2
GENEL TANIMLAMALAR VE DÖNÜŞÜMLER

2.1. Giriş

Robotlar kendi çevrelerindeki nesnelerinde bulunduğu üç boyutlu uzayda hareket ederler. Bu durum robotun ve çevresindeki nesnelerin bir birlerine göre konum ve yönelim tanımlarının yapılmasını gerektirir. Konum ve yönelimlerin belirlenebilmesi için üç boyutlu uzayda robotun kendiside dahil olmak üzere her nesneye bir koordinat sistemi yerleştirilir. Nesneler ve bu nesnelere yerleştirilen bütün koordinat sistemleri evrensel çerçeve içerisinde bulunur. Tanımlayacağımız bütün konum ve yönelimleri evrensel çerçeveye veya bu evrensel çerçeve içerisindeki diğer Kartezyen koordinat sistemlerine göre gerçekleştireceğiz.

2.2. Konum, Yönelim ve Koordinat Sistemlerinin Tanımlanması

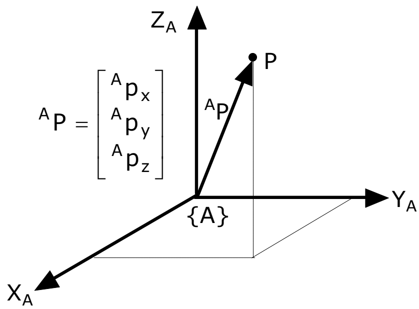
Konum, yönelim ve koordinat sistemlerinin tanımlanması nesnelerin evrensel çerçeve içerisindeki özelliğini açıklar. Şimdi bunları sırayla açıklayalım.

2.2.1. Konum tanımı

Bir nokta, koordinat sistemi tanımlamak suretiyle evrensel çerçeve içerisinde herhangi bir yere konumlandırılabilir. Bilindiği gibi evrensel koordinat çerçevesi içerisine birçok koordinat sistemi yerleştirebilir. Üç boyutlu uzayda, bir nokta bu koordinat sistemlerinin merkezine göre tanımlanmış 3x1 boyutlu bir vektörle gösterilebilir. Bu vektörler hangi koordinat sistemine göre tanımlamışsa ona göre isimlendirilir. Örneğin evrensel çerçeve içerisinde bulunan bir P noktasının {A} koordinat sistemine göre konumu ^{A}P şeklinde bir vektörle gösterilir. ^{A}P, P noktasının {A} koordinat sisteminin merkezine uzaklığını, (x, y, z) eksenlerinde sayısal olarak tanımlar. ^{A}P vektörü matematiksel olarak denklem 2.1'deki gibi gösterilir.

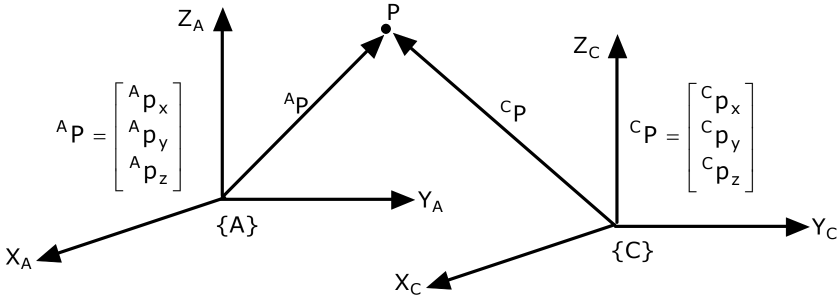
$$^{A}P = \begin{bmatrix} ^{A}p_x \\ ^{A}p_y \\ ^{A}p_z \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

Şekil 2.1'de bir birine dik üç birim vektöre sahip {A} koordinat sistemi ve P noktası birlikte gösterilmiştir.



Şekil 2.1. P noktasının {A} koordinat sistemine göre tanımlanması.

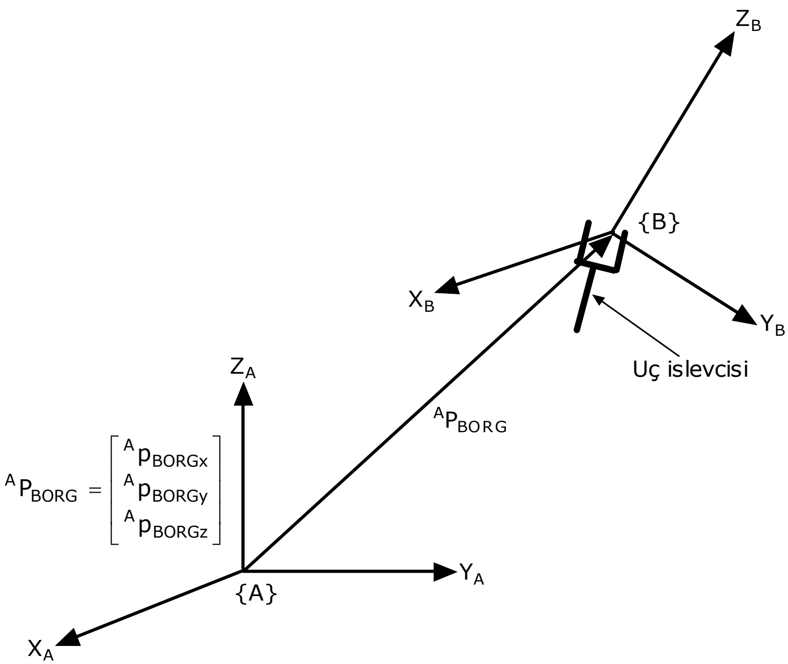
Aynı P noktası, Şekil 2.2'de görüldüğü gibi hem {A}, hem de {C} koordinat sistemine göre tanımlanabilir. Dikkat edileceği gibi, P noktasının {A} koordinat sisteminin merkezine olan uzaklığı ile {C} koordinat sisteminin merkezine olan uzaklığı eşit olmak zorunda değildir ($^{A}P \neq {}^{C}P$).



Şekil 2.2. P noktasının {A} ve {B} koordinat sistemine göre tanımlanması.

Daha öncede belirtildiği gibi robot ve çevresindeki nesnelere koordinat sistemi yerleştirilir. Şekil 2.3'de bir robotun uç işlevcisinin A noktasına uzaklığını tanımlamak için, A noktasına ve robotun uç işlevcisine koordinat sistemleri yerleştirilmiştir. {A} ve {B} koordinat sistemlerinin merkezleri arasındaki uzaklık A noktasıyla uç işlevci arasındaki uzaklıktır ve ${}^{A}P_{BORG}$ şeklinde gösterilir. ${}^{A}P_{BORG}$, ${}^{A}P_{BORGx}$, ${}^{A}P_{BORGy}$ ve ${}^{A}P_{BORGz}$ bileşenlerinden oluşur ve aşağıdaki gibi gösterilir.

$$ {}^{A}P_{BORG} = \begin{bmatrix} {}^{A}P_{BORGx} \\ {}^{A}P_{BORGy} \\ {}^{A}P_{BORGz} \end{bmatrix} \tag{2.2} $$



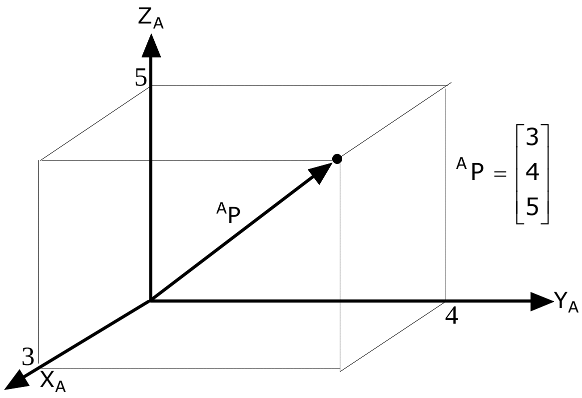
Şekil 2.3. A noktasının {A} ve koordinat sistemine göre tanımlanması.

ÖRNEK 2.1

Üç boyutlu uzayda {A} koordinat sistemine göre P=(3, 4, 5) noktası veriliyor. Bu P noktasının {A} koordinat sistemine göre konumunu şekil üzerinde gösteriniz.

ÇÖZÜM 2.1

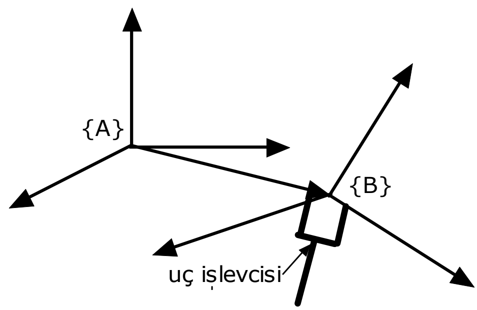
Üç boyutlu uzayda, P=(3, 4, 5) noktasının {A} koordinat sistemine göre konumu Şekil 2.4'teki gibi gösterilir.



Şekil 2.4. P=(3, 4, 5) noktasının {A} koordinat sistemine göre konumu.

2.2.2. Yönelim Tanımı

Üç boyutlu uzayda, bir noktanın herhangi bir koordinat sistemine göre konumunun yanında yönelimi de tanımlanır. Yönelim, bir koordinat sisteminin başka bir koordinat sistemine göre dönme miktarıdır ve 3x3 boyutlu bir matrisle ifade edilir. Bir katı cismin yönelimini başka bir referans koordinat sistemine göre tanımlamak için katı cisme bir koordinat sistemi yerleştirilir. Şekil 2.5'te görüldüğü gibi uç işlevcisine {B} koordinat sistemi yerleştirilerek {A} referans koordinat sistemine göre yönelimi tanımlanır.



Şekil 2.5. Bir cismin yöneliminin referans koordinat sistemine göre tanımlanması.

Uç işlevcisine yerleştirilen {B} koordinat sistemini, {A} referans koordinat sistemi cinsinden ifade etmek için birim vektörler kullanılır. {B} Koordinat sisteminin birim vektörlerini aşağıdaki gibi gösterelim.

$$\{B\} = \hat{X}_B\,,\ \hat{Y}_B\,,\ \hat{Z}_B \tag{2.3}$$

{B} koordinat sisteminin birim vektörlerini {A} koordinat sistemi cinsinden ise aşağıdaki gibi gösterebiliriz.

$$\{A\} = {}^{A}\hat{X}_B\,,\ {}^{A}\hat{Y}_B\,,\ {}^{A}\hat{Z}_B \tag{2.4}$$

Denklem 2.4'teki ifadeyi 3x3 boyutlu bir matrisle denklem 2.5'deki gibi ifade edebiliriz. 3x3 şeklinde yazılabilen bu matrise dönme matrisi (rotation matrix) denir. Bu matris {B} koordinat sisteminin yönelimini {A} koordinat sistemine göre açıkladığı için ${}^{A}_{B}R$ şeklinde gösterilir. ${}^{A}_{B}R$, {B} koordinat sisteminin {A} koordinat sistemine göre X, Y ve Z eksenlerindeki dönme miktarını gösterir.

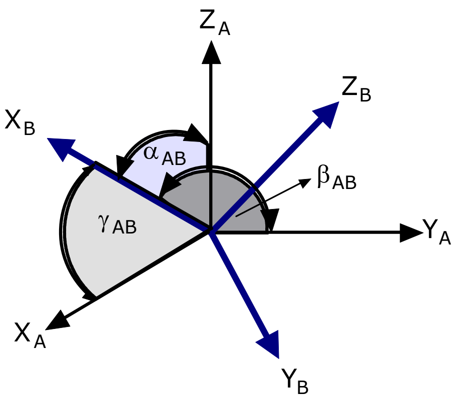
$${}^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} {}^{A}\hat{X}_B & {}^{A}\hat{Y}_B & {}^{A}\hat{Z}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

Denklem 2.5'deki matrisin her bir kolonu birer birim vektördür. Bu birim vektörler {B} koordinat sisteminin eksenlerinin doğrultusunu {A} koordinat sistemine göre tanımlar. Şekil 2.6'da olduğu gibi, {B} koordinat sistemi ile {A} koordinat sisteminin merkezleri çakışık olsun. Bu durumda {B} koordinat sisteminde yer alan $\hat{X}_B$ birim vektörünün yönelimi {A} koordinat sistemine göre ${}^{A}\hat{X}_B$ şeklinde gösterilip aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$${}^{A}\hat{X}_B = \begin{bmatrix} r_{11} \\ r_{21} \\ r_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |X_B||X_A|\cos\gamma_{AB} \\ |X_B||Y_A|\cos\beta_{AB} \\ |X_B||Z_A|\cos\alpha_{AB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{X}_B \cdot \hat{X}_A \\ \hat{X}_B \cdot \hat{Y}_A \\ \hat{X}_B \cdot \hat{Z}_A \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

Denklem 2.6'dan yararlanarak ${}^{A}_{B}R$ matrisi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$${}^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} {}^{A}\hat{X}_B & {}^{A}\hat{Y}_B & {}^{A}\hat{Z}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{X}_B \cdot \hat{X}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{X}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{X}_A \\ \hat{X}_B \cdot \hat{Y}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{Y}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{Y}_A \\ \hat{X}_B \cdot \hat{Z}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{Z}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{Z}_A \end{bmatrix} \tag{2.7}$$



Şekil 2.6. Merkezleri çakışık yönelimleri farklı iki koordinat sistemi.

Denklem 2.7 düzenlenerek daha açık bir ifadeye ulaşılabilir.

$$ {}^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} |X_B||X_A|\cos\gamma_{AB} & |Y_B||X_A|\cos\theta_{AB} & |Z_B||X_A|\cos\varphi_{AB} \\ |X_B||Y_A|\cos\beta_{AB} & |Y_B||Y_A|\cos\phi_{AB} & |Z_B||Y_A|\cos\delta_{AB} \\ |X_B||Z_A|\cos\alpha_{AB} & |Y_B||Z_A|\cos\psi_{AB} & |Z_B||Z_A|\cos\sigma_{AB} \end{bmatrix} \tag{2.8} $$

Bir dikken (ortogonal) matris olan dönme matrisi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$ R = \begin{bmatrix} \hat{X} & \hat{Y} & \hat{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \tag{2.9} $$

Matris elemanlarının dikkenlik ve birim özellikleri aşağıda verilmiştir.

$$ \hat{X}\cdot\hat{X} = 1, \quad \hat{Y}\cdot\hat{Y} = 1, \quad \hat{Z}\cdot\hat{Z} = 1 $$

$$ \hat{X}\cdot\hat{Y} = 0, \quad \hat{X}\cdot\hat{Z} = 0, \quad \hat{Y}\cdot\hat{Z} = 0 $$

$$ |\hat{X}| = 1, \quad |\hat{Y}| = 1, \quad |\hat{Z}| = 1 $$

{A} koordinat sisteminin {B} koordinat sistemine göre yönelimi denklem 2.10’da görüldüğü gibi ${}^{B}_{A}R$ dönme matrisiyle gösterilir.

$$ {}^{B}_{A}R = \begin{bmatrix} {}^{B}\hat{X}_A & {}^{B}\hat{Y}_A & {}^{B}\hat{Z}_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{X}_A\cdot\hat{X}_B & \hat{Y}_A\cdot\hat{X}_B & \hat{Z}_A\cdot\hat{X}_B \\ \hat{X}_A\cdot\hat{Y}_B & \hat{Y}_A\cdot\hat{Y}_B & \hat{Z}_A\cdot\hat{Y}_B \\ \hat{X}_A\cdot\hat{Z}_B & \hat{Y}_A\cdot\hat{Z}_B & \hat{Z}_A\cdot\hat{Z}_B \end{bmatrix} \tag{2.10} $$

{A} koordinat sistemini {B} koordinat sistemine göre tanımlayan ${}^{B}_{A}R$ matrisi, ${}^{A}_{B}R$ matrisinin devriğine (transpoz) eşittir.

$${}^{B}_{A}R={}^{A}_{B}R^{T} \tag{2.11}$$

${}^{B}_{A}R$ dönme matrisinin tersi ${}^{B}_{A}R^{-1}$ olsun. ${}^{B}_{A}R$ matrisiyle ${}^{B}_{A}R^{-1}$ matrisinin çarpımı birim matrisi verir.

$${}^{B}_{A}R\,{}^{B}_{A}R^{-1}=I \tag{2.12}$$

Denklemde I birim matrisi göstermektedir. Denklem 2.12'nin her iki tarafını ${}^{B}_{A}R^{T}$ matrisiyle çarpalım.

$${}^{B}_{A}R^{T}\,{}^{B}_{A}R\,{}^{B}_{A}R^{-1}={}^{B}_{A}R^{T}I \tag{2.13}$$

Denklemde,

$${}^{B}_{A}R^{T}\,{}^{B}_{A}R=\begin{bmatrix}{}^{B}\hat{X}_{A}\\{}^{B}\hat{Y}_{A}\\{}^{B}\hat{Z}_{A}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}{}^{B}\hat{X}_{A} & {}^{B}\hat{Y}_{A} & {}^{B}\hat{Z}_{A}\end{bmatrix}$$

$${}^{B}_{A}R^{T}\,{}^{B}_{A}R=\begin{bmatrix}{}^{B}\hat{X}_{A}.{}^{B}\hat{X}_{A} & {}^{B}\hat{X}_{A}.{}^{B}\hat{Y}_{A} & {}^{B}\hat{X}_{A}.{}^{B}\hat{Z}_{A}\\{}^{B}\hat{Y}_{A}.{}^{B}\hat{X}_{A} & {}^{B}\hat{Y}_{A}.{}^{B}\hat{Y}_{A} & {}^{B}\hat{Y}_{A}.{}^{B}\hat{Z}_{A}\\{}^{B}\hat{Z}_{A}.{}^{B}\hat{X}_{A} & {}^{B}\hat{Z}_{A}.{}^{B}\hat{Y}_{A} & {}^{B}\hat{Z}_{A}.{}^{B}\hat{Z}_{A}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=I$$

$${}^{B}_{A}R^{T}\,{}^{B}_{A}R=I \tag{2.14}$$

${}^{B}_{A}R^{T}\,{}^{B}_{A}R=I$ ifadesini, denklem 2.13'te yerine koyalım.

$$I\,{}^{B}_{A}R^{-1}={}^{B}_{A}R^{T}$$

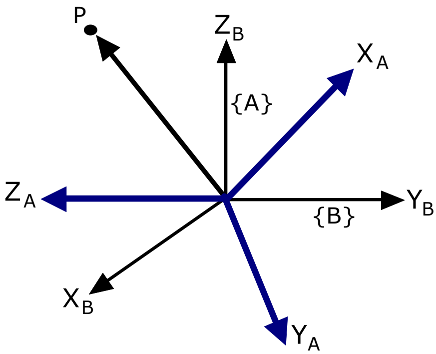
$${}^{B}_{A}R^{-1}={}^{B}_{A}R^{T} \tag{2.15}$$

Denklem 2.15'ten bir dönme matrisin tersini almak için o matrisin sadece devriğini almanın yeterli olduğu sonucunu çıkarabiliriz. Ayrıca,

1. Dönme matrisi, {B} koordinat sisteminin {A} koordinat sistemine göre yönelimi açıklar.

2. Şekil 2.7'de olduğu gibi, eğer {A} ve {B} gibi iki koordinat sisteminin merkezleri üst üste çakışık ise, {B} koordinat sistemine göre tanımlanmış bir noktayı {A} koordinat sistemine göre tanımlamak mümkün olur. Bu durum matematiksel olarak aşağıdaki gibi ifade edilir.

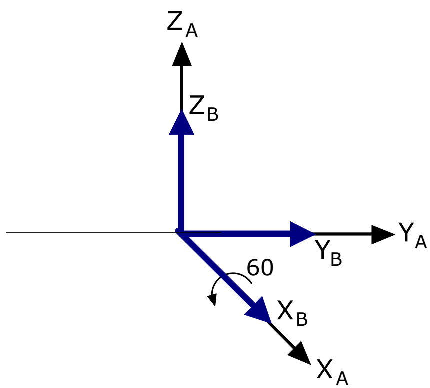
$$^{A}P={}^{A}_{B}R\,{}^{B}P \tag{2.16}$$



Şekil 2.7. {B} koordinat sistemine göre tanımlanmış bir noktanın {A} koordinat sistemine göre tanımlanması.

ÖRNEK 2.2

Şekil 2.8'de olduğu gibi merkezleri çakışık ve üst üste olan iki koordinat sisteminden {B} koordinat sistemi {A} koordinat sistemine göre X ekseninde

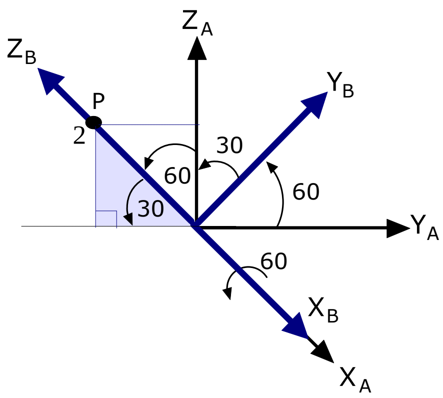


Şekil 2.8. Örnek 2.2 için kullanılan şekil.

60 derece döndürülüyor. Yeni durumda {B} koordinat sistemine göre ${}^{B}P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T$ konumunda bulunan P noktasının {A} koordinat sistemine göre konumunu bulunuz.

ÇÖZÜM 2.2

Şekil 2.8'i aşağıdaki gibi yeniden çizelim.



Şekil 2.9. Çözüm 2.2 için çizilmiş şekil.

Şekil 2.9'da aynı düzlemde olan Z_A, Z_B, Y_A, ve Y_B eksenleri yine aynı düzlemde bulunan X_A ve X_B eksenlerine diktir. Bu problemi ilk önce geometrik olarak çözelim. Farklı renkte çizilen üçgende hipotenüs 2 birim 30 dereceyi gören kenar da hipotenüsün yarısı kadar yani 1 birimdir. Diğer kenarda dik üçgen denkleminden 1.732 olur. Yalnız bu değer Y_A ekseninin negatif bölgesinde bulunduğundan bu uzunluk -1.732 olur. Her zaman bu kadar basit bir soruyla karşılaşmayabiliriz. Bu açıdan Şekil 2.9'dan faydalanarak ${}^{A}_{B}R$ matrisini bulalım.

$$
{}^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} |X_B||X_A|\cos\gamma_{AB} & |Y_B||X_A|\cos\theta_{AB} & |Z_B||X_A|\cos\varphi_{AB} \\ |X_B||Y_A|\cos\beta_{AB} & |Y_B||Y_A|\cos\phi_{AB} & |Z_B||Y_A|\cos\delta_{AB} \\ |X_B||Z_A|\cos\alpha_{AB} & |Y_B||Z_A|\cos\psi_{AB} & |Z_B||Z_A|\cos\sigma_{AB} \end{bmatrix}
$$

${}^{A}_{B}R$ matrisinin r_{11} elemanı X_B ile X_A arasındaki açının cosinüsü alınarak bulunur. Şekil 2.9'da görüldüğü gibi X_B ile X_A üst üste olduğundan aralarında açı 0 derecedir

$$r_{11} = |X_B||X_A| \cos \gamma_{AB} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 0 = 1$$

Diğer elemanlarda aynı şekilde aşağıdaki gibi bulunur.

$$^A_BR = \begin{bmatrix} 1\cdot 1\cdot \cos 0 & 1\cdot 1\cdot \cos 90 & 1\cdot 1\cdot \cos 90 \\ 1\cdot 1\cdot \cos 90 & 1\cdot 1\cdot \cos 60 & 1\cdot 1\cdot \cos 150 \\ 1\cdot 1\cdot \cos 90 & 1\cdot 1\cdot \cos 30 & 1\cdot 1\cdot \cos 60 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & -0.866 \\ 0 & 0.866 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$^AP = ^A_BR\,^BP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & -0.866 \\ 0 & 0.866 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1.732 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (2.17)$$

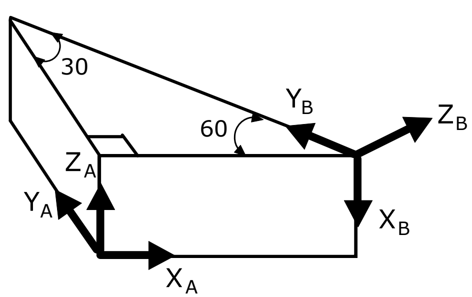
Görüldüğü gibi her iki yöntem de aynı sonucu üretmektedir.

