博学 审问 慎思 明辨 笃行

概率论与数理统计

中山大學
SUN YAT-SEN UNIVERSITY

主讲老师：邝东阳， kuangdy@mail.sysu.edu.cn

助教：黄培， huangp89@mail2.sysu.edu.cn

范志隆， fanzhlong@mail2.sysu.edu.cn

Part 1
随机向量

博学 | 审问 | 慎思 | 明辨 | 笃行

随机向量

设 $X_1(\omega),X_2(\omega),\cdots,X_n(\omega)$都是定义在概率空间$(\Omega,\mathcal{F},P)$上的随机变量,则以它们为分量的向量函数

$$X(\omega) = (X_1(\omega),X_2(\omega),\cdots,X_n(\omega))$$

是定义在$(\Omega,\mathcal{F},P)$上取值于 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 的函数. 我们称$(X_1(\omega),X_2(\omega),\cdots,X_n(\omega))$为 n **维随机向量**或 $\mathbf{R}^n$ **值随机变量**.

联合分布

定义 2.4.1 设(X,Y)为二维随机向量. 称二元函数

$$F(x,y) = P(X \leqslant x, Y \leqslant y), \quad -\infty < x,y < +\infty$$

为(X,Y)的(**联合**)**分布函数**.

设$X = (X_1, \ldots, X_n)$为n维随机变量，称

$$F(x_1, \ldots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n) = P(\prod_{i=1}^{n}\{\omega : X_i(\omega) \leq x_i\}),$$

边缘分布

设$X=(X_1,\ldots,X_n)$为n维随机变量，称

$$F(x_1,\ldots,x_n)=P(X_1\le x_1,\ldots,X_n\le x_n)=P(\prod_{i=1}^{n}\{\omega:X_i(\omega)\le x_i\}),$$

为随机向量X的分布函数

称$F_{X_i}(x_i)=P(X_i\le x_i)$ 边际(边缘)分布函数

$1^\circ.\ F(x_1,\cdots,x_n)$对每个变元非降;

$2^\circ.\ F(x_1,\cdots,x_n)$对每个变元右连续;

$3^\circ.\ \lim\limits_{x_j\to-\infty} F(x_1,\cdots,x_n)=0\,,\quad \forall\, 1\le j\le n,$

$$\lim_{x_1\to\infty,\cdots,x_n\to\infty} F(x_1,\cdots,x_n)=1\,;$$

离散型随机向量

定义 2.4.3. 称$X=(X_1,\ldots,X_n)$为n维离散随机变量或者随机向量，如果X的每一维$X_i(i=1,\cdots,n)$都是一个离散型随机变量。设X_i的所有可能取值为$\{a_{i1},a_{i2},\cdots\}(i=1,\ldots,n)$,则称

$$P(X_1=a_{1j_1},\ldots,X_n=a_{nj_n})=p(j_1,\ldots,j_n),\quad j_i=1,2,\cdots(i=1,2,\ldots,n). \tag{2.4.2}$$

为离散型随机向量X的概率函数或者n维离散型随机变量$X_1,\cdots,X_n$的联合概率函数(分布律)。而称$P(X_i=a_{ij_i})=p_{j_i}(j_i=1,2,\cdots.)$为离散型随机变量$X_i(i=1,\ldots,n)$的边际概率函数(分布律).

(1) $p(j_1,\ldots,j_n)\geq 0,\quad j_i=1,2,\cdots,\ i=1,2,\ldots,n;$

(2) $\displaystyle\sum_{j_1,\cdots,j_n} p(j_1,\ldots,j_n)=1.$

列联表

$$F(x,y) = P(X \le x, Y \le y) = \sum_{x_i \le x, y_j \le y} P(X = x_i, Y = y_j)$$

$X \backslash Y$	y_1	x_2	$\cdots$	y_m	行和
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1m}	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{12}	p_{22}	$\cdots$	p_{2m}	$p_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\vdots$	p_{nm}	$p_{n\cdot}$
列和	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\cdots$	$p_{\cdot m}$	1

列联表

例 2.4.1 投掷一颗骰子两次,以 X 记点 6 出现的次数,以 Y 记奇数点出现的次数,则随机向量(X,Y)的联合分布列和边缘分布列可以由下表表示.

