โครงงานคณิตศาสตร์ประยุกต์

เรื่อง

การพัฒนาเว็บแอปพลิเคชันช่วยเรียนคณิตศาสตร์สำหรับแคลคูลัสเบื้องต้น

Development of a Math Tutor Web Application for Introductory Calculus

โดย

นางสาวขวัญเรือน สำเนียงดี รหัสนิสิต 6621602928

นางสาวเบญจกัษยาณี พิทยากูล รหัสนิสิต 6621602979

เสนอ

ภาควิชาวิทยาการคำนวณและเทคโนโลยีดิจิทัล

คณะศิลปศาสตร์และวิทยาศาสตร์

มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ วิทยาเขตกำแพงแสน

ปีการศึกษา 2569

1.ที่มาและความสำคัญของโครงงาน

ในปัจจุบันเทคโนโลยีสารสนเทศและอินเทอร์เน็ตได้เข้ามามีบทบาทสำคัญต่อการศึกษาในทุกระดับ ผู้เรียนสามารถเข้าถึงองค์ความรู้และสื่อการเรียนการสอนได้อย่างสะดวกผ่านคอมพิวเตอร์ โทรศัพท์มือถือ และอุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์ต่างๆผลให้รูปแบบการเรียนรู้เปลี่ยนจากการเรียนเฉพาะในห้องเรียนไปสู่การเรียนรู้ด้วยตนเองผ่านสื่ออนไลน์มากยิ่งขึ้นดังนั้นการพัฒนาสื่อการเรียนรู้ในรูปแบบเว็บแอปพลิเคชันจึงเป็นแนวทางที่สามารถช่วยสนับสนุนการเรียนการสอนให้มีประสิทธิภาพและตอบสนองต่อความต้องการของผู้เรียนในยุคดิจิทัลได้เป็นอย่างดี แคลคูลัสเป็นวิชาพื้นฐานที่มีความสำคัญต่อการศึกษาในหลากหลายสาขา ไม่เพียงแต่ในสาขาคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์เท่านั้น แต่ยังมีบทบาทสำคัญในสาขาวิชาวิศวกรรมศาสตร์ เทคโนโลยีสารสนเทศ เศรษฐศาสตร์ และสาขาที่เกี่ยวข้อง เนื้อหาของวิชาประกอบด้วยแนวคิดที่มีความซับซ้อนและลึกซึ้ง เช่น อนุพันธ์ และปริพันธ์ ซึ่งต้องอาศัยความเข้าใจในหลักการเชิงทฤษฎีและการฝึกฝนอย่างต่อเนื่อง ผู้เรียนส่วนหนึ่งประสบปัญหาในการทำความเข้าใจเนื้อหา เนื่องจากข้อจำกัดด้านเวลาในการเรียน การอธิบายในห้องเรียนที่อาจไม่ครอบคลุมความแตกต่างของผู้เรียนแต่ละคน รวมถึงข้อจำกัดของสื่อการเรียนรู้ทั่วไปที่ยังขาดเครื่องมือประมวลผลคำนวณเชิงสัญลักษณ์ (Symbolic Computation) ทำให้ไม่สามารถแสดงขั้นตอนการแก้โจทย์ลิมิต การหาอนุพันธ์ หรือการคำนวณปริพันธ์ในรูปแบบสัญลักษณ์คณิตศาสตร์ที่ชัดเจนได้ แม้ว่าปัจจุบันจะมีแหล่งเรียนรู้ออนไลน์เป็นจำนวนมาก แต่เนื้อหาที่เผยแพร่ส่วนใหญ่มักกระจัดกระจาย มีรูปแบบการนำเสนอที่แตกต่างกัน และบางแหล่งอาจไม่สอดคล้องกับเนื้อหาที่ใช้ในการเรียนการสอนในระดับมหาวิทยาลัย ส่งผลให้ผู้เรียนต้องใช้เวลาในการค้นหาข้อมูลจากหลายแหล่ง อีกทั้งเว็บไซต์ส่วนใหญ่ยังขาดเครื่องมือเชิงโต้ตอบ แบบฝึกหัด หรือการอธิบายวิธีทำอย่างเป็นลำดับขั้นตอน ทำให้ผู้เรียนไม่สามารถตรวจสอบความเข้าใจของตนเองได้อย่างมีประสิทธิภาพ

จากปัญหาดังกล่าว ผู้จัดทำได้สอบถามและรวบรวมข้อมูลจากเพื่อน ๆ และน้อง ๆ ในสาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์พบว่าผู้เรียนส่วนใหญ่ประสบปัญหาในการทำความเข้าใจเนื้อหาวิชาแคลคูลัสเบื้องต้น โดยเฉพาะหัวข้อ **อนุพันธ์ และปริพันธ์** ซึ่งเป็นเนื้อหาที่มีความซับซ้อนต้องอาศัยความเข้าใจพื้นฐานทางคณิตศาสตร์และการฝึกฝนอย่างต่อเนื่องส่งผลให้ผู้เรียนจำนวนไม่น้อยไม่สามารถวิเคราะห์โจทย์หรือแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้องอีกทั้งสื่อการเรียนรู้ที่มีอยู่ยังมีเนื้อหากระจัดกระจาย ทำให้การค้นคว้าและทบทวนด้วยตนเองไม่สะดวก

