第五章　留　数

- 一、重点与难点
- 二、内容提要
- 三、典型例题

一、重点与难点

重点： 留数的计算与留数定理

难点： 留数定理在定积分计算上的应用

二、内容提要

孤立奇点

- 可去奇点
- 极点
- 本性奇点

函数的零点与极点的关系

留数

- 计算方法
- 留数定理

计算 $\oint_C f(z)dz$

留数在定积分上的应用

1. $\int_0^{2\pi} R(\sin\theta,\cos\theta)d\theta$;

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$;   3. $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{aix}dx$

1. 孤立奇点的概念与分类

1）定义 如果函数 $f(z)$ 在 z_0 不解析, 但 $f(z)$ 在 z_0 的某一去心邻域 $0<|z-z_0|<\delta$ 内处处解析, 则称 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点.

孤立奇点 $\overset{\longrightarrow}{\not\longleftarrow}$ 奇点

2）孤立奇点的分类

依据 $f(z)$ 在其孤立奇点 z_0 的去心邻域 $0<|z-z_0|<\delta$ 内的洛朗级数的情况分为三类:

i) 可去奇点; *ii*) 极点; *iii*) 本性奇点.

i) 可去奇点

定义 如果洛朗级数中不含 $z-z_0$ 的负幂项, 那末孤立奇点 z_0 称为 $f(z)$ 的可去奇点.

可去奇点的判定

(a) 由定义判断: 如果 $f(z)$ 在 z_0 的洛朗级数无负幂项则 z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点.

(b) 判断极限 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$: 若极限存在且为有限值, 则 z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点.

ii) 极点

定义 如果洛朗级数中只有有限多个 $z-z_0$ 的负幂项, 其中关于$(z-z_0)^{-1}$的最高幂为$(z-z_0)^{-m}$,

即 $$f(z)=\cdots+c_{-m}(z-z_0)^{-m}+\cdots+c_{-2}(z-z_0)^{-2}+c_{-1}(z-z_0)^{-1}+c_0$$

$$+c_1(z-z_0)+\cdots \quad (m\geq 1,\ c_{-m}\neq 0)$$

或写成 $$f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m}g(z),$$

那末孤立奇点 z_0 称为函数 $f(z)$ 的 m 级极点.

极点的判定方法

(a) 由定义判别

$f(z)$的洛朗展开式中含有$z-z_0$的负幂项为有限项.

(b) 由定义的等价形式判别

在点z_0的某去心邻域内$f(z)=\dfrac{g(z)}{(z-z_0)^m}$

其中$g(z)$在z_0的邻域内解析, 且$g(z_0)\neq 0$.

(c) 利用极限 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$ 判断 .

iii)本性奇点

如果洛朗级数中含有无穷多个$z-z_0$的负幂项,
那末孤立奇点 z_0 称为 $f(z)$ 的本性奇点.

注意: 在本性奇点的邻域内 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$
不存在且不为 ∞.

3)函数的零点与极点的关系

i) **零点的定义** 不恒等于零的解析函数 $f(z)$如果能表示成 $f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$, 其中 $\varphi(z)$ 在 z_0 解析且$\varphi(z_0)\neq 0$, m为某一正整数, 那末z_0 称为 $f(z)$ 的 m 级零点.

ii) **零点与极点的关系**

如果 z_0 是 $f(z)$ 的 m 级极点, 那末z_0就是$\dfrac{1}{f(z)}$的 m 级零点. 反过来也成立.

2. 留数

定义 如果 z_0 为函数 $f(z)$ 的一个孤立奇点, 则沿在 z_0 的某个去心邻域 $0 < |z - z_0| < R$ 内包含 z_0 的任意一条简单闭曲线 C 的积分 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z$ 的值除以 $2\pi i$ 后所得的数称为 $f(z)$在z_0的留数.

记作 $\mathrm{Res}[f(z), z_0]$. (即 $f(z)$在z_0为中心的圆环域内的洛朗级数中负幂项 $c_{-1}(z - z_0)^{-1}$ 的系数.)

1)留数定理 设函数 $f(z)$ 在区域 D 内除有限个孤立奇点 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 外处处解析, C 是 D 内包围诸奇点的一条正向简单闭曲线, 那末

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}[f(z), z_k]$$

留数定理将沿封闭曲线C积分转化为求被积函数在C内各孤立奇点处的留数.

