2024年春季（1-18周）， F207 周一8:00-9:40

（1-9周）F207周三8：00-9：40

复变函数

朱炬波 13973168169
zhujubo@mail.sysu.edu.cn

第二节　分式线性映射

- 一、分式线性映射的概念
- 二、几种简单的分式线性映射
- 三、分式线性映射的性质
- 四、小结与思考

一、分式线性映射的概念

$$w=\frac{az+b}{cz+d}\ (ad-bc\neq 0,\ a,b,c,d\text{均为常数.})$$

称为分式线性映射.

小知识

说明:

1) $ad-bc\neq 0$的限制，保证了映射的保角性.

否则, 由于$\dfrac{dw}{dz}=\dfrac{ad-bc}{(cz+d)^2}=0$,有$w\equiv$常数.

那末整个z平面映射成 w平面上的一点.

2) 由 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}\ (ad-bc\neq 0)$

$$\longrightarrow\ \boxed{z=\frac{-dw+b}{cw-a}\ (ad-bc\neq 0)}$$

分式线性映射的逆映射, 也是分式线性映射.

3) 两分式线性映射 $w=\dfrac{\alpha\zeta+\beta}{\gamma\zeta+\delta}\ (\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0)$

$\zeta=\dfrac{\alpha' z+\beta'}{\gamma' z+\delta'}\ (\alpha'\delta'-\beta'\gamma'\neq 0)$仍复合为分式线性映射 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}\ ((ad-bc=(\alpha\delta-\beta\gamma)(\alpha'\delta'-\beta'\gamma')\neq 0))$

4) 分式线性映射

$$w=\frac{\alpha\zeta+\beta}{\gamma\zeta+\delta}=\left(\beta-\frac{\alpha\delta}{\gamma}\right)\frac{1}{\gamma\zeta+\delta}+\frac{\alpha}{\gamma}$$

令$\zeta_1=\gamma\zeta+\delta,\zeta_2=\dfrac{1}{\zeta_1}$，则$w=A\zeta_2+B$($A,B$为常数)

一个一般形式的分式线性映射是由下列三种特殊的简单映射复合而成:

(1) $w=z+b$, (2) $w=az$, (3) $w=\dfrac{1}{z}$.

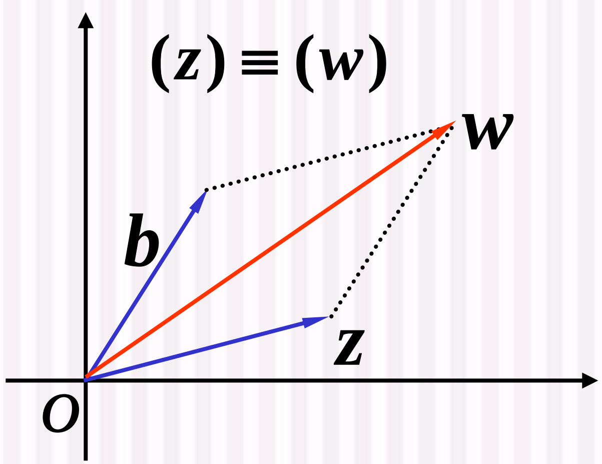
对 $w=\dfrac{\alpha\zeta+\beta}{\gamma\zeta+\delta}$ 的研究可化为对以上映射的研究.

二、几种简单的分式线性映射

(为方便起见, 令w平面与z平面重合)

1. $w = z + b$ 平移映射

在此映射下, z沿向量$\vec{b}$(即复数b所表示的向量)的方向平移一段距离$|b|$后, 就得到w.

