Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
**«Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского (ННГУ)»**

**Институт информационных технологий, математики и механики
Кафедра алгебры, геометрии и дискретной математики**

ОТЧЕТ

по **научно-исследовательской** работе

на тему:

Структура множества целочисленных решений матричного уравнения $AX = XB$

Выполнил:
студент группы 3825М1ПМкн1
Сучков В.Н.

Подпись:

Научный руководитель:
доцент каф. АГДМ, к.ф.-м.н.,
Сидоров С.В.

Подпись:

Нижний Новгород
2025

Содержание

Введение

Пусть есть матрицы $A, B \in \mathbb{Z}^{n\times n}$. Множество решений уравнения $AX = XB$ над $\mathbb{Q}^{n\times n}$ обозначим как $M_{A,B} = \{X \in \mathbb{Q}^{n\times n} | AX = XB\}$. Тогда множество целочисленных решений есть $\Lambda_{A,B} = M_{A,B} \cap \mathbb{Z}^{n\times n}$. Суть настоящей работы заключается в изучении структуры множества $\Lambda_{A,B}$, а в особенности, его связь с множестовм $M_{J,J}$, где J - жорданова нормальная форма матриц A и B.

Свойства решений уравнения

Опишем несколько полезных свойств матриц из $M_{A,B}$, которые окажутся полезными в дальнейшем. Пусть J - рациональная жорданова нормальная форма матриц A и B обладающих целочисленным спектром. Обозначим S_A и S_B соотвествующие трансформирующие матрицы над $\mathbb{Q}$, такие что $AS_A = S_AJ$ и $BS_B = S_BJ$. Известно, что $M_{A,B} = S_AM_{J,J}S_B^{-1}$ (Лемма 1 из [1]). Это равенство устанавливает связь между множествами $M_{A,B}$ и $M_{J,J}$, элементы последнего из которых суть решения уравнения $JX = XJ$.

Определение 1. *Матрицу T размера $m \times n$ будем называть обобщенно-верхне-треугольной, если она имеет один из следующих видов:*

1) Если $m = n$, T – квадратная верхне-треугольная матрица;

2) Если $m < n$, $T = \begin{pmatrix} 0 & T' \end{pmatrix}$, где T' – квадратная верхне-треугольная матрица порядка m;

3) Если $m > n$, $T = \begin{pmatrix} T' \\ 0 \end{pmatrix}$, где T' – квадратная верхне-треугольная матрица порядка n;

*Если в каждом из трех случаев у верхне-треугольной матрицы любая наддиагональ состоит из одинаковых элементов, то такую обобщенно-верхне-треугольную матрицу назовем **правильной верхне-треугольной**.*

Матрицы $X \in M_{J,J}$ имеют блочно-диагональный вид ([2], с. 199) $X = diag(X^{(1)}, \ldots, X^{(s)})$, где s – число различных собственных чисел α_k, $k = \overline{1,s}$ матриц A и B. Каждый из диагональных блоков сам по себе имеет блочную структуру. Блоки матрицы $X^{(k)}$ обозначим как $X_{ij}^{(k)}$, $i, j = \overline{1, p_k}$, где p_k - число жордановых клеток, соотвествующих собственному числу α_k. Каждый блок $X_{ij}^{(k)}$ имеем правильный верхне-треугольный вид.

Лемма 1. *Пусть X - блочная матрица с блоками X_{ij} размера $t_i \times t_j$, $i, j = \overline{1,m}$ имеющими правильную верхне-треугольную структуру с элементами, стоящими на наддиагонали s соответственно равными $x_{ij}^{(s)}$ ($s = 1$ – главная диагональ) и пусть размеры блоков t_k упорядочены следующим образом: $t_1 = t_2 = \ldots t_{m_1} > t_{m_1+1} = t_{m_1+2} = \ldots t_{m_2} > \cdots > t_{m_{\beta-1}+1} \ldots t_{m_\beta}$. Тогда определитель $\det X$ имеет следующий вид:*

$$\det X = D_1^{t_{m_1}} \cdot D_2^{t_{m_2}} \cdot \cdots \cdot D_\beta^{t_{m_\beta}}$$