ผู้จัดทำจึงมีแนวคิดในการพัฒนาเว็บแอปพลิเคชันช่วยเรียนคณิตศาสตร์สำหรับแคลคูลัส เพื่อเป็นสื่อการเรียนรู้ที่รวบรวมเนื้อหาสำคัญของรายวิชาไว้ในระบบเดียว โดยจัดลำดับเนื้อหาตั้งแต่พื้นฐานไปจนถึงการประยุกต์ใช้พร้อมตัวอย่างประกอบคำอธิบายวิธีทำอย่างเป็นขั้นตอนและแบบฝึกหัดที่ช่วยให้ผู้เรียนสามารถฝึกฝนและทบทวนความรู้ได้ด้วยตนเองทุกที่ทุกเวลา นอกจากนี้เว็บแอปพลิเคชันยังรองรับการนอกจากนี้เว็บแอปพลิเคชันยังรองรับการใช้งานทั้งบนคอมพิวเตอร์และอุปกรณ์เคลื่อนที่เพื่อเพิ่มความสะดวกในการเข้าถึงสื่อการเรียนรู้และช่วยให้ผู้เรียนสามารถเรียนได้ทุกสถานที่ตามความเหมาะสมของตนเอง การพัฒนาเว็บแอปพลิเคชันในครั้งนี้ไม่เพียงมุ่งเน้นการสร้างสื่อการเรียนรู้ที่มีคุณภาพเท่านั้น แต่ยังเป็นการประยุกต์ใช้ความรู้ด้านการพัฒนาเว็บไซต์และเทคโนโลยีสารสนเทศร่วมกับหลักการออกแบบสื่อการเรียนรู้ โดยเลือกใช้ภาษา Python และเฟรมเวิร์ก Streamlit ซึ่งเหมาะสำหรับการพัฒนาเว็บแอปพลิเคชันด้านการคำนวณและการแสดงผลสมการคณิตศาสตร์ได้อย่างมีประสิทธิภาพเพื่อสร้างระบบที่ใช้งานง่าย มีความเป็นระเบียบและตอบสนองต่อความต้องการของผู้เรียนได้อย่างเหมาะสม

ดังนั้นโครงงานการพัฒนาเว็บแอปพลิเคชันช่วยเรียนคณิตศาสตร์สำหรับแคลคูลัสเบื้องต้นจึงมีความสำคัญทั้งในด้านการส่งเสริมคุณภาพการเรียนรู้ การช่วยแก้ปัญหาความเข้าใจในหัวข้อการลิมิต อนุพันธ์ และปริพันธ์ การเพิ่มโอกาสในการเข้าถึงสื่อการศึกษาและการนำเทคโนโลยีมาประยุกต์ใช้เพื่อสนับสนุนการเรียนการสอนให้มีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น อีกทั้งยังส่งเสริมการเรียนรู้ด้วยตนเอง การคิดวิเคราะห์และการฝึกแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ซึ่งเป็นทักษะสำคัญสำหรับการศึกษาในระดับที่สูงขึ้นและการนำไปประยุกต์ใช้ในวิชาชีพในอนาคตโดยคาดว่าเว็บแอปพลิเคชันนี้จะเป็นประโยชน์ต่อนักเรียน นักศึกษา และผู้ที่สนใจศึกษาวิชาแคลคูลัสเบื้องต้นด้วยตนเอง

2.วัตถุประสงค์ของโครงงาน

1. เพื่อพัฒนาเว็บแอปพลิเคชันช่วยเรียนคณิตศาสตร์สำหรับแคลคูลัสเบื้องต้นโดยใช้ภาษาไพธอน (Python) และไลบรารีสตรีมลิต (Streamlit)

2. เพื่อรวบรวมเนื้อหา ตัวอย่างการคำนวณ และแบบฝึกหัดไว้ในระบบเดียว เพื่อให้ผู้เรียนสามารถศึกษาด้วยตนเองได้อย่างสะดวก

3. เพื่อช่วยแก้ปัญหาการเรียนรู้ของผู้เรียนในหัวข้อ ลิมิต อนุพันธ์ และปริพันธ์ ซึ่งเป็นหัวข้อที่ผู้เรียนส่วนใหญ่มีความเข้าใจได้ยาก

4. เพื่อพัฒนาระบบที่สามารถแสดงวิธีการคำนวณและเฉลยอย่างเป็นลำดับขั้น ช่วยให้ผู้เรียนเข้าใจแนวคิดของแคลคูลัสมากยิ่งขึ้น

5. เพื่อส่งเสริมการเรียนรู้ผ่านสื่อดิจิทัลที่สามารถใช้งานได้ทุกที่ทุกเวลาผ่านเว็บเบราว์เซอร์

6. เพื่อประยุกต์ใช้ความรู้ด้านการเขียนโปรแกรมภาษาไพทอน (Python) และการพัฒนาเว็บแอปพลิเคชันด้วยไลบรารีสตรีมลิต (Streamlit) ในการสร้างสื่อการเรียนรู้ที่สามารถนำไปใช้งานได้จริง

3.ขอบเขตของการศึกษา

1. พัฒนาเว็บแอปพลิเคชันโดยใช้ภาษาไพธอน (Python) และไลบรารีสตรีมลิต (Streamlit)

2. เนื้อหาครอบคลุมหัวข้อพื้นฐานของแคลคูลัส ได้แก่ ลิมิต ความต่อเนื่อง อนุพันธ์ และปริพันธ์เบื้องต้น

