Planification de trajectoire

Démarche structurée pour le choix d'un actionneur

Encadré par Pierre Melchior

AUBARD Clément
BARROSO Stéphane

2016/2017 – S9
Groupe 1

Introduction

Le système de portique à étudier est le suivant :

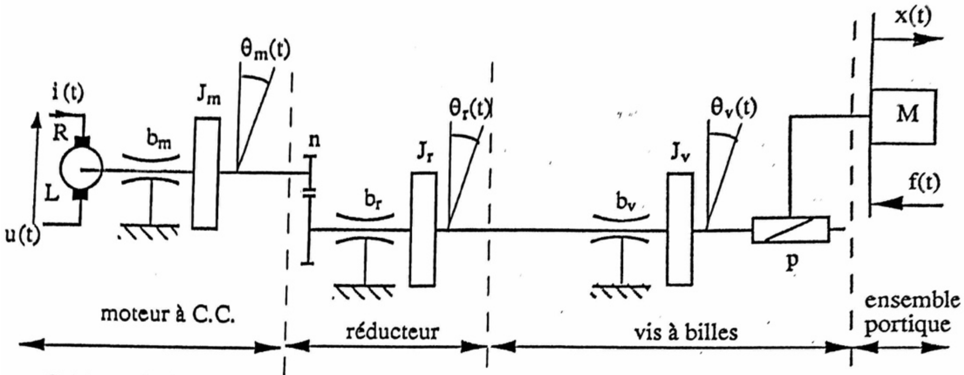

Schéma résultant de l'analyse du fonctionnement du système (vis-à-billes infiniment rigide)

Il comprend un moteur à courant continu, un réducteur, une vis à billes et un portique. L'objectif principal est de choisir un moteur ayant des performances dynamiques compatibles avec le cahier des charges du système.

Les données sont les suivantes :

$\lambda = \frac{\theta_v}{x} = 314\, rd/s$; $f(t) = 50N$; $X_T = 0.3m$; $J_v = 10^{-3}kg.m^2$; $M = 100kg$; $b_v = 10^{-4}Nms/rd$

Question 1 – Lois horaires au niveau du portique

Pour cette question, nous considérons uniquement la vis à billes et l'ensemble portique.

Nous souhaitions obtenir en régime permanent la vitesse du portique V_p =1m/s. D'après l'énoncé, nous avions les informations suivantes :

$$t_a = t_d = 0{,}1s \ , \quad t_p = 0{,}2s \ , \quad T = 0{,}4s$$

Nous calculons ainsi :

$$a = \frac{V_p}{t_a} = 10m.s^{-2}$$

$$X_a = \frac{1}{2} a\, {t_a}^2 = 0.05m$$

$$X_p = V_p\, t_p = 0.2m$$

$$X_d = X_a + X_p = 0.25m,$$

$$X_T = 2X_a + X_p = 0.3m$$

Nous avons alors exprimé les équations de la position, la vitesse et l'accélération à l'aide des lois horaires fournies en annexe, puis tracer ces équations sur le logiciel Matlab.

- **La position :** $$\begin{cases} X(t) = 5t^2 & t \in [0,0.1[\\ X(t) = t - 0.05 & t \in [0.1,0.3[\\ X(t) = 5t^2 - 2t - 0.4 & t \in [0.3,0.4[\end{cases}$$

