

机器人原理

操作臂的线性控制

中山大学人工智能学院



9.1 引言

本章讨论的控制方法属于**线性控制系统**的范畴。严格讲，线性控制技术仅适用于能够用线性微分方程进行数学建模的系统。对于操作臂的控制，这种线性方法实质上是一种近似方法，因为在第 6 章我们已看到，操作臂的动力学方程一般都是由非线性微分方程来描述的。但是，进行这种近似通常是可行的，而且这些线性方法是当前工程实际中最常用的方法。



9.2 反馈与闭环控制

- 我们将操作臂看作一个机构，在这个机构的每个关节处安装一个用来测量关节角的传感器和一个能够对相邻连杆（高序号连杆）施加扭矩的驱动器。有时也采用其他方式的传感器布置，但大多数机器人在每一个关节都有一个位置传感器。有时在关节处还安装速度传感器（测速计）。尽管各种驱动和传动方式普遍应用在工业机器人中，但是大部分都可以建模为每个关节一个驱动器的叠加。
- 我们希望操作臂关节沿着指定的位置轨迹运动。而驱动器按照扭矩发送指令，因此我们必须应用某种**控制系统**计算出适当的驱动器指令去实现这个期望运动。而这些期望的扭矩主要是由关节传感器的**反馈**计算出来的。



9.2 反馈与闭环控制

图 9-1 表示轨迹生成器和机器人的关系。机器人从控制系统接收到一个关节扭矩矢量 τ 操作臂传感器允许控制器读取关节位置矢量 θ 和关节速度矢量 $\dot{\theta}$ 。图 9-1 中的所有信号线中的信号均为 $N \times 1$ 维向量。

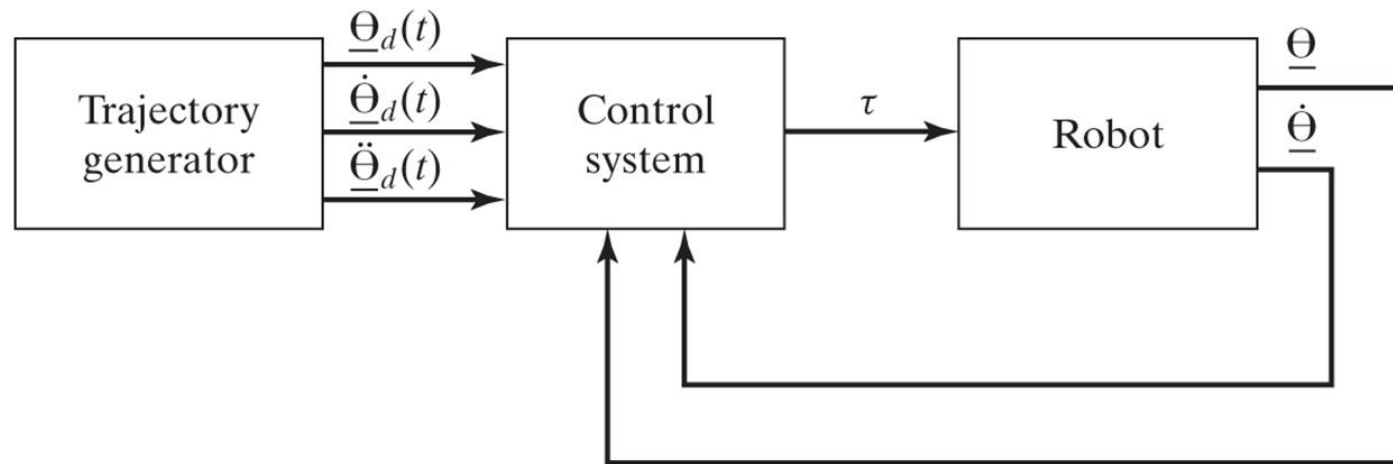


图 9-1



9.2 反馈与闭环控制

- 让我们看一下图 9-1 中标有“控制系统”的模块能够进行哪些算法。一种可能是用机器人的动力学方程（见第 6 章）去计算一条特定轨迹所需的扭矩。由轨迹生成器给定 θ_d ， $\dot{\theta}_d$ 和 $\ddot{\theta}_d$ 于是可以用式 (6.59) 计算

$$\tau = M(\theta_d)\ddot{\theta}_d + V(\theta_d, \dot{\theta}_d) + G(\theta_d) \quad (9.1)$$

- 上式可按照指定的模型计算出所需的扭矩以实现期望轨迹。如果动力学模型是完整和精确的，且没有“噪声”或者其他干扰存在，沿着期望轨迹连续应用式 (9.1) 即可实现期望的轨迹。然而在实际情况下由于动力学模型的不理想以及不可避免的干扰使得这个方案并不实用。这种控制技术称为开环控制方式，因为这种控制方式没有利用关节传感器的反馈。随（即式 (9.1) 是期望轨迹为 θ_d 导数的函数，而不是实际轨迹 θ 的函数）。



9.2 反馈与闭环控制

- 一般而言，建立一个高性能的控制系统的唯一方法就是利用关节传感器的反馈，如图 9-1所示。这个反馈一般是通过比较期望位置和实际位置之差以及期望速度和实际速度之差来计算**伺服误差**：

$$\begin{aligned} e &= \theta_d - \theta \\ \dot{e} &= \dot{\theta}_d - \dot{\theta} \end{aligned} \tag{9.2}$$

- 这样控制系统就能够根据伺服误差函数计算驱动器需要的扭矩。显然，这个基本思想是通过计算驱动器的扭矩来减少伺服误差。这种利用反馈的控制系统称为**闭环**控制系统。从图 9-1中可以清楚地看出操作臂的控制系统形成了一个封闭的“环”。



9.2 反馈与闭环控制

- 设计控制系统的核心问题是保证设计的闭环系统满足特定的性能要求。最基本的标准是系统要保持**稳定**。为此，稳定系统的定义是机器人在按照各种期望轨迹运动时系统的误差始终保持“较小”，即使存在一些“中度”的干扰。注意，设计不合理的控制系统有时会使系统的性能**不稳定**，在该系统中伺服误差增大而不是减小。因此，控制系统的设计者的首要任务是要证明他（她）设计的系统是一个稳定的系统；其次是要保证这个闭环系统的性能满足要求。实际上，这些“证明”包括了那些基于某些假设和模型的数学证明以及从仿真或试验中得到的经验结果。



9.2 反馈与闭环控制

- 图 9-1 中，所有信号线表示 $N \times 1$ 维向量，因此，操作臂的控制问题是一个**多输入多输出（MIMO）**控制问题。在本章中，我们采用一种简单的方法建立一个控制系统，即把每个关节作为一个独立系统进行控制。因此，对于 N 个关节的操作臂来说，要设计 N 个独立的**单输入单输出（SISO）**控制系统。这是目前为大部分工业机器人供应商所采用的设计方法。这种**独立关节控制**方法是一种近似方法，这个系统的运动方程（第 6 章得出的）不是独立的，而是高度耦合的。本章在后面将给出线性方法的证明，至少是关于大传动比操作臂的证明。



9.3 二阶线性系统

- 在讨论操作臂的控制问题之前，我们先以一个简单的机械系统为例开始讨论。图 9-2 表示一个质量为 m 的质量块连接在一个刚度为 k 的弹簧上、所受摩擦系数为 b 。图 9-2 中还标出了质量块的初始位置和 x 轴的正方向。假定摩擦力与质量块的速度成正比，由质量块的受力图可以直接得出运动方程

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0 \quad (9.3)$$

- 因此，这个单自由度系统的开环动力学问题便可由一个二阶线性常微分方程描述。微分方程 (9.3) 的解 $x(t)$ 是关于时间的函数。它确定了质量块的运动。方程的解取决于质量块的**初始条件**，即初始位置和初始速度。



9.3 二阶线性系统

- 我们以这个简单的机械系统为例来回顾一些控制系统的基本概念。但是仅通过这里的简单介绍不可能解释清楚控制理论领域中的全部问题。在我们讨论控制问题时, 仅要求学生们熟悉简单的微分方程即可。因此我们不会用到控制工程领域中许多常用的工具。例如, **拉普拉斯变换**以及其他常用的技巧, 既不是必备的知识也不需要在这里介绍。



9.3 二阶线性系统

- 直观上看，图 9-2 的系统能表示出几种不同的特征运动。例如，假设弹簧刚度很小（即 k 很小）而摩擦力很大（即 b 很大），当质量块受到扰动离开平衡位置后，它将以缓慢的衰减运动方式回到平衡位置。相反如果弹簧刚度很大而摩擦力很小，质量块将经过几次振荡才能回到平衡位置。出现这几种不同情况的原因是由于方程（9.3）的解的特性取决于参数 m 、 b 和 k 的值。

