课室名称：________ 座位号：________ 任课教师：________ 姓名：________ 学号：________ 专业：________ 年级：________ 学院：________

装 订 线 封 线

中山大学本科生期中考试

考试科目：《高等数学（一）》

学年学期：2019 学年第 1 学期　　　　学院/系：数学学院

考试方式：闭卷　　　　考试时长：100 分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
分数											
签名											

警示《中山大学授予学士学位工作细则》第八条：“考试作弊者，不授予学士学位。”

------ 以下为试题区域，共 10 道大题，总分 100 分。学生请在试卷上作答 ------

得分

一、计算下列极限（共10小题，每小题5分，共50分）

1、$\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$.

$$=\lim_{x\to1}\left(\frac{1+x+x^2}{1-x^3}-\frac{3}{1-x^3}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{x+x^2-2}{1-x^3}\right)=\lim_{x\to1}\frac{(x+2)(x-1)}{1-x^3}=\lim_{x\to1}\frac{(x+2)}{1+x+x^2}=-1$$

2、$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x+3}\right)^x$.

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x+3}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-2}{2x+3}\right)^{\frac{2x+3}{-2}}\right]^{\frac{-2}{2x+3}x}=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{2x+3}\right)^{\frac{2x+3}{-2}}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2}{2x+3}x}=e^{-1}$$

3、$\lim\limits_{x\to3+0}\left(x-[x]\right)$.

解 $\lim\limits_{x\to3+0}\left(x-[x]\right)=\lim\limits_{x\to3+0}x-\lim\limits_{x\to3+0}[x]=3-3=0$

4、$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)$.

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}\right)-\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right)=0-0=0$$

5、$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{A^n+B^n+C^n}$，其中 $A>0$，$B>0$，$C>0$.

设 $M=\max(A,B,C)$，则

$$M\le\sqrt[n]{A^n+B^n+C^n}\le\sqrt[n]{3M^n}=M\cdot3^{\frac{1}{n}}$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}3^{\frac{1}{n}}=1$，根据夹逼定理，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{A^n+B^n+C^n}=M$。

6、$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin(x^2-1)}{\sqrt{x}-1}$.

$$=\lim_{x\to1}\frac{\sin(x^2-1)}{\sqrt{1+(x-1)}-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{\frac{1}{2}(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{x+1}{\frac{1}{2}}=4$$

7、$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\cos x}-e}{x\ln(1+x)}$.

$$=\lim_{x\to0}\frac{e\left(e^{\cos x-1}-1\right)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{e(\cos x-1)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{e\left(-\frac{1}{2}x^2\right)}{x^2}=-\frac{e}{2}$$

8、 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}\right)$.

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}+1}=3$$

9、利用定积分的定义求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{(n+2)^2}+\ldots+\dfrac{1}{(n+n)^2}\right)$.

解

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{1}{(n+n)^2}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{1}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^2}+\ldots+\frac{1}{\left(1+\frac{n}{n}\right)^2}\right)$$
$$=\int_0^1\frac{1}{(1+x)^2}dx=-\frac{1}{1+x}\Big|_0^1=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

10、 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\ldots+\dfrac{n}{n^2+2n}\right)$.

解

$$\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+2n}\le\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\ldots+\frac{n}{n^2+2n}\le\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1}$$

由于$\dfrac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1}\to\dfrac{1}{2}$、$\dfrac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+2n}\to\dfrac{1}{2}$，根据夹逼定理

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\ldots+\frac{n}{n^2+2n}\right)=\frac{1}{2}$$

得分

二、下列函数的导函数（6分）

1、$y=e^{x^x}$.

解　做复合函数分解：$y=e^u$，$u=x^x=e^{x\ln x}=e^v$，$v=x\ln x$。根据复合函数链式法则，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}=e^u\cdot e^v\cdot(1+\ln x)=e^{x^x}x^x(1+\ln x)。$$

2、$y=(\sin x)^x$.

解　做微分演算

$$dy=de^{x\ln\sin x}$$
$$=e^{x\ln\sin x}d(x\ln\sin x)$$
$$=e^{x\ln\sin x}d\left(\ln\sin x\cdot dx+xd(\ln\sin x)\right)$$
$$=(\sin x)^x d\left(\ln\sin x\cdot dx+x\frac{1}{\sin x}d(\sin x)\right)$$
$$=(\sin x)^x d\left(\ln\sin x\cdot\cancel{dx}+x\frac{\cos x}{\sin x}\cdot\cancel{dx}\right)$$

所以

$$\frac{dy}{dx}=(\sin x)^x\cancel{d}(\ln\sin x+x\csc x)$$

a.c 2015

三、 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 点可导，求极限 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(a+2t)-f(a+t)}{2t}$.（6分）

得分

解

$$
\begin{aligned}
&\lim_{t\to 0}\frac{f(a+2t)-f(a+t)}{2t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(a+2t)-f(a)+f(a)-f(a+t)}{2t}\\
&=\lim_{t\to 0}\frac{f(a+2t)-f(a)}{2t}-\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{f(a+t)-f(a)}{t}\\
&=f'(a)-\frac{1}{2}f'(a)=\frac{1}{2}f'(a)
\end{aligned}
$$

四、 设 $y=x^2e^{2x}$，求 $\dfrac{d^{100}y}{dx^{100}}$.（6分）

得分

$(x^2e^{2x})^{(100)}$

解

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^{100}y}{dx^{100}}=x^2\left(e^{2x}\right)^{(100)}+C_{100}^{1}\cdot 2x\left(e^{2x}\right)^{(99)}+C_{100}^{2}\cdot 2\left(e^{2x}\right)^{(98)}\\
&=x^2 2^{100}e^{2x}+C_{100}^{1}\cdot 2x2^{99}e^{2x}+C_{100}^{2}\cdot 2\cdot 2^{98}e^{2x}\\
&=2^{100}\left(x^2+100x+2475\right)e^{2x}
\end{aligned}
$$

五、 设 $y=y(x)$ 是由 $y=f(x+y)$ 确定的隐函数，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.（6分）

得分

解 两边求导数

$$y'=f'(x+y)\left(1+y'\right)$$

$$y'=\frac{f'(x+y)}{1-f'(x+y)}=-1+\frac{1}{1-f'(x+y)},\quad 1+y'=\frac{1}{1-f'(x+y)},$$

$$y''=\frac{f''(x+y)\cdot\left(1+y'\right)}{\left(1-f'(x+y)\right)^2}=\frac{f''(x+y)}{\left(1-f'(x+y)\right)^3}$$

六、 设 $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x-1}} & x>0 \\ \ln(1+x) & -1\le x\le 0 \end{cases}$，求 $f(x)$ 的间断点，并说明间断点的类型.（6分）

得分

解 函数的定义域为 $[-1,+\infty)$，$\forall x_0\neq 0$，在 x_0 的一个小邻域内，$f(x)$ 是一个初等函数，根据初等函数的连续性定理，$f(x)$ 在 x_0 连续。

间断点只能在 $x_0=0$ 处，因为

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x-1}}=e^{-1},\ \lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\ln(1+x)=0$$