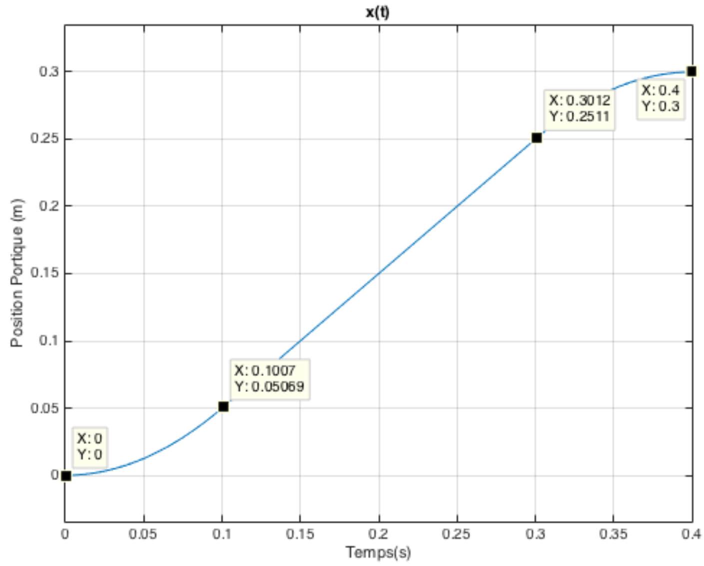

Figure 1 : Tracé de la loi horaire en position du portique

Nous remarquons sur la figure 1 l'évolution de la position du portique en fonction du temps. La représentation de la figure a été obtenu en intégrant la vitesse (figure 2).

- **La vitesse :** $$\begin{cases} V(t) = 10t & t \in [0,0.1[\\ V(t) = 1 & t \in [0.1,0.3[\\ V(t) = -10t + 4 & t \in [0.3,0.4[\end{cases}$$

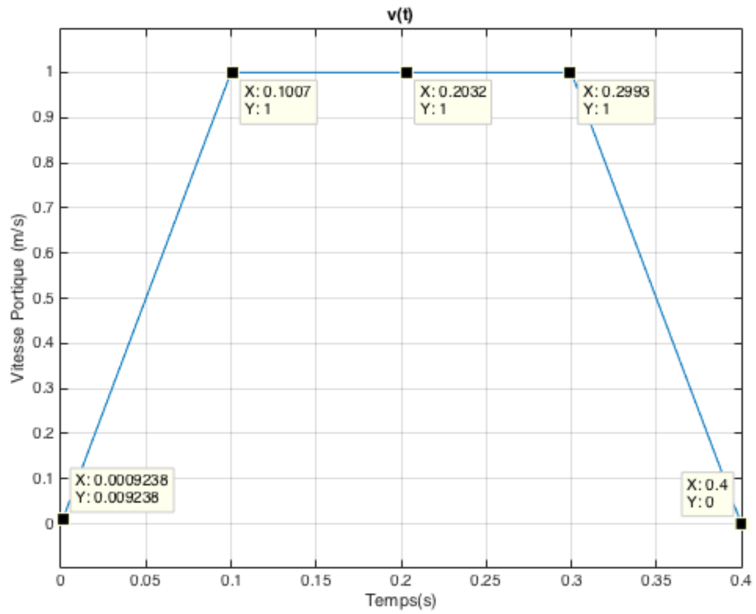

Figure 2 : Tracé de la loi horaire en vitesse du portique

La vitesse augmente jusqu'à atteindre un régime permanent de 1m/s pendant 0,2s puis diminue jusqu'à obtenir une vitesse nulle. Ce qui correspond au cahier des charges.

- **L'accélération**

$$\begin{cases} \gamma(t) = 10 & t \in [0{,}0.1[\\ \gamma(t) = 0 & t \in [0.1{,}0.3[\\ \gamma(t) = -10 & t \in [0.3{,}0.4[\end{cases}$$