3. ระบบประกอบด้วย

   3.1. บทเรียนสรุปเนื้อหา

   3.2. ตัวอย่างโจทย์พร้อมวิธีทำ

   3.3. แบบฝึกหัดพร้อมเฉลย

   3.4. การแสดงวิธีการคำนวณอย่างเป็นขั้นตอนเพื่อช่วยให้ผู้เรียนรู้เข้าใจยิ่งขึ้น

   3.5. การแสดงผลผ่านเว็บเบราว์เซอร์

4. ผู้ใช้งานสามารถเข้าใช้งานผ่านคอมพิวเตอร์หรือโทรศัพท์มือถือที่เชื่อมต่ออินเทอร์เน็ต

5. ทดสอบการทำงานของระบบและประเมินความพึงพอใจของผู้ใช้งานเพื่อใช้เป็นแนวทางในการปรับปรุงระบบ

4.ความรู้พื้นฐาน

เรื่องที่ 1: อนุพันธ์ของฟังก์ชัน (Derivatives)

อนุพันธ์คือการหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันเทียบกับตัวแปรอิสระ หรือความชันของเส้นสัมผัสโค้ง ณ จุดใด ๆ

ตัวอย่างที่ 4.1 (การหาอนุพันธ์ด้วยกฎผลคูณ)

กำหนดให้ $f(x) = x^2 \sin(x)$ จงหา $f'(x)$

วิธีทำ

1. ใช้สูตรกฎผลคูณ (Product Rule): $(uv)' = u'v + uv'$
2. ให้ $u = x^2$ จะได้ $u' = 2x$ และให้ $v = \sin(x)$ จะได้ $v' = \cos(x)$
3. แทนค่าลงในสูตร:

$$f'(x) = (2x)(\sin(x)) + (x^2)(\cos(x)) = 2x\sin(x) + x^2\cos(x)$$

เรื่องที่ 2: ปริพันธ์และการหาพื้นที่ใต้กราฟ (Integrals)

ปริพันธ์เป็นกระบวนการย้อนกลับของการหาอนุพันธ์ สำหรับการหาพื้นที่ใต้กราฟด้วยปริพันธ์จำกัดเขต หาก $f(x) \geq 0$ บนช่วง $[a, b]$ พื้นที่ใต้กราฟจะเท่ากับ $\int_a^b f\,(x)\,dx$ แต่หากฟังก์ชันมีค่าติดลบ จะต้องคำนวณผ่านฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์ $\int_a^b |\,f(x)|\,dx$

ตัวอย่างที่ 4.2 (การคำนวณปริพันธ์จำกัดเขต)

จงหาค่าของ $\int_0^2 (3x^2 + 1)\ dx$

วิธีทำ

1. หาปฏิยานุพันธ์ (Antiderivative) ของฟังก์ชัน:

$$F(x) = \int (3x^2 + 1)\ dx = x^3 + x$$

2. คำนวณค่าตามทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส $F(2) - F(0)$:

$$F(2) = (2)^3 + 2 = 8 + 2 = 10$$

$$F(0) = (0)^3 + 0 = 0$$

$$\int_0^2 (3x^2 + 1)\ dx = 10 - 0 = 10$$

5.วิธีการดำเนินการศึกษา

5.1 ขั้นตอนและวิธีการดำเนินงาน (Methodology and Implementation Plan)

การดำเนินโครงงานการพัฒนาเว็บแอปพลิเคชันช่วยเรียนคณิตศาสตร์สำหรับแคลคูลัสเบื้องต้น มุ่งเน้นการบูรณาการหลักการทางวิศวกรรมซอฟต์แวร์เข้ากับการออกแบบการสอนคณิตศาสตร์ (Pedagogical Design) อย่างเป็นระบบ
โดยแบ่งโครงสร้างระบบออกเป็นส่วนประมวลผลคณิตศาสตร์เชิงสัญลักษณ์ (Math Solver Engine) และส่วนการแสดงผลบทเรียนเชิงโต้ตอบ (Interactive Presentation Layer)
เพื่อให้ระบบสามารถถ่ายทอดเนื้อหาคณิตศาสตร์ได้อย่างเป็นลำดับขั้น ถูกต้องตามหลักวิชาการ และง่ายต่อการปรับปรุงขยายผล โดยมีรายละเอียดขั้นตอนและวิธีการดำเนินงานดังต่อไปนี้

5.1.1 กระบวนการพัฒนาและสถาปัตยกรรมระบบ (Development Workflow & Architecture)

กระบวนการพัฒนาโครงงานดำเนินตามวงจรการพัฒนาซอฟต์แวร์ 5 ขั้นตอนหลัก และสถาปัตยกรรมระบบแบบแยกส่วนการทำงาน ดังแสดงในภาพที่ 1.1

ภาพที่ 1.1 ผังกระบวนการพัฒนาและสถาปัตยกรรมของระบบเว็บแอปพลิเคชันช่วยเรียนแคลคูลัส

จากภาพที่ 1.1 กระบวนการพัฒนาโครงงาน (Development Workflow) แบ่งออกเป็น 5 ขั้นตอนหลักที่ดำเนินไปอย่างเป็นลำดับขั้น ได้แก่

