2024年春季（1-18周）， F207 周一8:00-9:40

（1-9周）F207周三8：00-9：40

复变函数

朱炬波 13973168169
zhujubo@mail.sysu.edu.cn

中山大學 人工智能学院

第四节　几个初等函数所构成的映射

- 一、幂函数
- 二、指数函数
- 三、儒可夫斯基函数
- 四、小结与思考

一、幂函数 $w = z^n$ $(n \geq 2$为自然数$)$

该函数在z平面内处处可导，导数

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = nz^{n-1}$$

(1) 当$z \neq 0$时：

$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} \neq 0$, 则在$z$平面内除原点外,

由$w = z^n$所构成的映射是处处共形的.

(2) 当 $z = 0$ 时：

令 $z = re^{i\theta}, w = \rho e^{i\varphi}$ ，有 $\rho = r^n, \varphi = n\theta.$

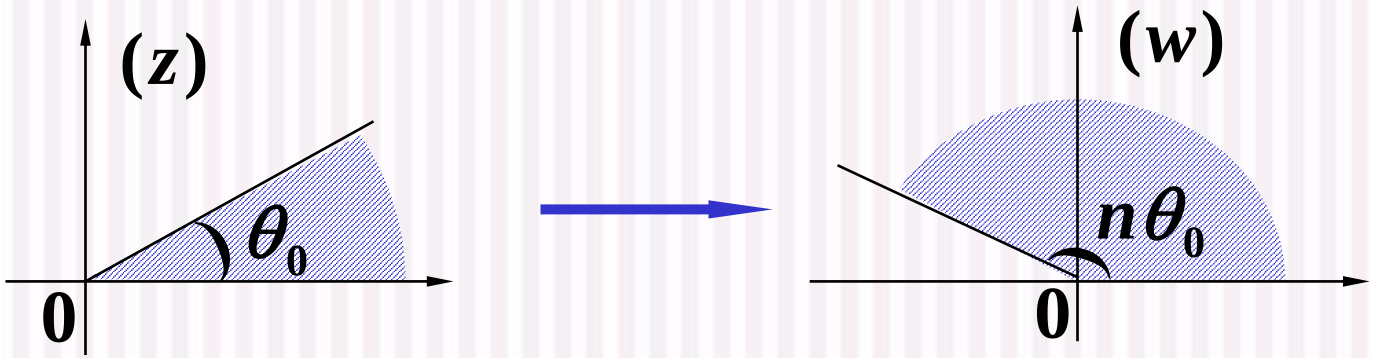
则: 1) 圆周 $|z| = r \longrightarrow$ 圆周 $|w| = r^n$

(特殊地: 单位圆周映射为单位圆周)

2) 射线 $\theta = \theta_0 \longrightarrow$ 射线 $\varphi = n\theta_0$

(正实轴 $\theta = 0$ 映射成正实轴 $\varphi = 0$)

3) 角形域 $0<\theta<\theta_0\left(<\dfrac{2\pi}{n}\right)$ ⟶ 角形域 $0<\theta<n\theta_0$

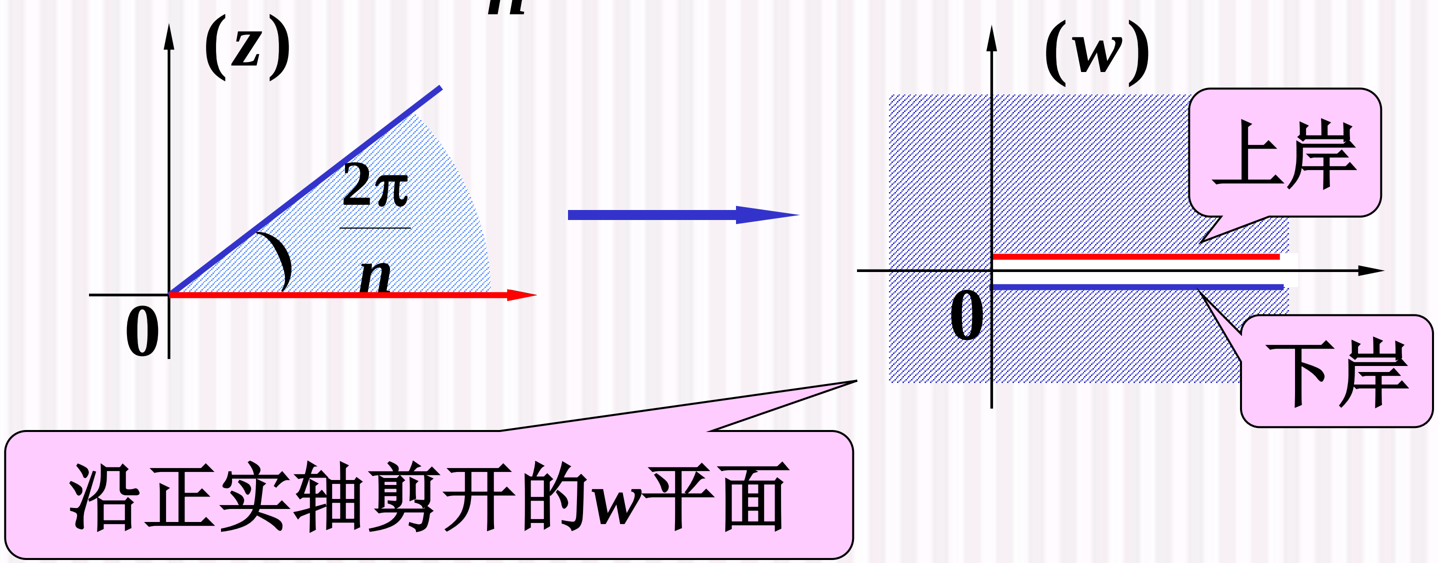


即在 $z=0$ 处角形域的张角经过映射变为原来的 n 倍.

因此,当 $n\geq 2$时,映射 $w=z^n$在 $z=0$处没有保角性.

特殊地:

角形域 $0 < \theta < \frac{2\pi}{n}$ ⟶ 角形域 $0 < \theta < 2\pi$



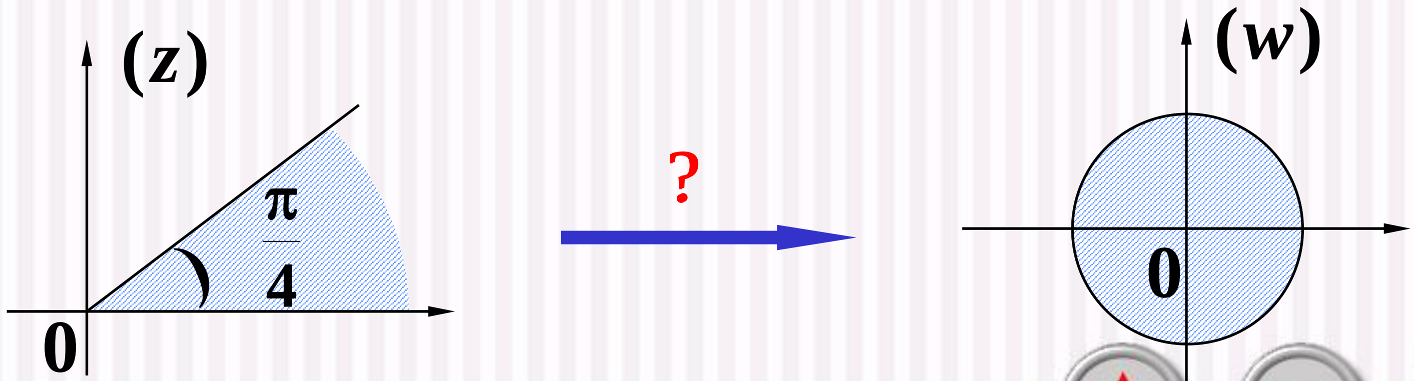
$\theta = 0$映射成正实轴的上岸$\varphi = 0$

$\theta = \frac{2\pi}{n}$映射成正实轴的下岸 $\varphi = 2\pi$

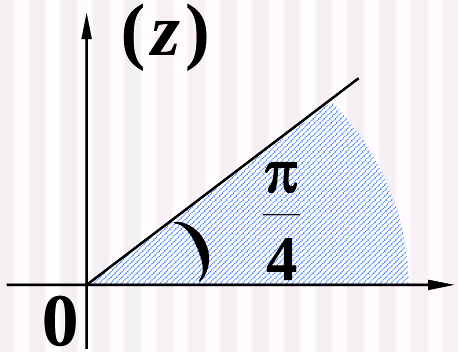
映射特点: 把以原点为顶点的角形域映射成以原点为顶点的角形域, 但张角变成为原来的 n 倍.