, где D_k – миноры матрицы X порядка m_k вида:

$$D_k = \begin{vmatrix} x^{(1)}_{m_{k-1}+1,m_{k-1}+1} & x^{(1)}_{m_{k-1}+1,m_{k-1}+2} & \cdots & x^{(1)}_{m_{k-1}+1,m_{k-1}+m_k} \\ x^{(1)}_{m_{k-1}+2,m_{k-1}+1} & x^{(1)}_{m_{k-1}+2,m_{k-1}+2} & \cdots & x^{(1)}_{m_{k-1}+2,m_{k-1}+m_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x^{(1)}_{m_{k-1}+m_k,m_{k-1}+1} & x^{(1)}_{m_k,m_{k-1}+2} & \cdots & x^{(1)}_{m_{k-1}+m_k,m_{k-1}+m_k} \end{vmatrix}$$

и $m_0 = 1$.

Доказательство. Разложим определитель матрицы X используя теорему Лапласа следующим образом: выберем столбцы с номерами $1, 1 + t_1, \ldots, 1 + \sum_{k=1}^{m} t_k$, и строки с аналогичными номерами. Полученный на пересечении выбранных строк и столбцов минор будет единственным отличным от нуля в сумме определителя. В самом деле, Зафиксируем выбор столбцов и рассмотрим, как будут выглядеть миноры построенные на других строках. В сущности, в каждом из блоков мы выбрали первый столбец и можем выбирать строки. Всего возможно несколько видов блоков, в соответсвии с определением 1. Рассмотрим произвольный блок X_{ij}. Если $t_i < t_j$, то блок имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & X'_{ij} \end{pmatrix}$ В таком случае, очевидно, что первый столбец целиком будет состоять из нулей, а значит при любом выборе строк в минор на соотвествующие позиции будут поставлены нули. Если $t_i = t_j$, то X_{ij} – квадратная матрица верхне-треугольного вида, а значит, все элементы первого столбца, кроме, возможно, первого, буду равны нулю. И, наконец, если $t_i > t_j$ то блок $X_{ij} = \begin{pmatrix} X'_{ij} \\ 0 \end{pmatrix}$ и X'_{ij} - квадратная верхне-треугольная матрица. В матрице X'_{ij}, как мы уже выяснили, все элементы кроме первого в первом столбце обязательно равны нулю, а в оставшейся подматрице и вовсе все элементы равны нулю. Таким образом, любой минор, стоящий на пересечении обозначеных выше столбцов и произвольных строк содержащий хотя бы одну строку отличную от строк с номерами $1, 1+t_1, \ldots, 1+\sum\limits_{k=1}^{m} t_k$ будет содержать тем самым нулевую строку, а значит будет равен нулю.

Обозначим M полученный таким образом минор и M_1 дополнительный к нему минор. Тогда $\det X = M \cdot M_1$.

Покажем, что $M = D_1 \cdot D_2 \cdot \cdots \cdot D_\beta$. Рассмотрим среди строк с номерами $1, 1+t_1, \ldots, 1+\sum\limits_{i=1}^{m} t_i$ некоторую s-ую строку матрицы X соотвествующую блочной строке с номером k $(X_{kl}, l = \overline{1,m})$. Пусть k_1 наибольшее такое, что $t_{k_1} > t_k$. Тогда, в соответсвии с определением 1 элементы, стоящие в строке s на позициях с номерами $1, 1+t_1, \ldots, 1+\sum\limits_{i=1}^{k_1-1}$ будут равны нулю, так как они взяты из блоков вида $X_{kl} = \begin{pmatrix} 0 & X'_{kl} \end{pmatrix}, l = \overline{1, k_1}$ (в силу того, что $t_k < t_l$), в которых элемент, стоящий на пересечении первой строки и первого столбца равен нулю. Начиная с позиции $p = 1 + \sum\limits_{i=1}^{k_1+1} t_i$ соотвествующие блоки, содержащие элемент стоящий на пересечении s-ой строки и p-го столбца имеют один из двух оставшихся видов, а значит тот элемент, в общем случае, отличен от нуля. Если такого номера k_1 нет, то такая строка не обязательно начинается с нулей. Таким образом, минор M имеет ступенчатый вид:

