

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
**«Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского (ННГУ)»**

**Институт информационных технологий, математики и механики
Кафедра алгебры, геометрии и дискретной математики**

**ОТЧЕТ
по учебно-технологической практике**

на тему:

**Структура множества целочисленных решений матричного уравнения
 $AX = XB$**

Выполнил:
студент группы 3825М1ПМкн1
Сучков В.Н.

Подпись:

Научный руководитель:
доцент каф. АГДМ, к.ф.-м.н.,
Сидоров С.В.

Подпись:

Нижний Новгород
2025

Содержание

Введение	1
Свойства решений уравнения	2
Список литературы	5

Введение

Пусть есть матрицы $A, B \in \mathbb{Z}^{n \times n}$. Множество решений уравнения $AX = XB$ над $\mathbb{Q}^{n \times n}$ обозначим как $M_{A,B} = \{X \in \mathbb{Q}^{n \times n} | AX = XB\}$. Тогда множество целочисленных решений есть $\Lambda_{A,B} = M_{A,B} \cap \mathbb{Z}^{n \times n}$. Суть настоящей работы заключается в изучении структуры множества $\Lambda_{A,B}$, а в особенности, его связь с множеством $M_{J,J}$, где J - жорданова нормальная форма матриц A и B .

Свойства решений уравнения

Опишем несколько полезных свойств матриц из $M_{A,B}$, которые окажутся полезными в дальнейшем. Пусть J - рациональная жорданова нормальная форма матриц A и B обладающих цепочисленным спектром. Обозначим S_A и S_B соответствующие трансформирующие матрицы над \mathbb{Q} , такие что $AS_A = S_AJ$ и $BS_B = S_BJ$. Известно, что $M_{A,B} = S_A M_{J,J} S_B^{-1}$ (Лемма 1 из [1]). Это равенство устанавливает связь между множествами $M_{A,B}$ и $M_{J,J}$, элементы последнего из которых суть решения уравнения $JX = XJ$.

Определение 1. Матрицу T размера $m \times n$ будем называть обобщенно-верхне-треугольной, если она имеет один из следующих видов:

- 1) Если $m = n$, T – квадратная верхне-треугольная матрица;
- 2) Если $m < n$, $T = \begin{pmatrix} 0 & T' \end{pmatrix}$, где T' – квадратная верхне-треугольная матрица порядка m ;
- 3) Если $m > n$, $T = \begin{pmatrix} T' \\ 0 \end{pmatrix}$, где T' – квадратная верхне-треугольная матрица порядка n ;

Если в каждом из трех случаев у верхне-треугольной матрицы любая наддиагональ состоит из одинаковых элементов, то такую обобщенно-верхне-треугольную матрицу назовем **правильной верхне-треугольной**.

Матрицы $X \in M_{J,J}$ имеют блочно-диагональный вид ([2], с. 199) $X = \text{diag}(X^{(1)}, \dots, X^{(s)})$, где s – число различных собственных чисел α_k , $k = \overline{1, s}$ матриц A и B . Каждый из диагональных блоков сам по себе имеет блочную структуру. Блоки матрицы $X^{(k)}$ обозначим как $X_{ij}^{(k)}$, $i, j = \overline{1, p_k}$, где p_k – число жордановых клеток, соответствующих собственному числу α_k . Каждый блок $X_{ij}^{(k)}$ имеет правильный верхне-треугольный вид.

Лемма 1. Пусть X – блочная матрица с блоками X_{ij} размера $t_i \times t_j$, $i, j = \overline{1, m}$ имеющими правильную верхне-треугольную структуру с элементами, стоящими на наддиагонали s соответственно равными $x_{ij}^{(s)}$ ($s = 1$ – главная диагональ) и пусть размеры блоков t_k упорядочены следующим образом: $t_1 = t_2 = \dots = t_{m_1} > t_{m_1+1} = t_{m_1+2} = \dots = t_{m_2} > \dots > t_{m_{\beta-1}+1} = \dots = t_{m_\beta}$. Тогда определитель $\det X$ имеет следующий вид:

$$\det X = D_1^{t_{m_1}} \cdot D_2^{t_{m_2}} \cdots \cdot D_\beta^{t_{m_\beta}}$$

, где D_k – миноры матрицы X порядка t_k вида:

$$D_k = \begin{vmatrix} x_{m_{k-1}+1, m_{k-1}+1}^{(1)} & x_{m_{k-1}+1, m_{k-1}+2}^{(1)} & \cdots & x_{m_{k-1}+1, m_{k-1}+m_k}^{(1)} \\ x_{m_{k-1}+2, m_{k-1}+1}^{(1)} & x_{m_{k-1}+2, m_{k-1}+2}^{(1)} & \cdots & x_{m_{k-1}+2, m_{k-1}+m_k}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m_{k-1}+m_k, m_{k-1}+1}^{(1)} & x_{m_k, m_{k-1}+2}^{(1)} & \cdots & x_{m_{k-1}+m_k, m_{k-1}+m_k}^{(1)} \end{vmatrix}$$

и $m_0 = 1$.