如果要把角形域映射成角形域, 常利用幂级数.

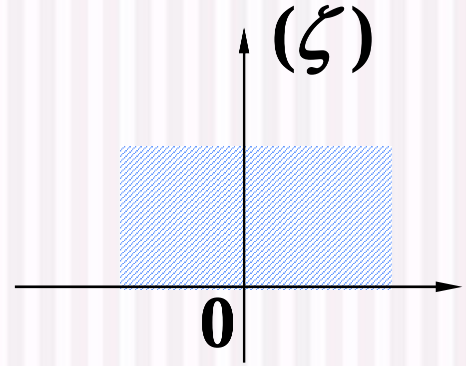
例1 求把角形域 $0 < \arg z < \dfrac{\pi}{4}$ 映射成单位圆 $|w| < 1$ 的一个映射.



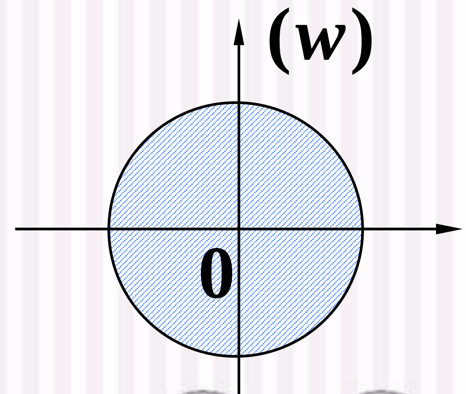
解



$$\zeta = z^4$$



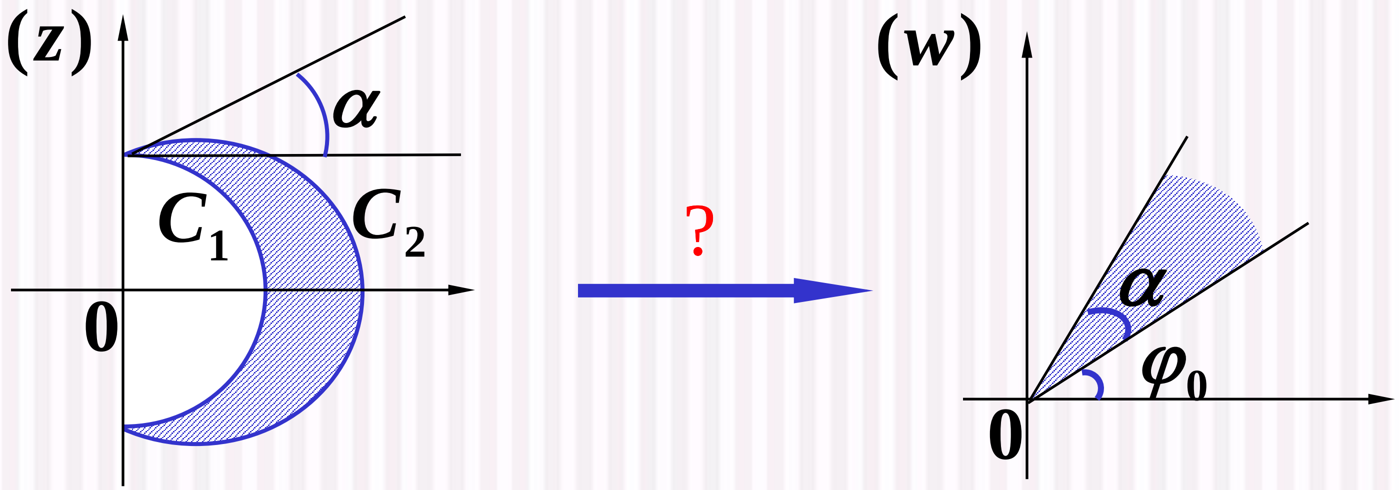
$$w = \frac{\zeta - i}{\zeta + i}$$



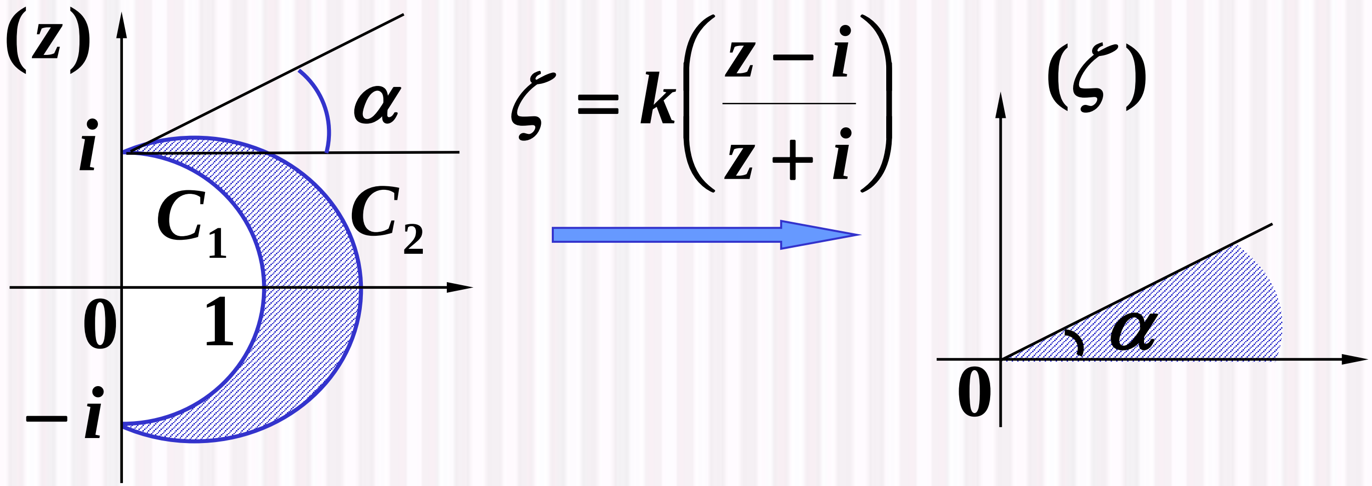
因此所求映射为:

$$w = \frac{z^4 - i}{z^4 + i}$$

例2 求把下图中由圆弧 C_1 与 C_2 所围成的交角为 α 的月牙域映射成角形域 $\varphi_0 < \arg z < \varphi_0 + \alpha$ 的一个映射.



解



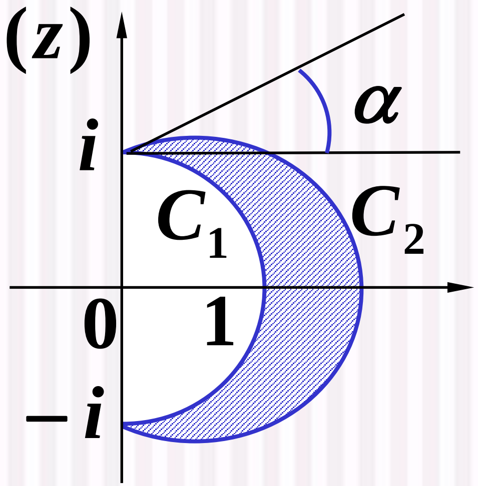
$$\zeta = k\left(\frac{z-i}{z+i}\right)$$

C_1与C_2的交点为$i, -i$

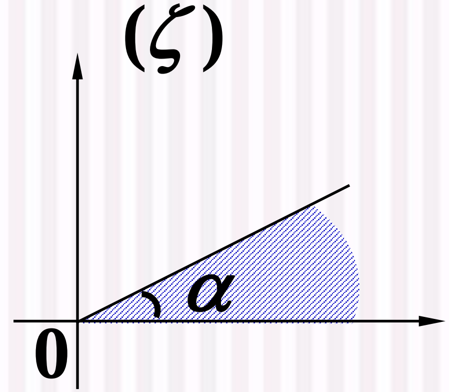
$$z = i \to \zeta = 0, \quad z = -i \to \zeta = \infty,$$

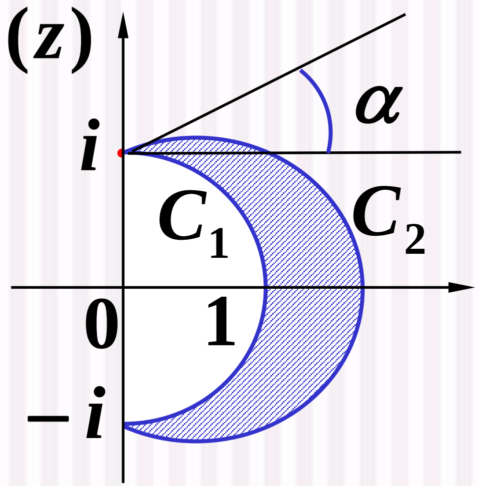
实现此步的映射是分式线性函数:

$$\zeta = k\left(\frac{z-i}{z+i}\right)$$ 其中k为待定的复常数.

