



2024年春季 (1-18周) , F207 周一8:00-9:40

(1-9周) F207周三8:00-9:40

复变函数

朱炬波 13973168169
zhujubo@mail.sysu.edu.cn



第一节 复数项级数

- 一、复数列的极限
- 二、级数的概念
- 三、典型例题
- 四、小结与思考



一、复数列的极限

1.定义 设 $\{\alpha_n\}$ ($n=1,2,\cdots$) 为一复数列, 其中 $\alpha_n = a_n + ib_n$, 又设 $\alpha = a + ib$ 为一确定的复数, 如果任意给定 $\varepsilon > 0$, 相应地都能找到一个正数 $N(\varepsilon)$, 使 $|\alpha_n - \alpha| < \varepsilon$ 在 $n > N$ 时成立, 那末 α 称为复数列 $\{\alpha_n\}$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限, 记作

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha .$$

此时也称复数列 $\{\alpha_n\}$ 收敛于 α .



2.复数列收敛的条件

定理一

复数列 $\{\alpha_n\}$ ($n = 1, 2, \dots$) 收敛于 α 的充要条件是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b.$$

定理一说明: 可将复数列的敛散性转化为判别两个实数列的敛散性.



二、级数的概念

1.定义 设 $\{\alpha_n\} = \{a_n + ib_n\}$ ($n = 1, 2, \dots$)为一复数列,

表达式
$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n + \dots$$

称为复数项无穷级数.

部分和 其最前面 n 项的和

$s_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ 称为级数的部分和.



收敛与发散

如果部分和数列 $\{s_n\}$ 收敛, 那末级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 收敛,

并且极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ 称为级数的和.

如果部分和数列 $\{s_n\}$ 不收敛,

那末级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 发散.

说明: 与实数项级数相同, 判别复数项级数敛散性的基本方法是: 利用极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$.



例如, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$:

$$s_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z} \quad (z \neq 1),$$

由于当 $|z| < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - z^n}{1 - z} = \frac{1}{1 - z}$,

所以当 $|z| < 1$ 时级数收敛.



2.复数项级数收敛的条件

定理二 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + ib_n)$ 收敛的充要条件

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛.

证 因为 $s_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$

$$= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + i(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$$

$$= \sigma_n + i\tau_n,$$



根据 $\{s_n\}$ 极限存在的充要条件：

$\{\sigma_n\}$ 和 $\{\tau_n\}$ 的极限存在，

于是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛.

说明 复数项级数的审敛问题

⇓ (定理二)

实数项级数的审敛问题



课堂练习 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (1 + \frac{i}{n})$ 是否收敛?

解 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散;

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ 收敛.}$$

所以原级数发散.



必要条件

因为实数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛的必要条件是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad \text{和} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 .$$

所以复数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 收敛的必要条件是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$$

重要结论: $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \neq 0 \Rightarrow$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 发散.



例如,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} e^{in}$:

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{in} \neq 0$,

不满足必要条件, 所以原级数发散.

启示: 判别级数的敛散性时, 可先考察 $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \neq 0$

如果 $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \neq 0, & \text{级数发散;} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0, & \text{应进一步判断.} \end{cases}$



3. 绝对收敛与条件收敛

定理三 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$ 收敛, 那末 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 也收敛.

且不等式 $\left| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$ 成立.

注意 $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$ 的各项都是非负的实数,

应用正项级数的审敛法则判定.



定义

如果 $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$ 收敛, 那末称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 为绝对收敛.

非绝对收敛的收敛级数称为条件收敛级数.

说明 由 $\sqrt{a_n^2 + b_n^2} \leq |a_n| + |b_n|,$

知
$$\sum_{k=1}^n \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \leq \sum_{k=1}^n |a_k| + \sum_{k=1}^n |b_k|,$$



所以 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛时,

$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 也绝对收敛.

综上:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \text{ 绝对收敛} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 与 } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ 绝对收敛.}$$



三、典型例题

例1 下列数列是否收敛, 如果收敛, 求出其极限.

$$(1) \alpha_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{e^{i\frac{\pi}{n}}}; \quad (2) \alpha_n = n \cos in.$$

解 (1) 因为 $\alpha_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{e^{i\frac{\pi}{n}}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)(\cos \frac{\pi}{n} + i \sin \frac{\pi}{n})$,

$$\text{所以 } a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cos \frac{\pi}{n}, \quad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \sin \frac{\pi}{n}.$$

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$



所以数列 $\alpha_n = (1 + \frac{1}{n})e^{i\frac{\pi}{n}}$ 收敛,

且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 1$.

解 (2) 由于 $\alpha_n = n \cos in = n \cosh n$,

当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\alpha_n \rightarrow \infty$,

所以数列发散.



例2 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+i^{2n+1}}{n}$ 是否收敛?

解 级数满足必要条件, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+i^{2n+1}}{n} = 0$,

但 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+i^{2n+1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n i}{n}$

$$= (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots) - i(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} + i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$$

因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 虽 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ 收敛,

原级数仍发散.



例3 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(8i)^n}{n!}$ 是否绝对收敛?

解 因为 $\left| \frac{(8i)^n}{n!} \right| = \frac{8^n}{n!},$

所以由正项级数的比值判别法知:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{n!} \text{ 收敛,}$$

故原级数收敛, 且为绝对收敛.



例4 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} [\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{2^n} i]$ 是否绝对收敛?

解 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 收敛; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 也收敛,

故原级数收敛.

但 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 为条件收敛,

所以原级数非绝对收敛.



四、小结与思考

通过本课的学习, 应了解复数列的极限概念; 熟悉复数列收敛及复数项级数收敛与绝对收敛的充要条件; 理解复数项级数收敛、发散、绝对收敛与条件收敛的概念与性质.



思考题

如果复数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ 均发散, 问:

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \pm \beta_n)$ 也发散吗?



思考题答案

否.

放映结束，按Esc退出.



作业

P141, 1 (1、2) , 3 (1、3)