2)留数的计算方法

(1) 如果 z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点, 则

$$\operatorname{Res}[f(z),z_0]=0.$$

(2) 如果 z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点, 则需将 $f(z)$ 展开成洛朗级数求 c_{-1}

(3) 如果 z_0 为 $f(z)$ 的极点, 则有如下计算规则

a) 如果 z_0 为 $f(z)$ 的一级极点, 那末

$$\operatorname{Res}[f(z),z_0]=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z-z_0)$$

b) 如果 z_0 为 $f(z)$ 的 m 级极点, 那末

$$\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)]$$

c) 设 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$, $P(z)$ 及 $Q(z)$ 在 z_0 都解析,

如果 $P(z_0)\neq 0, Q(z_0)=0, Q'(z_0)\neq 0$, 那末 z_0

为一级极点, 且有 $\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\dfrac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$.

3)无穷远点的留数

1.定义 设函数 $f(z)$在圆环域 $0<|z|<+\infty$ 内解析

C为圆环域内绕原点的任何一条正向简单闭曲线

那末积分 $\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{C^-} f(z)\mathrm{d}z$ 的值与C无关，则称此定值为 $f(z)$在 ∞ 的留数.

记作 $\operatorname{Res}[f(z),\infty]=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{C^-} f(z)\mathrm{d}z=-\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{C} f(z)\mathrm{d}z$

也可定义为 $\operatorname{Res}[f(z),\infty]=-C_{-1}$.

定理

如果函数 $f(z)$ 在扩充复平面内只有有限个孤立奇点, 那末 $f(z)$ 在所有各奇点 (包括∞点) 的留数的总和必等于零.

3. 留数在定积分计算上的应用

1）三角函数有理式的积分

$$I=\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$

令 $z=e^{i\theta}$,

$$\sin\theta=\frac{1}{2i}(e^{i\theta}-e^{-i\theta})=\frac{z^2-1}{2iz},\ \cos\theta=\frac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})=\frac{z^2+1}{2z}$$

当 θ 历经变程 $[0,2\pi]$时, z 沿单位圆周 $|z|=1$的正方向绕行一周.

$$I=\oint_{|z|=1} R\left[\frac{z^2+1}{2z},\frac{z^2-1}{2iz}\right]\frac{dz}{iz}$$

$$=\oint_{|z|=1} f(z)dz$$

$$=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),z_k].$$

其中$z_k(k=1,2,\cdots,n)$为包含在单位圆周$|z|=1$内的$f(z)$的孤立奇点.

2）无穷积分

$I=\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)\mathrm{d}x$.其中$R(x)$是$x$的有理函数,分母的次数至少比分子的次数高两次,且$R(z)$在实轴上没有孤立奇点.

设$R(z)=P(z)/Q(z)$, $P(z)$为n次多项式,$Q(z)$为m次多项式,$m-n\geq 2$,则 $I=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[R(z),z_k]$.

其中$z_k(k=1,2,\cdots,n)$为$R(z)$在上半平面内的极点.

如果$R(x)$为偶函数,则

$$\int_{0}^{+\infty}R(x)\mathrm{d}x=\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[R(z),z_k].$$

3）混合型无穷积分

$I=\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)e^{aix}\mathrm{d}x(a>0)$,其中$R(x)$是$x$的有理函数,分母的次数至少比分子的次数高一次,且$R(z)$在实轴上没有孤立奇点,则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)e^{aix}\mathrm{d}x=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}[R(z)e^{aiz},z_k],$$

其中$z_k(k=1,2,\cdots,n)$为$R(z)$在上半平面内的极点.

特别地

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos mx}{1+x^2}\cdot \mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}e^{-m},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin mx}{1+x^2}\cdot \mathrm{d}x=0,$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin \mathrm{x}}{\mathrm{x}}\cdot d\mathrm{x}=\frac{\pi}{2}$$

三、典型例题

例1 求下列函数$f(z)$在扩充复平面上的奇点,并判别类型. (1) $\dfrac{\sin z - z}{z^3}$; (2) $e^{\tan\frac{1}{z}}$;

解 (1)由于$f(z)$在$0<|z|<+\infty$内的洛朗展式为:

$$f(z)=\frac{\sin z - z}{z^3}=\frac{1}{z^3}\left[\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\cdots\right)-z\right]$$

$$=-\frac{1}{3!}+\frac{z^2}{5!}-\frac{z^4}{7!}+\frac{z^6}{9!}-\cdots$$

得$z=0$是$f(z)$的可去奇点,$z=\infty$是$f(z)$的本性奇点.

