)} = \frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\theta(1-\theta)} - \frac{n\theta k}{\theta(1-\theta)}$

5) $a(\theta)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \ln L(x_i,\theta)}{\partial\theta} = a(\theta)\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\theta(1-\theta)} - \frac{nk}{1-\theta}\right) = \frac{a(\theta)\sum_{i=1}^{n}x_i}{\theta(1-\theta)} - \frac{a(\theta)nk}{1-\theta} \Rightarrow \theta = \frac{a(\theta)nk}{1-\theta}$

$a(\theta) = \frac{\theta(1-\theta)}{nk}$

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\theta(1-\theta)}\cdot\frac{\theta(1-\theta)}{nk} = \frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\cdot\frac{1}{k} = \frac{\overline{x}}{k}$$

3. Выборка $X_1, \dots, X_n$ соответствует распределению Пуассона $\Pi(\theta)$. Является ли оценка $\hat{\theta} = \bar{X}$ состоятельной? *Эффективность доказывали на семинаре.*

$\lim_{n\to\infty} P\{|\hat{\theta} - \theta| \le \varepsilon\} = 1$ Неравенство Чебышева $\lim_{n\to\infty} P\{|X - EX| > \varepsilon\} \le \frac{DX}{\varepsilon^2}$

$\lim_{n\to\infty} P\{|\hat{\theta} - \theta| > \varepsilon\} = 0$

$X \sim \Pi(\theta) \Rightarrow \theta = EX,\ DX = \theta$

Можно пользоваться $E\bar{X} = EX$, $D\bar{X} = \frac{DX}{n}$

$E(\hat{\theta}) = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right] = \frac{1}{n}E\sum_{i=1}^{n}X_i =$

$= \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}EX_i = \frac{1}{n}\cdot n\cdot\underset{\text{т.к. } EX=\theta}{\theta} = \theta$

$$P\{|\hat{\theta} - \theta| > \varepsilon\} = P\{|\hat{\theta} - E\hat{\theta}| > \varepsilon\} \le \frac{D\hat{\theta}}{\varepsilon^2} = \frac{D\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right]}{\varepsilon^2} = \frac{\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D[X_i]}{\varepsilon^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\theta}{n^2\varepsilon^2} = \frac{n\theta}{n^2\varepsilon^2} = \frac{\theta}{n\varepsilon^2}\xrightarrow[n\to\infty]{}$$

4. Выборка $X_1, \dots, X_n$ соответствует нормальному распределению $N(\mu, \sigma^2)$ с известным параметром σ^2. Являются ли оценки $\hat{\mu} = \bar{X}$ и $\widehat{\mu^2} = \bar{X}^2$ несмещенными?

$X \sim N(\theta, \sigma^2)$, σ^2 известно

$\hat{\theta} = \bar{x}$

$E\hat{\theta} = \theta = E[\bar{X}] = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right] = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}E[x] = EX = \theta$ несмещенная

$E\hat{\theta}^2 = E[\bar{x}^2] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Ex_i^2 = \frac{1}{n}\cdot n\cdot EX^2 = \sigma^2 + \theta^2 \ne \theta^2$ смещенная

$\underset{\sigma^2}{DX} = EX^2 - \underset{\theta^2}{(EX)^2}$

7. Пусть $X = (X_1, \dots, X_n)$ – случайная выборка из распределения с плотностью

$$f(x;\theta) = \begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} & \text{при } x \ge 0,\\ 0 & \text{при } x < 0\end{cases}$$

где $\theta > 0$. Является ли $\hat{\theta} = \bar{X}$ несмещенной оценкой неизвестного параметра $\hat{\theta}$?

$X_1, X_2, \dots, X_n \sim Exp\left(\frac{1}{\theta}\right)$

$E\hat{\theta} = E\bar{X} = EX = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\frac{1}{\theta}} = \theta$

8. Найти математическое ожидание выборочной дисперсии. Определить, является ли выборочная дисперсия несмещенной оценкой теоретической дисперсии. Определите величину смещения. Выпишите формулу несмещенной выборочной дисперсии.