3. Şekil 2.7'de olduğu gibi, bir $^AP_1$ vektörü döndürerek yeni bir vektör olan $^AP_2$, denklem 2.18'deki gibi elde edilebilir. Dönme matrisi bu şekilde dönüşüm operatörü olarak kullanılabilir.

$$^AP_2 = ^A_BR\,^AP_1 = T\,^AP_1 \qquad (2.18)$$

ÖRNEK 2.3

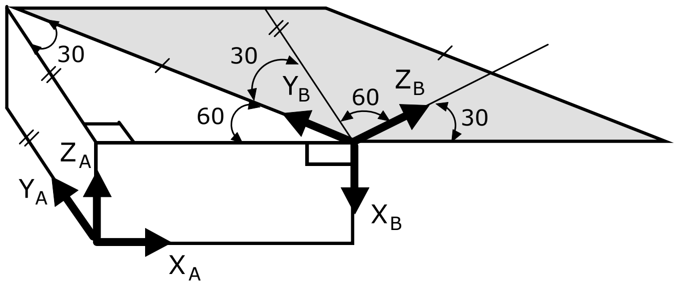
Şekil 2.10'da verilen iki koordinat sisteminden {B} koordinat sisteminin {A} koordinat sistemine göre yönelimini (^A_BR) bulunuz.



Şekil 2.10. Örnek 2.3 için kullanılan şekil.

ÇÖZÜM 2.3

İlk önce vektörler arasındaki açıları belirlemek için Şekil 2.10'u aşağıdaki gibi yeniden çizelim.



Şekil 2.11. Çözüm 2.3 için çizilmiş şekil.

Şekil 2.11'de bir birine göre paralel olan doğru parçaları '/' veya '//' şeklinde gösterilmiştir. Koordinat sistemlerindeki birim vektörler bir birine 90 derece dik olduğuna göre Y_B ve Z_B aynı düzlemde X_B ise bu düzleme dik konumdadır. Bu koşullar göz önünde bulundurularak her birim vektörün bir birlerine göre yönelimleri Şekil 2.11'deki gibi açılarla gösterilebilir. Denklem 2.8'den yararlanarak {A} ve {B} koordinat sistemleri arasındaki yönelim aşağıdaki gibi bulunur.

$$ {}^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} \cos 90 & \cos 120 & \cos 30 \\ \cos 90 & \cos 30 & \cos 60 \\ \cos 180 & \cos 90 & \cos 90 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & 0.866 \\ 0 & 0.866 & 0.5 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.19} $$

ÖRNEK 2.4

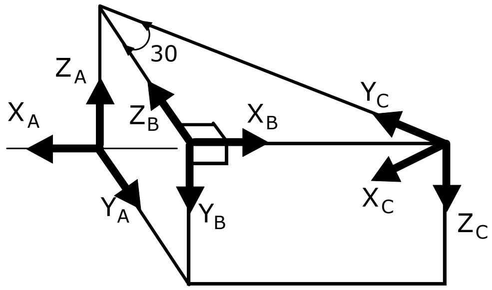
{A}, {B} ve {C} koordinat sistemleri Şekil 2.12'de gösterildiği gibi yerleştirildiğine göre sırayla

a) ${}^{A}_{C}R$,

b) ${}^{B}_{C}R$

c) ${}^{C}_{A}R$

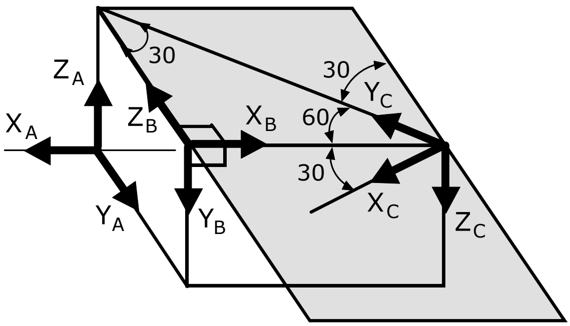
matrislerini bulunuz.



Şekil 2.12. Örnek 2.4 için kullanılacak şekil.

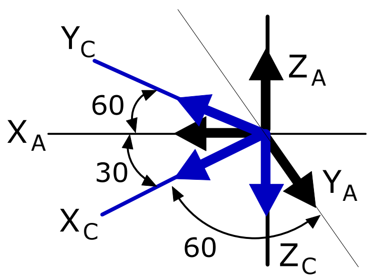
ÇÖZÜM 2.4

a) İlk önce vektörler arasındaki açıları bulmak için Şekil 2.12'yi aşağıdaki gibi yeniden çizelim. Şekil 2.13'te gösterildiği gibi Y_C ve X_C aynı düzlemde Z_C ise bu düzleme dik konumdadır.



Şekil 2.13. Çözüm 2.4a için çizilmiş şekil.

Birim vektörler arasındaki açıları bulmak için Şekil 2 13'den faydalanarak {A}



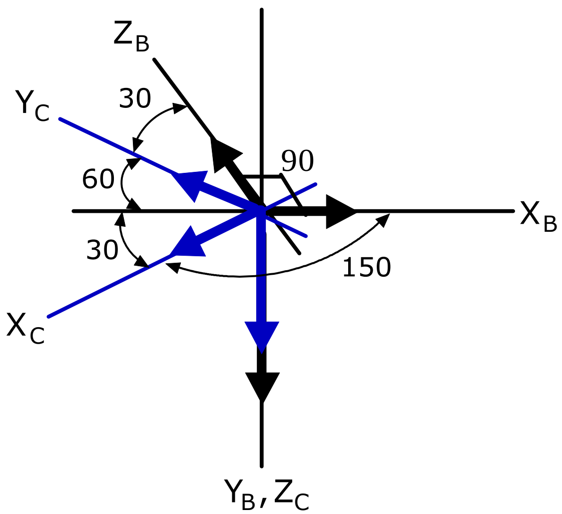
Şekil 2.14. Çözüm 2.4.a için çizilmiş şekil.

ve {C} koordinat sistemlerini, merkezleri üst üste gelecek şekilde çizelim. Şekil 2 14'de aynı düzlemde bulunan X_A, X_C, Y_A, Y_C birim vektörleri farklı düzlemde bulunan Z_A ve Z_C vektörlerine diktir.

$$
{}^{A}_{C}R = \begin{bmatrix} |X_C||X_A|\cos\gamma_{AC} & |Y_C||X_A|\cos\theta_{AC} & |Z_C||X_A|\cos\varphi_{AC} \\ |X_C||Y_A|\cos\beta_{AC} & |Y_C||Y_A|\cos\phi_{AC} & |Z_C||Y_A|\cos\delta_{AC} \\ |X_C||Z_A|\cos\alpha_{AC} & |Y_C||Z_A|\cos\psi_{AC} & |Z_C||Z_A|\cos\sigma_{AC} \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{A}_{C}R = \begin{bmatrix} \cos 30 & \cos 60 & \cos 90 \\ \cos 60 & \cos 150 & \cos 90 \\ \cos 90 & \cos 90 & \cos 180 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.866 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & -0.866 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{2.20}
$$

b) Şimdide ${}^{B}_{C}R$ matrisini açık bir şekilde yazıp birim vektörler arasındaki açıları belirleyelim. Bunun için Şekil 2 13'ten faydalanarak {B} ve {C} koordinat sistemlerini merkezleri üst üste gelecek şekilde çizelim. Şekil 2 15'te aynı düzlemde bulunan X_B, X_C, Y_A, Y_C birim vektörleri farklı düzlemde bulunan Y_B ve Z_C vektörlerine diktir.

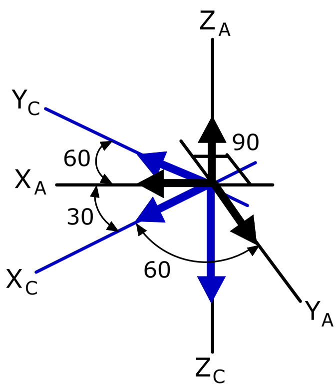


Şekil 2.15. Çözüm 2.4.b için çizilmiş şekil.

$$
{}^{B}_{C}R = \begin{bmatrix} |X_C||X_B|\cos\gamma_{BC} & |Y_C||X_B|\cos\theta_{BC} & |Z_C||X_B|\cos\varphi_{BC} \\ |X_C||Y_B|\cos\beta_{BC} & |Y_C||Y_B|\cos\phi_{BC} & |Z_C||Y_B|\cos\delta_{BC} \\ |X_C||Z_B|\cos\alpha_{BC} & |Y_C||Z_B|\cos\psi_{BC} & |Z_C||Z_B|\cos\sigma_{BC} \end{bmatrix}
$$

$$ {}^{B}_{C}R = \begin{bmatrix} \cos 150 & \cos 120 & \cos 90 \\ \cos 90 & \cos 90 & \cos 0 \\ \cos 120 & \cos 30 & \cos 90 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.866 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.5 & 0.866 & 0 \end{bmatrix} \qquad (2.21) $$

c) Son olarak ${}^{C}_{A}R$ matrisini açık bir şekilde yazıp birim vektörler arasındaki açıları belirleyelim. Bunun için Şekil 2 13'ten faydalanarak {A} ve {C} koordinat sistemlerini merkezleri üst üste gelecek şekilde çizelim. Şekil 2 16'da aynı düzlemde bulunan X_A, X_C, Y_A, Y_C birim vektörleri farklı düzlemde bulunan Z_A ve Z_C vektörlerine diktir.



Şekil 2.16. Çözüm 2.4c için çizilmiş şekil.

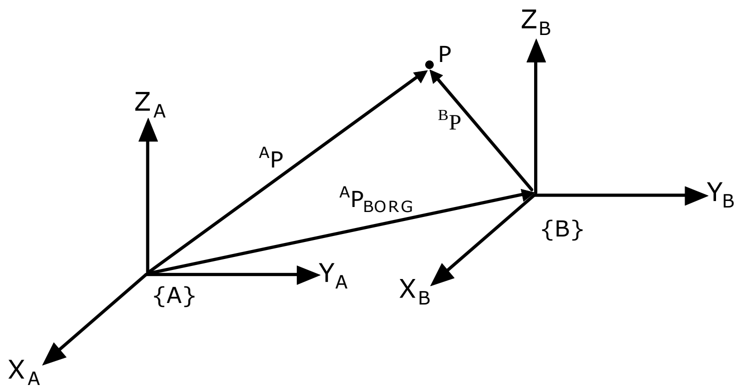
$$ {}^{C}_{A}R = \begin{bmatrix} |X_A||X_C|\cos\gamma_{CA} & |Y_A||X_C|\cos\theta_{CA} & |Z_A||X_C|\cos\varphi_{CA} \\ |X_A||Y_C|\cos\beta_{CA} & |Y_A||Y_C|\cos\phi_{CA} & |Z_A||Y_C|\cos\delta_{CA} \\ |X_A||Z_C|\cos\alpha_{CA} & |Y_A||Z_C|\cos\psi_{CA} & |Z_A||Z_C|\cos\sigma_{CA} \end{bmatrix} $$

$$ {}^{C}_{A}R = \begin{bmatrix} \cos 30 & \cos 60 & \cos 90 \\ \cos 60 & \cos 150 & \cos 90 \\ \cos 90 & \cos 90 & \cos 180 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.866 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & -0.866 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad (2.22) $$

2.3. Genel Dönüşümler

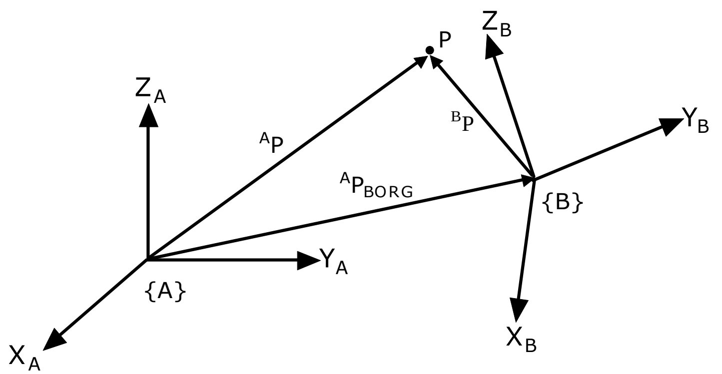
Şimdiye kadar bir vektörün her hangi bir koordinat sistemine göre konumu ve yönelimi üzerinde duruldu. Şimdi ise iki koordinat sisteminin bir birlerine göre konum ve yönelimleri incelenecektir. {A} ve {B} gibi iki koordinat sistemi olsun. {A} Koordinat sisteminin {B} koordinat sistemine uzaklığı ${}^{A}P_{BORG}$ gibi bir vektörle gösterilir. Şekil 2.17'de yönelimleri aynı merkezleri farklı noktalarda bulunan iki koordinat sistemi görülmektedir. P noktasının {A} koordinat sistemine uzaklığını ${}^{A}P_{BORG}$ vektörünü kullanarak aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

$$ {}^{A}P = {}^{B}P + {}^{A}P_{BORG} \qquad (2.23) $$



Şekil 2.17. Yönelimleri aynı fakat merkezleri farklı noktalarda bulunan iki koordinat sistemi.

Şekil 2.18'de ise hem yönelimleri hem de merkezleri farklı noktalarda bulunan iki koordinat sistemi görülmektedir. Bu durumda P noktasının A koordinat sistemine uzaklığı denklem 2.24'teki gibi ifade edilir.



Şekil 2.18. Hem yönelimleri hem de merkezleri farklı noktalarda bulunan iki koordinat sistemi.

$$ {}^{A}P={}^{A}_{B}R\,{}^{B}P+{}^{A}P_{BORG} \qquad (2.24)$$

Eğer {A} koordinat sistemi ile {B} koordinat sisteminin yönelimleri aynı merkezleri farklı noktalarda ise bu durumda ${}^{A}_{B}R = I$ olur ve denklem 2.24 denklem 2.23'teki olduğu gibi ${}^{A}P={}^{B}P+{}^{A}P_{BORG}$ şeklinde ifade edilir. Aynı şekilde, eğer {A} koordinat sistemi ile {B} koordinat sisteminin merkezleri çakışık yönelimleri farklı ise ${}^{A}P_{BORG} = 0$ olur ve denklem 2.24 denklem 2.16'daki gibi ${}^{A}P={}^{A}_{B}R\,{}^{B}P$ şeklinde ifade edilir.

Genel olarak ${}^{B}P$ ile ${}^{A}P$ arasındaki ilişki bir matrisle ifade edilmek istenir. Bunun için denklem 2.25'de görüldüğü gibi yeni bir dönüşüm matrisi tanımlanır.

$$ {}^{A}P={}^{A}_{B}T\,{}^{B}P \qquad (2.25)$$

Denklem 2.25 daha açık bir ifadeyle aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$ \begin{bmatrix} {}^{A}P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{A}_{B}R & {}^{A}P_{BORG} \\ 000 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{B}P \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (2.26)$$

Denklem 2.25'de ${}^{A}P$, ${}^{B}P$ ve ${}^{A}P_{BORG}$ vektörlerine 1 ve ${}^{A}_{B}R$ matrisine 0'lar eklenerek matris çarpımının doğru yapılması sağlanmaktadır. Denklem 2.26'daki çarpım gerçekleştirilirse denklem 2.24'teki ${}^{A}P={}^{A}_{B}R\,{}^{B}P+{}^{A}P_{BORG}$ sağlanır.

$$ \begin{bmatrix} {}^{A}P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{A}_{B}R\,{}^{B}P+{}^{A}P_{BORG} \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (2.27)$$

${}^{A}P$ ile ${}^{B}P$ arasındaki ilişki, içerisinde dönme matrisi ve konum vektörünün bulunduğu 4x4 boyutunda bir matrisle ifade edilebilir. Bu matrise homojen dönüşüm matrisi denir ve aşağıdaki gibi gösterilir.

$$ {}^{A}_{B}T = \begin{bmatrix} {}^{A}_{B}R & {}^{A}P_{BORG} \\ 0\;0\;0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2.28)$$

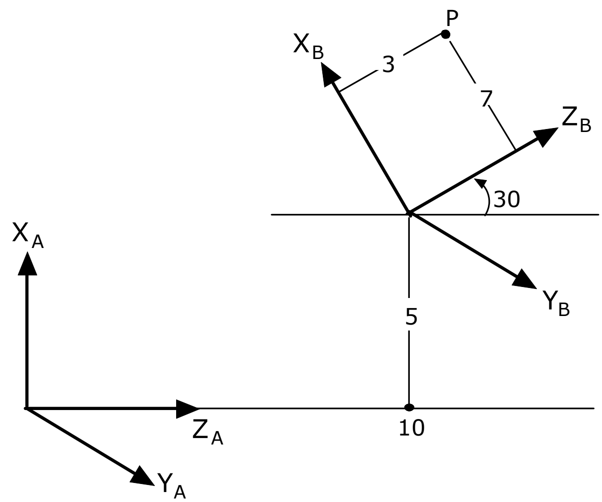
denklemde gösterilen ${}^{A}_{B}R$ 3x3 boyutlu bir matris ${}^{A}P_{BORG}$ ise 3x1 boyutlu bir vektördür. ${}^{A}_{B}T$ matrisini

$$ {}^{A}_{B}T = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2.29) $$

şeklinde de gösterebiliriz. Denklemde, p_x, p_y, p_z ${}^{A}P_{BORG}$ vektörünün elemanlarını, $r_{11}, r_{12}, r_{13}, r_{21}, r_{22}, r_{23}, r_{31}, r_{32}, r_{33}$ ise ${}^{A}_{B}R$ matrisinin temsil etmektedir.

ÖRNEK 2.5

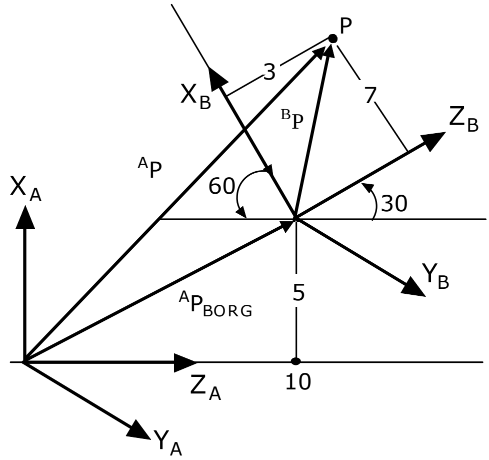
Şekil 2.19'da görüldüğü gibi {B} koordinat sistemi {A} koordinat sistemine göre Y ekseninde 30 derece döndürüldükten sonra X_A ekseninde 5 birim Z_A ekseninde ise 10 birim öteleniyor. Yeni durumda P noktasının {B} koordinat sistemine göre konumu ${}^{B}P = [7.0\ 0\ 3.0]^T$ şeklinde tanımlanıyor. Buna göre P noktasının {A} koordinat sistemine göre konumunu bulunuz.



Şekil 2.19. Örnek 2.5 için kullanılacak şekil.

ÇÖZÜM 2.5

Örnekte verilen Şekil 2.19'u yeniden çizip, soruyu öncelikle ${}^{A}P={}^{A}_{B}R\,{}^{B}P+{}^{A}P_{BORG}$ denklemini kullanarak çözelim.



Şekil 2.20. Çözüm 2.5 için çizilmiş şekil.

{B} koordinat sistemin {A} koordinat sistemine göre dönme matrisi,

$$ {}^A_BR = \begin{bmatrix} \cos 30 & \cos 90 & \cos 60 \\ \cos 90 & \cos 0 & \cos 90 \\ \cos 120 & \cos 90 & \cos 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.866 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0.866 \end{bmatrix} \quad (2.30) $$

{B} koordinat sisteminin {A} koordinat sistemine göre konumu belirlenirken {B}'nin orijini {A}'ya göre bir nokta gibi düşünülür. Bu durumda {B} koordinat sisteminin {A} koordinat sistemine göre konumu aşağıdaki gibi olur.

$$ {}^AP_{BORG} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} \quad (2.31) $$

Bulduğumuz bu ifadeleri $^AP={}^A_BR\,{}^BP+{}^AP_{BORG}$ eşitliğinde yerine koyalım.

$$ {}^AP={}^A_BR\,{}^BP+{}^AP_{BORG} = \begin{bmatrix} 0.866 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0.866 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} $$

$$ {}^AP = \begin{bmatrix} 12.562 \\ 0 \\ 9.098 \end{bmatrix} \quad (2.32) $$

Şimdi de aynı soruyu ${}^{A}P={}^{A}_{B}T\,{}^{B}P$ denklemini kullanarak yapalım. Soruda ${}^{B}P$ verildiğine göre ${}^{A}_{B}T$ matrisini bulmamız gerekmektedir. Bu durumda ${}^{A}_{B}T$ ifadesi,

$$ {}^{A}_{B}T = \begin{bmatrix} 0.866 & 0 & 0.5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0.866 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

şeklinde bulunur. Bulduğumuz bu ifadeyi denklemde yerine koyarak ${}^{A}P$ matrisi aşağıdaki gibi bulunur.

$$ {}^{A}P={}^{A}_{B}T\,{}^{B}P = \begin{bmatrix} 0.866 & 0 & 0.5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0.866 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7.0 \\ 0 \\ 3.0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12.562 \\ 0 \\ 9.098 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.33} $$

Görüldüğü gibi her iki yöntemde aynı sonucu vermektedir.

2.4. İşlemler

Daha önce bir noktanın, koordinat sistemlerine göre yönelimi ve ötelenmesi incelendi. Bu işlemler dönme operatörleri kullanılarak da gerçekleştirilebilir. Şimdi bunları sarasıyla inceleyelim.

2.4.1. Öteleme İşlemi

Bir öteleme vektörü kullanarak bir nokta belli bir koordinat sistemine gere tanımlanabilir. P_2 noktasını {A} koordinat sistemine göre tanımlamak için ${}^{A}P_1$ vektörü, ${}^{A}Q$ vektörü kadar ötelenir. Bu işlem matematiksel olarak aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$ {}^{A}P_2={}^{A}P_1+{}^{A}Q \tag{2.34} $$

Denklem 2.34’deki ${}^{A}P_2$ vektörünü, homojen dönüşüm matrisi $D_Q(q)$ cinsinden yazarak aşağıdaki gibi elde edebiliriz.

$$^{A}P_2 = D_Q(q)\,^{A}P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & q_x \\ 0 & 1 & 0 & q_y \\ 0 & 0 & 1 & q_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} {}^{A}P_1$$

2.4.2. Dönme İşlemi

Bir koordinat sisteminin herhangi bir eksen etrafında döndürülmesi iki veya üç boyutlu uzayda ifade edilir. Konunun daha iyi anlaşılması için öncelikle iki boyutlu uzayda dönme kavramını inceleyelim. İki boyut, aslında bir düzlemi ifade eder ve bu düzlem Şekil 2.21'de görüldüğü gibi sadece X ve Y gibi iki eksenden oluşur. Uzunluğu P olan P_1 vektörünün X eksiyle yaptığı açı α olsun. Bu durumda P_1 vektörünün X ve Y eksenlerindeki izdüşümü sırayla,

$$x = P\cos\alpha$$

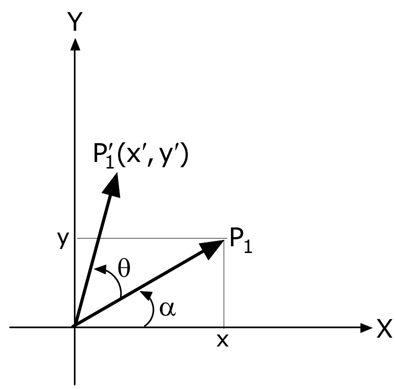
$$y = P\sin\alpha$$

olur. Şekil 2.21'de görüldüğü gibi bir P_1 vektörü θ kadar döndürülerek P_1' vektörü elde edilsin. Bu dönme işlemi sonunda P_1' üssü vektörünün X ve Y eksenlerindeki izdüşümü sırayla,

$$x' = P\cos(\theta + \alpha)$$

$$y' = P\sin(\theta + \alpha)$$

olur. Bu iki ifade de yer alan trigonometrik ifadelerin toplamları,



Şekil 2.21. İki boyutlu uzayda dönme.