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

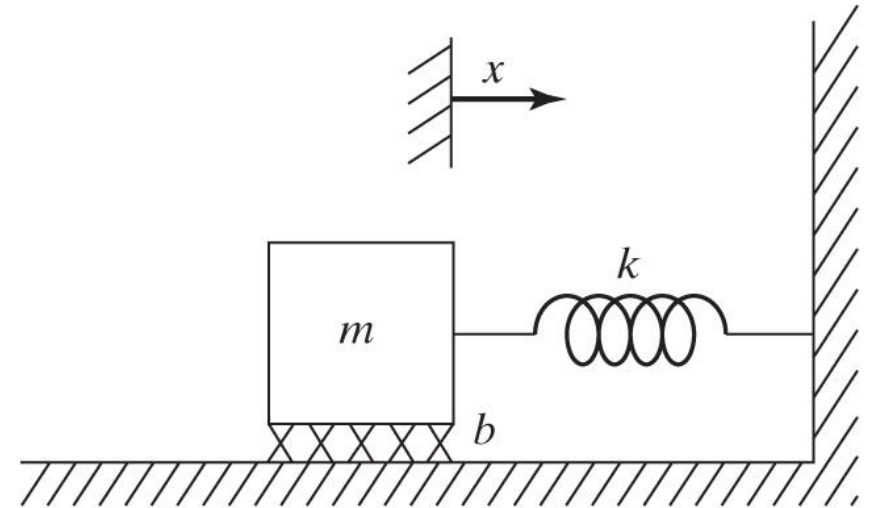


图9-2



9.3 二阶线性系统

- 由微分方程知识(1)可知方程 (9.3) 的解的形式与特征方程的根有关

(9.4)

$$ms^2 + bs + k = 0$$

$$s_1 = -\frac{b}{2m} + \frac{\sqrt{b^2 - 4mk}}{2m} \quad (9.5)$$

$$s_2 = -\frac{b}{2m} - \frac{\sqrt{b^2 - 4mk}}{2m}$$



9.3 二阶线性系统

- s_1 和 s_2 现在复平面中的位置（有时称作系统的**极点**）代表系统的运动特性。如果 s_1 和 s_2 为实根，那么系统将呈现衰减运动而没有振荡，如果 s_1 和 s_2 为复根（即虚部存在），那么系统将出现振荡。我们将有三种情况需要研究：
- 1) **两个不相等的实根**。当 $b^2 > 4mk$ 时的情况，即系统主要受摩擦力影响，系统将缓慢回到平衡位置而不出现振荡。这种情况称为过阻尼。
- 2) **复根**。当 $b^2 < 4mk$ 时的情况，即系统主要受系统弹性力的影响，系统将出现振荡。这种情况称为欠阻尼。
- 3) **两个相等实根**。当 $b^2 = 4mk$ 时的情况，此时摩擦力与弹性力平衡，系统将以最短的时间回到平衡位置。这种情况称为临界阻尼。
- 第三种情况（临界阻尼）通常为期望的情况：系统在最短的时间内从非零初始位置迅速返回到平衡位置而不出现振荡。



9.3 二阶线性系统

- 两个不等实根

对于两个不相等的实根（直接代入式（9.3）），很容易得到质量块运动方程的解

$$x(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} \quad (9.6)$$

式中 s_1 和 s_2 由式（9.5）解出。系数 c_1 和 c_2 为常数，可通过任何一组已知的初始条件计算得出（即质量块的初始位置和速度）。



9.3 二阶线性系统

- 图 9-3 所示为非零初始条件下的极点位置和相应的时间响应。当二阶系统有两个不相等的实根时，系统表现为衰减运动或者过阻尼运动。
- 当一个极点的值比另一个极点的值大得多时，较大的极点值可忽略。因为这个极点的运动与另一个极点——**主极点**相比将迅速衰减到零。主极点的概念可以扩展到更高阶的系统——例如，通常一个三阶系统通常可以认为有两个主极点而转化为二阶系统来进行讨论。

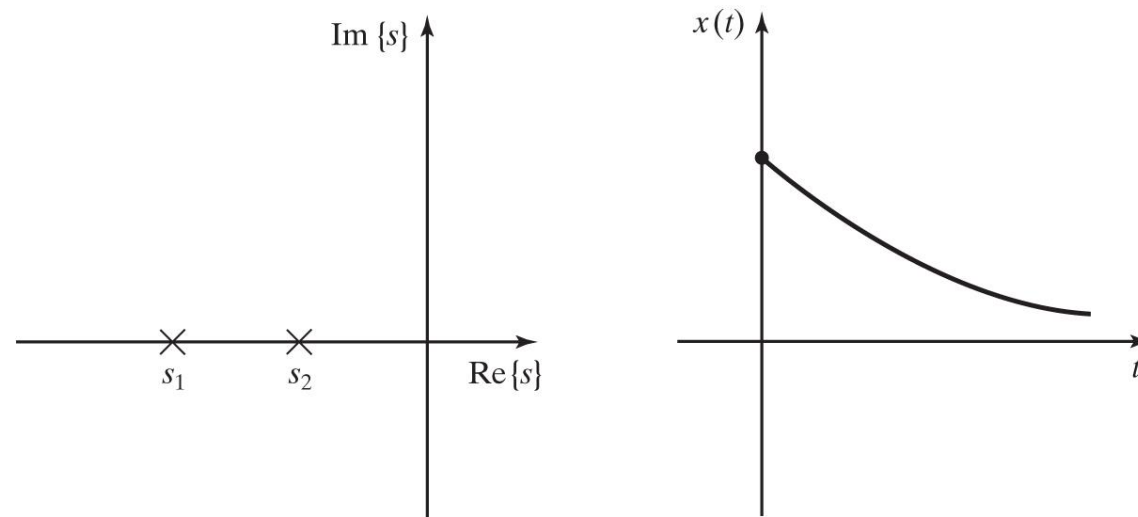


图9-3



9.3 二阶线性系统

- **例9.1** 求图 9-2 所示 系统的运动。假设各参数值如下： $m = 1$ 、 $b = 5$ 、 $k = 6$ 。质量块(初始时静止)在 $x = -1$ 处被释放。

$$s^2 + 5s + 6 = 0 \quad (9.7)$$

系统的响应为

$$x(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t} \quad (9.8)$$

根据初始条件计算 c_1 , c_2

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= -1 \\ -2c_1 - 3c_2 &= 0 \end{aligned} \quad (9.9)$$

解得

$$x(t) = -3e^{-2t} + 2e^{-3t} \quad (9.10)$$



9.3 二阶线性系统

- 复根
- 特征方程有两个复根的情况

$$\begin{aligned}s_1 &= \lambda + \mu i \\ s_2 &= \lambda - \mu i\end{aligned}\tag{9.11}$$

- 这种情况下解的形式同上

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x\tag{9.12}$$

- 然而方程 (9.12) 难以求解，因为含虚数，由欧拉公式
- 将解的形式写成如下

$$x(t) = c_1 e^{\lambda t} \cos(\mu t) + c_2 e^{\lambda t} \sin(\mu t)\tag{9.14}$$

- 同上将 c_1 , c_2 写成如下形式

$$\begin{aligned}c_1 &= r \cos \delta \\ c_2 &= r \sin \delta \\ x(t) &= c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t}\end{aligned}\tag{9.15}$$



9.3 二阶线性系统

- 这样式 (9.14) 可以改写为

$$x(t) = r e^{\lambda t} \cos(\mu t - \delta) \quad (9.16)$$

$$r = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \quad (9.17)$$

$$\delta = \text{Atan2}(c_2, c_1)$$

- 从这个式子容易看出，本式所表达的运动形式为振幅按指数形式衰减到零的振动。另一种常用的方法是应用阻尼比和固有频率描述二阶振动系统。这两项是由参数化特征方程给出的

