高等数学一（II）期末 B 卷答案与评分标准

一、 计算二重积分 $\iint_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为第一象限内的椭圆区域: $\frac{x^2}{4}+y^2\le 1,\ x\ge 0,\ \ y\ge 0$.（7 分）

解：使用广义极坐标变换，即$x=2r\cos\theta\,,y=r\sin\theta$（1 分），积分区域可表示为$0\le\theta<\frac{\pi}{2},0\le r\le 1$（1 分）

注意到$J=\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)}=\begin{bmatrix}2\cos\theta & \sin\theta\\ -2r\sin\theta & r\cos\theta\end{bmatrix}=2r$（1 分），我们有

$$\iint_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^1 2r\cos\theta\cdot r\sin\theta\cdot|J|\,\mathrm{d}r\text{（1 分）}$$

$$=\int_0^{\pi/2}4\cos\theta\cdot\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\,\mathrm{d}r\text{(1 分)}$$

$$=\int_0^{\pi/2}2\sin 2\theta\,\mathrm{d}\theta\times\frac{r^4}{4}\Big|_0^1$$

$$=-\cos 2\theta|_0^{\frac{\pi}{2}}\times\frac{1}{4}\text{(1 分)}$$

$$=-(-1-1)\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\text{(1 分)}$$

二、 设 Ω 为曲面 $z=1$ 与上半球面 $z=\sqrt{3-x^2-y^2}$ 所围成的区域，S 为 Ω 的边界，求第一型曲面积分 $\iint_S (x+1)\,\mathrm{d}S$ 的值.（7 分）

解：首先通过方程$z=1=\sqrt{3-x^2-y^2}$，容易算得两曲面交线为$x^2+y^2=2$，故积分投影区域为$D\colon x^2+y^2\le 2$，上表面为上半球面$z_{上}=\sqrt{3-x^2-y^2}$，下表面为平面$z_{下}\equiv 1$.（1 分）同时，可计算出$\sqrt{1+z_{上x}^2+z_{上y}^2}=\frac{3}{\sqrt{3-x^2-y^2}}$，$\sqrt{1+z_{下x}^2+z_{下y}^2}=1$（1 分）,由对称性，注意到两个表面均关于$Oyz$平面对称，且$x$关于$x$为奇函数，所以有：

$$\iint_S (x+1)\,\mathrm{d}S=\iint_S 1\,\mathrm{d}S\text{(对称性，1 分)}$$

$$=\iint_D \frac{3}{\sqrt{3-x^2-y^2}}+1\mathrm{d}x\mathrm{d}y\text{（1 分）}$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}\left[\frac{3}{\sqrt{3-r^2}}+1\right]\cdot r\,\mathrm{d}r\text{（极坐标，1 分）}$$

$$=2\pi\times\left[-3\sqrt{3-r^2}+\frac{r^2}{2}\right]\Big|_0^{\sqrt{2}}$$

$$=2\pi\times\left(-3-\left(-3\sqrt{3}\right)+1-0\right)=(6\sqrt{3}-4)\pi\text{（1 分）}$$

注：本题复杂度偏大，考生即使没有使用对称性，如果能正确列式评分至少可以给到 4 分。

三、 计算曲线积分 $\int_{L^+} y\,\mathrm{d}x-(x+z)\,\mathrm{d}y$,其中 L^+ 为螺旋线段：$L\colon\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sin t\,,t\in[0,2\pi]\\ z=t^2\end{cases}$，方向按参数 t 增加的方向.（7 分）

解： 本题可以直接进行求解，注意到$x'(t)=-\sin t\,,y'(t)=\cos t\,,z'(t)=2t,0\le t\le 2\pi$(1 分)，可得

$$\int_{L^+} y\,\mathrm{d}x-(x+z)\,\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^{2\pi}\sin t\cdot -\sin t-(\cos t+t^2)\cdot\cos t\,\mathrm{d}t\text{(2 分)}$$
$$=\int_0^{2\pi}-1-t^2\cdot\cos t\,\mathrm{d}t\text{(1 分)}$$
$$=-2\pi-t^2\cdot\sin t|_0^{2\pi}+\int_0^{2\pi}2t\cdot\sin t\,\mathrm{d}t\text{(1 分)}$$
$$=-2\pi+0-2t\cdot\cos t|_0^{2\pi}+\int_0^{2\pi}2\cos t\,\mathrm{d}t\text{(1 分)}$$
$$=-2\pi+0-2\times 2\pi+0=-6\pi\text{(1 分)}$$

