



Lecture 1: Probability Distributions Dr .Magda

Made By : Ahmed Tamer

For : (S.O.G)

➊ قبل ما نبدأ... كلمتين بس!

خليني أسألك سؤال بسيط الأول:

لو حد قالك "بكرة هتمطر", إيه اللي بيجري في دماغك؟ بتفكر "أمي؟ قد إيه؟ أصدقه ولا لأ؟" صح؟

ده لأن في حياتنا مفيش حاجة مؤكدة 100%. دايماً في "ممكنا يحصل" و"ممكنا ميحصلش".

طيب، المشكلة مش في الشك ده. المشكلة إننا بنحتاج نقرر رغم الشك ده! المدير بيحتاج يقرر يشتري كام منتج للمخزن. البنك بيحتاج يقرر يدي القرض ده ولا لأ. الشركة بتحتاج تحدد ميزانية التسويق بتاعتتها.

إزاي بتاخذ قرار صح وأنت مش متأكد؟

الإجابة هي اللي هنتعلمها النهارده: التوزيعات الاحتمالية!

مش هنحفظ تعريفات وخلاص. هنفهم إزاي نوصف الأحداث الغير مؤكدة دي بطريقة رياضية، ونحسب منها أرقام بتساعدنا نتخذ قرارات أفضل.

1 What is a Probability Distribution?

PROBABILITY DISTRIBUTION: A listing of all the outcomes of an experiment and the probability associated with each outcome.

Experiment: Toss a coin three times. Observe the number of heads. The possible results are: zero heads, one head, two heads, and three heads.

Possible Result	First	Second	Third	Number of Heads
1	T	T	T	0
2	T	T	H	1
3	T	H	T	1
4	T	H	H	2
5	H	T	T	1
6	H	T	H	2
7	H	H	T	2
8	H	H	H	3

الشرح:

تعالى نبدأ بمثال بسيط جداً. إنت بترمي عملة 3 مرات وبتشوف كام صورة (H) بتطلع. (الصورة اسمها H) و (الكتابية اسمها T)

التوزيع الاحتمالي ببساطة هو إنك بتنقول "كل النتائج الممكنة إيه؟ وكل واحدة احتمالها كام؟"

طیب، ازای بنی بیانی الجدول ده؟

الخطوة الأولى: اكتب كل النتائج الممكنة

لما ترمي عملة مرة واحدة، النتيجة اما T أو H.

لما يترمّي 3 مرات، إجمالي النتائج = $2 \times 2 \times 2 = 8$ نتائج. مش أكثر ومش أقل

دلوقتي، بدل ما تحفظ الـ 8 دول، افهم ليه اصلا الاجابة 8 ! لأن كل رمية عندها احتمالين ، و3 رميات بقى $2^3 = 8$.

الخطوة الثانية: عد الصور (H) في كل نتيجة

بص على الجدول:

- $TTT \rightarrow 0$ صور 0
 - $TTH, THT, HTT \rightarrow 3$ نتائج كل واحدة فيها صورة واحدة بس ظهرت في 3 نتائج

- $THH, HTH, HHT \rightarrow 3$ نتائج
- $HHH \rightarrow 1$ نتائج

الخطوة الثالثة: احسب الاحتمال

الاحتمال = عدد مرات الحدوث $\div 8$

هو اصلا طالب عدد H بس يعني H ظهرت كام مرة ??

بص عشان تفهم الارقام الجاية دى جاية منين : لما قسم 1 على 8 دا عشان لو بصيت في الحنة الفاتت دى هتللاقى ان في اول تجربة ظهر TTT فكدا مفيش فيهم H ودا حصل مرة واحدة بس

بعدها 3 على 8 طب ليه 3 ؟ مش 2 على 8 مثلا بص ياسيدى: بكل بساطة عشان الصورة ال هى H ظهرت 3 مرات HTT, THT, TTH

طيب ال بعدها برضو رمي 3 مرات ظهر في كل مرة H مش واحدة فاحنا بنسجل ظهور ال H حصل كام مرة 3 برضو هو دا عدد مرات ظهور الحدث