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

olduğundan yeni durumda P_1' üssü vektörünün X ve Y eksenlerindeki izdüşümü sırayla,

$$x' = P(\cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha)$$

$$y' = P(\sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha)$$

şeklinde elde edilir. Bu iki ifade daha açık bir şekilde aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$x' = P\cos\theta\cos\alpha - P\sin\theta\sin\alpha$$

$$y' = P\sin\theta\cos\alpha + P\cos\theta\sin\alpha$$

Daha önce belirtilen $x = P\cos\alpha$ ve $y = P\sin\alpha$ ifadelerini yukarıdaki denklemlerde yerine koyarak P_1 vektörünün θ kadar döndürülmesiyle elde edilen P_1' vektörünün konumunu aşağıdaki gibi bulunur.

$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta$$

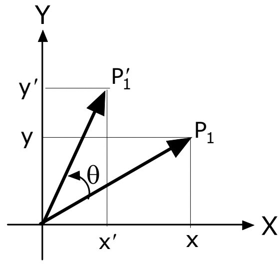
$$y' = x\sin\theta + y\cos\theta$$

İki boyutlu uzayda gerçekleştirilen bu dönme işlemi 2x2 boyutlu bir matris kullanılarak aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{2.35}$$

İki boyutlu uzayda gerçekleştirilen bu dönme sonucunda P_1 vektörünün konumu P_1' olur. Şekil 2.22'de gösterilen bu yer değiştirme bir dönme matrisiyle bir konum vektörünün çarpılmasıyla denklem 2.36'daki gibi ifade edilir. Elde edilen yeni konum ise $P_1' = [x' \quad y']^T$ şeklinde aşağıdaki gibi gösterilir.

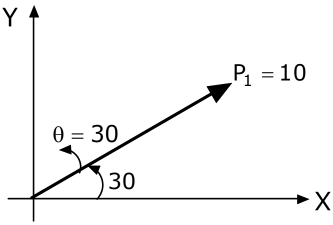
$$P_1' = R(\theta)P_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{bmatrix} \tag{2.36}$$



Şekil 2.22. İki boyutlu uzayda dönme ve konum değişimi.

ÖRNEK 2.6

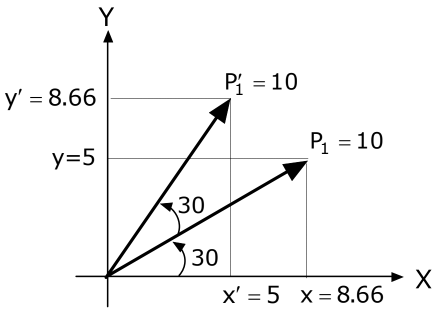
Şekil 2.23a'da X ekseni ile 30 derecelik açı yapan ve uzunluğu 10 birim olan P_1 vektörü Y eksenine doğru 30 derece döndürülüyor. Buna göre P_1 vektörünün yeni durumdaki konumunu bulunuz.



Şekil 2.23a. Örnek 2.6 için kullanılacak şekil.

ÇÖZÜM 2.6

Çözüme yönelik olarak Şekil 2.23a'yı yeniden çizelim. Şekil 2.23b'deki üçgenlerden yararlanarak başlangıçta konumu $P_1 = [8.66 \quad 5]^T$ olan vektör 30 derece döndürüldükten sonra $P_1' = [5 \quad 8.66]^T$ olur.



Şekil 2.23b. Çözüm 2.6 için çizilmiş şekil.

Aynı soruyu denklem 2.36'dan yaralanarak çözelim. Başlangıçta Y ekseni ile 30 derece açı yapan 10 birimlik vektörün konumu $P_1 = [8.66 \quad 5]^T$ olur. Yeni konum ise aşağıdaki gibi elde edilir.

$$P_1' = R(\theta)P_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$P_1' = R(\theta)P_1 = \begin{bmatrix} \cos 30 & -\sin 30 \\ \sin 30 & \cos 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8.66 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$P_1' = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.5 \\ 0.5 & 0.866 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8.66 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8.66 \end{bmatrix} \tag{2.37}$$

Görüldüğü gibi dönme ve konum değişimi kolay bir şekilde matrislerle ifade edebilmektedir.

İki boyutlu dönme kavramını açıkladıktan sonra şimdi de üç boyutlu dönme kavramını inceleyelim. 3x3 boyutlu R dönme matrisini kullanarak ${}^{A}P_1$ vektörü, yeni bir vektör olan ${}^{A}P_2$ olarak değiştirilebilir. Bu işlem matematiksel olarak aşağıdaki gibi ifade edilir.

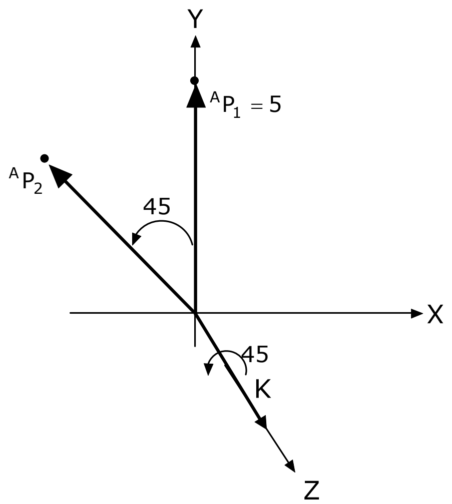
$${}^{A}P_2 = R_K(\theta)\,{}^{A}P_1 \tag{2.38}$$

Başka bir ifadeyle bir dönme operatörü olan $R_K(\theta)$, K ekseninde θ kadar dönme işlemi gerçekleştirir. $R_K(\theta)$ dönme operatörü denklem 2.39'da olduğu gibi konum vektörü sıfır olan 4x4 boyutlu bir homojen dönüşüm matrisiyle gösterilebileceği gibi 3x3 boyutlu bir matrisle de gösterilebilir.

$$R_K(\theta) = \begin{bmatrix} & & & 0 \\ & {}^{A}_{B}R & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.39}$$

ÖRNEK 2.7

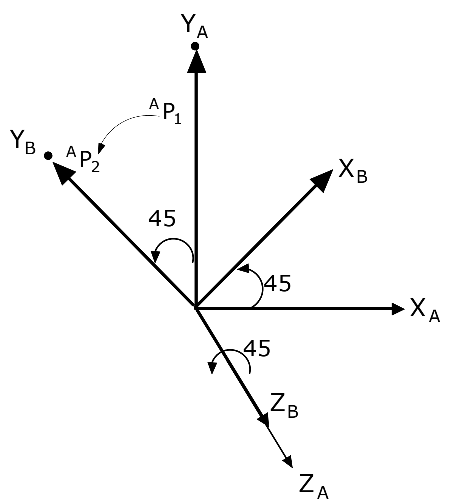
Şekil 2.24a'daki 5 birim uzunluğunda olan ${}^{A}P_1$ vektörü görüldüğü gibi Z eksenine yerleştirilen bir K vektörüyle 45 derece döndürülerek ${}^{A}P_2$ vektörü elde ediliyor. ${}^{A}P_2$ vektörünün konumunu bulunuz.



Şekil 2.24a. Örnek 2.7 için kullanılacak şekil.

ÇÖZÜM 2.7

Öncelikle $R_K(\theta)$ dönme matrisini bulalım. $R_K(\theta)$ matrisi aslında merkezleri üst üste olan iki koordinat sisteminden birinin Z ekseninde 45 derece dönmesiyle elde edilen matrisin ta kendisidir. Bunun için Şekil 2.24a'yı tekrar çizelim.



Şekil 2.24b. Çözüm 2.7 için çizilmiş şekil.

Denklem 2.8'den faydalanarak $R_K(\theta)$ dönme matrisi aşağıdaki gibi elde edilebilr.

$$R_K(\theta) = \begin{bmatrix} \cos 45 & \cos 135 & \cos 90 \\ \cos 45 & \cos 45 & \cos 90 \\ \cos 90 & \cos 90 & \cos 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.707 & -0.707 & 0 \\ 0.707 & 0.7071 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ayrıca Şekil 2.24a'dan ${}^{A}P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}^T$ olduğu görülmektedir. Bulduğumuz bu ifadeleri denklem 2.38'de yerine koyalım.

$${}^{A}P_2 = R_K(\theta)\,{}^{A}P_1$$

$${}^{A}P_2 = \begin{bmatrix} 0.707 & -0.707 & 0 \\ 0.707 & 0.7071 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.53 \\ 3.53 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.40}$$

Örnek 2.7'deki soru aslında K vektörünün Z ekseninde θ açısıyla döndürülmesine çok güzel bir örnektir. Üç boyutu uzayda K vektörünü sırasıyla X, Y ve Z eksenlerine yerleştirip θ açısıyla döndürelim.

1. Z ekseninde K vektörünün θ açısıyla döndürülmesi (Şekil 2.25), matematiksel olarak denklem 2.41'deki gibi ifade edilir.

$${}^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} {}^{A}\hat{X}_B & {}^{A}\hat{Y}_B & {}^{A}\hat{Z}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_Z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.41}$$

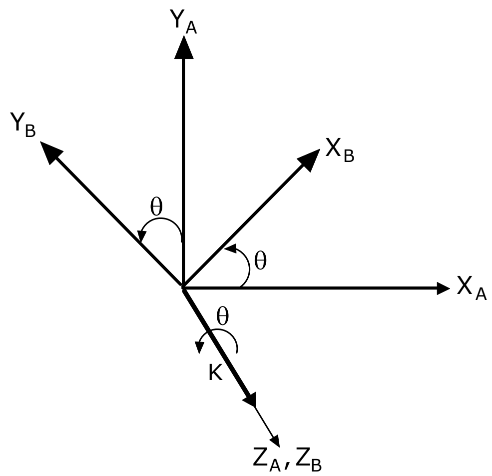
Örnek 2.6'yı tekrar çözelim. Z eksenine yerleştirilen bir K vektörüyle 45 derece döndürülerek elde edilen ${}^{A}P_2$ vektörünün konumunu denklem 2.41'i kullanarak daha kolay bir şekilde bulabiliriz.

$${}^{A}P_2 = R_Z(\theta)\,{}^{A}P_1$$

$$^{A}P_2 = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.53 \\ 3.53 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$^{A}P_2 = \begin{bmatrix} -3.53 \\ 3.53 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Elde edilen sonuç görüldüğü gibi denklem 2.40'daki ile aynı çıkılmaktadır.

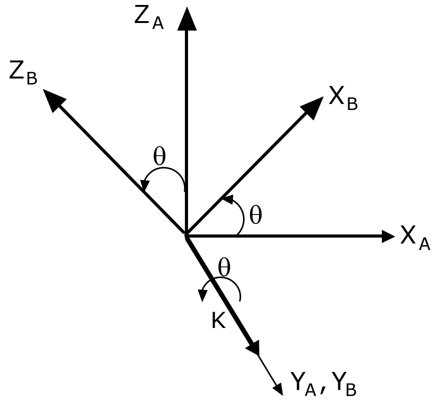


Şekil 2.25. Z ekseninde K vektörünün θ açısıyla döndürülmesi.

2. Y ekseninde K vektörünün θ açısıyla döndürülmesi (Şekil 2.26) matematiksel olarak denklem 2.42'deki gibi ifade edilir.

$$^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} {}^{A}\hat{X}_B & {}^{A}\hat{Y}_B & {}^{A}\hat{Z}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$R_Y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2.42)$$

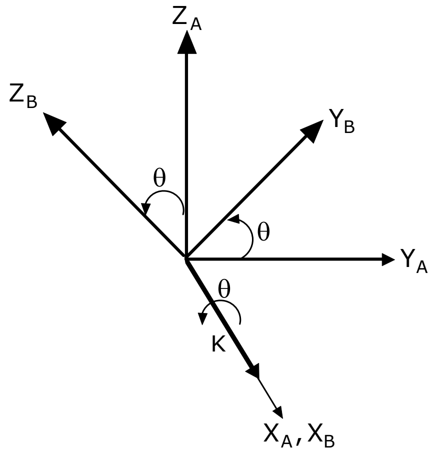


Şekil 2.26. Y ekseninde K vektörünün θ açısıyla döndürülmesi.

3. X ekseninde K vektörünün θ açısıyla döndürülmesi (Şekil 2.27) matematiksel olarak denklem 2.43'deki gibi ifade edilir.

$$
{}^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} {}^{A}\hat{X}_B & {}^{A}\hat{Y}_B & {}^{A}\hat{Z}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}
$$

$$
R_X(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2.43)
$$

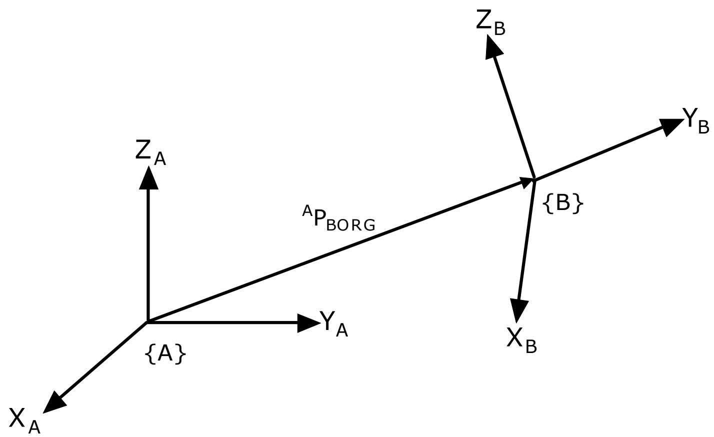


Şekil 2.27. X ekseninde K vektörünün θ açısıyla döndürülmesi.

2.5. Dönüşüm Matrislerinin ileri yönlü Çarpılması

Şekil 2.28'de görülen iki koordinat sisteminden {A} Koordinat sistemine göre tanımlanan {B} koordinat sisteminin dönüşüm matrisi ${}^{A}_{B}T$ olsun ve aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$
{}^{A}_{B}T = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$



Şekil 2.28. {A} Koordinat sistemine göre tanımlanan {B} koordinat sisteminin dönüşüm matrisi.

Dönüşüm matrislerinin ileri yönlü çarpma etkisini anlamak için ${}^{A}_{B}T$ matrisini başka bir dönüşüm matrisi $R_Y(\theta)$ (denklem 2.42) ile çarpalım.

$$
{}^{A}_{B}TR_Y(\theta) = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} r_{11}c\theta - r_{13}s\theta & r_{12} & r_{11}s\theta + r_{13}c\theta & p_x \\ r_{21}c\theta - r_{23}s\theta & r_{22} & r_{21}s\theta + r_{23}c\theta & p_y \\ r_{31}c\theta - r_{33}s\theta & r_{32} & r_{31}s\theta + r_{33}c\theta & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2.44)
$$

Çarpım sonucunda denklem 2.44'deki Y eksenine ait birim vektör çarpmadan önce mevcut ${}^{A}_{B}T$ matrisindeki Y eksenine ait birim vektörle aynı çıkmıştır. Aynı durum konum vektörü içinde geçerlidir. Çarpmadan sonraki konum vektörü ile çarpmadan önceki ${}^{A}_{B}T$ matrisinin konum vektörü birbiriyle aynıdır. Bu işlemlerden,

Bir dönüşüm matrisini başka bir dönüşüm matrisiyle ileri yönlü bir çarpma işlemine tabi tutarsak, öteleme/dönme işleminin yeni yani hareket eden koordinat sistemine göre gerçekleştirildiği anlaşılır.

ÖRNEK 2.8

Daha önce örnek 2.3'de gerçekleştirilen ${}^{A}_{B}R$ işlemini göz önünde bulunduralım. Hatırlanacağı gibi Örnek 2.3'de (Şekil 2.10) verilen iki koordinat sisteminden {B} koordinat sisteminin {A} koordinat sistemine göre yönelimi,

$$
{}^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & 0.866 \\ 0 & 0.866 & 0.5 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

olarak bulunmuştu. Aynı sonucu ileri yönlü çarpma yöntemini kullanarak da bulabiliriz.

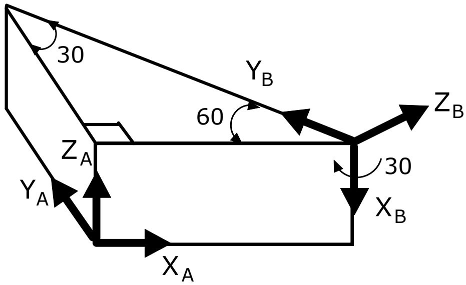
ÇÖZÜM 2.8

${}^{A}_{B}R$ matrisini elde etmek için gerekli olan Şekil 2.10'u yeniden düzenleyelim. Bunun için öncelikle Şekil 2.29a'da {B} koordinat sisteminde bulunan X eksenini -30 derece döndürüp Şekil 2.29b'deki Y'_B ve Z'_B eksenlerini elde edelim. Daha sonra Şekil 2.29b'deki Y'_B eksenini +90 derece döndürerek Şekil 2.29c'de olduğu gibi {A} koordinat sisteminin yönelimi ile {B} koordinat sisteminin yönelimlerini aynı yapalım. Gerçekleştirilen dönme işlemlerinden ilki (R_X(-30)) çarpma işleminde sona, ikincisini de (R_Y(90)) başa yazılır. Burada yapılan işlem, {B} koordinat sistemini döndürülerek {A} koordinat sistemini elde etmekten ibarettir. Yapılan işlemler matematiksel olarak aşağıdaki gibi ifade edilir.

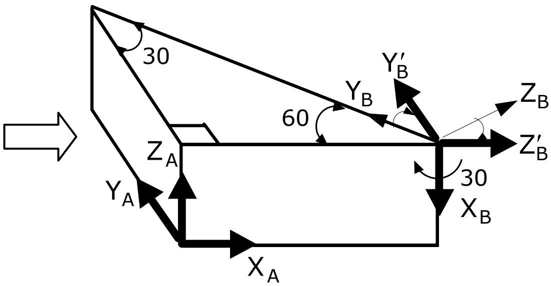
$$
{}^{A}_{B}R = R_Y(90)R_X(-30)
$$

$$
= \begin{bmatrix} c90 & 0 & s90 \\ 0 & 1 & 0 \\ -s90 & 0 & c90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c(-30) & -s(-30) \\ 0 & s(-30) & c(-30) \end{bmatrix}
$$

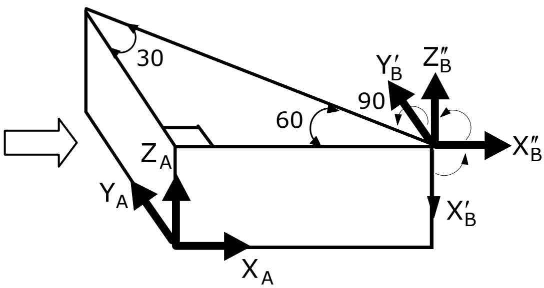
$$
= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.866 & 0.5 \\ 0 & -0.5 & 0.866 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & 0.866 \\ 0 & 0.866 & 0.5 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.45}
$$



(a)



(b)



(c)

Şekil 2.29. Çözüm 2.8 için çizilmiş şekiller.

2.6. Dönüşüm Matrislerinin Önden Çarpılması

Bu aşamada ise dönüşüm matrislerinin önden çarpma etkisini anlamak için ${}^{A}_{B}T$ matrisini bir dönme matrisi olan $R_Y(\theta)$ (denklem 2.42) ile önden çarpma işlemine tabii tutalım.

$$R_Y(\theta){}^{A}_{B}T = \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} r_{11}c\theta + r_{31}s\theta & r_{12}c\theta + r_{32}s\theta & r_{13}c\theta + r_{33}s\theta & p_x c\theta + p_z s\theta \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ -r_{11}s\theta + r_{31}c\theta & -r_{12}s\theta + r_{32}c\theta & -r_{13}s\theta + r_{33}c\theta & -p_x s\theta + p_z c\theta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

Çarpım sonucunda, denklem 2.46'daki $R_Y(\theta){}^{A}_{B}T$ matrisinin ikinci satırı çarpmadan önce mevcut ${}^{A}_{B}T$ matrisindeki 2. satırla aynı çıkmıştır. Bu işlemlerden aşağıdaki sonuç çıkarılabilir.

Bir dönüşüm matrisini başka bir dönüşüm matrisiyle önden çarpma işlemine tabi tutmak, öteleme/dönme işleminin sabit referans koordinat sistemine göre gerçekleştirildiği anlamına gelir.

ÖRNEK 2.9

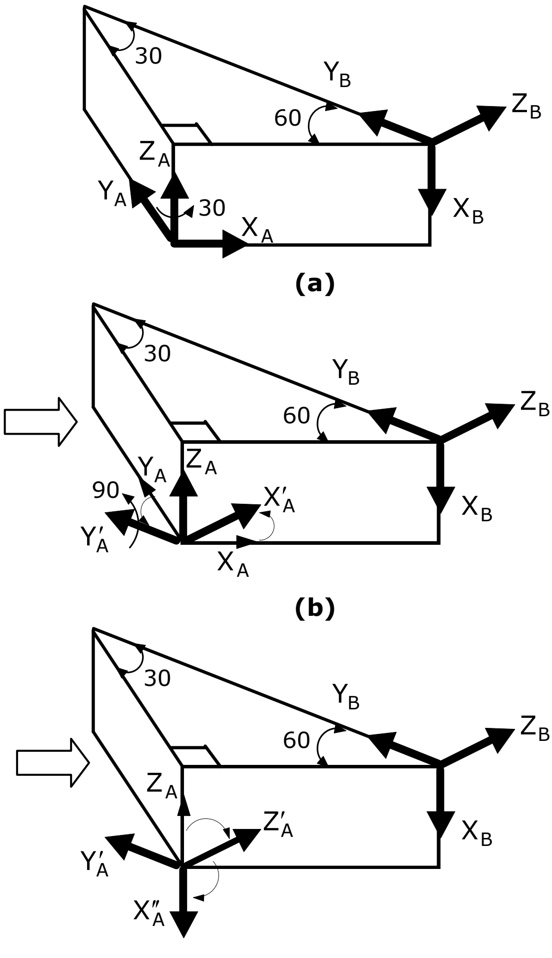
Örnek 2.8'deki ${}^{A}_{B}R$ matrisini önden çarpma yöntemini kullanarak bulalım.

ÇÖZÜM 2.9

${}^{A}_{B}R$ matrisini elde etmek için gerekli olan Şekil 2.10'u yeniden düzenleyelim. Bunun için öncelikle Şekil 2.30a'da {A} koordinat sisteminde bulunan Z eksenini 30 derece döndürüp Şekil 2.30b'deki X'_A ve Y'_A eksenlerini elde edelim. Daha sonra Şekil 2.30b'deki Y'_A eksenini +90 derece döndürerek Şekil 2.30c'de olduğu gibi {A} koordinat sisteminin yönelimi ile {B} koordinat sisteminin yönelimlerini aynı yapalım. Gerçekleştirilen dönme işlemlerinden ilki ($R_Z(30)$) çarpma işleminde ilk sıraya, ikincisini de ($R_Y(90)$) sona yazılır. Burada yapılan işlem, {A} koordinat sistemini döndürülerek {B} koordinat sistemi elde etmekten ibarettir. Yapılan işlemler matematiksel olarak aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$
{}^{A}_{B}R = R_Z(30)R_Y(90) = \begin{bmatrix} c30 & -s30 & 0 \\ s30 & c30 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c90 & 0 & s90 \\ 0 & 1 & 0 \\ -s90 & 0 & c90 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} 0.866 & -0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.866 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & 0.866 \\ 0 & 0.866 & 0.5 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.47}
$$



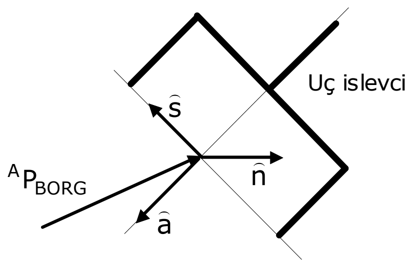
Şekil 2.30. Çözüm 2.9 için çizilmiş şekiller.