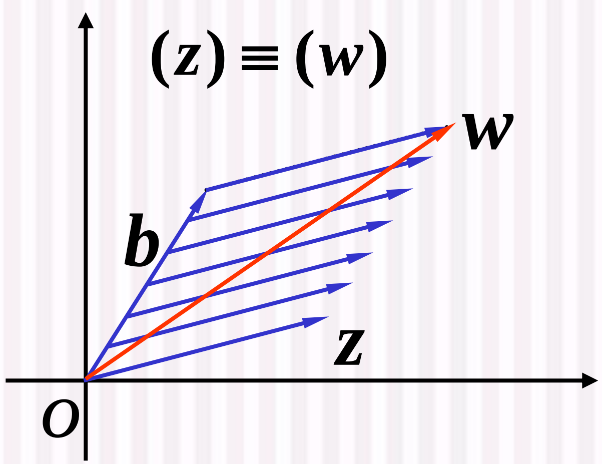


二、几种简单的分式线性映射

(为方便起见, 令w平面与z平面重合)

1. $w = z + b$ 平移映射

在此映射下, z沿向量 $\vec{b}$(即复数 b所表示的向量)的方向平移一段距离 $|b|$后, 就得到w.



2. $w = az, (a \neq 0)$ 旋转与伸长(或缩短)变换

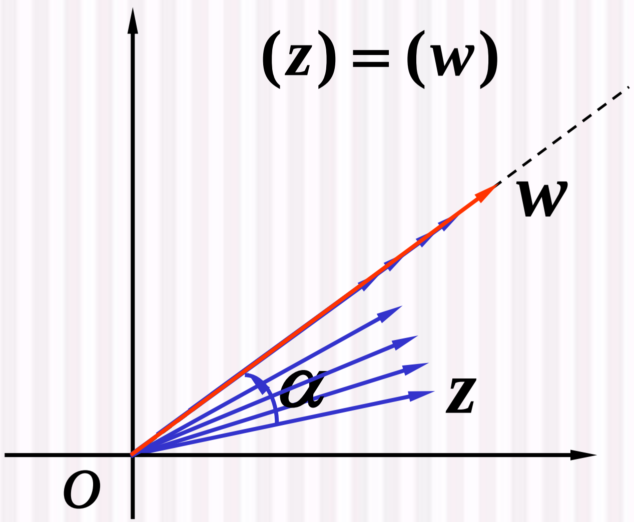
事实上, 设 $z = re^{i\theta}, a = \lambda e^{i\alpha}$

那末 $w = r\lambda e^{i(\theta+\alpha)}$,

因此, 把z先转一个角度

α再将$|z|$伸长(缩短)到

$|\alpha| = \lambda$倍后, 就得到w.



3. $w = \dfrac{1}{z}$ 反演变换

此映射可进一步分解为

$$w_1 = \frac{1}{\bar{z}}, \quad w = \overline{w_1}$$

欲由点z作出点w, 可考虑如下作图次序:

$$z \to \bar{z} \to w_1 \to w$$

关于横轴对称

关键: 在几何上如何由 $\bar{z} \to w_1$?

对称点的定义:

设C为以原点为中心, r为半径的圆周. 在以圆心为起点的一条半直线上, 如果有两点 P与 P' 满足关系式

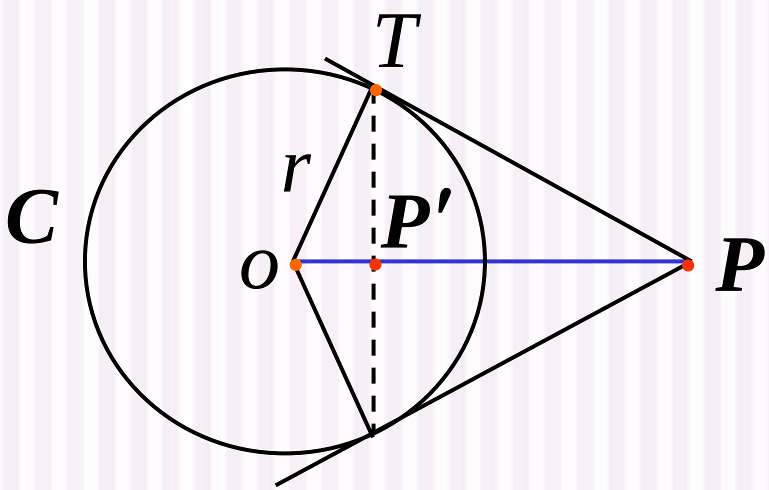
$$OP \cdot OP' = r^2,$$

那末就称这两点为关于这圆周的**对称点**.

