不定积分

求一个函数 $f(x)$ 的不定积分，就是找到一个原函数 $F(x)$，s.t.

$$\boxed{F'(x) = f(x).}$$

在相差一个常数下，$F(x)$ 是唯一确定的，因此，我们将 $f(x)$ 的不定积分记为

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

对给定的 $f(x)$，要找到 $F(x)$，不总是一件容易的事情，因为求导是直接的，而找到 $F(x)$ 是求导的逆过程：

$$\boxed{\;?\;} \xrightarrow{\text{求导}} \boxed{f(x)}$$

为此，我们要熟悉一些简单函数的不定积分：

$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$	$x^{\alpha}\quad(\alpha\neq 1)$
$\ln\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$-\cos x$	$\sin x$
$\tan x$	$\sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\frac{1}{\ln a}a^x$	a^x
e^x	e^x

习题2.5

4. $\int \tan^2 t \, dt$.

由于 $\tan^2 t = \dfrac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = 1 - \dfrac{1}{\cos^2 t}$，且 $(\tan t)' = \dfrac{1}{\cos^2 t}$，

故 $\int \tan^2 t \, dt = t - \tan t + C$.

9. $\int \dfrac{1-x}{1-\sqrt[3]{x}} dx$

由于 $1-x = (1-x^{\frac{1}{3}})(1+x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}})$，故

$$\frac{1-x}{1-\sqrt[3]{x}} = 1+x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}},$$

所以，$\int \dfrac{1-x}{1-\sqrt[3]{x}} dx = x + \dfrac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + \dfrac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + C$.

注意，我们总是通过代数运算，将式子化成容易处理的形式.

18. 求 $f(x)$ 满足方程 $xf'(x) + f(x) = x^3+1$.

即 $(xf(x))' = x^3+1$，故

$$xf(x) = \frac{x^4}{4} + x + C,$$

$\Rightarrow \quad f(x)=\frac{x^3}{4}+1+\frac{C}{x}.$

如果要求f在 $x=0$ 附近有定义，则显然 $C=0$，从而

$$f(x)=\frac{x^3}{4}+1.$$

多元函数的不定积分

此时，我们用微分来代替求导：已知 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$，求 $F(x,y)$ s.t.

$$dF(x,y)=P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy.$$

这时，问题要复杂很多，不是任意 P、Q 都能找到 F.

习题 6.4 第 15 题说明，若 $P, Q \in C^1(D)$，则

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}}.$$

这是因为，$P=\frac{\partial F}{\partial x}$，$Q=\frac{\partial F}{\partial y}$，故

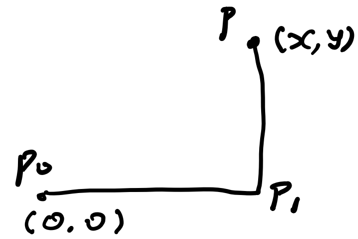
$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

也就是说，当 P, Q 不满足条件 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ 时，F是不存在的.

习题 6.4-11

已知 $dz=(4x^3+10xy^3-3y^4)dx+(15x^2y^2-12xy^3+5y^4)dy$,
求 $z(x,y)$.

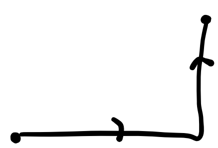
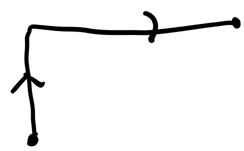
已知 $\frac{\partial z}{\partial x}=4x^3+10xy^3-3y^4$, 故令



$$z(P_1)=\int_{P_0}^{P_1}4x^3\,dx=x^4$$

$$z(P)=\int_{P_1}^{P}15x^2y^2-12xy^3+5y^4\,dy+z(P_1)$$

$$=5x^2y^3-3xy^4+y^5+x^4$$

无论是  还是 , 得到

的都是同一个原函数.

习题 6.4-12

$$dz=\left(x-\frac{y}{x^2+y^2}\right)dx+\left(y+\frac{x}{x^2+y^2}\right)dy$$

$$=\frac{1}{2}d(x^2+y^2)-\frac{y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy$$

已知 $d\arctan\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{\frac{1}{y}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}dx-\frac{\frac{x}{y^2}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}dy$

$$=\frac{y}{x^2+y^2}dx-\frac{x}{x^2+y^2}dy$$

故 $z(x,y) = \frac{x^2+y^2}{2} - \arctan\left(\frac{x}{y}\right), \quad y \neq 0$