12. Rekurzia

video prezentácia

rekurzia

Už vieme, že opakovať nejaký výpočet môžeme pomocou cyklov, napríklad pomocou for-cyklu alebo while-cyklu. Ďalším spôsobom je **rekurzia**, pri ktorej sa nejaký výpočet opakuje len pomocou volaní podprogramu. Keď budeme chcieť opakovať nejaký výpočet pomocou rekurzie, budeme na to musieť:

- zadefinovať funkciu, pričom v tele tejto funkcie bude výpočet, ktorý chceme opakovať
- potom samotné opakovanie sa bude realizovať volaním funkcie - najčastejšie samej seba.

Uvidíme, že **rekurzívna** funkcia by mala nejako zabezpečiť, aby takéto opakovanie nebolo nekonečné.

Rekurzia sa bude často používať aj na riešenie úloh, ktoré vieme rozložiť na menšie časti a niektoré z týchto (už menších) častí riešime opäť zavolaním samotnej funkcie. Keďže toto druhé (tzv. rekurzívne) volanie už rieši menšiu úlohu, ako bola pôvodná, je šanca, že sa takéto riešenie priblížilo k očakávanému výsledku. Toto je ale už náročnejší pohľad na rekurziu, k nemu sa dopracujeme až po získaní mnohých skúseností.

Aby sme mali šancu lepšie porozumieť mechanizmu rekurzie, pripomeňme si **mechanizmus volania funkcií**, ktorý sme zaviedli na predchádzajúcich prednáškach:

- **zapamätá sa** návratová adresa
- **vytvorí sa** nový menný priestor funkcie
  - v ňom sa vytvárajú lokálne premenné aj parametre
- **vykoná sa** telo funkcie
- po skončení vykonania tela funkcie **sa zruší** menný priestor (aj so všetkými premennými)
- vykonávanie programu **sa vráti** na návratovú adresu

Nekonečná rekurzia

Rekurzia v programovaní teda znamená, že funkcia najčastejšie zavolá samú seba, t.j. že funkcia je definovaná pomocou samej seba. Na prvej ukážke vidíme rekurzívnu funkciu, ktorá nerobí nič iné, len volá samú seba:

```
def xy():
    xy()

xy()
```

Takéto volanie po krátkom čase skončí chybovou správou:

```
...
  [Previous line repeated 1022 more times]
RecursionError: maximum recursion depth exceeded
```

To, že funkcia naozaj volala samú seba, môžeme vidieť, keď popri rekurzívnom volaní urobíme nejakú akciu, napríklad budeme zvyšovať nejakú globálnu premennú:

```
def xy():
    global pocet
```

```
    pocet += 1
    xy()

pocet = 0
xy()

    ...
    RecursionError: maximum recursion depth exceeded
>>> pocet
    1025
```

V tomto prípade program opäť spadne, hoci môžeme vidieť, že sa naozaj zvyšovalo počítadlo. Treba si uvedomiť, že každé zvýšenie počítadla znamená rekurzívne volanie a teda vidíme, že ich bolo vyše tisíc. My už vieme, že každé volanie funkcie (bez ohľadu na to, či je rekurzívna alebo nie) spôsobí, že Python si niekde zapamätá nielen **návratovú adresu**, aby po skončení funkcie vedel, kam sa má vrátiť, ale aj **menný priestor** tejto funkcie. Python má na tieto účely rezervu okolo 1000 vnorených volaní. Ak toto presiahneme, tak sa dozvieme správu `RecursionError: maximum recursion depth exceeded` (hĺbka rekurzívnych volaní presiahla nastavené maximum).

Teraz vyskúšajme rekurzívny program s korytnačkou:

```
import turtle

def xy(d):
    t.fd(d)
    t.lt(60)
    xy(d + 0.3)

turtle.delay(0)
t = turtle.Turtle()
t.speed(0)
xy(1)
```

Po spustení program niečo kreslí, ale aj tak veľmi rýchlo spadne:

```
...
RecursionError: maximum recursion depth exceeded ...
```

Odkrokujme si to:

- v poslednom riadku programu je volanie funkcie `xy(1)` => vytvorí sa parameter `d` (čo je vlastne lokálna premenná), ktorej hodnota je `1`,
- v tele funkcie `xy` sa nakreslí čiara dĺžky `d` a korytnačka sa otočí vľavo o 60 stupňov,
- znovu sa volá funkcia `xy(d + 0.3)`, ale s novou hodnotou parametra `d` na `d + 0.3`, t.j. vytvorí sa nová lokálna premenná `d` (v novom mennom priestore) s hodnotou `1.3`,
- toto sa robí donekonečna - našťastie to časom spadne na preplnení pythonovskej pamäte pre volania funkcií

Informácie o mennom priestore a aj návratovej adrese si Python ukladá v špeciálnej údajovej štruktúre **zásobník**.

Zásobník (stack)

je údajová štruktúra, ktorá má tieto vlastnosti:

- nové prvky pridávame na vrch (napríklad na vrch kopy tanierov, resp. na koniec radu čakajúcich)
- keď potrebujeme zo zásobníka získať nejaký prvok, vždy ho odoberáme z vrchu (odoberáme naposledy položený tanier, resp. posledný v rade čakajúcich)

Odborne sa tomu hovorí **LIFO** (last in first out), teda posledný prišiel, ale ako prvý odišiel - bol obslúžený (zrejme, keby to bol rad napríklad v obchode, tak by sme ho považovali za **nespravodlivý rad**).

Zásobník sa používa na uchovávanie menných priestorov: každé ďalšie volanie funkcie, vytvorí nový menný priestor, ktorý sa uloží na koniec doteraz vytvorených menných priestorov. Keď ale príde ukončenie volania funkcie, z tohto zásobníka sa odstráni naposledy pridávaný menný priestor (hoci sme ho zaradili ako posledný, vybrali sme ho ako prvý, t.j. **LIFO**).

Chvostová rekurzia (nepravá rekurzia)

Aby sme nevytvárali nikdy nekončiace programy, t.j. nekonečnú rekurziu (ktorá aj tak veľmi rýchlo spadne), niekde do tela rekurzívnej funkcie musíme vložiť test, ktorý zabezpečí, že rekurzia predsa len skončí. Keďže rekurzia vlastne slúži na opakovanie výpočtu, budeme musieť nastaviť, kedy (v akých prípadeoch) toto opakovanie, teda rekurzívne volanie, končí. Na začiatok funkcie umiestnime podmienený príkaz `if`, ktorý otestuje, či už nenastal taký **prípad**, že netreba opakovať výpočet aj s rekurzívnym volaním. **V tomto prípade** by možno stačilo vykonať len nejaké „nerekurzívne“ príkazy a skončiť. Zrejme, keď tento test neprejde (nenastal tento špeciálny prípad), vykoná sa pôvodný výpočet a celé sa to opakuje (vďaka rekurzívnemu volaniu).

Takýto špeciálny prípad, keď už nebude potrebné rekurzívne volanie, budeme volať **triviálnym prípadom** („base case“). Môžeme si to predstaviť aj takto: rekurzívna funkcia rieši nejaký komplexný problém a pri jeho riešení volá samu seba (rekurzívne volanie, „recursive case“) väčšinou s nejakými pozmenenými údajmi. V niektorých prípadoch ale rekurzívne volanie na riešenie problému nepotrebujeme, ale vieme to vyriešiť „triviálne“ aj bez nej (riešenie takejto úlohy je už „triviálne“). V takto riešených úlohách vidíme, že sa funkcia skladá z dvoch častí:

- pri splnení nejakej podmienky, sa vykonajú príkazy bez rekurzívneho volania (triviálny prípad),
- inak sa vykonajú príkazy, ktoré v sebe obsahujú rekurzívne volanie:

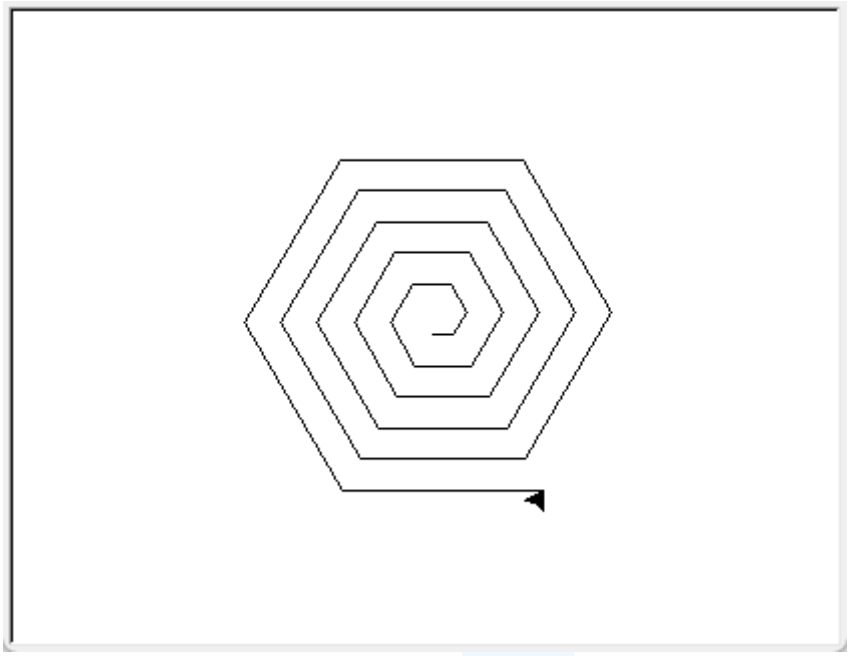
```
def rekurzivna_funkcia(parametre):
    if podmienka:
        triviálny_prípad
    else:
        ...
        rekurzivna_funkcia(nové_parametre)      # rekurzívne volanie
        ...
```

Zrejme, toto má šancu fungovať len vtedy, keď po nejakom čase naozaj nastane podmienka triviálneho prípadu (podmienka, ktorá ukončí opakovanie), napríklad, keď sa budú meniť parametre rekurzívneho volania takým spôsobom, že sa k triviálnemu prípadu (k podmienke) nejako blížime.

V nasledujúcej ukážke môžete vidieť, že rekurzívna špirála sa kreslí tak, že sa najprv nakreslí úsečka dĺžky `d`, korytnačka sa otočí o 60 stupňov vľavo a dokreslí sa špirála s väčšími hodnotami. Toto celé skončí vtedy, keby sme chceli nakresliť špirálu väčšiu ako 100 - takáto špirála sa už nenakreslí. Akciou triviálneho prípadu je tu príkaz `pass` (príkaz označuje *nerob nič*), t.j. žiadna akcia pre príliš veľké špirály:

```
import turtle

def spir(d):
    if d > 100:
        pass     # nerob nič
    else:
        t.fd(d)
        t.lt(60)
        spir(d + 3)

turtle.delay(0)
t = turtle.Turtle()
t.speed(0)
```

```
spir(10)
```



Ručne odkrokujme volanie funkcie `spir(92)`, pritom si zaznačíme, čo sa deje na zásobníku:

- pre volanie `spir(92)`: na zásobníku vznikne nová lokálna premenná `d` s hodnotou 92 … korytnačka nakreslí čiaru, otočí sa a volá `spir()` s parametrom 95,
- pre volanie `spir(95)`: na zásobníku vznikne nová lokálna premenná `d` s hodnotou 95 … korytnačka nakreslí čiaru, otočí sa a volá `spir()` s parametrom 98,
- pre volanie `spir(98)`: na zásobníku vznikne nová lokálna premenná `d` s hodnotou 98 … korytnačka nakreslí čiaru, otočí sa a volá `spir()` s parametrom 101,
- pre volanie `spir(101)`: na zásobníku vznikne nová lokálna premenná `d` s hodnotou 101 … korytnačka už nič nekreslí ani sa nič nevolá … funkcia `spir()` končí, t.j.
    - zabudnú sa všetky lokálne premenné na tejto úrovni, t.j. premenná `d` s hodnotou 101 a riadenie sa vráti za posledné volanie funkcie `spir()` - tá ale končí, t.j.
    - zabudnú sa všetky lokálne premenné na tejto úrovni, t.j. premenná `d` s hodnotou 98 a riadenie sa vráti za posledné volanie funkcie `spir()` - tá ale končí, t.j.
    - zabudnú sa všetky lokálne premenné na tejto úrovni, t.j. premenná `d` s hodnotou 95 a riadenie sa vráti za posledné volanie funkcie `spir()` - tá ale končí, t.j.
    - zabudnú sa všetky lokálne premenné na tejto úrovni, t.j. premenná `d` s hodnotou 92 a riadenie sa vráti za posledné volanie funkcie `spir()` - teda za posledný riadok programu (za riadok `spir(92)`)

Toto nám potvrdia aj kontrolné výpisy vo funkcii:

```
def spir(d):
    print(f'volanie spir({d})')
    if d > 100:
        pass     # nerob nič
        print('... trivialny pripad - nerobim nic')
    else:
        t.fd(d)
        t.lt(60)
        print(f'... rekurzivne volam spir({d + 3})')
        spir(d+3)
        print(f'... navrat z volania spir({d + 3})')

spir(92)
```

```
volanie spir(92)
... rekurzivne volam spir(95)
volanie spir(95)
```

```
... rekurzivne volam spir(98)
volanie spir(98)
... rekurzivne volam spir(101)
volanie spir(101)
... trivialny pripad - nerobim nic
... navrat z volania spir(101)
... navrat z volania spir(98)
... navrat z volania spir(95)
```

Nakoľko rekurzívne volanie funkcie je iba na jednom mieste, za ktorým už nenasledujú ďalšie príkazy funkcie, toto rekurzívne volanie sa dá ľahko prepísať cyklom `while`:

```
def spir(d):
    while d <= 100:
        t.fd(d);
        t.lt(60);
        d = d + 3;
```

Rekurzii, v ktorej za rekurzívnym volaním nie sú ďalšie príkazy, hovoríme **chvostová rekurzia** (najčastejšie jediné rekurzívne volanie je posledným príkazom funkcie). Takáto rekurzia sa dá prepísať na nerekurzívnu funkciu, napríklad pomocou while-cyklu.