四、 求初值问题 $(-x^2+2xy)\mathrm{d}x+(x^2+\sin y)\mathrm{d}y=0,\ \ y(0)=\frac{\pi}{2}$ 的解 （7 分）

解：因为$\frac{\partial(-x^2+2xy)}{\partial y}=2x=\frac{\partial(x^2+\sin y)}{\partial x}$，因此该方程为全微分方程（2 分）

使用简单凑微分方法，有

$(-x^2+2xy)\mathrm{d}x+(x^2+\sin y)\mathrm{d}y$
$=-x^2\mathrm{d}x+(2xy\,\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y)+\sin y\,\mathrm{d}y$
$=\mathrm{d}(-\frac{x^3}{3}+x^2y-\cos y)$

因此，可得该全微分方程的通解为：

$$-\frac{x^3}{3}+x^2y-\cos y=C\text{（3 分）}$$

代入初值条件，即$x=0,y=\frac{\pi}{2}$，可得$C=0$,（1 分）故原初值问题的解为：

$$-\frac{x^3}{3}+x^2y-\cos y=0\text{（1 分）}$$

注：(1)确定方程为全微分方程后，原函数的获取还有两种不同的方法，可以根据对应步骤分配相应的 3 分。
(2) 考生如果使用其他方法对方程求解但无法得到通解的，根据其思想可以给与 1-4 分。

五、 求微分方程$y''+y=\cos x$的通解（7 分）

解：先考虑对应齐次线性方程$y''+y=0$,其特征方程$\lambda^2+1=0$对应两个特征根$\lambda_{1,2}=\pm i$（1 分）
因此对应齐次方程的通解为$\tilde{y}=c_1\cos x+c_2\sin x$，（2 分）
考虑非齐次方程$y''-y=\cos x$, 因为$\pm i$是特征根，其特解$y_1^*=x(A\cos x+B\sin x)$,（1 分）
代入该方程后有$y_1^{*\prime\prime}+y_1^*=-2A\sin x+2B\cos x=\cos x$, 可得$A=0,B=\frac{1}{2}$故$y_1^*=\frac{1}{2}x\sin x$. （2 分）

综上，原微分方程通解$y=\tilde{y}+y_1^*=c_1\cos x+c_2\sin x+\frac{1}{2}x\sin x$. （1 分）

注：对非齐次特解形式判断错误的，本题可以在不超过 5 分的情况下酌情给分。

六、 判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\arctan\frac{1}{n}$的敛散性, 并指明其为绝对收敛还是条件收敛. （8 分）

解：本级数为交错级数，其通项绝对值$\arctan\frac{1}{n}$关于n单调递减（因为$\frac{1}{n}$单调递减，$\arctan\frac{1}{n}$单调递减）（2 分），

且$\lim\limits_{n\to\infty}\arctan\frac{1}{n}=0$. （1 分）由莱布尼茨（或狄利克雷）判别法可证该级数收敛。（1 分）

另一方面，注意到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\arctan\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=\lim_{u\to 0}\frac{\arctan u}{u}\left(令\frac{1}{n}=u\right)=\lim_{u\to 0}\frac{\frac{1}{1+u^2}}{1}(洛必达法则)=1（2 分）$$

由比较判别法，$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\arctan\frac{1}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{n}$与$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$同敛散性，故发散.（1 分）

因此，本题级数$(-1)^{n-1}\arctan\frac{1}{n}$条件收敛.（1 分）

注：本题的无穷小比阶的方法并不唯一，如果采用其他方法计算出极限亦可以获得满分。关于$\arctan\frac{1}{n}$的单调性，考生可以不做详细的论证。因为其单调性比较直接和浅显。