2.7. Dönüşüm Matrisinin Özellikleri

Daha öncede belirtildiği gibi dönüşüm matrisi dönme matrisi ve konum vektörü olmak üzere iki önemli nitelikten oluşmaktadır. Şekil 2.31'de de görüldüğü gibi uç işlevci bir hedefe yöneldiği zaman, bu yönelim uç işlevcisinin normal vektörü (normal vector) $n = [n_x \quad n_y \quad n_z]^T$, kayma vektörü (sliding vector) $s = [s_x \quad s_y \quad s_z]^T$ ve yaklaşım vektörü (approaching vector) $a = [a_x \quad a_y \quad a_z]^T$ olmak üzere üç vektörle ifade edilir. Hedefle uç işlevcisi arasındaki uzaklık bilindiği gibi konum vektörü ${}^{A}P_{BORG}$ ile açıklanır. Bütün bu vektörler bir dönüşüm matrisinde aşağıdaki gibi gösterilir.

$$ {}^{A}_{B}T = \begin{bmatrix} {}^{A}_{B}R & {}^{A}P_{BORG} \\ 0\ 0\ 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.48} $$



Şekil 2.31. Normal kayma ve yaklaşım vektörleri.

${}^{A}_{B}T$ dönüşüm matrisini denklem 2.49'da olduğu gibi açık bir şekilde ifade edelim.

$$ {}^{A}_{B}T = \begin{bmatrix} {}^{A}_{B}R & {}^{A}P_{BORG} \\ 0\ 0\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.49} $$

${}^{A}_{B}T$ matrisini tersini, ${}^{A}_{B}T^{-1}$ şeklinde gösterelim. ${}^{A}_{B}T^{-1}$ matrisini bilinen yöntemlerle bulmak hayli zahmetli ve uzun işlemler gerektirirken dikken matrislerin tersini bulmak devrik (transpoz) almak kadar kolay olduğu daha önce açıklanmıştı. Dikken matrislerin bu özelliğinden faydalanarak ${}^{A}_{B}T$ matrisini tersini bulalım. ${}^{A}_{B}T^{-1}$ matrisini aşağıdaki gibi ifade edelim,

$$ {}^{A}_{B}T^{-1} = {}^{B}_{A}T = \begin{bmatrix} {}^{B}_{A}R & {}^{B}P_{AORG} \\ 0\ 0\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.50} $$

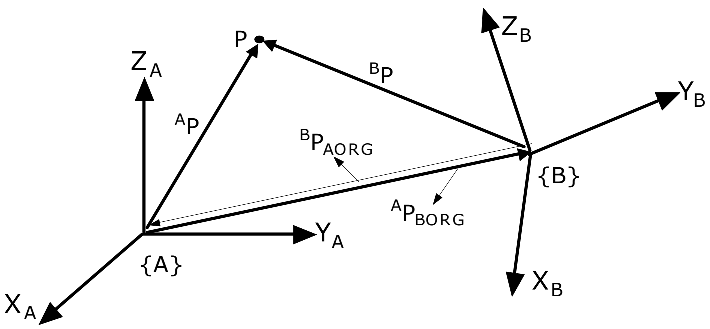
denklemdeki dönüşüm matrisinin 3x3 boyutlu dönme matrisinin tersinin devriğine eşit ${}^{A}_{B}R^{-1} = {}^{B}_{A}R = {}^{A}_{B}R^{T}$ olduğu bilinmektedir. Fakat konum vektörü için durum farklıdır. Dönüşüm matrisinin tamamının tersini almak için denklemde ${}^{B}P_{AORG}$ olarak ifade edilen ve Şekil 2.32'de görülen konum vektörünün, ${}^{A}_{B}T$ dönüşüm matrisinin bir fonksiyonu şeklinde yazılması gerekmektedir. Şekil 2.32'deki P noktasının {A} koordinat sistemine göre konumu,

$$ {}^{A}P = {}^{A}_{B}R\,{}^{B}P + {}^{A}P_{BORG} $$

şeklinde gösterilir. Aynı şekilde P noktasının {B} koordinat sistemine göre konumu,

$$ {}^{B}P = {}^{B}_{A}R\,{}^{A}P + {}^{B}P_{AORG} \tag{2.51} $$

şeklinde ifade edilir. P noktasının konumunu, {A} koordinat sistemine göre {B} koordinat sistemi cinsinden ${}^{B}({}^{A}P)$ şeklinde yazabiliriz. Bu durumda ${}^{A}P = {}^{A}_{B}R\,{}^{B}P + {}^{A}P_{BORG}$ ifadesini denklem 2.52'deki gibi yazalım.



Şekil 2.32. P noktasının {A} koordinat sistemine göre {B} koordinat sistemi cinsinden gösterimi.

$$ {}^{B}\left({}^{A}P\right) = {}^{B}_{A}R\,{}^{A}P + {}^{B}P_{AORG} \tag{2.52} $$

${}^{A}P={}^{B}P_{AORG}$ olsun, buna göre denklem 2.52'yi aşağıdaki gibi yeniden düzenleyelim.

$$^{B}\left({}^{A}P_{BORG}\right)={}^{B}_{A}R\,{}^{A}P_{BORG}+{}^{B}P_{AORG} \qquad (2.53)$$

denklemdeki ${}^{A}P_{BORG}$ vektörü {A} koordinat sistemi ile {B} koordinat sistemi arasındaki uzaklık olduğuna göre bu vektörü {B} koordinat sistemi cinsinden tanımladığımız zaman ${}^{B}\left({}^{A}P_{BORG}\right)=0$ olur. Elde edilen bu ifadeyi denklem 2.53'te yerine koyup yeni denklemde ${}^{B}P_{AORG}$ 'yi çekelim.

$$0={}^{B}_{A}R\,{}^{A}P_{BORG}+{}^{B}P_{AORG}$$

$${}^{B}P_{AORG}=-{}^{B}_{A}R\,{}^{A}P_{BORG} \qquad (2.54)$$

Denklem 2.54'te ${}^{B}_{A}R={}^{A}_{B}R^{T}$ olduğu bilindiğine göre sonuç olarak denklem 2.54 aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$${}^{B}P_{AORG}=-{}^{A}_{B}R^{T}\,{}^{A}P_{BORG}$$

Bulunan ${}^{B}_{A}R={}^{A}_{B}R^{T}$ ve ${}^{B}P_{AORG}=-{}^{A}_{B}R^{T}\,{}^{A}P_{BORG}$ ifadeleri

$${}^{A}_{B}T^{-1}=\begin{bmatrix} {}^{B}_{A}R & {}^{B}P_{AORG} \\ 0\ 0\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

denkleminde yerine konursa, bir dönüşüm matrisinin tersi denklem 2.55'teki gibi elde edilir.

$${}^{A}_{B}T^{-1}=\begin{bmatrix} {}^{A}_{B}R^{T} & -{}^{A}_{B}R^{T}\,{}^{A}P_{BORG} \\ 0\ 0\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2.55)$$

Bir dönüşüm matrisin tersini almak için ilk önce dönme matrisinin devriği alınır. Devriği alınmış bu ifade dönüşüm matrisinin dönme kısmına yazılır. Sonra devriği alınmış bu dönme matrisi konum vektörüyle çarpılarak elde edilen yeni ifadenin önüne eksi işareti *konur. Bu yeni ifade de dönüşüm matrisinde konum vektörü kısmına yazılarak bir dönüşüm matrisinin ters alma işlemi tamamlanır.*

Denklem 2.55 daha açık bir şekilde aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$
{}^A_BT^{-1} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} & -\left(r_{11}p_x + r_{21}p_y + r_{31}p_z\right) \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} & -\left(r_{12}p_x + r_{22}p_y + r_{32}p_z\right) \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} & -\left(r_{13}p_x + r_{23}p_y + r_{33}p_z\right) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z & -\left(n_xp_x + n_yp_y + n_zp_z\right) \\ s_x & s_y & s_z & -\left(s_xp_x + s_yp_y + s_zp_z\right) \\ a_x & a_y & a_z & -\left(a_xp_x + a_yp_y + a_zp_z\right) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z & -\hat{n}\cdot\hat{p} \\ s_x & s_y & s_z & -\hat{s}\cdot\hat{p} \\ a_x & a_y & a_z & -\hat{a}\cdot\hat{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.56}
$$

ÖRNEK 2.10

Denklem 2.57'de verilen ${}^A_BT$ matrisinin tersini bulunuz.

$$
{}^A_BT = \begin{bmatrix} 0.978 & 0 & 0.207 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ -0.207 & 0 & 0.978 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.57}
$$

ÇÖZÜM 2.10

Denklem 2.55'ten faydalanarak dönüşüm matrisinin tersini bulalım. Bunun için

$$
{}^A_BT^{-1} = \begin{bmatrix} {}^A_BR^T & -{}^A_BR^{T\,A}P_{BORG} \\ 0\ 0\ 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

ifadesinde sırasıyla ${}^A_BR^T$ dönme matrisini ve $-{}^A_BR^{T\,A}P_{BORG}$ konum vektörü ifadelerini bulalım. Denklem 2.57'deki dönüşüm matrisinin 3x3 boyutlu dönme matrisi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$
{}^A_BR = \begin{bmatrix} 0.978 & 0 & 0.207 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.207 & 0 & 0.978 \end{bmatrix}
$$

Bu matrisin devriği ise aşağıdaki gibi bulunur.

$$
{}^A_BR^T = \begin{bmatrix} 0.978 & 0 & -0.207 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.207 & 0 & 0.978 \end{bmatrix}
$$

Konum vektörü ise,

$$
-{}^A_BR^T\,{}^AP_{BORG} = -\begin{bmatrix} 0.978 & 0 & -0.207 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.207 & 0 & 0.978 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.727 \\ 2 \\ -1.599 \end{bmatrix}
$$

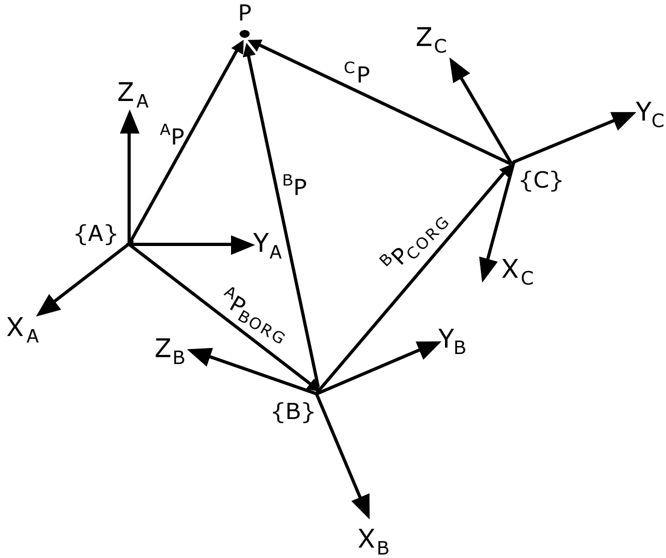
olur. Elde edilen ${}^A_BR^T$ ve $-{}^A_BR^T\,{}^AP_{BORG}$ ifadelerini aşağıdaki gibi dönüşüm matrisinde yerine yazmak suretiyle ters alma işlemi tamamlanmış olur.

$$
{}^A_BT^{-1} = \begin{bmatrix} 0.978 & 0 & -0.207 & -2.727 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0.207 & 0 & 0.978 & -1.599 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.58}
$$

2.8. Ardışık Dönüşümler

İkiden fazla koordinat sistemini içeren sistemlerde, koordinat sistemlerinin bir birlerine göre konum ve yönelimleri ardışık koordinat sistemleri kullanılarak gerçekleştirilir. Şekil 2.33'teki {C} koordinat sistemine göre tanımlanan P noktasının konumunu ve yönelimini {A} koordinat sistemine göre ardışık dönüşüm matrislerini kullanarak tanımlayalım.

P noktasının {C} koordinat sistemine göre konumu ${}^CP$ olduğuna göre, aynı P noktasının {B} koordinat sistemine göre konumu,



Şekil 2.33. {C} koordinat sistemine göre tanımlanan P noktasının konum ve yöneliminin {A} koordinat sistemine göre ardışık dönüşüm matrisleri kullanılarak tanımlanması.

$$^BP={}^B_CT\,{}^CP \tag{2.59}$$

şeklinde ifade edilir. Aynı şekilde, P noktasının {B} koordinat sistemine göre konumu ^BP olduğundan, aynı P noktasının {A} koordinat sistemine göre konumu,

$$^AP={}^A_BT\,{}^BP \tag{2.60}$$

olur. Denklem 2.59'daki ^BP ifadesini denklem 2.60'da yerine koyalım.

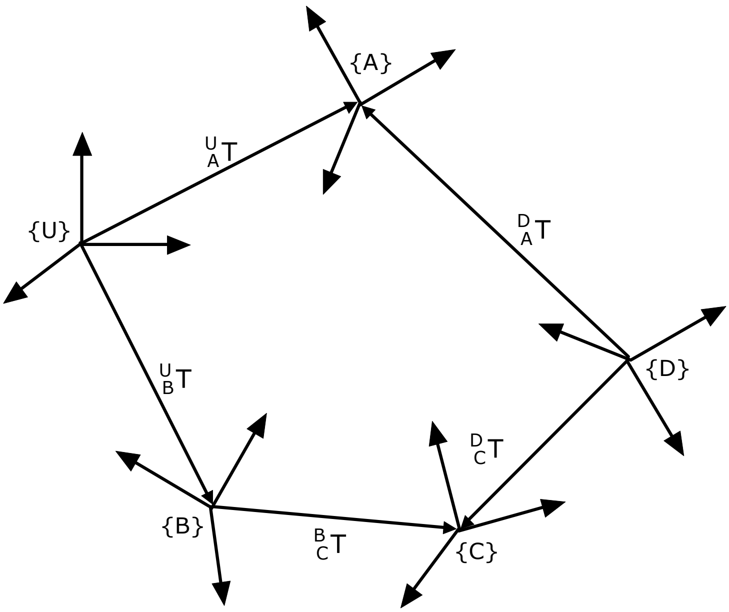
$$\begin{aligned} ^AP &= {}^A_BT\left({}^B_CT\,{}^CP\right) \\ &= \left({}^A_BT\,{}^B_CT\right){}^CP \\ &= {}^A_CT\,{}^CP \end{aligned} \tag{2.61}$$

Denklemde ${}^A_CT={}^A_BT\,{}^B_CT$ 'dir. ${}^A_CT$ ifadesi daha açık bir şekilde aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$ {}^{A}_{C}T={}^{A}_{B}T\,{}^{B}_{C}T=\begin{bmatrix} {}^{A}_{B}R & {}^{A}P_{BORG} \\ 0\ 0\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} {}^{B}_{C}R & {}^{B}P_{CORG} \\ 0\ 0\ 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ =\begin{bmatrix} {}^{A}_{B}R\,{}^{B}_{C}R & {}^{A}_{B}R\,{}^{B}P_{CORG}+{}^{A}P_{BORG} \\ 0\ 0\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.62} $$

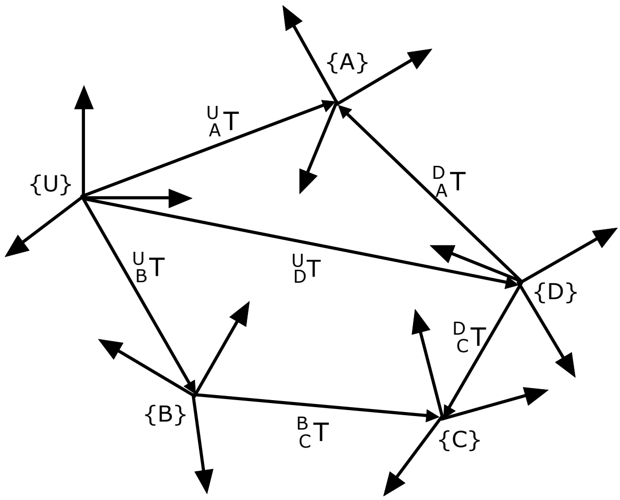
Şekil 2.34'te görüldüğü gibi birden fazla koordinat sisteminin merkezleri arasına birer vektör çizilerek konum ve yönelimleri bir birlerine göre tanımlanabilir. Şekilde {B} koordinat sistemi {U} koordinat sistemine göre tanımlanırken, {C} koordinat sistemi ise hem {B} hem de {D} koordinat sistemine göre tanımlanmaktadır. Şekil 2.34'ten yararlanarak herhangi iki koordinat sistemi bir birine göre konumu ve yönelimi kolaylıkla tanımlanabilir.



Şekil 2.34. Ardışık koordinat sistemleri.

ÖRNEK 2.11

Şekil 2.35'teki ${}^{B}_{C}T$ dönüşüm matrisini diğer koordinat sistemleri cinsinden tanımlayınız.



Şekil 2.35. Örnek 2.11 için kullanılacak şekil.

ÇÖZÜM 2.11

${}^{U}_{D}T$ dönüşüm matrisini diğer koordinat sistemleri cinsinden iki farklı şekilde tanımlayarak ${}^{B}_{C}T$ dönüşüm matrisini bulalım.

1. Şekil 2.35'teki {U}, {A} ve {D} koordinat sistemleri arasında aşağıdaki ilişkiyi kurabiliriz.

$$ {}^{U}_{D}T={}^{U}_{A}T\,{}^{D}_{A}T^{-1}={}^{U}_{A}T\,{}^{A}_{D}T \tag{2.63}$$

2. Şekil 2.35'te {U}, {B}, {C} ve {D} koordinat sistemleri arasında ise aşağıdaki ilişkiyi kurabiliriz.

$$ {}^{U}_{D}T={}^{U}_{B}T\,{}^{B}_{C}T\,{}^{D}_{C}T^{-1}={}^{U}_{B}T\,{}^{B}_{C}T\,{}^{C}_{D}T \tag{2.64}$$

${}^{B}_{C}T$ dönüşüm matrisini, denklem 2.63 ve 2.64'ü bir birine eşitleyip diğer koordinat sistemleri cinsinden aşağıdaki gibi bulabiliriz.

$$ {}^{U}_{B}T\,{}^{B}_{C}T\,{}^{D}_{C}T^{-1}={}^{U}_{A}T\,{}^{D}_{A}T^{-1} $$

Öncelikle, denklemin her iki tarafını ${}^{U}_{B}T$ dönüşüm matrisinin tersiyle çarpalım.

$${}^{U}_{B}T^{-1}\,{}^{U}_{B}T\,{}^{B}_{C}T\,{}^{D}_{C}T^{-1} = {}^{U}_{B}T^{-1}\,{}^{U}_{A}T\,{}^{D}_{A}T^{-1}$$

${}^{U}_{B}T^{-1}\,{}^{U}_{B}T = I$ bilindiğine göre bu ifadeyi yukarıdaki denklemde yerine koyalım.

$$I\,{}^{B}_{C}T\,{}^{D}_{C}T^{-1} = {}^{U}_{B}T^{-1}\,{}^{U}_{A}T\,{}^{D}_{A}T^{-1}$$

$${}^{B}_{C}T\,{}^{D}_{C}T^{-1} = {}^{U}_{B}T^{-1}\,{}^{U}_{A}T\,{}^{D}_{A}T^{-1}$$

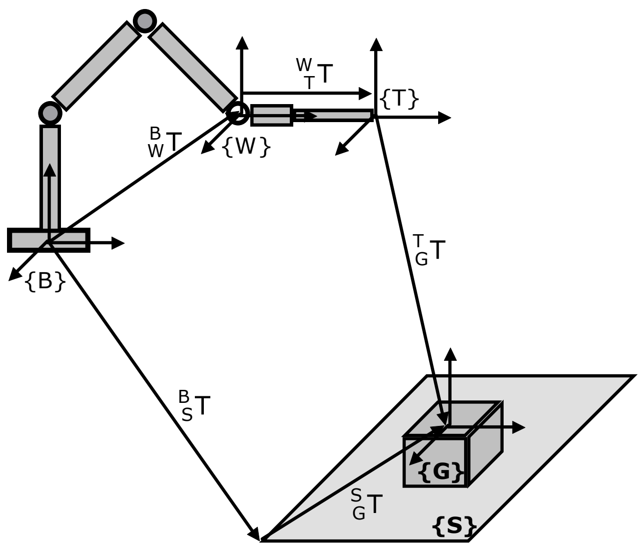
${}^{B}_{C}T$ dönüşüm matrisini yalnız bırakmak için yukarıdaki denklemin her iki tarafını ${}^{D}_{C}T$ ile çarpalım.

$${}^{B}_{C}T\,{}^{D}_{C}T^{-1}\,{}^{D}_{C}T = {}^{U}_{B}T^{-1}\,{}^{U}_{A}T\,{}^{D}_{A}T^{-1}\,{}^{D}_{C}T \quad \left({}^{D}_{C}T^{-1}\,{}^{D}_{C}T = I\right)$$

$${}^{B}_{C}T = {}^{U}_{B}T^{-1}\,{}^{U}_{A}T\,{}^{D}_{A}T^{-1}\,{}^{D}_{C}T \qquad (2.65)$$

ÖRNEK 2.12

Şekil 2.36'daki ${}^{T}_{G}T$ dönüşüm matrisini diğer koordinat sistemleri cinsinden tanımlayınız.



Şekil 2.36. Örnek 2.12 için kullanılacak şekil.

ÇÖZÜM 2.12

{B}, {W} ve {T} koordinat sistemleri arasında ilişki, {B} ve {S} koordinat sistemleri arasındaki ilişkiye eşittir. Bu ilişkiyi aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

$$ {}^{B}_{W}T\,{}^{W}_{T}T\,{}^{T}_{G}T = {}^{B}_{S}T\,{}^{S}_{G}T $$

Denklemde ${}^{B}_{W}T\,{}^{W}_{T}T$ ifadesi yerine ${}^{B}_{T}T$ ifadesini yazalım (${}^{B}_{T}T = {}^{B}_{W}T\,{}^{W}_{T}T$).

$$ {}^{B}_{T}T\,{}^{T}_{G}T = {}^{B}_{S}T\,{}^{S}_{G}T $$

Denklemin her iki tarafı ${}^{B}_{T}T^{-1}$ ile çarpıldığında ${}^{T}_{G}T$ matrisi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$ {}^{B}_{T}T^{-1}\,{}^{B}_{T}T\,{}^{T}_{G}T = {}^{B}_{T}T^{-1}\,{}^{B}_{S}T\,{}^{S}_{G}T \quad ({}^{B}_{T}T^{-1}\,{}^{B}_{T}T = I) $$

$$ {}^{T}_{G}T = {}^{B}_{T}T^{-1}\,{}^{B}_{S}T\,{}^{S}_{G}T \tag{2.66} $$

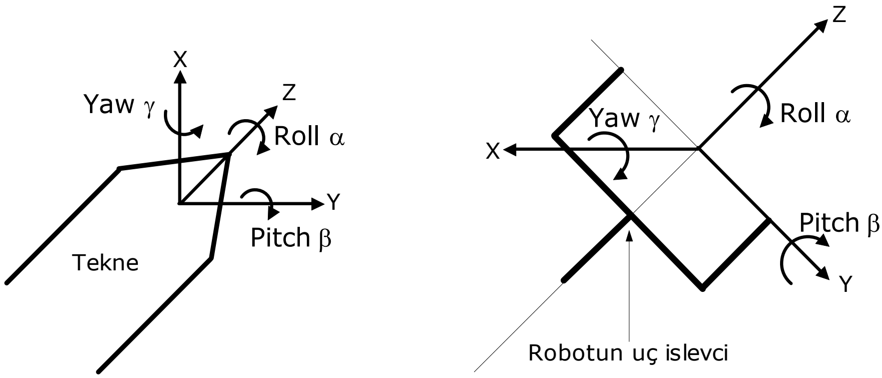
Şekil 2.36'da görülen ve eklem değişkenlerinin bir fonksiyonu olan ${}^{B}_{W}T$ matrisi robotun en temel dönüşüm matrisidir ve kinematik denklemlerin oluşturulmasında kullanılır.