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad (9.18)$$

- 式中 ξ 为阻尼比（介于 0 和 1 之间的无量纲数）， ω_n 为固有频率。

$$\lambda = -\zeta\omega_n$$

$$\mu = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \quad (9.19)$$



9.3 二阶线性系统

- 这两个极点的虚部有时被称为阻尼固有频率。对于图 9-2 中所示的有阻尼的质量-弹簧系统，阻尼比和固有频率分别为

$$\zeta = \frac{b}{2\sqrt{km}} \quad (9.20)$$

$$\omega_n = \sqrt{k/m}$$

- 对于无阻尼系统（ $b = 0$ 时），阻尼比为 0；
- 对于临界阻尼系统（ $b^2 = 4mk$ 时），阻尼比为 1。



9.3 二阶线性系统

- 图 9-4 所示为非零初始条件下的极点位置和对应非零初始位置的时间响应。当一个二阶系统具有复根时, 系统表现为振荡或欠阻尼运动。

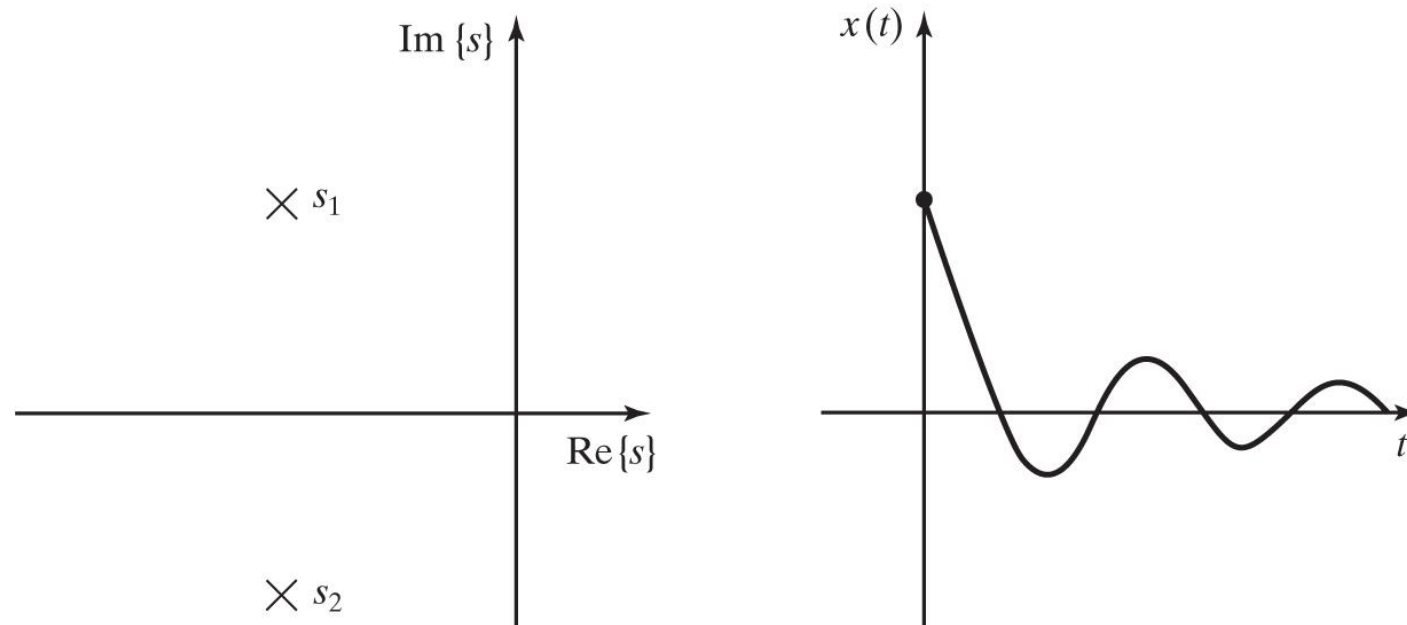


图9-4



9.3 二阶线性系统

- **例9.2** 求图 9-2 所示 系统的运动。假设各 参数值 如下： $m=1$ 、 $b=1$ 、 $4k=1$, 质量块（初始时静止）在 $x=-1$ 处被 释放。
- 特征方程为 $s^2 + s + 1 = 0$ (9.21)
- 解得 $s_i = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$
- 系统的响应为 $x(t) = e^{-\frac{t}{2}} \left(c_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + c_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right)$ (9.22)
- 根据已 知的初始条件 计算 c_1 , c_2 。 为了在 $t=0$ 时满足上述条件, 必须有 $c_1 = -1$ 且 $-\frac{1}{2}c_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}c_2 = 0$ (9.23)



9.3 二阶线性系统

- 解得 $c_1 = -1, c_2 = \frac{-\sqrt{3}}{3}$ 。因此当 $t \geq 0$ 时，系统的运动为

$$x(t) = e^{-\frac{t}{2}} \left(-\cos \frac{\sqrt{3}}{2} t - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right) \quad (9.24)$$

- 也可写为

$$x(t) = \frac{2\sqrt{3}}{3} e^{-\frac{t}{2}} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} t - 120^\circ \right) \quad (9.25)$$



9.3 二阶线性系统

- 两个相等实根
- 将两个相等的实根(即**重根**)代入式(9.3), 解的形式为

$$x(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 t e^{s_2 t} \quad (9.26)$$

- 这种情况下 $s_1 = s_2 = -\frac{b}{2m}$, 因此可以写成

$$x(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-\frac{b}{2m} t} \quad (9.27)$$

- 给定任意 c_1 , c_2 和 a , 应用l'Hospital'法则很快就可以得到

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (c_1 + c_2 t) e^{-at} = 0 \quad (9.28)$$



9.3 二阶线性系统

- 图 9-5 所示为非零初始条件下的极点位置和相应的时间响应。当二阶系统有两个相等的实根时，系统表现为临界阻尼运动，系统将以最短的时间回到平衡位置而不出现振荡。

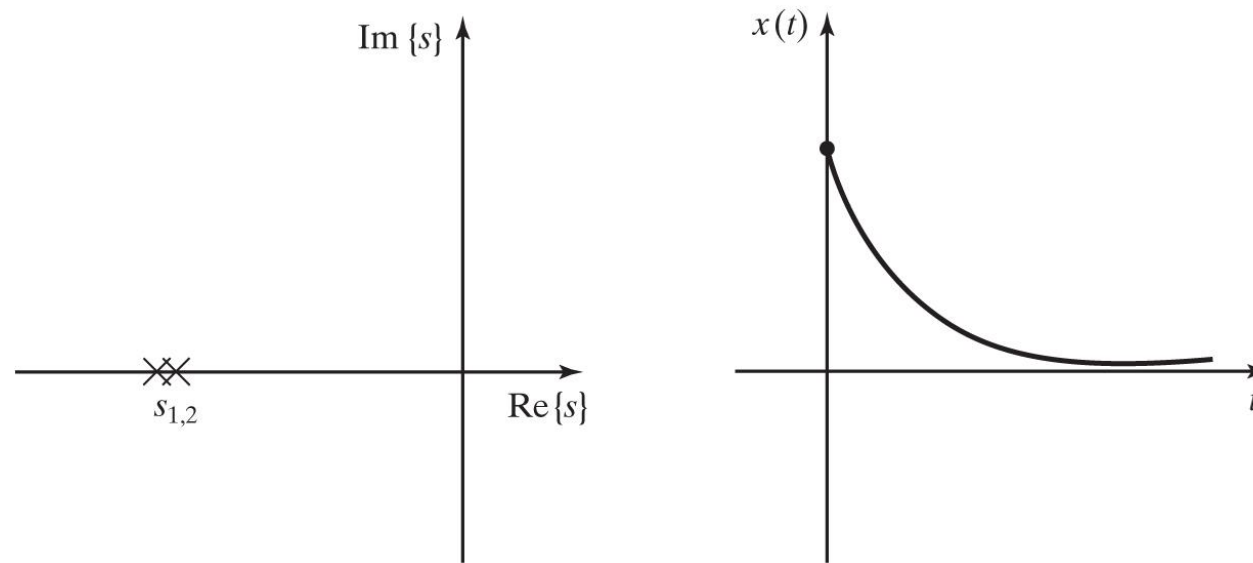


图9-5



9.3 二阶线性系统

- **例9.3** 求图 9-2 所示 系统的运动。假设各参数值 如下： $m = 1$ 、 $b = 4$ 、 $k = 4$, 质量块(初始时 静止)在 $x = -1$ 处被释放。

特征方程为

$$s^2 + 4s + 4 = 0 \quad (9.29)$$

解得 $s_1 = s_2 = -2$. 因此系统的响应为 (9.30)

$$x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-2t}$$

根据已 知的初始条件 $x(0) = -1$ 和 $\dot{x}(0) = 0$ 计算 c_1 和 c_2 。为了在 $t = 0$ 时满足 上述条件， 必须有

$$\begin{aligned} c_1 &= -1 \\ -2c_1 + c_2 &= 0 \end{aligned} \quad (9.31)$$

解得 $c_1 = -1$, $c_2 = -2$. 因此当 $t \geq 0$ 时， 系统的运动为

$$x(t) = (-1 - 2t)e^{-2t} \quad (9.32)$$



9.3 二阶线性系统

- 从例9.1 到例 9.3 的系统都是稳定的。与图 9-2 类似的物理系统都是这种情况。这些机械系统都有如下的特性：

$$m > 0$$

$$b > 0$$

$$k > 0$$

- 在下一节中可看到控制系统的作用实际上就是改变这些系数中的一个或多个值。为此必须考虑求得的系统是否稳定。



9.4 二阶系统的控制

- 如果二阶机械系统的响应并不满足我们的要求。假定求得的系统是欠阻尼系统或振荡系统，而我们需要临界阻尼系统；或者系统的弹性完全消失($k=0$)，因此当受到扰动时，系统永远也不能返回到 $x=0$ 的位置。那么通过使用传感器、驱动器和控制系统，便可以按照我们的要求改变系统的运行状况。