所以 $x_0=0$ 是函数的第一类跳跃型间断点。

七、 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)-1}{x}-\dfrac{\sin x}{x^2}\right)=2$，求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.（6分）

得分

解 记 $\alpha=\dfrac{f(x)-1}{x}-\dfrac{\sin x}{x^2}-2$，根据题目的条件，$\lim\limits_{x\to 0}\alpha=0$。于是

$$f(x)=1+\alpha x+\frac{\sin x}{x}+2x$$

由极限的四则运算，

$$\lim_{x\to 0}f(x)=1+0\cdot 0+1+2\cdot 0=2\text{。}$$

得分

八、指出函数 $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-3x+2}$ 的所有间断点，并判断其类型.（6 分）

解 $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-3x+2}=\dfrac{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{(x-1)(x-2)}$，$x=1$ 是函数的可去间断点，$x=2$ 是函数的第二类无穷型间断点。

得分

九、设函数 $f(x)$ 在 $[0,2a]$ 上连续，且 $f(0)=f(2a)$，证明：方程 $f(x)=f(x+a)$ 在 $[0,a]$ 上至少有一个实根.（6 分）

证 令 $F(x)=f(x+a)-f(x)$，

$$F(0)=f(a)-f(0),$$

$$F(a)=f(2a)-f(a)=f(0)-f(a)=-F(0),$$

分两种情况讨论：

1、如果 $f(a)=f(0)$，则 $x=0$ 是方程的根；

2、如果 $f(a)\neq f(0)$，则 $F(x)$ 在闭区间 $[0,a]$ 上满足零点定理，于是 $\exists\xi\in(0,a)$ 使得 $F(\xi)=0$，即 ξ 是方程的根。

总之，方程 $f(x)=f(x+a)$ 在 $[0,a]$ 上至少有一个实根。

得分

十、设 $f(x)$ 是在区间 $[a,b]$ 上连续的单调下降函数，记 $F(x)=\dfrac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt$，证明在区间 (a,b) 内，$F'(x)\le 0$.（6 分）

证 $\forall x\in(a,b)$，$x-a>0$，

$$F'(x)=\frac{f(x)(x-a)-\int_a^x f(t)dt}{(x-a)^2}$$

$$=\frac{1}{x-a}\left(f(x)-\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt\right)$$

根据积分中值定理，$\exists\xi\in[a,x]$，使得 $f(\xi)=\dfrac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt$。 由于函数单调下降，

所以 $f(x)-f(\xi)\le 0$，于是 $F'(x)=\dfrac{1}{x-a}\left(f(x)-f(\xi)\right)\le 0$。

数一

10.

中山大学本科生期末考试

14

考试科目：《高等数学（一）》（A 卷）

学年学期：2014 学年第 2 学期　　　　姓　　名：________________

学　院/系：数计学院　　　　　　　　学　　号：________________

考试方式：闭卷　　　　　　　　　　　学　　院：________________

考试时长：120 分钟　　　　　　　　　年级专业：________________

警示《中山大学授予学士学位工作细则》第八条："考试作弊者，不授予学士学位。"

——————以下为试题区域，共七道大题，总分100分，考生请在答题纸上作答——————

一、求如下极限（共 2 小题，每小题6分，共12分）

1、$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$；

2、$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$。

二、求如下积分（共 4 小题，每小题7分，共28分）

1、$\displaystyle\int\frac{x^2}{1+x}dx$；

2、$\displaystyle\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$；

3、$\displaystyle\int_1^e x(\ln x)^2\,dx$ ；

4、$\displaystyle\int_{-2}^{2}\left|x^2-1\right|dx$。

三、（共 10 分）

已知平面 π：$y+2z-2=0$ 与直线 $L:\begin{cases}2x-y-2=0\\3y-2z+2=0\end{cases}$，

（1）问直线L和平面π是否平行？

（2）如直线L与平面π平行，则求直线L与平面π的距离，如不平行，则求直线L与平面π的交点。

（3）求经过直线L且与平面π垂直的平面方程。

四、（共6分）

求函数 $F(x)=\int_0^x t(t-1)dt$ 在区间 $[-1,\ 2]$ 上的最大值和最小值。

五、（共11分）

设函数 $f(x)=\dfrac{x^3}{2(1+x)^2}$，（1）求函数 $f(x)$ 的单调区间与极值点；（2）求函数$f(x)$的凸凹区间与拐点；（3）求函数 $f(x)$ 的渐近线。

六、完成如下各题（共 3 小题，每小题7分，共21分）

1，求函数 $z(x,y)=e^{xy}\ln\left(x^2+y^2\right)$ 在点$P(1,1)$处的全微分。

2，若隐函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $z^3-3xyz=1$ 确定，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$。

3，求函数 $u=xy^2+yz^3+3$ 在点$A(2,-1,1)$处的梯度及其在点A处沿向量 $l=(1,2,2)$ 的方向导数.

七、完成如下各题（共 2 小题，每小题6分，共12分）

1，求证：　$e^x-1>(1+x)\ln(1+x)$，　$x>0$ 。

2，设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 连续，且 $\int_0^1 f(x)dx=0$，　求证：存在点 $\xi\in(0,1)$，满足　$f(\xi)+f(1-\xi)=0$ 。

设 $\varphi(x)=\int_0^x f(t)dt-\int_0^{1-x} f(t)dt$

13

珠海校区 2013 学年度第二学期 13 级《高等数学一》期末考试题 A

学院/专业______________ 学号____________ 姓名____________ 评分_______

阅卷教师签名：_______________

《中山大学授予学士学位工作细则》第六条："考试作弊不授予学士学位。"

一， 求如下极限（每小题 6 分，共 12 分）

1，$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$

2，$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^3}}$

二，求如下积分（每小题 7 分，共 28 分）

1，$\displaystyle\int\frac{2x^2+1}{x^2(1+x^2)}dx$

2，$\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+2}}$

3，$\int_0^4 e^{\sqrt{x}}dx$

4，$\int_1^e \frac{dx}{x\left(2+\ln^2 x\right)}$

三，（每小题 5 分，共 10 分）

1，已知点 $A(2,2,2)$，$B(4,4,2)$，$C(4,2,4)$，求向量 $\overline{AB}$，$\overline{AC}$ 的夹角。

2，求经过直线 L_1：$\begin{cases} x+y=0, \\ x-y-z-2=0, \end{cases}$ 且平行于直线 L_2： $x=y=z$ 的平面的方程。

四，（6分）求函数 $f(x)=\int_0^{x^2}(2-t)e^{-t}dt$ 的极值。

五，（11分）设函数 $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$，（1）求函数 $f(x)$ 的单调区间与极值点；（2）求函数 $f(x)$ 的凸凹区间与拐点；（3）求函数 $f(x)$ 的渐近线。

六，完成如下各题（每小题7分，共21分）

1，求函数 $z(x,y)=\ln\left(1+x^2+y^2\right)$ 在点 $P(1,1)$ 处的全微分。

2 若隐函数 $Z=z(x,y)$ 由方程 $\dfrac{x}{z}=\ln\dfrac{z}{y}$ 确定，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$。

3，求函数 $u(x,y,z)=xyz$ 在点 $P(1,3,-3)$ 沿空间曲线 $x=t^2$，$y=3t^2$，$z=-3t^3$ 的切线方向的方向导数。

七，（每小题 6 分，共 12 分）

1，求证： $1+x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\ge\sqrt{1+x^2}$， $x\in R$。

2，设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上二阶可导，且 $f(a)=f(b)=0$， $f'(a+0)f'(b-0)>0$，求证：在区间 (a, b) 中存在点 ξ,η，满足 $f(\xi)=0$， $f''(\eta)=0$。

15715615901，郑家宝

（也是微信号）.