$$M = \left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc|c}
x^{(0)}_{11} & \ldots & x^{(0)}_{1m_1} & \ldots & \ldots & \ldots & & & & \\
x^{(0)}_{21} & \ldots & x^{(0)}_{2m_1} & \ldots & \ldots & \ldots & & & & \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\
x^{(0)}_{m_1,1} & \ldots & x^{(0)}_{m_1,m_1} & \ldots & \ldots & \ldots & & & & \\
\hline
0 & \ldots & 0 & x^{(0)}_{m_1+1,m_1+1} & \ldots & x^{(0)}_{m_1+1,m_2} & \ldots & \ldots & \ldots & \vdots \\
0 & \ldots & 0 & x^{(0)}_{m_1+2,m_1+1} & \ldots & x^{(0)}_{m_1+2,m_2} & \ldots & \ldots & \ldots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \ldots & 0 & x^{(0)}_{m_2,m_1+1} & \ldots & x^{(0)}_{m_2,m_2} & \ldots & \ldots & \ldots & \vdots \\
\hline
0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & x^{(0)}_{m_2+1,m_2+1} & \ldots & x^{(0)}_{m_2+1,m_3} & \vdots \\
0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & x^{(0)}_{m_2+2,m_2+1} & \ldots & x^{(0)}_{m_2+2,m_3} & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & x^{(0)}_{m_3,m_2+1} & \ldots & x^{(0)}_{m_3,m_3} & \vdots \\
\hline
0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & *
\end{array}\right|$$

Заметим, что блоки стоящие на диагонали и есть $D_1, \ldots, D_\beta$. В самом деле, исходя из того, как мы упорядочили величины t_k, количество нулей в начале строки k-го диагонального блока будет равно m_{k-1}. Применяя теорему Лапласа к этому минору и получим выражение $M = D_1 \cdot D_2 \cdot \cdots \cdot D_\beta$.

Теперь рассмотрим вид дополнительного минора M_1. Этот минор получен из матрицы X вычеркиванием строк и столбцов с номерами $1, 1+t_1, \ldots, 1+\sum\limits_{i=1}^{m} t_i$. То есть, в каждом блоке мы вычеркиваем первую строку и первый столбец. Полученная таким образом матрица будет иметь такую же структуру, как и исходная матрица, однако каждый её блок станет меньше, или вовсе будет окончательно удален. Таким образом, к минору M_1 можно преминить тот же подход, что мы применяли к $\det X$ изначально, получив $M_1 = M^{(1)} \cdot M_2$. Минор $M^{(1)}$ будет также как и минор M раскладываться в произведение миноров $D_1, \ldots, D_\beta$, однако, начиная с $t_{m_\beta} - 1$, минор с меньшим порядком D_β пропадет из $M^{(t_{m_\beta})}$, начиная с $t_{m_{\beta-1}} - 1$ разложение покинет минор $D_{\beta-1}$ и так далее. В результате, подставляя $M_l = M^{(l)} \cdot M_{l+1}$ и раскрывая значения соотвествующих миноров, мы получим $\det X = M \cdot M_1 = M \cdot M^{(1)} \cdot M_2 = \cdots = D_1^{t_{m_1}} \cdot D_2^{t_{m_2}} \cdot \cdots \cdot D_\beta^{t_{m_\beta}}$. Лемма доказана.

Список литературы

[1] С. В. Сидоров, “О подобии матриц с целочисленным спектром над кольцом целых чисел”, Изв. вузов. Матем., 2011, № 3, 86–94; Russian Math. (Iz. VUZ), 55:3 (2011), 77–84. https://doi.org/10.3103/S1066369X11030091

[2] Гантмахер Ф.Р., *Теория матриц*, Наука, М., 1967