2024年春季（1-18周），F207 周一8:00-9:40

（1-9周）F207周三8：00-9：40

复变函数

朱炬波 13973168169
zhujubo@mail.sysu.edu.cn



第三节 基本定理的推广

——复合闭路定理

- 一、问题的提出
- 二、复合闭路定理
- 三、典型例题
- 四、小结与思考

一、问题的提出

$$\oint_c \frac{1}{z-1} dz.$$

c 是包含 $z=1$ 的任意闭曲线

由此希望将基本定理推广到多连域中.

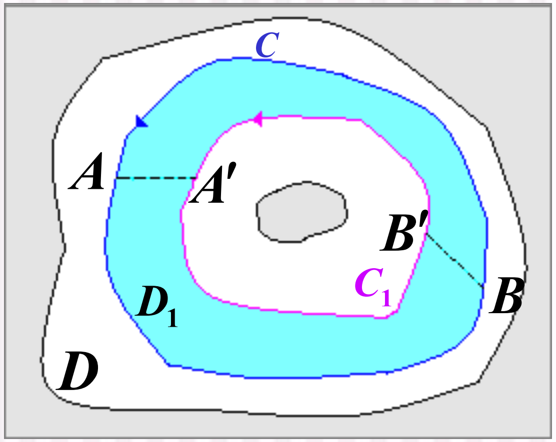
二、复合闭路定理

1. 闭路变形原理

设函数 $f(z)$ 在多连通域内解析,

C 及 C_1 为 D 内的任意两条简单闭曲线(正向为逆时针方向),

C 及 C_1 为边界的区域 D_1 全含于 D.



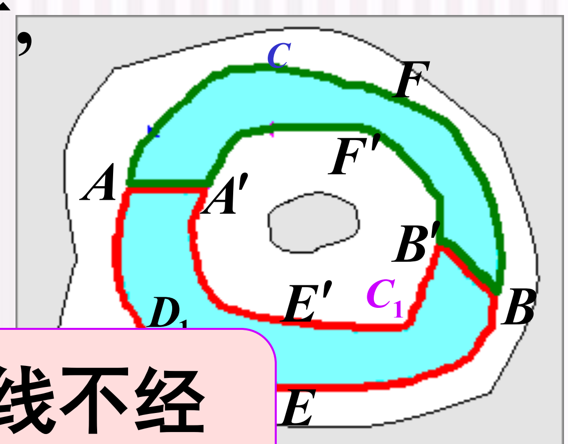
作两段不相交的弧段 $\widehat{AA'}$ 和 $\widehat{BB'}$,

如果我们把这两条简单闭曲线 C 及 C_1^- 看成一条复合闭路 Γ， Γ 的正方向为:

外面的闭曲线 C 按逆时针进行,

内部的闭曲线 C_1 按顺时针进行,

(即沿 Γ 的正向进行时, Γ 的内部总在 Γ 的左手边),



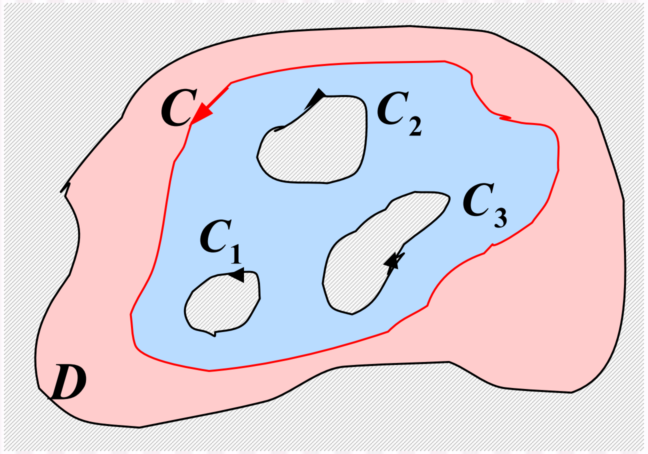
那

说明：在变形过程中曲线不经过函数 $f(z)$ 的不解析的点.