珠海校区 2012 学年度第一学期 12 级《高等数学一》期末考试题 A

学院/专业____________学号___________姓名__________评分______

阅卷教师签名：____________

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第六条："考试作弊不授予学士学位。"

一，　完成如下各题（每小题 7 分，共 21 分）

1，设函数　$y=\ln\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$，　求 $\dfrac{dy}{dx}$ 。

2，求函数 $z(x,y)=\arctan\dfrac{y}{x}$ 在点 $P(1,1)$ 处的全微分。

3，求函数 $u(x,y,z)=xy^2z$ 在点 $P(1,-1,2)$ 处方向导数增加最快的方向，并求沿该方向的方向导数。

二，　求如下极限（每小题 6 分，共 12 分）

1，$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$

2，$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

三， 完成如下各题（每小题 7 分，共 28 分）

1，$\int \frac{dx}{x(1+x^2)}$

2，$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\left(\sin x+\cos^6 x\right)dx$

3，$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos^3 x\,dx$

4，求由曲线 $y=|\ln x|$ 与直线 $x=e^{-1}$， $x=e$ 及 x 轴所围平面图形的面积。

四，（第 1 小题 4 分，第二小题 6 分，共 10 分）

1，$|\bar{a}|=1$，$|\bar{b}|=5$，$\bar{a}\cdot\bar{b}=-1$，求 $|\bar{a}\times\bar{b}|$ 。

2，求通过直线 $l_1:\begin{cases}2x+3y+3z=0\\x+2z-4=0\end{cases}$ 且与直线 $l_2:\ \frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{-1}$ 平行的平面的方程。

五，（6 分）若隐函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $x+y+z=xyz$ 确定，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$。

六，（11 分） 设函数 $f(x)=\frac{(x-3)^2}{4(x-1)}$，（1） 求函数 $f(x)$ 的单调区间与极值点； （2）求函数 $f(x)$ 的凸凹区间与拐点； （3） 求函数 $f(x)$ 的渐近线。

七，（每小题 6 分，共 12 分）

1，证明：当 $x>1$ 时成立不等式 $(1+x)\ln x>2(x-1)$ 。

2，设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上可导，令 $F(x)=x^2\int_x^1 f(t)dt$，$0\le x\le 1$，求证：在区间 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ 满足 $F''(\xi)=0$ 。

珠海校区 2011 年第一学期 10 级

《高等数学一》期末考试题 A 答案

一,求下列极限

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x\cos x}{x-\sin x}$

解: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x\cos x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x-x(-\sin x)}{1-\cos x}=1+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+x\cos x}{\sin x}=3.$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3-2x}{2-2x}\right)^{x}.$

解: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3-2x}{2-2x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2-2x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2-2x}\right)^{(2-2x)\cdot\frac{x}{2-2x}}=e^{-\frac{1}{2}}.$

二,求如下积分

1. $\displaystyle\int\frac{e^{2x}}{1+e^{x}}dx.$

解: $\displaystyle\int\frac{e^{2x}}{1+e^{x}}dx=\int\frac{e^{x}}{1+e^{x}}de^{x}=\int\left(1-\frac{1}{1+e^{x}}\right)de^{x}=e^{x}-\ln(1+e^{x})+C.$

2. $\displaystyle\int\frac{\ln x}{x^{2}}dx.$

解: $\displaystyle\int\frac{\ln x}{x^{2}}dx=\int\ln x\,d\left(-\frac{1}{x}\right)=-\frac{\ln x}{x}+\int\frac{1}{x^{2}}dx=-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+C.$

3. $\displaystyle\int_{1}^{e^{2}}\frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}.$

解: $\displaystyle\int_{1}^{e^{2}}\frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}=\int_{1}^{e^{2}}\frac{d(1+\ln x)}{\sqrt{1+\ln x}}=\int_{1}^{3}u^{-\frac{1}{2}}du=\left[2\sqrt{u}\right]\Big|_{1}^{3}=2(\sqrt{3}-1).$

4. $\displaystyle\int_{-2}^{2}\left|x^{2}-1\right|dx.$

解: $\displaystyle\int_{-2}^{2}\left|x^{2}-1\right|dx=\int_{-2}^{-1}\left(x^{2}-1\right)dx+\int_{-1}^{1}\left(1-x^{2}\right)dx+\int_{1}^{2}\left(x^{2}-1\right)dx=4.$

三,完成如下各题

1..若 $z(x,y)=\sin(xy)+\cos^2(xy)$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

解: $\frac{\partial z}{\partial x}=y\cos(xy)-y\sin(2xy),\frac{\partial z}{\partial y}=x\cos(xy)-x\sin(2xy)$.

2.已知函数 $f(x,y,z)=\ln\left(x+\sqrt{y^2+z^2}\right)$ 及点 $A(1,0,1),B(3,-2,-2)$,求此函数在点 A 处沿由 A 到到 B 方向的方向导数,并求此函数在点 A 处方向导数的最大值.

解: $\overline{AB}=(2,-2,-3),l=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(\frac{2}{\sqrt{17}},\frac{-2}{\sqrt{17}},\frac{-3}{\sqrt{17}}\right)$;

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}},\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{y}{\left(x+\sqrt{y^2+z^2}\right)\sqrt{y^2+z^2}},\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{z}{\left(x+\sqrt{y^2+z^2}\right)\sqrt{y^2+z^2}}$$

所以 $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_A=\frac{1}{2},\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_A=0,\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_A=\frac{1}{2}$;于是此函数在点 A 处沿 l 方向的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{\sqrt{17}}+0\times\frac{-2}{\sqrt{17}}+\frac{1}{2}\times\frac{-3}{\sqrt{17}}=-\frac{1}{\sqrt{17}}.$$

此函数在点 A 处方向导数的最大值为

$$\left.\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}\right|_A=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+0^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $x+y+z=xyz$ 给出,求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解: 方程两边对 x 求导,得 $1+\frac{\partial z}{\partial x}=yz+xy\frac{\partial z}{\partial x}$, 故 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz-1}{1-xy}$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{yz-1}{1-xy}\right)=\frac{(1-xy)y\frac{\partial z}{\partial x}-(-y)(yz-1)}{(1-xy)^2}=\frac{2y(yz-1)}{(1-xy)^2}.$$

四，1.若$|\bar{a}|=2, |\bar{b}|=5, \bar{a}\cdot\bar{b}=-6$,求 $|\bar{a}\times\bar{b}|$.

