2024年春季（1-18周）， F207 周一8:00-9:40

（1-9周）F207周三8：00-9：40

复变函数

朱炬波 13973168169
zhujubo@mail.sysu.edu.cn



第一章 复数与复变函数

第三节 复数的乘幂与方根

- 一、乘积与商
- 二、幂与根
- 三、小结与思考

一、乘积与商

定理一　两个复数乘积的模等于它们的模的乘积; 两个复数乘积的辐角等于它们的辐角的和.

证　设复数z_1和z_2的三角形式分别为

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), \qquad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2),$$

则$z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

$$= r_1 \cdot r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2)$$
$$+ i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)]$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

$$\mathrm{Arg}(z_1 z_2) = \mathrm{Arg}z_1 + \mathrm{Arg}z_2 .$$ [证毕]

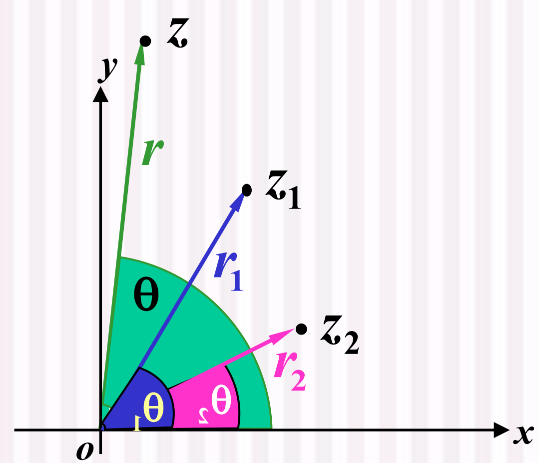
从几何上看, 两复数对应的向量分别为 $\vec{z}_1$, $\vec{z}_2$,

先把 $\vec{z}_1$ 按逆时针方向

旋转一个角 θ_2,

再把它的模扩大到 r_2 倍,

所得向量 $\vec{z}$ 就表示积 $z_1 \cdot z_2$.



两复数相乘就是把模数相乘, 辐角相加.

说明 由于辐角的多值性, $\mathrm{Arg}(z_1 z_2) = \mathrm{Arg}z_1 + \mathrm{Arg}z_2$

两端都是无穷多个数构成的两个数集.

对于左端的任一值, 右端必有值与它相对应.

例如，设 $z_1 = -1$, $z_2 = i$, 则 $z_1 \cdot z_2 = -i$,

$$\mathrm{Arg}z_1 = \pi + 2n\pi, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots),$$

$$\mathrm{Arg}z_2 = \frac{\pi}{2} + 2m\pi, \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots),$$

$$\mathrm{Arg}(z_1 z_2) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots),$$

故 $\frac{3\pi}{2} + 2(m+n)\pi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, 只须 $k = m + n + 1$.

若 $k = -1$, 则 $m = 0, n = -2$ 或 $m = -2, n = 0$.

设复数z_1和z_2的指数形式分别为

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, \quad z_2 = r_2 e^{i\theta_2},$$ 则 $$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

由此可将结论推广到 n 个复数相乘的情况:

设 $z_k = r_k(\cos\theta_k + i\sin\theta_k) = r_k e^{i\theta_k}, \quad (k = 1,2,\cdots,n)$

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \cdots \cdot z_n = r_1 \cdot r_2 \cdots r_n[\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)]$$

$$= r_1 \cdot r_2 \cdot \cdots \cdot r_n e^{i(\theta_1+\theta_2+\cdots\theta_n)}.$$

定理二 两个复数的商的模等于它们的模的商; 两个复数的商的辐角等于被除数与除数的辐角之差.