1. การวางแผนและออกแบบ (Plan & Design): กำหนดวัตถุประสงค์การเรียนรู้ จัดทำโครงสร้างบทเรียน ออกแบบผังหน้าจอต้นแบบ (UI Mockup) และจัดลำดับความสำคัญของฟังก์ชันการทำงาน

2. การจัดเตรียมเนื้อหาบทเรียน (Content Creation): สังเคราะห์เนื้อหาทฤษฎีแคลคูลัส จัดทำขั้นตอนวิธีทำตัวอย่างโจทย์อย่างละเอียด เตรียมข้อคำถามแบบทดสอบย่อย และเตรียมสื่อภาพกราฟิก

3. การพัฒนาระบบและโมดูลคำนวณ (Development): พัฒนาหน้าเว็บแอปพลิเคชันด้วยไลบรารีสตรีมลิต (Streamlit) สร้างโมดูลแก้โจทย์คณิตศาสตร์และชุดแบบฝึกหัดโต้ตอบ เชื่อมต่อระบบการเรนเดอร์สมการด้วย LaTeX และเชื่อมต่อไลบรารีซิมพาย (SymPy) สำหรับการคำนวณสัญลักษณ์

4. การทดสอบและทบทวนความถูกต้อง (Test & Review): ดำเนินการทดสอบการทำงานของระบบ ตรวจสอบความถูกต้องของสูตรและผลลัพธ์ทางคณิตศาสตร์ และรับฟังข้อเสนอแนะจากผู้ใช้งานเบื้องต้น

5. การเผยแพร่และปรับปรุงระบบ (Deploy & Improve): นำรหัสต้นฉบับขึ้นสู่ระบบควบคุมเวอร์ชัน GitHub เผยแพร่ระบบบน Streamlit Community Cloud เพื่อให้สามารถเข้าใช้งานผ่านเว็บเบราว์เซอร์ได้ทุกที่ทุกเวลา พร้อมทั้งติดตามผลและปรับปรุงระบบอย่างต่อเนื่อง

ในส่วนของสถาปัตยกรรมการทำงานของระบบ (Application Architecture) ได้รับการออกแบบตามหลักการแยกหน้าที่ความรับผิดชอบ (Separation of Concerns) แบ่งออกเป็น 3 เลเยอร์หลัก ได้แก่

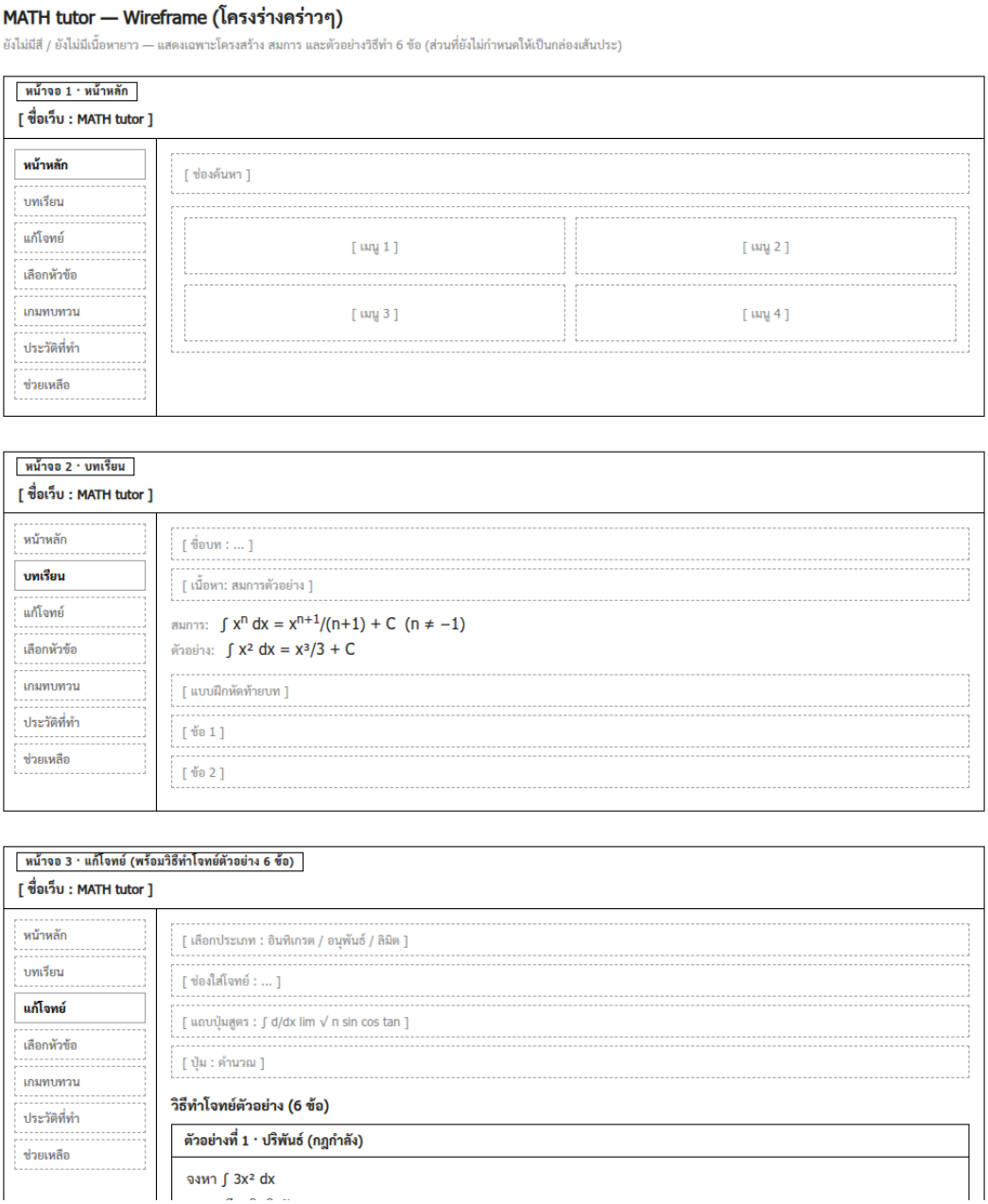
1. ส่วนติดต่อผู้ใช้ (Frontend: Streamlit): รับผิดชอบการปฏิสัมพันธ์กับผู้เรียน ประกอบด้วยหน้าแรก (Home), หน้าบทเรียนเชิงโต้ตอบ (Lessons), โมดูลช่วยแสดงวิธีทำทีละขั้น (Step-by-Step Solver), โมดูลแบบฝึกหัดโต้ตอบ (Quizzes) และห้องทดลองแสดงผลกราฟิก (Visualization Lab)

