概率论与数理统计

中山大學
SUN YAT-SEN UNIVERSITY

主讲老师：邝东阳，kuangdy@mail.sysu.edu.cn

目 录

CONTENT

博学

审问

慎思

明辨

笃行

Part 1
古 典 概 型

博学 | 审问 | 慎思 | 明辨 | 笃行

古典概型

例 1.2.1 设口袋中有 7 个球，其中有 3 个白球和 4 个黑球. 从这个口袋中取球，每个球被取到的可能性都相同.

1）每次取一个球，取后放回，共取两次. 求两次都取到黑球的概率.

2）每次取一个球，取后不放回，共取两次. 求两次都取到黑球的概率.

例 1.2.2 箱中放有 8 个球，其中有 3 个是白球，5 个是黑球. 从中任意取出 4 个. 求恰好取到 1 个白球和 3 个黑球的概率.

古典概型

例 1.2.4 从 10 个数字 0,1,…,9 中任取一个,每个数字被取到的机会均等,取后放回,先后取 4 次. 试求下列各事件的概率.

A: 取出的 4 个数字全不相同.

B: 取出的 4 个数字中不含 0 与 9.

C: 取出的 4 个数字中 9 恰好出现两次.

D: 取出的 4 个数字中 9 至少出现两次.

古典概型

例 1.2.5 箱中有 a 个白球和 b 个黑球，每次取一个，从中任意地接连取出 k 个球（$k \leqslant a+b$），每个球被取出后不放回. 求事件 A“第 k 次取出的球是白球”的概率 $P(A)$.

例 1.2.6 10 个人依次抽取 10 条签，取后不放回，其中有一条签抽中可以获得一张奥运会门票. 请根据古典概率的定义直接证明第 4 个抽签的人能够获得奥运会门票的概率是 1/10.

证 把签编号为 1,2,…,10，其中 1 号签是抽中可获得奥运会门票的签. 把抽签的结果“第 4 个人抽到 i 号签”记为 ω_i，$i=1,2,\cdots,10$，则样本空间为 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{10}\}$. 样本空间含有 10 个样本点，事件 $\{\omega_1\}$ = “第 4 个人获得奥运会门票”含有 1 个样本点，故概率为 1/10.

下面的证明形式上与上面很相似,但是它不符合题目的要求.

证 把试验结果"第 i 个人获得奥运会门票"记为 $\omega_i, i=1,2,\cdots,10$,则样

空间为 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{10}\}$. 样本空间含有 10 个样本点,事件 $\{\omega_4\}$ = "第 4

人获得奥运会门票"含有 1 个样本点,故概率为 1/10.

所以说上面的证明是不符合题目的要求的,是因为至少从表面上看,信

"抽签次序"可能会影响各个 ω_i 出现的可能性,而在上面的证明中在实际上已

利用了条件"各个 ω_i 出现的可能性相等",也就是在实际上已经利用了由

1.2.5 得到的结果:"中签的概率与抽签次序无关".

额外内容

↑Example

欲将 6 个人分为 3 组, 每组 2 人, 分别从事 3 项不同工作, 求分配方式数.

↓Example

$$\frac{6!}{2!\cdot 2!\cdot 2!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 2\cdot 2} = 90$$

共 3人3组

$$\frac{3!}{1!\cdot 1!\cdot 1!} = 6$$

额外内容

要把 7 人分为 3 个小组, 执行同一种任务, 其中一个组 3 人, 另两个组各 2 人, 求分组方式数.

↑Example

↓Example

$$\frac{7!}{2!\cdot 2!\cdot 3!}\Big/ 2!$$

若 4人3组，同一任务

$$\frac{4!}{2!\cdot 1!\cdot 1!}\Big/ 2! = \frac{12}{2} = 6$$

$4 = 1+1+2$

· A B C D 中取2个即可

$\binom{4}{2} = 6$

额外内容

一批产品有 N 个，其中废品有 M 个。现从中随机取出 n 个，在以下两种情形下，分别求"其中恰好有 m 个废品"这一事件的概率。(1) 有放回地选取；(2) 不放回地选取

↑Example
↓Example

解:

(1) $\binom{n}{m}\left(\frac{M}{N}\right)^m\left(1-\frac{M}{N}\right)^{n-m}$

(2) $\boxed{\dfrac{\binom{M}{m}\cdot\binom{n}{m}}{\binom{N}{n}}}$

此处有错：应为

$$\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$$

额外内容

↑Example

r 个不同的球任意放入编号为 1 至 n 的 n 个盒子，每球入各盒均等可能，求下列事件的概率

(1) A={指定的 r 个盒子各含一个球}

(2) B={每盒至多有一球}

(3) C={某指定盒中恰有 m 个球}

↓Example

解:

(1) $$\frac{r!}{n^r}$$

(3) $$\frac{\binom{r}{m}\cdot(n-1)^{r-m}}{n^r}$$

(2) $$\frac{\binom{n}{r}\cdot r!}{n^r}$$

额外内容

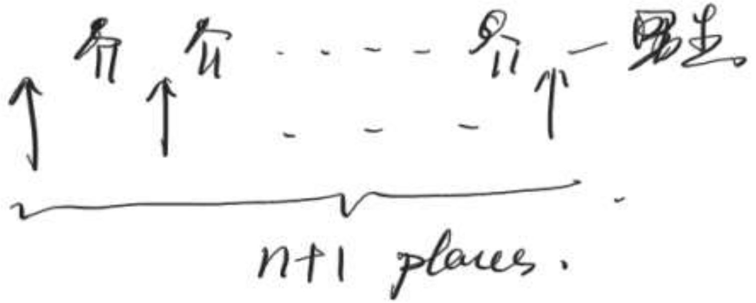
n 个男生，m 个女生排成一排 $(m \le n+1)$. 求事件 $A=$ {任意两个女孩不相邻} 的概率。又若排成一圈，又如何?

↑Example

↓Example

解:

- $$\frac{n!\,m!\binom{n+1}{m}}{(n+m)!}$$



- $$\frac{(n-1)!\,m!\binom{n}{m}}{(n+m-1)!}$$

额外内容

设有方程 $x+y+z=15$, 试分别求出它的正整数解和非负整数解 (x,y,z) 的组数.

↑Example
↓Example

将15个同样的小球放入3个不同的盒子.

- 非负整数解: $\binom{17}{2}$
- 正整数解: $(x-1)+(y-1)+(z-1)=12$ 的非负整数解.

  故为 (14)

Part 3
几 何 概 型

博学 | 审问 | 慎思 | 明辨 | 笃行

几何概型

例 1.2.8　甲乙两人每天都到某个小食店吃早餐. 甲到达的时间是 7:00 - 8:00,在小食店逗留 30 分钟,乙到达的时间是 7:30 - 9:00,在小食店逗留 15 分钟. 设两人到达的时刻互不影响且在上述时间内在各个时刻的到达是机会均等的,求一天中两人能在这个小食店相遇的概率.

Buffon投针

例 1.2.9（蒲丰投针试验） 在平面上画有平行线束，两条相邻的平行线的距离均为 $2a$，向平面随机投掷一枚长度为 $2l$ 的针，假定 $0 < l < a$. 求针与平行线相交的概率 p.

Buffon投针

解　设 M 为针的中点，Y 为 M 与最近的平行线的距离，θ 为针与平行线的交角（如图1.5），则点 (Y,θ) "均匀地"散布在矩形 $\Omega=\{(y,\theta):0\leqslant y\leqslant a,0\leqslant\theta\leqslant\pi\}$ 上. 不难知道针与平行线相交的充要条件是 $Y\leqslant l\sin\theta$，即 (Y,θ) 落在图1.6中的阴影上，故针与平行线相交的概率 p 为阴影面积与矩形面积之比，即