2.9. Özel Yönelim Tanımlamaları

Şu ana kadar bir koordinat sisteminin yönelimini başka bir koordinat sistemine göre 3x3 boyutlu dönme matrisi ile tanımladık. Koordinat sistemlerinin bir birlerine göre yönelimini 3x3 boyutlu dönme matrisleriyle tanımlamak kinematik çözümler için uygun olmasına rağmen, dokuz elemanı bulunan bu dönme matrislerini kullanarak başka bir cisme göre yönelim tanımlamak hiçte kolay değildir. Bunun için genellikle dönme matrisinin üç elemanı kullanılarak yönelim tanımlanır. Koordinat sistemleri arasında yönelim tanımlamak için roll-pitch-yaw, Euler ve eşdeğer açı-eksen seti olmak üzere üç farklı yöntem kullanılır. Şimdi sırayla koordinat sistemleri arasında yönelim tanımlamak için kullanılan bu üç yöntemi geniş bir şekilde inceleyelim.

2.9.1. Roll-Pitch-Yaw (XYZ Sabit) Açı Seti

Roll-Pitch-Yaw açı setinde dönme işlemi, hareket etmeyen sabit koordinat çerçevesine göre gerçekleştirildiğinden, bu yönteme sabit açı sistemi veya Roll-Pitch-Yaw açı sistemi denir. Roll-pitch-yaw, Şekil 2.37'de görüldüğü gibi bir teknenin yüzerken aşağı-yukarı, sola-sağa ve kendi ekseni etrafında hareketini tanımlayan doğal bir açı gösterim biçimidir. Eğer insanın eli avuç içi aşağı bakmak üzere ileri yönde yere paralel tutulursa, 'roll' elin kendi ekseni etrafında döndürülmesini, 'pitch' elin aşağı-yukarı hareket ettirilmesi, yaw ise elin sağa sola hareket ettirilmesidir.



Şekil 2.37. Roll-pitch-yaw açı seti.

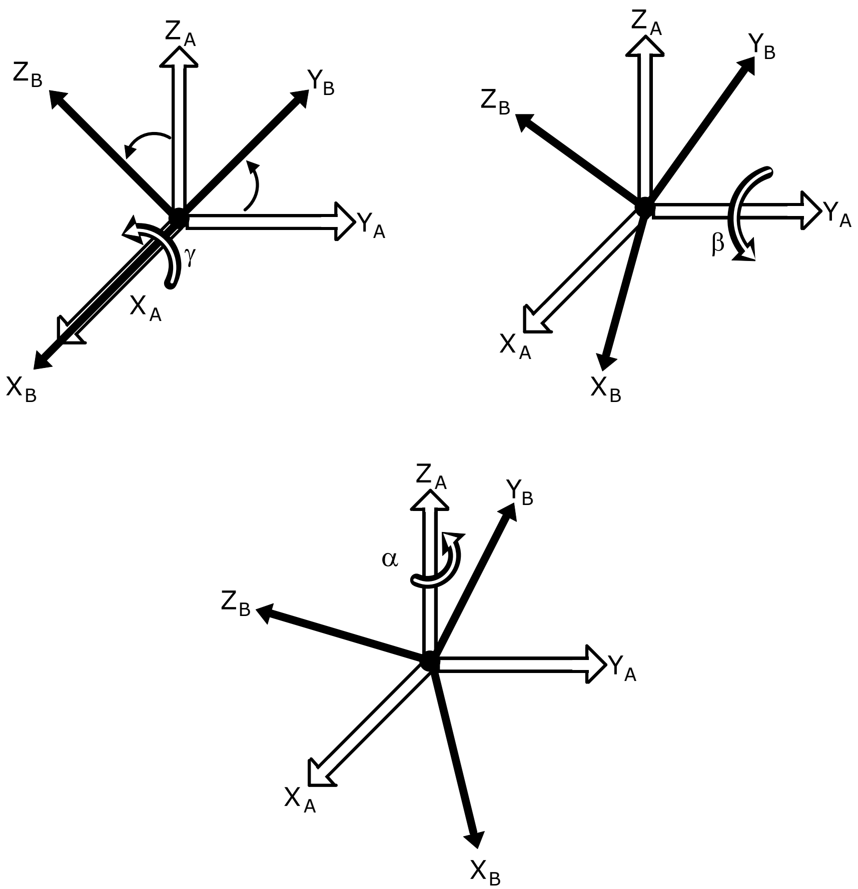
Sabit açı sistemine göre, iki koordinat sistemi arasında dönme işlemi gerçekleştirmek için 12 farklı sabit açı kümesi kullanılır. {B} koordinat sisteminin {A} koordinat sistemine göre dönme işlemi X-Y-Z sabit açı sistemine göre aşağıdaki gibi bulunur.

İlk önce merkezleri çakışık olan {B} koordinat sistemi Şekil 2.38'de görüldüğü gibi X_A ekseni boyunca γ, Y_A ekseni boyunca β ve Z_A ekseni boyunca α açısıyla döndürülür. X_A, Y_A ve Z_A eksenleri boyunca gerçekleştirilen dönme işlemleri, sabit {A} koordinat sistemine göre ifade edilir. Bu işlemi matematiksel olarak aşağıda gibi gösterebiliriz.

$$R_{XYZ}(\gamma,\beta,\alpha) = R_Z(\alpha)R_Y(\beta)R_X(\gamma)$$

$$= \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\gamma & -s\gamma \\ 0 & s\gamma & c\gamma \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c\alpha c\beta & c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma \\ s\alpha c\beta & s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma \\ -s\beta & c\beta s\gamma & c\beta c\gamma \end{bmatrix} \tag{2.67}$$



Şekil 2.38. Sabit açı sisteminde dönme işleminin gerçekleştirilmesi.

Denklem 2.68'deki 3x3 boyutlu ${}^{A}_{B}R_{XYZ}(\gamma,\beta,\alpha)$ dönme matrisi verildiğinde sabit açı sisteminde α, β ve γ açı kümesi aşağıdaki gibi bulunur.

$$^{A}_{B}R_{XYZ}(\gamma,\beta,\alpha)=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} c\alpha c\beta & c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma \\ s\alpha c\beta & s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma \\ -s\beta & c\beta s\gamma & c\beta c\gamma \end{bmatrix} \qquad (2.68)$$

2.9.1.1. Roll-Pitch-Yaw (XYZ Sabit) Açı Setinin Ters Çözümü

Denklem 2.68'deki matrislerin (1,1), (2,1) ve (3,1) elemanları birbirine eşitlendikten sonra r_{11} ve r_{21} matris elemanlarının kareleri alınıp toplanırsa

$$r_{11}^2 + r_{21}^2 = c^2\alpha c^2\beta + s^2\alpha c^2\beta$$

$$= \left(c^2\alpha + s^2\alpha\right)c^2\beta = c^2\beta$$

$$c\beta = \pm\sqrt{r_{11}^2 + _{21}^2}$$

β açısının pozitif çözümü ($-90^\circ < \beta < 90^\circ$) denklem 2.69'daki gibi bulunur.

$$\frac{s\beta}{c\beta} = \frac{-r_{31}}{\sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2}}$$

$$\beta = A\tan2\left(-r_{31}, \sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2}\right) \qquad (2.69)$$

r_{11} ve r_{21} matris elemanlarından yararlanarak α açısı, $\beta \neq \pm 90^\circ$ olmak koşuluyla, denklem 2.70'teki gibi elde edilir.

$$s\alpha = r_{21}/c\beta \text{ ve } c\alpha = r_{11}/c\beta$$

$$\alpha = A\tan2\left(r_{21}/c\beta\,, r_{11}/c\beta\right) \qquad (2.70)$$

(3,2) ve (3,3) matris elemanlarını bir birine eşitleyerek γ açısı, $\beta \neq \pm 90^\circ$ olmak koşuluyla denklem 2.71'deki gibi bulunur.

$$r_{32} = c\beta s\gamma \quad \text{veya} \quad s\gamma = r_{32}/c\beta$$

$$r_{33} = c\beta c\gamma \quad \text{veya} \quad c\gamma = r_{33}/c\beta$$

$$\gamma = A\tan2\left(r_{32}/c\beta\,, r_{33}/c\beta\right) \qquad (2.71)$$

Daha önce α, β ve γ açı kümesinin çözümleri $\beta = \pm 90^\circ$ hariç olmak üzere bulundu. Şimdi ise α, β ve γ açı kümesinin çözümlerini $\beta = \pm 90^\circ$ koşulu için araştıralım. Öncelikle $\beta = +90^\circ$ koşulu üzerinde duralım.

$$
{}^{A}_{B}R_{XYZ}(\gamma, 90^\circ, \alpha) = \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c(+90) & 0 & s(+90) \\ 0 & 1 & 0 \\ -s(+90) & 0 & c(+90) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\gamma & -s\gamma \\ 0 & s\gamma & c\gamma \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} 0 & c\alpha s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha c\gamma + s\alpha s\gamma \\ 0 & s\alpha s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha c\gamma - c\alpha s\gamma \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.72}
$$

Denklem 2.72'yi α ve γ açılarının farkları cinsinden yazalım.

$$
{}^{A}_{B}R_{XYZ}(\gamma, +90^\circ, \alpha) = \begin{bmatrix} 0 & \sin(\gamma - \alpha) & \cos(\gamma - \alpha) \\ 0 & \cos(\gamma - \alpha) & -\sin(\gamma - \alpha) \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.73}
$$

Denklem 2.73'teki ifadeyi aşağıdaki gibi yazıp (1,2) ve (2,2) matris elemanlarını eşitleyerek γ ve α açı farklarını bulalım.

$$
\begin{bmatrix} 0 & \sin(\gamma - \alpha) & \cos(\gamma - \alpha) \\ 0 & \cos(\gamma - \alpha) & -\sin(\gamma - \alpha) \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\sin(\gamma - \alpha) = r_{12}
$$

$$
\cos(\gamma - \alpha) = r_{22}
$$

$$
\gamma - \alpha = A\tan 2(r_{12}, r_{22}) \tag{2.74}
$$

$\beta = +90^\circ$, Denklem 2.74'te görüldüğü gibi α veya γ açılarından birinin 0 kabul edilmesi durumunda diğer açıyı bulma imkânı sağlar. $\alpha = 0$ kabul ederek γ açısını bulalım.

$$
\alpha = 0^\circ
$$

$$
\beta = +90^\circ
$$

$$\gamma = A\tan(r_{12}, r_{22}) \tag{2.75}$$

İkinci olarak $\beta = -90^\circ$ koşulu üzerinde duralım.

$$ {}^{A}_{B}R_{XYZ}(\gamma,-90^\circ,\alpha) = \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c(-90) & 0 & s(-90) \\ 0 & 1 & 0 \\ -s(-90) & 0 & c(-90) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\gamma & -s\gamma \\ 0 & s\gamma & c\gamma \end{bmatrix} $$

$$ = \begin{bmatrix} 0 & -c\alpha s\gamma - s\alpha c\gamma & -c\alpha c\gamma + s\alpha s\gamma \\ 0 & -s\alpha s\gamma + c\alpha c\gamma & -s\alpha c\gamma - c\alpha s\gamma \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.76}$$

Denklem 2.76'yı α ve γ açılarının toplamları cinsinden yazalım.

$$ {}^{A}_{B}R_{XYZ}(\gamma,-90^\circ,\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & -\sin(\gamma+\alpha) & -\cos(\gamma+\alpha) \\ 0 & \cos(\gamma+\alpha) & -\sin(\gamma+\alpha) \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.77}$$

Denklem 2.77'deki ifadeyi aşağıdaki gibi yazıp (1,2) ve (2,2) matris elemanlarını eşitleyerek γ ve α açı toplarını bulalım.

$$ \begin{bmatrix} 0 & -\sin(\gamma+\alpha) & -\cos(\gamma+\alpha) \\ 0 & \cos(\gamma+\alpha) & -\sin(\gamma+\alpha) \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} $$

$$-\sin(\gamma+\alpha) = r_{12}$$

$$\cos(\gamma+\alpha) = r_{22}$$

$$\gamma + \alpha = A\tan 2(-r_{12}, r_{22}) \tag{2.78}$$

Daha önce belirtildiği gibi $\beta = -90^\circ$, denklem 2.78'deki α veya γ açılarından birinin sıfır kabul edilmesi durumunda diğer açıyı bulma imkanı sağlar. $\alpha = 0$ kabul ederek γ açısını bulalım.

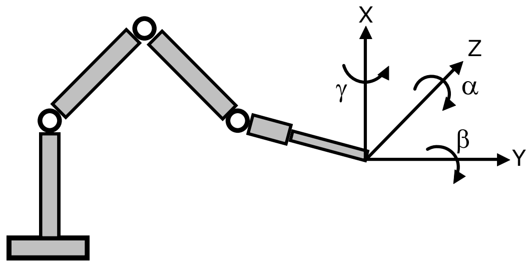
$$\alpha = 0^\circ$$

$$\beta = -90^\circ$$

$$\gamma = A\tan 2(-r_{12}, r_{22}) \tag{2.79}$$

ÖRNEK 2.13

Bir robotun uç işlevcisine Şekil 2.39'da görüldüğü gibi sabit bir koordinat sistemi yerleştiriliyor. Robotun uç işlevcisi sabit koordinat sisteminin eksenleri olan X boyunca γ, Y boyunca β ve Z boyunca α açısıyla döndürülürek aşağıdaki dönme matrisi elde ediliyor.



Şekil 2.39. Örnek 2.13 için kullanılacak şekil.

$$R_{XYZ}(\gamma,\beta,\alpha) = \begin{bmatrix} 0.85165 & -0.30998 & 0.42262 \\ 0.47212 & 0.10359 & -0.87543 \\ 0.22758 & 0.94508 & 0.23457 \end{bmatrix}$$

Elde edilen matristen faydalanarak γ, β ve α açılarını bulunuz.

ÇÖZÜM 2.13

Örnek 2.13'de verilen dönme matrisini ile sembolik dönme matrisini aşağıdaki gibi birbirine eşitleyelim.

$$\begin{bmatrix} 0.85165 & -0.30998 & 0.42262 \\ 0.47212 & 0.10359 & -0.87543 \\ 0.22758 & 0.94508 & 0.23457 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

Yukarıdaki eşitlikten faydalanarak γ, β ve α açıları aşağıdaki gibi bulunur.

$$\beta = A\tan 2\left(-r_{31}, \sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2}\right)$$

$$= A\tan 2\left(-0.22758, \sqrt{(0.85165)^2 + (0.47212)^2}\right) = -13.154^\circ$$

$$\alpha = A\tan 2\left(r_{21}/c\beta\,, r_{11}/c\beta\right)$$

$$= A\tan 2\left(\frac{0.47212}{c(-13.154)}, \frac{0.85165}{c(-13.154)}\right) = 29^\circ$$

$$\gamma = A\tan 2\left(r_{32}/c\beta\,, r_{33}/c\beta\right)$$

$$= A\tan 2\left(\frac{0.94508}{c(-13.154)}, \frac{0.23457}{c(-13.154)}\right) = 76.06^\circ$$

ÖRNEK 2.14

Şekil 2.39'daki robotun uç işlevcisi sabit koordinat sisteminin X ekseni boyunca $\gamma = 42^\circ$, Y ekseni boyunca $\beta = -17^\circ$ ve Z ekseni boyunca $\alpha = 25^\circ$ döndürülürek aşağıdaki dönme matrisi elde ediliyor.

$$R_{XYZ}(\gamma, \beta, \alpha) = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

Yukarıdaki R dönme matrisinin elemanlarını bulunuz.

ÇÖZÜM 2.14

Denklem 2.68'den faydalanarak R dönme matrisinin elemanları aşağıdaki gibi bulunur.

$$R_{XYZ}(42, -17, 25) = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c(25)c(-17) & c(25)s(-17)s(42) - s(25)c(42) & . \\ s(25)c(-17) & s(25)s(-17)s(42) + c(25)c(42) & . \\ -s(-17) & c(-17)s(42) & . \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} . & . & c(25)s(-17)c(42) + s(25)s(42) \\ . & . & s(25)s(-17)c\gamma - c(25)s(42) \\ . & . & c(-17)c(42) \end{matrix}\Bigg]$$

$$= \begin{bmatrix} 0.8667 & -0.4914 & 0.0858 \\ 0.4041 & 0.5909 & -0.6982 \\ -0.29237 & 0.6399 & 0.7107 \end{bmatrix}$$

İki koordinat sistemi arasındaki yönelimi tanımlamak için XYZ sabit açı setine ek olarak aşağıda gösterilen 11 adet sabit açı seti de kullanılabilir [5].

1. $^A_B R_{YXZ}(\gamma, \beta, \alpha) = R_Z(\alpha) R_X(\beta) R_Y(\gamma)$

$$= \begin{bmatrix} -s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & -s\alpha c\beta & s\alpha s\beta c\gamma + c\alpha s\gamma \\ c\alpha s\beta s\gamma + s\alpha c\gamma & c\alpha c\beta & -c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma \\ -c\beta s\gamma & s\beta & c\beta c\gamma \end{bmatrix}$$

2. $^A_B R_{XZY}(\gamma, \beta, \alpha) = R_Y(\alpha) R_Z(\beta) R_X(\gamma)$

$$= \begin{bmatrix} c\alpha c\beta & -c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma & c\alpha s\beta s\gamma + s\alpha c\gamma \\ s\beta & c\beta c\gamma & -c\beta s\gamma \\ -s\alpha c\beta & s\alpha s\beta c\gamma + c\alpha s\gamma & -s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma \end{bmatrix}$$

3. $^A_B R_{YZX}(\gamma, \beta, \alpha) = R_X(\alpha) R_Z(\beta) R_Y(\gamma)$

$$= \begin{bmatrix} c\beta c\gamma & -s\beta & c\beta s\gamma \\ c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma & c\alpha c\beta & c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma \\ s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma & s\alpha c\beta & s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma \end{bmatrix}$$

4. $^A_B R_{ZXY}(\gamma, \beta, \alpha) = R_Y(\alpha) R_X(\beta) R_Z(\gamma)$

$$= \begin{bmatrix} s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma & s\alpha c\beta \\ c\beta s\gamma & c\beta c\gamma & -s\beta \\ c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma & c\alpha c\beta \end{bmatrix}$$

5. $^A_B R_{ZYX}(\gamma, \beta, \alpha) = R_X(\alpha) R_Y(\beta) R_Z(\gamma)$

$$= \begin{bmatrix} c\beta c\gamma & -c\beta s\gamma & s\beta \\ s\alpha s\beta c\gamma + c\alpha s\gamma & -s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & -s\alpha c\beta \\ -c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma & c\alpha s\beta s\gamma + s\alpha c\gamma & c\alpha c\beta \end{bmatrix}$$

6. $_B^A R_{XYX}(\gamma,\beta,\alpha) = R_X(\alpha)R_Y(\beta)R_X(\gamma)$

$$= \begin{bmatrix} c\beta & s\beta s\gamma & s\beta c\gamma \\ s\alpha s\beta & -s\alpha c\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & -s\alpha c\beta c\gamma - c\alpha s\gamma \\ -c\alpha s\beta & c\alpha c\beta s\gamma + s\alpha c\gamma & c\alpha c\beta c\gamma - s\alpha s\gamma \end{bmatrix}$$

7. $_B^A R_{XZX}(\gamma,\beta,\alpha) = R_X(\alpha)R_Z(\beta)R_X(\gamma)$

$$= \begin{bmatrix} c\beta & -s\beta c\gamma & s\beta s\gamma \\ c\alpha s\beta & c\alpha c\beta c\gamma - s\alpha s\gamma & -c\alpha c\beta s\gamma - s\alpha c\gamma \\ s\alpha s\beta & s\alpha c\beta c\gamma + c\alpha s\gamma & -s\alpha c\beta s\gamma + c\alpha c\gamma \end{bmatrix}$$

8. $_B^A R_{YXY}(\gamma,\beta,\alpha) = R_Y(\alpha)R_X(\beta)R_Y(\gamma)$

$$= \begin{bmatrix} -s\alpha c\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta & s\alpha c\beta c\gamma + c\alpha s\gamma \\ s\beta s\gamma & c\beta & -s\beta c\gamma \\ -c\alpha c\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta & c\alpha c\beta c\gamma - s\alpha s\gamma \end{bmatrix}$$

9. $_B^A R_{YZY}(\gamma,\beta,\alpha) = R_Y(\alpha)R_Z(\beta)R_Y(\gamma)$

$$= \begin{bmatrix} c\alpha c\beta c\gamma - s\alpha s\gamma & -c\alpha s\beta & c\alpha c\beta s\gamma + s\alpha c\gamma \\ s\beta c\gamma & c\beta & s\beta s\gamma \\ -s\alpha c\beta c\gamma - c\alpha s\gamma & s\alpha s\beta & -s\alpha c\beta s\gamma + c\alpha c\gamma \end{bmatrix}$$

10. $_B^A R_{ZXZ}(\gamma,\beta,\alpha) = R_Z(\alpha)R_X(\beta)R_Z(\gamma)$

$$= \begin{bmatrix} -s\alpha c\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & -s\alpha c\beta c\gamma - c\alpha s\gamma & s\alpha s\beta \\ c\alpha c\beta s\gamma + s\alpha c\gamma & c\alpha c\beta c\gamma - s\alpha s\gamma & -c\alpha s\beta \\ s\beta s\gamma & s\beta c\gamma & c\beta \end{bmatrix}$$

11. $_B^A R_{ZYZ}(\gamma,\beta,\alpha) = R_Z(\alpha)R_Y(\beta)R_Z(\gamma)$

$$= \begin{bmatrix} c\alpha c\beta c\gamma - s\alpha s\gamma & -c\alpha c\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta \\ s\alpha c\beta c\gamma + c\alpha s\gamma & -s\alpha c\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta \\ -s\beta c\gamma & s\beta s\gamma & c\beta \end{bmatrix} \quad (2.80)$$

2.10. ZYX Euler Açı Seti

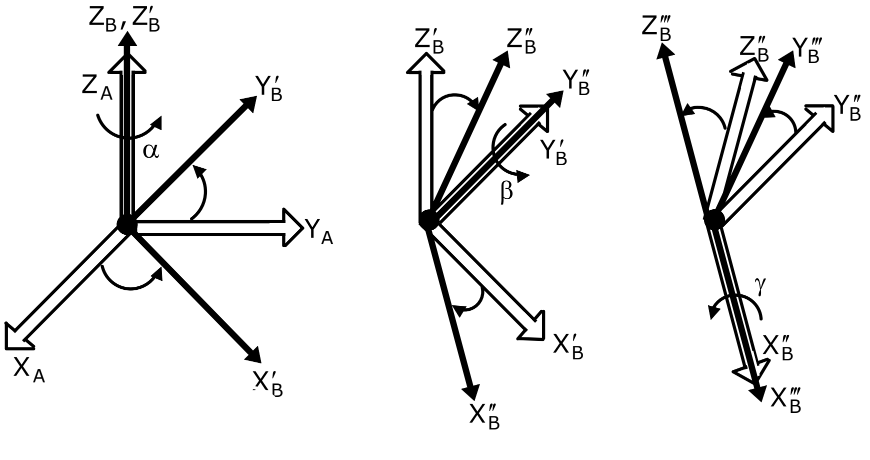
Bir koordinat sisteminin yönelimini başka bir koordinat sistemine göre tanımlamanın başka bir yoluda Euler açı setini kullanmaktır. Euler açı sisteminde dönme işlemi, sabit referans koordinat sisteminin aksine hareket eden koordinat sistemine göre gerçekleştirilir. Sabit açı sisteminde olduğu gibi, Euler açı sisteminde de iki koordinat sisetmi arasında dönme işlemi on iki farklı şekilde gerçekleştirilebilşir. {B} koordinat sisteminin {A} koordinat sistemine göre yönelimi Euler açı sistemine göre aşağıdaki gibi bulunur.