(2) $e^{\tan\frac{1}{z}}$;

解 令 $w=\tan\frac{1}{z}$, 则 $f(z)=e^{w}$.

由$\cos\frac{1}{z}=0$, 得 $z_k=\dfrac{1}{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}$ $(k=0,\pm1,\cdots)$

为$w=\tan\frac{1}{z}$的一级极点,

而e^{w}仅有唯一的奇点$z=\infty$且为本性奇点,又

$$\lim_{z\to z_k}\tan\frac{1}{z}=\infty$$

所以 $$z_k = \frac{1}{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi} \quad (k = 0, \pm 1, \cdots)$$

都是 $f(z)$ 的本性奇点.

当 $z = \infty$ 时, 因为

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} e^{\tan\frac{1}{z}} = 1 \neq \infty,$$

故知 $z = \infty$ 是 $f(z)$ 的可去奇点.

例2 求函数 $f(z)=\dfrac{(z-5)\sin z}{(z-1)^2 z^2 (z+1)^3}$ 的奇点，并确定类型.

解 $z=0, z=1, z=-1$是奇点.

因为 $f(z)=\dfrac{1}{z}\left[\dfrac{z-5}{(z-1)^2(z+1)^3}\cdot\dfrac{\sin z}{z}\right]=\dfrac{1}{z}g(z)$,

所以 $z=0$ 是单极点； $z=1$ 是二级极点;

$z=-1$ 是三级极点.

例3 证明 $z=0$ 是 $f(z)=\dfrac{1}{z^3(e^{z^3}-1)}$ 的六级极点.

证 $$\frac{1}{f(z)}=z^3(e^{z^3}-1)=z^3\left(1+z^3+\frac{(z^3)^2}{2!}+\cdots-1\right),$$

$$=z^6+\frac{z^9}{2!}+\frac{z^{12}}{3!}+\cdots$$

因为 $z=0$ 是 $\dfrac{1}{f(z)}=z^3(e^{z^3}-1)$ 的六级零点,

所以 $z=0$ 是 $f(z)=\dfrac{1}{z^3(e^{z^3}-1)}$ 的六级极点.

例4　求下列各函数在有限奇点处的留数.

$$(1)\sin\frac{1}{z-1},\quad (2)z^2\sin\frac{1}{z},\quad (3)\frac{1}{z\sin z},\quad (4)\frac{\sinh z}{\cosh z}.$$

解　(1)在 $0<|z-1|<+\infty$ 内,

$$\sin\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{3!(z-1)^3}+\cdots,$$

所以　$\mathrm{Res}\left[\frac{1}{\sin(z-1)},1\right]=C_{-1}=1.$

(2) $z^2 \sin\frac{1}{z}$

解 因为 $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots,$

所以在 $0 < |z| < +\infty$ 内，

$$z^2 \sin\frac{1}{z} = z^2\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \cdots\right)$$

$$= z - \frac{1}{3!z} + \frac{1}{5!z^3} - \cdots$$

故 $\operatorname{Res}\left[z^2 \sin\frac{1}{z}, 0\right] = C_{-1} = -\frac{1}{6}.$

(3) $\dfrac{1}{z\sin z}$

解 $z = n\pi \ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 为奇点,

当 $n \neq 0$ 时 $n\pi$ 为一级极点,

因为 $\displaystyle\lim_{z\to n\pi}(z-n\pi)\frac{1}{z\sin z}$

$$= \lim_{z\to n\pi}(-1)^n \frac{z-n\pi}{z\sin(z-n\pi)} = (-1)^n \frac{1}{n\pi},$$

由 $\displaystyle\lim_{z\to 0} z^2 f(z) = \lim_{z\to 0}\frac{z}{\sin z} = 1$, 知$z = 0$是二级极点.