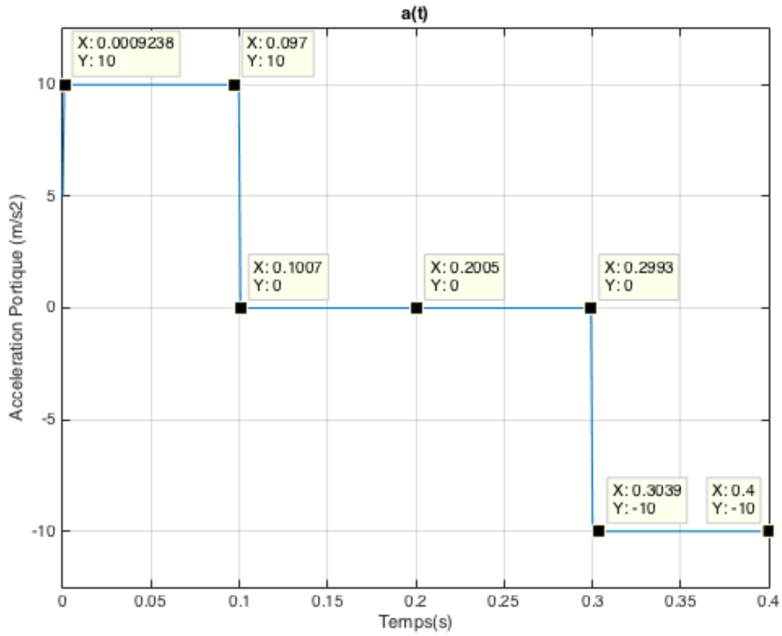

Figure 3 : Tracé de la loi horaire en accélération du portique

Cette dernière représentation est l'évolution de l'accélération du portique en fonction du temps.

Question 2 – Première estimation de la puissance motrice

L'expression de la puissance motrice est donnée par la relation suivante :

$$P_m(t) = (J_{eq}\ddot{\theta}_v(t) + b_{eq}\dot{\theta}_v(t) + C_{eq})\dot{\theta}_v(t)$$

Avec J_{eq} l'inertie de la charge, b_{eq} le coefficient de frottement visqueux au niveau de la charge, C_{eq} le couple extérieur appliqué à la charge.

- **Calcul de J_{eq}**

Nous avons $$\frac{1}{2} J_{eq}\dot{\theta}_v(t)^2 = \frac{1}{2} J_v\dot{\theta}_v(t)^2 + \frac{1}{2} M\dot{x}(t)^2$$

D'où $$J_{eq} = J_v + M(\frac{\dot{x}(t)}{\dot{\theta}_v(t)})^2$$

Nous obtenons $$\boldsymbol{J_{eq} = J_v + \frac{M}{\lambda^2}}$$

- **Calcul de b_{eq}**

Nous avons le relation suivante : $$b_{eq}\dot{\theta}_v(t)^2 = b_v\dot{\theta}_v(t)^2$$

Nous obtenons alors : $$\boldsymbol{b_{eq} = b_v}$$

- **Calcul de C_{eq}**

Nous avons la relation : $$C_r(t)\dot{x}(t) = C_{eq}\dot{\theta}_v(t)$$

D'où $$\boldsymbol{C_{eq} = f\frac{\dot{x}(t)}{\dot{\theta}_v(t)} = \frac{f}{\lambda}}$$

- **Détermination de $P_m(t)$**

En combinant les équations précédentes, nous obtenons l'expression de la puissance motrice instantanée.

$$P_m(t) = (J_{eq}\ddot{x}(t)\lambda + b_{eq}\lambda\dot{x}(t) + C_{eq})\lambda\dot{x}(t)$$

En régime permanent, nous obtenons P_{mp}:

$$P_{mp} = b_{eq}(V_p\lambda)^2 + C_{eq}\lambda V_p = \mathbf{59,86\ W}$$

La représentation de l'évolution de la puissance motrice instantanée en fonction du temps est ci-dessous :

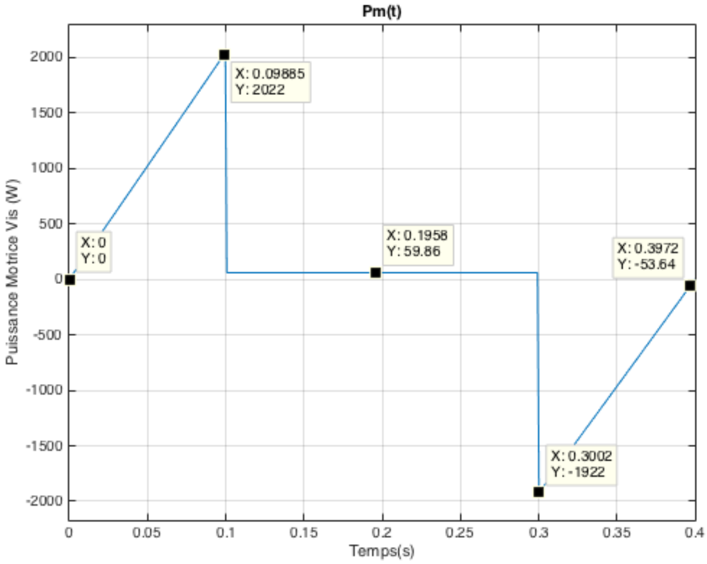

Figure 4 : Tracé de la puissance motrice en fonction du temps

Nous relevons sur ce graphique Max(Pm(t)) =2022W qui va nous permettre de dimensionner notre moteur.