طيب ال بعدها برضو 1 على 8 عشان 3 H ظهرت مرة واحدة ومظهرتش تانى

- $P(0) = 1/8 = 0.125$
- $P(1) = 3/8 = 0.375$
- $P(2) = 3/8 = 0.375$
- $P(3) = 1/8 = 0.125$

الاحتمال $P(x)$	عدد الصور x
0.125	0
0.375	1
0.375	2
0.125	3
1	المجموع

لو جابلك في الامتحان: بتبني التوزيع الاحتمالي بـ 3 خطوات بس: اكتب كل النتائج الممكنة  → عد تكرار كل نتائج → اقسم على الإجمالي. وفي الآخر تأكد إن المجموع = 1

2 Characteristics of a Probability Distribution

1. The probability of a particular outcome is between 0 and 1 inclusive.
 2. The outcomes are mutually exclusive events.
 3. The list is exhaustive. So the sum of the probabilities of the various events is equal to 1
-

الشرح:

دلوقي عندنا 3 شروط بتحكم أي توزيع احتمالي. وأنا عايزك تفكر فيهم مش ك "شروط لازم أحفظها", لأن فكر فيهم ك قواعد المنطق اللي بتخلي الحساب ده يتعمل أصلًا.

الشرط الأول: كل احتمال بين 0 و 1

ده منطقي 100%. إيه معنى احتمال = 2؟ يعني أكيد أكيد هيحصل مرتين؟ ده كلام ملوش معنى!

- الاحتمال صفر = مستحيل يحصل خالص
- الاحتمال 1 = أكيد هيحصل
- بينهم = ممكن يحصل بنسبة معينة

لو لاقيت رقم سالب أو أكبر من 1 في الجدول بيقى كدا في غلط طبعا ، مش توزيع احتمالي صح!

الشرط الثاني: النتائج متبادلة الإقصاء

يعني مينفعش نتيجتين يحصلوا في نفس الوقت.

في مثال العملة: في أي رمية، مينفعش تطلع صورة وكتابة في نفس الوقت! لازم واحدة بس.

لو النتائج مش متبادلة الإقصاء. بيقى ممكن تقول "النتيجة كانت صورة وكتابة في نفس الوقت!" ده كلام ملوش معنى في الواقع.

الشرط الثالث: المجموع = 1

ده من أهم الشروط عملياً لأن القائمة لازم تكون شاملة لكل النتائج الممكنة. لو نسيت نتيجة، المجموع مش هيطلع 1.

لو في الامتحان جابلك جدول والمجموع طلع 0.9 أو 1.1 → في نتيجة ناقصة أو في رقم غلط في الجدول! وده بيكون سؤال مكمل بيسألوك تلاقي القيمة الناقصة.

خليك فاكر: الشروط الثلاثة دول هم الـ "الاساس" بتاعك لأي جدول بتتشوفه. قبل ما تحل أي مسألة، اتأكد منهم الأول!

3 Random Variables

Random variable - a quantity resulting from an experiment that, by chance, can assume different values.

الشرح:

خليني أشرح ليك إيه المتغير العشوائي بطريقة مختلفة !

إنت بتلعب لعبة النرد. قبل ما ترمي النرد، مش عارف الناتج هيكون إيه. ممكن 1، ممكن 6، ممكن أي حاجة بينهم. الرقم اللي هيطلع ده هو **المتغير العشوائي x** .

بنسميه "عشوائي" لأن قيمته بتتحدد بالصدفة. ومش قادر تتوقعه قبل التجربة.

في مثال العملة، المتغير العشوائي $x =$ عدد الصور اللي بتطلع.

ليه بنعمل كده؟ بدل ما نكتب جمل طويلة زي "حصل الحدث اللي فيه طلعت صورة واحدة"، بنكتب ببساطة $x = 1$

4 Types of Random Variables

- **Discrete Random Variable:** can assume only certain clearly separated values. It is usually the result of **counting** something.
- **Continuous Random Variable:** can assume an infinite number of values within a given range. It is usually the result of some type of **measurement**.