解: $\cos<\bar{a},\bar{b}>=\dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}=-\dfrac{3}{5}$,故 $\sin<\bar{a},\bar{b}>=\dfrac{4}{5}$.于是

$$|\bar{a}\times\bar{b}|=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\sin<\bar{a},\bar{b}>=8.$$

2.求通过直线 $l_1:\begin{cases}x+2y+z-3=0,\\ x-z-1=0;\end{cases}$ 并且与直线 $l_2:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z}{1}$ 平行的平面方程.

解: 两直线的方向向量分别为$\vec{e}_1=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{vmatrix}=-2\bar{i}+2\bar{j}-2\bar{k}$, $\vec{e}_2=2\bar{i}-\bar{j}-\bar{k}$,

故所求平面的法向量为$\bar{n}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -2 & 2 & -2\\ 2 & -1 & -1\end{vmatrix}=-4\bar{i}-6\bar{j}-2\bar{k}$.

又易知点(1,1,0)在直线l_1上,故所求平面方程为$-4(x-1)-6(y-1)-2z=0$, 即

$$2x+3y+z-5=0.$$

五，记 $F(x)=\int_0^x\dfrac{\sqrt{t}}{1+t^3}dt+\int_0^{\frac{1}{x}}\dfrac{\sqrt{t}}{1+t^3}dt,\quad x>0$, 求证:$F(x)$是常数,并求此常数.

解: 因为$F'(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{1+x^3}+\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)\dfrac{\sqrt{1/x}}{1+(1/x)^3}=0,\ x>0$,所以$F(x)$是常数.

于是,对任意$x>0$,

$$F(x)=F(1)=2\int_0^1\frac{\sqrt{t}}{1+t^3}dt=\frac{4}{3}\int_0^1\frac{1}{1+(\sqrt{t^3})^2}d\sqrt{t^3}=\frac{4}{3}\arctan\sqrt{t^3}\Big|_0^1=\frac{\pi}{3}.$$

六，设函数$f(x)=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$,(1) 求函数$f(x)$的单调区间与极值点;(2)求函数$f(x)$的凸凹区间与拐点;(3)求函数$f(x)$的渐近线.

解: (1) $f'(x)=\dfrac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$,单调增区间为$(-\infty, 1)$, $(3,+\infty)$;单调减区间为(1,3).

无极大值点, 极小值点为 $x=2$.

(2) $f''(x)=\dfrac{6x}{(x-1)^4}$, 凸区间为 $(-\infty, 0)$, 凹区间为 $(0,1),(1,+\infty)$. 拐点为 $x=0$ 或$(0,0)$.

(3) 显然有垂直渐近线 $x=1$;而由于

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x(x-1)^2}=1,\quad \lim_{x\to\infty}\left(f(x)-x\right)=2,$$

故函数有斜渐近线 $y=x+2$.

七, 1. 求证: $(1+x)\ln^2(1+x)\le x^2,\quad x\ge 0$.

证: 记 $f(x)=(1+x)\ln^2(1+x)-x^2,\quad x\ge 0$. 则 $f(0)=0$, 且

$$f'(x)=\ln^2(1+x)+2\ln(1+x)-2x-x^2,\quad x\ge 0,\quad f'(0)=0.$$

$$f''(x)=\frac{2\ln(1+x)}{1+x}+\frac{2}{1+x}-2=\frac{2[\ln(1+x)-x]}{1+x}<0, x\ge 0.$$

故 $f'(x)$ 单调降, 即 $f'(x)<f'(0)=0, x>0$. 于是 $f(x)$ 单调降, 即

$f(x)<f(0)=0, x>0$. 不等式得证.

2.设函数 $f(x)$ 在闭区间$[0,1]$ 上连续,在开区间$(0,1)$内可导,且 $f(0)=0, f(1)=1$.

求证:存在两个不同的点 $\xi\in(0,1),\eta\in(0,1)$, 满足 $\dfrac{1}{f'(\xi)}+\dfrac{1}{f'(\eta)}=2$.

证明:由闭区间上连续函数的介值定理,存在 $c\in(0,1)$, 使得 $f(c)=\dfrac{1}{2}$.

在区间$[0,c]$上,由拉格朗日中值定理,存在 $\xi\in(0,c)$, 使得 $f(c)-f(0)=f'(\xi)c$,.

在区间$[c,1]$上,由拉格朗日中值定理,存在 $\eta\in(c,1)$, 使得 $f(1)-f(c)=f'(\eta)(1-c)$,.

即有 $\dfrac{1}{f'(\xi)}=2c$, $\dfrac{1}{f'(\eta)}=2(1-c)$. 于是 $\dfrac{1}{f'(\xi)}+\dfrac{1}{f'(\eta)}=2$. 且显然 $\xi\neq\eta$. 证毕.

谨以此文献给所有坚持考前突击流的朋友们！！

大家都是过来人。。这些公式都是对做题非常非常非常有用的，知道和不知道绝对不一样，一下午的血汗啊~~那些是个人都知道的公式我都省掉了，剩下的全部是精华，看看有没有你没见过的。如果觉得有帮助，别忘了分享一下！

WORD 里的特殊字符不能发在日志里，所以只能发图了

和差化积

$\sin\theta+\sin\varphi=2\sin(\frac{\theta+\varphi}{2})\cos(\frac{\theta-\varphi}{2})$

$\sin\theta-\sin\varphi=2\cos(\frac{\theta+\varphi}{2})\sin(\frac{\theta-\varphi}{2})$

$\cos\theta+\cos\varphi=2\cos(\frac{\theta+\varphi}{2})\cos(\frac{\theta-\varphi}{2})$

$\cos\theta-\cos\varphi=-2\sin(\frac{\theta+\varphi}{2})\sin(\frac{\theta-\varphi}{2})$

积化和差

$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$

$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$

$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]$

$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$

万能公式

$\sin\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$ $\cos\alpha=\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$ $\tan\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$

平方关系

$1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$ $1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha$

等价无穷小

$e^x-1\sim x$ $\ln(x+1)\sim x$

$(1+ax)^b-1\sim abx$

$\log_a(x+1)\sim\frac{x}{\ln a}$ $a^x-1\sim x\ln a$

$\tan x-x\sim\frac{1}{3}x^3$ $x-\sin x\sim\frac{1}{6}x^3$ $\tan x-\sin x\sim\frac{1}{2}x^3$

基本初等函数导数

$(\tan x)'=\sec^2 x$ $\qquad$ $(\cot x)'=-\csc^2 x$

$(\sec x)'=\sec x\tan x$ $\qquad$ $(\csc x)'=-\csc x\cot x$

$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad$ $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$ $\qquad$ $(\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$

微分的类似，不写了

高阶导数

$$(x^k)^{(n)}=\begin{cases} k(k-1)\cdots(k-n+1)\,x^{k-n}, & n<k \\ n!, & n=k \\ 0, & n>k \end{cases}$$

