2019 学年第二学期《高等数学一（II）》期末考试试题（模拟卷）

一、主观题

1. （10 分）

设 $f(x,y,z)=x+y^2+z^3$，求 f 在点 $P_0(1,1,1)$ 的梯度和沿方向 $l=(2,-2,1)$ 的方向导数.

解　由于 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=1$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}=2y$，$\dfrac{\partial f}{\partial z}=3z^2$，故 $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y},\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)\Big|_{P_0}=(1,2,3)$，

$l_0=\dfrac{1}{|l|}l=\dfrac{1}{3}(2,-2,1)$，所以 $\dfrac{\partial f}{\partial l}\Big|_{P_0(1,1,1)}=(1,2,3)\cdot\dfrac{1}{3}(2,-2,1)=\dfrac{1}{3}$.

2．（15 分）设 $u=e^x+x\sin y, v=e^x-x\cos y$，求 $\dfrac{\partial x}{\partial u},\dfrac{\partial x}{\partial v},\dfrac{\partial y}{\partial u},\dfrac{\partial y}{\partial v}$.

解　由 $u=e^x+x\sin y, v=e^x-x\cos y$ 的表达式知它们在全平面存在对 x,y 的连续偏导数，且

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x+\sin y,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=x\cos y,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=e^x-\cos y,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=x\sin y$$

又由于

$$J=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y}\\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}e^x+\sin y & x\cos y\\ e^x-\cos y & x\sin y\end{vmatrix}=x\left(e^x(\sin y-\cos y)+1\right)$$

故在 $J\neq 0$ 的任何点的邻域内，都有

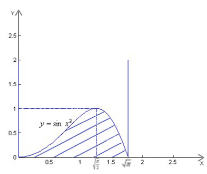
$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{1}{J}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\sin y}{e^x\left(\sin y-\cos y\right)+1},\qquad \frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{1}{J}\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\cos y}{e^x\left(\sin y-\cos y\right)+1},$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}=-\frac{1}{J}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\cos y-e^x}{x\left[e^x(\sin y-\cos y)+1\right]},\quad \frac{\partial y}{\partial v}=\frac{1}{J}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{e^x+\sin y}{x\left[e^x(\sin y-\cos y)+1\right]}.$$

3. （15 分）$\iint\limits_D xdxdy$，D 是由 $y=0, y=\sin x^2, x=0$ 和 $x=\sqrt{\pi}$ 围城的区域.

解　原式 $=\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}}xdx\int_0^{\sin x^2}dy=\int_0^{\sqrt{\pi}}x\sin x^2dx=\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\pi}}\sin x^2d(x^2)$

$$=-\frac{1}{2}\cos x^2\Big|_0^{\sqrt{\pi}}=-\frac{1}{2}(\cos\pi-\cos 0)=1.$$



4.（15）

$$\iint_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$$，S 为球面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ 的外侧.

解：先计算：$\iint_S z^2dxdy=\iint_{S_上} z^2dxdy+\iint_{S_下} z^2dxdy$

$$=\iint_{D_{xy}}[c+\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}]^2dxdy-\iint_{D_{xy}}[c-\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}]^2dxdy$$

$$=4c\iint_{D_{xy}}\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}dxdy=\frac{8}{3}\pi R^3c$$，其中，D_{xy}：$(x-a)^2+(y-b)^2\le R^2$

同理可得：$\iint_S x^2dydz=\frac{8}{3}\pi R^3a$，$\iint_S y^2dzdx=\frac{8}{3}\pi R^3b$

$$\therefore \iint_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy=\frac{8}{3}\pi R^3(a+b+c)$$

5.（15 分）求通解：$(e^{x+y}-e^x)dx+(e^{x+y}+e^y)dy=0$.

解：分离变量：$\frac{e^x}{e^x+1}dx=-\frac{e^y}{e^y-1}dy$

两边积分，并化简得通解：$\ln(e^x+1)(e^y-1)=C$.

6.（15 分）求级数的和：$\sum_{n=1}^{\infty}r^n\sin nx,\ |r|<1$.

解：由于级数的部分和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}r^k\sin kx$，故

$$2r\cos xS_n=\sum_{k=1}^{n}2r^{k+1}\sin kx\cos x=\sum_{k=1}^{n}r^{k+1}[\sin(k+1)x+\sin(k-1)x]$$

$$=\sum_{k=1}^{n}r^{k+1}\sin(k+1)x+\sum_{k=1}^{n}r^{k+1}\sin(k-1)x$$

$$=\sum_{k=2}^{n+1}r^k\sin kx+r^2\sum_{k=0}^{n-1}r^k\sin kx$$

$$=(S_n+r^{n+1}\sin(n+1)x-r\sin x)+r^2(S_n-r^n\sin nx),$$

从中解得

$$S_n=\frac{r\sin x+r^{n+2}\sin nx-r^{n+1}\sin(n+1)x}{1+r^2-2r\cos x}.$$

又由于当$n\to\infty$时，$\left|r^{n+2}\sin nx\right|\le\left|r^{n+2}\right|\to 0, \left|r^{n+1}\sin(n+1)x\right|\le\left|r^{n+1}\right|\to 0$，故

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{r\sin x}{1+r^2-2r\cos x},$$

因此$\sum\limits_{n=1}^{\infty}r^n\sin nx=\dfrac{r\sin x}{1+r^2-2r\cos x}$.

【注】用欧拉公式会很简单，但我不教你.

7.（15 分）求幂级数的和以及收敛域：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$.

解： 设$s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$，$|x|<1$，则有

$$\int_0^x s(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)\int_0^x t^n dt=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n+1}=x\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=\frac{x^2}{(1-x)^2},|x|<1,$$

所以，$s(x)=\left(\dfrac{x^2}{(1-x)^2}\right)'=\dfrac{2x}{(1-x)^3}$，$|x|<1$.