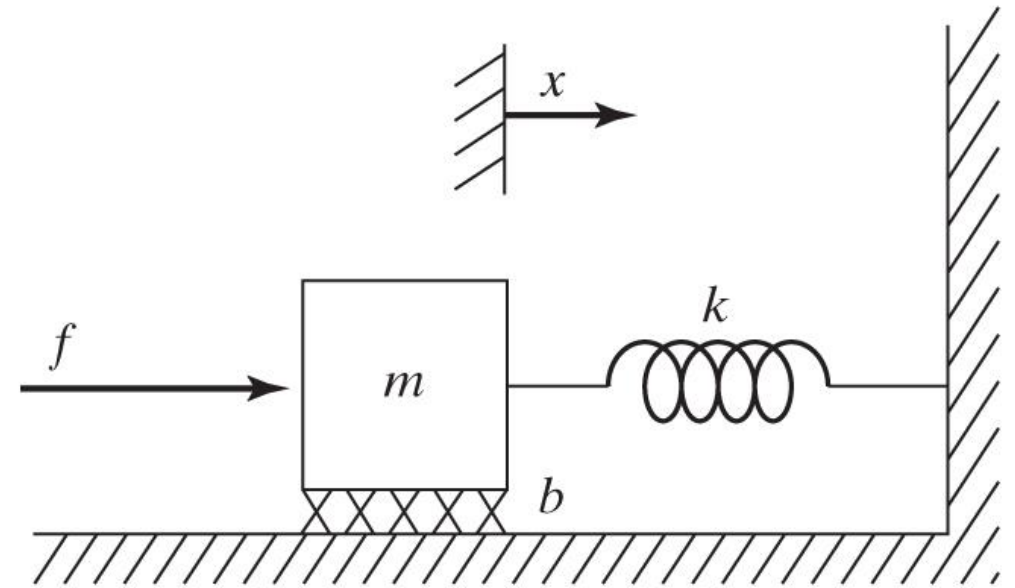


图 9-6



9.4 二阶系统的控制

- 图 9-6 所示为一个带有驱动器的有阻尼质量-弹簧系统，驱动器给质量块施加力 f
- 由受力图得出如下运动方程

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f \quad (9.34)$$

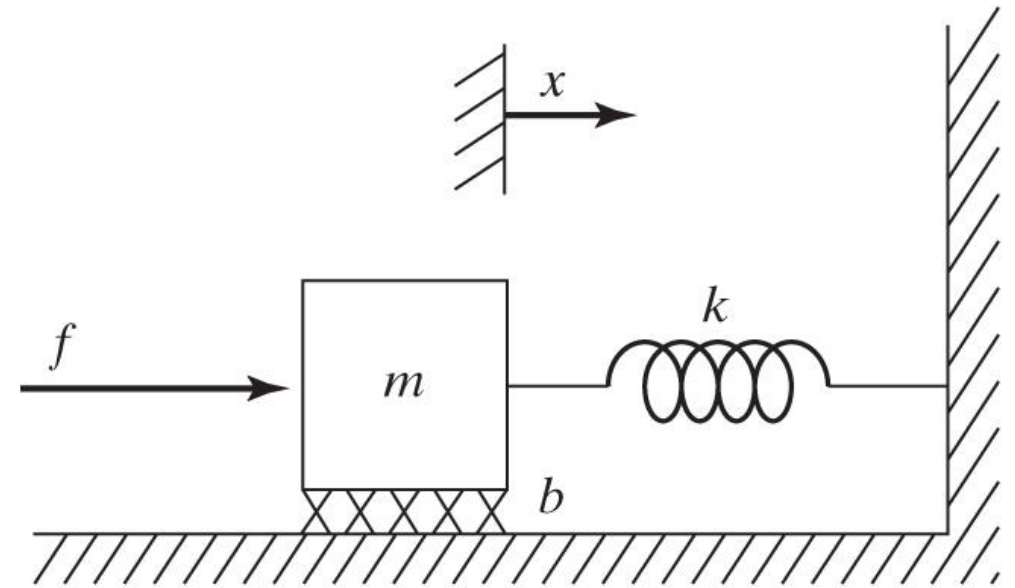


图 9-6



9.4 二阶系统的控制

- 假如可以通过传感器测定质量块的位置和速度。现在我们给出一种控制规律，它可以计算出驱动器应当施加给质量块的力，这个力是反馈的函数：

$$f = -k_p x - k_v \dot{x} \quad (9.35)$$

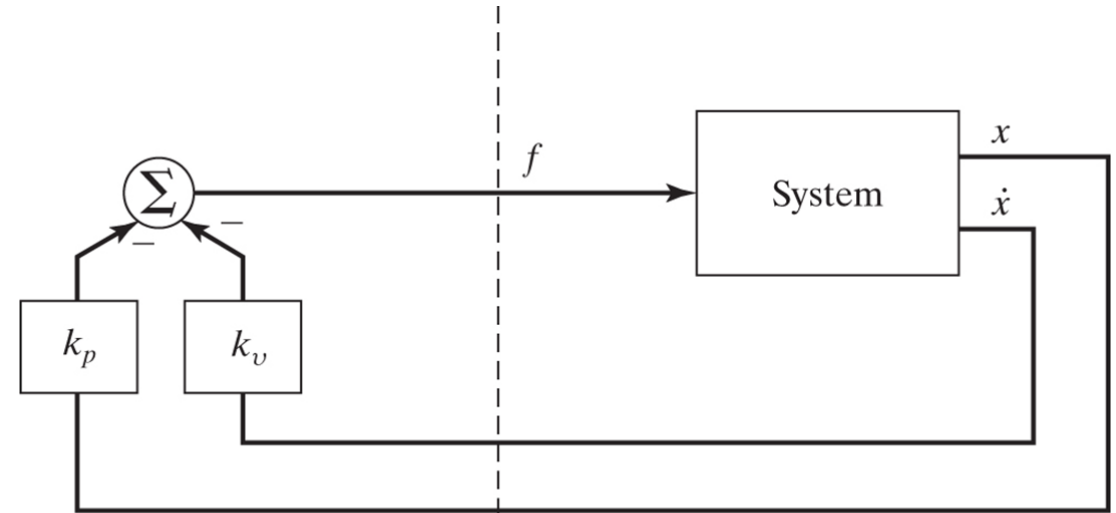


图 9-7 一个闭环系统的框图，图中虚线左边的部分为控制系统(通常通过计算机实现)，虚线右边的部分为物理系统。图中没有表示出控制计算机同驱动器输出指令以及输入传感器信息之间的接口。



9.4 二阶系统的控制

- 我们所提出的控制系统是一个**位置调节系统**——这种系统只是试图保持质量块在一个固定的位置而不考虑质量块受到的干扰力。在下一节我们将要构造一个轨迹跟踪控制系统，使质量块能跟随期望的位置轨迹运动。
- 联立开环动力学方程式 (9.34) 和控制方程 (9.35)，就可以得到闭环系统动力学方程如下

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = -k_p x - k_v \dot{x} \quad (9.36)$$

$$m\ddot{x} + (b + k_v)\dot{x} + (k + k_p)x = 0 \quad (9.37)$$

$$m\ddot{x} + b'\dot{x} + k'x = 0 \quad (9.38)$$



9.4 二阶系统的控制

$$m\ddot{x} + (b + k_v)\dot{x} + (k + k_p)x = 0$$
$$m\ddot{x} + b'\dot{x} + k'x = 0$$

- 根据这两个式子，通过设定控制增益 k_v 和 k_p 可以使闭环系统呈现任何期望的二阶系统特性。经常通过选择增益获得临界阻尼和某种直接由 k' 给出的期望闭环刚度
- k_v 和 k_p 可正可负，这是由原系统的参数决定的。
- 而当 b' 或 k' 为负数时，控制系统将是不稳定的。由二阶微分方程的解（式（9.6）、式（9.14）或者式（9.26）的形式）可以明显看出这种不稳定性。同样可以直接看出，如果 b' 或 k' 为负数，伺服误差趋向增大而不是减小。



9.4 二阶系统的控制

- **例9.4** 如图9-6中所示的系统给参数分别为 $m=1$, $b=1$, $k=1$, 求使闭环刚度为16.0时的临界阻尼系统的位置调节控制增益 k_v 和 k_p 。

如果 $k'=16.0$,那么为了达到临界阻尼,则需要

$$b' = 2\sqrt{mk'} = 8.0$$

现在 $k=1$, $b=1$, 于是有

$$k_p = 15.0$$

$$k_v = 7.0$$



9.5 控制规律分解

- 为了设计更为复杂的系统的控制规律，我们对图 9-6 中的控制系统结构稍作一些变化。把控制器分为**基于模型控制部分**和**伺服控制部分**。这样系统的参数（即 m, b, k ）仅出现在基于模型的部分，而与伺服控制部分是完全独立的。在本章中这个区别显得并不重要，但对于第 10 章中的非线性系统来说这种区别就显得非常重要了。本书中主要采用这种**控制规律分解**的方法。系统开环运动方程为

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f \quad (9.40)$$

- 将这个系统的控制器分为两个部分。此时，控制规律中基于模型的部分将应用给定的参数 m, b, k 它可以将系统简化成一个单位质量。例 9.5 说明了这个问题。控制规律的第二部分利用反馈来改进系统的特性。控制规律中基于模型的部分将系统简化成单位质量，因此伺服部分的设计就非常简单——仅需选择增益来控制一个仅由单位质量构成的系统（即没有摩擦和刚度）。



9.5 控制规律分解

- 控制规律中基于模型的控制部分的表达式为

$$f = \alpha f' + \beta \quad (9.41)$$

- 式中 α 和 β 是函数或常数，如果将 f 作为新的系统输入，那么可 α 和 β 使系统简化为单位质量。对于这种控制规律结构，系统方程（联立式（9.40）和式（9.41））为

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = \alpha f' + \beta \quad (9.42)$$

显然，为了在 f' 输入下将系统简化为单位质量，这个系统中的 α 和 β 选择如下

$$\begin{aligned} \alpha &= m \\ \beta &= b\dot{x} + kx \end{aligned} \quad (9.43)$$



9.5 控制规律分解

这些假设条件代入式(9.42), 得到系统方程

$$\ddot{x} = f' \quad (9.44)$$

这是单位质量的运动方程。

式(9.44)可作为被控系统的开环动力学方程。同前面的方法一样, 设计一个控制规律去计算 f' :

$$f' = -k_v \dot{x} - k_p x \quad (9.45)$$



9.5 控制规律分解

- 将这个控制规律与式(9.44)联立得
$$\ddot{x} + k_v \dot{x} + k_p x = 0 \quad (9.46)$$
- 在这种方法中，控制增益的设定非常简单而且与系统参数独立，即

$$k_v = 2\sqrt{k_p} \quad (9.47)$$

这时系统处于临界阻尼状态。

- 图 9-8 所示为图 9-6 系统的分解控制器示意图。

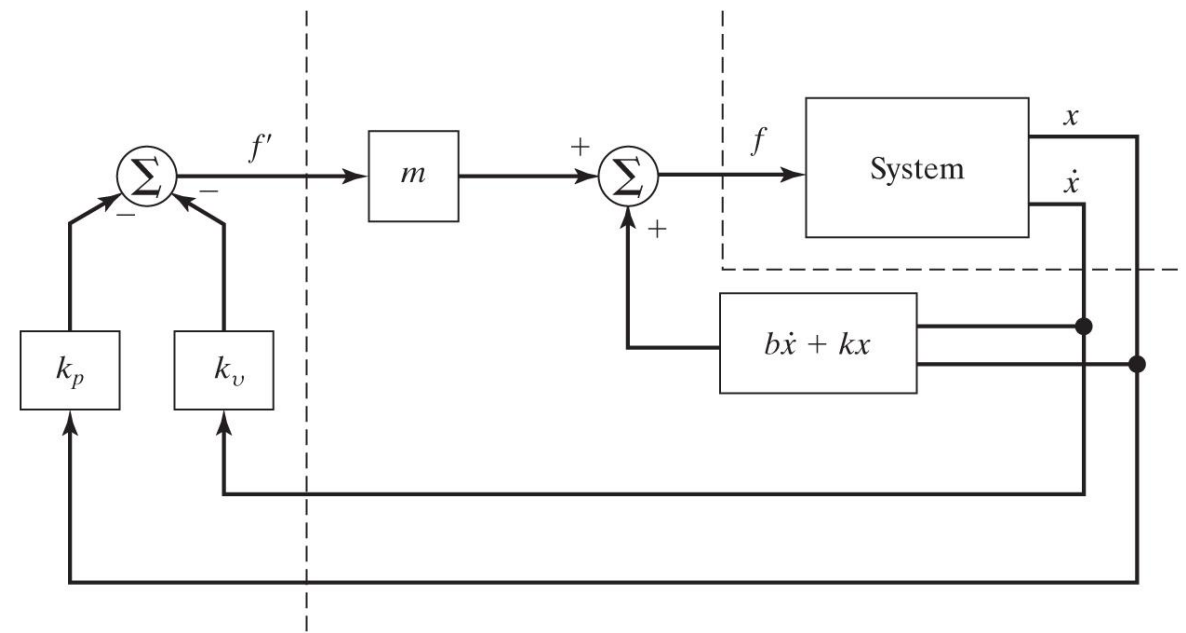


图9-8



9.5 控制规律分解

- **例9.5** 图 9-6 所示的系统参数分别为 $m=1$, $b=1$, $k=1$ 。按照位置调节控制规律, 求在闭环刚度为 16.0、系统为临界阻尼状态时的 α 和 β 以及增益上 k_p 和 k_v 。

