2019 学年第二学期《高等数学一（II）》期末考试试题（模拟卷 1）

一、主观题

1. （10 分）

求两柱面 $x^2+y^2=R^2, x^2+z^2=R^2$ 的交线在点 $(\frac{R}{\sqrt{2}},\frac{R}{\sqrt{2}},\frac{R}{\sqrt{2}})$ 处的切线方程和法平面方程.

解　令
$$\begin{cases} F(x,y,z)=x^2+y^2-R^2, \\ G(x,y,z)=x^2+z^2-R^2. \end{cases}$$

这时曲线方程为
$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases}$$

由
$$\begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 2x & 0 & 2z \end{pmatrix}$$

知
$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}=\begin{vmatrix} 2y & 0 \\ 0 & 2z \end{vmatrix}=4yz,$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}=\begin{vmatrix} 0 & 2x \\ 2z & 2x \end{vmatrix}=-4xz$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 2x & 0 \end{vmatrix}=-4xy$$

因此曲线在 $(\frac{R}{\sqrt{2}},\frac{R}{\sqrt{2}},\frac{R}{\sqrt{2}})$ 处的切向量为

$$\tau=(yz,-xz,-xy)\Big|_{(\frac{R}{\sqrt{2}},\frac{R}{\sqrt{2}},\frac{R}{\sqrt{2}})}=\frac{R^2}{2}(1,-1,-1)$$

故曲线在 $(\frac{R}{\sqrt{2}},\frac{R}{\sqrt{2}},\frac{R}{\sqrt{2}})$ 的切线方程为

$$x-\frac{R}{\sqrt{2}}=\frac{y-\frac{R}{\sqrt{2}}}{-1}=\frac{z-\frac{R}{\sqrt{2}}}{-1},$$

即
$$\frac{R}{\sqrt{2}}-x=y-\frac{R}{\sqrt{2}}=z-\frac{R}{\sqrt{2}}$$

而法平面方程为

$$(x-\frac{R}{\sqrt{2}})-(y-\frac{R}{\sqrt{2}})-(z-\frac{R}{\sqrt{2}})=0$$

即
$$x-y-z+\frac{R}{\sqrt{2}}=0$$

2. （10 分）

求 $f(x,y)=3axy-x^3-y^3\ (a>0)$ 的极大值和极小值.

解　由 $\begin{cases} f_x(x,y)=3ay-3x^2=0, \\ f_y(x,y)=3ax-3y^2=0, \end{cases}$ 解出稳定点为 $(0,0),(a,a)$.

在点 $(0,0)$，$a_{11}=f_{xx}(0,0)=0$，$a_{12}=f_{xy}(0,0)=3a$，$a_{22}=f_{yy}(0,0)=0$，这时，

$$D=a_{11}a_{22}-a_{12}^2=-9a^2<0,$$

故 $(0,0)$ 不是极值点．在点 (a,a)，

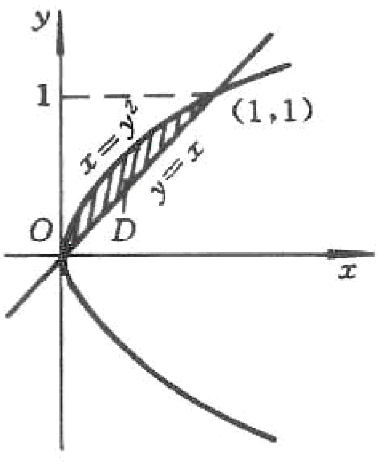
$$a_{11}=f_{xx}(a,a)=-6a,\quad a_{12}=f_{xy}(a,a)=3a,\quad a_{22}=f_{yy}(a,a)=-6a,$$

$$D=a_{11}a_{22}-a_{12}^2=27a^2>0,\quad a_{11}=-6a<0,$$

故 $f(x,y)$ 在 (a,a) 取极大值 $f(a,a)=a^3$.

3. （10 分）

计算积分
$$I=\int_0^1 dx\int_x^{\sqrt{x}}\frac{\sin y}{y}dy$$



解　这个累次积分是先对 y 积分，再对 x 积分．而 $\frac{\sin y}{y}$ 的原函数不能用初等函数表示，因此按上述顺序进行累次积分是行不通的，为此考虑改变积分的顺序.