七、 证明函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2x}$在$x\in(0,+\infty)$不一致收敛，在$x\in[1,+\infty)$一致收敛. （8 分）

解：首先，对于任意的$N\in\mathbb{N}_+$与$n>N$，令$x_n=\frac{1}{n^2}\in(0,+\infty)$,可知$\left|\frac{1}{n^2x_n}-0\right|=\frac{1}{n^2x_n}=1$（2 分），因此$\frac{1}{n^2x}$在$x\in(0,+\infty)$不一致收敛到零函数（1 分），故函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2x}$在$x\in(0,+\infty)$不一致收敛（1 分）

另一方面，$\forall x\in[1,+\infty)$, $\left|\frac{1}{n^2x}\right|\le\frac{1}{n^2}$（1 分）,而数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛（1 分），

故由 M 判别法，知函数项级数函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2x}$在$x\in[1,+\infty)$一致收敛（2 分）

注：（1）第一问的不一致收敛性使用定义也是可以证明的，但过程更为复杂，根据证明过程可酌情分配分数。（2）第二问 M 判别法条件叙述不清或错误的可以相应扣掉 1-2 分。

八、 计算$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}x^n$的收敛域与和函数 （8 分）

解：首先由

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+2)!}}{\frac{1}{(n+1)!}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+2}=0$$

知收敛半径$R=+\infty$,（也可以通过直接计算$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{(n+2)!}}\right|=+\infty$得到收敛半径$R=+\infty$，3 分）

幂级数的收敛域为$x\in(-\infty,+\infty)$（1 分）

注意到收敛区间内，$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}x^n=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}x^{n+1}$（1 分）

$$=\frac{1}{x}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n \quad（1 分）$$

$$=\frac{e^x-1}{x}\quad（x\neq 0）（1 分）$$

而$x=0$时，根据和函数连续性取极限或直接代值，可知和函数在 0 点的值为1（1 分）

注：本题的幂级数求和还可以使用其他如提出$\frac{1}{x}$再逐项求导的方法，结果正确即可给分。但不管使用什么方法，如果漏掉了-1这一项本题需要扣掉 1 分。

九、 计算$f(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$ 在$x=0$处的幂级数展开式，并指出收敛域 （8 分）

解：首先注意到$\frac{1}{(x+1)^2}=-\left(\frac{1}{x+1}\right)'$（1 分）

而 $\frac{1}{x+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$（2 分）故

$$\frac{1}{(x+1)^2}=-\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\right)' \text{（1 分）}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} n\cdot x^{n-1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (n+1)\cdot x^n \text{（1 分）}$$

对于泰勒展开式，$\frac{1}{x+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$收敛域为$x\in(-1,1)$（1 分）

根据逐项求导不扩大收敛域且不减少收敛半径，知$\frac{1}{(x+1)^2}$的收敛域也为$x\in(-1,1)$（2 分）

注：(1)本题的收敛域当然也可以通过传统的幂级数收敛半径与端点处收敛情况确定，使用该方法如果出现端点开闭区间判断错误，每判断错一个端点将扣掉 1 分，收敛半径价值 1 分。

（2）幂级数的最终形式必须为$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$,如果考生所求幂级数不是$x=0$处的幂级数，则本题得分不得超过 4 分。

十、 判断广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x$ 的敛散性 （8 分）

解：因为$\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\sin x}{\sqrt{x-1}}=+\infty$,故本题目所述积分在$x=1$处为瑕点，因此需要分为两部分广义积分

$\int_2^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x$与$\int_1^{2}\frac{\sin x}{\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x$进行判别

对于$\int_2^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x$，因为$\forall A>2,\left|\int_2^A\sin x\,\mathrm{d}x\right|=|-\cos A+\cos 2|\le 2$（1 分），且$\frac{1}{\sqrt{x-1}}$关于$x$单调递减（1 分）且