Discrete Examples: number of students in a class, number of children in a family, number of cars entering a carwash, number of home mortgages approved.

Continuous Examples: distance students travel to class, time to drive to work, length of a nap, length of a phone call.

الشرح:

النوع الأول: المتغير المنفصل Discrete

السر في إنك بتعده. لما بتعد حاجة، النتيجة دايماً رقم صحيح.

مثلاً: عدد الطالب في الفصل. ممكن 30 ممكن 31، بس مينفعش يكون 30.5 طالب! نص طالب مش موجود في الواقع!

نفس الكلام لعدد الأطفال في عيلة، عدد السيارات، عدد القروض... كلها بتعد بأرقام صحيحة.

النوع الثاني: المتغير المستمر Continuous

السر في إنك بتقييسه. لما بتقييس حاجة، الناتج ممكن يكون أي رقم حتى لو فيهكس كسور عشرية كتير.

مثلاً: الوقت اللي بتاخده عشان توصل للجامعة. ممكن 23 دقيقة، ممكن 23.5 دقيقة، ممكن 23.537 دقيقة! .

عندى تريك بسيط مش هتنساه:

Discrete →  بتعد؟

Continuous →  بتقييس؟

ولو في الامتحان جابلك سؤال "أي من التالي Discrete" بضم على الكلمة : "عدد" → Discrete

وقت / مسافة / وزن / طول" → Continuous

	Discrete	Continuous
ازای ؟	بالعد	بالقياس
القيم	أرقام صحيحة محددة	أي رقم
أمثلة	عدد الطلاب، السيارات	الوقت، الوزن، المسافة

5 The Mean - المتوسط

The mean is a typical value used to represent the central location of a probability distribution. The mean of a probability distribution is also referred to as its **expected value**.

$$\mu = \sum [xP(x)]$$

الشرح:

قبل ما نحسب أي حاجة، خليني أقولك المتوسط ده بيجاوب على سؤال واحد بس:

"لو جربنا التجربة مرات كتير جداً، متوسط النتائج هيبقى كام؟"

عشان كده بيسمى كمان **Expected Value**، يعني القيمة المتوقعة.

$$\text{المعادلة: } \mu = \sum [x \times P(x)]$$

يعني: اضرب كل قيمة في احتمالها، وبعدين اجمعهم كلهم.

تعالي معايا نشوف المثال بتاع جون دا عشان تفهم اكتر

6 Mean Example - John Ragsdale

John Ragsdale sells new cars for Pelican Ford. He has developed the following probability distribution for the number of cars he expects to sell on a particular Saturday.

x	P(x)
0	0.10
1	0.20
2	0.30
3	0.30
4	0.10

$$\mu = 0(0.10) + 1(0.20) + 2(0.30) + 3(0.30) + 4(0.10) = 2.1$$

الشرح:

تعالى نحل المثال ده مع بعض خطوة بخطوة!

عندنا جون، بيع عربيات كل سبت. المطلوب نحسب: في المتوسط، بيع كام عربية كل سبت؟

الخطوة الأولى: افهم الجدول الأول

الجدول ده بيقول:

- في 10% من اي سبت مش بيع حاجة خالص
- في 20% من اي سبت بيع عربية واحدة
- في 30% بيع اتنين
- في 30% بيع ثلاثة
- في 10% بيع أربعة

عشان تعرف انت تمام ولا لا اجمع كل الاحتمالات : $\checkmark \quad \%100 = 10 + 30 + 30 + 20 + 10$ طلعت 100% او 1 يبقى انت تمام كمل

الخطوة الثانية: طبق المعادلة

اعمل جدول جديد بعمود ثالث هو $x \times P(x)$

اضرب كل قيمة في احتمالها

x	P(x)	x × P(x)	إزاي جات؟
0	0.10	0.00	0×0.10
1	0.20	0.20	1×0.20
2	0.30	0.60	2×0.30
3	0.30	0.90	3×0.30
4	0.10	0.40	4×0.10

الخطوة الثالثة: اجمع العمود الأخير

$$\mu = 0.00 + 0.20 + 0.60 + 0.90 + 0.40 = 2.10$$

: الخلاصة 

جون في المتوسط بيبيع 2.1 عربية كل سبت.

