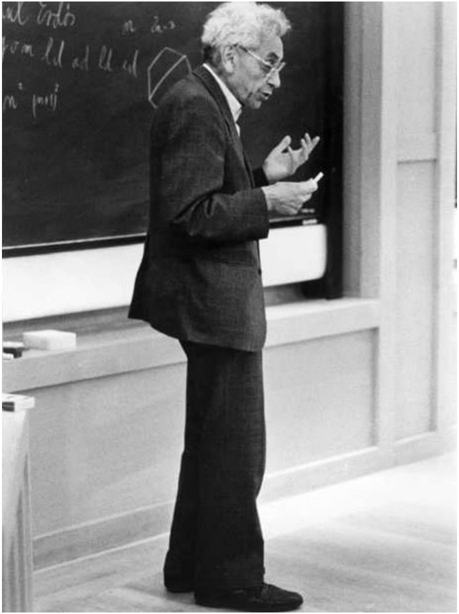
De Euclides a Goldbach, los primos en una hora

Alexander Guadalupe Vázquez Marín

15 de mayo

¿Por qué los números primos?



"Puede que Dios no juegue a los dados, pero algo extraño está pasando con los números primos."

– Paul Erdős

Definición

Definición

Un número primo es un número natural con **exactamente dos** *divisores naturales* **distintos***; el 1 y el mismo.*

Definición

Definición

Un número primo es un número natural con **exactamente dos** *divisores naturales* **distintos***; el 1 y el mismo.*

- 7 es primo porque solo es divisible por 1 y 7.

Definición

Definición

Un número primo es un número natural con **exactamente dos** *divisores naturales* **distintos***; el 1 y el mismo.*

- 7 es primo porque solo es divisible por 1 y 7.
- 12 no es primo porque es divisible por 1, 2, 3, 4, 6 y 12.

Definición

Definición

Un número primo es un número natural con **exactamente dos** *divisores naturales* **distintos***; el 1 y el mismo.*

- 7 es primo porque solo es divisible por 1 y 7.
- 12 no es primo porque es divisible por 1, 2, 3, 4, 6 y 12.
- ¿El 1 es un número primo?

Definición

Definición

Un número primo es un número natural con **exactamente dos** *divisores naturales* **distintos***; el 1 y el mismo.*

- 7 es primo porque solo es divisible por 1 y 7.
- 12 no es primo porque es divisible por 1, 2, 3, 4, 6 y 12.
- ¿El 1 es un número primo?
- No, porque según la definición de primo, este debe tener exactamente dos divisores.

Teorema pomposo

Teorema

El Teorema fundamental del aritmética:
Todo número natural mayor que 1 es un número primo o puede representarse de manera única como producto de números primos.

Teorema pomposo

Teorema

El Teorema fundamental del aritmética:
Todo número natural mayor que 1 es un número primo o puede representarse de manera única como producto de números primos.

- $57 = 19 \times 3$ (Primo de Grothendieck)

Teorema pomposo

Teorema

El Teorema fundamental del aritmética:
Todo número natural mayor que 1 es un número primo o puede representarse de manera única como producto de números primos.

- $57 = 19 \times 3$ (Primo de Grothendieck)
- $105 = 3 \times 5 \times 7$

Teorema pomposo

Teorema

El Teorema fundamental del aritmética:
Todo número natural mayor que 1 es un número primo o puede representarse de manera única como producto de números primos.

- $57 = 19 \times 3$ (Primo de Grothendieck)
- $105 = 3 \times 5 \times 7$
- ¿Qué pasaría si 1 fuera considerado primo?

Teorema pomposo

Teorema

El Teorema fundamental del aritmética:
Todo número natural mayor que 1 es un número primo o puede representarse de manera única como producto de números primos.

- $57 = 19 \times 3$ (Primo de Grothendieck)
- $105 = 3 \times 5 \times 7$
- ¿Qué pasaría si 1 fuera considerado primo?
- $6 = 2 \times 3 = 1 \times 2 \times 3 = 1 \times 1 \times 1 \times 2 \times 3$

Primeros 30 números primos

- 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29,
- 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71,
- 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113.