X \ Y	0	1	2	行合计
0	1/9	1/3	1/4	25/36
1	1/9	1/6	0	5/18
2	1/36	0	0	1/36
列合计	1/4	1/2	1/4	1

袋中有 5 张外形相同的卡片，其中 3 张写上数字"0"，另 2 张写上"1"。现从袋中任取两张卡片，分别以 ξ, η 表示第一张和第二张卡片上的数字，试求分别在有放回和不放回两种情形下 (ξ, η) 的联合分布律及边际分布律.

$\eta \backslash \xi$	0	1	$p_{\cdot j}$
0	9[illegible]	[illegible]	[illegible]
1	6[illegible]	[illegible]	[illegible]
$p_{i \cdot}$	3/5	2/5	1

$\eta \backslash \xi$	0	1	$p_{\cdot j}$
[illegible]	[illegible]	[illegible]	3/5
[illegible]	[illegible]	[illegible]	2/5
$p_{i \cdot}$	3/5	2/5	1

边际分布律不能决定联合分布律。

多项分布

设 $A_1, \cdots, A_n$ 为某一实验下的完备事件群，即 $A_1, \cdots, A_n$ 两两互斥且和为 Ω。记 $p_k = P(A_k)(k = 1, \ldots, n)$，则 $p_k \geq 0, p_1 + \cdots + p_n = 1$。现将实验独立的重复作 N 次，分别用 X_i 表示事件 A_i 出现的次数 $(i = 1, \cdots, n)$。则 $X = (X_1, \ldots, X_n)$ 为一离散型随机向量，试求 X 的概率函数。此分布律称为多项分布，记为 $M(N; p_1, \ldots, p_n)$.

多项分布

记结果A_i出现的次数为k_i，则$k_1 + \cdots + k_n = N$。

$$
\begin{aligned}
P(X_1 = k_1, \cdots, X_n = k_n) &= \frac{N!}{k_1! \cdots k_n!} P(\underline{A_1 \cdots A_1} \ldots \underline{A_n \cdots A_n}) \\
&= \frac{N!}{k_1! \cdots k_n!} p_1^{k_1} \cdots p_n^{k_n},
\end{aligned}
$$

其中 $k_1, \ldots, k_n$ 为非负整数且 $k_1 + \cdots + k_n = N$.

注意这里表达式对应了多项式

$(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$^N

展开式中$X_1^{k1} \ldots X_n^{kn}$这项的系数

对比课本例2.4.2

多项分布

我们来看一下 X_i 的分布：此时我们把试验结果分为两类，A_i 和 $\bar{A}_i$，则显然就是一个 N 重贝努里试验，因此

$$P(X_i = k_i) = \binom{N}{k_i} p_i^{k_i}(1-p_i)^{N-k_i}, \quad k_i = 1, \cdots, N.$$

类似我们也可以找出 $(X_i, X_j)(i \neq j)$ 的联合分布律，即为 $M(N, p_i, p_j, 1-p_i-p_j)$.

对比课本例2.4.3

称 $X=(X_1,\dots,X_n)$ 为 n 维连续型随机变量，如果存在 $\mathbb{R}^n$ 上的非负函数 $f(x_1, \dots, x_n)$，使得对任意的 $-\infty < a_1 \le b_1 < +\infty, \dots, -\infty < a_n \le b_n < +\infty$，有

Definition

$$P(a_1 \le X_1 \le b_1, \dots, a_n \le X_n \le b_n) = \int_{a_n}^{b_n} \dots \int_{a_1}^{b_1} f(x_1,\dots,x_n)dx_1 \cdots dx_n,$$

则称 f 为 X 的概率密度函数.

$$F(x_1,\dots,x_n) = \int_{-\infty}^{x_n} \dots \int_{-\infty}^{x_1} f(t_1,\dots,t_n)dt_1 \cdots dt_n,$$

连续型随机向量

注 2.4.2　类似于连续型随机变量的情况，由于在面积等于零的集合上改变可积函数的值不会改变积分的值，故：

1）可以在面积等于零的集合上不定义 $p(x,y)$ 的值.