2. ส่วนบริการประมวลผลหลังบ้าน (Backend Services): รับผิดชอบการคำนวณและประมวลผลตรรกะ ประกอบด้วย SymPy Engine สำหรับคำนวณสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ (อนุพันธ์ ปริพันธ์ ลิมิต), Solution Engine สำหรับสร้างคำอธิบายวิธีทำทีละขั้น, Quiz Engine สำหรับตรวจสอบความถูกต้องของคำตอบและให้ผลสะท้อนกลับ (Feedback), และ Visualization Engine สำหรับวาดกราฟฟังก์ชัน 2 มิติด้วย Matplotlib

3. ส่วนจัดเก็บข้อมูลและทรัพยากร (Data & Storage): จัดเก็บเนื้อหาบทเรียน ตัวอย่างโจทย์ และแบบฝึกหัดในรูปแบบไฟล์ Markdown และ YAML ซึ่งช่วยให้สะดวกต่อการปรับปรุงแก้ไขเนื้อหาโดยไม่ต้องแก้ไขโค้ดการทำงานของระบบ

5.1.2 การออกแบบโครงสร้างส่วนต่อประสานผู้ใช้ (UI/UX Wireframe Design)

เพื่อแปลงความต้องการของผู้เรียนและกระบวนการสอนไปสู่การใช้งานจริง ผู้จัดทำได้จัดทำโครงร่างต้นแบบหน้าจอ เพื่อกำหนดการจัดวางองค์ประกอบและเส้นทางการใช้งานของผู้เรียน ดังแสดงในภาพที่ 1.2



ภาพที่ 1.2 โครงร่างต้นแบบหน้าจอ (Wireframe) ของระบบเว็บแอปพลิเคชันช่วยเรียนแคลคูลัส

จากภาพที่ 1.2 โครงสร้างหน้าจอหลักแบ่งออกเป็น 2 คอลัมน์ตามรูปแบบ Sidebar Navigation ได้แก่ เมนูนำทางด้านซ้ายที่ตรึงตำแหน่งไว้ และพื้นที่แสดงผลเนื้อหาหลักด้านขวา โดยมีรายละเอียดของหน้าจอสำคัญดังนี้

1. หน้าจอหลัก (Home Screen): ประกอบด้วยช่องค้นหาบทเรียนอย่างรวดเร็ว และเมนูนำทางหลัก 4 หมวด เพื่อให้ผู้เรียนเข้าถึงบทเรียนและเครื่องมือคำนวณได้อย่างสะดวก

2. หน้าจอบทเรียน (Lesson Screen): จัดวางเนื้อหาทฤษฎีและสมการคณิตศาสตร์ พร้อมส่วนแบบฝึกหัดท้ายบทเพื่อประเมินความเข้าใจเบื้องต้น

3. หน้าจอแก้โจทย์ (Solver Screen): ส่วนสำคัญในการจัดนั่งร้านทางปัญญา โดยแบ่งโจทย์ตัวอย่างพร้อมแสดงขั้นตอนวิธีทำอย่างละเอียดทีละขั้น
เพื่อให้ผู้เรียนฝึกคิดวิเคราะห์ตามลำดับ

5.1.3 การออกแบบโครงสร้างเนื้อหาและการจัดนั่งร้านทางปัญญา (Content & Scaffolding Framework)

เพื่อแก้ปัญหาการเรียนรู้ที่ผู้เรียนมักจดจำเฉพาะสูตรแต่ขาดความเข้าใจในเงื่อนไขและที่มา โครงงานจึงกำหนดมาตรฐานโครงสร้างเนื้อหาบทเรียนเชิงโต้ตอบทุกบทเรียนให้ครอบคลุม 6 มิติหลัก (Data Schema ใน utils/theory.py) ได้แก่

1. เงื่อนไขการใช้งาน (Conditions):
ระบุข้อกำหนดและเงื่อนไขเบื้องต้นของฟังก์ชันก่อนเริ่มการคำนวณ เช่น
ฟังก์ชันต้องมีความต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ หรือเงื่อนไข $f(x) \geq 0$ บนช่วงที่พิจารณา