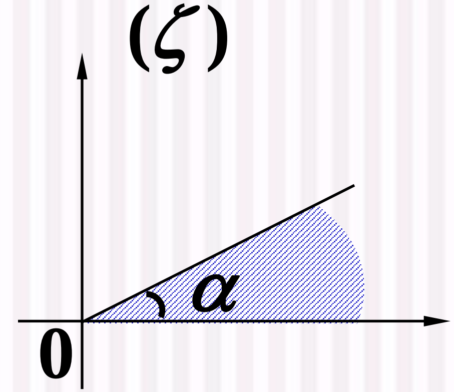


$$\zeta = k\left(\frac{z-i}{z+i}\right)$$





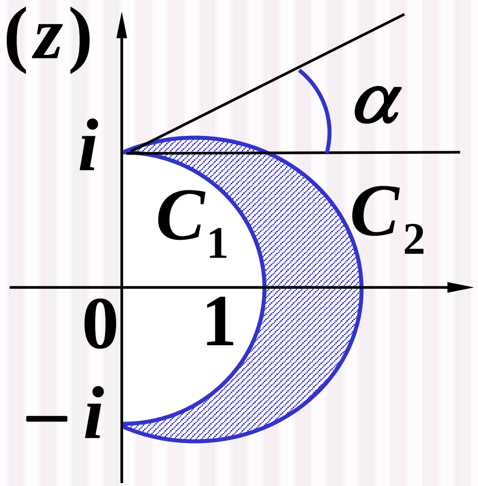
$$\zeta = i\left(\frac{z-i}{z+i}\right)$$



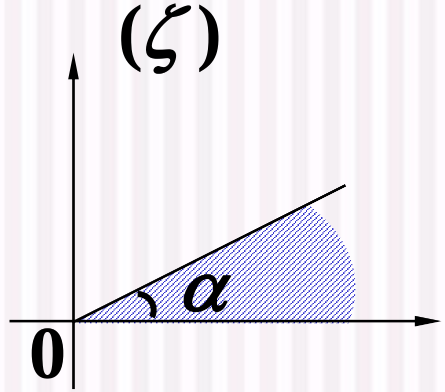
此映射将 $z = 1 \to \zeta = k\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right) = -ik.$

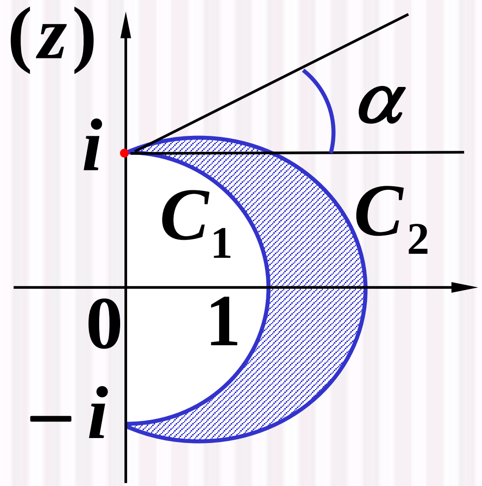
取 $k = i$,使 $\zeta = 1$, 则 $C_1 \to \zeta$ 平面上的正实轴.

根据保角性, 月牙域被映射成角形域 : $0 < \arg\zeta < \alpha.$

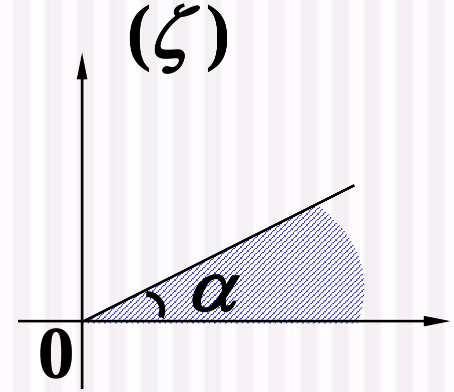


$$\zeta = i\left(\frac{z-i}{z+i}\right)$$



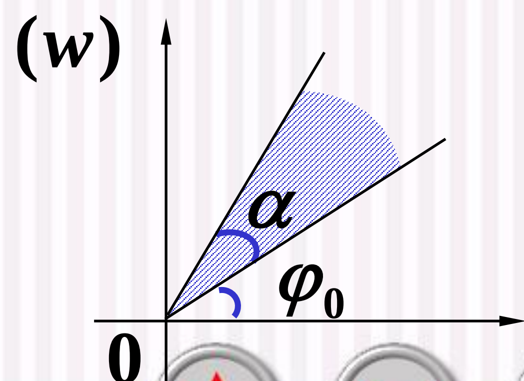


$$\zeta = i\left(\frac{z-i}{z+i}\right)$$



逆时针旋转 φ_0

$$w = e^{i\varphi_0}\zeta$$

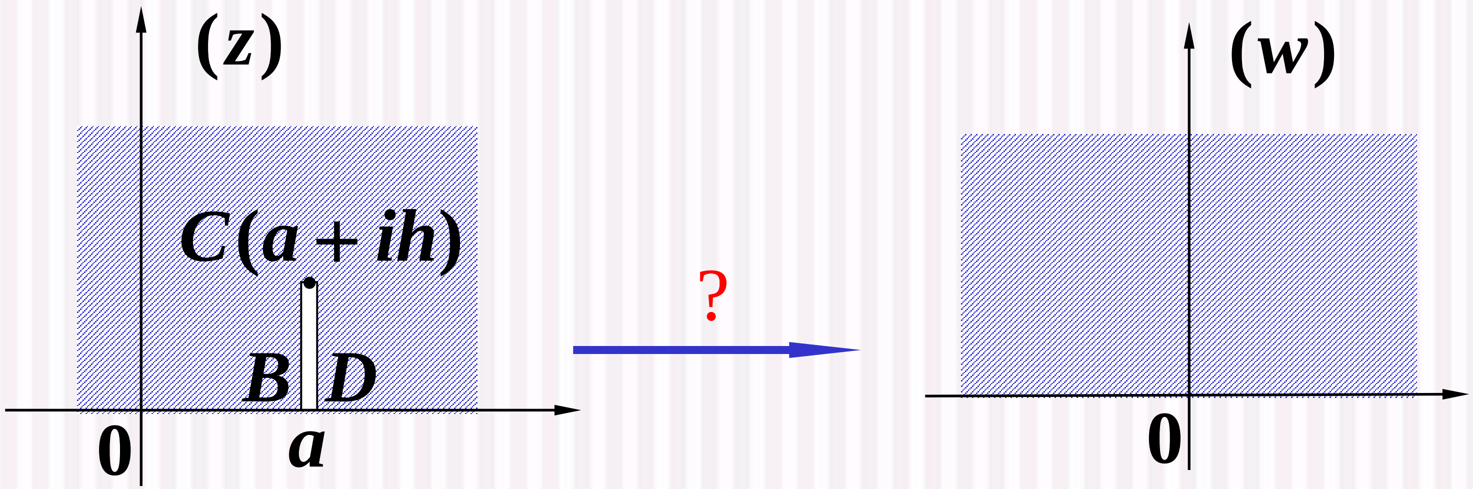


因此所求映射为:

$$w = ie^{i\varphi_0}\left(\frac{z-i}{z+i}\right)$$

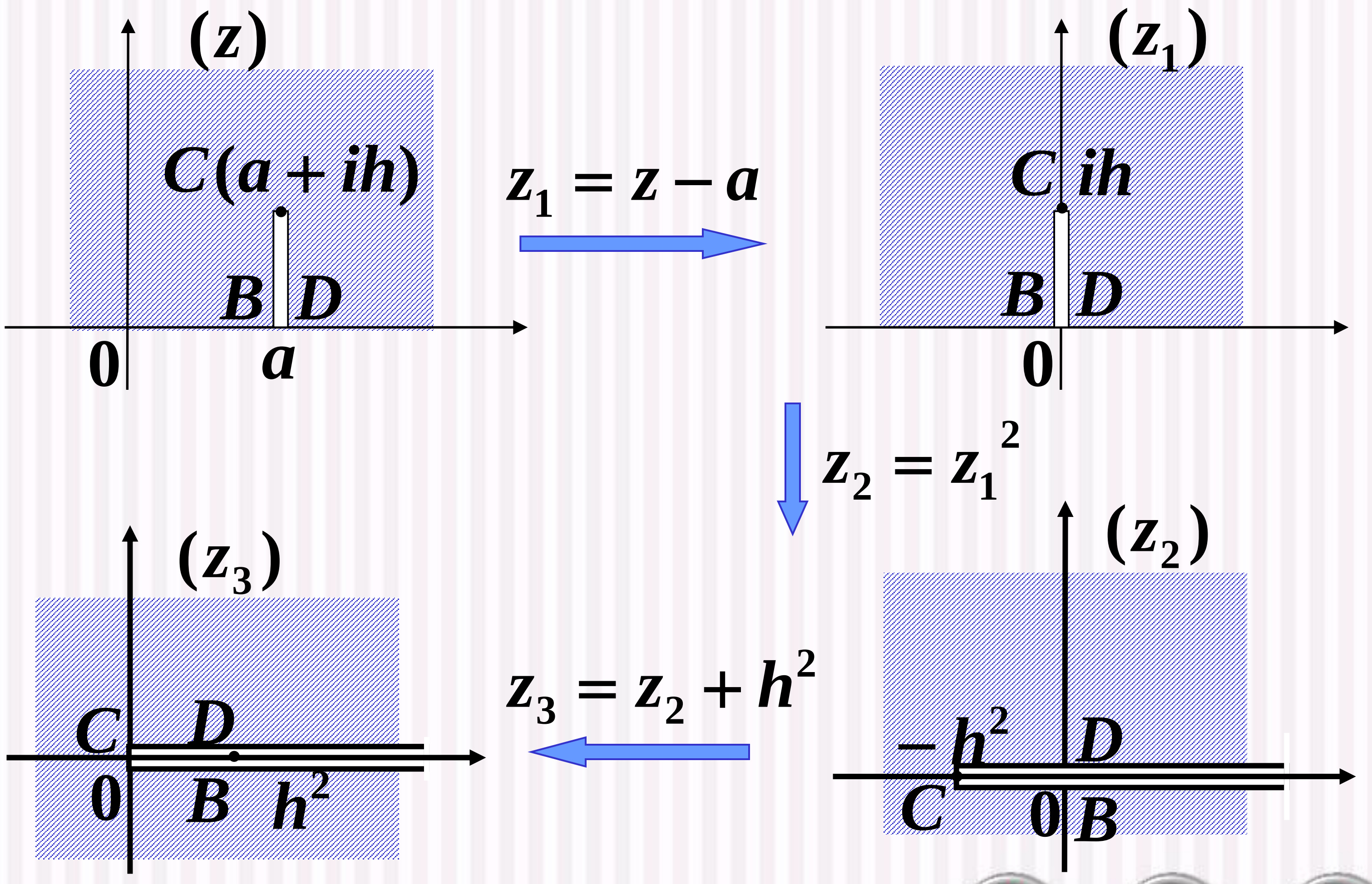
$$= e^{i(\varphi_0+\frac{\pi}{2})}\left(\frac{z-i}{z+i}\right)$$

例3 求把具有割痕 $\operatorname{Re}(z)=a,\ 0\le \operatorname{Im}(z)\le h$ 的上半平面映射成上半平面的一个映射.

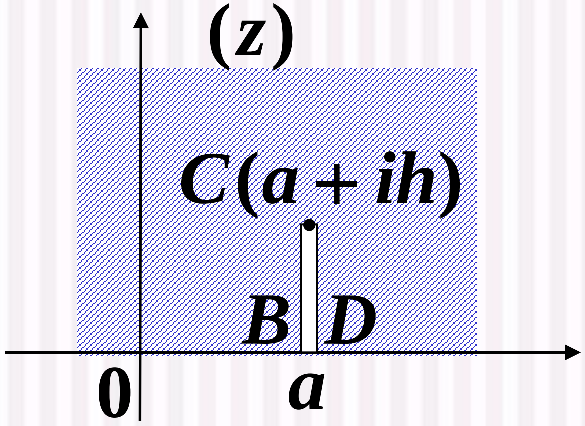


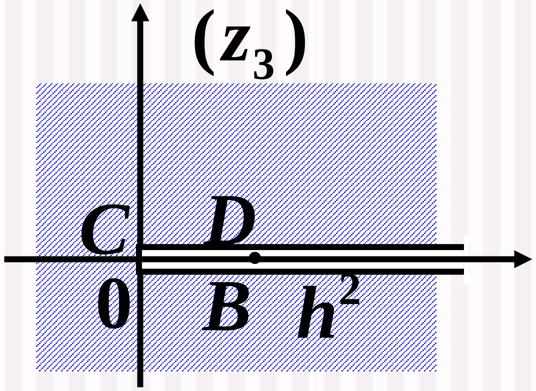
分析: 关键点是将垂直于x轴的割痕的两侧跟x轴之间的夹角展平. 可利用映射 $w=z^2$

解 如图所示:

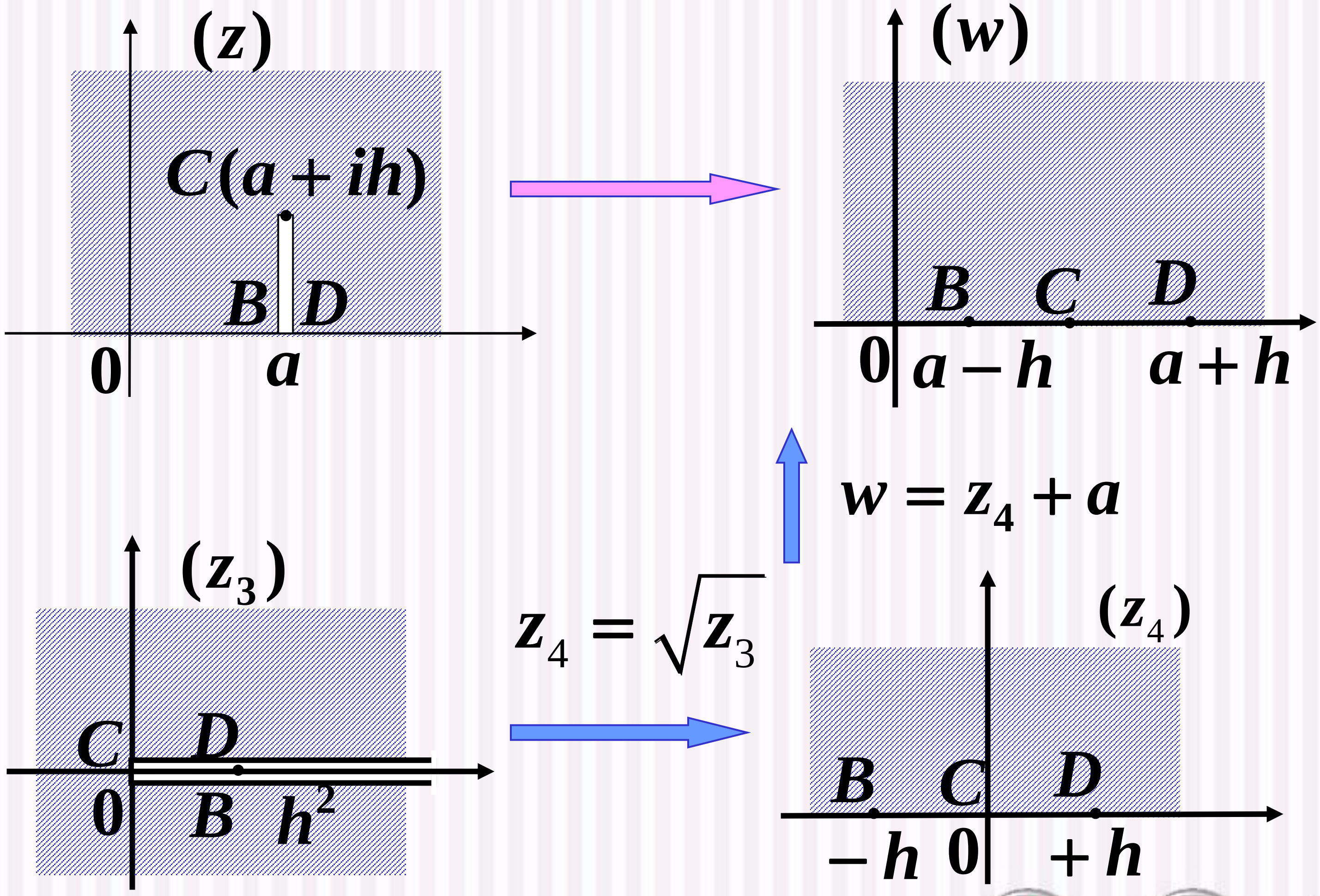


解 如图所示:





解 如图所示: $w=\sqrt{(z-a)^2+h^2}+a$



二、指数函数 $w=e^z$

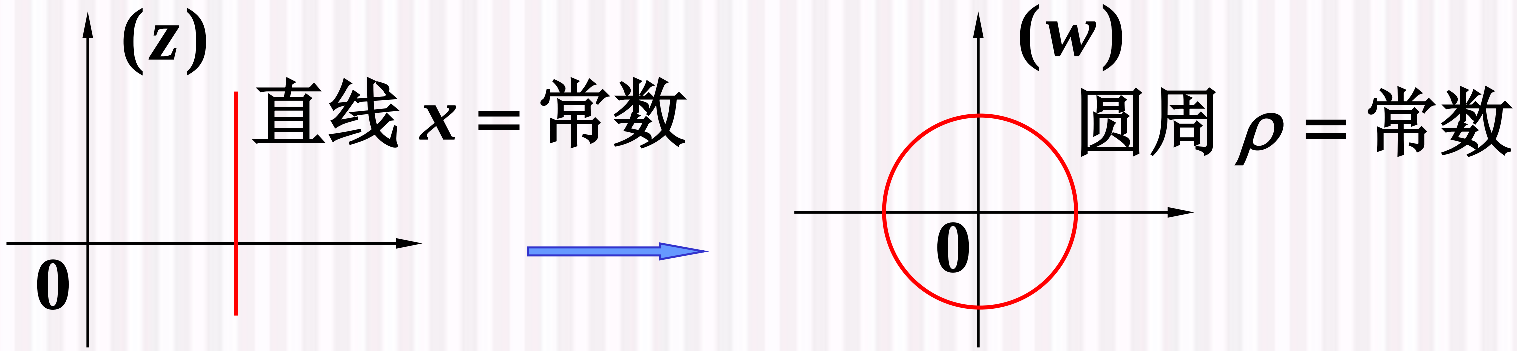
因为 $w'=(e^z)'=e^z\neq 0,$

所以由$w=e^z$所构成的映射是一个全平面上的共形映射.

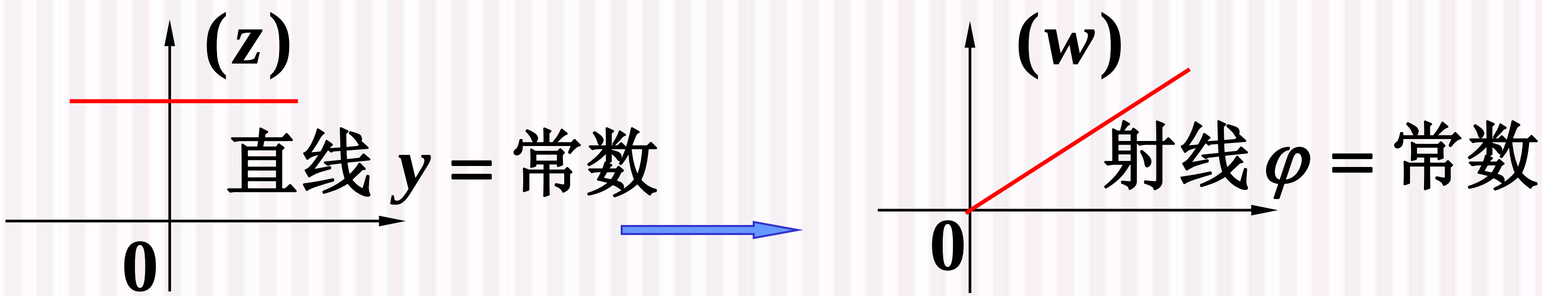
设 $z=x+iy, w=\rho e^{i\varphi}$, 那末 $\rho=e^x, \varphi=y,$

$$z\text{平面} \underset{z=\ln w}{\overset{w=e^z}{\rightleftarrows}} w\text{平面}$$

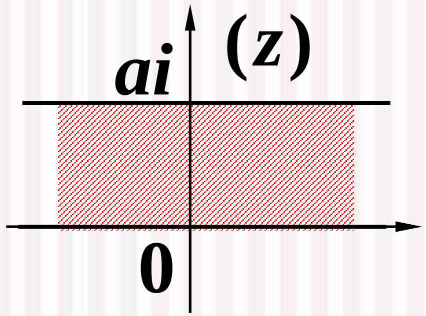
1)

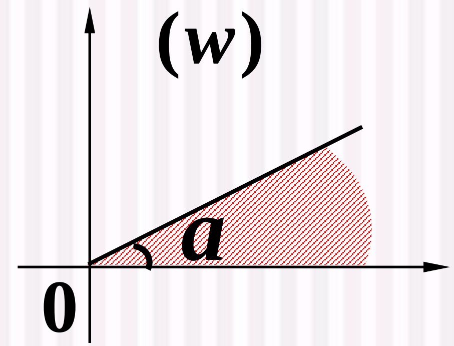


2)

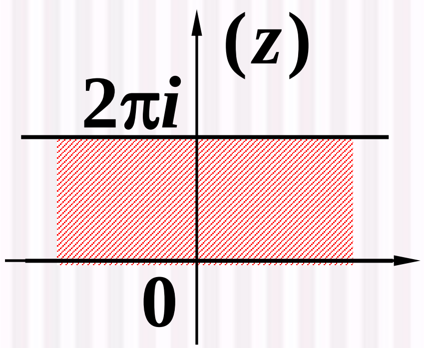


3) 带形域 $0 < \mathrm{Im}(z) < a$ $(0 < a \le 2\pi)$ → 角形域 $0 < \arg w < a$

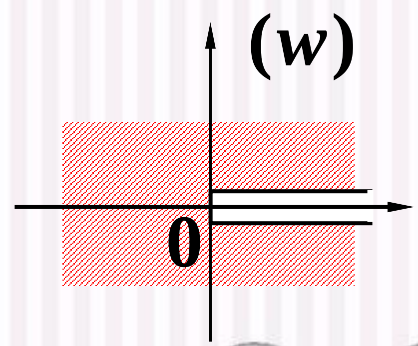




特殊地:



→



映射特点: 把水平的带形域 $0 < \operatorname{Im}(z) < a$ 映射成角形域 $0 < \arg w < a$.

如果要把带形域映射成角形域, 常利用指数函数.