Доказательство. Разложим определитель матрицы X используя теорему Лапласа следующим образом: выберем столбцы с номерами $1, 1 + t_1, \dots, 1 + \sum_{k=1}^m t_k$, и строки с аналогичными номерами. Полученный на пересечении выбранных строк и столбцов минор будет единственным отличным от нуля в сумме определителя. В самом деле, Зафиксируем выбор столбцов и рассмотрим, как будут выглядеть миноры построенные на других строках. В сущности, в каждом из блоков мы выбрали первый столбец и можем выбирать строки. Всего возможно несколько видов блоков, в соответствии с определением 1. Рассмотрим произвольный блок X_{ij} . Если $t_i < t_j$, то блок имеет вид $(0 \ X'_{ij})$ В таком случае, очевидно, что первый столбец целиком будет состоять

из нулей, а значит при любом выборе строк в минор на соответствующие позиции будут поставлены нули. Если $t_i = t_j$, то X_{ij} – квадратная матрица верхне-треугольного вида, а значит, все элементы первого столбца, кроме, возможно, первого, буду равны нулю. И, наконец, если $t_i > t_j$ то блок $X_{ij} = \begin{pmatrix} X'_{ij} \\ 0 \end{pmatrix}$ и X'_{ij} – квадратная верхне-треугольная матрица. В матрице X'_{ij} , как мы уже выяснили, все элементы кроме первого в первом столбце обязательно равны нулю, а в оставшейся подматрице и вовсе все элементы равны нулю. Таким образом, любой минор, стоящий на пересечении обозначенных выше столбцов и произвольных строк содержит хотя бы одну строку отличную от строк с номерами $1, 1+t_1, \dots, 1+\sum_{k=1}^m t_k$ будет содержать тем самым нулевую строку, а значит будет равен нулю.

Обозначим M полученный таким образом минор и M_1 дополнительный к нему минор. Тогда $\det X = M \cdot M_1$.

Покажем, что $M = D_1 \cdot D_2 \cdots D_\beta$. Рассмотрим среди строк с номерами $1, 1+t_1, \dots, 1+\sum_{i=1}^m t_i$ некоторую s -ую строку матрицы X соответствующую блочной строке с номером k ($X_{kl}, l = \overline{1, m}$). Пусть k_1 наибольшее такое, что $t_{k_1} > t_k$. Тогда, в соответствии с определением 1 элементы, стоящие в строке s на позициях с номерами $1, 1+t_1, \dots, 1+\sum_{i=1}^{k_1-1}$ будут равны нулю, так как они взяты из блоков вида $X_{kl} = (0 \ X'_{kl}), l = \overline{1, k_1}$ (в силу того, что $t_k < t_l$), в которых элемент, стоящий на пересечении первой строки и первого столбца равен нулю. Начиная с позиции $p = 1 + \sum_{i=1}^{k_1+1} t_i$ соответствующие блоки, содержащие элемент стоящий на пересечении s -ой строки и p -го столбца имеют один из двух оставшихся видов, а значит тот элемент, в общем случае, отличен от нуля. Если такого номера k_1 нет, то такая строка не обязательно начинается с нулей. Таким образом, минор M имеет ступенчатый вид:

$$M = \left| \begin{array}{ccc|ccc|c|c} x_{11}^{(1)} & \cdots & x_{1m_1}^{(1)} & \cdots & \cdots & \cdots & & & \\ x_{21}^{(1)} & \cdots & x_{2m_1}^{(1)} & \cdots & \cdots & \cdots & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ x_{m_1,1}^{(1)} & \cdots & x_{m_1,m_1}^{(1)} & \cdots & \cdots & \cdots & & & \\ \hline 0 & \cdots & 0 & x_{m_1+1,m_1+1}^{(1)} & \cdots & x_{m_1+1,m_2}^{(1)} & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & x_{m_1+2,m_1+1}^{(1)} & \cdots & x_{m_1+2,m_2}^{(1)} & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & x_{m_2,m_1+1}^{(1)} & \cdots & x_{m_2,m_2}^{(1)} & \cdots & \cdots & \vdots \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & x_{m_2+1,m_2+1}^{(1)} & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & x_{m_2+2,m_2+1}^{(1)} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & x_{m_3,m_2+1}^{(1)} & \cdots & \vdots \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & * \end{array} \right|$$

Заметим, что блоки стоящие на диагонали есть D_1, \dots, D_β . В самом деле, исходя из того, как мы упорядочили величины t_k , количество нулей в начале строки k -го диагонального блока будет равно m_{k-1} . Применяя теорему Лапласа к этому минору и получим выражение $M = D_1 \cdot D_2 \cdots D_\beta$.

Теперь рассмотрим вид дополнительного минора M_1 . Этот минор получен из матрицы X вычеркиванием строк и столбцов с номерами $1, 1+t_1, \dots, 1+\sum_{i=1}^m t_i$. То есть, в каждом блоке мы

вычеркиваем первую строку и первый столбец. Полученная таким образом матрица будет иметь такую же структуру, как и исходная матрица, однако каждый её блок станет меньше, или вовсе будет окончательно удален. Таким образом, к минору M_1 можно преминить тот же подход, что мы применяли к $\det X$ изначально, получив $M_1 = M^{(1)} \cdot M_2$. Минор $M^{(1)}$ будет также как и минор M раскладываться в произведение миноров D_1, \dots, D_β , однако, начиная с $t_{m_\beta} - 1$, минор с меньшим порядком D_β пропадет из $M^{(t_{m_\beta})}$, начиная с $t_{m_{\beta-1}} - 1$ разложение покинет минор $D_{\beta-1}$ и так далее. В результате, подставляя $M_l = M^{(l)} \cdot M_{l+1}$ и раскрывая значения соответствующих миноров, мы получим $\det X = M \cdot M_1 = M \cdot M^{(1)} \cdot M_2 = \dots = D_1^{t_{m_1}} \cdot D_2^{t_{m_2}} \cdots D_\beta^{t_{m_\beta}}$. Лемма доказана.

Список литературы

- [1] С. В. Сидоров, “О подобии матриц с целочисленным спектром над кольцом целых чисел”, Изв. вузов. Матем., 2011, № 3, 86–94; Russian Math. (Iz. VUZ), 55:3 (2011), 77–84.
<https://doi.org/10.3103/S1066369X11030091>
- [2] Гантмахер Ф.Р., *Теория матриц*, Наука, М., 1967