2）若 $p(x,y)$ 是随机变量 (X,Y) 的密度，$\tilde{p}(x,y)$ 仅在面积等于零的集合上与 $p(x,y)$ 有不同的值，则 $\tilde{p}(x,y)$ 也是 (X,Y) 的密度.

连续型随机向量

定理 2.4.1 设(X,Y)为二维随机向量,$p(x,y)$为非负可积函数,下面的两个条件每个都是使得(2.4.3)式成立的充分必要条件(因而也是使得$p(x,y)$为(X,Y)的密度的充分必要条件).

1) 对任意实数$a_1,a_2,b_1,b_2,a_1<b_1,a_2<b_2$,都有

$$P(a_1 < X \leqslant b_1, a_2 < Y \leqslant b_2) = \int_{a_1}^{b_1}\left[\int_{a_2}^{b_2} p(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \int_{a_2}^{b_2}\left[\int_{a_1}^{b_1} p(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y.$$

2) 对平面上的每个集合D都有

$$P((X,Y) \in D) = \iint_D p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

二维连续型随机向量

联合分布 $F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)dvdu,$

X的边缘（累积）分布

$$F_X(t)=P(X\le t)\ =\ P(X\le t,-\infty<Y<\infty)=\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dydx$$

$$=\ \int_{-\infty}^{t}f_X(x)du$$

X的边缘（概率）密度

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy$$

Y的边缘（概率）密度

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx$$

二维连续型随机向量

中山大學 SUN YAT-SEN UNIVERSITY

考虑两个概率密度函数

$$
\begin{aligned}
p(x,y) &= x+y, \qquad 0<x,y<1 \\
q(x,y) &= (x+\frac{1}{2})(y+\frac{1}{2}), \qquad 0<x,y<1
\end{aligned}
$$

易得所求边际概率密度都是如下形式

$$f(t)=t+\frac{1}{2}, \quad 0<t<1.$$

边际概率密度不能决定联合概率密度

二维连续型随机向量

例 2.4.5 设(X,Y)有联合密度 $p(x,y)=(x+y)I_E(x,y)$，其中

$$E=\{(x,y):0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}.$$

1）求 X 和 Y 的边缘分布.

2）求概率 $P(X>1/2)$ 和 $P(X+Y>1)$.

3）求条件概率 $P(X>1/2\mid X+Y>1)$.

多维均匀分布

定义 2.4.7（均匀分布） 设二维随机向量(X,Y)为连续型，联合密度为

$$p(x,y)=\begin{cases}1/|D|, & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D,\end{cases}$$

其中 $D\subset\mathbf{R}^2$ 是平面上的区域，$|D|$ 是区域 D 的面积，则称(X,Y)服从 D 上的**均匀分布**。利用示性函数，上式可以简写为 $p(x,y)=\dfrac{1}{|D|}I_D(x,y)$.

$$f(x_1,x_2)=\begin{cases}1/[(b-a)(d-c)] & \text{当 } a\le x_1\le b,\ c\le x_2\le d,\\ 0 & \text{其它}.\end{cases}$$

二元正态分布 $(X,Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-a)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-a)(y-b)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-b)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

边缘密度

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} exp\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_1^2}\}$$

建议自行
手动验证一下

$X \sim N(a, \sigma_1^2)$. $\qquad Y \sim N(b, \sigma_2^2)$

作业

P93：

5， 10， 14， 15， 18， 19，24