$(\sin x)^{(n)}=\sin(x+\frac{n\pi}{2})$ $\qquad$ $(\cos x)^{(n)}=\cos(x+\frac{n\pi}{2})$

$(a^x)^{(n)}=a^x(\ln a)^n(a>0)$ $\qquad$ $(\ln x)^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$

重要极限

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$ $\qquad$ $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^k}{a^n}=0(a>1,k>0)$ $\qquad$ $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a}=1\ (a>0)$

$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^x=\frac{1}{e}$

$\lim\limits_{x\to 0^+}x^x=1$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[x]{x}=1$

常用 Maclaurin 公式

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(x^{2n})$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$$

不定积分公式

$$\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + c$$

$$\int \csc x dx = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| + c = \ln|\csc x - \cot x| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin\frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x + a}{x - a}\right| + c$$

变上限定积分求导公式

$$\frac{d}{dx}\int_a^{\varphi(x)} f(t)dt = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$$

参数方程求曲线弧长、旋转体侧面积

$x = f(t), y = g(t), (t \in [\alpha, \beta])$

弧长 $l = \int_\alpha^\beta \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt$

侧面积 $S = 2\pi\int_\alpha^\beta g(t)\sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt$

直角坐标系求曲线弧长、旋转体侧面积

$y = f(x), (x \in [a, b])$

弧长 $l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$

侧面积 $S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$

极坐标系求曲线弧长、旋转体侧面积

$r = r(\theta), (\theta \in [\alpha, \beta])$

弧长 $l = \int_\alpha^\beta \sqrt{[r(\theta)]^2 + [r'(\theta)]^2} d\theta$

侧面积 $S = 2\pi\int_\alpha^\beta [r(\theta)\sin\theta]\sqrt{[r(\theta)]^2 + [r'(\theta)]^2} d\theta$

点到平面距离公式

平面 π :Ax+By+Cz+D=0 过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，

法向量 $\vec{n}=(A,B,C)$ 则点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 到 π 的距离

$$d=\frac{\overrightarrow{M_0M_1}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|}=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

点到直线距离公式

直线 L 过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，

方向向量 $\vec{s}=(X,Y,Z)$ 则点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 到 L 的距离

$$d=\frac{|\overrightarrow{M_0M_1}\times\vec{s}|}{|\vec{s}|}$$

两直线距离公式

L_1 过 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，方向向量 $\vec{s_1}=(X_1,Y_1,Z_1)$

L_2 过 $M_2(x_2,y_2,z_2)$，方向向量 $\vec{s_2}=(X_2,Y_2,Z_2)$

L_1L_2 平行时 $d=\frac{|\overrightarrow{M_1M_2}\times\vec{s_1}|}{|\vec{s_1}|}$

L_1L_2 异面时 $d=\frac{|\overrightarrow{M_1M_2}\cdot(\vec{s_1}\times\vec{s_2})|}{|\vec{s_1}\times\vec{s_2}|}$

10 条

东校区 2010 学年度第一学期 10 级《高等数学一》期末考试题

D-1

专业__________学号__________姓名__________评分________

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第六条："考试作弊不授予学士学位。"

一、完成下列各题（每小题 7 分，共 70 分）

1. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^n$　　2. 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\ln(1+xy)}{\sin(2xy)}$　　3. $y=x\arccos x^2$，求 y'

4. 已知 $y=y(x)$ 满足 $e^{xy}+\sin(x^2y)=y^2$，求 $y'(0)$　　5. $y=x^2e^{3x}$，求 $y^{(20)}$

6 求 $\int\dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx$　　7. 求 $\int x\ln(1+x)dx$　　8. 求 $\int_{-1}^{1}\left(x^2+\arctan x\right)dx$

9. 已知 $\vec{a}=4\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$，$\vec{b}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$，求一个同时垂直于 $\vec{a},\vec{b}$ 的向量。答：$-8\vec{i}+10\vec{j}+14\vec{k}$

10. 求 $f(x)=\ln x$ 在 $x=2$ 处的 n 阶泰勒公式。

解：$\ln x=\ln(2+x-2)=\ln 2+\ln\left(1+\dfrac{x-2}{2}\right)$　$\therefore \ln x=\ln 2+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^k(x-2)^k}{k\cdot 2^k}+o\left((x-2)^n\right)$.

二、完成下列各题（每小题 5 分，共 30 分）

1. 证明不等式 $\dfrac{b-a}{b}<\ln\dfrac{b}{a}<\dfrac{b-a}{a}$ $(b>a>0)$.

证：$\ln\dfrac{b}{a}=\ln b-\ln a=\dfrac{1}{\xi}(b-a)$，其中 $b>\xi>a>0$。

由于 $\dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{\xi}<\dfrac{1}{a}$，所以 $\dfrac{b-a}{b}<\ln\dfrac{b}{a}<\dfrac{b-a}{a}$

2. 求过直线 $L:\begin{cases}x+2y-z+1=0,\\2x-3y+z=0\end{cases}$ 和点 $P_0(1,2,3)$ 的平面方程。

3. 设 $u=f(x,xy,xyz)$，其中 f 有连续的二阶偏导数，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}$

答：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=f_1'+yf_2'+yzf_3'$　$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=xy\left(f_{13}''+yf_{23}''+yzf_{33}''\right)+yf_3'$.

4. 求函数 $z=xe^{2y}$ 在点 $P(1,0)$ 处的沿从点 $P(1,0)$ 到点 $Q(2,-1)$ 方向的方向导数。 P-2

解 由于 $v=\frac{\overline{PQ}}{|PQ|}=\frac{(2,-1)-(1,0)}{|(2,-1)-(1,0)|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)=(v_1,v_2)$，且 $\frac{\partial z}{\partial x}=e^{2y}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=2xe^{2y}$

所以 $\frac{\partial z}{\partial \vec{v}}=\frac{\partial z}{\partial x}v_1+\frac{\partial z}{\partial y}v_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

5. 要做一个容积为 1 立方米的有盖铝圆桶，什么样的尺寸才能使用料最省？

解 假设圆桶的底面半径为 r，高为 h，则圆桶的容积为 $\pi r^2h=1$，表面积为 $S=2\pi rh+2\pi r^2$。令 $L(r,h,\lambda)=2\pi rh+2\pi r^2-\lambda(\pi r^2h-1)$，

求偏导，得到 $\begin{cases}L_r=2\pi h+4\pi r-2\pi rh\lambda=0,\\ L_h=2\pi r-\pi r^2\lambda=0,\end{cases}$

解得 $h=2r$，再代入约束条件 $\pi r^2h=1$，得到 $r=\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$，$h=\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$

根据题意，目标函数必有最小值，所以可知当底面半径为 $\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$，高为 $\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$ 时用料最省。

6. 证明函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

的偏导函数 $f_x(x,y), f_y(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 不连续，但它在该点可微。

解 由定义，$f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x^2+0^2)\sin\frac{1}{\Delta x^2+0^2}-0}{\Delta x}=0$，

当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，$f_x(x,y)=2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$，$x^2+y^2\neq 0$。

由于 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x=y}}f_x(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}(2x\sin\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{2x}\cos\frac{1}{2x^2})$，

极限不存在，所以 $f_x(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 不连续。同理 $f_y(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 也不连续。但由于 $f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]$

$=(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}=o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})$，所以函数在 $(0,0)$ 可微。

1.