Question 3 – Première sélection d'un moteur

Le terme à calculer est le suivant : $\frac{\max(P_m(t))}{P_{mp}} = 34$

Comme $\frac{\max(P_m(t))}{P_{mp}} > 2$, alors $\boldsymbol{P_{mn} = \frac{\max(P_m(t))}{2} = 1021\ W}$

Nous choisissons un moteur à courant continu ayant comme caractéristiques :

- $b_m = 8.10^{-4}\ N.m.s.rad^{-1}$
- $J_m = 10^{-3}\ kg.m^2$
- $b_c = 10^{-3}\ N.m.s.rad^{-1}$
- $J_C = 0{,}5.10^{-3}\ kg.m^2$
- $\dot{\theta}_{mp} = 376{,}8\ rad.s^{-1}$

Nous avons également tracé les lois horaires au niveau de la vis à billes.

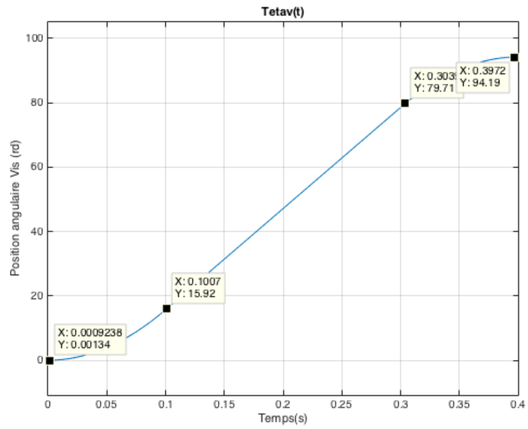

Figure 5 : Tracé de la position angulaire $\theta_v(t)$

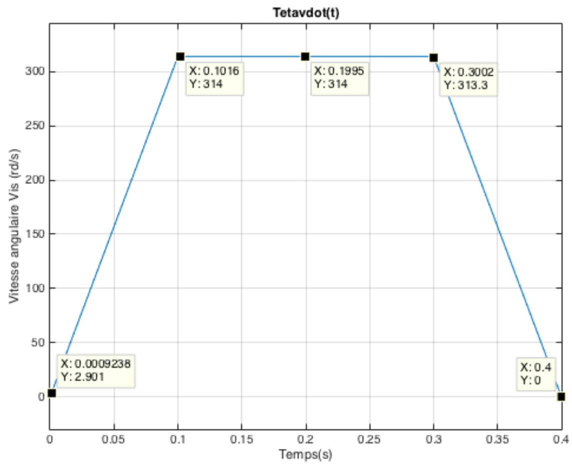

Figure 6 : Tracé de la vitesse $\dot{\theta}v(t)$

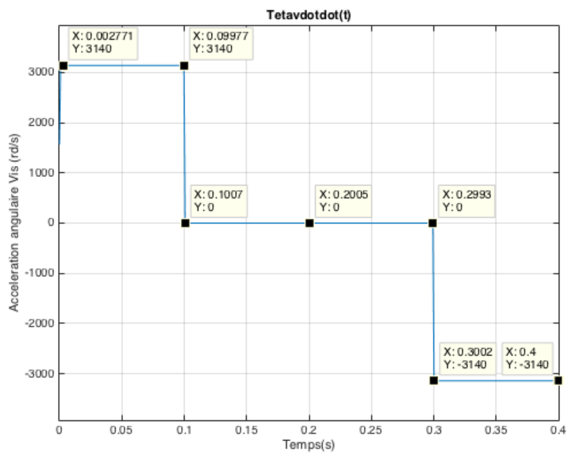

Figure 7 : Tracé de l'accélération $\ddot{\theta}_v(t)$

Ces tracés sont bien cohérents avec ce que nous voulions.