所以 $\mathrm{Res}\left[\dfrac{1}{z\sin z}, n\pi\right] = (-1)^n \dfrac{1}{n\pi}$,

$$\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z\sin z}, 0\right] = \lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^2\cdot\frac{1}{z\sin z}\right]$$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{\sin z - z\cos z}{\sin^2 z}$$

$$= 0.$$

(4) $f(z)=\dfrac{\sinh z}{\cosh z}$

解　$f(z)$的一级极点为

$$z_k=\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)i\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

故　$\operatorname{Res}[f(z),z_k]=\left.\dfrac{\sinh z}{(\cosh z)'}\right|_{z=z_k}$

$$=\left.\frac{\sinh z}{\sinh z}\right|_{z=z_k}=1.$$

例5 计算积分 $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin(z+i)}{z(z+i)^8} dz.$

解 $z=0$ 为一级极点, $z=-i$ 为七级极点.

$$\operatorname{Res}[f(z),0]=\lim_{z\to 0} zf(z)=\lim_{z\to 0}\frac{\sin(z+i)}{(z+i)^8}=\sin i;$$

$$f(z)=\frac{\sin(z+i)}{(z+i)^8}\cdot\frac{1}{(z+i)-i}=\frac{\sin(z+i)}{(z+i)^8}\cdot i\frac{1}{1-\frac{z+i}{i}}$$

$$=\left\{\frac{1}{(z+i)^7}-\frac{1}{3!(z+i)^5}+\frac{1}{5!(z+i)^3}-\frac{1}{7!(z+i)}+\cdots\right\}$$

$$\cdot i\left\{1+\frac{1}{i}(z+i)+\frac{1}{i^2}(z+i)^2+\cdots\right\}$$

$$=\cdots+i\left(\frac{-1}{7!}+\frac{-1}{5!}+\frac{-1}{3!}+\frac{-1}{1!}\right)\frac{1}{z+i}+\cdots$$

所以 $\mathrm{Res}[f(z),-i]=-i\left(1+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{7!}\right)$

由留数定理得

$$\oint_{|z|=2}\frac{\sin(z+i)}{z(z+i)^8}\mathrm{d}z=2\pi i\{\mathrm{Res}[f(z),0]+\mathrm{Res}[f(z),-i]\}$$

$$=2\pi i\left\{\sin i-i\left(1+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{7!}\right)\right\}.$$

例6 $\oint\limits_{|z|=3} \dfrac{z^{13}}{(z^2+5)^3(z^4+1)^2}\mathrm{d}z.$

解 在 $3<|z|<+\infty$ 内,

$$f(z)=\frac{z^{13}}{z^6\left(1+\dfrac{5}{z^2}\right)^3\cdot z^8\left(1+\dfrac{1}{z^4}\right)^2}=\frac{1}{z}\left[\frac{1}{1+\dfrac{5}{z^2}}\right]^3\left[\frac{1}{1+\dfrac{1}{z^4}}\right]^2$$

$$=\frac{1}{z}\cdot\left(1-\frac{5}{z^2}+\frac{25}{z^4}-\cdots\right)^3\left(1-\frac{1}{z^4}+\frac{1}{z^8}-\cdots\right)^2$$

$$=\frac{1}{z}\left(1-\frac{15}{z^2}+\cdots\right)\left(1-\frac{2}{z^4}+\cdots\right)=\frac{1}{z}+\cdots,$$

所以 $\mathrm{Res}[f(z),\infty]=-C_{-1}=-1,$

故 $$\oint_{|z|=3}\frac{z^{13}}{(z^2+5)^3(z^4+1)^2}\mathrm{d}z=2\pi i[-(-1)]$$

$$=2\pi i.$$

例7 计算 $\oint_{|z|=\frac{5}{2}} \frac{1}{(z-3)(z^5-1)} dz.$

解 $$\oint_{|z|=\frac{5}{2}} \frac{1}{(z-3)(z^5-1)} dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{5} \text{Res}[f(z), z_k]$$

$$\sum_{k=1}^{5} \text{Res}[f(z), z_k] = -\left\{ \text{Res}[f(z),3] + \text{Res}[f(z),\infty] \right\}$$

$$\text{Res}[f(z),3] = \lim_{z\to 3}(z-3) \cdot \frac{1}{(z-3)(z^5-1)} = \frac{1}{242},$$

$$\frac{1}{(z-3)(z^5-1)}=\frac{1}{z\left(1-\frac{3}{z}\right)\cdot z^5\left(1-\frac{1}{z^5}\right)}$$

$$=\frac{1}{z^6}\left(1+\frac{3}{z}+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{z^5}+\cdots\right),$$

