202010819 조정현 12주차 과제

[연습문제 7.1 part3]

고유값 0 일 때 고유벡터 : $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

#6) (1) 고유값 : 0과 5 , 고유값 5 일 때 고유벡터 : $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$

(1) $A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 3 & 3-\lambda \end{bmatrix}$

$\mathrm{Det}(A - \lambda I) = (2-\lambda)(3-\lambda) - 2 \times 3$

$= 6 - 5\lambda + \lambda^2 - 6$

$= \lambda^2 - 5\lambda$

$= \lambda(\lambda - 5) = 0$

따라서 A의 고유값은 0과 5가 된다

$\langle \lambda = 0$ 에 대응하는 고유벡터 구하기 $\rangle$

$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$2x_1 + 2x_2 = 0$

$3x_1 + 3x_2 = 0$

$x_1 = -x_2$

$x_2 = 1$ 이라고 하면 $x_1 = -1$

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

따라서 $\lambda = 0$에 대응하는 고유벡터는 $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 이다.

$\langle \lambda = 5$ 에 대응하는 고유벡터 구하기 $\rangle$

$\begin{bmatrix} 2-5 & 2 \\ 3 & 3-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$-3x_1 + 2x_2 = 0$

$3x_1 - 2x_2 = 0$

$\therefore x_1 = \frac{2}{3}x_2$

$x_2 = 1$ 이라고 하면 $x_1 = \frac{2}{3}$

따라서 $\lambda = 5$에 대응하는 고유벡터는 $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$ 이다.

#6) (2) 고유값 : 2 , 고유값 2 일때 고유벡터 : $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{bmatrix}$

$\mathrm{Det}(A - \lambda I) = (1-\lambda)(3-\lambda) + 1$

$= 3 - 4\lambda + \lambda^2 + 1$

$= \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0$

$\lambda = 2$

$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$

$-x_1 - x_2 = 0$

$\therefore x_1 = -x_2$

$x_2 = 1$ 이라 하면 $x_1 = -1$

$\therefore$ 고유벡터 $= \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

2일 때 고유벡터 : $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

#10) 고유값 : 2, 3, 1 , 2일 때 고유벡터 $= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, 3일 때 고유벡터 : $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}$

$\mathrm{Det}(A - \lambda I) = (2-\lambda)\left|(3-\lambda)(1-\lambda)\right| = 0$

따라서 고유값은 2, 3, 1 이 될 수 있다.

$\langle \lambda = 2$ 일 때 고유벡터 $\rangle$

$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$x_2 = 0$

$x_2 + x_3 = 0$

$-x_3 = 0$

$\therefore x_2 = x_3 = 0$ 이고 $x_1 = 1$ 이라 하자.

$\therefore$ 고유벡터 $= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\langle \lambda = 3$일 때 고유벡터 $\rangle$

$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$-x_1 + x_2 = 0$

$x_2 = 0$

$-2x_3 = 0$

$\therefore x_1 = x_2 = x_3 = 0$

$\therefore$ 고유벡터 $= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\langle \lambda = 1$ 일 때 고유벡터 $\rangle$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$x_1 + x_2 = 0$

$2x_2 + x_3 = 0$

$\therefore x_1 = -x_2 , \quad x_3 = -2x_2$

$\therefore x_2 = 1$ 이라고 하면

고유벡터는 $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ 이다

#11) $a=0,\ b=0,\ c=9$

$$A-\lambda I=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\a&b&c\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-\lambda&1&0\\0&-\lambda&1\\a&b&c-\lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\lambda&1&0\\0&-\lambda&1\\0&b&9-\lambda\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Det}(A-\lambda I)=(-\lambda)\left|-\lambda(c-\lambda)\right|-(1)(-a)$$

$$=\lambda^2(c-\lambda)+a$$

$$=-\lambda^3+c\lambda^2+a\ =-\lambda^3+9\lambda\ =$$

$$\therefore a=0,\ c=9$$

$$\mathrm{Det}(A-\lambda I)=a(1)-b\left|-\lambda\right|+(c-\lambda)\left|\lambda^2-1\right|$$

$$=a+b\lambda+(c-\lambda)(\lambda^2-1)$$

$$=a+b\lambda+c\lambda^2-c-\lambda^3+\lambda$$

$$=-\lambda^3+c\lambda^2+(b+1)\lambda+a-c$$

$$\therefore c=0$$

[연습문제 7.2 part3]

#4) $\lambda=1,2,3$

행렬 A가 상부 삼각행렬이기 때문이다.

#5) 고유값 $=2,\ 6$

$$A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{trace}(A)=a+d=8$$

$$\mathrm{Det}(A)=ad-bc=12$$

$$A-\lambda I=\begin{bmatrix}a-\lambda&b\\c&d-\lambda\end{bmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I)=(a-\lambda)(d-\lambda)-bc$$

$$=ad-(a+d)\lambda+\lambda^2-bc$$

$$=12-8\lambda+\lambda^2$$

$$(\lambda-2)(\lambda-6)=0$$

$$\therefore \lambda=2,\ 6$$

#6) A와 B가 같은 고유값을 가진다.

A가 하부 삼각행렬이므로 고유값 = 2, 4

B 또한 하부 삼각 행렬 이므로 고유값 = 2, 4

∴ A와 B가 같은 고유값을 가진다.

고유값 2일 때 고유벡터 = $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$

#7) (1) 고유값 1, 2, 고유값 1일 때 고유벡터 = $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ 아 $\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$

상부 삼각행렬 이므로 고유값 = 1, 2 이다.

< $\lambda=1$ 일 때 고유벡터 >

$$A-\lambda I=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&2&1\\0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1-\lambda&1&1\\0&2-\lambda&1\\0&0&1-\lambda\end{bmatrix}$$

$\lambda=1$ 이면 $A-\lambda I=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$