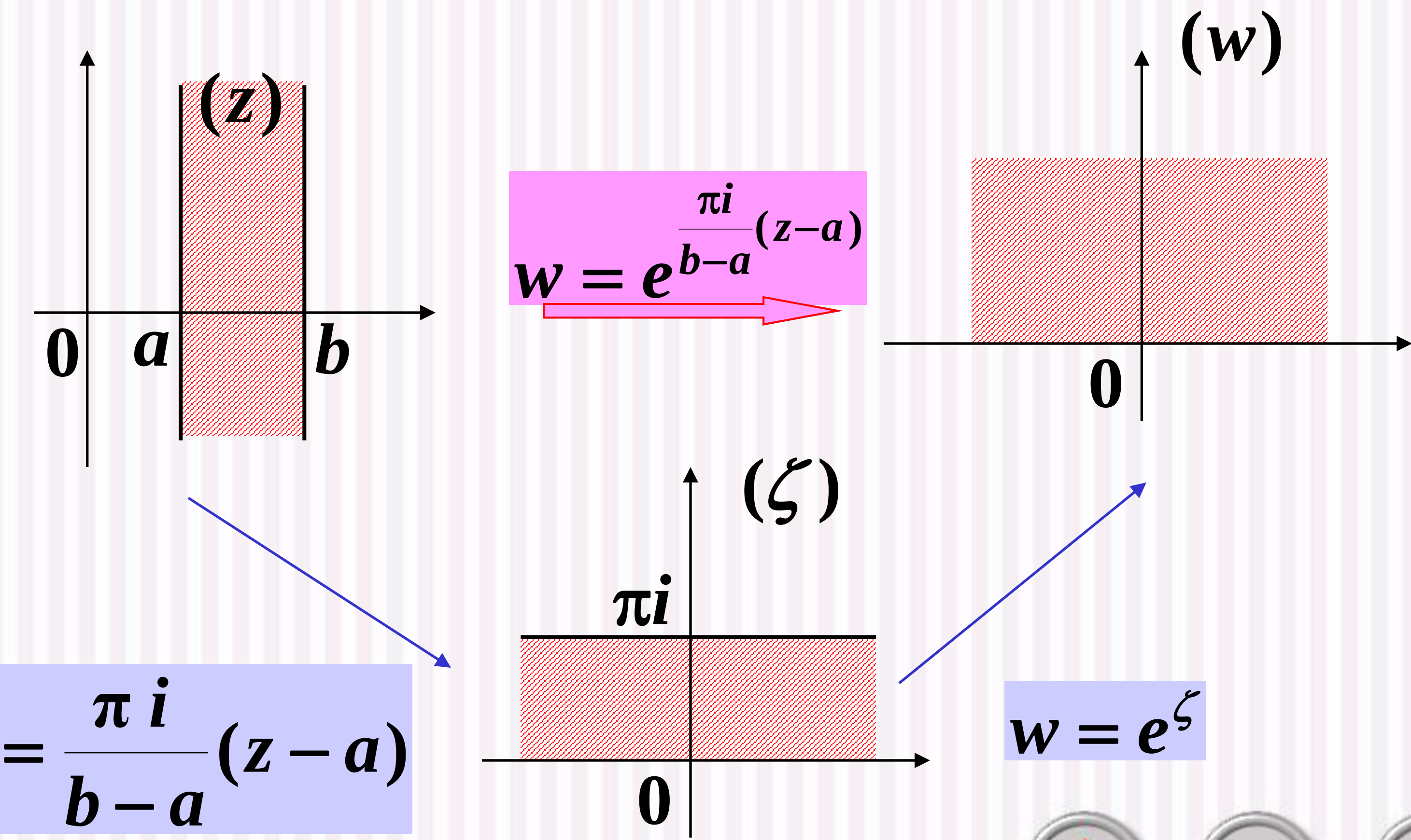
例4 求把带形域 $0 < \operatorname{Im}(z) < \pi$ 映射成单位圆 $|w| = 1$ 的一个映射.

解 $0 < \operatorname{Im}(z) < \pi$ $\xrightarrow{\zeta = e^z}$ 上半平面 $\operatorname{Im}(\zeta) > 0$ $\xrightarrow{w = \frac{\zeta - i}{\zeta + i}}$ $|w| = 1$

$$w = \frac{e^z - i}{e^z + i}$$

例5 求把带形域 $a<\mathrm{Im}(z)<b$ 映射成上半平面 $\mathrm{Im}(\zeta)>0$ 的一个映射.

解



$$w=e^{\frac{\pi i}{b-a}(z-a)}$$

$$\zeta=\frac{\pi i}{b-a}(z-a)$$

$$w=e^{\zeta}$$

三、儒可夫斯基函数

1.定义

函数$w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{a^2}{z}\right)$ $(a>0)$称为儒可夫斯基函数.

除$z=0$外,此函数在z平面内处处解析,

$z=0$是它的一个极点. 由于$w'=\frac{1}{2}\left(1-\frac{a^2}{z^2}\right)$

因此除 $z=0$和 $z=\pm a$外,此映射处处共形.

2. 问题：儒可夫斯基函数将过 $z=a, z=-a$ 的圆周 C 映射为什么区域?

因为 $$w-a=\frac{z^2-2az+a^2}{2z}=\frac{(z-a)^2}{2z},$$

$$w+a=\frac{z^2+2az+a^2}{2z}=\frac{(z+a)^2}{2z},$$

所以 $$\frac{w-a}{w+a}=\left(\frac{z-a}{z+a}\right)^2.$$

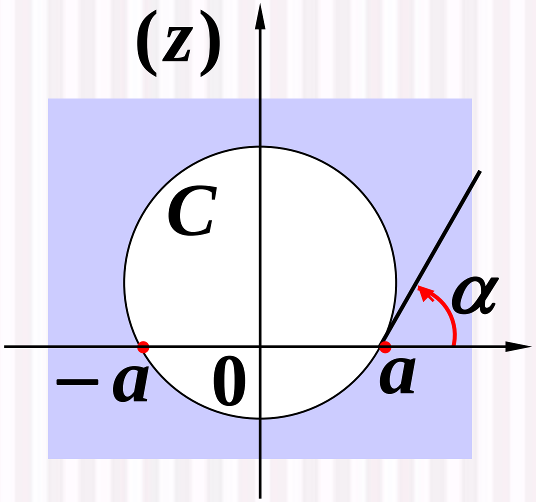
则$w=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{a^2}{z}\right)$

$\xrightarrow{\text{分解为}}$ $\begin{cases} (1)\ \zeta=\dfrac{z-a}{z+a} \\ (2)\ t=\zeta^2 \\ (3)\ \dfrac{z-a}{z+a}=t \text{ 或 } w=a\dfrac{1+t}{1-t} \end{cases}$

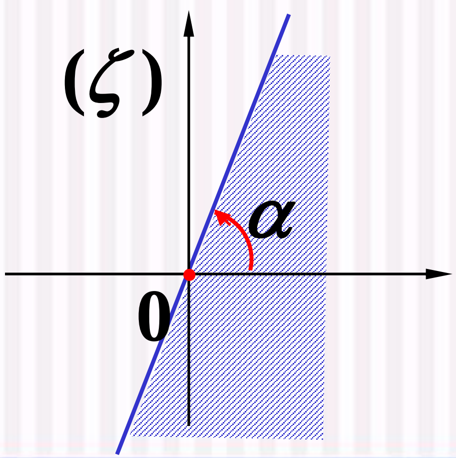
如果在映射$\zeta=\dfrac{z-a}{z+a}$下:

$$z=a\to\zeta=0,\qquad z=-a\to\zeta=\infty,$$

则: $C\to$过$\zeta=0$的直线.



$$\zeta = \frac{z-a}{z+a}$$



z取实数时,ζ也为实数

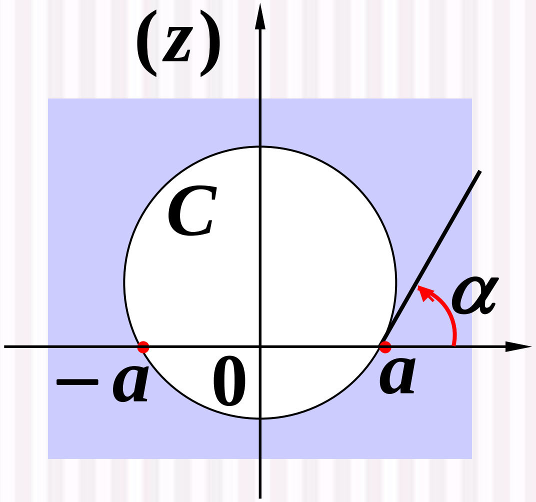
$$\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}z} = \frac{2a}{(z+a)^2} > 0.$$

则:

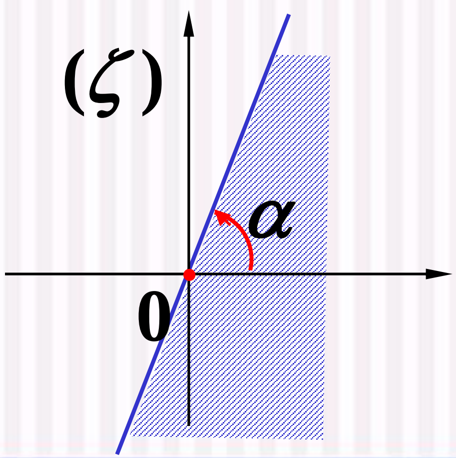
1) z沿实轴右移,ζ沿实轴右移

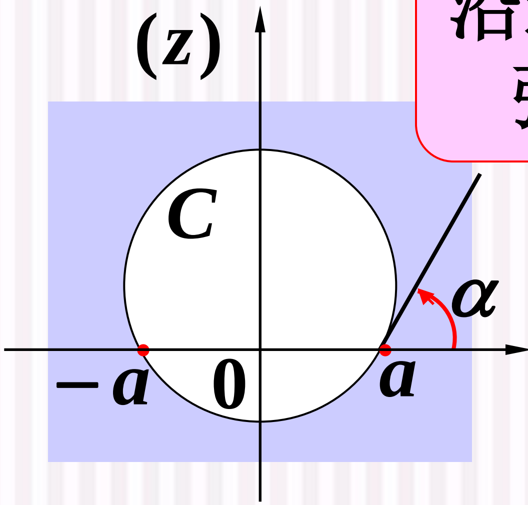
C外部 $\to$ ζ半平面(含正实轴)