Rekurziu môžeme používať nielen pri kreslení pomocou korytnačky, ale napríklad aj pri výpisoch pomocou `print()`. V nasledujúcom príklade vypisujeme vedľa seba čísla `n`, `n-1`, `n-2`, …, `2`, `1`:

```
def vypis(n):
    if n < 1:
        pass               # nerob nič, len skonči
    else:
        print(n, end=', ')
        vypis(n-1)         # rekurzívne volanie

>>> vypis(20)
    20, 19, 18, 17, 16, 15, 14, 13, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1,
```

Zrejme by to bolo veľmi jednoduché prepísať bez použitia rekurzie, napríklad pomocou while-cyklu (alebo for-cyklu). Poexperimentujme, a vymeňme dva riadky: vypisovanie `print()` s rekurzívnym volaním `vypis()`. Po spustení vidíte, že aj táto nová rekurzívna funkcia sa dá prepísať len pomocou while-cyklu (resp. for-cyklu), ale jej činnosť už nemusí byť pre každého na prvý pohľad až tak jasná - odtrasujte túto zmenenú verziu:

```
def vypis(n):
    if n < 1:
        pass       # nerob nič, len skonči
    else:
        vypis(n-1)
        print(n, end=', ')

>>> vypis(20)
    1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20,
```

Táto funkcia chce vypísať prvých `n` čísel. Aby to urobila, najprv vypíše prvých `n-1` čísel (volanie `vypis(n-1)`) a až potom číslo `n` (posledný príkaz `print(n, end=', ')`).

Uvedomte si, že túto rekurzívnu funkciu môžeme zapísať aj takto:

```
def vypis(n):
    if n < 1:
        return      # nerob nič, len skonči
    vypis(n-1)
```

```
    print(n, end=', ')
```

alebo:

```
def vypis(n):
    if n >= 1:
        vypis(n-1)
        print(n, end=', ')
```

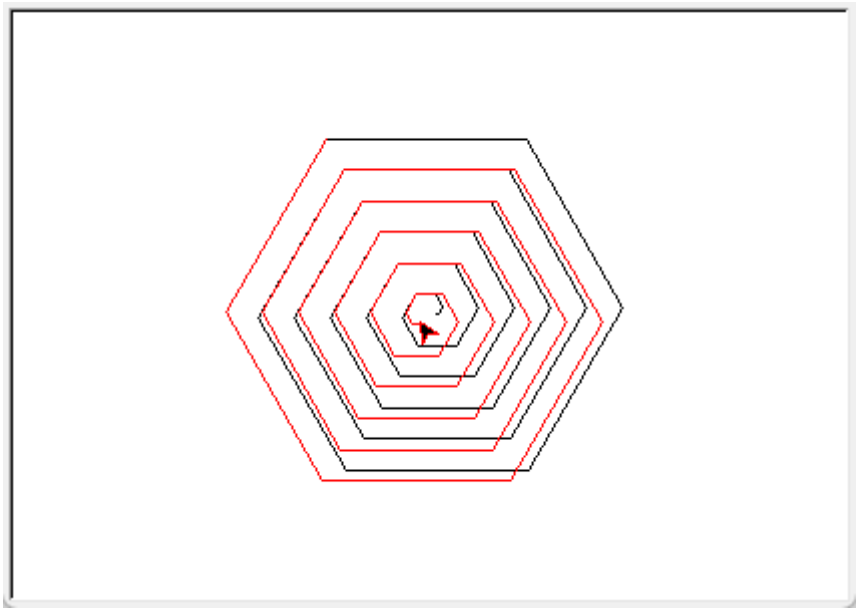
Lenže v týchto zápisoch nie je **triviálny prípad** až tak čitateľný. Preto, kým si na rekurziu nezvykneme a nestane sa pre nás úplne prirodzeným spôsobom riešenia úloh, budeme radšej zvýrazňovať takýto triviálny prípad ako jednu vetvu príkazu `if`.

Pravá rekurzia

Rekurzie, ktoré už nie sú obyčajné chvostové, sú na pochopenie trochu zložitejšie. Pozrime takéto kreslenie špirály:

```
def spir(d):
    if d > 100:
        t.pencolor('red')     # a skonči
    else:
        t.fd(d)
        t.lt(60);
        spir(d + 3)
        t.fd(d)
        t.lt(60)

spir(1)
```

Nejaké príkazy sú pred aj za rekurzívnym volaním. Aby sme to lepšie rozlíšili, triviálny prípad nastaví inú farbu pera:



Aj takéto rekurzívne volanie sa dá prepísať pomocou dvoch cyklov:

```
def spir(d):
    pocet = 0
    while d <= 100:    # čo sa deje pred rekurzívnym volaním
        t.fd(d)
```

```
        t.lt(60)
        d += 3
        pocet += 1
    t.pencolor('red')  # triviálny prípad
    while pocet > 0:   # čo sa deje po vynáraní z rekurzie
        d -= 3
        t.fd(d)
        t.lt(60)
        pocet -= 1
```

Aj v ďalších príkladoch môžete vidieť pravú rekurziu. Napríklad vylepšená funkcia `vypis` vypisuje postupnosť čísel:

```
def vypis(n):
    if n < 1:
        pass                # skonči
    else:
        print(n, end=', ')
        vypis(n - 1)
        print(n, end=', ')

vypis(10)
```

```
10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,
```

Keď ako triviálny prípad pridáme výpis hviezdičiek, toto sa vypíše niekde medzi postupnosť čísel. Viete, kde sa vypíšu tieto hviezdičky?

```
def vypis(n):
    if n < 1:
        print('***', end=', ')         # a skonči
    else:
        print(n, end=', ')
        vypis(n - 1)
        print(n, end=', ')

vypis(10)
```

V ďalších príkladoch s korytnačkou využívame veľmi užitočnú funkciu `poly`:

```
def poly(pocet, dlzka, uhol):
    while pocet > 0:
        t.fd(dlzka)
        t.lt(uhol)
        pocet -= 1
```

Ktorú môžeme cvične prerobiť na rekurzívnu:

```
def poly(pocet, dlzka, uhol):
    if pocet <= 0:
        pass          # nič nerob len skonči
    else:
        t.fd(dlzka)
        t.lt(uhol)
        poly(pocet - 1, dlzka, uhol)
```

čo môžeme zapísať aj takto (porovnajte tento zápis s verziou s while-cyklom):

```
def poly(pocet, dlzka, uhol):
    if pocet > 0:
```

```
        t.fd(dlzka)
        t.lt(uhol)
        poly(pocet - 1, dlzka, uhol)
```

Zistite, čo kreslia funkcie `stvorec` a `stvorec1`:

```
def stvorec(a):
    if a > 100:
        pass          # nič nerob len skonči
    else:
        poly(4, a, 90)
        stvorec(a + 5)

def stvorec1(a):
    if a > 100:
        t.lt(180)       # a skonči
    else:
        poly(4, a, 90)
        stvorec1(a + 5)
        poly(4, a, 90)
```

Všetky tieto príklady s pravou rekurziou by ste mali vedieť jednoducho prepísať bez rekurzie pomocou niekoľkých cyklov.

Faktoriál

V nasledujúcom príklade počítame **faktoriál** prirodzeného čísla `n`. Matematici ho niekedy definujú takto:

- buď je to `1` pre `n=0`
- alebo `n * (n-1) * (n-2) * ... * 2 * 1` pre `n >= 1`

Tu vidíme zapísaný obyčajný cyklus.

Inokedy ale matematici zadefinujú faktoriál `n!` takto:

- `n! = 1` pre `n=0` (už vieme, že je to triviálny prípad)
- `n! = (n-1)! * n` (vidíme rekurzívne volanie)

Prepíšme to rekurzívnou funkciou:

```
def faktorial(n):
    if n == 0:
        return 1
    return faktorial(n-1) * n
```

Triviálnym prípadom je tu úloha, ako vyriešiť `0!`. Toto vieme vyriešiť aj bez rekurzie, lebo je to 1. Ostatné prípady sú už rekurzívne: na to, aby sme vyriešili zložitejší problém (`n` faktoriál), najprv vypočítame jednoduchší (`n-1` faktoriál) - zrejme pomocou rekurzie - a z neho skombinujeme (násobením) požadovaný výsledok. Hoci toto riešenie nie je chvostová rekurzia (po rekurzívnom volaní `faktorial` sa musí ešte násobiť), vieme ho jednoducho prepísať pomocou cyklu. Niekedy sa môžete stretnúť s rekurzívnou verziou faktoriálu, v ktorej je viac ako jeden triviálny prípad:

```
def faktorial(n):
    if n == 0:
        return 1
    if n == 1:
        return 1
    return faktorial(n-1) * n
```

čo sa zvykne zapisovať aj takto zjednodušene:

```
def faktorial(n):
    if n <= 1:
        return 1
    return faktorial(n-1) * n
```

Zrejme táto verzia pokrýva aj záporné `n`. Zamyslite sa, ako sa budú správať predchádzajúce verzie so záporným `n`, napríklad pre `faktorial(-2)`.

Otočenie reťazca

Pozrime ďalšiu jednoduchú rekurzívnu funkciu, ktorá otočí znakový reťazec (zrejme to vieme urobiť aj jednoduchšie pomocou `retazec[::-1]`):

```
def otoc(retazec):
    if len(retazec) <= 1:
        return retazec
    return otoc(retazec[1:]) + retazec[0]

print(otoc('Bratislava'))
print(otoc('Bratislava' * 110))
```

Táto funkcia pracuje na tomto princípe:

- krátky reťazec (prázdny alebo jednoznakový) sa otáča jednoducho: netreba robiť nič, lebo on je zároveň aj otočeným reťazcom, zrejme výsledkom funkcie je samotný reťazec
- dlhšie reťazce otáčame tak, že z neho najprv odtrhneme prvý znak, potom otočíme zvyšok reťazca (to je už kratší reťazec ako pôvodný) a k nemu na koniec prilepíme odtrhnutý prvý znak

Toto funguje dobre, ale veľmi rýchlo narazíme na limity rekurzie: dlhší reťazec ako 1000 znakov už táto rekurzia nezvládne.

Vylepšime tento algoritmus takto:

- reťazec budeme skracovať o prvý aj posledný znak, takýto skrátený reťazec rekurzívne otočíme a tieto dva znaky opäť k reťazcu prilepíme, ale v opačnom poradí: na začiatok posledný znak a na koniec prvý:

```
def otoc(retazec):
    if len(retazec) <= 1:
        return retazec
    return retazec[-1] + otoc(retazec[1:-1]) + retazec[0]

print(otoc('Bratislava'))
print(otoc('Bratislava'*110))
print(otoc('Bratislava'*220))
```

Táto funkcia už pracuje pre približne 1000-znakový reťazec správne, ale opäť nefunguje pre reťazce dlhšie ako 2000.