وهنا لازم توقف وتفكر! مينفعش جون بيبيع 2.1 عربية في سبت واحد! بس المعنى: لو بصييت على 100 سبت مثلًا، هتلaci إجمالي المبيعات قريب من 210 عربية يعني معدلها 2.1 في الأسبوع.

7 Variance and Standard Deviation

Variance and Standard Deviation - Measures the amount of spread in a distribution.

Steps:

1. Subtract the mean from each value, and square this difference.
2. Multiply each squared difference by its probability.
3. Sum the resulting products to arrive at the variance.

Standard deviation = positive square root of variance.

$$\sigma^2 = \Sigma[(x - \mu)^2 P(x)]$$

x	$P(x)$	$(x-\mu)$	$(x-\mu)^2$	$(x-\mu)^2 P(x)$
0	0.10	-2.1	4.41	0.441
1	0.20	-1.1	1.21	0.242
2	0.30	-0.1	0.01	0.003
3	0.30	0.9	0.81	0.243
4	0.10	1.9	3.61	0.361
			$\sigma^2 =$	1.290

الشرح:

هقولك على حاجة مهمة جداً قبل ما نبدأ في الحساب!

انت دلوقت عندك صديقين:

- **أحمد:** راتبه كل شهر 5000 جنيه بالضبط، ثابت!
- **محمود:** راتبه بيتغير: أحياناً 2000، أحياناً 8000

المتوسط للاتنين = 5000. بس أحمد حياته أكثر استقراراً ومش بيعاني من تقلبات!

التباین والانحراف المعياري بيقيسوا قد إيه القيم بتتشتت حوالين المتوسط.

التباین عالي = قيم متفرقة كتير. يعني القيم بعيدة عن المتوسط التشتت عالي ودا مش حلو

التباین منخفض = قيم قريبة من المتوسط التشتت قليل ودا حلو

تعالي نكمل مثال جون. افترك المتوسط اللي حسبناه = 2.1

الخطوة الأولى: احسب $(\mu - x)$

بنطرح المتوسط من كل قيمة. ده بيقولنا "كل قيمة بتبع عن المتوسط بكم؟"

- $x=0: (0 - 2.1) = 2.1 \rightarrow 2.1$
- $x=1: (1 - 2.1) = 1.1 \rightarrow 1.1$

- $x=2: (2 - 2.1) = 0.1 \rightarrow$ قريب جداً من المتوسط!
 - $x=3: (3 - 2.1) = +0.9 \rightarrow 0.9 \rightarrow$ أكبر من المتوسط بـ
 - $x=4: (4 - 2.1) = +1.9 \rightarrow 1.9 \rightarrow$ أكبر من المتوسط بـ
-

الخطوة الثانية: رُبّع كل الفروق $\rightarrow (\mu - x)^2$

بنربع ليه؟ لأن لو جمعنا الفروق كما هي، المجموع هيبقى صفر دائمًا! (الأرقام الموجبة والسلبية بتتلغي). فبنربعهم عشان كلهم بيبقوا موجبين!

- $(-2.1)^2 = 4.41$
 - $(-1.1)^2 = 1.21$
 - $(-0.1)^2 = 0.01$
 - $(0.9)^2 = 0.81$
 - $(1.9)^2 = 3.61$
-

الخطوة الثالثة: اضرب في $P(x)$

كل فرق مربع \times احتمال القيمة دي:

- $4.41 \times 0.10 = 0.441$
 - $1.21 \times 0.20 = 0.242$
 - $0.01 \times 0.30 = 0.003$
 - $0.81 \times 0.30 = 0.243$
 - $3.61 \times 0.10 = 0.361$
-

الخطوة الرابعة: اجمع كل النواتج دا يساوى التباين

$$\sigma^2 = 0.441 + 0.242 + 0.003 + 0.243 + 0.361 = 1.290$$

الخطوة الخامسة: الجذر التربيعي = الانحراف المعياري

خ د جذر ال 1.290 هيطلع 1.136

خلاصة الحل : 