解析函数 曲线的积分， 不因闭曲线在区域内作连续变形而改变它的值. 闭路变形原理

2. 复合闭路定理

设 C 为多连通域 D 内的一条简单闭曲线，$C_1, C_2, \cdots, C_n$ 是在 C 内部的简单闭曲线，它们互不包含也互不相交，并且以 $C, C_1, C_2, \cdots, C_n$ 为边界的区域全含于 D，



如果 $f(z)$ 在 D 内解析，

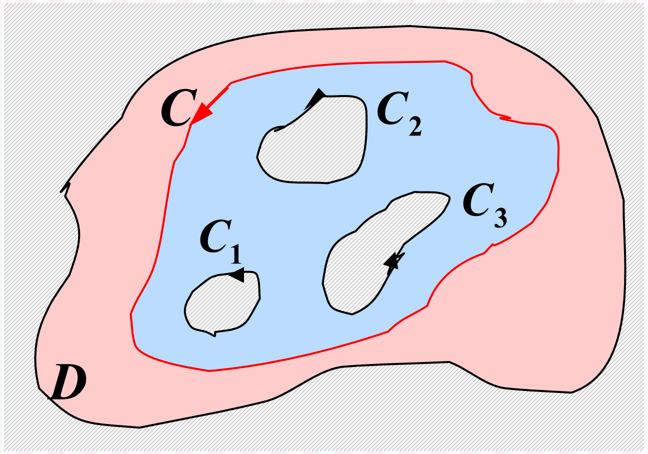
那末

$$(1)\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n}\oint_{C_k} f(z)\mathrm{d}z,$$

其中 C 及 C_k 均取正方向;

(2) $\oint_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z = 0.$

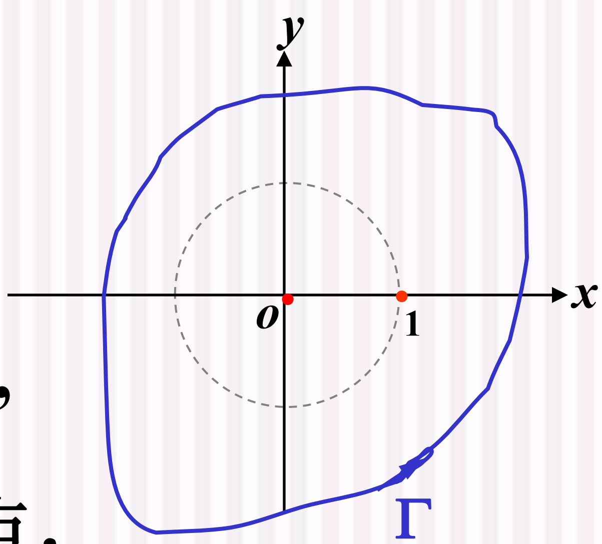
这里 Γ 为由 $C, C_1, C_2, \cdots, C_n$ 组成的复合闭路(其方向是：C 按逆时针进行, $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 按顺时针进行).



三、典型例题

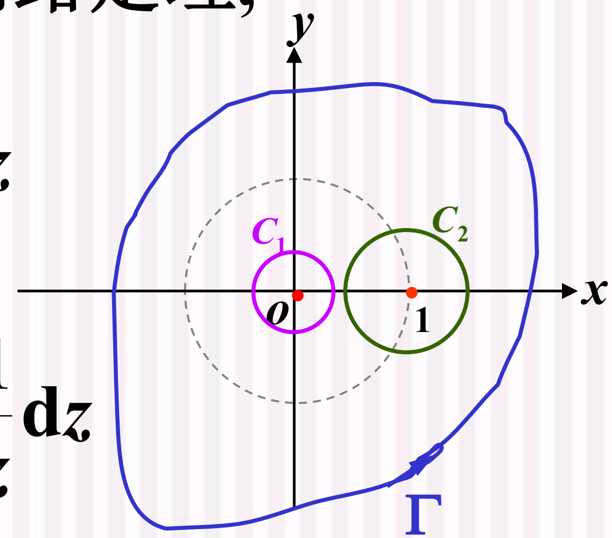
例1 计算积分 $\oint_{\Gamma}\frac{2z-1}{z^2-z}\mathrm{d}z$, Γ 为包含圆周 $|z|=1$ 在内的任何正向简单闭曲线.