$$\alpha = 1$$

$$\beta = \dot{x} + x$$

假定输入 f' 下系统简化为一单位质量。设定 k_p 为期望的闭环刚度, 设定系统为临界阻尼, $k_v = 2\sqrt{k_p}$.

$$k_p = 16.0$$

$$k_v = 8.0$$



9.6 轨迹跟踪设置

- 我们不仅要求质量块能够保持在期望位置，而且希望扩展控制器功能，使质量块能够跟踪一条轨迹。已知轨迹 $x_d(t)$ 是时间的函数，给定质量块的期望位置。假设轨迹是光滑的(即一阶导数存在)，并且轨迹发生器在任一时间始终给出一组 x_d, \dot{x}_d 定义伺服误差 $e = x_d - x$ 为期望轨迹与实际轨迹之差。



9.6 轨迹跟踪设置

由伺服控制规律得出的轨迹如下:

(9.50)

$$f' = \ddot{x}_d + k_v \dot{e} + k_p e$$

- 一个好的选择是将式 (9.50) 与单位质量运动方程式 (9.44) 联立, 得到

$$\ddot{x} = \ddot{x}_d + k_v \dot{e} + k_p e \quad (9.51)$$

$$\ddot{e} + k_v \dot{e} + k_p e = 0 \quad (9.52)$$

- 可由这个二阶微分方程进行参数选择, 由此可以设计任何期望的响应 (通常选择临界阻尼)。有时称这种方程为误差空间方程, 因为它描述了相对于期望轨迹的误差变化



9.6 轨迹跟踪设置

- 如果模型（即关于 m 、 b 和 k 的值）是正确的，并且没有噪声和初始误差，质量块将准确跟随期望轨迹运动。如果存在初始误差，这个误差将受到抑制（见式（9.52）），而后质量块将准确跟随期望轨迹运动。

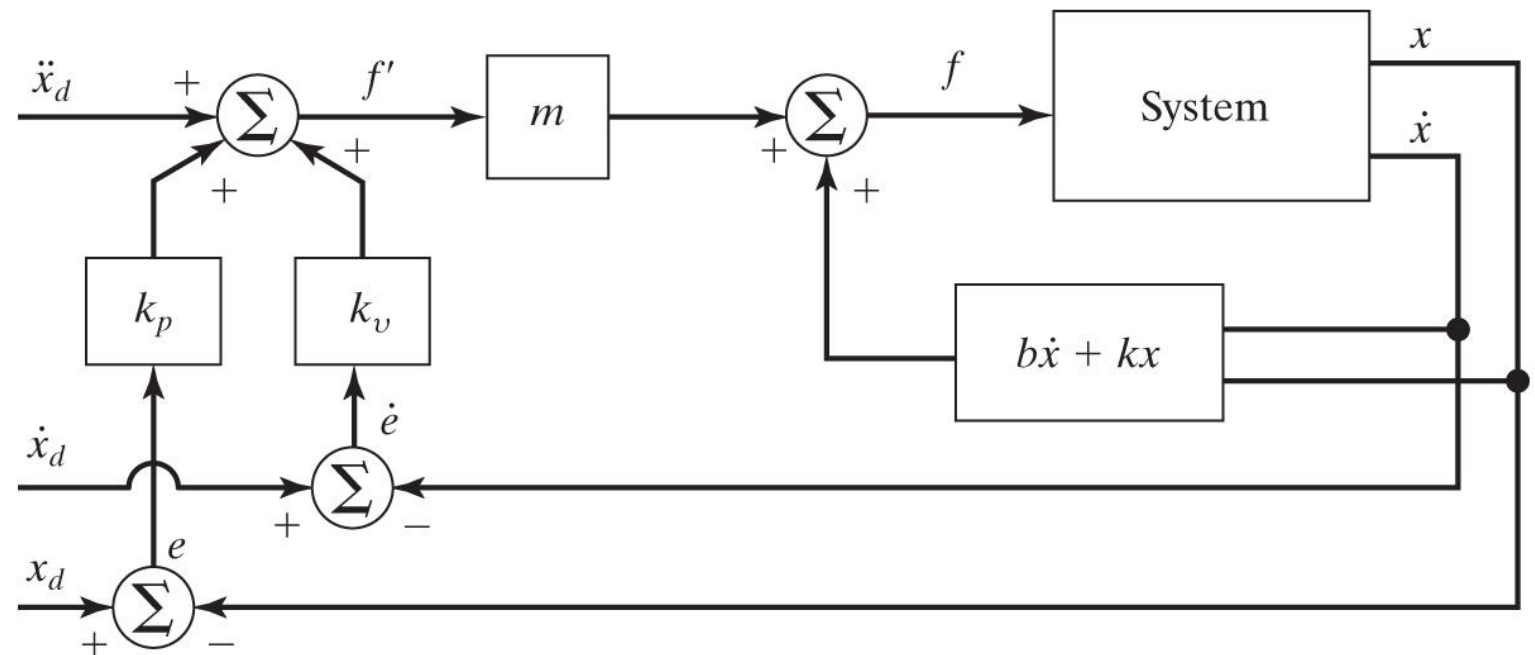


图9-9

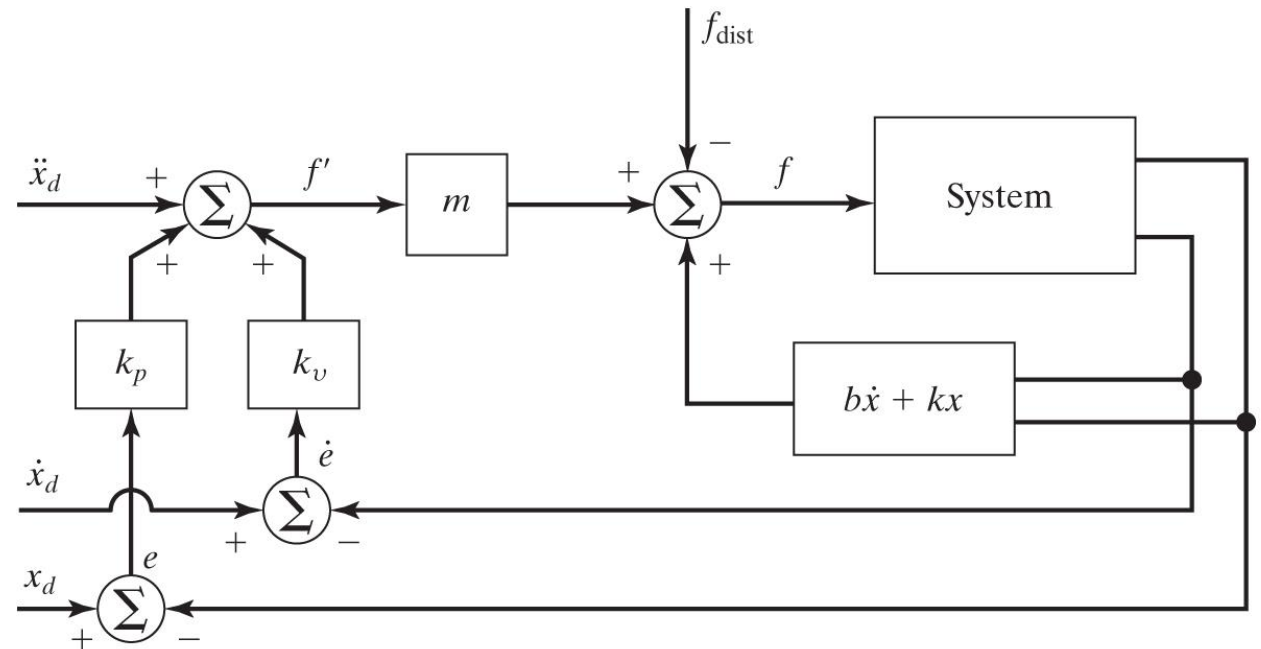


9.7 抑制干扰

- 控制系统的一个作用就是提供抑制干扰能力，即存在外部干扰或者噪声的时候仍能保持良好的性能（即误差最小化）。图 9-0 所示为具有附加输入-额外干扰力 f_{dist} 的轨迹跟踪控制器。通过对闭环系统进行分析得出误差方程为

$$m(\ddot{e} + k_v \dot{e} + k_p e) = f_{\text{dist}}$$

(9.53)