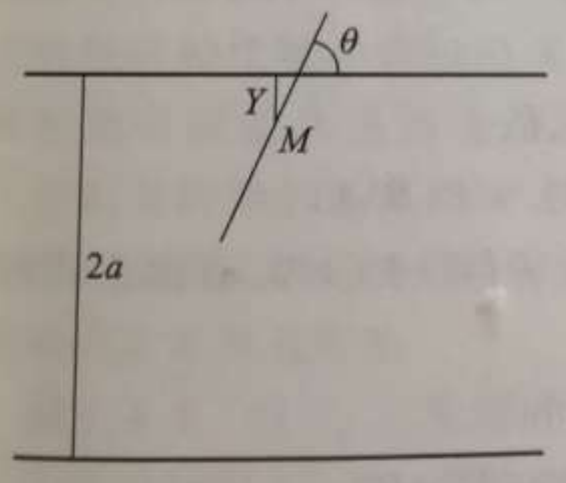


图 1.5

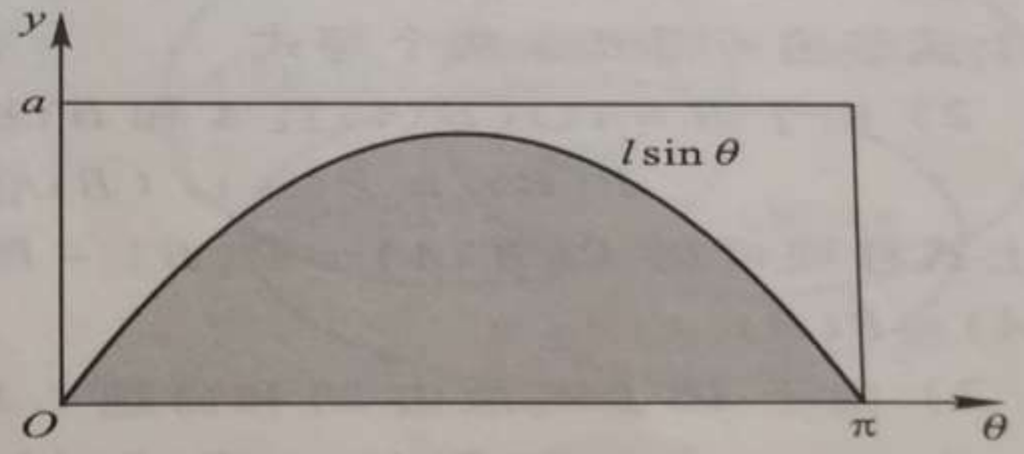


图 1.6

$$p=\frac{1}{\pi a}\int_0^{\pi} l\sin\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{2l}{\pi a}.$$

额外内容

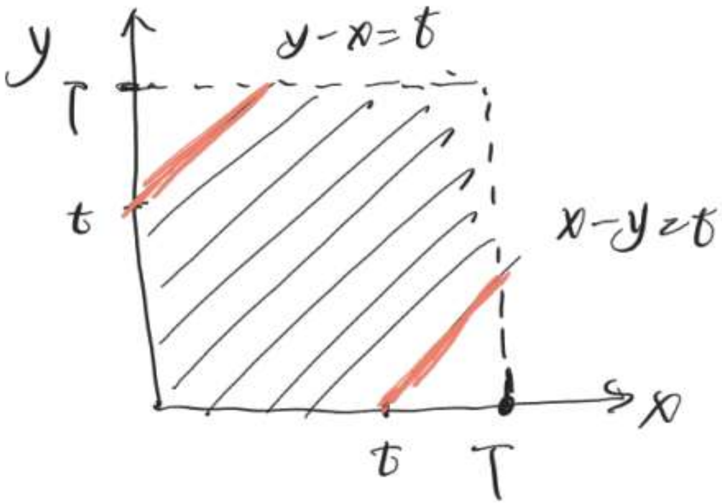
甲乙两人约定在 $[0,T]$ 时段内去某地会面，规定先到者等候一段时间 $t(t\leq T)$ 再离去。试求事件 A={甲乙将会面} 的概率。

↑Example

↓Example

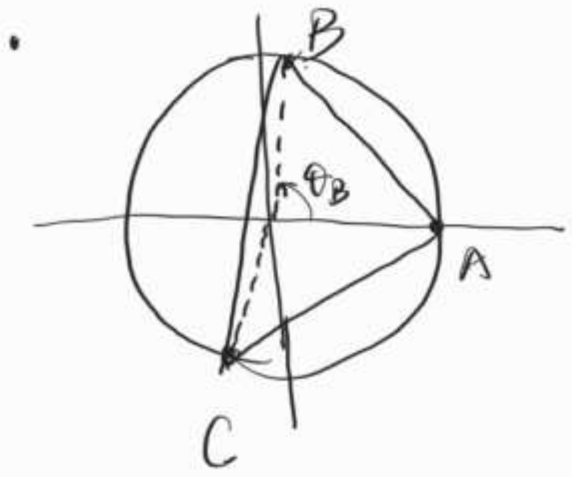
解: 甲在 x 时刻到，乙在 y 时刻到， $x, y \in [0, T]$

$0 \leq |x-y| \leq t$ 时，甲乙会成功会面



在圆周上任取三点 A, B, C，求事件 E={$\triangle ABC$ 为锐角三角形}的概率。(1/4)

↑Example
↓Example

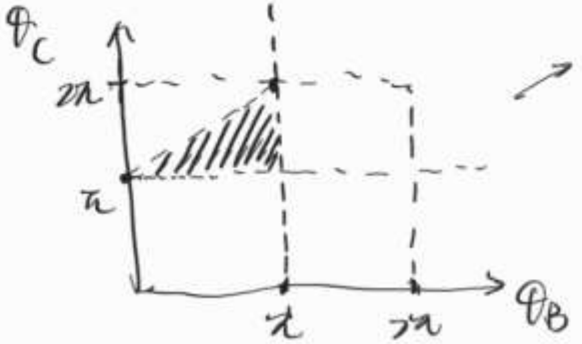


$\theta_A = 0$, θ_B, $\theta_C \in [0, 2\pi]$

当 $\theta_C > \theta_B$ 时.

$$\begin{cases} \theta_B < \pi \\ 2\pi - \theta_C < \pi \\ \theta_C - \theta_B < \pi \end{cases}$$

← 利用圆心角 = 2圆周角 锐角条件.