¿Cuántos números primos tenemos?

¿Cuántos números primos tenemos?

¿Cuántos números primos tenemos?

¿Cuántos números primos tenemos?

MUCHOS!!!

Teorema

Teorema de Euclides:
Existe una infinita cantidad de números primos.

Demostración de la infinitud de los números primos

Demostración.

- Supongamos que existe una cantidad finita de números primos.
- Sea $N = p_1 \times p_2 \times p_3 \times \ldots \times p_n + 1$.
- Por El TF Aritmética, N es primo o producto de primos.
- N no es primo y tampoco es divisible por ningún primo p_i.
- Esto es una contradicción, por lo que hay una cantidad infinita de números primos

$\square$

Conjetura de Fermat

Conjetura de Fermat:
La fórmula $F_n = 2^{2^n} + 1$, para $n \geq 0$, siempre produce números primos.

Donde:

- $F_0 = 3$
- $F_1 = 5$
- $F_2 = 17$
- $F_3 = 257$
- $F_4 = 65537$

Conjetura de Fermat

Conjetura de Fermat:
La fórmula $F_n = 2^{2^n} + 1$, para $n \geq 0$, siempre produce números primos.

Donde:

- $F_0 = 3$
- $F_1 = 5$
- $F_2 = 17$
- $F_3 = 257$
- $F_4 = 65537$
- $F_5 = 4294967297 = 641 \times 6700417$ (no es primo)

Fórmula de Willans para primos

La fórmula de Willans(1964) para calcular el n-ésimo primo es:

$$P_n = 1 + \sum_{m=1}^{2^n} \left\lfloor \frac{n}{\left(\sum_{j=1}^{m} \left\lfloor \cos^2\left(\frac{\pi((j-1)!+1)}{j}\right)\right\rfloor\right)^{1/n}} \right\rfloor$$

Teorema de los Números Primos

Teorema

Teorema de los Números Primos:

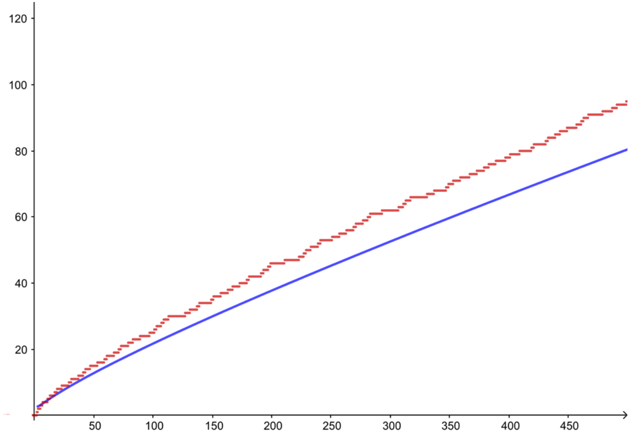
Sea $\pi(x)$ la función de conteo de primos menores o iguales a x. El teorema de los números primos establece que $\pi(N) \sim \frac{N}{\log(N)}$, es decir:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log(x)}} = 1$$

"El camino más corto entre dos verdades en el mundo real, pasa por el plano complejo"

– Jacques Hadamart

Gráfica, teorema de primos



Derivación de la fórmula del Producto de Euler

La fórmula del Producto de Euler relaciona los números primos con la función Zeta de Riemann. La fórmula es:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ primo}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

Aproximación de la distribución de primos

La función logaritmo integral $Li(x)$ proporciona una aproximación a la cantidad de números primos menores o iguales a x. Esta función está definida como:

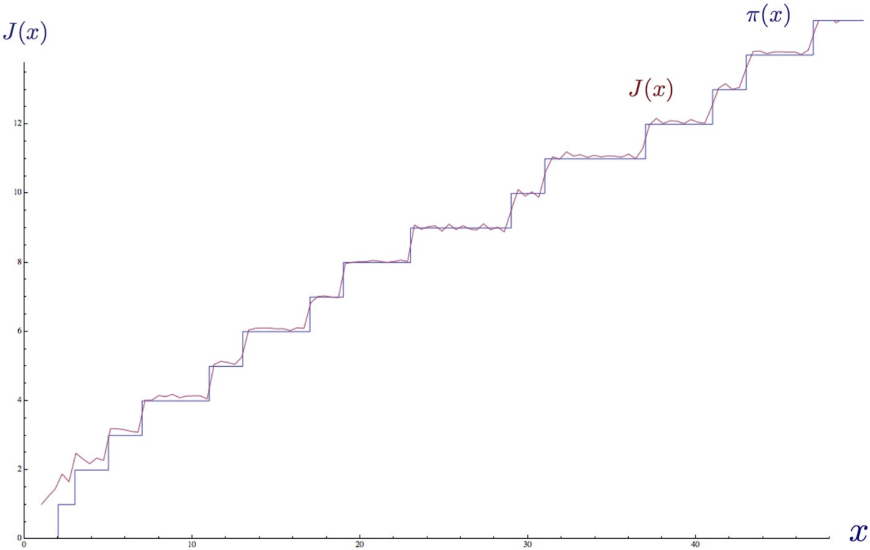
$$Li(x) = \int_2^x \frac{1}{\log t}\, dt$$

Riemann encontró una forma explícita para la función contador de primos $\pi(x)$ utilizando la función $Li(x)$ y en términosde los ceros no triviales ρ de la función Zeta de Riemann $\zeta(s)$:

$$\pi(x) = Li(x) - \sum_{\rho} \frac{Li(x^{\rho})}{\rho} - \log(2) + \int_x^{\infty} \frac{dt}{t(t^2-1)log(t)}$$

donde la suma se extiende sobre todos los ceros no triviales $\rho = \beta + i\gamma$ de $\zeta(s)$.

Aproximación con los ceros de la función zeta



Conjetura de Goldbach

Conjetura de Goldbach (Euler)

Todo número par puede ser expresado como la suma de dos números primos.

Ejemplos:

- $4 = 2 + 2$

Conjetura de Goldbach

Conjetura de Goldbach (Euler)

Todo número par puede ser expresado como la suma de dos números primos.

Ejemplos:

- $4 = 2 + 2$
- $6 = 3 + 3$

Conjetura de Goldbach

Conjetura de Goldbach (Euler)

Todo número par puede ser expresado como la suma de dos números primos.

Ejemplos:

- $4 = 2 + 2$
- $6 = 3 + 3$
- $8 = 3 + 5$

Conjetura de Goldbach

Conjetura de Goldbach (Euler)

Todo número par puede ser expresado como la suma de dos números primos.

Ejemplos:

- $4 = 2 + 2$
- $6 = 3 + 3$
- $8 = 3 + 5$
- $10 = 3 + 7 = 5 + 5$

Conjetura de Goldbach

Conjetura de Goldbach (Euler)

Todo número par puede ser expresado como la suma de dos números primos.

Ejemplos:

- $4 = 2 + 2$
- $6 = 3 + 3$
- $8 = 3 + 5$
- $10 = 3 + 7 = 5 + 5$
- $12 = 5 + 7$

Conjetura de Goldbach

Conjetura de Goldbach (Euler)

Todo número par puede ser expresado como la suma de dos números primos.