Ďalšie vylepšenie tohto algoritmu už nie je také zrejmé:

- reťazec rozdelíme na dve polovice (pritom pre nepárnu dĺžku jedna z polovíc môže byť o 1 kratšia ako druhá)
- každú polovicu samostatne otočíme
- tieto dve otočené polovice opäť zlepíme dokopy, ale v opačnom poradí: najprv pôjde druhá polovica a za ňou prvá

```
def otoc(retazec):
    if len(retazec) <= 1:
        return retazec
    stred = len(retazec) // 2
    prva = otoc(retazec[:stred])
    druha = otoc(retazec[stred:])
    return druha + prva

print(otoc('Bratislava'))
print(otoc('Bratislava' * 110))
print(otoc('Bratislava' * 220))
povodny = 'Bratislava' * 100000
r = otoc(povodny)
print(len(r), r == povodny[::-1])
```

Zdá sa, že tento algoritmus už nemá problém s obmedzením na hĺbku vnorenia rekurzie. Zvládol aj 1000000-znakový reťazec.

Vidíme, že pri rozmýšľaní nad rekurzívnym riešením problému je veľmi dôležité správne rozdeliť **veľký** problém na jeden alebo aj viac menších, tie rekurzívne vyriešiť a potom to správne spojiť do jedného výsledku (informatici tomu hovoria *rozdeľuj a panuj*). Pri takomto rozhodovaní funguje matematická intuícia a tiež nemalá programátorská skúsenosť. Hoci nie vždy to ide tak elegantne, ako pri otáčaní reťazca.

Uvedomte si, že toto posledné rekurzívne riešenie prepíšeme na while-cykly len s veľkou programátorskou námahou.

Binomické koeficienty

Ďalší príklad ilustruje využitie rekurzie pri výpočte binomických koeficientov. Vieme, že **binomické koficienty** sa dajú vypočítať pomocou matematického vzorca:

```
bin(n, k) = n! / (k! * (n-k)!)
```

Teda výpočtom nejakých troch faktoriálov a potom ich delením. Pre veľké `n` to môžu byť dosť veľké čísla, napríklad `bin(1000, 1)` potrebuje vypočítať `1000!` a tiež `999!`, čo sú dosť veľké čísla, ale ich vydelením dostávame výsledok len `1000`. Takýto postup počítať binomické koeficienty pomocou faktoriálov asi nie je najvhodnejší.

Tieto koeficienty ale vieme zobraziť aj pomocou **Pascalovho trojuholníka**, napríklad takto:

```
          1
        1   1
      1   2   1
    1   3   3   1
  1   4   6   4   1
1   5  10  10   5   1
```

Každý prvok v tomto trojuholníku zodpovedá `bin(n, k)`, kde `n` je riadok tabuľky a `k` je stĺpec. Pre túto tabuľku poznáme aj takýto vzťah:

```
bin(n, k) = bin(n-1, k-1) + bin(n-1, k)
```

t.j. každé číslo je súčtom dvoch čísel v riadku nad sebou, pričom na kraji tabuľky sú `1`. To je predsa krásna rekurzia, v ktorej kraj tabuľky je triviálny prípad:

```
def bin(n, k):
```

```
    if k == 0 or n == k:
        return 1
    return bin(n-1, k-1) + bin(n-1, k)

for n in range(6):
    for k in range(n+1):
        print(bin(n, k), end=' ')
    print()
```

po spustení:

```
1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
```

Všimnite si, že v tomto algoritme nie je žiadne násobenie iba sčitovanie a ak by sme aj toto sčitovanie previedli na zreťazovanie reťazcov, videli by sme:

```
def bin_retazec(n, k):
    if k == 0 or n == k:
        return '1'
    return bin_retazec(n-1, k-1) + '+' + bin_retazec(n-1, k)

print(bin(6, 3), '=', bin_retazec(6, 3))
```

```
20 = 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1
```

Rekurzívny algoritmus pre výpočet binárnych koeficientov by mohol využívať vlastne len pripočítavanie jednotky.

Fibonacciho čísla

Na podobnom princípe, ako napríklad výpočet faktoriálu, funguje aj **fibonacciho postupnosť** čísel: postupnosť začína dvomi členmi `0, 1`. Každý ďalší člen sa vypočíta ako súčet dvoch predchádzajúcich, teda:

- triviálny prípad: `fib(0) = 0`
- triviálny prípad: `fib(1) = 1`
- rekurzívny popis: `fib(n) = fib(n-1) + fib(n-2)`

Zapíšeme to v Pythone:

```
def fib(n):
    if n < 2:
        return n
    return fib(n-1) + fib(n-2)
```

```
>>> for i in range(15):
        print(fib(i), end=', ')
    0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377,
```

Tento rekurzívny algoritmus je ale **veľmi** neefektívny, napríklad `fib(100)` asi nevypočítate ani na najrýchlejšom počítači.

V čom je tu problém? Veď nerekurzívne je to veľmi jednoduché, napríklad:

```
def fib(n):
```

```
    a, b = 0, 1
    while n > 0:
        a, b = b, a+b
        n -= 1
    return a

for i in range(15):
    print(fib(i), end=', ')

print('\nfib(100) =', fib(100))
```

```
0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377,
fib(100) = 354224848179261915075
```

Pridajme do rekurzívnej verzie funkcie `fib()` globálne počítadlo, ktoré bude počítať počet zavolaní tejto funkcie:

```
def fib(n):
    global pocet
    pocet += 1
    if n < 2:
        return n
    return fib(n-1) + fib(n-2)

pocet = 0
print('fib(15) =', fib(15))
print('pocet volani funkcie =', pocet)
pocet = 0
print('fib(16) =', fib(16))
print('pocet volani funkcie =', pocet)
```

```
fib(15) = 610
pocet volani funkcie = 1973
fib(16) = 987
pocet volani funkcie = 3193
```

Vidíme, že tento počet volaní veľmi rýchlo rastie a je určite väčší ako samotné fibonacciho číslo. Preto aj `fib(100)` by trvalo veľmi dlho (vyše **354224848179261915075** volaní funkcie).

Binárne stromy

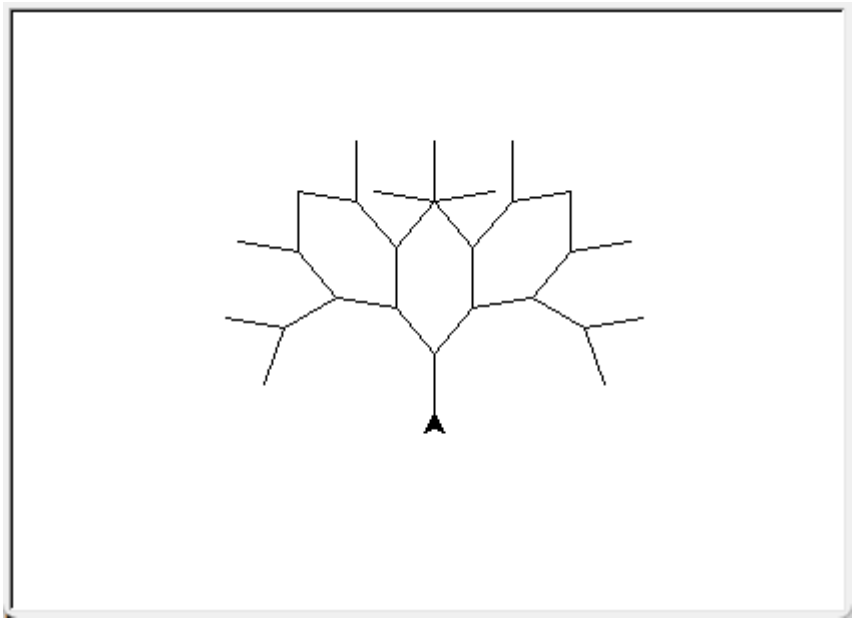
Medzi informatikmi sú veľmi populárne binárne stromy. Rekurzívne kresby binárnych stromov sa najlepšie kreslia pomocou grafického pera korytnačky. Aby sa nám lepšie o binárnych stromoch rozprávalo, zavedieme pojem **úroveň** stromu, t.j. číslo `n`, pre ktoré platí:

- ak je úroveň stromu `n` = 0, nakreslí sa len čiara nejakej dĺžky (kmeň stromu)
- pre `n` >= 1, sa najprv nakreslí čiara, potom sa na jej konci nakreslí najprv **vľavo** celý binárny strom úrovne `(n-1)` a potom **vpravo** opäť binárny strom úrovne `(n-1)` (hovoríme im podstromy) - po nakreslení týchto podstromov sa ešte vráti späť po prvej nakreslenej čiare
- po skončení kreslenia stromu ľubovoľnej úrovne sa korytnačka nachádza na mieste, kde začala kresliť
- ľavé aj pravé podstromy môžu mať buď rovnako veľké konáre ako kmeň stromu, alebo sa môžu v nižších úrovniach (teda v podstromoch) zmenšovať

Úroveň stromu nám hovorí o počte rekurzívnych vnorení pri kreslení stromu (podobne budeme neskôr definovať aj iné rekurzívne obrázky a často budeme pritom používať pojem úroveň).

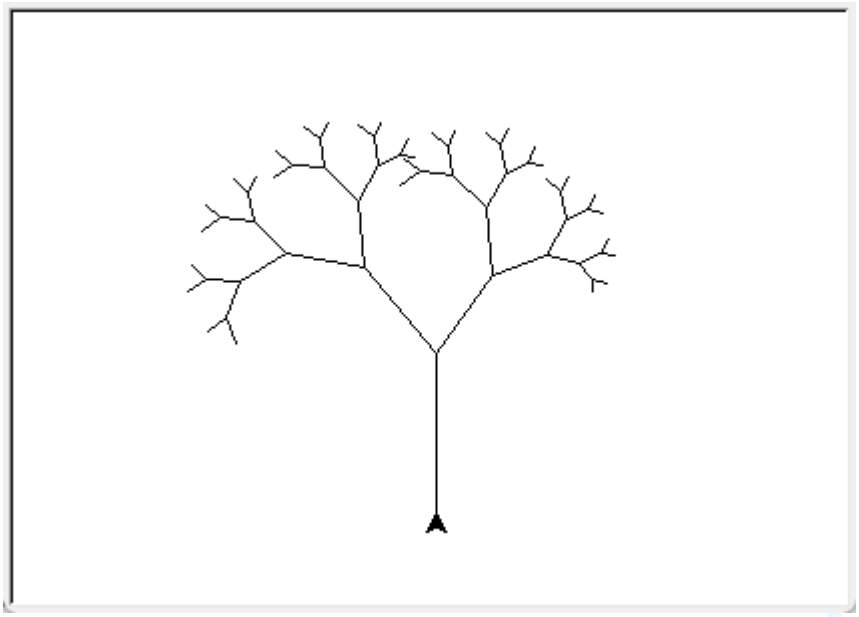
Najprv ukážeme binárny strom, ktorý má vo všetkých úrovniach rovnako veľké podstromy:

```
import turtle

def strom(n):
    if n == 0:
        t.fd(30)        # triviálny prípad
        t.bk(30)
    else:
        t.fd(30)
        t.lt(40)        # natoč sa na kreslenie ľavého podstromu
        strom(n-1)      # nakresli ľavý podstrom (n-1). úrovne
        t.rt(80)        # natoč sa na kreslenie pravého podstromu
        strom(n-1)      # nakresli pravý podstrom (n-1). úrovne
        t.lt(40)        # natoč sa do pôvodného smeru
        t.bk(30)        # vráť sa na pôvodné miesto

t = turtle.Turtle()
t.lt(90)
strom(4)
```



Binárne stromy môžeme rôzne vylepšovať, napríklad vetvy stromu sa vo vyšších úrovniach môžu rôzne skracovať, uhol o ktorý je natočený ľavý a pravý podstrom môže byť tiež rôzny. V tomto riešení si všimnite, kde je skrytý triviálny prípad rekurzie:

```
import turtle

def strom(n, d):
    t.fd(d)
    if n > 0:
        t.lt(40)
        strom(n-1, d*0.7)
        t.rt(75)
        strom(n-1, d*0.6)
        t.lt(35)
    t.bk(d)

t = turtle.Turtle()
t.lt(90)
strom(5, 80)
```