$\hat{D}x = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})^2$

$E[Dx] = \frac{n-1}{n}Dx = Dx - \frac{1}{n}Dx$ смещение

$\hat{S}_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum(x_k - \bar{x})^2$ – несмещенная оценка дисперсии

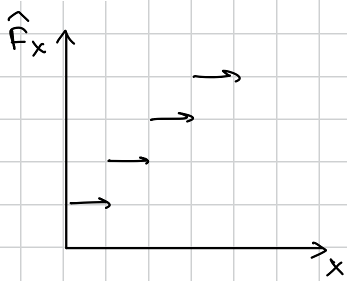
$E[\hat{S}_x^2] = Dx$

9. (Задача 7, Семинар 1) Выборка $X_1, \dots, X_n$ соответствует распределению F(x), а $\widehat{F}_n(x)$ - эмпирическая функция распределения, построенная по выборке $X_1, \dots, X_n$. Используя неравенство Чебышёва, для любого t>0 укажите верхнюю границу для следующей вероятности

$$P(\sqrt{n}|\widehat{F}_n(x) - F(x)| > t).$$

из неравенства чебышева

$P(\sqrt{n}\,|\hat{F}_n(x) - F(x)| > t) \le \frac{D\hat{F}(x)}{t^2} = \frac{F(x)(1-F(x))}{t^2} \le \frac{1}{4t^2}$



$z = \sqrt{n}\,\hat{F}_n(x)$

$Ez = E(\sqrt{n}\,\hat{F}_n(x)) - \sqrt{n}\,F(x)$

$Dz = D(\sqrt{n}\,\hat{F}_n(x)) = n\,\frac{F(x)(1-F(x))}{n} =$

$= F(x)(1-F(x))$

$D\hat{F}_n(x) \le \frac{1}{4n} \le n\cdot\frac{1}{4n} = \frac{1}{4}$

Св-ва $\hat{F}(x)$:

1) $E\hat{F}(x) = F(x)$

2) $D\hat{F}(x) = \frac{F(x)(1-F(x))}{n}$

$Dz = D(\sqrt{n}\,\hat{F}_n(x)) = n\,D[\hat{F}(x)] \le n\cdot\frac{1}{4n} = \frac{1}{4}$

10. (Задача 8, Семинар 1) Выборка $X_1, \dots, X_n$ соответствует распределению F(x), а $\widehat{F}_n(x)$ - эмпирическая функция распределения, построенная по выборке $X_1, \dots, X_n$ достаточно большого объёма. Используя теорему Муавра-Лапласа, вычислите следующую вероятность $P\left(\sqrt{n}\left|\widehat{F}_n(x) - F(x)\right| > t\right)$ при любом t>0.

$P(\sqrt{n}\,|\hat{F}_n(x) - \underbrace{F(x)}_{E[\hat{F}_n(x)]}| > t)$

$\sqrt{n}\,|\hat{F}_n(x) - E[\hat{F}_n(x)]| \xrightarrow{d} \overbrace{N(0;\sigma^2)}^{y}$

$P(y > t) = 1 - P(y \le t) = 1 - P\left(\frac{y}{\underbrace{\sqrt{\frac{F(x)(1-F(x))}{n}}}_{\sqrt{Dx}}} \le \frac{t}{\sqrt{\frac{F(x)(1-F(x))}{n}}}\right) = \Phi_0\left(\frac{t}{\sqrt{\frac{F(x)(1-F(x))}{n}}}\right) + 0{,}5$

из муавра

5. Выборка $X_1, \dots, X_n$ соответствует нормальному распределению $N(\mu, \sigma^2)$ с известным параметром σ^2. Является ли оценка $\hat{\mu} = \bar{X}$ эффективной и состоятельной?