2. สูตรคณิตศาสตร์หลัก (Formulas): นำเสนอสูตร นิยาม และทฤษฎีบทในรูปสัญลักษณ์ LaTeX ที่ได้มาตรฐานและถูกต้องตามหลักวิชาการ

3. สมบัติสำคัญ (Properties): อธิบายพฤติกรรมและความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ เช่น การลู่เข้าของผลรวมรีมันน์สู่ค่าปริพันธ์จำกัดเขตเมื่อจำนวนช่วงย่อย $n \to \infty$
หรือความสัมพันธ์ระหว่างลิมิตซ้ายและลิมิตขวา

4. ข้อควรระวังและจุดที่มักเข้าใจผิด (Cautions & Misconceptions):
ชี้แนะข้อผิดพลาดที่ผู้เรียนมักกระทำบ่อยครั้ง เช่น การลืมคูณความกว้างช่วง (Δx) ในผลรวม หรือการคำนวณพื้นที่ใต้แกน x ที่ต้องใช้ค่าสัมบูรณ์

5. การประยุกต์ใช้ (Applications): แสดงตัวอย่างการนำแนวคิดไปประยุกต์ใช้ในบริบทจริง เช่น การคำนวณระยะทางจากกราฟความเร็ว การหาปริมาณสะสม หรืองานทางฟิสิกส์

6. แนวทางการตัดสินใจเลือกใช้วิธี (Decision Guide):
คำแนะนำในการวิเคราะห์และเลือกใช้เทคนิคการคำนวณให้เหมาะสมกับรูปแบบของฟังก์ชัน เช่น การเลือกเทคนิคการแทนค่าด้วยตัวแปร u

5.1.4 ขั้นตอนวิธีและการประมวลผลทางคณิตศาสตร์เชิงสัญลักษณ์ (Mathematical Algorithm & Solver Engine)

ระบบประมวลผลหลังบ้าน (Backend) ขับเคลื่อนด้วยระบบพีชคณิตคอมพิวเตอร์ (Computer Algebra System: CAS) ผ่านไลบรารีซิมพาย (SymPy)
โดยออกแบบโครงสร้างข้อมูลส่งคืนผลลัพธ์มาตรฐานประกอบด้วย:
ผลลัพธ์ตัวเลข, สูตร LaTeX สำหรับแสดงผล, รายการขั้นตอนวิธีทำทีละขั้น, นิพจน์เชิงสัญลักษณ์ และข้อความแจ้งข้อผิดพลาด

ตัวอย่างขั้นตอนวิธีการคำนวณ กรณีศึกษาผลรวมรีมันน์ (Riemann Sum Algorithm)

เมื่อผู้เรียนกำหนดฟังก์ชัน $f(x) = x^2$ บนช่วง $[a, b] = [0,2]$ และกำหนดจำนวนช่วงย่อย $n = 8$ โดยเลือกวิธีการคำนวณแบบจุดกึ่งกลาง (Midpoint Rule) ตรรกะการคำนวณภายในโมดูล (utils/riemann_solver.py) จะดำเนินการตามลำดับขั้นตอนดังนี้

1. การคำนวณความกว้างของช่วงย่อย (Δx): คำนวณจากสูตร $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{8} = 0.25$

2. การกำหนดจุดตัวแทนของแต่ละช่วง ($\bar{x}_i$): สำหรับวิธีจุดกึ่งกลาง (Midpoint) จุดตัวแทนคำนวณจาก $\bar{x}_i = a + (i + 0.5)\Delta x$ สำหรับ $i = 0,1, \dots ,7$ จะได้เซตของจุดตัวแทนคือ

$$\{0.125,0.375,0.625,0.875,1.125,1.375,1.625,1.875\}$$

3. การคำนวณความสูงและผลรวมพื้นที่สี่เหลี่ยมย่อย (M_n) คำนวณหาค่าฟังก์ชัน ณ แต่ละจุดตัวแทน แล้วนำมารวมกันและคูณด้วยความกว้างช่วง:

$$M_n = \sum f(\bar{x}_i)\Delta x = [f(0.125) + f(0.375) + \cdots + f(1.875)] \times 0.25 \approx 2.65625$$

4. การเปรียบเทียบกับค่าจริงเชิงสัญลักษณ์ (Exact Value Comparison): ระบบใช้ SymPy คำนวณค่าปริพันธ์จริง

$$\int_0^2 x^2 \, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3} \approx 2.66667$$

พร้อมทั้งสกัดขั้นตอนการแสดงวิธีทำเป็นสมการ LaTeX และส่งข้อมูลให้โมดูล Plotter พล็อตกราฟแท่งสี่เหลี่ยมรีมันน์ซ้อนทับเส้นโค้งจริงผ่าน Matplotlib
เพื่อให้ผู้เรียนเห็นภาพการลู่เข้าเชิงเรขาคณิต

5.1.5 ขอบเขตโมดูลบทเรียนเชิงโต้ตอบ (Interactive Lesson Modules)

โครงงานได้วางแผนพัฒนาโมดูลบทเรียนเชิงโต้ตอบครอบคลุม 6 หัวข้อสำคัญของวิชาแคลคูลัสเบื้องต้น โดยจำแนกทฤษฎีหลัก ตรรกะการคำนวณ และการแสดงผลกราฟิกดังแสดงในตารางที่ 1.1