东校区2010学年度第一学期10级《高等数学一》期末考试题答案C-1

一、完成下列各题（每小题7分，共70分）

1. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{2n}\right]^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}$.

2. 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\ln(1+xy)}{\sin 2xy}$

令$u=xy$,则 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}u=0$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)}\frac{\ln(1+xy)}{\sin(2xy)}=\lim_{u\to0}\frac{\ln(1+u)}{\sin 2u}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+u}}{2\cos 2u}=\frac{1}{2}.$$

3. $y=x\arccos x^{2}$, 求y' $\qquad y'=acr\cos(x^{2})-\dfrac{2x^{2}}{\sqrt{1-x^{4}}}$.

4. 设$z+\cos(xy)=e^{z}$,求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

$z_{x}-y\sin(xy)=e^{z}\cdot z_{x}$

$z_{x}=\dfrac{y\sin(xy)}{1-e^{z}}$.

5. 设$f(x,y,z)=\sqrt[z]{\dfrac{x}{y}}$;求$df(1,1\,1)$.

$f_{x}(x,1,1)=(x)'=1,\ f_{x}(1,1,1)=1$

$f_{y}(1,y,1)=(\dfrac{1}{y})'=-\dfrac{1}{y^{2}},\ f_{y}(1,1,1)=-1$

$f_{z}(1,1,z)=(1)'=0,\ f_{z}(1,1,1)=0$

$df(1,1,1)=f_{x}(1,1,1)dx+f_{y}(1,1,1)dy+f_{z}(1,1,1)dz=dx-dy.$

2.

C-2

6 求$\int\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx \quad =\int\frac{2d\sqrt{x}}{1+(\sqrt{x})^2}=2\arctan\sqrt{x}+c.$

7. 求$\int x\ln(1+x)dx$

$=\frac{1}{2}x^2\ln(1+x)-\frac{1}{2}\ln(1+x)-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+c.$

8. 求$\int_{-1}^{1}\left(x^2+\arctan x\right)dx=\int_{-1}^{1}x^2dx=\frac{2}{3}.$

9已知[redacted]$\vec{b}=2i+3j-k$,求一个同时垂直于$\vec{a},\vec{b}$的向量。

$\vec{a}\times\vec{b}=-10i+7j+k$

10. 求$f(x)=\ln(x-1)$在$x=2$处的n阶泰勒公式。

$$\ln(x-1)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{(x-2)^k}{k}+o((x-2)^n).$$

二、完成下列各题（每小题5分，共30分）

1. 求过直线$L:\begin{cases}x+2y-z+1=0,\\2x-3y+z=0\end{cases}$和点$P_0(1,2,3)$的平面方程。

$7x-7y+2z+1=0$

2. 设$u=f\left(x,xy,xyz\right)$，其中f有连续的二阶偏导数，求$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x}$[redacted].

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'+yf_2'+yzf_3'$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=f_2'+zf_3'+xf_{12}''+xzf_{13}''+xyf_{22}''+xyzf_{23}''+xyzf_{32}''+xyz^2f_{33}''$$

3. 求函数$z=xe^{2y}$在点$P(1,0)$处的沿从点$P(1,0)$到点$Q(2,-1)$方向的方向导数。

$$\frac{\partial z}{\partial l}=(z_x(1,0),z_y(1,0))\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,2)\cdot(1,-1)=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3

4. 求函数$u=\sin x\sin y\sin z$在条件$x+y+z=\frac{\pi}{2}(x>0,y>0,z>0)$下的极值和极值点。 c-3

$F(x,y,z,\lambda)=\ln\sin x+\ln\sin y+\ln\sin z+\lambda(x+y+z-\frac{\pi}{2})$

$F_x=\frac{\cos x}{\sin x}=0, F_y=\frac{\cos y}{\sin y}=0, F_z=\frac{\cos z}{\sin z}=0, F_\lambda=x+y+z-\frac{\pi}{2}=0.$

$x_0=y_0=z_0=\frac{\pi}{6}, u_{\max}=\frac{1}{8}.$

5. 证明函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

的偏导函数$f_x(x,y); f_y(x,y)$在原点$(0,0)$不连续，但它在该点可微。

$f_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(0+x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x^2}=0.$

$f_y(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(0,,0+y)-f(0,0)}{y}=\lim\limits_{x\to 0}y\sin\frac{1}{y^2}=0$

当$(x,y)\neq(0,0)$时，

$f_x(x,y)=2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$

$f_y(x,y)=2y\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2y}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$

因为$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x}}f_x(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}(2x\sin\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{2x^2})$不存在，故$f_x(x,y)$不连续。

因为$\lim\limits_{\substack{y\to 0\\ x=y}}f_y(x,y)=\lim\limits_{y\to 0}(2y\sin\frac{1}{2y^2}-\frac{1}{y}\cos\frac{1}{2y^2})$不存在，故$f_y(x,y)$不连续。

但是$\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{\Delta f-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y}{\upsilon}=\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{(\Delta x^2+\Delta y^2)\sin\frac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$

$=\lim\limits_{\rho\to 0}\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\sin\frac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}=0.$

故$f(x,y)$在$(0,0)$点可微，且$df(0,0)=0.$

4.

6. 设$f(x)$在$[a,b]$连续，在(a,b)二阶可导，证明存在$\eta\in(a,b)$，使得下式成立 C-4

$$f(b)+f(a)-2f(\frac{a+b}{2})=\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 f''(\eta)\text{。}$$

令$g(x)=f(x)-f(x-\frac{b-a}{2})$,则$g(x)$在$[\frac{a+b}{2},b]$可导,

$g(b)=f(b)-f(\frac{a+b}{2})$; $g(\frac{a+b}{2})=f(\frac{a+b}{2})-f(a)$.

由微分中值定理 $g(b)-g(\frac{a+b}{2})=g'(\xi)\cdot\frac{b-a}{2},\xi\in(\frac{b+a}{2},b)$

即$f(b)+f(a)-2f(\frac{a+b}{2})=g'(\xi)\cdot\frac{b-a}{2}$ $,\xi\in(\frac{b+a}{2},b)$ (1)

$g'(\xi)=f'(\xi)-f'(\xi-\frac{b-a}{2})$,

又因为$f'(x)$在$[\xi-\frac{b-a}{2},\xi]$可导，由微分中值定理可得

$f'(\xi)-f'(\xi-\frac{b-a}{2})=f''(\eta)\cdot\frac{b-a}{2},\eta\in(a,b)$ (2)

综合 (1)，(2)式可得

$f(b)+f(a)-2f(\frac{a+b}{2})=f''(\eta)(\frac{b-a}{2})^2$ $,\eta\in(a,b)$.