9.7 抑制干扰

- 式 (9.53) 是一个具有扰动函数的微分方程。如果已知 f_{dist} 是有界的，即存在常数 a 使得

$$\max_t f_{\text{dist}}(t) < a$$

- 这样微分方程的解 $e(t)$ 也是有界的。这个结果是由一个称为有界输入**有界输出**即 **BIBO** 稳态线性系统的稳定性特性得出的
- 这个基本结论说明在一大类干扰下，我们至少能够保持系统是稳定的。



9.7 抑制干扰

• 稳态误差

以一种最简单的干扰为例，即 f_{dist} 为常数的情况。这种情况下，通过对静态系统的分析（即所有系统变量的导数都为 0）进行稳态分析。设式（9.53）中的导数为 0，得稳态方程为

$$k_p e = f_{\text{dist}}/m \quad (9.55)$$

$$e = f_{\text{dist}}/k_p m \quad (9.56)$$

由式（9.56）可求出稳态误差 e 的值。显然，位置增益 k_p 越大，稳态误差就越小。



9.7 抑制干扰

- 增加积分项
- 为消除稳态误差，有时采用一种修正的控制规律。这种修正是在控制规律中附加一个积分项，即

$$f' = \ddot{x}_d + k_v \dot{e} + k_p e + k_i \int e dt \quad (9.57)$$

- 则误差方程变为

$$\ddot{e} + k_v \dot{e} + k_p e + k_i \int e dt = f_{\text{dist}}/m \quad (9.58)$$
$$\ddot{e} + k_v \dot{e} + k_p e + k_i e = \dot{f}_{\text{dist}}/m$$

- 稳态时上式变为

$$k_i e = 0$$

- 因此

$$e = 0$$



9.8 连续控制与离散时间控制

- 在前面讨论的控制系统中，都假设控制计算机完成控制规律计算的时间为 0（即无限快）。所以驱动力 f 的值是时间的连续函数。当然在实际情况中，计算都需要一定的时间，因此输出的力指令是一个离散的“阶梯”函数。本书中我们将认为计算机的计算速度极快。如果 f 的更新计算速率比受控系统的固有频率快很多，那么这个近似就是合适的。在离散时间控制或数字控制领域，进行系统分析时并不做这种近似，而是考虑控制系统的**伺服速度**。



9.8 连续控制与离散时间控制

- 通常假设计算速度足够快以至于时间连续性假设是有效的。由此产生了一个问题：计算到底需要多么快？若使选择的伺服（或采样）速度足够快则需要考虑以下几点：
- **跟踪参考输入：**期望输入或参考输入的频率范围给定了采样速率的绝对下限。采样频率至少为参考输入带宽的两倍。这通常并不是限制因素。
- **干扰抑制：**对于抗干扰问题，由时间连续系统给定了系统性能的上限。如果采样周期比干扰作用（假设为随机干扰的统计形式）的持续时间长，那么这些干扰将不会被抑制。一种有效的方法是使采样周期小于噪声相关时间的十分之一。



9.8 连续控制与离散时间控制

- **抗混叠：**只要在数字控制系统中使用模拟传感器，就会出现混叠现象，除非传感器的输出严格限制在带宽范围内。大多数情况下，传感器没有输出带宽的限制，因此应选择采样频率使混叠信号的能量较小。
- **结构共振：**在操作臂的动力学特性中未包括弯曲模态。实际上所有机构的刚度都是有限的，因此会出现多种形式的振动。如果必须抑制这些振动（经常是需要的），那么必须使采样频率至少为固有共振频率的两倍。本章后面将再次讨论共振问题。



9.9 单关节的建模和控制

- 本节将要为单一旋转关节操作臂建立一个简化模型。通过几项假设可把这个系统看作为二阶线性系统。对于更完整的驱动关节模型，见书中参考文献 [5]。



9.9 单关节的建模和控制

- 许多工业机器人常用的驱动器是直流（DC）力矩电机。电机中不转动的部分（**定子**）由机座、轴承、永久磁铁或电磁铁组成。定子中的磁极产生一个穿过电机转动部件（**转子**）的磁场。转子由电机轴和线圈绕组组成，电流通过线圈绕组产生电机转动的能量。电流经与转向器接触的电刷流入线圈绕组。转向器与变化的线圈绕组（也称为电枢相连接便产生指定方向的转矩。当电流通过线圈绕组时电机会产生转矩的物理现象表示为^(9.62)

$$F = qV \times B$$



9.9 单关节的建模和控制

- 这里电荷 q 以速度 V 通过磁场强度为 B 的区域时将产生一个力 F 。电荷为通过线圈绕组的电子，磁场由定子磁极产生。一般来说，电机产生转矩的能力用电机转矩常数表示，电枢电流与输出转矩的关系可表示为

$$\tau_m = k_m i_a \quad (9.63)$$

- 当电机转动时，则成为一个发电机，在电枢上产生一个电动势。电机的另一个常数，反电势常数 k_e ，表示给定转速时产生的电压

$$v = k_e \dot{\theta}_m \quad (9.64)$$

- 一般来讲，转向器实际上是一个开关，它使电流通过不同的线圈绕组产生转矩，并产生一定的转矩波动。尽管有时这个影响很重要，但通常这种影响可被忽略（在任何情况下建立模型都是相当困难的，即使建立了模型，误差补偿也是相当困难的）



9.9 单关节的建模和控制

• 电机电枢感抗

- 图 9-11 所示为电枢电路。主要的构成部分是电源电压 v_a 、电枢绕组的感抗 l_a 、电枢绕组的电阻 r_a 以及产生的反电势 $k_e \dot{\theta}_m$ 。
- 这个电路由如下一阶微分方程描述：

$$l_a \dot{i}_a + r_a i_a = v_a - k_e \dot{\theta}_m \quad (9.65)$$

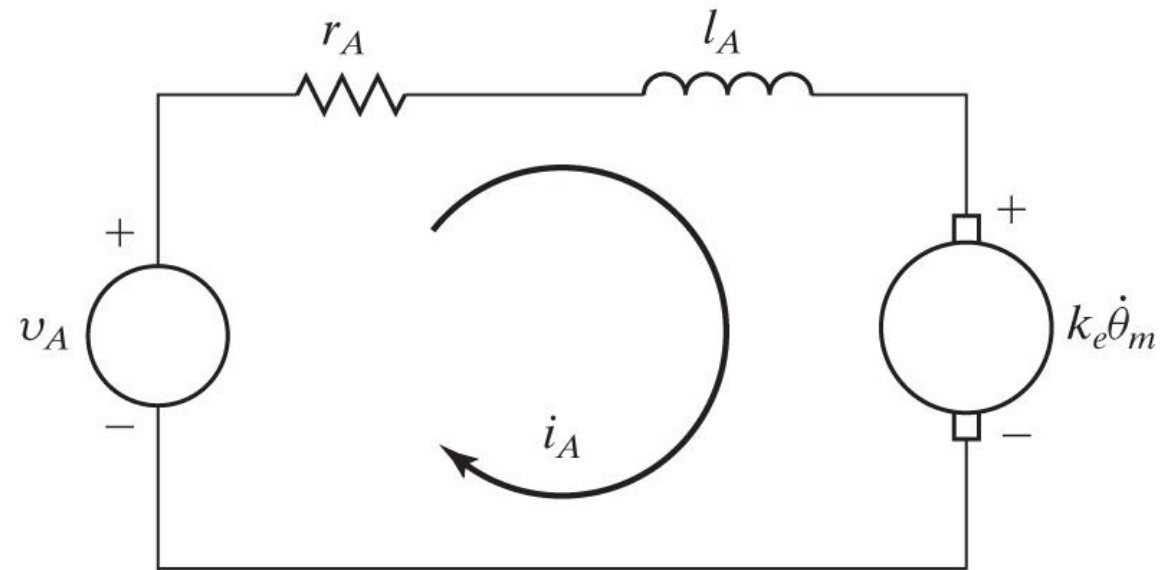


图9-11



9.9 单关节的建模和控制

- 一般用电机驱动器控制电机的转矩（而不是速度）。驱动电路通过检测电枢电流不断调节电源电压以 以使通过电枢的电流为期望电流 这个电路称为电流放大器式电机驱动器。在电流驱动系统中, 由电机感抗（和电源电压的上限% 限制了控制电枢电流变化的速率。实际上相当于在工作电流和输出转矩之间存在一个**低通滤波器**。
- 为简化起见，首先假设电机的感抗可以忽略。当闭环控制系统的固有频率远低于由于感抗引起的电流驱动器中隐含的低通滤波器的截止频率时，这个假设便是合理的。这个假设和转矩波动假设一样都可被忽略，这表明电机转矩可以直接控制。虽然存在某个比例因子（例如 k_m ）但仍可以将驱动器视为可以直接控制转矩的纯力矩源。



9.9 单关节的建模和控制

• 有效惯量

- 图 9-12 所示为通过齿轮减速器与惯性负载相连的直流力矩电机转子的力学模型。式 (9.63) 表示作用于转子的扭矩 τ 是电枢电流 i 的函数。减速比 η 可提高驱动负载的力矩、降低负载的转速，由下式表示

$$\begin{aligned}\tau &= \eta \tau_m \\ \dot{\theta} &= (1/\eta) \dot{\theta}_m\end{aligned}\quad (9.66)$$

