

第十二届蓝桥杯大赛软件赛决赛

C/C++ 大学 A 组

【考生须知】

考试开始后，选手首先下载题目，并使用考场现场公布的解压密码解压试题。

考试时间为 4 小时。考试期间选手可浏览自己已经提交的答案，被浏览的答案允许拷贝。时间截止后，将无法继续提交或浏览答案。

对同一题目，选手可多次提交答案，以最后一次提交的答案为准。

选手必须通过浏览器方式提交自己的答案。选手在其它位置的作答或其它方式提交的答案无效。

试题包含“结果填空”和“程序设计”两种题型。

结果填空题：要求选手根据题目描述直接填写结果。求解方式不限。不求源代码。把结果填空的答案直接通过网页提交即可，不要书写多余的内容。

程序设计题：要求选手设计的程序对于给定的输入能给出正确的输出结果。考生的程序只有能运行出正确结果才有机会得分。

注意：在评卷时使用的输入数据与试卷中给出的示例数据可能是不同的。选手的程序必须是通用的，不能只对试卷中给定的数据有效。

对于编程题目，要求选手给出的解答完全符合 GNU C/C++ 标准，不能使用诸如绘图、Win32API、中断调用、硬件操作或与操作系统相关的 API。

代码中允许使用 STL 类库。

注意：main 函数结束必须返回 0

注意：所有依赖的函数必须明确地在源文件中 `#include <xxx>`，不能通过工程设置而省略常用头文件。

所有源码必须在同一文件中。调试通过后，拷贝提交。

提交时，注意选择所期望的编译器类型。

试题 A：纯质数

本题总分：5 分

【问题描述】

如果一个正整数只有 1 和它本身两个约数，则称为一个质数（又称素数）。

前几个质数是：2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, …。

如果一个质数的所有十进制数位都是质数，我们称它为纯质数。例如：2, 3, 5, 7, 23, 37 都是纯质数，而 11, 13, 17, 19, 29, 31 不是纯质数。当然 1, 4, 35 也不是纯质数。

请问，在 1 到 20210605 中，有多少个纯质数？

【答案提交】

这是一道结果填空的题，你只需要算出结果后提交即可。本题的结果为一个整数，在提交答案时只填写这个整数，填写多余的内容将无法得分。

试题 B: 完全日期

本题总分：5 分

【问题描述】

如果一个日期中年月日的各位数字之和是完全平方数，则称为一个完全日期。

例如：2021 年 6 月 5 日的各位数字之和为 $2 + 0 + 2 + 1 + 6 + 5 = 16$ ，而 16 是一个完全平方数，它是 4 的平方。所以 2021 年 6 月 5 日是一个完全日期。

例如：2021 年 6 月 23 日的各位数字之和为 $2 + 0 + 2 + 1 + 6 + 2 + 3 = 16$ ，是一个完全平方数。所以 2021 年 6 月 23 日也是一个完全日期。

请问，从 2001 年 1 月 1 日到 2021 年 12 月 31 日中，一共有多少个完全日期？

【答案提交】

这是一道结果填空的题，你只需要算出结果后提交即可。本题的结果为一个整数，在提交答案时只填写这个整数，填写多余的内容将无法得分。

试题 C: 最小权值

本题总分：10 分

【问题描述】

对于一棵有根二叉树 T ，小蓝定义这棵树中结点的权值 $W(T)$ 如下：

空子树的权值为 0。

如果一个结点 v 有左子树 L ，右子树 R ，分别有 $C(L)$ 和 $C(R)$ 个结点，则

$$W(v) = 1 + 2W(L) + 3W(R) + (C(L))^2 C(R)。$$

树的权值定义为树的根结点的权值。

小蓝想知道，对于一棵有 2021 个结点的二叉树，树的权值最小可能是多少？

【答案提交】

这是一道结果填空的题，你只需要算出结果后提交即可。本题的结果为一个整数，在提交答案时只填写这个整数，填写多余的内容将无法得分。

试题 D: 覆盖

本题总分：10 分

【问题描述】

小蓝有一个国际象棋的棋盘，棋盘的大小为 8×8 ，即由 8 行 8 列共 64 个方格组成。棋盘上有美丽的图案，因此棋盘旋转后与原来的棋盘不一样。

小蓝有很多相同的纸片，每张纸片正好能覆盖棋盘的两个相邻方格。小蓝想用 32 张纸片正好将棋盘完全覆盖，每张纸片都覆盖其中的两个方格。

小蓝发现，有很多种方案可以实现这样的覆盖。如果棋盘比较小，方案数相对容易计算，比如当棋盘是 2×2 时有两种方案，当棋盘是 4×4 时有 36 种方案。但是小蓝算不出他自己的这个 8×8 的棋盘有多少种覆盖方案。