Question 4 – Estimation du rapport de réduction n

Nous avons la formule : $n = \frac{\omega_{mmax}}{\lambda V_{cmax}}$ D'où $\boldsymbol{n = \frac{\dot{\theta}_{mp}}{\lambda V_p} = 1,2}$

Question 5 – Lois horaires au niveau du moteur

La vitesse de rotation maximale correspondant au régime permanent est égale à :

$$\omega_{mmax} = n\lambda V_p = 376{,}8\, rad.s^{-1}$$

Comme pour la première question, nous allons déterminer les lois horaires au niveau du moteur.

La valeur absolue des pentes de la loi horaire en vitesse pour les régimes d'accélération et de décélération est égale à l'accélération de l'angle de rotation du moteur.

$$\gamma_{mmax} = n\lambda\gamma_{max} = 3768\, rad.s^{-2}$$

Les lois horaires en vitesse et accélération au niveau du moteur ont la même forme que celles définies au niveau du récepteur, seules la vitesse maximale et l'accélération maximale sont différentes compte tenu du rapport de réduction n.

- **La position :**

$$\begin{cases} \theta_m(t) = \dfrac{1}{2}\gamma_{mmax}t^2 & t \in [0{,}0.1[\\ \theta_m(t) = X_{am} + \omega_{mmax}(t-0.1) & t \in [0.1{,}0.3[\\ \theta_m(t) = X_{am} + X_{pm} - \dfrac{1}{2}\gamma_{mmax}(t-0.3)^2 + \omega_{mmax}(t-0.3) & t \in [0.3{,}0.4[\end{cases}$$

Nous calculons ainsi :

$$X_{am} = \frac{1}{2}\gamma_{mmax}\, {t_a}^2 = 18{,}85\, rad$$

$$X_{pm} = \omega_{mmax}\, t_p = 75{,}35\, rad$$

$$X_{dm} = X_{am} + X_{pm} = 94{,}6\, rad$$

$$X_{Tm} = 2X_{am} + X_{pm} = 113\, rad$$

Le tracé de la loi en position est ci-dessous.

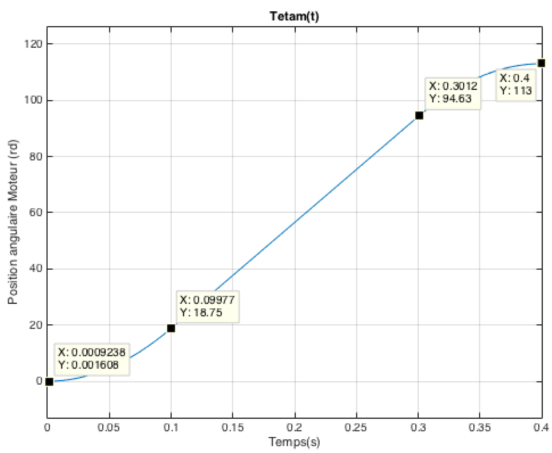

Figure 8 : Tracé horaire en position au niveau du moteur

- **La vitesse :**

La loi horaire en vitesse au niveau du moteur s'écrit :

$$\begin{cases} \omega_m(t) = \gamma_{mmax} t & t \in [0,0.1[\\ \omega_m(t) = \omega_{mmax} & t \in [0.1,0.3[\\ \omega_m(t) = \omega_{mmax} - \gamma_{mmax}(t - 0.3) & t \in [0.3,0.4[\end{cases}$$

La courbe est la suivante :

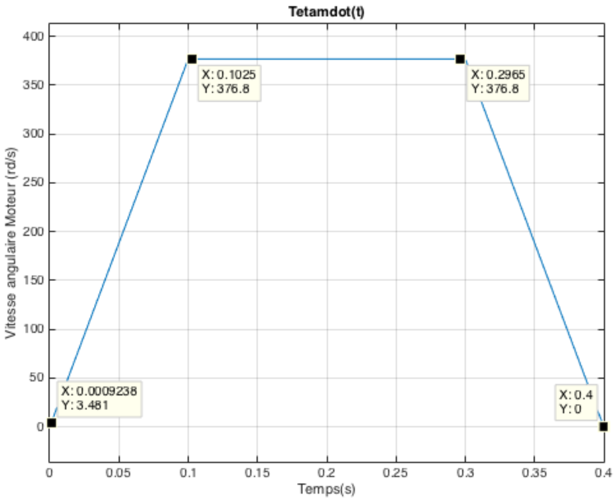

Figure 9 : Tracé de la vitesse au niveau du moteur

- **L'accélération :**

La loi horaire en accélération au niveau du moteur s'écrit :