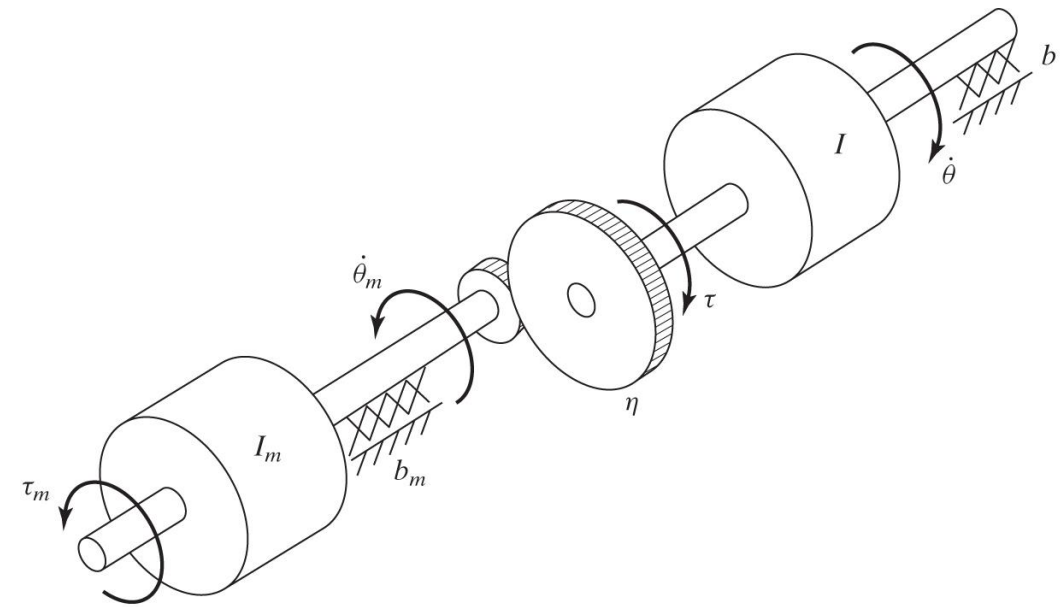


图9-12

9.9 单关节的建模和控制

- 式中 $\eta > 1$ 按照转子力矩写出系统的力矩平衡方程如下

$$\tau_m = I_m \ddot{\theta}_m + b_m \dot{\theta}_m + (1/\eta)(I \ddot{\theta} + b \dot{\theta}) \quad (9.67)$$

式中 I_m 和 I 分别为电机转子惯量和负载惯量， b_m 和 b 分别为电机转子轴承和负载轴承的黏滞摩擦系数。



9.9 单关节的建模和控制

- 由式 (9.66) , 将式 (9.67) 按照电机变量改写为

$$\tau_m = \left(I_m + \frac{I}{\eta^2} \right) \ddot{\theta}_m + \left(b_m + \frac{b}{\eta^2} \right) \dot{\theta}_m \quad (9.68)$$

或根据负载变量改写为

$$\tau = (I + \eta^2 I_m) \ddot{\theta} + (b + \eta^2 b_m) \dot{\theta} \quad (9.69)$$

$I + \eta^2 I_m$ 有时被称作减速器输出端（连杆侧）的有效惯量。同样。 $b + \eta^2 b_m$ 被称作有效阻尼。

注意，在大减速比（即 $\eta \gg 1$ ）的情况下，电机转子惯是有效组合惯量中的主要部分。正是这个原因我们才能够假设有效惯量是一个常数。



9.9 单关节的建模和控制

- **例9.6** 如果连杆惯量/在 $2 \sim 6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 之间变化, 转子惯量 $I_m = 0.01 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, 减速比 $\eta=30$,求有效惯量的最大值和最小值。

- 有效惯量的最小值为

$$I_{min} + \eta^2 I_m = 2.0 + (900)(0.01) = 11.0 \quad (9.70)$$

- 最大值为

$$I_{max} + \eta^2 I_m = 6.0 + (900)(0.01) = 15.0 \quad (9.71)$$



9.9 单关节的建模和控制

• 未建模柔性

在建模过程中的另一个主要假设是减速器、轴、轴承以及被驱动的连杆都是不可变形的。实际上这些元件的刚度都是有限的，因此在系统建模时，它们的柔性将增加系统的阶次。关于忽略柔性作用影响的理由是：如果系统刚度极大，这些未建模共振的固有频率将非常高，与已建模的二阶主极点的影响相比可以忽略不计。为了进行控制系统的分析和设计，“未建模”实际上是为了忽略这些影响而可以采用式(9.69)这样一个较简单的动力学模型。

因为在建模时未考虑系统的结构柔性，所以必须当心不能激发起这些共振模态。经验方法为：如果最低的结构共振频率为 ω_{res} ，那么必须按照下式限定闭环固有频率

$$\omega_n \leq \frac{1}{2} \omega_{\text{res}} \quad (9.72)$$



9.9 单关节的建模和控制

- 这可给选择控制器增益提供依据。我们发现提高增益会加速系统响应、减小稳态误差，同时我们也发现未建模结构的共振限制了系统增益。典型工业机器人的结构共振范围为5 Hz ~25 Hz间。最新的设计采用直接驱动方式以避免由减速器和传动系统产生的柔性，可使机器人的最低结构共振频率提高到 70 Hz。



9.9 单关节的建模和控制

- **例9.7** 图 9-6 所示系统的各参数值为: $m = 1, b = 1$ 和 $k = 1$ 。此外, 已知系统未建模的最低共振频率为 8 rad/s 。求 α 、 β 为使系统达到临界阻尼的位置控制规律的增益 k_p 和 k_v 。不激发未建模模态, 系统的闭环刚度尽可能大。

$$\alpha = 1$$

$$\beta = \dot{x} + x$$

因此系统在给定输入下呈现为一个单位质量。利用经验方法式(9.72), 取闭环固有频率 4 rad/s 。由式(9.18)和式(9.46)得 于是有

$$k_p = 16.0$$

$$k_v = 8.0$$



9.9 单关节的建模和控制

- 共振频率估计
- 引起共振的原因与第 8 章中讨论的结构柔性的问题相同。在结构柔性能够识别的情况下，如果能够给出柔性结构件有效质量或有效惯量的描述，那么就可以进行振动的近似分析。由式(9.20)给出的简单质量-弹簧系统可以近似得出系统的固有频率

$$\omega_n = \sqrt{k/m} \quad (9.75)$$

- 式中 k 为归为柔性结构件的刚度， m 为振动系统的等效质量。



9.9 单关节的建模和控制

- 例9.8 某轴（假设无质量）的刚度为 400 Nm/rad, 驱动一个转动惯量为 1 kg m² 的负载。如果在动力学模型中轴的刚度可以忽略不计，那么这个未建模共振频率是多少？

$$\omega_{\text{res}} = \sqrt{400/1} = 20\text{rad/s} = 20/(2\pi)\text{Hz} \cong 3.2\text{Hz}$$



9.9 单关节的建模和控制

- 为粗略估计梁和轴的最低共振频率，参考文献[10]建议采用集中质量模型，估计梁和轴的末端刚度公式是已知的；集中质量模型提供了估算共振频率所需的有效质量或有效惯量。
- 图 9-13 所示为参考文献 [10] 中的能量分析结果，这个分析建议用一个位于梁末端的质量为 $0.23m$ 的质点代替质量为 m 的梁，同样用在轴末端的集中惯量 $0.33I$ 代替分布惯量 I

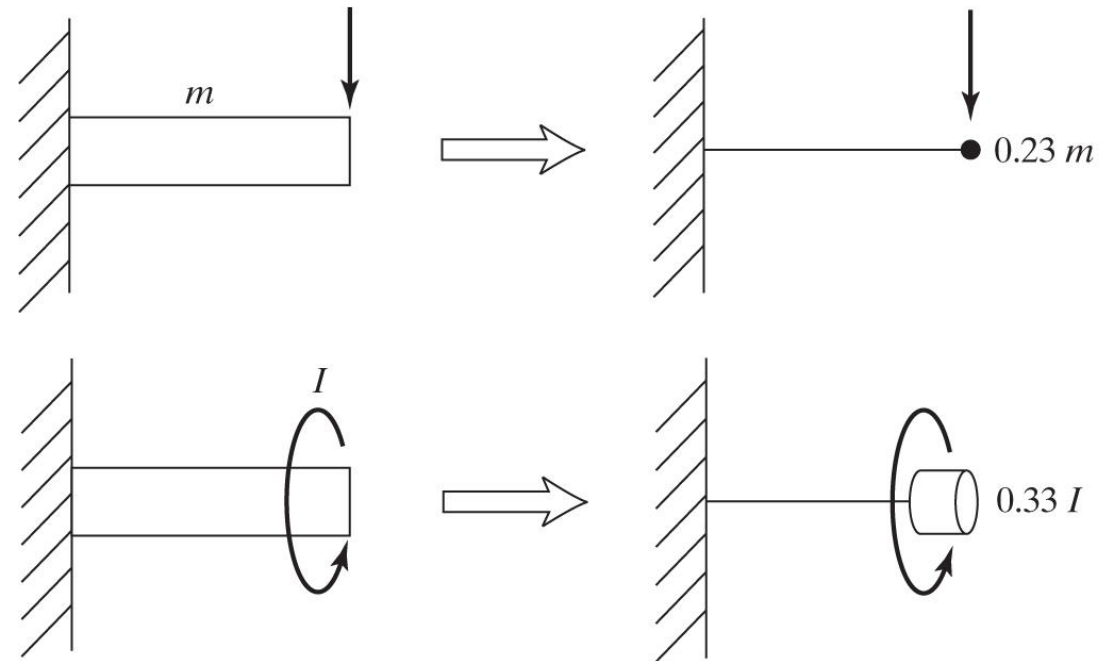


图9-13



9.9 单关节的建模和控制

- **例9.9** 一个质量为 4.347 kg 的连杆. 末端横向刚度为 3600 N/m。假设驱动系统是完全刚性的, 由于连杆柔性引起的共振将限制控制增益。求 ω_{res} 。
- 4.347 kg 的质量在连杆上均匀分布, 应用图 9-13 中的方法, 有效质量为 $(0.23) \times (4.347) \approx 1.0\text{kg}$, 因此振动频率为

$$\omega_{res} = \sqrt{3600/1.0} = 60\text{rad/s} = 60/(2\pi)\text{Hz} \cong 9.6\text{Hz}$$