Ejemplos:

- $4 = 2 + 2$
- $6 = 3 + 3$
- $8 = 3 + 5$
- $10 = 3 + 7 = 5 + 5$
- $12 = 5 + 7$
- $14 = 3 + 11 = 7 + 7$

Primos generalizados, anillos euclideanos

Primos generalizados, anillos euclideanos

Anillo:

Un anillo es un conjunto R junto con dos operaciones binarias, usualmente denotadas como suma $(+)$ y producto $(\cdot)$, que satisfacen las siguientes propiedades para todo a, b, c en R:

- **Asociatividad de la suma:** $(a + b) + c = a + (b + c)$.
- **Elemento neutro de la suma:** Existe un elemento 0 tal que $a + 0 = a = 0 + a$ para todo a en R.
- **Inversos bajo la suma:** Para cada a en R, existe un elemento $-a$ tal que $a + (-a) = 0 = (-a) + a$.
- **Conmutatividad de la suma:** $a + b = b + a$ para todo a, b en R.
- **Asociatividad del producto:** $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
- **Distributividad:** $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ y $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$.

Definición de anillo euclidiano

Anillo euclidiano:
Formalmente, un anillo R se dice euclidiano si es conmutativo y existe una función $\phi : R\backslash\{0\} \to \mathbb{N}$, llamada función euclidiana, que satisface las siguientes propiedades:

- Para cualesquiera $a, b \in R$ con $b \neq 0$, existen $q, r \in R$ tales que $a = qb + r$ con $r = 0$ o $\phi(r) < \phi(b)$.
- $\phi(a) \leq \phi(ab)$ para todo $a, b \in R$ con $b \neq 0$.

Primo en un anillo euclidiano

Elemento primo (irreducible):
En un anillo euclidiano R, un elemento $p \in R \setminus \{0\}$ se dice primo si cumple las siguientes dos condiciones:

- p no es una unidad, es decir, no tiene inverso multiplicativo en R.
- Si $p = ab$ para algunos $a, b \in R$, entonces o bien a o bien b es una unidad en R.

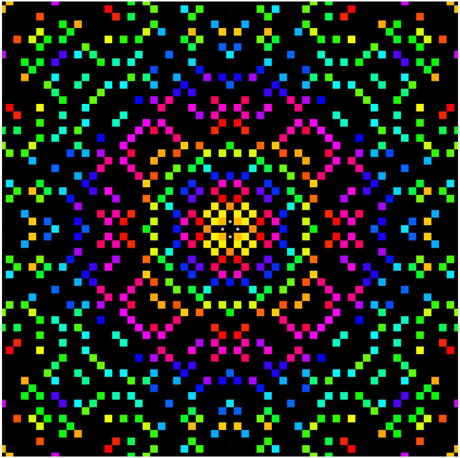
Teorema fundamental de la aritmética generalizado

Teorema

El Teorema Fundamental de la Aritmética generalizado *establece que los dominios euclidianos son dominios de factorización única (DFU).*

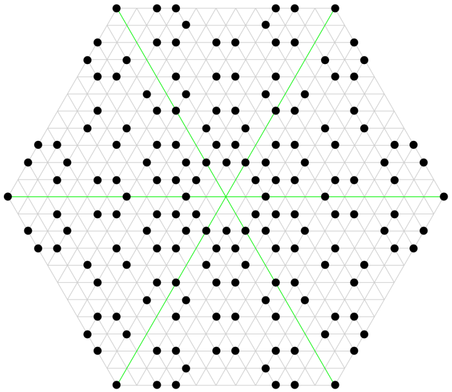
Esto es, que todo elemento distinto del 0, puede expresarse de manera única, hasta unidades, como producto de elementos primos.

Enteros Gaussianos (primos)



Definición de enteros Gaussianos: Los enteros Gaussianos, denotados por $\mathbb{Z}[i]$, son los números complejos de la forma $a + bi$, donde a y b son enteros.

Enteros de Eisenstein (primos)



Definición de enteros de Eisenstein:
Los enteros de Eisenstein, denotados por $\mathbb{Z}[\omega]$, son los números complejos de la forma $a + b\omega$, donde a y b son enteros y ω es una raíz cúbica primitiva de la unidad, $\omega = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

Último Teorema de Fermat

El Último Teorema de Fermat, formulado por Pierre de Fermat en el siglo XVII, establece que no existen soluciones enteras a, b, c y $n > 2$ que satisfagan la ecuación

$$a^n + b^n = c^n$$