АиСД | SET-2 | A3

Потякин Арсений

TODO:

1. Вы планируете разработать алгоритм MULT, предназначенный для умножения двух квадратных матриц A и B размерности N × N и асимптотически более эффективный, чем алгоритм Штрассена.

   Разрабатываемый алгоритм будет также использовать стратегию «разделяй–и–властвуй».

   Исходные матрицы A и B разделяются на неизвестное количество фрагментов размера N/4 × N/4 для дальнейшей рекурсивной обработки. Асимптотическая точная граница общих временных затрат на выполнение шагов CONQUER и COMBINE алгоритма MULT — $\Theta(N2)$.

   Таким образом, временная сложность алгоритма MULT будет описываться рекуррентным соотношением T(N) = a · T(N/4) + $\Theta(N^2)$, где коэффициент a отвечает за количество решаемых подзадач — количество блоков-подматриц размерности N/4 × N/4. Например, для алгоритма Штрассена в соответствии с рекуррентным соотношением T(N) = 7 · T(N/2) + $\Theta(N^2)$ известно, что для каждой задачи решается 7 подзадач вдвое меньшего размера.

   В каком диапазоне должен находиться параметр a разрабатываемого вами алгоритма MULT для того, чтобы в результате он был асимптотически более эффективным по временной сложности в сравнении с алгоритмом Штрассена? Обоснуйте свой ответ.

Task 1: (Определение диапазона параметра a)

Из формулы MULT известно, что b = 4, k = 2. Рассчитаем $\log_b a = \log_4 a = \frac{\log a}{\log 4} = \frac{\log a}{2}$. Согласно формуле мастер-теоремы, необходимо, чтобы $\log_b a < k$, чтобы временная сложность была $O(n^k)$. Временная сложность алгоритма Штрассена равна $O(n^{\log_2 7})$. Таким образом, чтобы алгоритм MULT был более эффективным, его сложность должна быть

$O(n^c)$, где $c < \log_2 7$. Подставим это значение: $\frac{\log a}{2} < \log_2 7 \implies \log a < 2\log_2 7 \implies a < 2^{2\log_2 7} \implies a < 49$. Таким образом, параметр а должен находиться в пределах от 1 до 49, или же $[1, 49)$ (ограничение ≥ 1 наложено мастер-теоремой)

Ответ: $[1, 49)$