Тервер | ИДЗ-2 | Вариант 19

Потякин Арсений, БПИ-237

TODO:

1. ЗАДАЧА 3. Плотность распределения СВ ξ имеет вид:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} cx^2, & \text{если } x \in (-3,-1) \\ 0, & \text{если } x \notin (-3,-1). \end{cases}$$

   Найти:
   а) константу c
   б) функцию распределения СВ ξ
   в) построить график функции плотности распределения СВ и график функции распределения СВ
   г) $E(4-2\xi)(-\xi-1)$
   д) $D(-3\xi+16)$
   е) $P(\xi > -2)$

2. ЗАДАЧА 4. Случайная величина X равномерно распределена на промежутке $(0, 2\pi)$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайных величин:
   1. Y = -4X
   2. Z = X - Y
   3. V = X + 2Y - 3Z - 1

Задача 3:

а) Воспользуемся условием нормировки. По определению: $\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)dx = 1 \Longrightarrow \int_{-3}^{-1} cx^2dx = 1 \Longrightarrow \frac{cx^3}{3}\Big|_{-3}^{-1} = 1 \Longrightarrow \frac{c\cdot(-1)^3}{3} - \frac{c\cdot(-3)^3}{3} = 1 \Longrightarrow -\frac{c}{3} + \frac{27c}{3} = 1 \Longrightarrow 26c = 3 \Longrightarrow c = \frac{3}{26}$

Ответ: $c = \frac{3}{26}$

б) По определению: $F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)dt$ => Три случая:
1. $x \leq -3 : F_\xi(x) = 0$

2. $x \in (-3, -1) : F_\xi(x) = \int_{-3}^{x} \frac{3}{26} t^2 dt \Longrightarrow \frac{3}{26} \cdot \frac{t^3}{3} \Big|_{-3}^{x} = \frac{3}{26} \cdot (\frac{x^3}{3} + \frac{27}{3}) \Longrightarrow \frac{x^3+27}{26}$

3. $x \geq -1 : F_\xi(x) = 1$

Объединим:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq -3) \\ \frac{x^3+27}{26}, & \text{если } x \in (-3, -1) \\ 1, & \text{если } x \geq -1 \end{cases}$$

в)

Рис. 1: График функции плотности распределения СВ

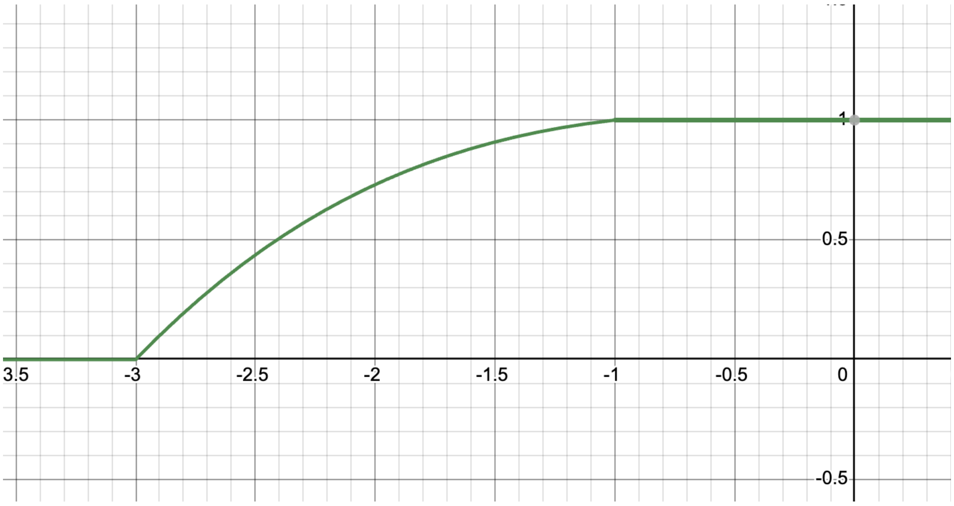

Рис. 2: График функции распределения СВ

г) $(4-2\xi)(-\xi-1) = -4\xi - 4 + 2\xi^2 + 2\xi + 4 = 2\xi^2 - 2\xi \Longrightarrow E[2\xi^2 - 2\xi] = 2E[\xi^2] - 2E[\xi]$. Вычислим отдельно:

$E[\xi] = \int_{-3}^{-1} x \cdot f(x)dx = \frac{3}{26}\int_{-3}^{-1} x^3 dx \Longrightarrow \frac{3}{26} \cdot \frac{x^4}{4}\Big|_{-3}^{-1} = \frac{3}{26} \cdot (-20) = -\frac{60}{20} = -\frac{30}{13}$

$E[\xi^2] = \frac{3}{26}\int_{-3}^{-1} x^2 f(x)dx \Longrightarrow \frac{3}{26} \cdot \frac{x^5}{5}\Big|_{-3}^{-1} = \frac{3}{26} \cdot \frac{242}{5} = \frac{726}{130}$

$2E[\xi^2] - 2E[\xi] = 2 \cdot \frac{726}{130} - 2 \cdot (-\frac{30}{13}) \Longrightarrow \frac{1452}{130} + \frac{600}{130} = \frac{1026}{65}$

Ответ: $\frac{1026}{65} \approx 15.78$

д) $D[-3\xi + 16] = D[-3\xi]$ (слагаемые не влияют на дисперсию, а лишь сдвигают ее от изначального центра => убираем) $\Longrightarrow 9D[\xi]$ (множители выносятся и возводятся в квадрат). Найдем $D[\xi] = E[\xi^2] - (E[\xi])^2 =$ (из предыдущего пункта берем мат ожидание квадрата) $= \frac{726}{130} - (-\frac{30}{13})^2 = \frac{219}{845}$
$9D[\xi] = 9 \cdot \frac{219}{845} = \frac{1971}{845} \approx 2.33$

Ответ: $\frac{1971}{845} \approx 2.33$

е) $P(\xi > -2) = 1 - P(\xi \leq -2) = 1 - \int_{-3}^{-2} f(x)dx = 1 - \int_{-3}^{-2} \frac{3}{26}x^2 dx = 1 - \frac{3}{26} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_{-3}^{-2} = 1 - \frac{3}{26} \cdot (\frac{(-2)^3}{3} - \frac{(-3)^3}{3}) = \frac{7}{26}$

Ответ: $\frac{7}{26} \approx 0.27$

Задача 4:

Для равномерного распределения справедливо, что $E[x] = \frac{a+b}{2}, D[x] = \frac{(b-a)^2}{12}$, тогда:

а) $E[Y] = E[-4X] = -4E[X] = -4 \cdot \frac{0+2\pi}{2} = -4\pi$
$D[Y] = D[-4X] = 16D[X] = 16\frac{(2\pi-0)^2}{12} = 16\frac{\pi^2}{3} = \frac{16\pi^2}{3}$

Ответ: $E[Y] = -4\pi, D[Y] = \frac{16\pi^2}{3}$

б) $E[Z] = E[X-Y] = E[X]-E[Y] = E[X]-E[-4X] = E[X]+4E[X] = 5E[X] = 5\pi$
$D[Z] = D[X-Y] = D[X-(-4X)] = D[X+4X] = D[5X] = 25D[X] = 25\frac{\pi^2}{3} = \frac{25\pi^2}{3}$

Ответ: $E[Z] = 5\pi, D[Z] = \frac{25\pi^2}{3}$

в) $E[V] = E[X+2Y-3Z-1] = E[X+2(-4X)-3(X-Y)-1] = E[X-8X-3(X+4X)-1] = E[-7X-3(5X)-1] = E[-7X-15X-1] = E[-22X-1] = -22E[X]-1 = -22\pi-1$
$D[V] = D[X+2Y-3Z-1] = D[-22X-1] = 484D[X] = \frac{484\pi^2}{3}$

Ответ: $E[V] = -22\pi - 1, D[V] = \frac{484\pi^2}{3}$