İlk önce eksenleri {A} koordinat sistemiyle çakışık olan {B} koordinat sistemi Şekil 2.40'da görüldüğü gibi Z_B ekseni boyunca α açısıyla döndürülür. Dönme sonucu oluşan yeni $\{B'\}$ koordinat sistemi Y'_B ekseni boyunca β açısıyla döndürülür. Son olarak, dönme sonucu oluşan yeni $\{B''\}$ koordinat sistemi X''_B ekseni boyunca γ açısıyla döndürülür. Bu işlem matematiksel olarak aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$
{}^{A}_{B}R_{Z'Y'X'}(\alpha,\beta,\gamma) = R_Z(\alpha)R_Y(\beta)R_X(\gamma)
$$

$$
= \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\gamma & -s\gamma \\ 0 & s\gamma & c\gamma \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} c\alpha c\beta & c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma \\ s\alpha c\beta & s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma \\ -s\beta & c\beta s\gamma & c\beta c\gamma \end{bmatrix} \quad (2.81)
$$



Şekil 2.40. Euler açı sisteminde dönme işlemin gerçekleştirilmesi.

Dikkat edileceği gibi denklem 2.81'de elde edilen sonuç XYZ sabit açı setinde elde edilen sonuçla aynı çıkmıştır. Bu benzerlikten dolayı Euler açı setinde bir birinden bağımsız dönme işlemi geri kalan 11 farklı şekilde gerçekleştirilebilir.

ÖRNEK 2.15

Şekil 2.39'daki robotun uç işlevcisine hareketli bir koordinat sistemi yerleştiriliyor. Öncelikle bu hareketli koordinat sistemi Z ekseni boyunca α açısıyla döndürülür. Dönme sonucu oluşan yeni koordinat sistemi Y ekseni boyunca β açısıyla döndürülür. Son olarak, dönme sonucu oluşan yeni koordinat sistemi tekrar Z ekseni boyunca γ açısıyla döndürülürek aşağıdaki dönme matrisi elde ediliyor. Bu matristen faydalanarak γ, β ve α açılarını bulunuz.

$$R_{Z'Y'Z'}(\alpha,\beta,\gamma)=\begin{bmatrix} -0.30619 & -0.88388 & 0.35355 \\ 0.91856 & -0.17678 & 0.35355 \\ -0.25 & 0.43301 & 0.86603 \end{bmatrix}$$

ÇÖZÜM 2.15

Daha öncede belirtildiği gibi Euler açı setinde de iki koordinat sisetmi arasında dönme işlemi on iki farklı şekilde gerçekleştirilebilir. Örnekte Z'Y'Z' Euler açı setinden faydalanarak dönme işlemi gerçekleştirilmiştir. Öncelikle Z'Y'Z' koordinat sistemine göre ifade edilen dönme matrisini elde edelim.

$${}^{A}_{B}R_{Z'Y'Z'}(\alpha,\beta,\gamma)=R_Z(\alpha)R_Y(\beta)R_Z(\gamma)$$

$$=\begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c\gamma & -s\gamma & 0 \\ s\gamma & c\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} c\alpha c\beta c\gamma - s\alpha s\gamma & -c\alpha c\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta \\ s\alpha c\beta c\gamma + c\alpha s\gamma & -s\alpha c\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta \\ -s\beta c\gamma & s\beta s\gamma & c\beta \end{bmatrix}$$

Yukarıdaki matrisi aşağıdaki görüldüğü gibi sembolik dönme matrisiyle eşitleyip β sıfırdan farklı olmak koşulu ile ($\beta \neq 0^\circ$) daha önce açıklanan yöntemleri kullanarak γ, β ve α açılarını bulalım.

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\alpha c\beta c\gamma - s\alpha s\gamma & -c\alpha c\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta \\ s\alpha c\beta c\gamma + c\alpha s\gamma & -s\alpha c\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta \\ -s\beta c\gamma & s\beta s\gamma & c\beta \end{bmatrix}$$

$$\beta = A\tan 2\left(\sqrt{{r_{31}}^2 + {r_{32}}^2}, r_{33}\right)$$

$$= A\tan 2\left(\sqrt{(-0.25)^2 + (0.43301)^2},\ 0.86603\right) = 29.999^\circ \cong 30^\circ$$

$$\alpha = A\tan 2\left(\frac{r_{23}}{s\beta}, \frac{r_{13}}{s\beta}\right)$$

$$= A\tan 2\left(\frac{0.35355}{s(30)}, \frac{0.35355}{s(30)}\right) = 45^\circ$$

$$\gamma = A\tan 2\left(\frac{r_{32}}{s\beta}, -\frac{r_{31}}{s\beta}\right)$$

$$= A\tan 2\left(\frac{0.43301}{s(30)}, -\frac{-0.25}{s(30)}\right) = 59.9998^\circ \cong 60^\circ$$

İki koordinat sistemi arasındaki yönelimi tanımlamak için $Z'Y'X'$ ve $Z'Y'Z'$ Euler açı setine ek olarak aşağıda gösterilen 10 adet Euler açı seti de kulanılabilir [5].

1. ${}^{A}_{B}R_{X'Y'Z'}(\alpha,\beta,\gamma) = R_X(\alpha)R_Y(\beta)R_Z(\gamma)$

$$= \begin{bmatrix} c\beta c\gamma & -c\beta s\gamma & s\beta \\ s\alpha s\beta c\gamma + c\alpha s\gamma & -s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & -s\alpha c\beta \\ -c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma & c\alpha s\beta s\gamma + s\alpha c\gamma & c\alpha c\beta \end{bmatrix}$$

2. ${}^{A}_{B}R_{X'Z'Y'}(\alpha,\beta,\gamma) = R_X(\alpha)R_Z(\beta)R_Y(\gamma)$

$$= \begin{bmatrix} c\beta c\gamma & -s\beta & c\beta s\gamma \\ c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma & c\alpha c\beta & c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma \\ s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma & s\alpha c\beta & s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma \end{bmatrix}$$

3. $_B^A R_{Y'X'Z'}(\alpha,\beta,\gamma) = R_Y(\alpha) R_X(\beta) R_Z(\gamma)$

$$= \begin{bmatrix} s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma & s\alpha c\beta \\ c\beta s\gamma & c\beta c\gamma & -s\beta \\ c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma & c\alpha c\beta \end{bmatrix}$$

4. $_B^A R_{Y'Z'X'}(\alpha,\beta,\gamma) = R_Y(\alpha) R_Z(\beta) R_X(\gamma)$

$$= \begin{bmatrix} c\alpha c\beta & -c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma & c\alpha s\beta s\gamma + s\alpha c\gamma \\ s\beta & c\beta c\gamma & -c\beta s\gamma \\ -s\alpha c\beta & s\alpha s\beta c\gamma + c\alpha s\gamma & -s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma \end{bmatrix}$$

5. $_B^A R_{Z'X'Y'}(\alpha,\beta,\gamma) = R_Z(\alpha) R_X(\beta) R_Y(\gamma)$

$$= \begin{bmatrix} -s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & -s\alpha c\beta & s\alpha s\beta c\gamma + c\alpha s\gamma \\ c\alpha s\beta s\gamma + s\alpha c\gamma & c\alpha c\beta & -c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma \\ -c\beta s\gamma & s\beta & c\beta c\gamma \end{bmatrix}$$

6. $_B^A R_{X'Y'X'}(\alpha,\beta,\gamma) = R_X(\alpha) R_Y(\beta) R_X(\gamma)$

$$= \begin{bmatrix} c\beta & s\beta s\gamma & s\beta c\gamma \\ s\alpha s\beta & -s\alpha c\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & -s\alpha c\beta c\gamma - c\alpha s\gamma \\ -c\alpha s\beta & c\alpha c\beta s\gamma + s\alpha c\gamma & c\alpha c\beta c\gamma - s\alpha s\gamma \end{bmatrix}$$

7. $_B^A R_{X'Z'X'}(\alpha,\beta,\gamma) = R_X(\alpha) R_Z(\beta) R_X(\gamma)$

$$= \begin{bmatrix} c\beta & -s\beta c\gamma & s\beta s\gamma \\ c\alpha s\beta & c\alpha c\beta c\gamma - s\alpha s\gamma & -c\alpha c\beta s\gamma - s\alpha c\gamma \\ s\alpha s\beta & s\alpha c\beta c\gamma + c\alpha s\gamma & -s\alpha c\beta s\gamma + c\alpha c\gamma \end{bmatrix}$$

8. $_B^A R_{Y'X'Y'}(\alpha,\beta,\gamma) = R_Y(\alpha) R_X(\beta) R_Y(\gamma)$

$$= \begin{bmatrix} -s\alpha c\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta & s\alpha c\beta c\gamma + c\alpha s\gamma \\ s\beta s\gamma & c\beta & -s\beta c\gamma \\ -c\alpha c\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta & c\alpha c\beta c\gamma - s\alpha s\gamma \end{bmatrix}$$

9. $_B^A R_{Y'Z'Y'}(\alpha,\beta,\gamma) = R_Y(\alpha) R_Z(\beta) R_Y(\gamma)$

$$= \begin{bmatrix} c\alpha c\beta c\gamma - s\alpha s\gamma & -c\alpha s\beta & c\alpha c\beta s\gamma + s\alpha c\gamma \\ s\beta c\gamma & c\beta & s\beta s\gamma \\ -s\alpha c\beta c\gamma - c\alpha s\gamma & s\alpha s\beta & -s\alpha c\beta s\gamma + c\alpha c\gamma \end{bmatrix}$$

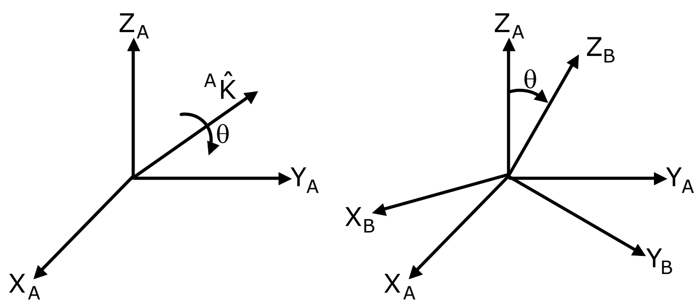
10. $^{A}_{B}R_{Z'X'Z'}(\alpha, \beta, \gamma) = R_Z(\alpha)R_X(\beta)R_Z(\gamma)$

$$= \begin{bmatrix} -s\alpha c\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & -s\alpha c\beta c\gamma - c\alpha s\gamma & s\alpha s\beta \\ c\alpha c\beta s\gamma + s\alpha c\gamma & c\alpha c\beta c\gamma - s\alpha s\gamma & -c\alpha s\beta \\ s\beta s\gamma & s\beta c\gamma & c\beta \end{bmatrix}$$

Hem sabit hem de Euler açı setinde X-Y-Z kombinasyonlarının bir kısmının aynı sonucu vermesinden dolayı her iki açı setinde de bir birinden bağımsız on ikişer adet açı kümesi bulunmaktadır. Bu 24 açı kümesinden herhangi birinin kullanılmasının özel nedeni yoktur. Hangisinin kullanılacağı tamamen tasarımcıya özgüdür.

2.11. Eşdeğer Açı-Eksen Seti

Buraya kadar X, Y ve Z eksenlerinde dönme kavramları anlatıldı. Şimdi ise bir koordinat sisteminin orijinine yerleştirilen bir vektör yardımıyla beli bir açıyla döndürülmesini inceleyelim. {A} ve {B} gibi üs üste çakışık iki koordinat sistemi olsun. Şekil 2.41'de görüldüğü gibi {A} koordinat sisteminin orijinine bir $^{A}\hat{K}$ vektörü yerleştirilsin. Daha sonra {A} koordinat sistemi sağ el kuralına göre bu $^{A}\hat{K}$ vektörüyle θ açısı kadar döndürülüp yeni bir koordinat sistemi {B} elde edilsin. Bu iki koordinat sistemi arasındaki dönme matrisi $R_K(\theta)$, $^{A}\hat{K}$ vektörünün ve θ açısının birer fonksiyonu olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir.



Şekil 2.41. Koordinat sistemine yerleştirilen bir $^{A}\hat{K}$ vektörünün θ açısıyla döndürülmesi.

$$ {}^{A}_{B}R\left(\hat{K},\theta\right) = R_K(\theta) \tag{2.82}$$

${}^{A}\hat{K}$ vektörü, {A} koordinat sistemine göre tanımlanan {C} koordinat sisteminin Z birim vektörü olsun. Bu durumda

$$ R\left(\hat{K},\theta\right) = R\left({}^{A}\hat{Z}_C,\theta\right) \tag{2.83}$$

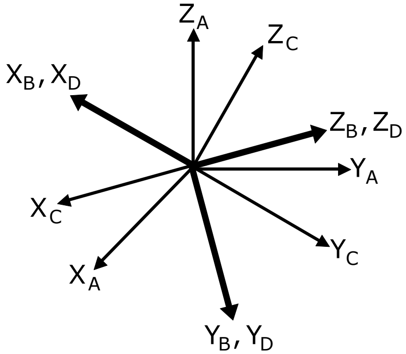
olur. {A} koordinat sisteminin {C} koordinat sistemine göre yönelimi ise

$$ {}^{A}_{C}T = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & 0 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

olsun. Buna göre ${}^{A}\hat{K}$ vektörünün ${}^{A}_{C}T$ matrisinin elemanları cinsinden ifadesi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$ {}^{A}\hat{K} = k_x\hat{i} + k_y\hat{j} + k_z\hat{k} = r_{13}\,\hat{i} + r_{23}\,\hat{j} + r_{33}\,\hat{k} \tag{2.84}$$

{B} koordinat sisteminin, {A} koordinat sistemine göre yönelimi ${}^{A}_{B}T$ matrisiyle tanımlanırsa, aynı yönelim, orijinleri çakışık olan {D} koordinat sisteminin, {C} koordinat sistemine göre yönelimini gösteren ${}^{C}_{D}T$ matrisiyle de elde edilebilir. Bu durumda, Şekil 2.42'de görüldüğü gibi merkezleri çakışık olan {A}, {B}, {C} ve {D} koordinat sistemleri arasındaki ilişki aşağıdaki gibi ifade edilebilir (ayrıca, {B} ve {D} koordinat sistemlerinin yönelimlerinin aynı olduğuna dikkat ediniz).



Şekil 2.42. Koordinat sistemlerinin birbirlerine göre tanımlanması.

$${}^{A}_{B}T={}^{A}_{C}T\,{}^{C}_{B}T$$

{B} ve {D} koordinat sistemlerinin yönelimleri aynı olduğundan ${}^{C}_{B}T={}^{C}_{D}T$ şeklinde ifade edilebilir. Bu durumda yukarıdaki eşitlikte ${}^{C}_{B}T$ yerine ${}^{C}_{D}T$ yazıp ${}^{C}_{D}T$ ifadesini çekelim.

$${}^{A}_{B}T={}^{A}_{C}T\,{}^{C}_{D}T$$

$${}^{C}_{D}T={}^{A}_{C}T^{-1}\,{}^{A}_{B}T \tag{2.85}$$

Denklemden {B} koordinat sisteminin ${}^{A}\hat{K}$ vektörüyle döndürülmesinin, {D} koordinat sisteminin {C} koordinat sisteminin Z ekseniyle döndürülmesine eşit olduğu anlaşılmaktadır (hatırlanacağı gibi ${}^{A}\hat{K}$ vektörü {C} koordinat sisteminin Z birim vektörü olarak tanımlanmıştı). Bu durumda,

$${}^{A}_{B}T={}^{A}_{C}T\,{}^{C}_{D}T$$

eşitliğinin sol tarafını $R(\hat{K},\theta)$ matrisiyle çarpmakla, yönelimi {A} koordinat sistemine göre tanımlamış oluruz. Aynı şekilde eşitliğin sağ tarafındaki ${}^{C}_{D}T$ matrisini $R(\hat{Z},\theta)$ ile önden çarparak yönelimi {C} koordinat sistemine göre tanımlarız. Denklemin her iki tarafını {A} koordinat sistemine göre tanımlamak için $R(\hat{Z},\theta){}^{C}_{D}T$ matrisi ${}^{A}_{C}T$ matrisiyle önden çarpılmalıdır. Bu anlatılanlar matematiksel olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$R(\hat{K},\theta)\,{}^{A}_{B}T={}^{A}_{C}T\,R(\hat{Z},\theta)\,{}^{C}_{D}T \tag{2.86}$$

Denklemde ${}^{C}_{D}T$ yerine ${}^{A}_{C}T^{-1}\,{}^{A}_{B}T$ yazalım.

$$R(\hat{K},\theta)\,{}^{A}_{B}T={}^{A}_{C}T\,R(\hat{Z},\theta)\,{}^{A}_{C}T^{-1}\,{}^{A}_{B}T \tag{2.87}$$

Denklemde her iki tarafı ${}^{A}_{B}T^{-1}$ ile çarpalım.

$$R(\hat{K},\theta)\,{}^{A}_{B}T\,{}^{A}_{B}T^{-1}={}^{A}_{C}T\,R(\hat{Z},\theta)\,{}^{A}_{C}T^{-1}\,{}^{A}_{B}T\,{}^{A}_{B}T^{-1}$$

${}^{A}_{B}T\,{}^{A}_{B}T^{-1}=I$ olduğundan $R(\hat{K},\theta)$ ifadesi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$R(\hat{K},\theta)={}^{A}_{C}T R(\hat{Z},\theta){}^{A}_{C}T^{-1}$$

Denklemde ifade edilen ${}^{A}_{C}T$ matrisi daha önce verilmişti. Bu matrisin tersi,

$$ {}^{A}_{C}T^{-1} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} & 0 \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} & 0 \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

şeklinde ifade edilir. Bu durumda $R(\hat{K},\theta)={}^{A}_{C}T R(\hat{Z},\theta){}^{A}_{C}T^{-1}$ ifadesi matrisler cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$ R(\hat{K},\theta) = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & 0 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} & 0 \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} & 0 \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & 0 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11}c\theta - r_{12}s\theta & r_{21}c\theta - r_{22}s\theta & r_{31}c\theta - r_{32}s\theta & 0 \\ r_{11}s\theta + r_{12}c\theta & r_{21}s\theta + r_{22}c\theta & r_{31}s\theta + r_{32}c\theta & 0 \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ = \left[\begin{matrix} r_{11}r_{11}c\theta - r_{11}r_{12}s\theta + r_{11}r_{12}s\theta + r_{12}r_{12}c\theta + r_{13}r_{13} & . & . & . \\ r_{21}r_{11}c\theta - r_{21}r_{12}s\theta + r_{11}r_{22}s\theta + r_{22}r_{12}c\theta + r_{23}r_{13} & . & . & . \\ r_{31}r_{11}c\theta - r_{31}r_{12}s\theta + r_{11}r_{32}s\theta + r_{32}r_{12}c\theta + r_{33}r_{13} & . & . & . \\ 0 & . & . & . \end{matrix}\right. $$

$$ \begin{matrix} . & r_{11}r_{21}c\theta - r_{11}r_{22}s\theta + r_{21}r_{12}s\theta + r_{22}r_{12}c\theta + r_{13}r_{23} & . & . \\ . & r_{21}r_{21}c\theta - r_{21}r_{22}s\theta + r_{21}r_{22}s\theta + r_{22}r_{22}c\theta + r_{23}r_{23} & . & . \\ . & r_{31}r_{21}c\theta - r_{31}r_{22}s\theta + r_{21}r_{32}s\theta + r_{22}r_{32}c\theta + r_{33}r_{23} & . & . \\ . & 0 & . & . \end{matrix} $$

$$ \left.\begin{matrix} . & . & r_{11}r_{31}c\theta - r_{11}r_{32}s\theta + r_{31}r_{12}s\theta + r_{32}r_{12}c\theta + r_{13}r_{33} & 0 \\ . & . & r_{21}r_{31}c\theta - r_{21}r_{32}s\theta + r_{31}r_{22}s\theta + r_{32}r_{22}c\theta + r_{23}r_{33} & 0 \\ . & . & r_{31}r_{31}c\theta - r_{31}r_{32}s\theta + r_{31}r_{32}s\theta + r_{32}r_{32}c\theta + r_{33}r_{33} & 0 \\ . & . & 0 & 1 \end{matrix}\right] $$

Matris elemanlarını $s\theta$ ve $c\theta$ parantezlerine alıp yukarıdaki denklemi düzenleyelim.

$$
R(\hat{K},\theta) = \left[\begin{array}{cc}
(r_{11}r_{11} + r_{12}r_{12})c\theta + r_{13}r_{13} & \cdot\ \cdot\ \cdot \\
(r_{21}r_{11} + r_{22}r_{12})c\theta + (-r_{21}r_{12} + r_{11}r_{22})s\theta + r_{23}r_{13} & \cdot\ \cdot\ \cdot \\
(r_{31}r_{11} + r_{32}r_{12})c\theta + (-r_{31}r_{12} + r_{11}r_{32})s\theta + r_{33}r_{13} & \cdot\ \cdot\ \cdot \\
0 & \cdot\ \cdot\ \cdot
\end{array}\right.
$$

$$
\begin{array}{ccc}
\cdot & (r_{11}r_{21} + r_{22}r_{12})c\theta + (-r_{11}r_{22} + r_{21}r_{12})s\theta + r_{13}r_{23} & \cdot\ \cdot \\
\cdot & (r_{21}r_{21} + r_{22}r_{22})c\theta + r_{23}r_{23} & \cdot\ \cdot \\
\cdot & (r_{31}r_{21} + r_{22}r_{32})c\theta + (-r_{31}r_{22} + r_{21}r_{32})s\theta + r_{33}r_{23} & \cdot\ \cdot \\
\cdot & 0 & \cdot\ \cdot
\end{array}
$$

$$
\left.\begin{array}{ccc}
\cdot\ \cdot & (r_{11}r_{31} + r_{32}r_{12})c\theta + (-r_{11}r_{32} + r_{31}r_{12})s\theta + r_{13}r_{33} & 0 \\
\cdot\ \cdot & (r_{21}r_{31} + r_{32}r_{22})c\theta + (-r_{21}r_{32} + r_{31}r_{22})s\theta + r_{23}r_{33} & 0 \\
\cdot\ \cdot & (r_{31}r_{31} + r_{32}r_{32})c\theta + r_{33}r_{33} & 0 \\
\cdot\ \cdot & 0 & 1
\end{array}\right] \quad (2.88)
$$

$R(\hat{K},\theta)$ matrisini bilinen yöntemleri kullanarak sadeleştirelim. Bu yöntemler sırayla aşağıdaki gibi açıklanabilir.

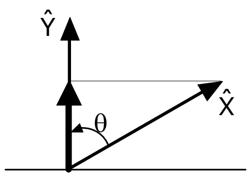
1- Z birim vektörü, X ve Y birim vektörlerinin çapraz çarpımına veya vektörsel çarpımına eşittir.

2- Her hangi bir kolon veya satırın başka bir kolon veya satırla noktasal çarpımı sıfıra eşittir.

3- Herhangi bir kolon veya satırın kendisiyle çarpımı bire eşittir.

Noktasal çarpım geometrik olarak, Şekil 2.43a'da görüldüğü gibi X birim vektörünün uzunluğunun Y birim vektörü üzerindeki izdüşümüdür ve aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$X \cdot Y = |X||Y| \cos\theta$$



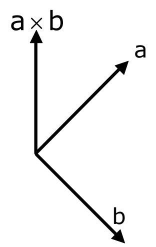
Şekil 2.43a. Noktasal çarpım.

İki vektörün çapraz çarpımı Şekil 2.43b'de görüldüğü gibi bu iki vektöre dik yeni bir vektördür. a vektörü $a = (a_i, a_j, a_k)$ ve b vektörü $b = (b_i, b_j, b_k)$ olsun.

Bu iki vektörün çapraz çarpımı aşağıdaki matrisin determinantına eşittir.

$$a \times b = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \end{vmatrix}$$

$$a \times b = \hat{i}(a_j b_k - a_k b_j) + \hat{j}(a_k b_i - a_i b_k) + \hat{k}(a_i b_j - a_j b_i)$$



Şekil 2.43b. Vektörsel çarpım.