根据积分限知，将上述积分表示为二重积分时，积分区域 D 为： $x\le y\le\sqrt{x}, 0\le x\le 1$.即 D 由曲线 $y=x, y=\sqrt{x}, x=0$ 和 $x=1$ 围成．作出 D 的图形如图20－12．用平行于 x 轴的直线去截 D，对每一 $y\in[0,1]$，有 $y^2\le x\le y$,于是有

$$I=\int_0^1 dx\int_x^{\sqrt{x}}\frac{\sin y}{y}dy=\int_0^1 dy\int_{y^2}^{y}\frac{\sin y}{y}dx$$
$$=\int_0^1\frac{\sin y}{y}(y-y^2)dy=\int_0^1\sin ydy-\int_0^1 y\sin ydy$$
$$=-\cos y|_0^1-(-y\cos y+\sin y)|_0^1=1-\sin 1.$$

4. （10 分）

求 $(x^2+y^2+z^2)^2=az(a>0)$ 所围区域的体积.

解　　作球坐标变换

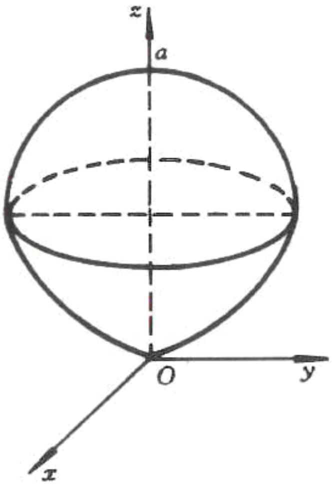
$$x=r\cos\theta\sin\varphi, y=r\sin\theta\sin\varphi, z=r\cos\varphi$$

在球坐标下，曲面方程为 $r^3=a\cos\varphi$，区域 V 可表为

$$\{(r,\theta,\varphi)\,|\,0\le r\le(a\cos\varphi)^{1/3},0\le\varphi\le\frac{\pi}{2},0\le\theta\le 2\pi\}$$

因此

$$V=\iiint\limits_V dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{(a\cos\varphi)^{1/3}}r^2\sin\varphi dr$$
$$=2\pi\int_0^{2\pi}\sin\varphi\frac{1}{3}r^3|_0^{(a\cos\varphi)^{1/3}}d\varphi$$
$$=\frac{2\pi a}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi d\varphi=\frac{\pi a}{3}$$



5. （10 分）

设曲线 L 的方程为

$$\boldsymbol{x=e^t\cos t,\quad y=e^t\sin t,\quad z=e^t\quad (0\le t\le t_0),}$$

它在每一点的密度和该点与原点的距离平方成正比，且在点 (1,0,1) 处为 1，求它的质量.

解：　$\rho(x,y,z)=k(x^2+y^2+z^2)$，由 $\rho(1,0,1)=1\Rightarrow k=\frac{1}{2}$

所以　$\rho(x,y,z)=\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)$

它的质量为：$M=\int_L\rho(x,y,z)ds=\frac{1}{2}\int_L(x^2+y^2+z^2)ds$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{t_0}(e^{2t}+e^{2t})\sqrt{3e^{2t}}dt=\sqrt{3}\int_0^{t_0}e^{3t}dt=\frac{\sqrt{3}}{3}(e^{3t_0}-1)$$

6. （10 分）

求 $I=\oint_L (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$，其中 L 是柱面 $x^2+y^2=a^2$ 与平面 $\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1$ 的交线 $(a,h>0)$，从 x 轴正向看去沿逆时针方向.

解： 解法 1　取平面 $\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1$ 上有交线围成的平面块为 S，并注意 S 在 zx 面上的投影为零，即 $dzdx=0$，由斯托克斯公式得

$$I=\iint_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y-z & z-x & x-y \end{vmatrix}$$

$$=-2\iint_S dydz+dxdy=-2\iint_{D_{yz}} dydz-2\iint_{D_{yz}} dxdy$$

$$=-2(\pi ah+\pi a^2)=-2\pi a(h+a)\ .$$

最后一个等式是因为 D_{yz} 是半轴分别为 a 与 h 的椭圆，其面积为 πah，而 D_{xy} 是圆 $x^2+y^2\le a^2$，其面积为 πa^2 .