$$\begin{cases} \gamma_m(t) = \gamma_{mmax} & t \in [0,0.1[\\ \gamma_m(t) = 0 & t \in [0.1,0.3[\\ \gamma_m(t) = -\gamma_{mmax} & t \in [0.3,0.4[\end{cases}$$

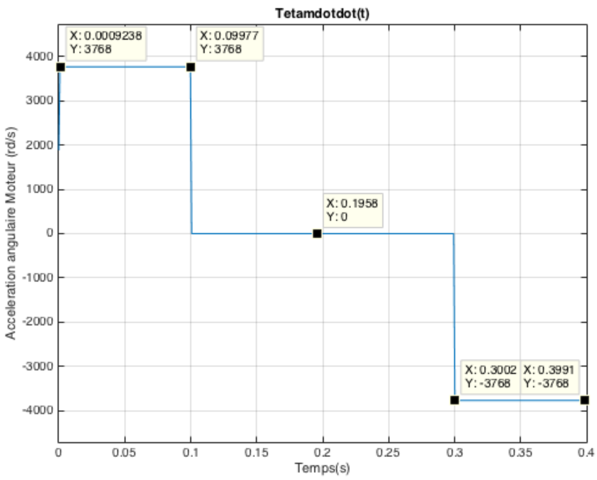

Figure 10 : Tracé de l'accélération au niveau du moteur

Question 6 – Deuxième présélection d'un moteur

L'expression du couple moteur instantané est donnée par la relation suivante :

$$C_m(t) = J_{eqtot}\ddot{\theta}_m(t) + b_{eqtot}\dot{\theta}_m(t) + C_{eqtot}$$

Avec J_{eqtot} l'inertie de la charge, b_{eqtot} le coefficient de frottement visqueux au niveau de la charge, C_{eqtot} le couple extérieur appliqué à la charge.

- **Calcul de J_{eqtot}**

Nous avons $$\frac{1}{2} J_{eqtot}\dot{\theta}_m(t)^2 = \frac{1}{2}(J_m\dot{\theta}_m(t)^2 + J_r\dot{\theta}_r(t)^2 + J_{eq}\dot{\theta}_v(t)^2)$$

D'où $$J_{eqtot} = J_m + J_r(\frac{\dot{\theta}_r(t)}{\dot{\theta}_m(t)})^2 + J_{eq}(\frac{\dot{\theta}_v(t)}{\dot{\theta}_m(t)})^2$$

Sachant que $\theta_r(t) = \theta_v(t)$, nous obtenons $$\boldsymbol{J_{eq} = J_m + \frac{J_r + J_{eq}}{n^2}}$$

- **Calcul de b_{eqtot}**

Nous avons le relation suivante : $$b_{eqtot}\dot{\theta}_m(t)^2 = b_m\dot{\theta}_m(t)^2 + b_r\dot{\theta}_r(t)^2 + b_{eq}\dot{\theta}_v(t)^2$$

Nous obtenons alors : $$\boldsymbol{b_{eqtot} = b_m + \frac{b_r + b_{eq}}{n^2}}$$

- **Calcul de C_{eqtot}**

De la même manière, nous obtenons la relation : $$\boldsymbol{C_{eqtot} = \frac{f}{n.\lambda}}$$

- **Détermination de $C_m(t)$**

En combinant les équations précédentes, nous obtenons l'expression de la puissance motrice instantanée.

$$C_m(t) = J_{eqtot}\ddot{\theta}_m(t)\lambda + \ b_{eqtot}\lambda\dot{\theta}_m(t) + C_{eqtot}$$

En régime permanent, nous obtenons C_{mp}:

$$C_{mp} = b_{eqtot}\omega_{mmax} + C_{eqtot} = \mathbf{0,7485\ N.m}$$

La représentation de l'évolution du couple moteur instantanée en fonction du temps est ci-dessous :