- 如果希望系统的闭环带宽高于式 (9.75) 中的闭环带宽, 那么必须包括用于控制规律综合的系统模型中的结构柔性。这种情况下系的模态是高阶的, 相应的控制方法将变得相当复杂。这种控制方法超出了当前的工程实际发展水平, 正处于研究阶段



9.9 单关节的建模和控制

- 单关节控制
- 概括来说，我们建立了下列三个主要假设：
 - 1) 电机的感抗 ω 可以忽略。
 - 2) 考虑大传动比的情况，将有效惯量视为一个常数，即 $I_{max} + \eta^2 I_m$
 - 3) 结构柔性可以忽略，最低结构共振频率 用于设定伺服增益的情况除外。



9.9 单关节的建模和控制

- 应用这些假设，可以用下式给出的分解控制器对一个单关节操作臂进行控制
- 系统的闭环动力学方程为

$$\alpha = I_{max} + \eta^2 I_m \quad (9.78)$$

$$\beta = (b + \eta^2 b_m) \dot{\theta}$$

$$\tau' = \ddot{\theta}_d + k_v \dot{e} + k_p e \quad (9.79)$$

$$\ddot{e} + k_v \dot{e} + k_p e = \tau_{\text{dist}} \quad (9.80)$$

$$k_p = \omega_n^2 = \frac{1}{4} \omega_{\text{res}}^2$$

$$k_v = 2\sqrt{k_p} = \omega_{\text{res}} \quad (9.81)$$



9.10 工业机器人控制器的结构

- 为了了解典型工业机器人控制器的概况，我们简要描述了一个虚构的但是具有代表性的控制器。通常使用两级结构，顶层CPU作为控制系统的主机。主计算机向每个低级控制器发送指令，一般每个低级控制器对应一个关节。每个低级控制器控制一个关节伺服，上面通常运行简单的PID控制规律，跟本章之前所讲内容相同。每个关节都安装了光学编码器作为位置反馈。机器人上一般很少用到速度计或者其他速度传感器；速度信号是由关节控制器做数值微分后得到的。示意图如图9-14所示。

图9-14



9.10 工业机器人控制器的结构

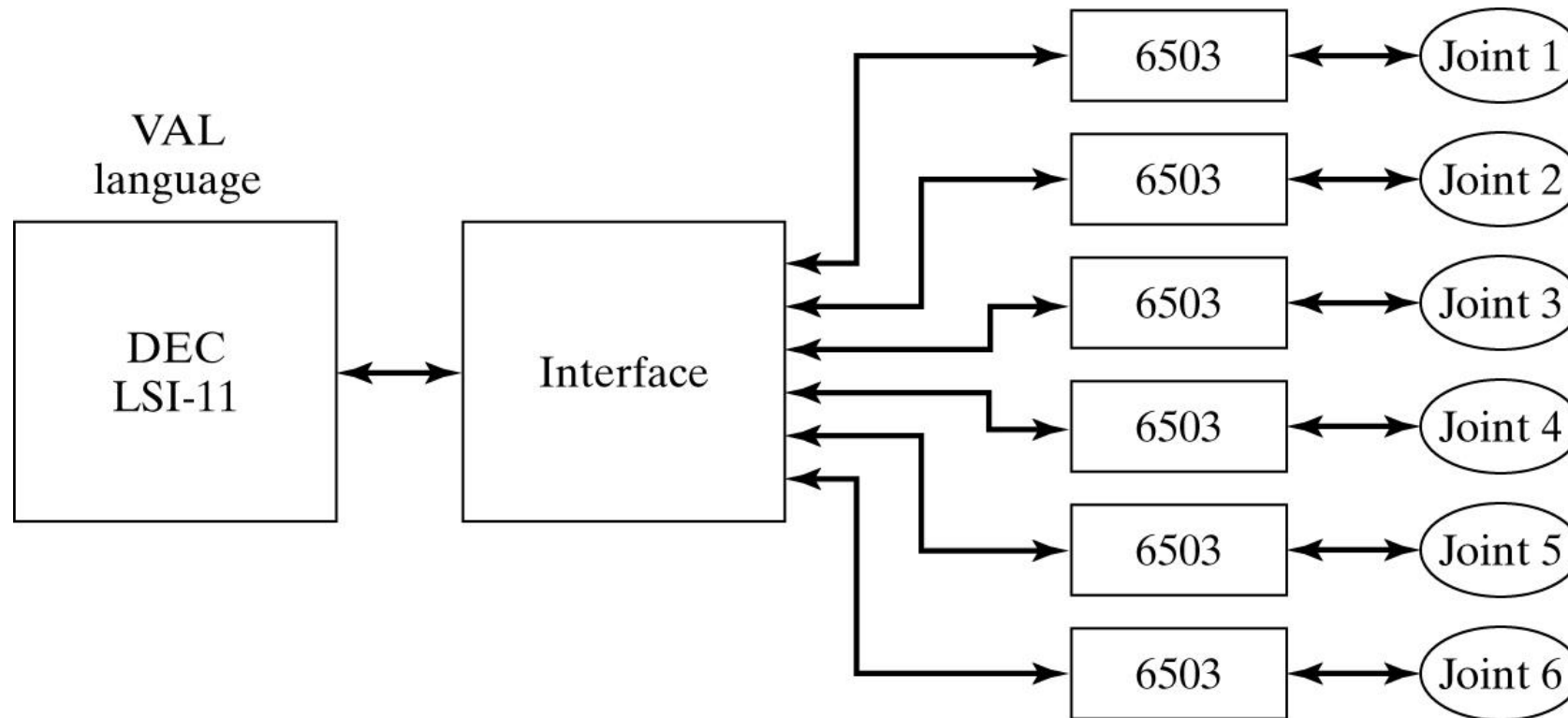


图9-14



9.10 工业机器人控制器的结构

- 为了把力矩指令发送到安装在机器人上的直流力矩电机，每个低级CPU与数字-模拟转化器（DAC）有接口，使得电机电流能够发送到电流驱动电路上。在模拟电路中通过调节电枢两端的电压来控制流过电机的电流，从而维持期望的电枢电流。框图如图9-15所示。

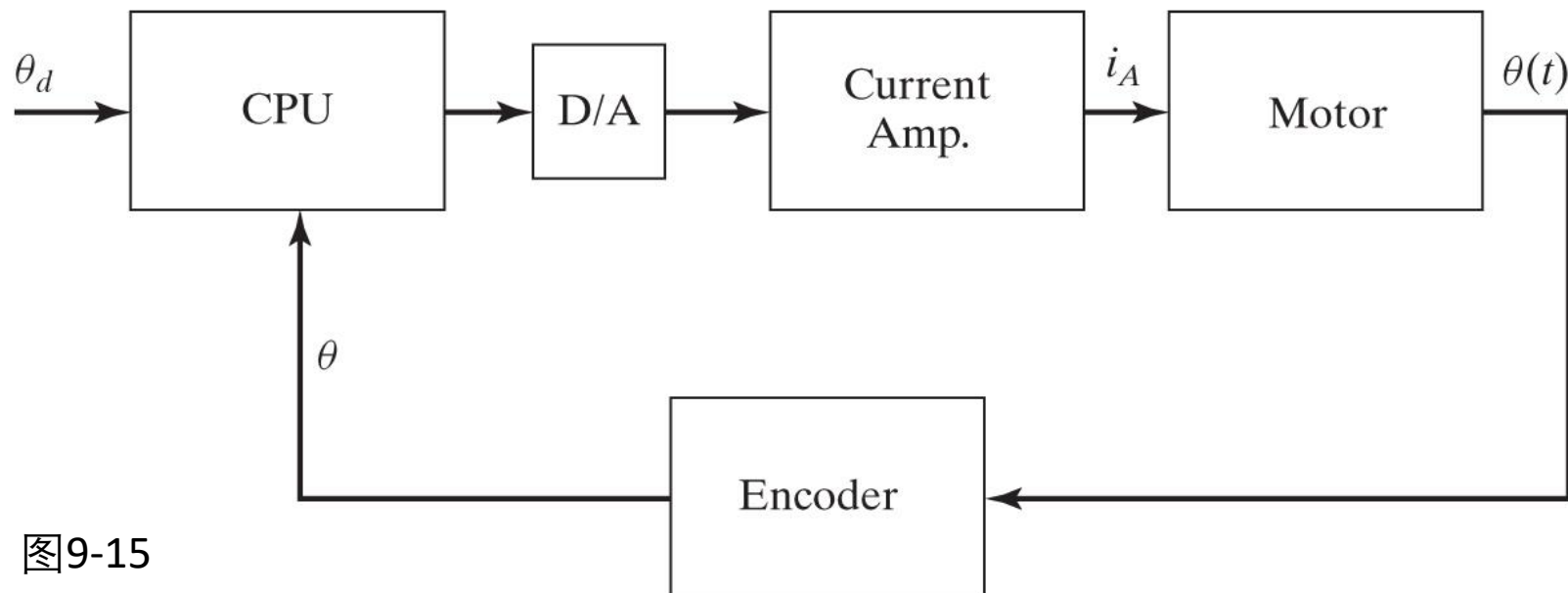


图9-15



9.10 工业机器人控制器的结构

- 按照固定的给定值更新速率，主 CPU 发送新的位置控制指令到低级关节控制器。关节控制器在高的伺服周期运行，使得关节跟随位置指令。
- 主计算采用高级语言来描述机器人程序，计算逆运动学和做轨迹规划。典型情况下，主计算机与示教器有接口。示教器是一种手持的按钮盒，允许操作员以多种模式运行机器人。使用示教器是示教机器人到达任务位置的方法之一。



问题？