2)具有保角性

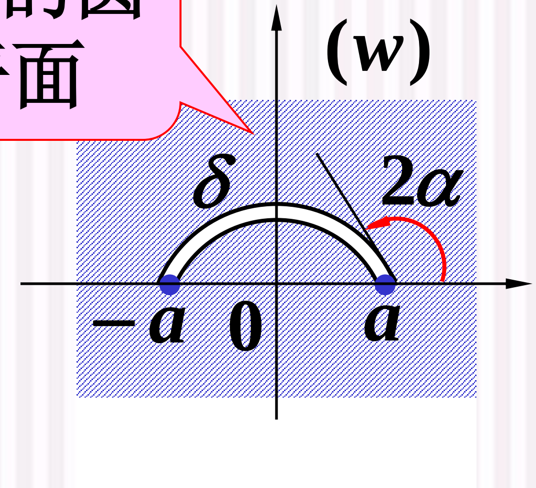


$$\zeta=\frac{z-a}{z+a}$$





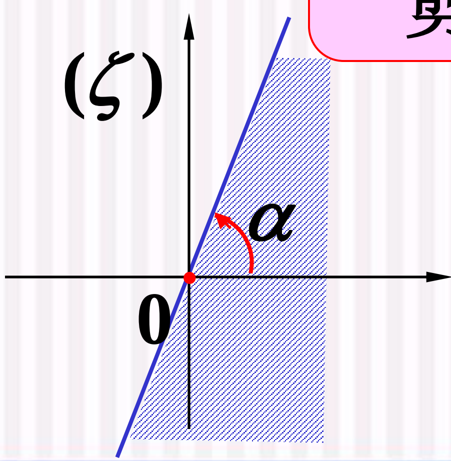
沿连接点*a*与-*a*的圆弧割开的*w*平面



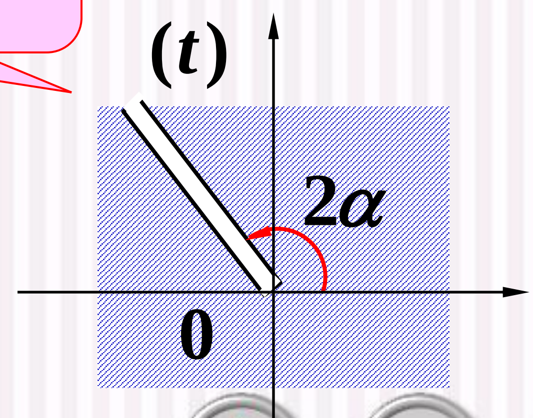
$$\zeta = \frac{z-a}{z+a}$$

$$w = a\frac{1+t}{1-t}$$

沿射线arg $t = 2a$ 剪开的半平面

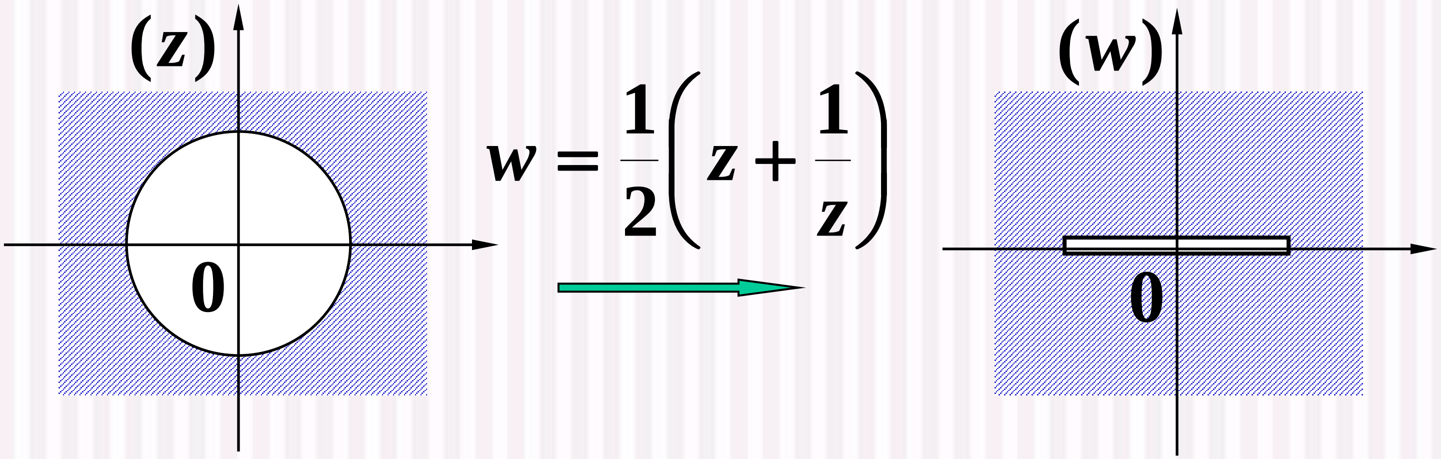


$$t = \zeta^2$$



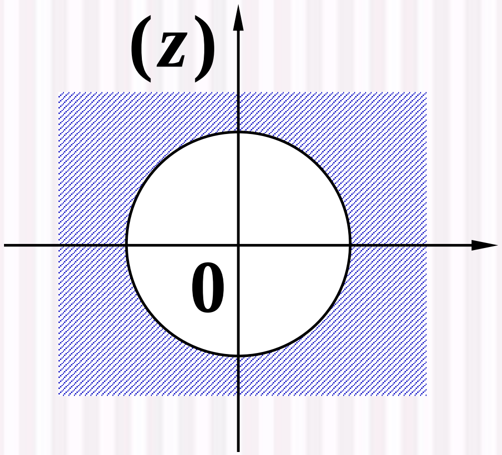
结论: 映射$w=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{a^2}{z}\right)$将一个通过点$z=a$与$z=-a(a>0)$的圆周$C$的外部一一对应地、共形地映射成除去连接点$w=a$与$w=-a$的圆弧$\delta$的扩充平面. 当$C$为圆周$|z|=a$时, δ将退化成线段$-a\le \mathrm{Re}(w)\le a, \mathrm{Im}(w)=0.$

说明: 1) 当$a=1$时,

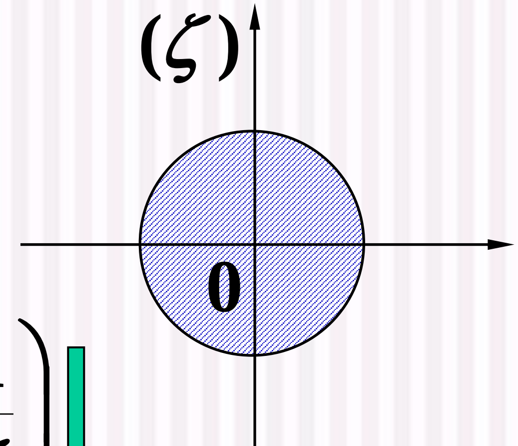


$|z|>1$被一一对应,共形地映射为具有割痕$[-1,1]$的扩充平面.