Vektör çarpımından faydalanarak aşağıdaki eşitliklere varabiliriz.

$$r_{13}\hat{i} + r_{23}\hat{j} + r_{33}\hat{k} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ r_{11} & r_{21} & r_{31} \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} \end{vmatrix}$$

$$r_{13}\hat{i} + r_{23}\hat{j} + r_{33}\hat{k} = (r_{21}r_{32} - r_{31}r_{22})\hat{i} + (r_{31}r_{12} - r_{32}r_{11})\hat{j} + (r_{11}r_{22} - r_{21}r_{12})\hat{k}$$

Yukarıdaki eşitlikten yararlanarak aşağıdaki vektörsel çarpımlara ulaşabiliriz.

$$V_1 \rightarrow \; r_{13} = r_{21}r_{32} - r_{31}r_{22}$$

$$V_2 \rightarrow \; r_{23} = r_{31}r_{12} - r_{32}r_{11}$$

$$V_3 \rightarrow \; r_{33} = r_{11}r_{22} - r_{21}r_{12}$$

Aynı şekilde dönme matrisinin noktasal çarpım özelliğinden yararlanarak aşağıdaki ifadelere varabiliriz.

Satırlar için (S),

$$1-\ \left(r_{11}\hat{i}+r_{12}\hat{j}+r_{13}\hat{k}\right)\cdot\left(r_{21}\hat{i}+r_{22}\hat{j}+r_{23}\hat{k}\right)=r_{11}r_{21}+r_{12}r_{22}+r_{13}r_{23}=0$$

$$2-\ \left(r_{11}\hat{i}+r_{12}\hat{j}+r_{13}\hat{k}\right)\cdot\left(r_{31}\hat{i}+r_{32}\hat{j}+r_{33}\hat{k}\right)=r_{11}r_{31}+r_{12}r_{32}+r_{13}r_{33}=0$$

$$3-\ \left(r_{21}\hat{i}+r_{22}\hat{j}+r_{23}\hat{k}\right)\cdot\left(r_{31}\hat{i}+r_{32}\hat{j}+r_{33}\hat{k}\right)=r_{21}r_{31}+r_{22}r_{32}+r_{23}r_{33}=0$$

$$4-\ \left(r_{11}\hat{i}+r_{12}\hat{j}+r_{13}\hat{k}\right)\cdot\left(r_{11}\hat{i}+r_{12}\hat{j}+r_{13}\hat{k}\right)=r_{11}r_{11}+r_{12}r_{12}+r_{13}r_{13}=1$$

$$5-\ \left(r_{21}\hat{i}+r_{22}\hat{j}+r_{23}\hat{k}\right)\cdot\left(r_{21}\hat{i}+r_{22}\hat{j}+r_{23}\hat{k}\right)=r_{21}r_{21}+r_{22}r_{22}+r_{23}r_{23}=1$$

$$6-\ \left(r_{31}\hat{i}+r_{32}\hat{j}+r_{33}\hat{k}\right)\cdot\left(r_{31}\hat{i}+r_{32}\hat{j}+r_{33}\hat{k}\right)=r_{31}r_{31}+r_{32}r_{32}+r_{33}r_{33}=1$$

Kolonlar için (K)

$$1-\ \left(r_{11}\hat{i}+r_{21}\hat{j}+r_{31}\hat{k}\right)\cdot\left(r_{12}\hat{i}+r_{22}\hat{j}+r_{32}\hat{k}\right)=r_{11}r_{12}+r_{21}r_{22}+r_{31}r_{32}=0$$

$$2-\ \left(r_{11}\hat{i}+r_{21}\hat{j}+r_{31}\hat{k}\right)\cdot\left(r_{13}\hat{i}+r_{23}\hat{j}+r_{33}\hat{k}\right)=r_{11}r_{13}+r_{21}r_{23}+r_{31}r_{33}=0$$

$$3-\ \left(r_{12}\hat{i}+r_{22}\hat{j}+r_{32}\hat{k}\right)\cdot\left(r_{13}\hat{i}+r_{23}\hat{j}+r_{33}\hat{k}\right)=r_{12}r_{13}+r_{22}r_{23}+r_{32}r_{33}=0$$

$$4-\ \left(r_{11}\hat{i}+r_{21}\hat{j}+r_{31}\hat{k}\right)\cdot\left(r_{11}\hat{i}+r_{21}\hat{j}+r_{31}\hat{k}\right)=r_{11}r_{11}+r_{21}r_{21}+r_{31}r_{31}=1$$

$$5-\ \left(r_{12}\hat{i}+r_{22}\hat{j}+r_{32}\hat{k}\right)\cdot\left(r_{12}\hat{i}+r_{22}\hat{j}+r_{32}\hat{k}\right)=r_{12}r_{12}+r_{22}r_{22}+r_{32}r_{32}=1$$

$$6-\ \left(r_{13}\hat{i}+r_{23}\hat{j}+r_{33}\hat{k}\right)\cdot\left(r_{13}\hat{i}+r_{23}\hat{j}+r_{33}\hat{k}\right)=r_{13}r_{13}+r_{23}r_{23}+r_{33}r_{33}=1$$

Denklem 2.88'deki $R(\hat{K},\theta)$ matrisinin elemanlarını vektörsel ve noktasal çarpım özelliklerinden faydalanarak daha sade bir şekilde yazalım.

<u>11. eleman</u>

$$\left(r_{11}r_{11}+r_{12}r_{12}\right)c\theta+r_{13}r_{13}=\left(1-r_{13}r_{13}\right)c\theta+r_{13}r_{13}$$

$S_4 \rightarrow\ r_{11}r_{11}+r_{12}r_{12}+r_{13}r_{13}=1$ ise $r_{11}r_{11}+r_{12}r_{12}=1-r_{13}r_{13}$

<u>21. eleman</u>

$$\left(r_{21}r_{11}+r_{22}r_{12}\right)c\theta+\left(r_{11}r_{22}-r_{21}r_{12}\right)s\theta+r_{23}r_{13}=r_{13}r_{23}c\theta+r_{33}s\theta+r_{23}r_{13}$$

$S_1 \rightarrow\ r_{11}r_{21}+r_{12}r_{22}+r_{13}r_{23}=0$ ise $r_{11}r_{21}+r_{12}r_{22}=-r_{13}r_{23}$

$V_3 \rightarrow \; r_{11}r_{22} - r_{21}r_{12} = r_{33}$

<u>31. eleman</u>

$$(r_{31}r_{11} + r_{32}r_{12})c\theta + (-r_{31}r_{12} + r_{11}r_{32})s\theta + r_{33}r_{13} = -r_{13}r_{33}c\theta - r_{23}s\theta + r_{33}r_{13}$$

$S_2 \rightarrow \; r_{11}r_{31} + r_{12}r_{32} + r_{13}r_{33} = 0$ ise $r_{11}r_{31} + r_{12}r_{32} = -r_{13}r_{33}$

$V_2 \rightarrow \; r_{23} = r_{31}r_{12} - r_{32}r_{11}$

<u>12. eleman</u>

$$(r_{11}r_{21} + r_{22}r_{12})c\theta + (-r_{11}r_{22} + r_{21}r_{12})s\theta + r_{13}r_{23} = -r_{13}r_{23}c\theta - r_{33}s\theta + r_{13}r_{23}$$

$S_1 \rightarrow \; r_{11}r_{21} + r_{12}r_{22} + r_{13}r_{23} = 0$ ise $r_{11}r_{21} + r_{12}r_{22} = -r_{13}r_{23}$

$V_3 \rightarrow \; r_{33} = r_{11}r_{22} - r_{21}r_{12}$

<u>22. eleman</u>

$$(r_{21}r_{21} + r_{22}r_{22})c\theta + r_{23}r_{23} = (1 - r_{23}r_{23})c\theta + r_{23}r_{23}$$

$S_5 \rightarrow \; r_{21}r_{21} + r_{22}r_{22} + r_{23}r_{23} = 1$ ise $r_{21}r_{21} + r_{22}r_{22} = 1 - r_{23}r_{23}$

<u>32. eleman</u>

$$(r_{31}r_{21} + r_{22}r_{32})c\theta + (-r_{31}r_{22} + r_{21}r_{32})s\theta + r_{33}r_{23} = -r_{23}r_{33}c\theta + r_{13}s\theta + r_{33}r_{23}$$

$S_3 \rightarrow \; r_{21}r_{31} + r_{22}r_{32} + r_{23}r_{33} = 0$ ise $r_{21}r_{31} + r_{22}r_{32} = -r_{23}r_{33}$

$V_1 \rightarrow \; r_{13} = r_{21}r_{32} - r_{31}r_{22}$

<u>13. eleman</u>

$$(r_{11}r_{31} + r_{32}r_{12})c\theta + (-r_{11}r_{32} + r_{31}r_{12})s\theta + r_{13}r_{33} = -r_{13}r_{33}c\theta + r_{23}s\theta + r_{13}r_{33}$$

$S_2 \rightarrow \; r_{11}r_{31} + r_{12}r_{32} + r_{13}r_{33} = 0$ ise $r_{11}r_{31} + r_{12}r_{32} = -r_{13}r_{33}$

$V_2 \rightarrow \; r_{23} = r_{31}r_{12} - r_{32}r_{11}$

<u>23. eleman</u>

$$(r_{21}r_{31} + r_{32}r_{22})c\theta + (-r_{21}r_{32} + r_{31}r_{22})s\theta + r_{23}r_{33} = -r_{23}r_{33}c\theta - r_{13}s\theta + r_{23}r_{33}$$

$S_3 \rightarrow \ r_{21}r_{31} + r_{22}r_{32} + r_{23}r_{33} = 0$ ise $r_{21}r_{31} + r_{22}r_{32} = -r_{23}r_{33}$

$V_1 \rightarrow \ r_{13} = r_{21}r_{32} - r_{31}r_{22}$

33. eleman

$$(r_{31}r_{31} + r_{32}r_{32})c\theta + r_{33}r_{33} = (1 - r_{33}r_{33})c\theta + r_{33}r_{33}$$

S_6. $r_{31}r_{31} + r_{32}r_{32} + r_{33}r_{33} = 1$ ise $r_{31}r_{31} + r_{32}r_{32} = 1 - r_{33}r_{33}$

Elde ettiğimiz bu sadeleştirilmiş elemanlarını $R(\hat{K},\theta)$ matrisinde yerlerine yazalım.

$$R(\hat{K},\theta) = \begin{bmatrix} (1 - r_{13}r_{13})c\theta + r_{13}r_{13} & -r_{13}r_{23}c\theta - r_{33}s\theta + r_{13}r_{23} & .\ . \\ -r_{13}r_{23}c\theta + r_{33}s\theta + r_{23}r_{13} & (1 - r_{23}r_{23})c\theta + r_{23}r_{23} & .\ . \\ -r_{13}r_{33}c\theta - r_{23}s\theta + r_{33}r_{13} & -r_{23}r_{33}c\theta + r_{13}s\theta + r_{33}r_{23} & .\ . \\ 0 & 0 & .\ . \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} .\ . & -r_{13}r_{33}c\theta + r_{23}s\theta + r_{13}r_{33} & 0 \\ .\ . & -r_{23}r_{33}c\theta - r_{13}s\theta + r_{23}r_{33} & 0 \\ .\ . & (1 - r_{33}r_{33})c\theta + r_{33}r_{33} & 0 \\ .\ . & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R(\hat{K},\theta) = \begin{bmatrix} r_{13}r_{13}(1-c\theta) + c\theta & r_{23}r_{13}(1-c\theta) - r_{33}s\theta & r_{33}r_{13}(1-c\theta) + r_{23}s\theta & . \\ r_{13}r_{23}(1-c\theta) + r_{33}s\theta & r_{23}r_{23}(1-c\theta) + c\theta & r_{33}r_{23}(1-c\theta) - r_{13}s\theta & . \\ r_{13}r_{33}(1-c\theta) - r_{23}s\theta & r_{23}r_{33}(1-c\theta) + r_{13}s\theta & r_{33}r_{33}(1-c\theta) + c\theta & . \\ 0 & 0 & 0 & . \end{bmatrix}$$

Hatırlanacağı gibi ${}^{A}\hat{K}$ vektörü ${}^{A}\hat{K} = k_x\hat{i} + k_y\hat{j} + k_z\hat{k} = r_{13}\,\hat{i} + r_{23}\,\hat{j} + r_{33}\,\hat{k}$ şeklinde daha önce ifade edilmişti. Bu ifadeden

$k_x = r_{13}$

$k_y = r_{23}$

$k_z = r_{33}$

elde edilir. Bu ifadeleri yukarıdaki denklemde yerine koyalım.

$$R(\hat{K},\theta)=\begin{bmatrix} k_xk_x(1-c\theta)+c\theta & k_yk_x(1-c\theta)-k_zs\theta & k_zk_x(1-c\theta)+k_ys\theta & 0 \\ k_xk_y(1-c\theta)+k_zs\theta & k_yk_y(1-c\theta)+c\theta & k_zk_y(1-c\theta)-k_xs\theta & 0 \\ k_xk_z(1-c\theta)-k_ys\theta & k_yk_z(1-c\theta)+k_xs\theta & k_zk_z(1-c\theta)+c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Yukarıdaki denklemde $vers\theta=(1-c\theta)$ yani $v\theta=(1-c\theta)$ düzenlemesini yapalım. Bu durumda aşağıdaki gibi daha sade bir ifade elde ederiz.

$$R(\hat{K},\theta)=\begin{bmatrix} k_xk_xv\theta+c\theta & k_xk_yv\theta-k_zs\theta & k_xk_zv\theta+k_ys\theta & 0 \\ k_xk_yv\theta+k_zs\theta & k_yk_yv\theta+c\theta & k_yk_zv\theta-k_xs\theta & 0 \\ k_xk_zv\theta-k_ys\theta & k_yk_zv\theta+k_xs\theta & k_zk_zv\theta+c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.89)$$

Elde ettiğimiz bu denklem son derece önemli bir sonuçtur. Bu sonuçtan faydalanarak ters açı eksen çözümlerini bulabiliriz.

2.11.1. Ters Açı-Eksen Çözümü

Rastgele bir R dönme matrisi verilsin. Bu R dönme matrisini $R(\hat{K},\theta)$ matrisine eşitleyerek $\hat{K}$ ve θ ifadelerini R dönme matrisinin elemanlarının birer fonksiyonu şeklinde yazabiliriz.

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & 0 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix} k_xk_xv\theta+c\theta & k_xk_yv\theta-k_zs\theta & k_xk_zv\theta+k_ys\theta & 0 \\ k_xk_yv\theta+k_zs\theta & k_yk_yv\theta+c\theta & k_yk_zv\theta-k_xs\theta & 0 \\ k_xk_zv\theta-k_ys\theta & k_yk_zv\theta+k_xs\theta & k_zk_zv\theta+c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.90)$$

Her iki matriste de köşegendeki elemanları toplayıp birbirine eşitleyelim.

$$r_{11}+r_{22}+r_{33}+1=k_x^2v\theta+c\theta+k_y^2v\theta+c\theta+k_z^2v\theta+c\theta+1$$

$$r_{11}+r_{22}+r_{33}=(k_x^2+k_y^2+k_z^2)v\theta+3c\theta \quad (\,v\theta=(1-c\theta)\,)$$

$$r_{11}+r_{22}+r_{33}=(1-c\theta)+3c\theta$$

$$r_{11} + r_{22} + r_{33} = 1 + 2c\theta$$

$$c\theta = \frac{1}{2}(r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1) \tag{2.91}$$

Denklem 2.90'da köşegendeki simetrik elemanları bir birinden çıkaralım.

$$r_{32} - r_{23} = 2k_x s\theta$$

$$r_{13} - r_{31} = 2k_y s\theta$$

$$r_{21} - r_{12} = 2k_z s\theta$$

Bu ifadelerden faydalanarak $\hat{K}$ vektörü aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\hat{K} = \frac{1}{2s\theta}\begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix} \tag{2.92}$$

Daha önce elde ettiğimiz $r_{32} - r_{23} = 2k_x s\theta$, $r_{13} - r_{31} = 2k_y s\theta$ ve $r_{21} - r_{12} = 2k_z s\theta$ karelerini alıp yan yana toplayalım.

$$4(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)s^2\theta = (r_{32} - r_{23})^2 + (r_{13} - r_{31})^2 + (r_{21} - r_{12})^2$$

$$4s^2\theta = (r_{32} - r_{23})^2 + (r_{13} - r_{31})^2 + (r_{21} - r_{12})^2$$

$$s\theta = \pm\frac{1}{2}\sqrt{(r_{32} - r_{23})^2 + (r_{13} - r_{31})^2 + (r_{21} - r_{12})^2} \tag{2.93}$$

$\hat{K}$ vektörüyle pozitif bir dönme icra edildiğinde θ açısının $0 \le \theta \le 180°$ arasında çözümü gerçekleştirilmiş olur. Denklem 2.91 ve 2.93'ten faydalanarak,

$$\tan\theta = \frac{s\theta}{c\theta} = \frac{\pm\frac{1}{2}\sqrt{(r_{32} - r_{23})^2 + (r_{13} - r_{31})^2 + (r_{21} - r_{12})^2}}{\frac{1}{2}(r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1)}$$

ifadesini elde ederiz. Bu denklemden faydalanarak

$$\theta = A\tan2(\sqrt{(r_{32} - r_{23})^2 + (r_{13} - r_{31})^2 + (r_{21} - r_{12})^2}, r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1) \tag{2.94}$$

Denklem 2.92'de bulduğumuz $\hat{K}$ vektörünün elemanlarını bulurken $\theta = 0°$ olduğu durumlarda sonuç tanımsız olduğundan bu açılar dönme işlemi gerçekleştirilirken kullanılamaz. $\theta = 0°$ olduğunda denklem 2.91'i hesaplayalım.

$$c\theta = \frac{1}{2}\left(r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1\right)$$

$$c(0) = \frac{1}{2}\left(r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1\right)$$

$$1 = \frac{1}{2}\left(r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1\right)$$

$$r_{11} + r_{22} + r_{33} = 3$$

Aynı şekilde eğer $\theta = 180°$ ise

$$c(180) = \frac{1}{2}\left(r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1\right)$$

$$-1 = \frac{1}{2}\left(r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1\right)$$

$$r_{11} + r_{22} + r_{33} = -1$$

olur. Bu durumda denklem 2.90 aşağıdaki daha sade bir hal alır.

$$R\left(\hat{K}, \theta\right) = \begin{bmatrix} k_x k_x\left(1 - c(180)\right) + c(180) & k_y k_x\left(1 - c(180)\right) - k_z s(180) & .\ . \\ k_x k_y\left(1 - c(180)\right) + k_z s(180) & k_y k_y\left(1 - c(180)\right) + c(180) & .\ . \\ k_x k_z\left(1 - c(180)\right) - k_y s(180) & k_y k_z\left(1 - c(180)\right) + k_x s(180) & .\ . \\ 0 & 0 & .\ . \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} .\ . & k_z k_x\left(1 - c(180)\right) + k_y s(180) & 0 \\ .\ . & k_z k_y\left(1 - c(180)\right) - k_x s(180) & 0 \\ .\ . & k_z k_z\left(1 - c(180)\right) + c(180) & 0 \\ .\ . & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & 0 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k_x^2 - 1 & 2k_x k_y & 2k_x k_z & 0 \\ 2k_x k_y & 2k_y^2 - 1 & 2k_y k_z & 0 \\ 2k_x k_z & 2k_y k_z & 2k_z^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.95}$$

Denklem 2.94'ten faydalanarak $\theta = 180°$ için $\hat{K}$ vektörünün elemanları aşağıdaki gibi bulunur.

$$r_{11} = 2k_x^2 - 1 \text{ ise } k_x = \pm\sqrt{(r_{11}+1)/2}$$

$$r_{21} = 2k_x k_y \quad \text{ise} \quad k_y = r_{21}/2k_x$$

$$r_{31} = 2k_x k_z \quad \text{ise} \quad k_z = r_{31}/2k_x$$

$\hat{K}$ vektörünün elemanlarını bulurken yukarıda elde ettiğimiz ifadelerde k_x, k_y ve k_z elemanları sıfır veya sıfıra çok yakın bir değer almamalıdır. $\hat{K}$ vektörü birim vektör olduğundan bu durumda işlevini kaybeder.

ÖRNEK 2.16

{A} koordinat sistemine bir ${}^{A}\hat{K} = [0.18121 \quad -0.43749 \quad 0.88078]$ vektörü yerleştirilip, bu vektör $\theta = 92.2934$ derece döndürülerek {B} koordinat sistemi elde ediliyor. Bu iki koordinat sistemi arasındaki dönmeyi temsil eden $R_K(\theta)$ matrisini bulunuz.

ÇÖZÜM 2.16

$R_K(\theta)$ matrisini bulmak için aşağıdaki sembolik matrisi yazıp örnekte verilenleri yerine koyalım.

$$R(\hat{K},\theta) = \begin{bmatrix} k_x k_x(1-c\theta)+c\theta & k_y k_x(1-c\theta)-k_z s\theta & k_z k_x(1-c\theta)+k_y s\theta & 0 \\ k_x k_y(1-c\theta)+k_z s\theta & k_y k_y(1-c\theta)+c\theta & k_z k_y(1-c\theta)-k_x s\theta & 0 \\ k_x k_z(1-c\theta)-k_y s\theta & k_y k_z(1-c\theta)+k_x s\theta & k_z k_z(1-c\theta)+c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.18121 \cdot 0.18121 \cdot (1-c(92.3))+c(92.3) & . & . & . \\ 0.18121 \cdot (-0.43749) \cdot (1-c(92.3))+0.88078 \cdot s(92.3) & . & . & . \\ 0.18121 \cdot 0.88078 \cdot (1-c(92.3))+0.43749 \cdot s(92.3) & . & . & . \\ 0 & . & . & . \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} . & -0.43749 \cdot 0.18121 \cdot (1-c(92.3))-0.88078 \cdot s(92.3) & . & . \\ . & -0.43749 \cdot (-0.437490) \cdot (1-c(92.3))+c(92.3) & . & . \\ . & -0.437490 \cdot 0.88078 \cdot 1(1-c(92.3))+0.18121 \cdot s(92.3) & . & . \\ . & 0 & . & . \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} . & . & 0.88078 \cdot 0.18121 \cdot (1 - c(92.3)) - 0.43749 \cdot s(92.3) & 0 \\ . & . & 0.88078 \cdot (-0.43749) \cdot (1 - c(92.3)) - 0.18121 \cdot s(92.3) & 0 \\ . & . & 0.88078 \cdot 0.88078 \cdot (1 - c(92.3)) + c(92.3) & 0 \\ . & . & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -0.0060 & -0.9625 & -0.2711 & 0 \\ 0.7976 & 0.1589 & -0.5819 & 0 \\ 0.6031 & -0.2197 & 0.7668 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.96}$$

ÖRNEK 2.17

{A} koordinat sistemine bir ${}^{A}\hat{K}$ vektörü yerleştirip θ açısıyla döndürülerek {B} koordinat sistemi elde ediliyor. Bu iki koordinat sistemi arasındaki dönmeyi temsil eden $R_K(\theta)$ matrisi aşağıda verildiğine göre ${}^{A}\hat{K}$ vektörünün elemanlarını ve θ açısını bulunuz.

$$R(\hat{K},\theta) = \begin{bmatrix} -0.43561 & -0.68255 & -0.58682 & 0 \\ 0.86116 & -0.12625 & -0.4924 & 0 \\ 0.262 & -0.71985 & 0.64279 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ÇÖZÜM 2.17

Öncelikle Atan2 fonksiyonunu kullanarak θ açısı bulalım.

$$\theta = A\tan2(\sqrt{(r_{32} - r_{23})^2 + (r_{13} - r_{31})^2 + (r_{21} - r_{12})^2}, r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1)$$

$$r_{32} - r_{23} = -0.71985 + 0.4924 = -0.22745$$

$$r_{13} - r_{31} = -0.58682 - 0.262 = -0.84882$$

$$r_{21} - r_{12} = 0.86116 + 0.68255 = 1.54371$$

$$r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1 = -0.91907$$

$$\theta = A\tan2(\sqrt{(-0.22745)^2 + (-0.84882)^2 + (1.54371)^2}, -0.91908)$$

$$\theta = 117.3576 \tag{2.97}$$

${}^{A}\hat{K}$ vektörü ise aşağıdaki gibi bulunur.