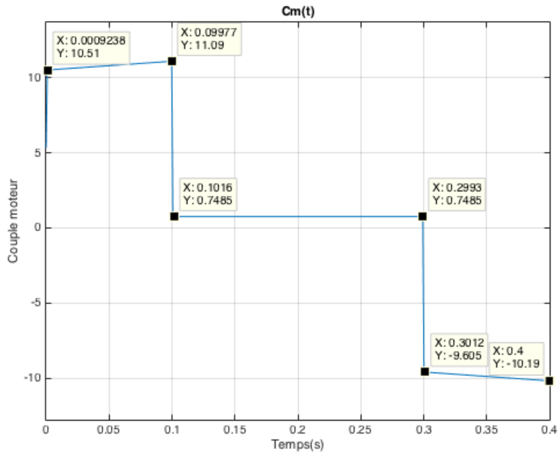

Figure 11 : Tracé du couple moteur instantané en fonction du temps

- **Détermination du couple nominal C_{mn} du moteur**

Le terme à calculer est le suivant : $$r_c = \frac{\max(C_m(t))}{C_{mp}}$$

Nous trouvons alors : $$\boldsymbol{C_{mn} = \frac{\max(C_m(t))}{2} = 5.54\ N.m}$$

La représentation de l'évolution de la puissance moteur instantanée en fonction du temps est ci-dessous :

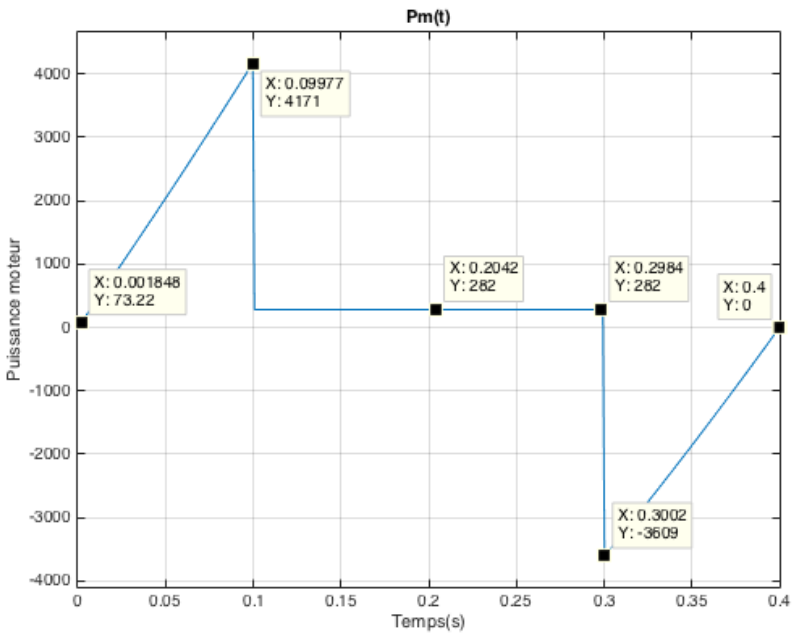

Figure 12 : Tracé de la puissance moteur instantanée en fonction du temps

- **Vérification du moteur choisi**

Comme $r_c > 2$, alors

$$\begin{cases} P_{mmmoteur} = C_m(t) * \omega_m(t) \\ P_{mpmoteur} = b_{eqtot}\omega_{mmax} + C_{eqtot} \end{cases}$$

Or
$$r_{pmoteur} = \frac{\max(P_{mmoteur})}{P_{mpmoteur}}$$

Nous obtenons :
$$\boldsymbol{P_{mnmoteur}} = \frac{\mathbf{max}\,(\boldsymbol{P_{mmoteur}})}{\mathbf{2}} = \mathbf{2085}\ \boldsymbol{W}$$

Nous avons $P_{mnmoteur} > 2P_{mn}$, c'est-à-dire que le premier moteur est sous-dimensionné. Nous devons choisir un nouveau moteur avec une puissance nominale plus élevée.