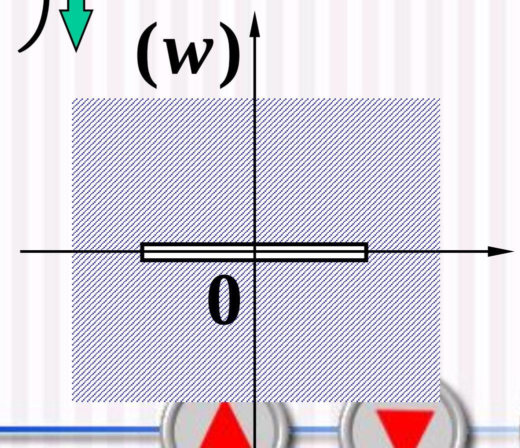
2) 令$z=\dfrac{1}{\zeta}$, $w=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$ $\longrightarrow$ $w=\dfrac{1}{2}\left(\zeta+\dfrac{1}{\zeta}\right)$



$z=\dfrac{1}{\zeta}$ $\longrightarrow$



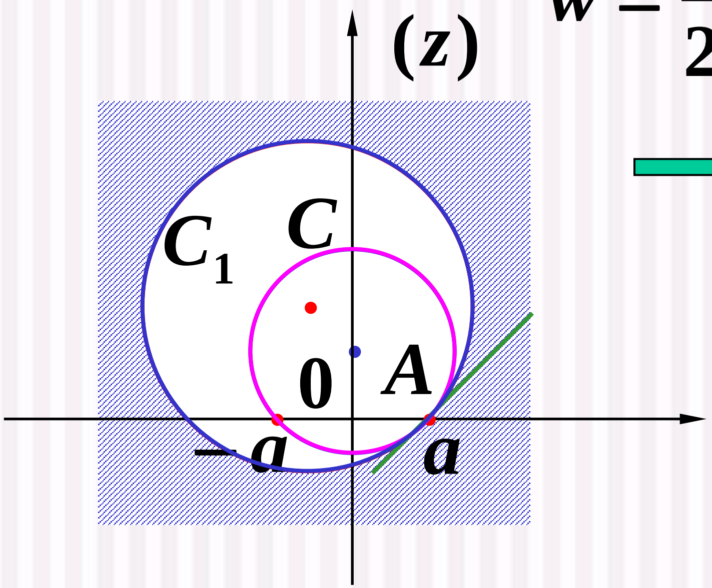
$w=\dfrac{1}{2}\left(\zeta+\dfrac{1}{\zeta}\right)$ $\downarrow$

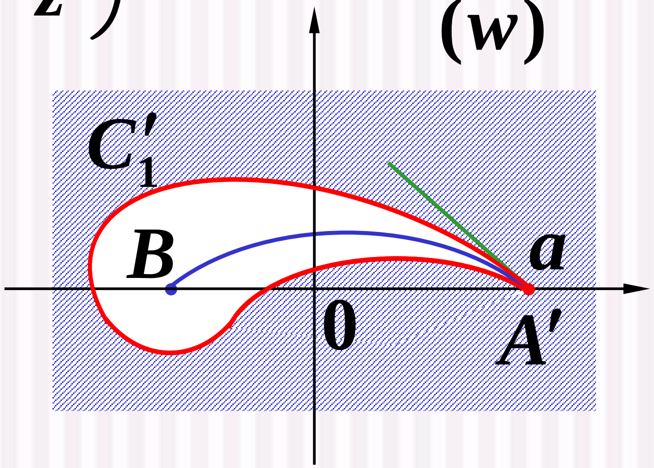


$|z|<1$被一一对应,共形地地映射为具有割痕$[-1,1]$的扩充平面.

3.儒可夫斯基截线 (机翼截线)

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{a^2}{z}\right)$$





闭曲线C_1'称为儒可夫斯基截线,也称为机翼截线.

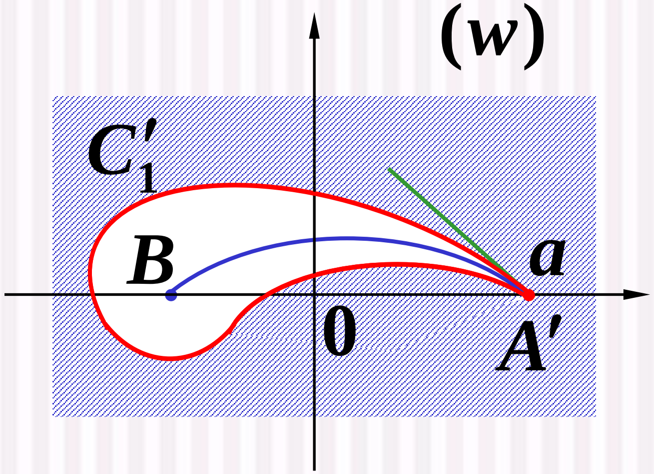
映射将圆周C_1'的外部 → 儒可夫斯基截线的外部.

机翼截线名称的由来:

由于C_1'的形状很象飞机机翼的横断面周线,

且因儒可夫斯基采用它

作为机翼的型线.



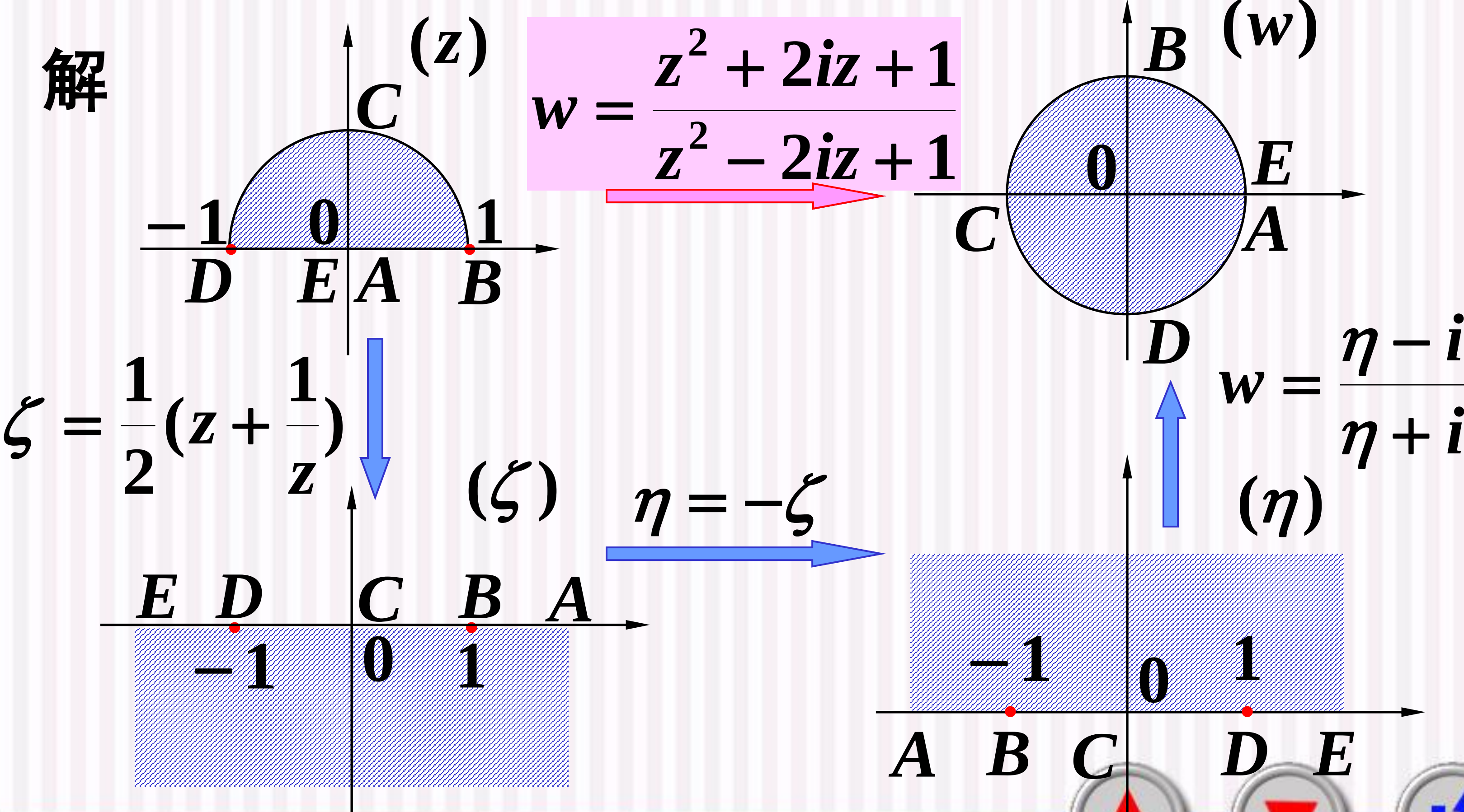
假设机翼型线为此

曲线而进行一些流体力学上的理论计算，使对机

翼绕流的研究化为对圆柱绕流的研究.

例7 求把上半个单位圆：$|z|<1, \mathrm{Im}(z>0)$映射成单位圆$|w|<1$的映射.

解



四、小结与思考

本课我们学习了幂函数、指数函数的映射特点，将分式线性映射与初等函数相结合，求一些边界由圆周、圆弧、直线、直线段所围区域的共形映射问题是本章的难点.

思考题

映射$w=\sqrt{z}$能否将$|z|<1$映为$|w|<1, \mathrm{Im}(z)>0$?

思考题答案

不能. $|z|<1$不是角形域.

作业：P246，19（1、2、3、4、5、6）