规定: 无穷远点的对称点是圆心O.

作图:

设P在C外, 从P作C的切线PT, 由T作OP的垂线TP'与OP交于P', 那么P与P'即互为对称点.



$$\Delta OP'T \sim \Delta OTP$$

$$\downarrow$$

$$OP' : OT = OT : OP$$

$$\downarrow$$

$$OP \cdot OP' = OT^2 = r^2$$

设 $z = re^{i\theta}$, 则有 $w_1 = \dfrac{1}{\bar{z}} = \dfrac{1}{r}e^{i\theta}$, $\quad w = \overline{w_1} = \dfrac{1}{r}e^{-i\theta}$,

从而 $|w_1||z| = 1$. **故可知:**

z与w_1是关于单位园周$|z| = 1$的对称点

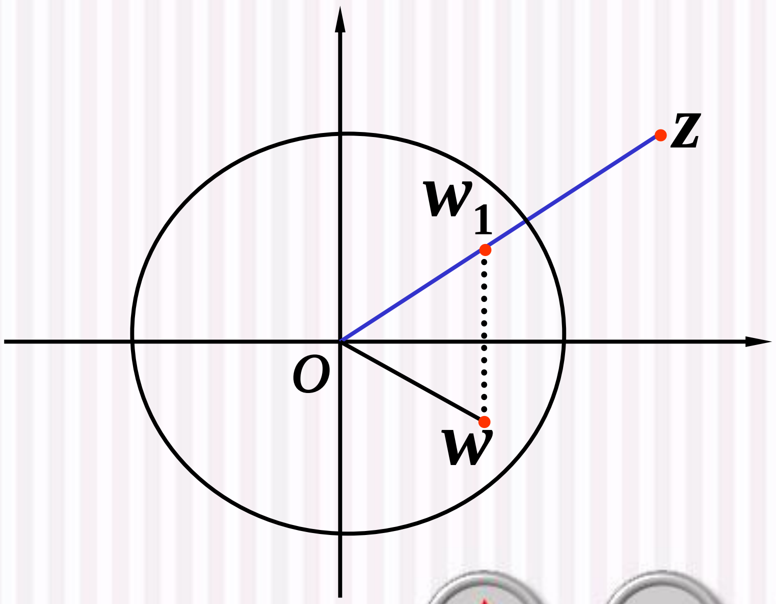
z

↓ 关于单位圆对称

w_1

↓ 关于实轴对称

w



三、分式线性映射的性质

1.一一对应性

例如:映射 $w=\dfrac{1}{z}$ 将 $z=\infty$ 映射成 $w=0$,

即当 $z=\infty$ 时, $w=0$.

如果把 $w=\dfrac{1}{z}$ 改写成 $z=\dfrac{1}{w}$,

可知当 $w=\infty$ 时, $z=0$.

结论:分式线性映射在扩充复平面上一一对应.

2.保角性

(1) 考察 $w = \dfrac{1}{z}$

因 $w' = -\dfrac{1}{z^2}$，所以除去$z = 0$与$z = \infty$,映射是共形的.

若规定: 两条伸向无穷远的曲线在无穷远点处的交角, 等于它们在映射 $w = \dfrac{1}{z}$ 下所映成的通过圆点的两条象曲线的交角.

那么映射 $w = \dfrac{1}{z}$在 $z = \infty$处是共形的.

同理：映射 $z=\dfrac{1}{w}$ 在 $w=\infty$ 处是共形的.

所以映射 $w=\dfrac{1}{z}$ 在 $z=0$ 处是共形的.

综上所述知:

映射 $w=\dfrac{1}{z}$ 在扩充复平面上是处处是共形的.

(2) 考察 $w=f(z)=az+b \quad (a\neq 0)$

因为 $f'(z)=a\neq 0$, 所以当 $z\neq\infty$ 时,映射是共形的.