请帮小蓝算出对于这个 8×8 的棋盘总共有多少种覆盖方案。

【答案提交】

这是一道结果填空的题，你只需要算出结果后提交即可。本题的结果为一个整数，在提交答案时只填写这个整数，填写多余的内容将无法得分。

提示：建议使用计算机计算，答案是一个 8 位十进制整数。

试题 E: 123

时间限制: 1.0s 内存限制: 256.0MB 本题总分: 15 分

【问题描述】

小蓝发现了一个有趣的数列，这个数列的前几项如下：

1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, ...

小蓝发现，这个数列前 1 项是整数 1，接下来 2 项是整数 1 至 2，接下来 3 项是整数 1 至 3，接下来 4 项是整数 1 至 4，依次类推。

小蓝想知道，这个数列中，连续一段的和是多少。

【输入格式】

输入的第一行包含一个整数 T ，表示询问的个数。

接下来 T 行，每行包含一组询问，其中第 i 行包含两个整数 l_i 和 r_i ，表示询问数列中第 l_i 个数到第 r_i 个数的和。

【输出格式】

输出 T 行，每行包含一个整数表示对应询问的答案。

【样例输入】

```
3
1 1
1 3
5 8
```

【样例输出】

```
1
4
8
```

【评测用例规模与约定】

对于 10% 的评测用例， $1 \leq T \leq 30$, $1 \leq l_i \leq r_i \leq 100$ 。

对于 20% 的评测用例， $1 \leq T \leq 100$, $1 \leq l_i \leq r_i \leq 1000$ 。

对于 40% 的评测用例， $1 \leq T \leq 1000$, $1 \leq l_i \leq r_i \leq 10^6$ 。

对于 70% 的评测用例， $1 \leq T \leq 10000$, $1 \leq l_i \leq r_i \leq 10^9$ 。

对于 80% 的评测用例， $1 \leq T \leq 1000$, $1 \leq l_i \leq r_i \leq 10^{12}$ 。

对于 90% 的评测用例， $1 \leq T \leq 10000$, $1 \leq l_i \leq r_i \leq 10^{12}$ 。

对于所有评测用例， $1 \leq T \leq 100000$, $1 \leq l_i \leq r_i \leq 10^{12}$ 。

试题 F: 异或变换

时间限制: 1.0s 内存限制: 256.0MB 本题总分: 15 分

【问题描述】

小蓝有一个 01 串 $s = s_1s_2s_3 \cdots s_n$ 。

以后每个时刻, 小蓝要对这个 01 串进行一次变换。每次变换的规则相同。
对于 01 串 $s = s_1s_2s_3 \cdots s_n$, 变换后的 01 串 $s' = s'_1s'_2s'_3 \cdots s'_n$ 为:

$$s'_1 = s_1;$$

$$s'_i = s_{i-1} \oplus s_i。$$

其中 $a \oplus b$ 表示两个二进制的异或, 当 a 和 b 相同时结果为 0, 当 a 和 b 不同时结果为 1。

请问, 经过 t 次变换后的 01 串是什么?

【输入格式】

输入的第一行包含两个整数 n, t , 分别表示 01 串的长度和变换的次数。

第二行包含一个长度为 n 的 01 串。

【输出格式】

输出一行包含一个 01 串, 为变换后的串。

【样例输入】

```
5 3
10110
```

【样例输出】

```
11010
```


【样例说明】

初始时为 10110，变换 1 次后变为 11101，变换 2 次后变为 10011，变换 3 次后变为 11010。

【评测用例规模与约定】

对于 40% 的评测用例， $1 \leq n \leq 100$, $1 \leq t \leq 1000$ 。

对于 80% 的评测用例， $1 \leq n \leq 1000$, $1 \leq t \leq 10^9$ 。

对于所有评测用例， $1 \leq n \leq 10000$, $1 \leq t \leq 10^{18}$ 。

试题 G: 冰山

时间限制: 1.0s 内存限制: 256.0MB 本题总分: 20 分

【问题描述】

一片海域上有一些冰山，第 i 座冰山的体积为 V_i 。

随着气温的变化，冰山的体积可能增大或缩小。第 i 天，每座冰山的变化量都是 X_i 。当 $X_i > 0$ 时，所有冰山体积增加 X_i ；当 $X_i < 0$ 时，所有冰山体积减少 $-X_i$ ；当 $X_i = 0$ 时，所有冰山体积不变。