09级一卷 B

一.(每小题 6 分,共 12 分)求极限: (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{2x^3}$; (2) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

二. (每小题 6 分,共 24 分)求下列积分:

(1) $\displaystyle\int\frac{dx}{x(2+x^{10})}$; (2) $\displaystyle\int\cos(\ln x)dx$; (3) $\displaystyle\int_1^e\frac{dx}{x(2+\ln^2 x)}$; (4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\sin t+\cos t}dt$

三. (每小题 7 分, 共 21 分)

(1)设 $z(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, 求 $dz\big|_{(0,1)}$;

(2)已知 $f(x,y,z)=\ln\left(x+\sqrt{y^2+z^2}\right)$ 及点 $A(1,0,1), B(3,-2,-2)$, 求函数 $f(x,y,z)$ 在点 A 处沿由 A 到 B 的方向导数, 并求此函数在电 A 处方向导数的最大值.

(3)设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $x+y+z=e^z$ 给出, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$. $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 及 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

四. (第一小题 4 分, 第二小题 6 分, 共 10 分)

(1)给定空间三点: $A(1,2,0), B(-1,3,1), C(2,-1,2)$, 求 ΔABC 的面积 S.

(2)求经过直线 $L_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z+3}{4}$ 且平行于直线 $L_2: x=y=\dfrac{z}{2}$ 的平面方程.

五. (7 分) 求函数 $f(x)=x^{\frac{1}{x}}, x>0$ 的极值.

六. (12 分) 设函数 $f(x)=\dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$, 求(1)此函数的单调区间与极值点;(2)此函数的凹凸区间与拐点;(3)此函数的渐近线.

七. (每小题 7 分, 共 14 分)

1.求证不等式 $\sin x+\tan x>2x,\quad 0<x<\dfrac{\pi}{2}$;

2.设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上二阶可导, 且 $f(a)=f(b)=0, f''(x)\neq 0, x\in(a,b)$. 求证: $f(x)\neq 0, x\in(a,b)$.

09 级一期 B 卷参考解答

一.(每小题 6 分,共 12 分)求极限:

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{2x^3}$;

解 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{2x^3(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{4x^3}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sec^2 x-\cos x}{12x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^3 x}{12x^2\cos^2 x}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^3 x}{12x^2}=\lim_{x\to0}\frac{3\cos^2 x\sin x}{24x}=\frac{1}{8}.$$

(2) $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{\sin^2 x}\ln\cos x}$. 而

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\cos x}{\sin^2 x}=\lim_{x\to0}\frac{-\sin x/\cos x}{2\sin x\cos x}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos^2 x}=-\frac{1}{2}.$$

故 $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}=e^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

二. (每小题 6 分,共 24 分)求下列积分:

(1) $\displaystyle\int\frac{dx}{x(2+x^{10})}$;

解 $\displaystyle\int\frac{dx}{x(2+x^{10})}=\int\frac{x^9dx}{x^{10}(2+x^{10})}=\frac{1}{10}\int\frac{dx^{10}}{x^{10}(2+x^{10})}$;

$$=\frac{1}{20}\left(\int\frac{dx^{10}}{x^{10}}-\int\frac{dx^{10}}{2+x^{10}}\right)=\frac{1}{20}\ln\left|\frac{x^{10}}{2+x^{10}}\right|+C.$$

(2) $\displaystyle\int\cos(\ln x)dx$;

解 $\displaystyle\int\cos(\ln x)dx\overset{u=\ln x}{=}\int e^u\cos udu=\int e^u d\sin u=e^u\sin u-\int\sin ude^u$

$$=e^u\sin u+\int e^u d\cos u=e^u\sin u+e^u\cos u-\int e^u\cos udu$$

所以 $\displaystyle\int\cos(\ln x)dx=\frac{e^u}{2}[\sin u+\cos u]+C=\frac{x}{2}[\sin\ln x+\cos\ln x]+C.$

(3) $\int_1^e \frac{dx}{x\left(2+\ln^2 x\right)}$;

解 $$\int_1^e \frac{dx}{x\left(2+\ln^2 x\right)} \overset{u=\ln x}{=} \int_0^1 \frac{du}{2+u^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{d(u/\sqrt{2})}{1+(u/\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{u}{\sqrt{2}} \Big|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t+\cos t} dt$

解 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t+\cos t} dt \overset{s=\frac{\pi}{2}-t}{=} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-s\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)} d\left(\frac{\pi}{2}-t\right)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin s}{\sin s+\cos s} ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sin t+\cos t} dt.$$

而 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t+\cos t} dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sin t+\cos t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2},$$

于是 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t+\cos t} dt = \frac{\pi}{4}.$$

三. (每小题 7 分, 共 21 分)

(1)设 $z(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, 求 $dz\big|_{(0,1)}$;

解 $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}-x\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-x\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{-xy}{(x^2+y^2)^{3/2}},$$

于是 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,1)}=1$, $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,1)}=0$, 故 $dz\big|_{(0,1)} = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,1)} dx + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,1)} dy = dx.$

(2)已知 $f(x,y,z)=\ln\left(x+\sqrt{y^2+z^2}\right)$及点$A(1,0,1)$, $B(3,-2,-2)$, 求函数$f(x,y,z)$ 在点 A 处沿由 A 到 B 的方向导数, 并求此函数在点 A 处方向导数的最大值.

解　$\overline{AB}=l=(2,-2,-3)$，故 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(\frac{2}{\sqrt{17}},\frac{-2}{\sqrt{17}},\frac{-3}{\sqrt{17}}\right)$，　$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}$，

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}}{x+\sqrt{y^2+z^2}}=\frac{y}{x\sqrt{y^2+z^2}+y^2+z^2},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}}{x+\sqrt{y^2+z^2}}=\frac{z}{x\sqrt{y^2+z^2}+y^2+z^2}$$

于是　$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,0,1)}=\frac{1}{2},\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,0,1)}=0,\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{(1,0,1)}=\frac{1}{2}$，

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(1,0,1)}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{\sqrt{17}}+0\times\frac{(-2)}{\sqrt{17}}+\frac{1}{2}\frac{(-3)}{\sqrt{17}}=-\frac{1}{2\sqrt{17}}.$$

在 A 点的方向导数最大值为 $\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+0+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(3)设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $x+y+z=e^z$ 给出,求 $\frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial z}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解　令 $F(x,y,z)=e^z-x-y-z$，　则　$\frac{\partial F}{\partial x}=-1,\frac{\partial F}{\partial y}=-1,\frac{\partial F}{\partial z}=e^z-1$. 于是

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial F}{\partial x}\Big/\frac{\partial F}{\partial z}=\frac{1}{e^z-1},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial F}{\partial y}\Big/\frac{\partial F}{\partial z}=\frac{1}{e^z-1},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{e^z-1}\right)=\frac{-e^z}{(e^z-1)^2}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-e^z}{(e^z-1)^3}.$$

四.(第一小题 4 分, 第二小题 6 分, 共 10 分)

(1)给定空间三点: $A(1,2,0),B(-1,3,1),C(2,-1,2)$, 求 ΔABC 的面积 S.