若令 $\zeta=\dfrac{1}{z},\eta=\dfrac{\zeta}{a+b\zeta}$,

则 $w = az + b$ 成为 $\eta = \dfrac{\zeta}{a + b\zeta}$

在 $\zeta = 0$ 处解析，且 $\eta'(\zeta)\big|_{\zeta=0} = \dfrac{1}{a} \neq 0$

因而 $\eta = \dfrac{\zeta}{a + b\zeta}$ 在 $\zeta = 0$ 处共形，

即：$w = az + b$ 在 $z = \infty$ 处共形. **综上所述：**

映射 $w = az + b$ 在扩充复平面上是处处共形的.

定理一　**分式线性映射在扩充复平面上是一一对应的，且具有保角性**

3. 保圆性

所谓保圆性指在扩充复平面上将圆周映射为圆周的性质.

特殊地，直线可看作是半径为无穷大的圆周.

1) 映射 $w = az + b\ (a \neq 0)$

特点: 将 z平面内一点 z_0经平移旋转伸缩而得到象点 w_0.

所以此映射在扩充复平面上具有保圆性.

2) 映射 $w=\dfrac{1}{z}$

若z平面上圆方程为: $a(x^2+y^2)+bx+cy+d=0$

令 $z=x+iy,\quad w=\dfrac{1}{z}=u+iv,$

有 $\dfrac{1}{x+iy}=u+iv$ 即 $x=\dfrac{u}{u^2+v^2},\ y=\dfrac{-v}{u^2+v^2}$

代入z平面圆方程得其象曲线方程:

$$d(u^2+v^2)+bu-cv+a=0.$$

所以此映射在扩充复平面上具有保圆性.

3) 分式线性映射

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad (ad-bc \neq 0)$$

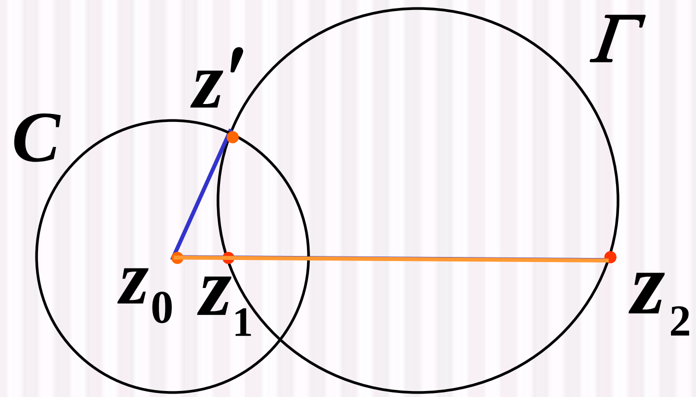
因为映射由 $w=\frac{1}{z}, w=az+b \ (a\neq 0)$ 复合而成.

定理二 分式线性映射将扩充z平面上的圆周映射成扩充w平面上的圆周, 即具有保圆性.

说明: 如果给定的圆周或直线上没有点映射成无穷远点, 那末它就映射成半径为有限的圆周;如果有一个点映射成无穷远点, 那末它就映射成直线.

4. 保对称性

对称点的特性



设 z_1, z_2 是关于圆周

$C: |z - z_0| = R$ 的一对对称点,

从 z_0 作 Γ 的切线, 切点为 z'. 显然 $z_0 z_2$ 是 Γ 的割线.

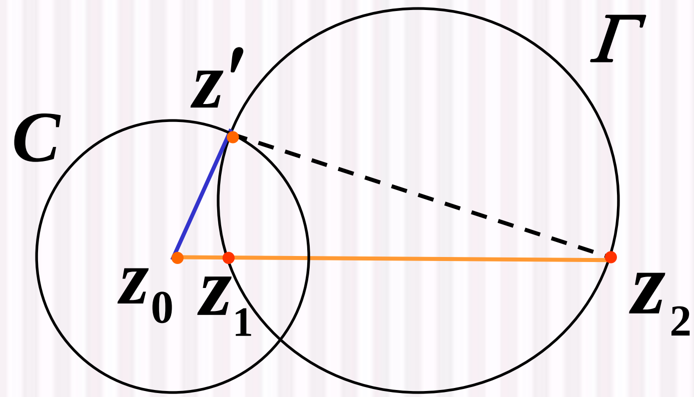
因为 $|z' - z_0|^2 = |z_2 - z_0| \cdot |z_1 - z_0| = R^2$,

所以 $|z' - z_0| = R$.