如果第 i 天某座冰山的体积变化后小于等于 0，则冰山会永远消失。

冰山有大小限制 k 。如果第 i 天某座冰山 j 的体积变化后 V_j 大于 k ，则它会分裂成一个体积为 k 的冰山和 $V_j - k$ 座体积为 1 的冰山。

第 i 天结束前（冰山增大、缩小、消失、分裂完成后），会漂来一座体积为 Y_i 的冰山（ $Y_i = 0$ 表示没有冰山漂来）。

小蓝在连续的 m 天对这片海域进行了观察，并准确记录了冰山的变化。小蓝想知道，每天结束时所有冰山的体积之和（包括新漂来的）是多少。

由于答案可能很大，请输出答案除以 998244353 的余数。

【输入格式】

输入的第一行包含三个整数 n, m, k ，分别表示初始时冰山的数量、观察的天数以及冰山的大小限制。

第二行包含 n 个整数 V_1, V_2, \dots, V_n ，表示初始时每座冰山的体积。

接下来 m 行描述观察的 m 天的冰山变化。其中第 i 行包含两个整数 X_i, Y_i ，意义如前所述。

【输出格式】

输出 m 行，每行包含一个整数，分别对应每天结束时所有冰山的体积之和除以 998244353 的余数。

【样例输入】

```
1 3 6
1
6 1
2 2
-1 1
```

【样例输出】

```
8
16
11
```

【样例说明】

在本样例说明中，用 $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ 来表示每座冰山的体积。

初始时的冰山为 $[1]$ 。

第 1 天结束时，有 3 座冰山： $[1, 1, 6]$ 。

第 2 天结束时，有 6 座冰山： $[1, 1, 2, 3, 3, 6]$ 。

第 3 天结束时，有 5 座冰山： $[1, 1, 2, 2, 5]$ 。

【评测用例规模与约定】

对于 40% 的评测用例， $n, m, k \leq 2000$ ；

对于 60% 的评测用例， $n, m, k \leq 20000$ ；

对于所有评测用例， $1 \leq n, m \leq 100000$ ， $1 \leq k \leq 10^9$ ， $1 \leq V_i \leq k$ ， $0 \leq Y_i \leq k$ ， $-k \leq X_i \leq k$ 。

试题 H: 翻转括号序列

时间限制: 2.0s 内存限制: 512.0MB 本题总分: 20 分

【问题描述】

给定一个长度为 n 的括号序列，要求支持两种操作：

1. 将 $[L_i, R_i]$ 区间内（序列中的第 L_i 个字符到第 R_i 个字符）的括号全部翻转（左括号变成右括号，右括号变成左括号）。
2. 求出以 L_i 为左端点时，最长的合法括号序列对应的 R_i （即找出最大的 R_i 使 $[L_i, R_i]$ 是一个合法括号序列）。

【输入格式】

输入的第一行包含两个整数 n, m ，分别表示括号序列长度和操作次数。

第二行包含给定的括号序列，括号序列中只包含左括号和右括号。

接下来 m 行，每行描述一个操作。如果该行为 “1 $L_i R_i$ ”，表示第一种操作，区间为 $[L_i, R_i]$ ；如果该行为 “2 L_i ” 表示第二种操作，左端点为 L_i 。

【输出格式】

对于每个第二种操作，输出一行，表示对应的 R_i 。如果不存在这样的 R_i ，请输出 0。

【样例输入】

```
7 5
(( ( ) ) ( )
2 3
2 2
1 3 5
2 3
2 1
```

【样例输出】

4
7
0
0

【评测用例规模与约定】

对于 20% 的评测用例， $n, m \leq 5000$ ；

对于 40% 的评测用例， $n, m \leq 30000$ ；

对于 60% 的评测用例， $n, m \leq 100000$ ；

对于所有评测用例， $1 \leq n \leq 10^6$, $1 \leq m \leq 2 \times 10^5$ 。

试题 I: 异或三角

时间限制: 1.0s 内存限制: 256.0MB 本题总分: 25 分

【问题描述】

给定 T 个数 n_1, n_2, \dots, n_T , 对每个 n_i 请求出有多少组 a, b, c 满足:

1. $1 \leq a, b, c \leq n_i$;
2. $a \oplus b \oplus c = 0$, 其中 \oplus 表示二进制按位异或;
3. 长度为 a, b, c 的三条边能组成一个三角形。