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x-1}}=0$（1 分），

由狄利克雷判别法，可知$\int_2^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x$收敛（1 分）

而对于瑕积分$\int_1^{2}\frac{\sin x}{\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x$,因为被积函数为非负函数（1 分），且

$$\lim_{x\to 1}\frac{\frac{\sin x}{\sqrt{x-1}}}{\frac{1}{\sqrt{x-1}}}=\sin 1 \text{（1 分）}$$

故$\int_1^{2}\frac{\sin x}{\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x$与$\int_1^{2}\frac{1}{\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x$敛散性相同,故收敛（1 分）

因为两部分广义积分均收敛，所以 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2(x-1)^2}}\mathrm{d}x$收敛（1 分）

注：本题的瑕积分的判别如果要使用比较判别法，需注明被积函数在瑕积分段的非负性（至少要在瑕点附近非负），未指明者可扣掉这 1 分。

十一、　求$g(y)=\int_{-y^2}^{1+y}\sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,,-\infty<y<+\infty$ 的导函数（8 分）

解：由于$\sin(x^2+y^2)$与$\frac{\partial\sin(x^2+y^2)}{\partial y}=2y\cdot\cos(x^2+y^2)$在全平面连续，且$1+y$与$-y^2$在$y\in\mathbb{R}$可导（1 分），故

$$g'(y)=\sin((1+y)^2+y^2)\cdot(1+y)'-\sin((-y^2)^2+y^2)\cdot(-y^2)'+\int_{-y^2}^{1+y}\frac{\partial\sin(x^2+y^2)}{\partial y}\mathrm{d}x \quad（1 分）$$

$$=\sin(y^2+2y+1)+2y\cdot\sin(y^2+y^4)+2y\cdot\int_{-y^2}^{1+y}\cos(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x$$

(6 分,三项中的每一项各 2 分，如果每一项有符号错误或部分计算错误，相应项对应得 1 分)

注：（1）本题如果考生完全没有对积分号下函数及积分上下限函数相关性质进行论述，可最高得 7 分。

（2）若考生直接写出本题答案，答案正确也可得到满分 7 分，如果出现错误，三项按照（2+2+3）进行分数分配，根据错误的程度给予实际得分）。

（3）若考生在得到最后一项变限积分后对其进行进一步的运算，不论步骤结果如何不扣分。

十二、　证明：含参无穷积分$g(y)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2y}\,\mathrm{d}x$在$y\in[1,3]$一致收敛，并利用此结论，计算积分$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x^2}-e^{-3x^2}}{x^2}\mathrm{d}x$

（提示：$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$）（8 分）

证：注意到含参无穷积分$g(y)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2y}\,\mathrm{d}x$满足

$\forall(x,y)\in[0,+\infty)\times[1,3],\left|\mathrm{e}^{-x^2y}\right|\le\mathrm{e}^{-x^2}$(1 分)，而$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$收敛(1 分)，由 M 判别法知$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}x$在$y\in[1,3]$一致收敛.(1 分)

对 于 积 分 $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x^2}-e^{-3x^2}}{x^2}\mathrm{d}x$， 由 比 较 判 别 法 容 易 证 明 这 个 无 穷 积 分 是 收 敛 的 。（根据定理描述，这段橙色部分分析不写也不扣分）

注意到$\forall x\in(0,+\infty),\frac{e^{-x^2}-e^{-3x^2}}{x^2}=\int_1^3\mathrm{e}^{-x^2y}\,\mathrm{d}y$(1 分),

对于另一个积分方向，$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2y}\,\mathrm{d}x$为含有参数$y\in[1,3]$的无穷积分，显然$\mathrm{e}^{-x^2y}$在$[0,+\infty)\times[1,3]$连续,

且$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}x$在$y\in[1,3]$一致收敛，故积分可以交换次序. (1 分)