Conclusion

Ce bureau d'étude nous a permis de mettre en application le cours de planification de trajectoire sur un exemple simple. Nous avons donc puis acquérir une première expérience sur la démarche à effectuer pour choisir un actionneur.

Annexe : Code Matlab

```
clear all
close all
clc
syms x
ta=0.1;
a=10;
tp=0.2;
td=0.1;

%Loi horaire en acceleration
acc=a*heaviside(x)-a*heaviside(x-ta)-a*heaviside(x-(ta+tp))
figure(1)
ezplot(acc,[0 ta+td+tp])
title('a(t)');xlabel('Temps(s)');ylabel('Acceleration Portique (m/s2)')
grid

%Loi horaire en vitesse
vit=int(acc)
figure(2)
ezplot(vit,[0 ta+td+tp])
grid
title('v(t)');xlabel('Temps(s)');ylabel('Vitesse Portique (m/s)')


%Loi horaire en position
pos=int(vit)
figure(3)
ezplot(pos,[0 ta+td+tp])
grid
title('x(t)');xlabel('Temps(s)');ylabel('Position Portique (m)')

Jv=1e-3; %kg.m2
M=100; %Kg
bv=1e-4;
lambda=314;
f=50;
%Puissance moteur au niveau de la vis
Pmt=bv*lambda*lambda*vit*vit+f/lambda*lambda*vit+(Jv+M/(lambda*lambda))*acc
*vit*lambda*lambda;
figure(4)
ezplot(Pmt,[0 ta+td+tp])
grid
title('Pm(t)');xlabel('Temps(s)');ylabel('Puissance Motrice Vis (W)')

%Lois horaires au niveau de la vis
Tetavt=pos*lambda;
figure(5)
ezplot(Tetavt,[0 ta+td+tp])
grid
title('Tetav(t)');xlabel('Temps(s)');ylabel('Position angulaire Vis (rd)')
Tetavtdot=vit*lambda;
figure(6)
ezplot(Tetavtdot,[0 ta+td+tp])
grid
title('Tetavdot(t)');xlabel('Temps(s)');ylabel('Vitesse angulaire Vis
(rd/s)')
Tetavtdotdot=acc*lambda;
```

```
figure(7)
ezplot(Tetavtdotdot,[0 ta+td+tp])
grid
title('Tetavdotdot(t)');xlabel('Temps(s)');ylabel('Acceleration angulaire
Vis (rd/s)')

%Moteur
bm=8e-4;
Jm=1e-3;
br=1e-3;
Jr=0.5e-3;
pmn=0.5*2041;   %max de pmp>2*pmp pmn=0.5*max(Pm(t))
tetamp=376.8; %% valeur vitesse de rotation du moteur
n=tetamp/314;%314=max tetavdot(t)
% Lois horaires au niveau du moteur
Tetamt=n*Tetavt;
Tetamtdot=n*Tetavtdot;
Tetamtdotdot=n*Tetavtdotdot;

figure(8)
ezplot(Tetamtdot,[0 ta+td+tp])
grid
title('Tetamdot(t)');xlabel('Temps(s)');ylabel('Vitesse angulaire Moteur
(rd/s)')
figure(9)
ezplot(Tetamtdotdot,[0 ta+td+tp])
grid
title('Tetamdotdot(t)');xlabel('Temps(s)');ylabel('Acceleration angulaire
Moteur (rd/s)')
figure(10)
ezplot(Tetamt,[0 ta+td+tp])
grid
title('Tetam(t)');xlabel('Temps(s)');ylabel('Position angulaire Moteur
(rd)')

%Couple au niveau du moteur
Cmpt=(Jr+Jm*n^2+Jv+M/(lambda*lambda))/n^2*Tetamtdotdot+(bm*n^2+(br+bv))/(n*
n)*Tetamtdot+f/lambda;
figure(11)
ezplot(Cmpt,[0 ta+td+tp])
grid
title('Cm(t)');xlabel('Temps(s)');ylabel('Couple moteur')

%Puissance au niveau du moteur
Pmmoteurt=Cmpt*Tetamtdot;
figure(12)
ezplot(Pmmoteurt,[0 ta+td+tp])
grid
title('Pm(t)');xlabel('Temps(s)');ylabel('Puissance moteur')
```