Тервер | ИДЗ-3 | Вариант 19

Потякин Арсений, БПИ-237

TODO:

1. **Задача 5:** Случайная величина (ξ, η) распределена по нормальному закону с математическим ожиданием (μ_1, μ_2) и ковариационной матрицей:
$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_\xi^2 & cov(\xi;\eta) \\ cov(\eta;\xi) & \sigma_\eta^2 \end{pmatrix}.$$
Найти: $P(\xi - 2\eta > -1)$, если $(\mu_1, \mu_2) = (1; 1,5); \Sigma = \begin{pmatrix} 1,08 & -0.54 \\ -0.54 & 1.08 \end{pmatrix}$.

2. **Задача 6:** В условиях предыдущей задачи найти условную вероятность
$$P(|\eta| < 0,6 | \xi = 4).$$

Задача 5:

Входные данные: $E[\xi] = 1, E[\eta] = 1,5, D[\xi] = 1,08, D[\eta] = 1.08, cov(\xi, \eta) = -0.54$.

Проведем замену $\xi - 2\eta$ на Z.

Что пытаемся найти: $P(\xi - 2\eta > -1) = 1 - P(\xi - 2\eta < -1)$, что представимо в виде 1 - $P(-\infty < \xi - 2\eta < -1) = 1 - P(\frac{-\infty - m_Z}{\sigma_Z} < \frac{Z - m_Z}{\sigma_Z} < \frac{-1 - m_Z}{\sigma_Z})$

Найдем математическое ожидание Z: $E[Z] = E[\xi - 2\eta] = E[\xi] - E[2\eta] = E[\xi] - 2E[\eta]$ (свойство линейности математического ожидания). Тогда: $E[Z] = E[\xi] - 2E[\eta] = 1 - 2 \cdot 1,5 = 1 - 3 = -2$.

Найдем дисперсию Z: $D[Z] = E[Z^2] - (E[Z])^2 = E[(\xi - 2\eta)^2] - (-2)^2 = E[\xi^2 - 4\xi\eta + 4\eta^2] = E[\xi^2] - 4E[\xi\eta] + 4E[\eta^2] - 4$ (let's вспомним, что представляет из себя формула дипрессии в 0 лет: $D[X] = E[X^2] - (E[X])^2 \Longrightarrow E[X^2] = D[X] + (E[X])^2$, заменим математические ожидание квадрата приколов на сумму дипрессии и квадрата математического ожидания и получим): $D[Z] = (D[\xi] + (E[\xi])^2) - 4E[\xi\eta] + 4(D[\eta] + (E[\eta])^2) - 4$ (prikol moment: преобразуем формулу ковариации и найдем чему равно математическое ожидание произведения эты и кси: $E[\xi\eta] = cov(\xi, \eta) + E[\xi]E[\eta]$) ну ничего себе! Заменим значения и получим: $D[Z] = D[\xi] + (E[\xi])^2 - 4cov(\xi, \eta) - 4E[\xi]E[\eta] + 4D[\eta] + (E[\eta])^2 - 4 = 1,08 + 1 - 4 \cdot (-0,54) - 4 \cdot 1 \cdot 1,5 + 4 \cdot 1,08 + 4 \cdot 1,5^2 - 4 = 7,56$. Таким образом, $D[Z] = 7,56$.
$\sigma_Z = \sqrt{D[Z]} = \sqrt{7,24} = \frac{\sqrt{181}}{5}$, что апроксиматели равно 2,69072.
Подставим все это в исходную функцию Лапласа и получим: int answer $= 1 - P(\frac{-\infty+2}{\frac{\sqrt{181}}{5}} < \frac{Z-m_Z}{\sigma_Z} < \frac{-1+2}{\frac{\sqrt{181}}{5}}) = 1 - (\Phi_0(0,371647) + \Phi_0(\infty)) = 1 - (0,1443 + 0,5) = 1 - 0,6443 = 0,3557$.

Ответ: $P(\xi - 2\eta > -1) = 0,3557$.

Задача 6:

$P(|\eta| < 0,6|\xi = 4) \Longrightarrow P(-0,6 < \eta < 0,6|\xi = 4)$

$\exists$ формула условного математического ожидания, выглядит она так:

$$\mu_{\eta|\xi=x} = E_\eta + \frac{cov(\xi, \eta)}{D_\xi}(x - E_\xi)$$

а еще существует формула условной дисперсии:

$$\text{sigmaboy}_{\eta|\xi=x} = \sigma_\eta^2 - \frac{cov^2(\xi, \eta)}{\sigma_\xi^2}$$

дело за малым: подставить все значения в эти чудо-формулы и найти искомые значения

$E[\eta|\xi = 4] = 1,5 + \frac{-0,54}{1,08}(4 - 1) = 0$

$D[\eta|\xi = 4] = 1,08 - \frac{(-0,54)^2}{1,08} = 0,81$

$\sigma_{\eta|\xi=4} = \sqrt{D[\eta|\xi = 4]} = 0,9$

Последний штрих: $P(-0,6 < \eta < 0,6|\xi = 4) = P(\frac{-0,6-0}{0,9} < \frac{\eta - m_{\eta|\xi=4}}{\sigma_{\eta|\xi=4}} < \frac{0,6-0}{0,9}) = \Phi_0(0,667) - \Phi_0(-0,667) = 0,2485 + 0,2485 = 0,497.$

Ансвер: $P(|\eta| < 0,6|\xi = 4) = 0,497$