解 因为函数 $\frac{2z-1}{z^2-z}$ 在复平面内有两个奇点 $z=0$ 和 $z=1$,



依题意知, Γ 也包含这两个奇点,

在Γ内作两个互不包含也互不相交的正向圆周 C_1 和 C_2, C_1 只包含奇点 $z=0$, C_2 只包含奇点 $z=1$, 根据复合闭路定理,

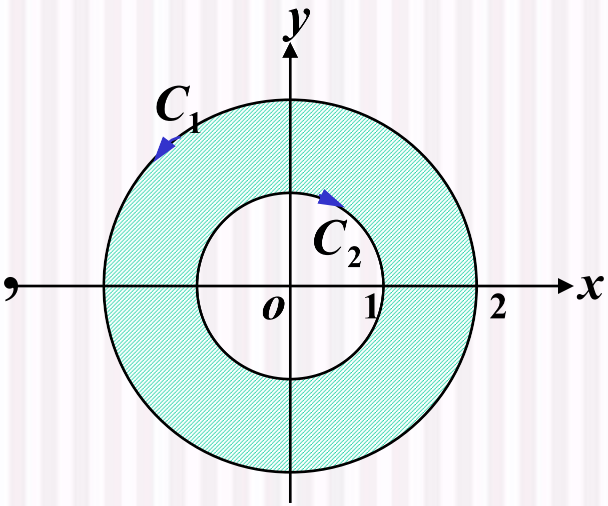


$$\oint_{\Gamma}\frac{2z-1}{z^2-z}\mathrm{d}z=\oint_{C_1}\frac{2z-1}{z^2-z}\mathrm{d}z+\oint_{C_2}\frac{2z-1}{z^2-z}\mathrm{d}z$$

$$=\oint_{C_1}\frac{1}{z-1}\mathrm{d}z+\oint_{C_1}\frac{1}{z}\mathrm{d}z+\oint_{C_2}\frac{1}{z-1}\mathrm{d}z+\oint_{C_2}\frac{1}{z}\mathrm{d}z$$

$$=0+2\pi i+2\pi i+0=4\pi i.$$

例2 计算积分 $\oint_{\Gamma}\frac{e^z}{z}\mathrm{d}z$，$\Gamma$ 为正向圆周 $|z|=2$ 和负向圆周 $|z|=1$ 所组成.

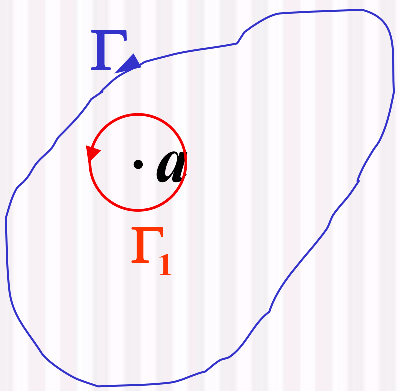


解 C_1 和 C_2 围成一个圆环域，

函数 $\frac{e^z}{z}$ 在此圆环域和其边界上处处解析，圆环域的边界构成一条复合闭路，

根据闭路复合定理，$\oint_{\Gamma}\frac{e^z}{z}\mathrm{d}z=0.$

例3 求 $\oint_{\Gamma}\frac{1}{(z-a)^{n+1}}\mathrm{d}z$，$\Gamma$ 为含 a 的任一简单闭路，n 为整数.



解 因为 a 在曲线 Γ 内部，

故可取很小的正数 ρ，

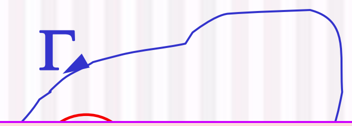
使 $\Gamma_1: |z-a|=\rho$ 含在 Γ 内部，

$\frac{1}{(z-a)^{n+1}}$ 在以 $\Gamma+\Gamma_1^-$ 为边界的复连通域

内处处解析，

由复合闭路定理,

$$\oint_\Gamma \frac{1}{(z-a)^{n+1}}\mathrm{d}z = \oint \frac{1}{(z-a)^{n+1}}\mathrm{d}z$$



令 $z = a + \rho e^{i\theta}$

$$\oint_{\Gamma_1} \frac{1}{(z-a)^{n+1}}\mathrm{d}z = \int_0$$

此结论非常重要, 用起来很方便, 因为Γ不必是圆, a也不必是圆的圆心, 只要a在简单闭曲线Γ内即可.

故

$$\boxed{\oint_\Gamma \frac{1}{(z-a)^{n+1}}\mathrm{d}z = \begin{cases} 2\pi i, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}}$$

四、小结与思考

本课所讲述的复合闭路定理与闭路变形原理是复积分中的重要定理, 掌握并能灵活应用它是本章的难点.

常用结论:

$$\oint_{\Gamma} \frac{1}{(z-a)^{n+1}} \mathrm{d}z = \begin{cases} 2\pi i, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

思考题

应用柯西–古萨定理应注意什么?

思考题答案

(1) 注意定理的条件“单连通域”.

反例: $f(z)=\dfrac{1}{z}$ 在圆环域 $\dfrac{1}{2}<|z|<\dfrac{3}{2}$ 内;

(2) 注意定理的不能反过来用.

即不能由 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z=0$, 而说 $f(z)$ 在 C 内处处解析.

反例: $f(z)=\dfrac{1}{z^2}$ 在 $|z|=1$ 内.

思考题

复合闭路定理在积分计算中有什么用? 要注意什么问题?

思考题答案

利用复合闭路定理是计算沿闭曲线积分的最主要方法.

使用复合闭路定理时, 要注意曲线的方向.