解　根据向量积的定义，可知三角形 ABC 的面积

$$2S_{\Delta ABC}=|AB||AC|\sin\angle A=\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|$$

由于 AB=(-2，1，1)，AC=(1，-3，1)，故

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}=5i+5j+5k,\qquad \left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\sqrt{5^2+5^2+5^2}=5\sqrt{3}$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

(2)求经过直线 $L_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z+3}{4}$ 且平行于直线 $L_2:x=y=\dfrac{z}{2}$ 的平面方程.

解　平面的法向量为 $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=2i+0j-k$,又显然所求平面过点(1, -2, -3)

故所求平面方程为　$2(x-1)+0(y+2)-(z+3)=0$, 即 $2x-z-5=0$.

五. (7 分)求函数 $f(x)=x^{\frac{1}{x}}, x>0$ 的极值.

解　$f'(x)=\dfrac{d}{dx}(e^{\frac{\ln x}{x}})=e^{\frac{\ln x}{x}}\cdot\dfrac{1-\ln x}{x^2}=x^{\frac{1}{x}}\cdot\dfrac{1-\ln x}{x^2}$,

令　$f'(x)=0$,得驻点 $x=e$.又 当 $0<x<e$ 时, $f'(x)>0$, 当 $x>e$ 时, $f'(x)<0$, 故此点为极大值点, 极大值为 $f(e)=e^{\frac{1}{e}}$.

六. (12 分) 设函数 $f(x)=\dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$, 求(1)此函数的单调区间与极值点;(2)此函数的凹凸区间与拐点;(3)此函数的渐近线.

解　$f'(x)=\dfrac{3(x-1)^2(x+1)^2-2(x-1)^3(x+1)}{(x+1)^4}$

$$=\frac{(x-1)^2[3(x+1)-2(x-1)]}{(x+1)^3}=\frac{(x-1)^2(x+5)}{(x+1)^3},$$

$$f''(x)=\frac{[2(x-1)(x+5)+(x-1)^2](x+1)^3-3(x-1)^2(x+5)(x+1)^2}{(x+1)^6}$$

$$=\frac{(x-1)[(3x+9)(x+1)-3(x-1)(x+5)]}{(x+1)^4}=\frac{24(x-1)}{(x+1)^4}.$$

x	$(-\infty,-5)$	-5	$(-5,-1)$	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	+	0	+
$f''(x)$	−	−	−	−	0	+
$f(x)$	凸, ↗	极大值-27/2	凸, ↘	凸, ↗	拐点(1, 0)	凹, ↗

单调增加区间为 $(-\infty,-5)$, $(-1,1)$ 和 $(1,+\infty)$, 单调减少区间为 $(-5,-1)$ 函数在点

x=−5 处取到极大值, 极大值为 $f(-5)=-27/2$.

曲线的凸区间为 $(-\infty,-1)$ 和 $(-1,1)$, 凹区间为 $(1,\ +\infty)$, 曲线拐点为 $(1,0)$.

显然曲线有垂直渐近线 x=−1, 曲线无水平渐近线. 由于

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)^3}{x(x+1)^2}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}-x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{-5x^2+2x-1}{(x+1)^2}=-5,$$

因此曲线有斜渐近线 $y=x-5$.

(七. (每小题 7 分, 共 14 分)

1.求证不等式 $\sin x+\tan x>2x,\quad 0<x<\frac{\pi}{2}$;

证 令 $f(x)=\sin x+\tan x-2x,\quad 0<x<\frac{\pi}{2}$, 则 $f'(x)=\cos x+\sec^2 x-2$,

$$f''(x)=-\sin x+2\sec x\cdot\sec x\tan x=\frac{\sin x(2-\cos^3 x)}{\cos^3 x}\geq 0,$$

故 $f'(x)=\cos x+\sec^2 x-2$, 在区间 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 内单调增加, 而 $f'(0)=0$, 于是在区间 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 内 $f'(x)>0$, 从而 $f(x)=\sin x+\tan x-2x$ 在区间 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 内单调增加, 于是 $f(x)=\sin x+\tan x-2x>f(0)=0$. 证毕.

2.设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上二阶可导, 且 $f(a)=f(b)=0$, $f''(x)\neq 0, x\in(a,b)$. 求证: $f(x)\neq 0, x\in(a,b)$.

证 用反证法. 设存在 $c\in(a,b)$, 使得 $f(c)=0$. 于是由罗尔定理,

$$\exists\xi\in(a,c),\exists\eta\in(c,b), \text{使得} f'(\xi)=f'(\eta)=0.$$

同样由罗尔定理, $\exists\zeta\in(\xi,\eta)\subset(a,b)$, 使得 $f''(\zeta)=0$. 矛盾.

01 A

一.(每小题 6 分,共 12 分)求下列极限: 1. $\lim_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{2}{x}}-1\right)$; 2. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

二.(每小题 6 分,共 24 分)完成如下各题

1. $\int \frac{2x^2+1}{x^2(1+x^2)}dx$; 2. $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+2}}$; 3. $\int_0^4 e^{\sqrt{x}}dx$;

4.求证: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2010}x}{\sin^{2010}x+\cos^{2010}x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2010}x}{\sin^{2010}x+\cos^{2010}x}dx$, 并求此积分.

三.(每小题 7 分,共 21 分)完成如下各题:

1.设 $u(x,y)=\ln\sqrt{1+x^2+y^2}$, 求 $du\big|_{(1,2)}$.

2.已知 $f(x,y,z)=2xy-z^2$ 及点 $A(2,-1,1)$, $B(3,1,-1)$, 求函数 $f(x,y,z)$ 在点 A 处沿由 A 到 B 方向的方向导数,并求此函数在点 A 处方向导数的最大值.

3.设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $z^3-3xyz=1$ 给出,求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

四.(第一小题 4 分,第二小题 6 分,共 10 分)

1.已知点 $A(2,2,2)$, $B(4,4,2)$, $C(4,2,4)$, 求向量 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ 的夹角.

2.求经过直线 $L_1:\begin{cases}x+y=0,\\ x-y-z-2=0,\end{cases}$ 且平行于直线 $L_2: x=y=z$ 的平面方程.

五.(7 分)求函数 $f(x)=\int_0^x (t-1)(t-2)^2dt$ 的极值.

六.(12 分)设函数 $f(x)=\frac{x^3}{2(1+x)^2}$, 求(1)函数的单调区间于极值点;(2)函数的凹凸区间与拐点;(3)函数的渐近线.

七.(每小题 7 分,共 14 分)

1.求证: $1+x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\ge\sqrt{1+x^2}$, $x\in R$.

2.设函数 $f(x)$ 在闭区间[0,1]上连续,在开区间(0,1)内可导,且 $f(0)=0$, $f(1)=1$, 求证:

(1)存在 $\alpha\in(0,1)$, 使得 $f(\alpha)=1-\alpha$;

(2)存在两个不同的点 $\xi\in(0,1)$, $\eta\in(0,1)$, 满足 $f'(\xi)f'(\eta)=1$.