然后有：

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x^2}-e^{-3x^2}}{x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\int_1^3\mathrm{e}^{-x^2y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_1^3\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\ （1 分）\ =\int_1^3\frac{1}{\sqrt{y}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}y\ （令u=\sqrt{y}\cdot x,1 分）$$

$$=\int_1^3\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\mathrm{d}y=\sqrt{\pi y}\Big|_1^3=\sqrt{\pi}(\sqrt{3}-1)\ （1 分）$$

注：（1）本题在交换次序前，除注明之前证明的一致收敛性结果外，也应注明e^{-x^2y}的连续性，没有注明连续性而直接交换积分次序的，可以扣掉 1 分。

（2）除交换积分次序的分析外，本题第二问计算推导过程总价值为 4 分。被积函数分析与化为二次积分 1 分，积分交换次序 1 分，内层积分换元 1 分，其余计算到最终结果 1 分。

十三、 设函数$f(x)$以 2π为周期并满足$f(x)=\begin{cases}x^2+x, x\in[0,\pi]\\ 0, \quad x\in(-\pi,0)\end{cases}$，求出$f(x)$的傅里叶级数及其和函数。(9 分)

解：被积函数以2π为周期，记$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx$，（1 分）

而后，有$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi}x^2+x\,\mathrm{d}x\right]=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi}\right]=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi^3}{3}+\frac{\pi^2}{2}\right]=\frac{\pi^2}{3}+\frac{\pi}{2}$,（1 分）

$n>0$ 时，$a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi}(x^2+x)\cdot\cos nx\,\mathrm{d}x\right]$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{(x^2+x)\cdot\sin nx}{n}\Bigg|_0^{\pi}+\frac{(2x+1)\cos nx}{n^2}\Bigg|_0^{\pi}-\frac{2\sin nx}{n^3}\Bigg|_0^{\pi}\right]=\frac{1-(-1)^n\cdot[2\pi+1]}{n^2\pi}$$ （2 分）

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi}(x^2+x)\cdot\sin nx\,\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{-(x^2+x)\cdot\cos nx}{n}\Bigg|_0^{\pi}+\frac{(2x+1)\sin nx}{n^2}\Bigg|_0^{\pi}+\frac{2\cos nx}{n^3}\Bigg|_0^{\pi}\right]=\frac{(-1)^{n-1}\cdot n^2\cdot[\pi^2+\pi]+2\cdot(-1)^n-2}{n^3\pi}$$

$$=\frac{(-1)^{n-1}\cdot n^2(1+\pi)}{n}+\frac{2\cdot(-1)^n-2}{n^3\pi}$$ （2 分）

故$f(x)\sim\left(\dfrac{\pi^2}{6}+\dfrac{\pi}{4}\right)+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1-(-1)^n\cdot[2\pi+1]}{n^2\pi}\cos nx+\dfrac{(-1)^{n-1}\cdot n^2(1+\pi)}{n}+\dfrac{2\cdot(-1)^n-2}{n^3\pi}\sin nx$ （1 分）

因为周期函数$f(x)$在$[-\pi,\pi]$分段连续且分段单调，因此傅里叶级数在$(-\infty,+\infty)$点点收敛，注意到当$x=k\pi,k\in\mathbb{Z}$处为$f(x)$间断点，函数收敛到$f(x)$的左右极限平均值，故

$$\left(\frac{\pi^2}{6}+\frac{\pi}{4}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n\cdot[2\pi+1]}{n^2\pi}\cos nx+\frac{(-1)^{n-1}\cdot n^2(1+\pi)}{n}+\frac{2\cdot(-1)^n-2}{n^3\pi}\sin nx$$

$$=\begin{cases}f(x), & (k-1)\pi<x<k\pi\\ 0, & x=2k\pi\\ \frac{\pi^2+\pi}{2}, & x=(2k+1)\pi\end{cases},k\in\mathbb{Z}=\begin{cases}f(x), & (k-1)\pi<x<k\pi\\ \frac{\pi^2+\pi}{2}, & x=(2k+1)\pi\end{cases},k\in\mathbb{Z},$$

（和函数共 2 分，其中每分析对一个间断点得 1 分，和函数表达式上面的文字分析可以不写，最后一步合并可以不写）