即: z' 在 C 上, 且 Γ 的切线就是 C 的半径.

因此 Γ 与 C 正交. 反之,

设 Γ 是经过 z_1, z_2 且与 C 正交的任一圆周,



显然过 z_1 与 z_2 的直线是 Γ 的特殊情形(半径为无穷大),其必与 C 正交,因而必过 z_0.

又因 Γ 与 C 在交点 z' 处正交,

因此 C 的半径 z_0z' 就是 Γ 的切线.

则 $\quad \left|z_2 - z_0\right| \cdot \left|z_1 - z_0\right| = R^2,$

即 $\quad z_1$与z_2是关于圆周C的一对对称点.

结论

z_1, z_2 是关于圆周 $C: \left|z - z_0\right| = R$的一对对称点的

充要条件是: 经过 z_1, z_2的任何圆周Γ与C正交.

定理三

设点 z_1, z_2 是关于圆周 C的一对对称点，那么在分式线性映射下，它们的象点 w_1, w_2也是关于 C的象曲线Γ的一对对称点.

即分式线性映射具有保对称性.

证 设 Γ: 经过z_1与z_2的圆周,

Γ': 经过w_1与w_2的任一圆周,

$$\Gamma \xrightarrow{\text{分式线性映射}} \Gamma'$$

因为Γ与C正交,而分式线性映射具有保角性,

所以Γ'与C'(C的象)必正交.

因此,w_1与w_2是一对关于C'的对称点. [证毕]

小知识

1. 分式线性映射首先由德国数学家默比乌斯(1790~1868)研究, 所以也称为**默比乌斯映射**.

2. $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ 经变形得:

$$cwz+dw-az-b=0$$

对每一个固定的w, 此式关于z是线性的;对每一个固定的z, 此式关于w也是线性的, 因此称上式是双线性的. 分式线性映射也称**双线性映射**.

四、小结与思考

分式线性映射是一类比较简单而又很重要的共形映射,应熟悉分式线性映射的分解和复合, 及其保角性、保圆性和保对称性.

作业：P246，10、11

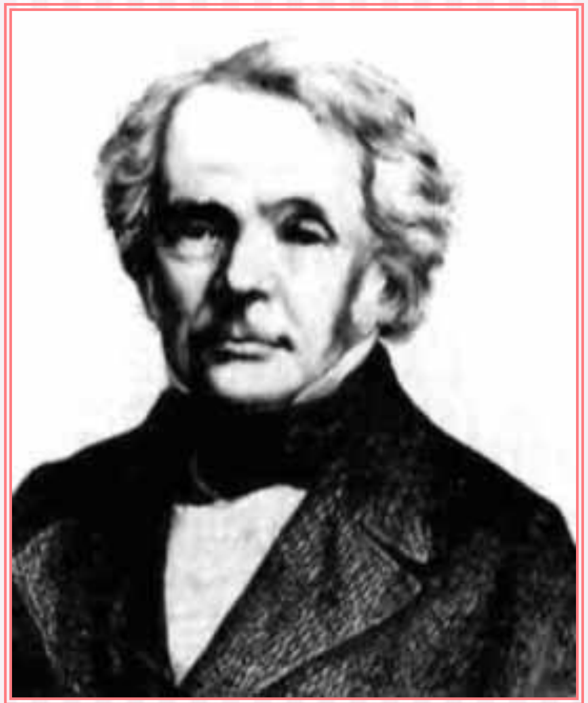
思考题

已知映射$w = \dfrac{3z+4}{iz-1}$,试将其分解为简单变换的复合.

思考题答案

$$z_1 = z + i, z_2 = \frac{1}{z_1}, z_3 = -(3+4i)z_2, w = z_3 - 3i.$$

默比乌斯资料



August Möbius

Born: 17 Nov 1790 in Schulpforta, Saxony (now Germany)

Died: 26 Sept 1868 in Leipzig, Germany