$X_1, \dots, X_n \sim N(\mu; \sigma^2)$

$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})^2$

Метод максимального правдоподобия (ММП) и метод моментов (ММ)

1. Выборка $X_1, \dots, X_n$соответствует гауссовскому распределению $N(\theta_1, \theta_2^2)$. Построить оценку вектора параметров (θ_1, θ_2^2) по методу максимального правдоподобия (МП) и по методу моментов.

2. Выборка $X_1, \dots, X_n$соответствует распределению R(0; θ). Построить оценку МП и оценку по ММ для неизвестного параметра θ.

3. Выборка $X_1, \dots, X_n$соответствует геометрическому распределению $G(\theta)$. Построить оценку МП и оценку по ММ для неизвестного параметра θ.

4. Выборка $X_1, \dots, X_n$ порождена СВ X, плотность распределения которой имеет вид

$$f(x,\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} x^{\frac{1-\theta}{\theta}}, & x \in (0;1) \\ 0, & x \notin (0;1) \end{cases}.$$

Построить оценку МП неизвестного параметра θ. Исследовать несмещённость построенной оценки.

5. Студенты трёх групп сдают письменный экзамен по ТВ, списывание и общение во время экзамена полностью исключено. Будем считать, что вероятность получения отличной оценки для всех одинакова и равна p. В первой группе из 12 студентов «отлично» получили 5 человек, во второй – 4 из 12, в третьей 4 из 15. Постройте ОМП для параметра p.

Домашнее задание

Кибзун А.И., Горяинова Е.Р., Наумов А.В.: стр.203 № 13,14

1. Выборка $X_1, \dots, X_n$соответствует распределению Лапласа, плотность которого имеет вид $f(x,\theta) = \frac{1}{2}\exp\left(-|x-\theta|\right)$. Построить оценку МП и оценку по ММ для неизвестного параметра θ.

2. Выборка $X_1, \dots, X_n$соответствует распределению Пуассона $\Pi(\theta)$. Построить оценку МП и оценку по ММ для неизвестного параметра θ.

Метод максимального правдоподобия

1) $\mathcal{L}(x_1 \dots x_n, \theta) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{n} P\{X_i = x_i \\ \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i) \end{cases}$

2) $\ln \mathcal{L}(x_1 \dots x_n, \theta)$

3) $\frac{\partial \ln \mathcal{L}(x_1 \dots x_n, \theta)}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \hat{\theta} = \dots$

крышка появляется в последней строчке

Метод моментов

$X \sim \dots$ (мы знаем как распределен x)

1) $\mu_1 = EX^1 = EX$

$\mu_2 = EX^2 = DX + (EX)^2$

$\begin{cases} \hat{\mu}_1 = \mu_1 \\ \hat{\mu}_2 = \mu_2 \end{cases}$

$\hat{\mu}_1 = \overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$

$\hat{\mu}_2 = \overline{X^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2$

3. Выборка $X_1, \dots, X_n$ соответствует геометрическому распределению $G(\theta)$. Построить оценку МП и оценку по ММ для неизвестного параметра θ.

$X \sim G(\theta) \qquad EX = \frac{1}{\theta} \qquad DX = \frac{1-\theta}{\theta^2}$

$\mu_1 = EX = \frac{1}{\theta} : \hat{\mu}_1 = \overline{X}$

$\hat{\mu}_1 = \mu_1 \Rightarrow \overline{X} = \frac{1}{\theta} \Rightarrow \hat{\theta}_{MM} = \frac{1}{\overline{X}}$

$\mathcal{L}(x_1 \dots x_n, \theta) = \prod_{i=1}^{n} (1-\theta)^{x_i - 1} \theta$

$\ln \mathcal{L} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - n) \cdot \ln(1-\theta) + n \ln \theta$

$\frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta} - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i - n}{1-\theta} = 0$

$\frac{n}{\theta} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - n}{1-\theta}$

$n(1-\theta) = \theta\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n\right)$

$n - n\theta = \theta \sum_{i=1}^{n} x_i - n\theta$

$n = \theta \sum_{i=1}^{n} x_i$

$\theta = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} = \hat{\theta}$