占 1/8 面积,

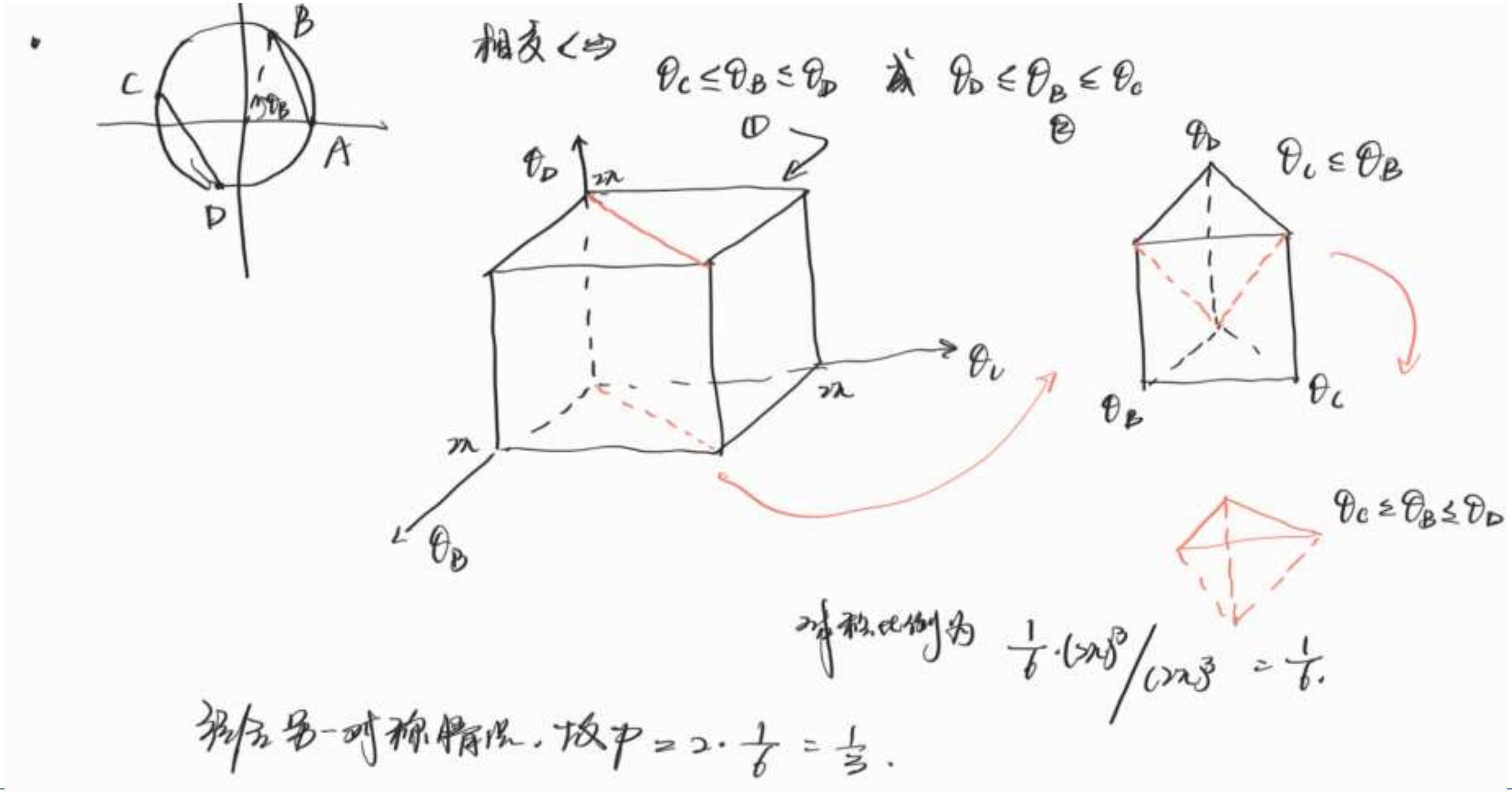
还有另一对称情况 $\theta_C < \theta_B$.

故为 $2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$.

$\overline{\uparrow}$Example

在圆上任取两点 A, B 连成一条弦，再任取两点 C, D 连成一弦，求 AB 与 CD 相交的概率。(1/3)

$\downarrow$Example



作业

习题一：

2.　5，　7，8.　12.

DUE: 下周三课堂结束前。