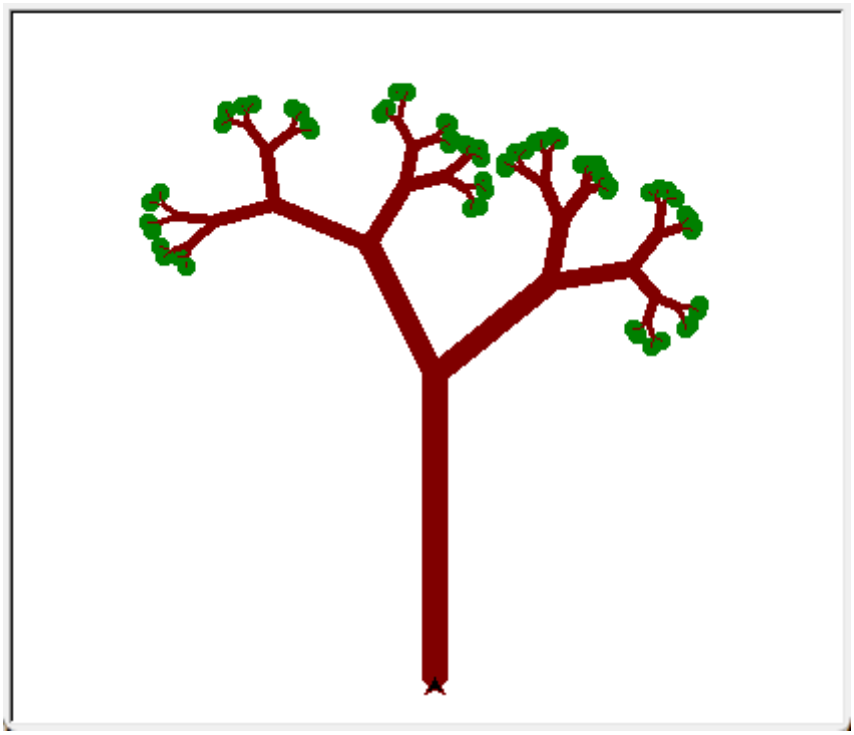
Algoritmus binárneho stromu môžeme zapísať aj bez parametra `n`, ktorý určuje úroveň stromu. V tomto prípade rekurzia končí, keď sú kreslené úsečky príliš malé:

```
import turtle

def strom(d):
    t.fd(d)
    if d > 5:
        t.lt(40)
        strom(d*0.7)
        t.rt(75)
        strom(d*0.6)
        t.lt(35)
    t.bk(d)

turtle.delay(0)
t = turtle.Turtle()
t.lt(90)
strom(80)
```

Ak využijeme náhodný generátor, môžeme vytvárať stromy, ktoré budú navzájom rôzne:

```
import turtle
import random

def strom(n, d):
    t.pensize(2*n + 1)
    t.fd(d)
    if n == 0:
        t.dot(10, 'green')
    else:
        uhol1 = random.randint(20, 40)
        uhol2 = random.randint(20, 60)
        t.lt(uhol1)
        strom(n-1, d * random.randint(40, 70) / 100)
        t.rt(uhol1 + uhol2)
        strom(n-1, d * random.randint(40, 70) / 100)
        t.lt(uhol2)
    t.bk(d)

turtle.delay(0)
t = turtle.Turtle()
t.lt(90)
t.pencolor('maroon')
```

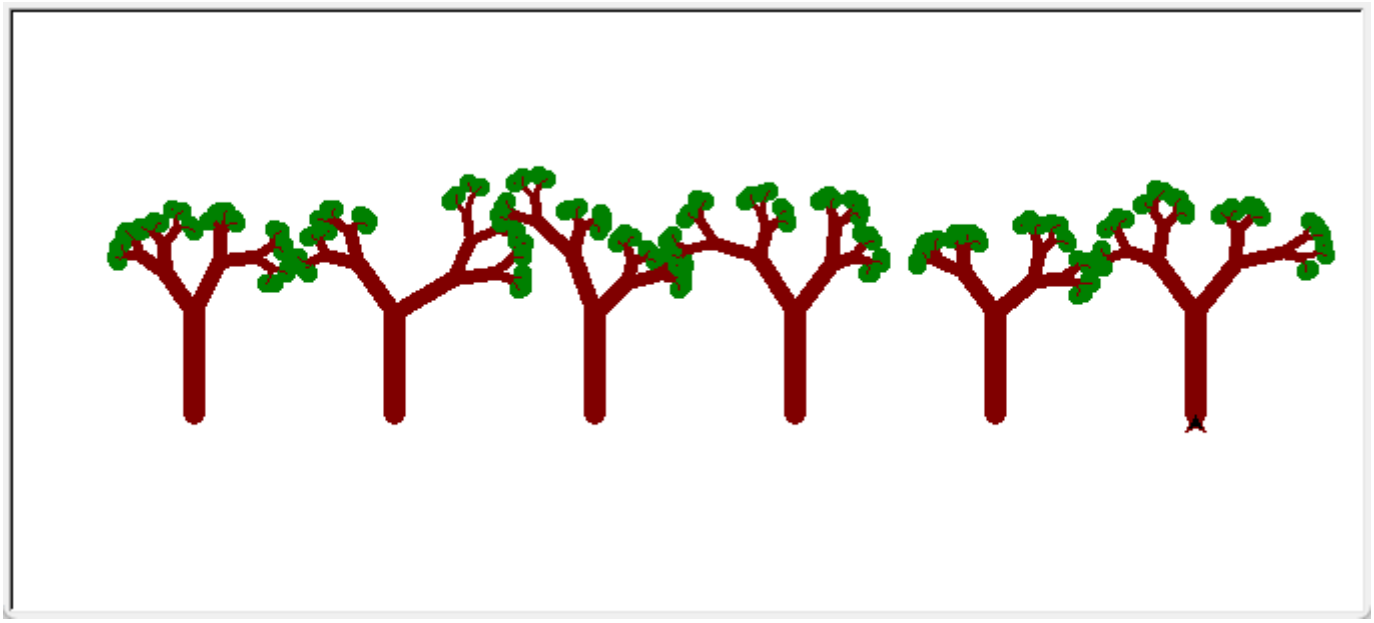
```
strom(6, 150)
```



V tomto riešení si všimnite, kde sme zmenili hrúbku pera, aby sa strom kreslil rôzne hrubý v rôznych úrovniach. Tiež sa tu na posledných „konároch“ nakreslili zelené listy - pridali sme ich v triviálnom prípade. Využili sme tu korytnačiu metódu `t.dot(veľkosť, farba)`, ktorá na pozícii korytnačky nakreslí bodku danej veľkosti a farby.

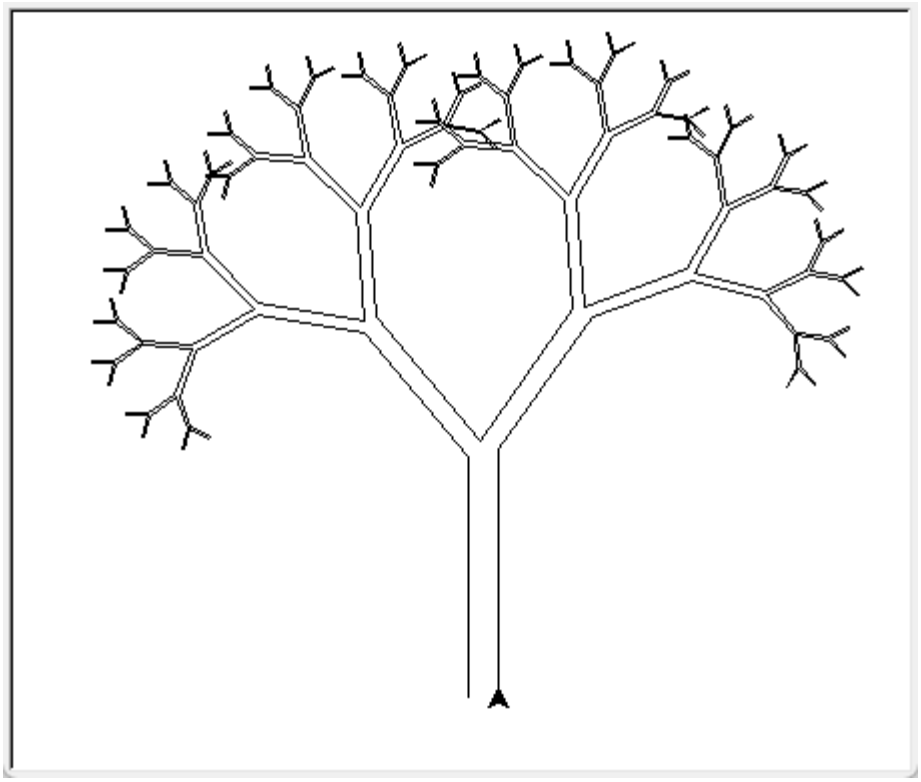
Každé spustenie tohto programu nakreslí trochu iný strom. Môžeme vytvoriť celú alej stromov, v ktorej bude každý strom trochu iný:

```
import turtle
import random

def strom(n, d):
    t.pensize(2*n + 1)
    t.fd(d)
    if n == 0:
        t.dot(10, 'green')
    else:
        uhol1 = random.randint(20, 40)
        uhol2 = random.randint(20, 60)
        t.lt(uhol1)
        strom(n-1, d * random.randint(40, 70) / 100)
        t.rt(uhol1 + uhol2)
        strom(n-1, d * random.randint(40, 70) / 100)
        t.lt(uhol2)
    t.bk(d)

turtle.delay(0)
t = turtle.Turtle()
t.speed(0)
t.lt(90)
t.pencolor('maroon')
for i in range(6):
    t.pu()
    t.setpos(100*i - 250, -50)
    t.pd()
    strom(5, 50)
```



V nasledujúcom riešení vzniká zaujímavý efekt tým, že v triviálnom prípade urobí korytnačka malý úkrok vpravo a teda sa nevracia po tých istých čiarach a preto sa ani nevráti presne na to isté miesto, kde štartovala kresliť (pod)strom. Táto „chybička“ sa stále zväčšuje a zväčšuje, až pri nakreslení kmeňa stromu je už dosť veľká:

```
import turtle

def strom(n, d):
    t.fd(d)
    if n == 0:
        t.rt(90)
        t.fd(1)
        t.lt(90)
    else:
        t.lt(40)
        strom(n-1, d*0.67)
        t.rt(75)
        strom(n-1, d*0.67)
        t.lt(35)
    t.bk(d)

turtle.delay(0)
t = turtle.Turtle()
t.lt(90)
strom(6, 120)
```

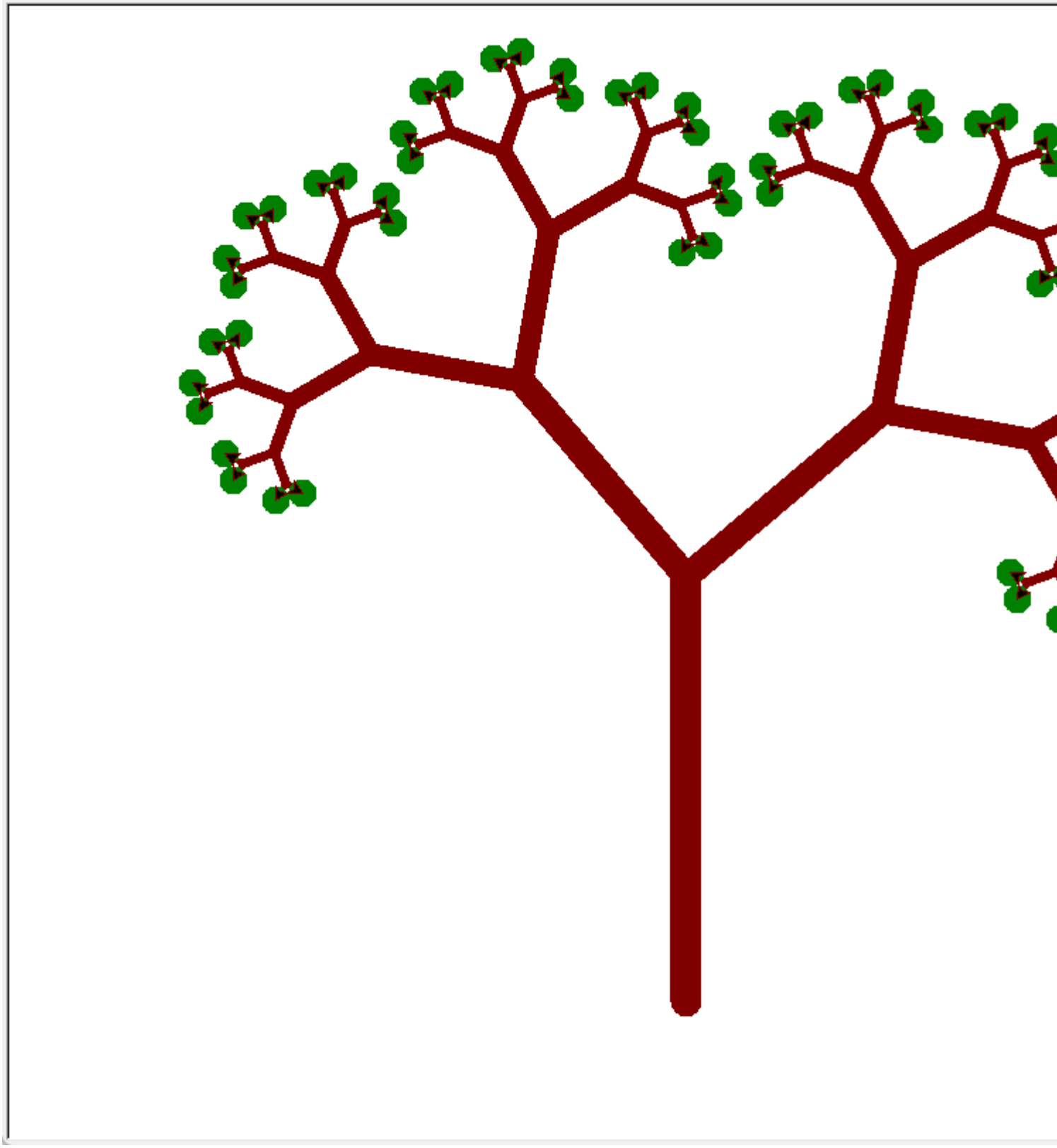


Binárny strom sa dá nakresliť viacerými spôsobmi aj nerekurzívne. V jednom z nich využijeme zoznam korytnačiek, pričom každá z nich po nakreslení jednej úsečky „narodí“ na svojej pozícii ďalšiu korytnačku (vytvorí svoju kópiu), pričom ju ešte trochu otočí. Idea algoritmu je takáto:

- prvá korytnačka nakreslí kmeň stromu - prvú úsečku dĺžky `d`
- na jeho konci (na momentálnej pozícii tejto korytnačky) sa vyrobí jedna nová korytnačka, s novým relatívnym natočením o 40 stupňov vľavo (pripravuje sa, že bude kresliť ľavý podstrom) a sama sa otočí o 50 stupňov vpravo (pripravuje sa, že bude kresliť pravý podstrom)
- dĺžka `d` sa zníži napríklad na `d` * 0.6
- všetky korytnačky teraz prejdú v svojom smere dĺžku `d` (nakreslia úsečku dĺžky `d`) a opäť sa na ich koncových pozíciách vytvoria nové korytnačky otočené o 40 a samé sa otočia o 50 stupňov, a `d` sa opäť zníži
- toto sa opakuje `n` krát a takto sa nakreslí kompletný strom

```
import turtle

def nova(pos, heading):
    t = turtle.Turtle()
    #t.speed(0)
    #t.ht()
    t.pu()
    t.setpos(pos)
    t.seth(heading)
    t.pd()
    return t

def strom(n, d):
    pole = [nova([0, -300], 90)]
    for i in range(n):
        for j in range(len(pole)):
            t = pole[j]
            t.pensize(3*n - 3*i + 1)
            t.pencolor('maroon')
            t.fd(d)
```

```
            if i == n-1:
                t.dot(20, 'green')
            else:
                pole.append(nova(t.pos(), t.heading()+40))
                t.rt(50)
        d *= 0.6

    print('pocet korytnaciek =', len(pole))

# turtle.delay(0)
strom(7, 300)
```



Pre korytnačky na poslednej úrovni sa už ďalšie nevytvárajú, ale na ich koncoch sa nakreslí zelená bodka. Program na záver vypíše celkový počet korytnačiek, ktoré sa takto vyrobili (je ich presne toľko, koľko je zelených bodiek ako listov stromu). Všimnite si pomocnú funkciu `nova()`, ktorá vytvorí novú korytnačku a nastaví jej novú pozíciu aj smer natočenia. Funkcia ako výsledok vráti túto novovytvorenú korytnačku. V tomto prípade program vypísal:

```
pocet korytnaciek = 64
```

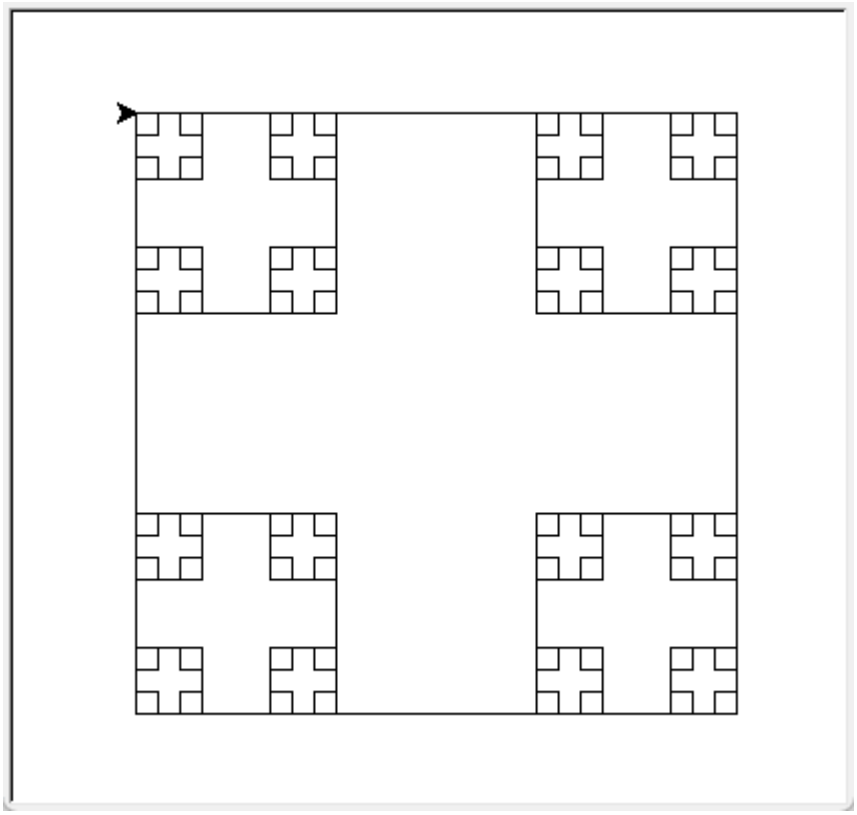
Ďalšie rekurzívne obrázky

Napíšeme funkciu, ktorá nakreslí obrázok `stvorce` úrovne `n`, veľkosti `a` s týmito vlastnosťami:

- pre `n` = 0 nekreslí nič
- pre `n` = 1 kreslí štvorec so stranou dĺžky `a`
- pre `n` > 1 kreslí štvorec, v ktorom v každom jeho rohu (smerom dnu) je opäť obrázok `stvorce` ale už zmenšený: úrovne `n`-1 a veľkosti `a`/3

Štvorce v každom rohu štvorca:

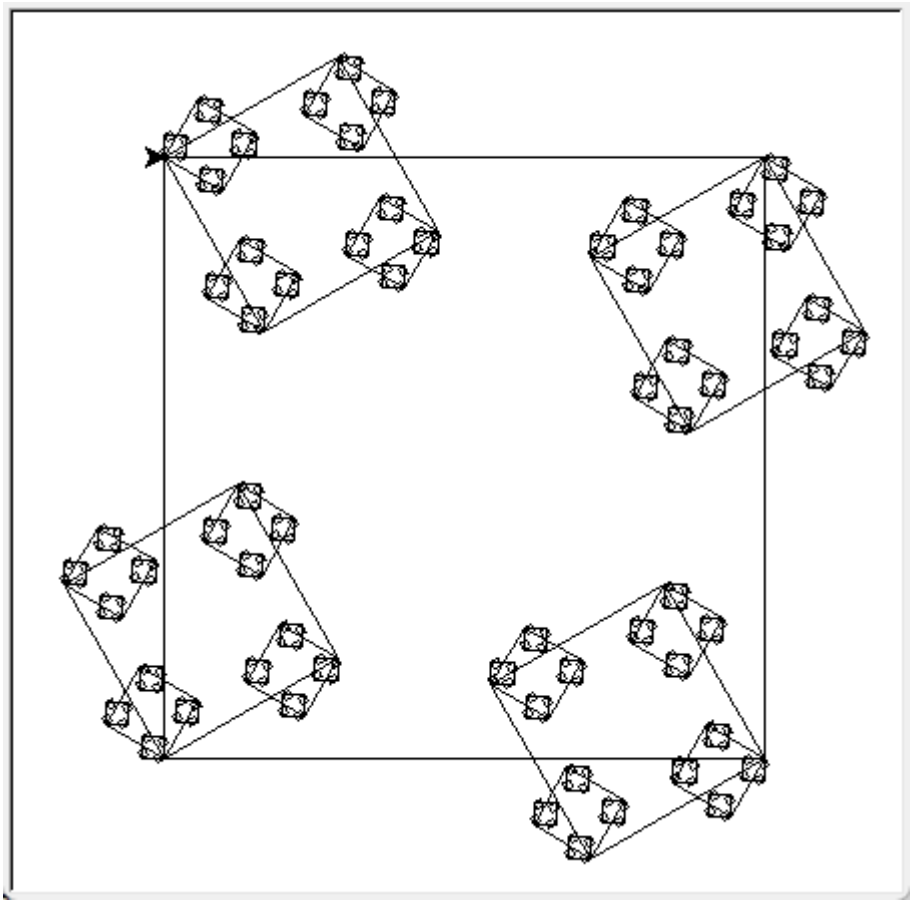
```
import turtle

def stvorce(n, a):
    if n == 0:
        pass
    else:
        for i in range(4):
            t.fd(a)
            t.rt(90)
            stvorce(n-1, a/3)
            # skúste: stvorce(n-1, a*0.45)

turtle.delay(0)
t = turtle.Turtle()
stvorce(4, 300)
```



Uvedomte si, že toto nie je chvostová rekurzia.

Tesne pred rekurzívnym volaním otočíme korytnačku o 30 stupňov a po návrate z rekurzie týchto 30 stupňov vrátime:

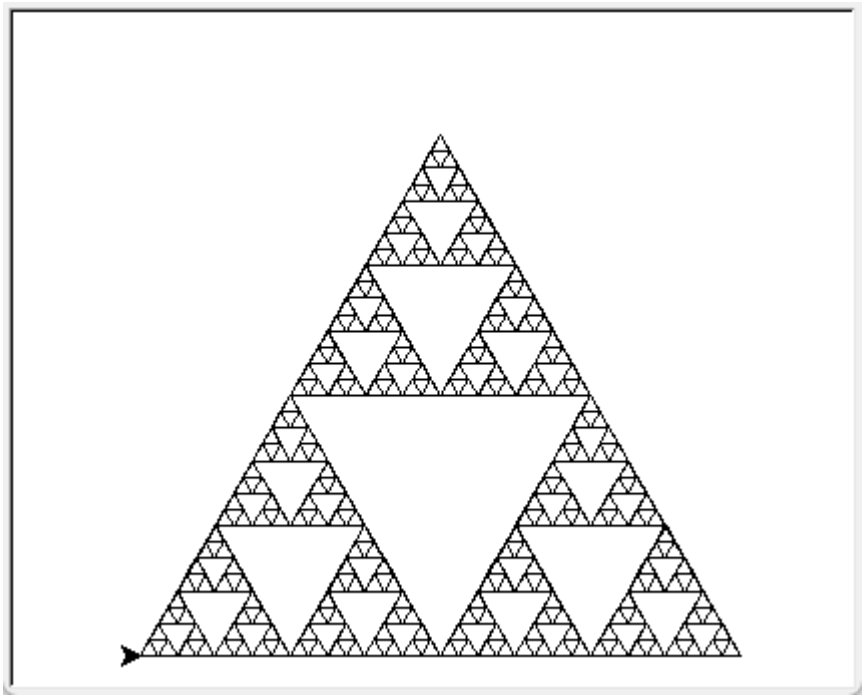
```
import turtle

def stvorce(n, d):
    if n > 0:
        for i in range(4):
            t.fd(d)
            t.rt(90)
            t.lt(30)
            stvorce(n-1, d/3)
            t.rt(30)

turtle.delay(0)
t = turtle.Turtle()
t.speed(0)
stvorce(5, 300)
```



Sierpiňského trojuholník

Rekurzívny obrázok na rovnakom princípe ako boli vnorené štvorce ale trojuholníkového tvaru navrhol poľský matematik Sierpiňský ešte v roku 1915:

```
import turtle

def trojuholniky(n, a):
    if n > 0:
        for i in range(3):
            t.fd(a)
            t.lt(120)
            trojuholniky(n-1, a/2)

turtle.delay(0)
t = turtle.Turtle()
#t.speed(0)
trojuholniky(6, 300)
```