ตารางที่ 1.1 รายละเอียดโมดูลบทเรียนเชิงโต้ตอบ 6 หัวข้อ

หัวข้อบทเรียน	ทฤษฎีคณิตศาสตร์หลัก	ตรรกะการคำนวณ (Solver)	การแสดงผลกราฟิก (Plotter)
1. เส้นสัมผัสและอนุพันธ์ (Tangent & Derivative)	$f'(a) = lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$	คำนวณความชัน m และสมการเส้นสัมผัส $y - f(a) = m(x-a)$	เส้นโค้ง $f(x)$ พร้อมเส้นสัมผัสที่ปรับเลื่อนจุดสัมผัสตามแถบเลื่อน (Slider)
2. ลิมิตเข้าใกล้จุด (Limits at a Point)	$lim_{x\to a}f(x)$ และรูปแบบไม่กำหนด $\frac{0}{0}$	ตรวจสอบรูปแบบ $\frac{0}{0}$ แยกตัวประกอบทางพีชคณิตและคำนวณลิมิตซ้าย-ขวา	กราฟเส้นโค้งพร้อมจุดทดสอบวิ่งเข้าหาจุดวิกฤตทีละขั้น
3. ผลรวมรีมันน์ (Riemann Sum)	$A = lim_{n\to\infty}\sum f(x_i)\Delta x$	คำนวณผลรวมวิธี Left, Right, Midpoint และเปรียบเทียบกับค่าจริง	กราฟแท่งสี่เหลี่ยมผืนผ้าซ้อนทับพื้นที่ใต้เส้นโค้งจริง
4. การอินทิเกรตโดยการแทนค่า (Substitution Method)	$\int f(g(x))\,g'(x)dx = \int f(u)\,du$	กำหนดตัวแปร u หา du ดำเนินการอินทิเกรตและแทนค่ากลับ	แสดงผังขั้นตอนการแปลงรูปสมการและวิธีทำ LaTeX ละเอียด
5. พื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง (Area Between Curves)	$A = \int [f(x) - g(x)]dx$ บนช่วง $[a, b]$	หาจุดตัดของ 2 ฟังก์ชันและคำนวณพื้นที่สุทธิโดยแยกระนาบบน-ล่าง	กราฟเส้นโค้ง 2 เส้นพร้อมแรเงาพื้นที่ส่วนที่ถูกปิดล้อม
6. ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ (Improper Integrals)	$\int_a^\infty f\,(x)\,d = lim_{t\to\infty}\int_a^t f\,(x)\,dx$	ตรวจสอบการลู่เข้า (Convergence) หรือลู่ออก (Divergence) พร้อมคำนวณค่าลิมิต	กราฟเส้นโค้งหางยาวพร้อมแถบแรเงาขอบเขตที่วิ่งเข้าสู่อนันต์

5.1.6 กลไกการทดสอบและทวนสอบความถูกต้องทางคณิตศาสตร์

เพื่อให้มั่นใจว่าเว็บแอปพลิเคชันให้ผลลัพธ์และแสดงขั้นตอนการคำนวณที่ถูกต้องแม่นยำตามหลักวิชาการ โครงงานได้จัดทำชุดทดสอบโปรแกรมอัตโนมัติด้วยเฟรมเวิร์กไพเทสต์ (Pytest) เพื่อทวนสอบการทำงานของโมดูลคำนวณทางคณิตศาสตร์ใน 3 ด้านหลัก ได้แก่

1. การทดสอบความถูกต้องของผลลัพธ์ตามทฤษฎี:
ตรวจสอบผลการคำนวณของระบบเปรียบเทียบกับค่าเฉลยที่คำนวณด้วยมือ เช่น
การทดสอบผลรวมรีมันน์ของฟังก์ชัน $f(x) = x^2$ บนช่วง $[0, 2]$ เมื่อแบ่ง $n = 2$ ช่วงย่อย

วิธีผลรวมซ้าย คำนวณจาก $f(0)(1) + f(1)(1) = 0 + 1 = 1.0$

(ระบบต้องส่งคืนค่า 1.0)

วิธีผลรวมขวา คำนวณจาก $f(1)(1) + f(2)(1) = 1 + 4 = 5.0$

(ระบบต้องส่งคืนค่า 5.0)

วิธีจุดกึ่งกลาง คำนวณจาก $f(0.5)(1) + f(1.5)(1) = 0.25 + 2.25 = 2.5$

(ระบบต้องส่งคืนค่า 2.5)

โดยผลลัพธ์ที่ได้ต้องมีความคลาดเคลื่อนไม่เกิน 10^{-9}

2. การทดสอบคุณสมบัติการลู่เข้าของค่าประมาณ:
ตรวจสอบว่าเมื่อเพิ่มจำนวนช่วงย่อยให้ละเอียดยิ่งขึ้น ค่าผลลัพธ์ที่ได้จะต้องลู่เข้าสู่ค่าปริพันธ์จริง เช่น เมื่อกำหนดจำนวนช่วงย่อยเป็น $n = 50$ ช่วง ค่าผลรวมรีมันน์แบบจุดกึ่งกลาง (M_{50}) จะต้องมีค่าเข้าใกล้ค่าจริง $\int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3} \approx 2.6667$ โดยมีความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์น้อยกว่า 0.01

3. การทดสอบการจัดการกรณีข้อมูลนำเข้าไม่ถูกต้อง:
ตรวจสอบความสามารถของระบบในการดักจับข้อผิดพลาด เพื่อป้องกันไม่ให้โปรแกรมหยุดทำงาน เช่น