【输入格式】

输入的第一行包含一个整数 T 。

接下来 T 行每行一个整数, 分别表示 n_1, n_2, \dots, n_T 。

【输出格式】

输出 T 行, 每行包含一个整数, 表示对应的答案。

【样例输入】

```
2
6
114514
```

【样例输出】

```
6
11223848130
```

【评测用例规模与约定】

对于 10% 的评测用例, $T = 1, 1 \leq n_i \leq 200$;

对于 20% 的评测用例， $T = 1, 1 \leq n_i \leq 2000$;

对于 50% 的评测用例， $T = 1, 1 \leq n_i \leq 2^{20}$;

对于 60% 的评测用例， $1 \leq T \leq 100000, 1 \leq n_i \leq 2^{20}$;

对于所有评测用例， $1 \leq T \leq 100000, 1 \leq n_i \leq 2^{30}$ 。

试题 J: 积木

时间限制: 2.0s 内存限制: 256.0MB 本题总分: 25 分

【问题描述】

小蓝有大量正方体的积木（所有积木完全相同），他准备用积木搭一个巨大的图形。

小蓝将积木全部平铺在地面上，而不垒起来，以便更稳定。他将积木摆成一行一行的，每行的左边对齐，形成最终的图形。

第一行小蓝摆了 $H_1 = w$ 块积木。从第二行开始，第 i 行的积木数量 H_i 都至少比上一行多 L ，至多比上一行多 R （当 $L = 0$ 时表示可以和上一行的积木数量相同），即

$$H_{i-1} + L \leq H_i \leq H_{i-1} + R。$$

给定 x, y 和 z ，请问满足以上条件的方案中，有多少种方案满足第 y 行的积木数量恰好为第 x 行的积木数量的 z 倍。

【输入格式】

输入一行包含 7 个整数 n, w, L, R, x, y, z ，意义如上所述。

【输出格式】

输出一个整数，表示满足条件的方案数，答案可能很大，请输出答案除以 998244353 的余数。

【样例输入 1】

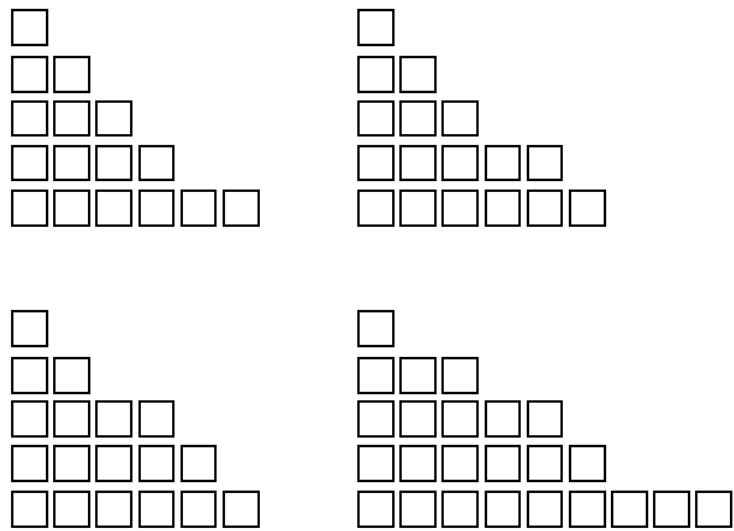
5 1 1 2 2 5 3

【样例输出 1】

4

【样例说明】

符合条件的积木如图所示



【样例输入 2】

233 5 1 8 100 215 3

【样例输出 2】

308810105

【评测用例规模与约定】

对于 10% 的评测用例， $1 \leq n \leq 10$, $1 \leq w \leq 10$, $0 \leq L \leq R \leq 3$;
对于 20% 的评测用例， $1 \leq n \leq 20$, $1 \leq w \leq 10$, $0 \leq L \leq R \leq 4$;
对于 35% 的评测用例， $1 \leq n \leq 500$, $0 \leq L \leq R \leq 10$;
对于 50% 的评测用例， $1 \leq n \leq 5000$, $0 \leq L \leq R \leq 10$;
对于 60% 的评测用例， $1 \leq n \leq 20000$, $0 \leq L \leq R \leq 10$;
对于 70% 的评测用例， $1 \leq n \leq 50000$, $0 \leq L \leq R \leq 10$;
对于 85% 的评测用例， $1 \leq n \leq 300000$, $0 \leq L \leq R \leq 10$;
对于所有评测用例， $1 \leq n \leq 500000$, $1 \leq w \leq 10^9$, $0 \leq L \leq R \leq 40$,
 $1 \leq x < y \leq n$, $0 \leq z \leq 10^9$ 。