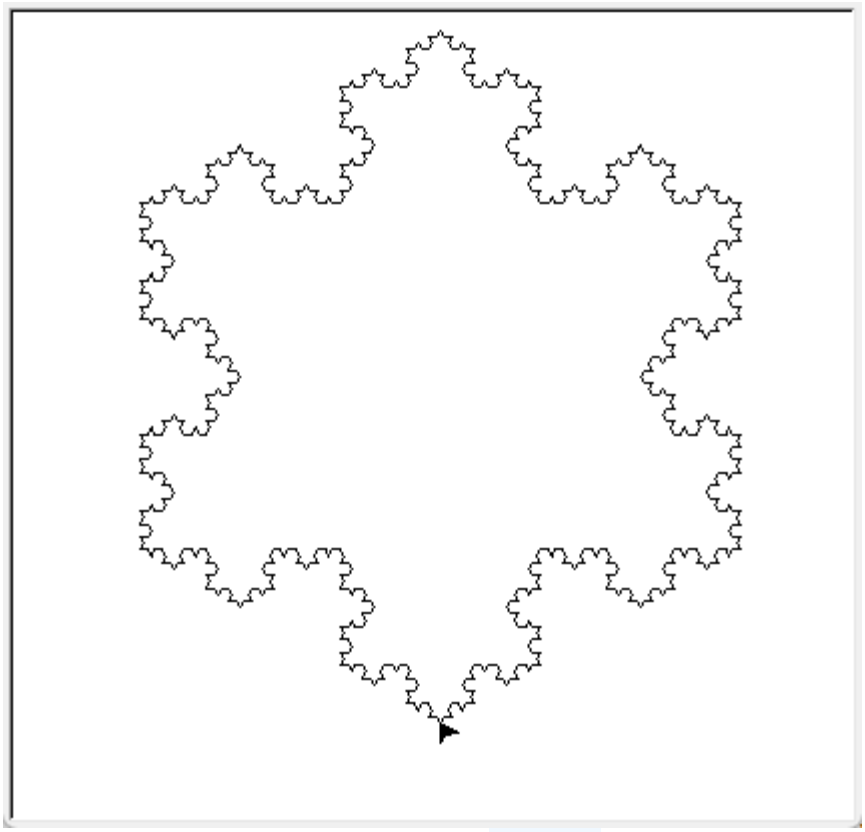


Zaujímavé je to, že táto rekurzívna krivka sa dá nakresliť aj jedným ťahom (po každej čiare sa prejde len raz). Porozmýšľajte ako.

Snehová vločka

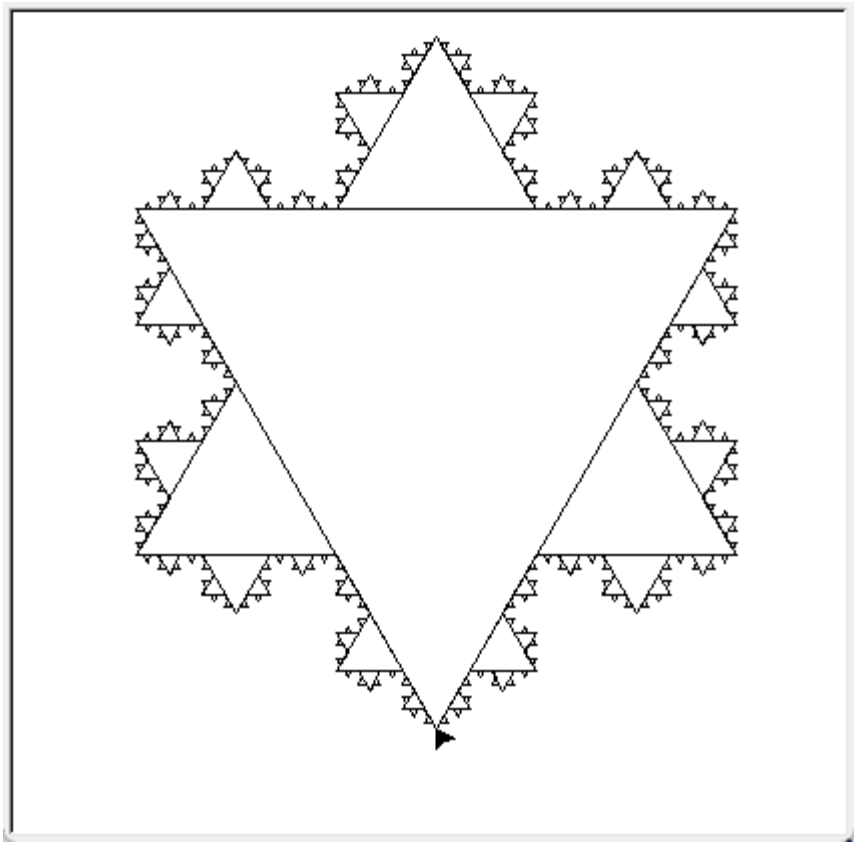
Ďalej ukážeme veľmi známu rekurzívnu krivku - snehovú vločku (známu tiež ako Kochova krivka):

```
import turtle

def vlocka(n, d):
    if n == 0:
        t.fd(d)
    else:
        vlocka(n-1, d/3)
        t.lt(60)
        vlocka(n-1, d/3)
        t.rt(120)
        vlocka(n-1, d/3)
        t.lt(60)
        vlocka(n-1, d/3)

def sneh_vlocka(n, d):
    for i in range(3):
        vlocka(n, d)
        t.rt(120)

turtle.delay(0)
t = turtle.Turtle()
t.speed(0)
t.lt(120)
sneh_vlocka(4, 300)
```



Ak namiesto jedného volania funkcie `vlocka()` zapíšeme nakreslenie aj všetkých predchádzajúcich úrovní krivky, dostávame tiež zaujímavú kresbu:

```
import turtle

def vlocka(n, d):
    if n == 0:
        t.fd(d)
    else:
        vlocka(n-1, d/3)
        t.lt(60)
        vlocka(n-1, d/3)
        t.rt(120)
        vlocka(n-1, d/3)
        t.lt(60)
        vlocka(n-1, d/3)

def sneh_vlocka(n, d):
    for i in range(3):
        vlocka(n, d)
        t.rt(120)

turtle.delay(0)
t = turtle.Turtle()
#t.speed(0)
t.lt(120)
for i in range(5):
    sneh_vlocka(i, 300)
```



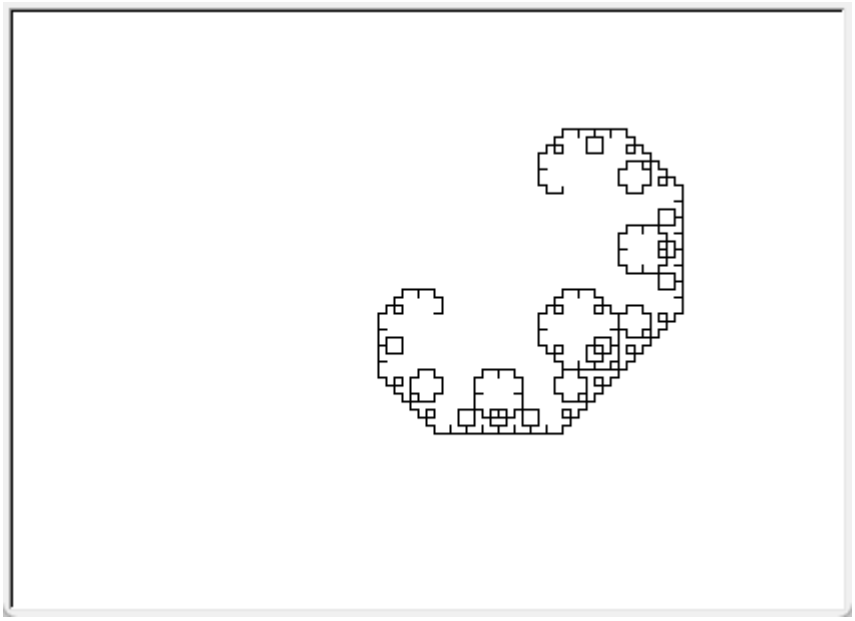
Ďalšie fraktálové krivky

Špeciálnou skupinou rekurzívnych kriviek sú fraktály (pozri aj na wikipédii). Už pred érou počítačov sa s nimi „hrali“ aj významní matematici (niektoré krivky podľa nich dostali aj svoje meno, aj snehová vločka je fraktálom a vymyslel ju švédsky matematik Koch). Zjednodušene by sme mohli povedať, že fraktál je taká krivka, ktorá sa skladá z viacerých svojich zmenšených kópií. Keby sme sa na nejakú jej časť pozreli lupou, videli by sme opäť skoro tú istú krivku. Napríklad aj binárne stromy a aj snehové vločky sú fraktály.

C-krivka

Začneme veľmi jednoduchou, tzv. C-krivkou:

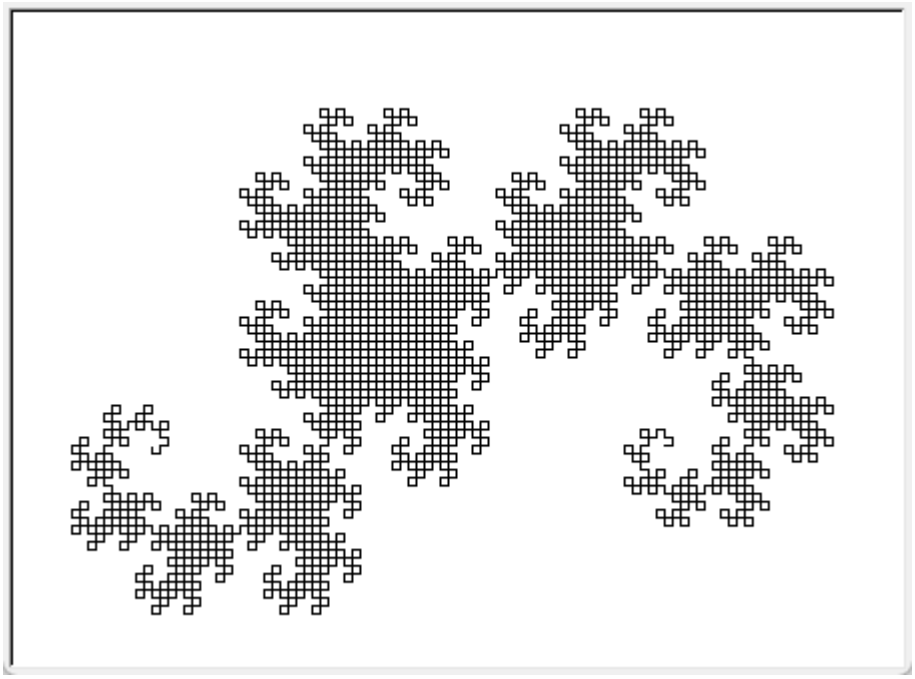
```
import turtle

def ckrivka(n, s):
    if n == 0:
        t.fd(s)
    else:
        ckrivka(n-1, s)
        t.lt(90)
        ckrivka(n-1, s)
        t.rt(90)

turtle.delay(0)
t = turtle.Turtle()
t.speed(0)
t.ht()
ckrivka(9, 4)    # skúste aj: ckrivka(13, 2)
```



Dračia krivka

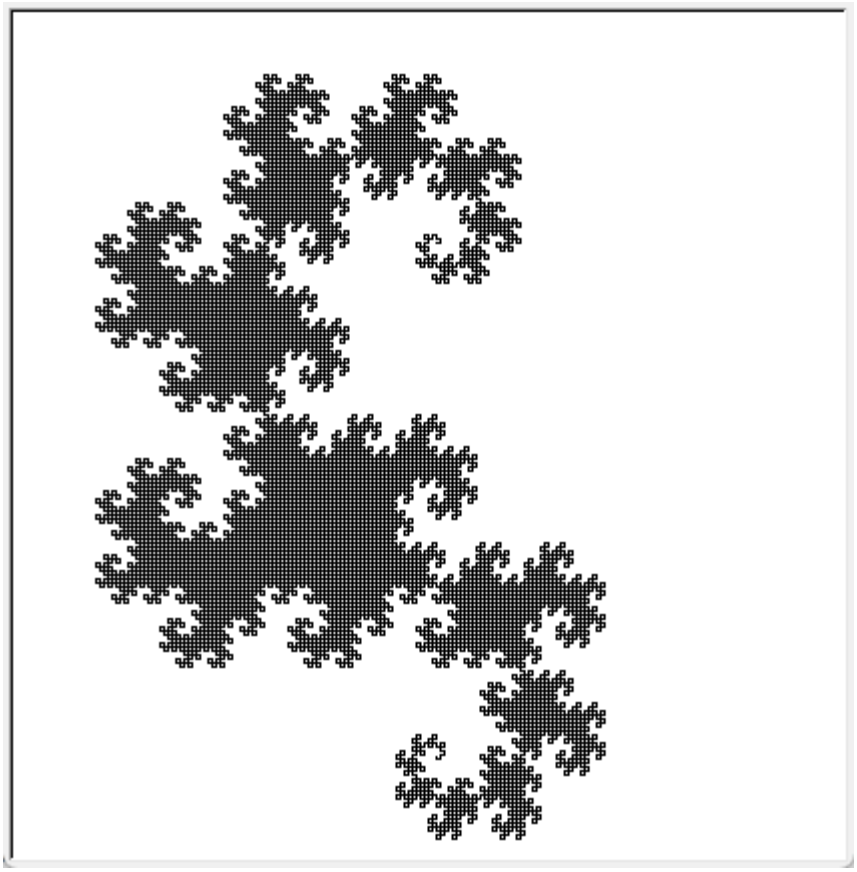
C-krivke sa veľmi podobá Dračia krivka, ktorá sa skladá z dvoch „zrkadlových“ funkcií: `ldrak` a `pdrak`. Všimnite si zaujímavú vlastnosť týchto dvoch rekurzívnych funkcií: prvá rekurzívne volá samu seba ale aj druhú a druhá volá seba aj prvú. Našťastie Python toto zvláda veľmi dobre:

```
import turtle

def ldrak(n, s):
    if n == 0:
        t.fd(s)
    else:
        ldrak(n-1, s)
        t.lt(90)
        pdrak(n-1, s)

def pdrak(n, s):
    if n == 0:
        t.fd(s)
    else:
        ldrak(n-1, s)
        t.rt(90)
        pdrak(n-1, s)

turtle.delay(0)
t = turtle.Turtle()
t.speed(0)
t.ht()
ldrak(12, 6)
```