所以 $\operatorname{Res}[f(z),\infty]=0,$

$$\oint_{|z|=\frac{5}{2}}\frac{1}{(z-3)(z^5-1)}\mathrm{d}z=2\pi i\sum_{k=1}^{5}\operatorname{Res}[f(z),z_k]$$

$$=-2\pi i\cdot\frac{1}{242}=-\frac{\pi i}{121}.$$

例8 计算 $\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{a+\sin^2 x} \quad (a>0).$

解 $\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{a+\sin^2 x} = \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{a+\frac{1-\cos 2x}{2}}$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}(2x)}{a+\frac{1-\cos 2x}{2}}$$

令 $2x=t,$

$$\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{a+\sin^2 x} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{a+\frac{1-\cos t}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\oint_{|z|=1}\frac{1}{a+\dfrac{1-(z^2+1)/2z}{2}}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{iz}$$

$$=2i\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{z^2-2(2a+1)z+1},$$

极点为： $z_1=2a+1-\sqrt{(2a+1)^2-1},\quad |z_1|<1,$

$$z_2=2a+1+\sqrt{(2a+1)^2-1},\quad |z_2|>1$$

$$\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{a+\sin^2 x}=2\pi i\cdot 2i\mathrm{Res}[f(z),(2a+1-\sqrt{(2a+1)^2-1})]$$

$$=\frac{2\pi}{\sqrt{(2a+1)^2-1}}.$$

例9 计算积分 $\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{(2+\sqrt{3}\cos x)^2}$.

解 $\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{(2+\sqrt{3}\cos x)^2} = \oint_{|z|=1} \frac{1}{\left(2+\sqrt{3}\cdot\frac{z^2+1}{2z}\right)^2} \cdot \frac{\mathrm{d}z}{iz}$

$$= \frac{4}{3i} \oint_{|z|=1} \frac{z\mathrm{d}z}{\left(z^2+\frac{4}{\sqrt{3}}z+1\right)^2},$$

极点为 $z_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, z_2 = -\sqrt{3},$ 其中 $|z_1| < 1, |z_2| > 1;$

由留数定理，有

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{(2+\sqrt{3}\cos x)^2}=\frac{4}{3i}\cdot 2\pi i\lim_{z\to z_1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{z}{(z-z_2)^2}$$

$$=\frac{8\pi}{3}\cdot\lim_{z\to z_1}\frac{(z-z_2)^2-2z(z-z_2)}{(z-z_2)^4}$$

$$=\frac{8\pi}{3}\cdot\frac{-(z_1+z_2)}{(z_1-z_2)^3}$$

$$=\frac{8\pi}{3}\cdot\frac{4}{\sqrt{3}}\Big/\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3=4\pi.$$

例10 计算积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+1}\mathrm{d}x.$

解 $\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$

因为 $R(z)=\frac{z^2}{(z^4+1)}$ 在实轴上解析，

在上半平面内有一级极点 $z_1=e^{\pi i/4}$, $z_2=e^{3\pi i/4}$.

所以 $\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\pi i\cdot\sum\mathrm{Res}[R(z),z_k]$$

$$\operatorname{Res}[R(z),e^{\frac{\pi i}{4}}]=\lim_{z\to e^{\frac{\pi i}{4}}}\left(z-e^{\frac{\pi i}{4}}\right)\frac{z^2}{1+z^4}=\frac{\sqrt{2}}{8}(1-i),$$

$$\operatorname{Res}[R(z),e^{\frac{3\pi i}{4}}]=\lim_{z\to e^{\frac{3\pi i}{4}}}\left(z-e^{\frac{3\pi i}{4}}\right)\frac{z^2}{1+z^4}=-\frac{\sqrt{2}}{8}(1+i).$$

故 $$\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+1}\mathrm{d}x=\frac{2\pi i}{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{8}(1-i)-\frac{\sqrt{2}}{8}(1+i)\right]$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi.$$

- 朱利亚集合