解法 2　取曲面 S 同解法 1，则 S 的单位法向量

$$n=\left(\frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}},0,\frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}\right)=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$$

是常向量，S 是半轴分别为 a 和 $\sqrt{a^2+h^2}$ 的椭圆．因此

$$I=\iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y-z & z-x & x-y \end{vmatrix} dS$$

$$=-2\iint_S (\cos\alpha+\cos\gamma)dS=-2\frac{a+h}{\sqrt{a^2+h^2}}\iint_S dS$$

$$=-2\frac{a+h}{\sqrt{a^2+h^2}}\pi a\sqrt{a^2+h^2}=-2\pi(h+a)\ .$$

解法 3　也可以直接用线积分的计算公式．曲线 L 的参数方程为

$$x=a\cos t, y=a\sin t, z=h(1-\cos t), 0\le t\le 2\pi,$$

则

$$I=\int_0^{2\pi}\{[a\sin t-h(1-\cos t)](-a\sin t)+[h(1-\cos t)-a\cos t]a\cos t+a(\cos t-\sin t)h\sin t\}dt$$

$$=\int_0^{2\pi}(-a^2-ah+ah\sin t+ah\cos t)dt=-2\pi a(a+h)\ .$$

7.（10 分）

求方程$\frac{dy}{dx}=x+y+1$的解.

解：令$x+y+1=u$

则$1+\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}$

那么$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}-1=u$

$\frac{du}{u+1}=dx$

求得：$\ln|u+1|=x+C_0$,

故方程的通解为$\ln|x+y+2|=x+C_0$

或 $y=Ce^x-x-2$, C 为任意常数.

8.（10 分）

求通解：$x''+x=\sin t-\cos 2t$.

解：特征方程$\lambda^2+1=0$有根$\lambda_1=i,\lambda_2=-i$

故齐线性方程的通解为$x=c_1\cos t+c_2\sin t$

$x''+x=\sin t$，$\lambda_1=i$,是方程的解 $\tilde{x}=t(A\cos t+B\sin t)$代入原方程解得

$A=-\frac{1}{2}$ $B=0$ 故$\tilde{x}=-\frac{1}{2}t\cos t$

$x''+x=-\cos 2t$ $\tilde{x}=A\cos 2t+B\sin 2t$代入原方程解得

$A=\frac{1}{3}$ $B=0$ 故$\tilde{x}=\frac{1}{3}\cos 2t$

故通解为$x=c_1\cos t+c_2\sin t-\frac{1}{2}t\cos t+\frac{1}{3}\cos 2t$.

9.（10 分）

设正项数列$\{x_n\}$单调上升且有界，求证：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{x_n}{x_{n+1}}\right)$收敛.

证明　由于正项数列$\{x_n\}$单调上升且有界，故由单调有界原理知其收敛，设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{x_n}{x_{n+1}}\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)\dfrac{1}{x_{n+1}}$，由于

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(x_{k+1}-x_k)=\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_1)=a-x_1,$$

故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$收敛，又$\left\{\dfrac{1}{x_{n+1}}\right\}$单调有界，故由 Able 判别法知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{x_n}{x_{n+1}}\right)$收敛.

10.（10 分）

求幂级数的和函数：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{4n-1}}{4n+1}$.

解：令$s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{4n-1}}{4n+1}$，易知收敛半径$R=1$，收敛域为$(-1,1)$.

则$x^2s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{4n+1}}{4n+1}, |x|<1$，所以，

$$\left[x^2s(x)\right]'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{4n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^4\right)^n=\frac{x^4}{1-x^4}=\frac{1}{1-x^4}-1=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)+\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}-1,$$

故$x^2s(x)=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\dfrac{1}{2}\arctan x-x$. 又因为$s(0)=0$，因此

$$s(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4x^2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\dfrac{\arctan x-2x}{2x^2}, & 0<|x|<1\\ 0, & x=0\end{cases}.$$