กรณีไม่ระบุฟังก์ชัน: ระบบต้องแจ้งเตือนข้อความ "กรุณาใส่ฟังก์ชันก่อน"

กรณีระบุขอบเขตไม่ถูกต้อง: เช่น ขอบล่างมากกว่าหรือเท่ากับขอบบน ($b \leq a$ เช่น $a = 2, b = 0$) ระบบต้องปฏิเสธการคำนวณและแจ้งเตือนให้แก้ไข

กรณีระบุจำนวนช่วงย่อยน้อยกว่า 1 $(n < 1)$: ระบบต้องแจ้งเตือนเงื่อนไข $n \geq 1$ ให้ผู้เรียนทราบ

5.1.7 การประเมินผลและการทดสอบการใช้งาน

การประเมินความสำเร็จของโครงงานได้รับการวางแผนให้ครอบคลุมทั้งด้านความถูกต้องของระบบและการทดลองใช้งานจริง โดยแบ่งการประเมินออกเป็น 2 ส่วนหลัก ได้แก่

1. การประเมินประสิทธิภาพเชิงเทคนิคของระบบ:
วัดผลจากความสมบูรณ์ของระบบซอฟต์แวร์ ได้แก่ อัตราการผ่านชุดทดสอบอัตโนมัติ 100% ในทุกฟังก์ชันคำนวณ และความถูกต้องสมบูรณ์ของการแสดงผลสมการคณิตศาสตร์บนเว็บเบราว์เซอร์

2. การประเมินความพึงพอใจและการใช้งานในกลุ่มนำร่อง:
นำเว็บแอปพลิเคชันไปทดลองใช้งานกับกลุ่มนิสิตนำร่องจำนวน 15–20 คน
เพื่อประเมินความสะดวกในการใช้งาน ความง่ายในการเรียนรู้
และความต่อเนื่องของส่วนต่อประสานผู้ใช้
ผ่านแบบประเมินความสะดวกในการใช้งานตามมาตรฐานสากล (System Usability Scale: SUS)
พร้อมทั้งรวบรวมข้อเสนอแนะเพื่อนำมาปรับปรุงระบบให้มีความสมบูรณ์ยิ่งขึ้น

6.ผลที่คาดว่าจะได้รับ

1. ได้เว็บแอปพลิเคชันช่วยเรียนแคลคูลัสเบื้องต้นที่พัฒนาด้วย Python และไลบรารีสตรีมลิต (Streamlit) และสามารถใช้งานได้จริง
2. ผู้เรียนสามารถศึกษาบทเรียนและฝึกทำแบบฝึกหัดได้ทุกที่ทุกเวลา
3. ผู้เรียนมีความเข้าใจในเนื้อหาแคลคูลัสมากขึ้นจากการเรียนรู้ผ่านคำอธิบาย ตัวอย่าง และวิธีทำอย่างเป็นขั้นตอน
4. ผู้สอนสามารถนำเว็บแอปพลิเคชันไปใช้เป็นสื่อประกอบการเรียนการสอนได้
5. ผู้จัดทำได้รับความรู้และประสบการณ์ในการพัฒนาเว็บแอปพลิเคชันด้วยภาษาไพธอน (Python) และไลบรารีสตรีมลิต (Streamlit) รวมทั้งการออกแบบสื่อการเรียนรู้
6. ช่วยส่งเสริมการเรียนรู้ด้วยตัวเองและเพิ่มประสิทธิภาพในการเรียนแคลคูลัสเบื้องต้นของนิสิต

7.เอกสารอ้างอิง

1. แหล่งเนื้อหาแคลคูลัส (เอกสารคำสอน ม.ศิลปากร)

[1] ฉวีวรรณ รัตนประเสริฐ, นวรัตน์ อนันต์ชื่น, นพดล ชุมชอบ, วรกฤษณ์ ศุภพร และธนิญฐอร ห้าวสุด. 2561. แคลคูลัส 1. พิมพ์ครั้งที่ 2. ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร. นครปฐม.

[2] ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร. 2561. แคลคูลัส 2. ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร. นครปฐม.

[3] ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร. 2568. คลังหนังสือและเอกสารคำสอนวิชาแคลคูลัส. แหล่งที่มา: https://math.sc.su.ac.th/หนังสือ/, 15 กุมภาพันธ์ 2569.

2. แหล่งข้อมูลการเขียนโปรแกรมและเครื่องมือพัฒนา (Official Documentation)

[4] Python Software Foundation. 2024. Python 3 Documentation. Available Source: https://docs.python.org/3/, June 10, 2024.

[5] Streamlit Inc. 2024. Streamlit Documentation: A faster way to build and share data apps. Available Source: https://docs.streamlit.io, June 15, 2024.

[6] SymPy Development Team. 2024. SymPy Documentation. Available Source: https://docs.sympy.org, June 20, 2024.

3. คู่มืออ้างอิงการจัดรูปแบบหน้าเว็บ (Web Styling & UI References)

[7] Mozilla Developer Network. 2024. MDN Web Docs: CSS Reference and Guide. Available Source: https://developer.mozilla.org, June 20, 2024.

[8] W3Schools. 2024. HTML5 and CSS3 Tutorials & Reference. Available Source: https://www.w3schools.com, June 20, 2024.