Dračiu krivku môžeme nakresliť aj len jednou funkciou - táto bude mať o jeden parameter `u` viac a to, či je to ľavá alebo pravá verzia funkcie:

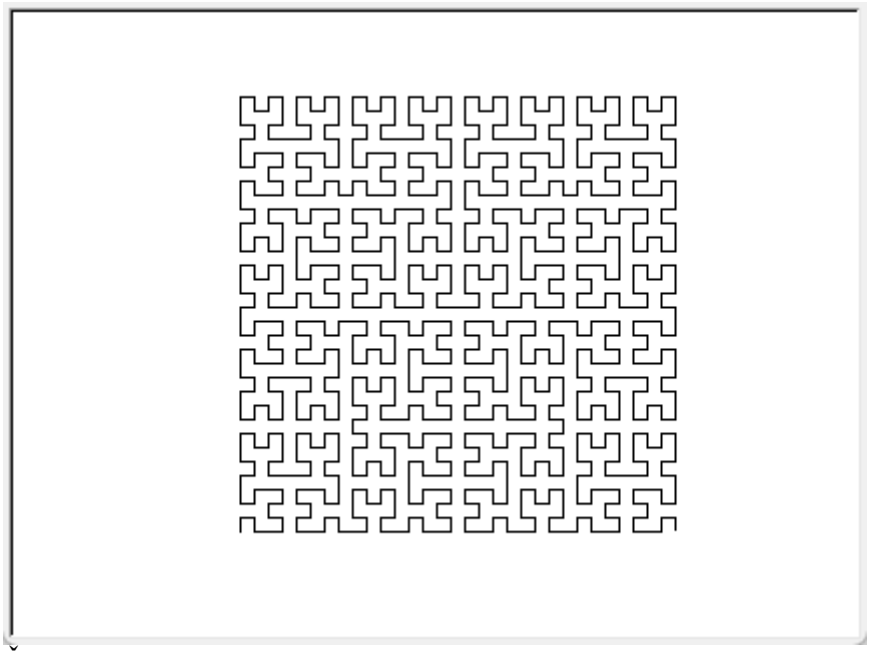
```
import turtle

def drak(n, s, u=90):
    if n == 0:
        t.fd(s)
    else:
        drak(n-1, s, 90)
        t.lt(u)
        drak(n-1, s, -90)

turtle.delay(0)
t = turtle.Turtle()
t.speed(0)
t.ht()
drak(14, 2)
```



Hilbertova krivka

V literatúre je veľmi známou Hilbertova krivka, ktorá sa tiež skladá z dvoch zrkadlových častí (ako dračia krivka) a preto ich definujeme jednou funkciou a parametrom `u` (t.j. uhol pre ľavú a pravú verziu):

```
import turtle

def hilbert(n, s, u=90):
    if n > 0:
        t.lt(u)
        hilbert(n-1, s, -u)
        t.fd(s)
        t.rt(u)
        hilbert(n-1, s, u)
        t.fd(s)
        hilbert(n-1, s, u)
        t.rt(u)
        t.fd(s)
        hilbert(n-1, s, -u)
        t.lt(u)

turtle.delay(0)
t = turtle.Turtle()
t.speed(0)
t.ht()
hilbert(5, 7)          # vyskúšajte: hilbert(7, 2)
```



Ďalšie inšpirácie na rekurzívne krivky môžete nájsť na wikipédii.

Cvičenia

L.I.S.T.

- riešenia **aspoň 12 úloh** odovzdaj na úlohový server https://list.fmph.uniba.sk/
- pozri si Riešenie úloh 12. cvičenia

1. Napíš rekurzívnu funkciu `mocnina(n, k)`, ktorá vypočíta `n**k` pre celé nezáporné `k` len pomocou násobenia:
   - `mocnina(n, 0)` = 1
   - `mocnina(n, k)` = `mocnina(n, k-1) * n`

   Funkciu otestuj, napríklad pre `mocnina(2, 900)` a porovnaj s `2**900`.

2. Rekurzívne riešenie predchádzajúcej funkcie `mocnina(n, k)` môžeš vylepšiť, ak máme povolené použiť okrem násobenia aj umocňovanie na `2` (čo je opäť len násobením so samým sebou):
   - `mocnina(n, 0)` = 1
   - `mocnina(n, k)` = `mocnina(n, k//2) ** 2` … pre párne `k`
   - `mocnina(n, k)` = `mocnina(n, k-1) * n` … pre nepárne `k`

   Funkciu otestuj, napríklad pre `mocnina(2, 10000)` a porovnaj s `2**10000`.

3. Napíš rekurzívnu funkciu `palindrom(retazec)`, ktorá zistí (vráti `True` alebo `False`), či je zadaný reťazec **palindrom**, t.j. či sa číta rovnako od začiatku ako od konca. Pri tomto zisťovaní sa ignorujú medzery a nerozlišujú sa malé a veľké písmená, napríklad:

```
>>> palindrom('Jelenovi Pivo Nelej')
    True
```

   Rekurzia by mala pracovať na takomto princípe: porovná prvé a posledné písmeno a ak sú zhodné ešte zistí, či aj reťazec bez prvého a posledného písmena je palindrom.

4. Zapíš funkciu `nsd(a, b)` (najväčší spoločný deliteľ) rekurzívne: triviálny prípad je vtedy, keď `a==b`, inak ak `a>b`, tak rekurzívne vypočíta `nsd(b, a)`, inak rekurzívne zavolá `nsd(a, b-a)`. Otestuj, napríklad:

```
>>> nsd(40, 24)
    8
```

   Funkcia `nsd` sa dá urýchliť tak, že namiesto odčitovania sa nejako využije zvyšok po delení. Oprav túto funkciu.

5. Napíš rekurzívnu funkciu `sucet(zoznam)`, ktorá bez cyklov zistí súčet prvkov zoznamu. Prvkami sú len celé čísla. Otestuj, napríklad:

```
>>> sucet([2, 4, 6, 8])
    20
>>> sucet([])
    0
>>> sucet(list(range(500)))
    124750
```

   Otestuj aj `sucet(list(range(2000)))`. Ak tento test spadol na pretečení rekurzie, inšpiruj sa riešením funkcie `otoc` z prednášky.

6. Napíš rekurzívnu funkciu `sucet2(zoznam)`, ktorá bez cyklov zistí súčet záporných prvkov zoznamu a súčet kladných prvkov zoznamu. Prvkami sú len celé čísla. Funkcia vráti dvojicu (`tuple`): tieto dva súčty. Otestuj, napríklad:

```
>>> sucet2([0, 1, -2, 3, 4, -5, -6, 7])
    (-13, 15)
>>> sucet2(list(range(100)) + list(range(0, -100, -1)))
    (-4950, 4950)
>>> sucet2([0]*1000+[1]+[0]*1000+[-1]+[0]*1000)
    (-1, 1)
```

7. Nasledovná funkcia kreslí binárny strom:

```
import turtle

def strom(d):
    t.fd(d)
    if d > 20:
        t.lt(40)
        strom(d * 0.7)
        t.rt(90)
        strom(d * 0.6)
        t.lt(50)
    t.fd(-d)

turtle.delay(0)
t = turtle.Turtle()
t.speed(0)
t.lt(90)
t.pu()
t.setpos(0, -200)
t.pd()
zoznam = []
strom(150)
```

Doplň do tejto rekurzívnej funkcie triviálny prípad rekurzie tak, aby sa na všetkých pozíciách listov stromu vytvorili nové korytnačky. Tieto korytnačky ulož do globálnej premennej `zoznam`. Po nakreslení stromu by malo fungovať:

```
for p in zoznam:
    p.color('green')
    p.shape('turtle')
while True:
    for p in zoznam:
        p.lt(15)
```

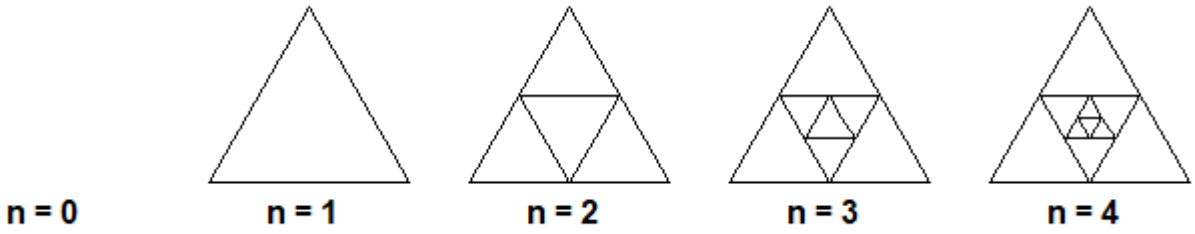
Na strome v pozíciách listov sa zobrazia malé zelené korytnačky a tieto sa budú otáčať na mieste.

8. Funkcia `kmit(a)` kreslí stále dlhšie nadväzujúce úsečky:

```
import turtle

def kmit(a):
    if a > 230:
        pass
    else:
        t.fd(a)
        t.rt(170)
        t.fd(a+5)
        t.lt(170)
        kmit(a+10)
        pass

t = turtle.Turtle()
t.pu()
t.setpos(-250, 0)
t.pd()
t.lt(85)
kmit(100)
```

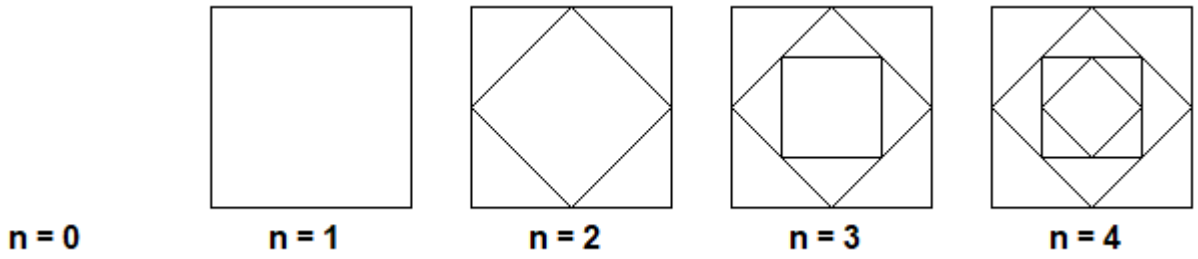
Nahraď oba príkazy `pass` tak, aby sa po nakreslení všetkých čiar tieto spätne prefarbili na šedo (`'lightgray'`), teda pri návrate z rekurzie sa prejde po tých istých čiarach znovu ale inou farbou.

9. Rekurzívna krivka je popísaná takýmto predpisom:



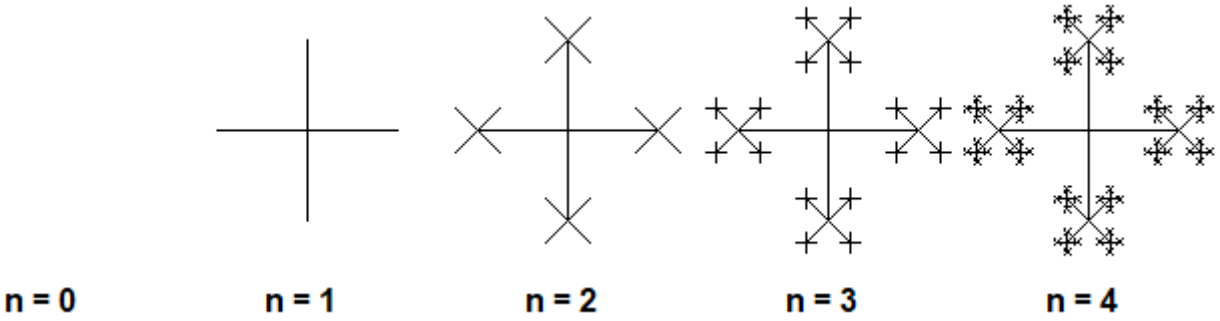
Napíš funkciu `vpisane3(n, a)`, v ktorej prvý parameter `n` označuje úroveň vnorenia trojuholníkov, druhý parameter `a` veľkosť vonkajšieho trojuholníka. Pre `n = 0` funkcia nekreslí nič.