$$\hat{K} = \frac{1}{2\sin\theta}\begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{2\sin(117.3576)}\begin{bmatrix} -0.22745 \\ -0.84882 \\ 1.54371 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2\cdot(0.8881)}\begin{bmatrix} -0.22745 \\ -0.84882 \\ 1.54371 \end{bmatrix} = \frac{1}{1.7762}\begin{bmatrix} -0.22745 \\ -0.84882 \\ 1.54371 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -0.128 \\ -0.4779 \\ 0.8609 \end{bmatrix} \tag{2.98}$$

ÖRNEK 2.18

{A} koordinat sistemine bir ${}^{A}\hat{K}$ vektörü yerleştirilip θ açısıyla döndürülerek {B} koordinat sistemi elde ediliyor. Bu iki koordinat sistemi arasındaki dönmeyi temsil eden $R_K(\theta)$ matrisi aşağıda verildiğine göre $R_K(\theta)$ matrisinin bilinmeyen elemanlarını bulunuz.

$$R\left(\hat{K},\theta\right) = \begin{bmatrix} -0.68402 & -0.31665 & r_{13} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & -0.6346 & 0 \\ 0.031882 & r_{32} & r_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ÇÖZÜM 2.18

$R_K(\theta)$ matrisinin özelliklerinden faydalanarak bilinmeyen elemanları bulalım. $r_{11}r_{11} + r_{12}r_{12} + r_{13}r_{13} = 1$ olduğuna göre r_{13} aşağıdaki gibi bulunur.

$$r_{11}r_{11} + r_{12}r_{12} + r_{13}r_{13} = 1$$

$$(-0.68402)(-0.68402) + (-0.31665)(-0.31665) + r_{13}r_{13} = 1$$

$$r_{13}r_{13} = 1 - (-0.68402)(-0.68402) + (-0.31665)(-0.31665)$$

$$r_{13}^2 = 1 - [0.46788 + 0.10027]$$

$$r_{13} = \sqrt{1 - 0.56815} = \sqrt{0.43185} = 0.65715$$

Şimdi de $R_K(\theta)$ matrisindeki $r_{11}r_{11} + r_{21}r_{21} + r_{31}r_{31} = 1$ özelliğinden faydalanarak r_{21} elemanını bulalım.

$$r_{11}r_{11} + r_{21}r_{21} + r_{31}r_{31} = 1$$

$$(-0.68402)(-0.68402) + r_{21}r_{21} + (0.031882)(0.031882) = 1$$

$$r_{21}r_{21} = 1 - (-0.68402)(-0.68402) + (0.031882)(0.031882)$$

$$r_{21}^2 = 1 - (0.46788) + (0.00106)$$

$$r_{21} = \sqrt{1 - 0.46894} = \sqrt{0.53106} = 0.72874$$

Bulduğumuz r_{13} ve r_{21} ifadelerini $R_K(\theta)$ matrisinde yerine koyalım.

$$R\left(\hat{K},\theta\right) = \begin{bmatrix} -0.68402 & -0.31665 & 0.65715 & 0 \\ 0.72874 & r_{22} & -0.6346 & 0 \\ 0.031882 & r_{32} & r_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$R_K(\theta)$ matrisindeki $r_{21}r_{21} + r_{22}r_{22} + r_{23}r_{23} = 1$ özelliğinden faydalanarak r_{22} elemanını bulalım.

$$r_{21}r_{21} + r_{22}r_{22} + r_{23}r_{23} = 1$$

$$(0.72874)(0.72874) + r_{22}r_{22} + (-0.6346)(-0.6346) = 1$$

$$r_{22}r_{22} = 1 - (0.72874)(0.72874) + (-0.6346)(-0.6346)$$

$$r_{22}^2 = 1 - (0.53106) + (0.405)$$

$$r_{22} = \sqrt{1 - 0.93606} = \sqrt{0.06394} = 0.25286$$

Bulduğumuz r_{22} ifadesini $R_K(\theta)$ matrisinde yerine koyalım.

$$R\left(\hat{K},\theta\right)=\begin{bmatrix} -0.68402 & -0.31665 & 0.65715 & 0 \\ 0.72874 & 0.25286 & -0.6346 & 0 \\ 0.031882 & r_{32} & r_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$R_K(\theta)$ matrisindeki $r_{12}r_{12}+r_{22}r_{22}+r_{32}r_{32}=1$ özelliğinden faydalanarak r_{32} elemanını bulalım.

$$r_{12}r_{12}+r_{22}r_{22}+r_{32}r_{32}=1$$

$$(-0.31665)(-0.31665)+(0.25286)(0.25286)+r_{32}r_{32}=1$$

$$r_{32}r_{32}=1-(-0.31665)(-0.31665)+(0.25286)(0.25286)$$

$$r_{32}^2=1-(0.10027)+(0.06393$$

$$r_{32}=\sqrt{1-0.1642}=\sqrt{0.8358}=0.91422$$

Son olarak $R_K(\theta)$ matrisindeki $r_{13}r_{13}+r_{23}r_{23}+r_{33}r_{33}=1$ özelliğinden faydalanarak r_{33} elemanını bulalım.

$$r_{13}r_{13}+r_{23}r_{23}+r_{33}r_{33}=1$$

$$(0.65715)(0.65715)+(-0.6346)(-0.6346)+r_{33}r_{33}=1$$

$$r_{33}r_{33}=1-(0.65715)(0.65715)+(-0.6346)(-0.6346)$$

$$r_{33}^2=1-(0.43185)+(0.40272)$$

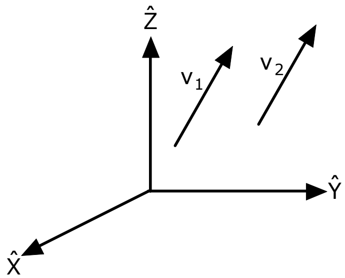
$$r_{33}=\sqrt{1-0.83457}=\sqrt{0.16543}=0.40673$$

Bulduğumuz r_{32} ve r_{33} ifadelerini yerlerine koyunca $R_K(\theta)$ matrisi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$R\left(\hat{K},\theta\right)=\begin{bmatrix} -0.68402 & -0.31665 & -0.65715 & 0 \\ 0.72876 & -0.25727 & -0.6346 & 0 \\ 0.031882 & -0.91299 & 0.40674 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2.99)$$

2.12. Vektörsel Büyüklükler

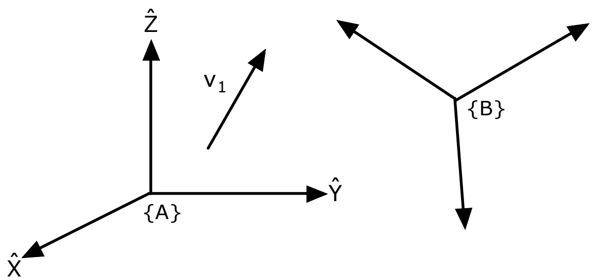
Vektörsel büyüklükler hız, moment, kuvvet ve konum gibi fiziksel büyüklükler olarak ifade edilebilirler. Şu ana kadar konum vektörleri üzerinde durduk. Şimdi ise hız/moment gibi diğer vektörler üzerinde duracağız. Hız ve moment vektörlerine serbest vektörler denir. Serbest vektörler üç boyutlu uzayda başlangıç noktalarından bağımsız olarak taşınabilirler. Şekil 2.44'te görüldüğü gibi iki hız vektörünün büyüklüğü ve doğrultusu aynı olmasına rağmen sadece başlangıç noktaları farklıdır.



Şekil 2.44. Serbest vektörler.

Serbest vektörlerin dönüşümleri gerçekleştirilirken dönüşüm matrisinin içerisinde konum vektörü yer almaz. Dönüşümde sadece dönme matrisi kullanılır. Şekil 2.45'te verilen {A} ve {B} koordinat sistemleri arasındaki dönüşüm matrisi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$
{}^{A}_{B}T = \begin{bmatrix} {}^{A}_{B}R & {}^{A}P_{BORG} \\ 0\ 0\ 0 & 1 \end{bmatrix}
$$



Şekil 2.45. {B} koordinat sistemine göre tanımlanan v_1 hız vektörünün {A} koordinat sistemine göre tanımlanması.

Şekil 2.45'teki {B} koordinat sistemine göre tanımlanan v_1 hız vektörünü {A} koordinat sistemine göre tanımlamak için aşağıdaki denklemden faydalanılır.

$$ {}^{A}V = {}^{A}_{B}R\,{}^{B}V \tag{2.100} $$

İki koordinat sistemi arasında hız tanımlanırken konum ifadesi yer aldığından aşağıdaki denklem kesinlikle kullanılamaz.

$$ {}^{A}V \neq {}^{A}_{B}T\,{}^{B}V $$

Konum ve kuvvet gibi fiziksel büyüklükler çizgi vektörlerdir. Bunların üç boyutlu uzayda taşınmasında başlangıç noktasını içeren dönüşüm matrisi kullanılır.

ÖRNEK 2.19

{A} ve {B} koordinat sistemleri arasındaki ${}^{A}_{B}T$ dönüşüm matrisi, ${}^{B}V$ ve ${}^{B}P$ vektörleri sırasıyla aşağıdaki gibi veriliyor. Buna göre ${}^{A}V$ vektörünü bulunuz.

$$ {}^{A}_{B}T = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.5 & 0 & 11 \\ 0.5 & 0.866 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{B}V = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix} $$

ÇÖZÜM 2.19

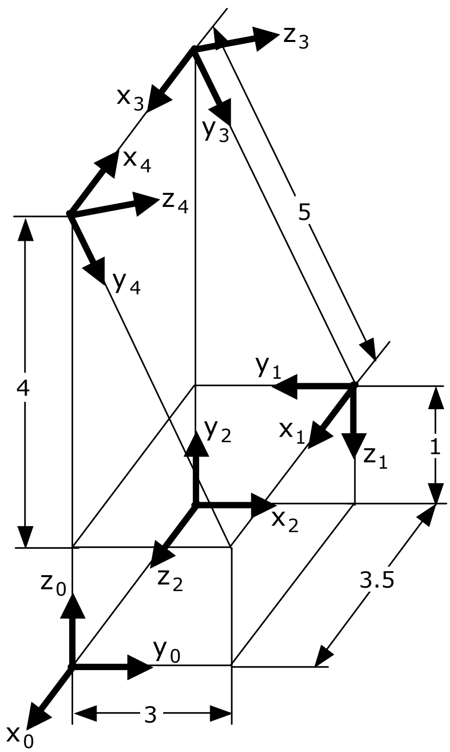
Denklem 2.100'de ki ifadeden faydalanarak ${}^{A}V$ vektörü aşağıdaki gibi bulunur.

$$ {}^{A}V = {}^{A}_{B}R\,{}^{B}V $$

$$ = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.866 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.33 \\ 4.428 \\ 10 \end{bmatrix} $$

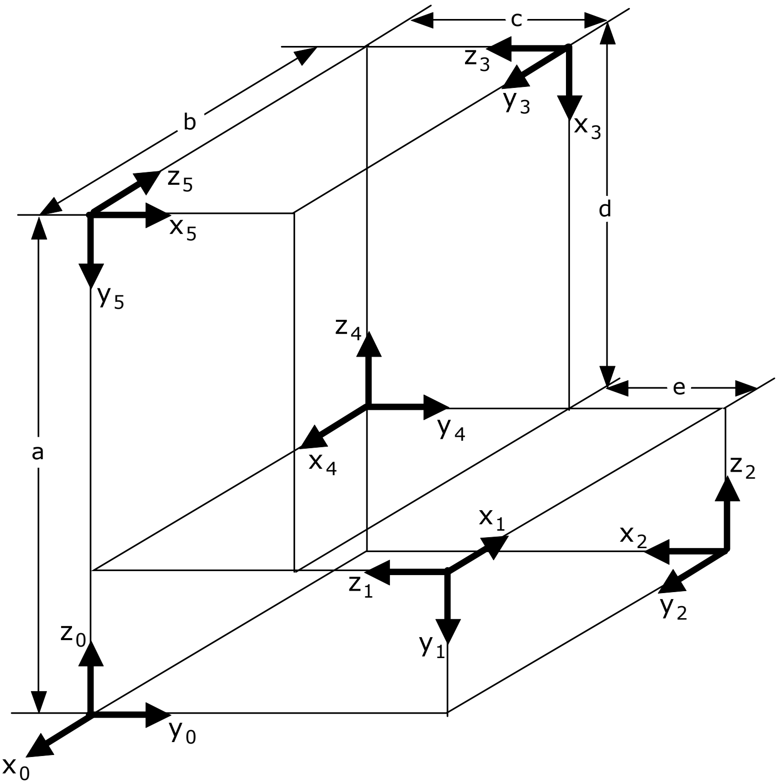
ALIŞTIRMALAR

Soru-1. Şekil 2.46'da {0}, {1}, {2}, {3} ve {4} koordinat sistemleri veriliyor. Buna göre sırasıyla ${}^{0}_{1}T$, ${}^{0}_{2}T$, ${}^{0}_{3}T$, ${}^{0}_{4}T$, ${}^{1}_{2}T$, ${}^{1}_{3}T$, ${}^{1}_{4}T$, ${}^{2}_{3}T$, ${}^{2}_{4}T$ ve ${}^{3}_{4}T$ dönüşüm matrislerini bulunuz.



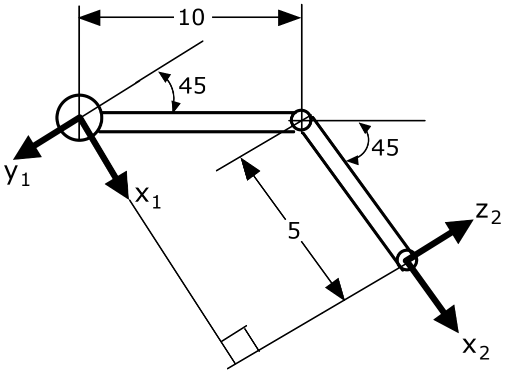
Şekil 2.46. Soru 1 için kullanılacak şekil.

Soru-2. Şekil 2.47'de {0}, {1}, {2}, {3}, {4} ve {5} koordinat sistemleri veriliyor. Buna göre sırasıyla ${}^{0}_{1}T$, ${}^{0}_{2}T$, ${}^{0}_{3}T$, ${}^{0}_{4}T$, ${}^{0}_{5}T$, ${}^{1}_{2}T$, ${}^{1}_{3}T$, ${}^{1}_{4}T$, ${}^{1}_{5}T$, ${}^{2}_{3}T$, ${}^{2}_{4}T$, ${}^{2}_{5}T$, ${}^{3}_{4}T$, ${}^{3}_{5}T$ ve ${}^{4}_{5}T$ dönüşüm matrislerini bulunuz.



Şekil 2.47. Soru 2 için kullanılacak şekil.

Soru-3. Robot bağlantı şekli aşağıdaki gibi verilen bir robotun ${}^{1}_{2}T$ dönüşüm matrisini bulunuz. Bu şekilde Z_1 ve Y_2 sayfanın içine doğru verilmiştir.

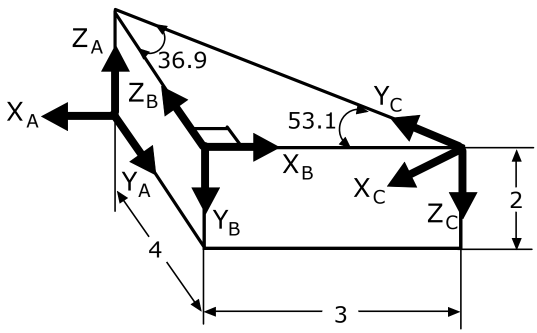


Şekil 2.48. Soru 3 için kullanılacak şekil.

Soru-4. Aşağıdaki gibi bir dönme matrisi veriliyor. Buna göre $\hat{K}$ vektörünü ve θ açısını bulunuz.

$$
{}^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Soru-5. Şekil 2.49'da {A}, {B} ve {C} koordinat sistemleri veriliyor. Buna göre ${}^{A}_{C}T$, ${}^{B}_{C}T$, ${}^{C}_{A}T$ ve ${}^{B}_{A}T$ dönüşüm matrislerini bulunuz.



Şekil 2.49. Soru 5 için kullanılacak şekil.

Soru-6. Bir robot kolu bir cismi tutmak için hareket ettiriliyor. Bu durumda robotun uç işlevcisine yerleştirilen (tool) koordinat sistemi {T} cismin koordinat sistemiyle (goal) {G} üst üste geliyor. Robotun uç işlevcisine yerleştirilen (tool) koordinat sisteminin {T} robotun sabit koordinat sistemi (base) {B} ye göre pozisyonu, $p_x = 0$, $p_y = 30$, $p_z = 20$, ve onun yönelimi veya dönme açıları Z-Y-X Euler açılarına göre aşağıda verilmiştir.

$\alpha = 180^\circ$ $\hat{Z}_B$'ye göre

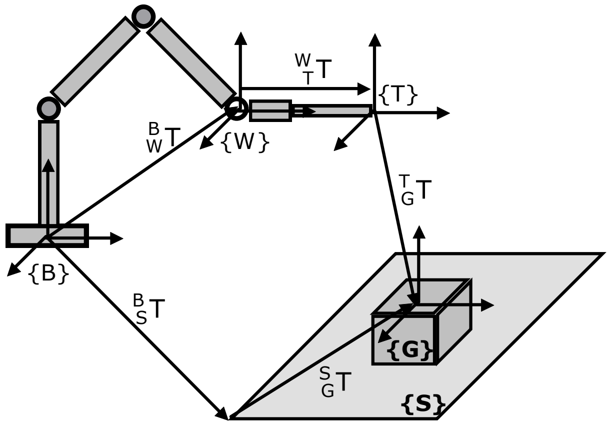
$\beta = 0^\circ$ $\hat{Y}_B$'ye göre

$\gamma = 0^\circ$ $\hat{X}_B$'ye göre

Eğer çalışma ortamının koordinat sistemi {S}'in robotun sabit koordinat sistemi (base) {B}' ye göre dönüşüm matrisi aşağıdaki gibi verilirse,

$$ {}^{B}_{S}T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & -1 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

cismin koordinat sistemiyle (goal) {G} ile çalışma ortamının koordinat sistemi {S} arasındaki dönüşüm matrisi arasındaki ${}^{S}_{G}T$ ilişkisini bulunuz.



Şekil 2.50. Soru 6 için kullanılacak şekil.

Soru-7. Öyle bir robot çalışma ortamı düşünelim ki robot koluna göre cismin koordinat sistemi (goal) {G} zamanla değişim göstersin. Bu durumda robotun sabit koordinat sistemine (base) {B} göre cismin orijinindeki koordinat sisteminin {G} herhangi bir zaman diliminde pozisyonu ve hızı aşağıdaki gibi veriliyor.

$$ {}^{B}P_{GORG} = [2\ 2\ 2]^{T} \text{ ve } {}^{B}V_{GORG} = [5\ 10\ 5]^{T} $$

Eğer robotun sabit koordinat sistemi (base) {B} ile robot kolunun en uç noktası (end-effector) {E} arasındaki dönüşüm matrisi aşağıdaki gibi verilirse

$$ {}^{E}_{B}T = \begin{bmatrix} 0.866 & 0.433 & 0.25 & 3 \\ -0.5 & 0.75 & 0.433 & -3 \\ 0 & -0.5 & 0.866 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Bu durumda ${}^{E}P_{GORG}$ ve ${}^{E}V_{GORG}$' in y bileşenini bulunuz.

Soru-8. Bir robotun uç işlevcisine sabit (Roll-Pitch-Yaw) bir koordinat sistemi yerleştiriliyor. Robotun uç işlevcisi bu sabit koordinat sisteminin eksenleri olan X boyunca γ, Y boyunca β ve tekrar X boyunca α açısıyla döndürülürek aşağıdaki dönme matrisi elde ediliyor. Bu matristen faydalanarak α, β ve γ açılarını bulunuz.

$$R_{XYX} = \begin{bmatrix} 0.4256 & -0.02198 & 0.9046 \\ -0.00936 & -0.99975 & -0.01989 \\ 0.90482 & 0 & -0.42577 \end{bmatrix}$$

Soru-9. Bir robotun uç işlevcisine hareketli bir koordinat sistemi yerleştiriliyor. Öncelikle bu hareketli koordinat sistemi Y ekseni boyunca α açısıyla döndürülür. Dönme sonucu oluşan yeni koordinat sistemi X ekseni boyunca β açısıyla döndürülür. Son olarak, dönme sonucu oluşan yeni koordinat sistemi Z ekseni boyunca γ açısıyla döndürülürek aşağıdaki dönme matrisi elde ediliyor. Bu matristen faydalanarak α, β ve γ açılarını bulunuz.

$${}^{A}_{B}R_{Y'X'Z'} = \begin{bmatrix} -0.8249 & -0.48098 & 0.29697 \\ -0.50396 & 0.38782 & -0.77175 \\ 0.25602 & -0.78628 & -0.56231 \end{bmatrix}$$

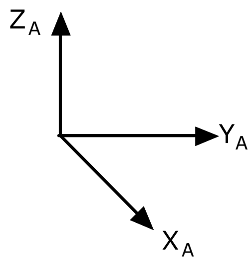
Soru-10. Aşağıda verilen matrisin tersini bulunuz.

$${}^{A}_{B}T = \begin{bmatrix} 0.63167 & -0.28007 & -0.72288 & 7.3619 \\ 0.37037 & -0.71014 & 0.59877 & -27.2488 \\ -0.68104 & -0.64596 & -0.34485 & 56.7125 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Soru-11. ${}^{B}_{C}T$ dönüşüm matrisi aşağıdaki gibi veriliyor. Buna göre ${}^{C}_{B}T$ matrisini bulunuz.

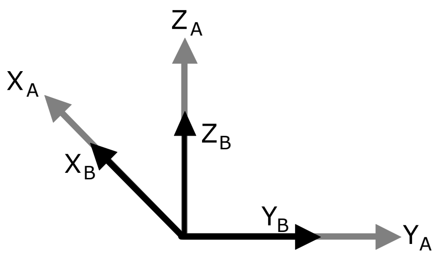
$${}^{B}_{C}T = \begin{bmatrix} -0.26201 & -0.49333 & 0.82944 & 17.9597 \\ 0.37984 & 0.73738 & 0.55856 & -13.321 \\ -0.88717 & 0.46141 & 0.00581 & 22.6795 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Soru-12. Şekil 2.51'de görülen {A} koordinat sisteminin Z eksenine bir P vektörü yerleştirilerek bu vektörle 35^{o} döndürülüyor. Daha sonra, P vektörü yeni durumda oluşan koordinat sisteminin X eksenine yerleştirilerek 48° döndürülüyor. Bu işlemler sonucunda {A} koordinat sisteminde meydana gelen toplam dönmeyi çizerek bir dönüşüm matrisi ile gösteriniz.



Şekil 2.51. Soru 12 için kullanılacak şekil.

Soru-13. Şekil 2.52'de merkezleri çakışık olan {A} ve {B} koordinat sistemleri görülmektedir. {B} koordinat sistemi sırasıyla X_A boyunca 55° Y_A boyunca 123° ve son olarak Z_A boyunca -88° döndürülüyor. X_A , Y_A ve Z_A eksenleri boyunca gerçekleştirilen dönme işlemleri sabit {A} koordinat sistemine göre yapıldığına göre bu işlemlerin sonunda meydana gelen dönme matrisini bulunuz.



Şekil 2.52. Soru 13 için kullanılacak şekil.

Soru-14. Aşağıda ${}^{A}_{B}T$, ${}^{B}_{C}T$ ve ${}^{C}_{D}T$ dönüşüm matrisleri veriliyor. Buna göre ${}^{A}_{D}T$, ${}^{D}_{B}T$ ve ${}^{C}_{A}T$, matrislerini bulunuz.

$$ {}^{A}_{B}T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -20 \\ 0 & 0 & 1 & 58 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{B}_{C}T = \begin{bmatrix} -0.53391 & -0.28315 & 0.79672 & -6.9573 \\ -0.76194 & 0.56963 & -0.30815 & -29.287 \\ -0.36658 & -0.77158 & -0.51988 & 44.782 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{C}_{D}T = \begin{bmatrix} 0.23475 & -0.79459 & 0.55993 & 17.9249 \\ 0.44799 & 0.59964 & 0.66313 & -24.5921 \\ -0.86267 & 0.095169 & 0.49673 & 23.9399 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$