المقياس	القيمة	المعنى
المتوسط μ	2.1	متوسط المبيعات كل سبت
التبابن σ^2	1.290	مقياس التشتت
الانحراف المعياري σ	1.136	دا معناه : المبيعات بتنتفاوت بـ $1.1 \pm$ عربية

للامتحان: الجدول بتاع التبابن عنده 5 أعمدة: $P(x)$, $(x-\mu)$, $(x-\mu)^2$, $(x-\mu)^2P(x)$, x . لو حفظت 

القواعد :

السؤال	الإجابة
إزاي أتأكد إن الجدول صح؟	المجموع = 1, وكل $P(x)$ بين 0 و 1
?Continuous من Discrete إزاي أعرف	Continuous \rightarrow Discrete, قياس
المتوسط مش في الجدول؟	طبيعي! ممكن يكون كسر
الانحراف المعياري طلع سالب؟	مستحيل! راجع حسابك

في الآخر دي كل الرموز

جدول معنى الرموز 

Symbols Reference Table

الرمز / Symbol	Name	معناه	معادلته / Formula	مثال من المحاضرة
x	Random Variable	المتغير العشوائي - هو الرقم اللي يتمثل نتيجة التجربة	-	عدد العربيات = x اللي جون بيعيها
P(x)	Probability of x	احتمال حدوث القيمة x	عدد مرات الحدوث ÷ الإجمالي	P(2) = 0.30 يعني احتمال بيع عربيتين 30 =%
Σ	Sigma	علامة الجمع - يعني "اجمع كل القيم"	-	$\Sigma[xP(x)]$ = اجم Σ مضروب في x كل P(x)
μ	Mean / ميو	المتوسط أو القيمة المتوقعة	$\mu = \Sigma[xP(x)]$	$\mu = 2.1$ عربية في 2.1 المتوسط كل سبت
μ	Expected Value ممكن بربو	- نفس المتوسط بس بنسميه "القيمة المتوقعة"	$\mu = \Sigma[xP(x)]$	لو جون اشتغل كذا سبت ، متوسطه 2.1
$(x - \mu)$	Deviation	الانحراف - بعده كل قيمة عن المتوسط	μ ناقص x	$2.1 - (2.1 - 0)$ يعني صفر أقل من المتوسط بـ
$(x - \mu)^2$	Squared Deviation	- الانحراف المربع بنربعه عشان نخلص من السالب	$(x - \mu) \times (x - \mu)$	$(-2.1)^2 = 4.41$
$(x - \mu)^2P(x)$	Weighted Squared Deviation	الانحراف المربع الموزون - بنضرره في الاحتمال عشان نأخذ وزنه الحقيقي	$(x - \mu)^2 \times P(x)$	$4.41 \times 0.10 = 0.441$
σ^2	Sigma Squared / Variance	التباین - بيقيس مقدار التشتت في البيانات	$\sigma^2 = \Sigma[(x - \mu)^2P(x)]$	$\sigma^2 = 1.290$
σ	Sigma / Standard Deviation	الانحراف المعياري - جذر التباین، بنفس وحدة x	$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$	$\sigma = \sqrt{1.290} = 1.136$
H	Head	وجه العملة اللي فيه الصورة	-	صورة، كتابة صورة، كتابة
T	Tail	وجه العملة اللي فيه الكتابة	-	كتابات = 3 صور 0
n	Number of trials	عدد التجارب أو المحاولات	-	رميات = 3 للعملة

$0 \leq P(x) \leq 1$	Probability Range	نطاق الاحتمال - لازم يكون بين صفر وواحد	-	$P(x) = 0.30 \checkmark /$ $P(x) = 1.5 \times$
$\sum P(x) = 1$	Sum of Probabilities	مجموع كل الاحتمالات لازم $1 =$	-	$0.10+0.20+0.30+0.30+0.10 = 1.00 \checkmark$