10. Rekurzívna krivka je popísaná takýmto predpisom:



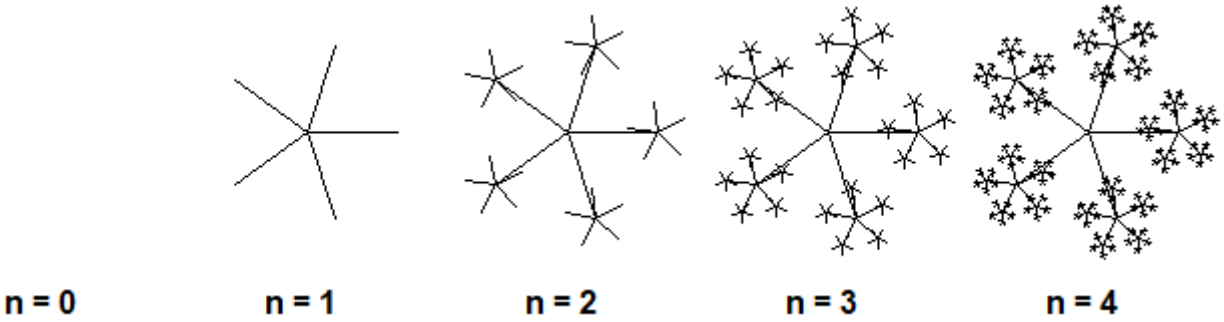
Napíš funkciu `vpisane4(n, a)`, v ktorej prvý parameter `n` označuje úroveň vnorenia štvorcov, druhý parameter `a` veľkosť vonkajšieho štvorca. Pre `n = 0` funkcia nekreslí nič.

11. Rekurzívna krivka je popísaná takýmto predpisom:



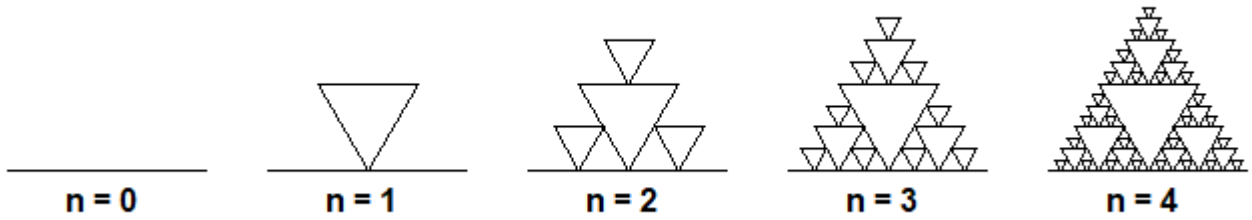
Napíš funkciu `kriziky4(n, a)`, v ktorej prvý parameter `n` označuje úroveň krivky, druhý parameter `a` dĺžku ramena kríža. Na všetkých piatich obrázkov je rovnaké `a`. Vnorené krížiky majú tretinovú dĺžku. Pre `n = 0` funkcia nekreslí nič.

12. Rekurzívna krivka je popísaná takýmto predpisom:



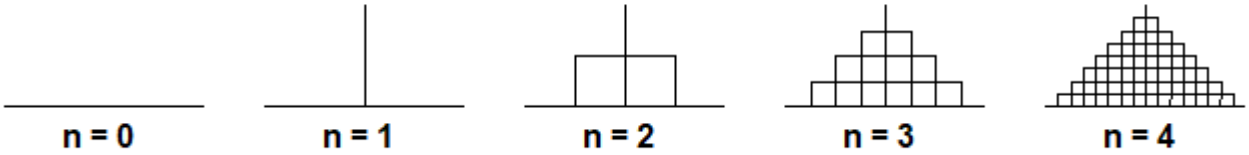
Napíš funkciu `kriziky(n, a, pocet)`, v ktorej prvý parameter `n` označuje úroveň krivky, druhý parameter `a` dĺžku ramena kríža. Tretí parameter `pocet` označuje počet ramien kríža - na obrázku je `pocet = 5`. Predchádzajúca krivka `kriziky4` by sa dala nakresliť aj touto funkciou pre `pocet = 4`.

13. Rekurzívna krivka je popísaná takýmto predpisom:



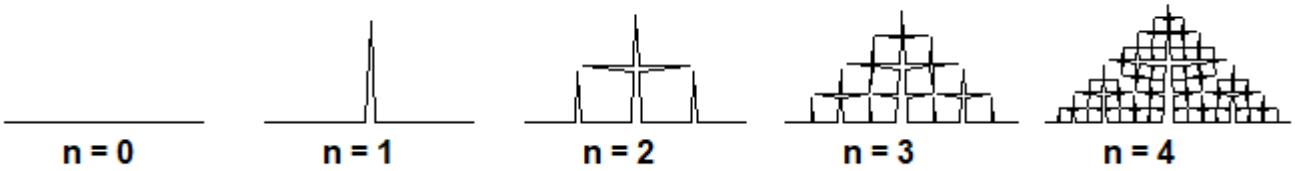
Napíš funkciu `troj3(n, a)`, v ktorej prvý parameter `n` označuje úroveň krivky, druhý parameter `a` veľkosť obrázka (dĺžka spodnej hrany). Na všetkých piatich obrázkov je rovnaké `a`.

14. Rekurzívna krivka je popísaná takýmto predpisom:



Napíš funkciu `pyramida(n, a)`, v ktorej prvý parameter `n` označuje úroveň krivky, druhý parameter `a` veľkosť obrázka (dĺžka spodnej hrany). Na všetkých piatich obrázkov je rovnaké `a`. Všimni si, že obrázok pre `n = 2` vznikol tak, že sa štyrikrát nakreslila krivka úrovne `n-1` a korytnačka sa medzi tým otáčala vľavo 90, vpravo 180 a vľavo 90 (na začiaku kresby bola úplne vľavo).

15. Rekurzívna krivka je popísaná takýmto predpisom:



Napíš funkciu `pyramida3(n, a)`, v ktorej prvý parameter `n` označuje úroveň krivky, druhý parameter `a` veľkosť obrázka (dĺžka spodnej hrany). Na všetkých piatich obrázkov je rovnaké `a`. Obrázok vznikol rovnako ako v predchádzajúcej úlohe (funkcia `pyramida`), ale medzi kresleniami vnorených menších kriviek sa korytnačka otáčala vľavo 87, vpravo 174 a vľavo 87.

6. Týždenný projekt

L.I.S.T.

- riešenie odovzdaj na úlohový server https://list.fmph.uniba.sk/

Programovací jazyk **Logo**, podobne ako my v Pythone, riadi korytnačku v grafickej ploche. Syntax jazyka sa ale trochu líši od Pythonu. Nás z Loga bude zaujímať len týchto 10 príkazov:

- `fd 100` - zodpovedá pythonovskému `t.fd(100)`, parametrom je výraz s hodnotou celého alebo desatinného čísla
- `rt 45` - zodpovedá pythonovskému `t.rt(45)`, parametrom je výraz s hodnotou celého alebo desatinného čísla
- `lt 60` - zodpovedá pythonovskému `t.lt(60)`, parametrom je výraz s hodnotou celého alebo desatinného čísla
- `pu` - zodpovedá pythonovskému `t.pu()`, príkaz je bez parametrov
- `pd` - zodpovedá pythonovskému `t.pd()`, príkaz je bez parametrov
- `setpc 'red'` - zodpovedá pythonovskému `t.pencolor('red')`, parametrom je znakový reťazec farby (pozor, môže obsahovať aj medzeru, napríklad `'light blue'`)
- `setpw 5` - zodpovedá pythonovskému `t.pensize(5)`, parametrom je výraz s hodnotou celého čísla
- `repeat 4 [fd 50 rt 90]` - označuje cyklus (s premennou cyklu `repc`) s daným počtom opakovaní (celé číslo, pritom premenná cyklu má začínať `1`), telom cyklu môže byť ľubovoľný logovský program (aj prázdny), napríklad tento konkrétny repeat-cyklus sa môže preložiť takto:

```
for repc in range(1, 5):
    t.fd(50)
    t.rt(90)
```

- `to schod [fd 50 rt 90 fd 20 lt 90]` - definuje funkciu `schod` bez parametrov, pričom telom môže byť ľubovoľný logovský program (aj prázdny), napríklad táto konkrétna definícia sa môže preložiť takto:

```
def schod():
    t.fd(50)
    t.rt(90)
    t.fd(20)
    t.lt(90)
```

- každý iný identifikátor bude označovať volanie funkcie bez parametrov;, napríklad `schod` zodpovedá pythonovskému `schod()`

Program v Logu môže byť naformátovaný úplne voľne, t.j. medzi príkazmi sú buď medzery alebo nové riadky a tak isto aj parametre sú od príkazov oddelené aspoň jednou medzerou alebo prázdnym riadkom, prípadne znakmi hranatých zátvoriek. Výrazy, ktoré sú parametrami príkazov, neobsahujú medzery, teda môžu mať tvar napríklad `fd 10+repc`. Môžeš predpokladať, že zadaný logovský program je korektný.

Tvojou úlohou bude napísať pythonovský skript s funkciou `logo2python()`, ktorá dostane logovský program (textový súbor s príponou `'.txt'`) a vyrobí z neho pythonovský skript (textový súbor s rovnakým menom, ale s príponou `'.py'`), ktorým by sa nakreslil identický obrázok s logovským programom.

Napríklad, pre takýto vstupný súbor `'subor1.txt'`:

```
pu lt 30 fd 100 lt 60 setpc
'red' pd
fd 100 rt 120 fd
100    rt 120
     fd 100 rt
   60 setpc 'blue' fd 100 rt 120
fd 100
```

Tvoj program vygeneruje takýto pythonovský skript `'subor1.py'`:

```
import turtle
t = turtle.Turtle()
```

```
t.pu()
t.lt(30)
t.fd(100)
t.lt(60)
t.pencolor('red')
t.pd()
t.fd(100)
t.rt(120)
t.fd(100)
t.rt(120)
t.fd(100)
t.rt(60)
t.pencolor('blue')
t.fd(100)
t.rt(120)
t.fd(100)
turtle.done()
```

Alebo pre nejaký iný vstupný súbor:

```
lt 90 pu fd 100 rt 30 pd
to krok
[fd 30 rt 120]

repeat 4 [
  fd 50
  lt 10+20
  repeat 3[krok]lt 60
] rt 30 fd 70
repeat 10[]
```

dostaneme:

```
import turtle
t = turtle.Turtle()
t.lt(90)
t.pu()
t.fd(100)
t.rt(30)
t.pd()
def krok():
    t.fd(30)
    t.rt(120)
for repc in range(1, 5):
    t.fd(50)
    t.lt(10+20)
    for repc in range(1, 4):
        krok()
    t.lt(60)
t.rt(30)
t.fd(70)
for repc in range(1, 11):
    pass
turtle.done()
```

Tvoj odovzdaný program s menom `riesenie.py` musí začínať tromi riadkami komentárov:

```
# 6. zadanie: logo
# autor: Janko Hraško
# datum: 1.11.2021
```

Modul musí obsahovať definíciu funkcie:

```python
def logo2python(meno_suboru, tab=4):
    ...
```

Túto funkciu bude volať testovač s rôznymi logovskými súbormi. Druhý parameter `tab` určuje o koľko medzier bude odsunutý každý vnorený blok príkazov vo for-cykle. Prázdne riadky vo výstupnom súbore sa budú ignorovať. Vo svojom module môžeš použiť aj ďalšie pomocné funkcie, nepoužívaj `global`.

Projekt `riesenie.py` odovzdaj (bez ďalších dátových súborov) na úlohový server https://list.fmph.uniba.sk/ najneskôr do 23:00 **12. novembra**. Testovač bude spúšťať tvoju funkciu s rôznymi textovými súbormi, ktoré si môžeš stiahnuť z L.I.S.T.u. Za tento projekt môžeš získať **5 bodov**.