证 按照商的定义, 当 $z_1 \neq 0$ 时, $z_2 = \dfrac{z_2}{z_1} z_1$,

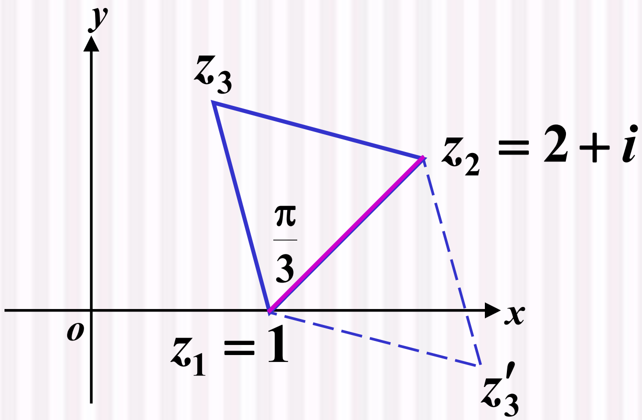
$$|z_2| = \left|\frac{z_2}{z_1}\right| |z_1|, \qquad \mathrm{Arg}\, z_2 = \mathrm{Arg}\left(\frac{z_2}{z_1}\right) + \mathrm{Arg}\, z_1,$$

于是 $\left|\dfrac{z_2}{z_1}\right| = \dfrac{|z_2|}{|z_1|}$, $\quad \mathrm{Arg}\left(\dfrac{z_2}{z_1}\right) = \mathrm{Arg}\, z_2 - \mathrm{Arg}\, z_1$.

设复数 z_1 和 z_2 的指数形式分别为

$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$, $\quad z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, 则 $\dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{r_2}{r_1} e^{i(\theta_2 - \theta_1)}$. [证毕]

例1 已知正三角形的两个顶点为 $z_1 = 1$ 和 $z_2 = 2 + i$, 求它的另一个顶点.



解 如图所示,

将表示 $z_2 - z_1$ 的向量

绕 z_1 旋转 $\frac{\pi}{3}$(或 $-\frac{\pi}{3}$)就得

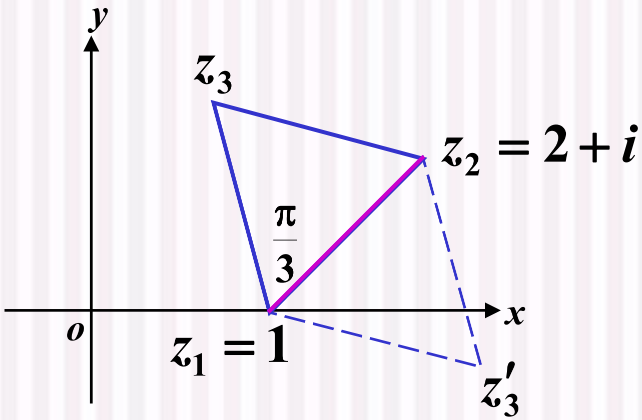
到另一个向量,它的终点即为所求顶点 z_3 (或 z_3').

因为复数 $e^{\frac{\pi}{3}i}$ 的模为1, 转角为 $\frac{\pi}{3}$,

$$z_3 - z_1 = e^{\frac{\pi}{3}i}(z_2 - z_1)$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(1+i)$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$$



所以 $z_3 = \dfrac{3-\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}i$, $\quad z_3' = \dfrac{3+\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}i.$

二、幂与根

1. n次幂:

n个相同复数z的乘积称为z的n次幂,

记作z^n, $\quad z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \cdots \cdot z}_{n个}.$

对于任何正整数n,有$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$.

如果我们定义$z^{-n} = \dfrac{1}{z^n}$,那么当n为负整数时,

上式仍成立.

2. 棣莫佛公式

棣莫佛介绍

当 z 的模 $r=1$, 即 $z=\cos\theta+i\sin\theta$,

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta.$$

棣莫佛公式

3. 方程 $w^n=z$ 的根 w, 其中 z 为已知复数.

$$w=\sqrt[n]{z}=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

$$(k=0,1,2,\cdots,n-1)$$

推导过程如下:

设 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$, $w=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$,

根据棣莫佛公式,

$$w^n=\rho^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)=r(\cos\theta+i\sin\theta),$$

于是 $\rho^n=r$, $\cos n\varphi=\cos\theta$, $\sin n\varphi=\sin\theta$,

显然 $n\varphi=\theta+2k\pi$, $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

故 $\rho=r^{\frac{1}{n}}$, $\varphi=\dfrac{\theta+2k\pi}{n}$,

$$w=\sqrt[n]{z}=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

当 $k=0,1,2,\cdots,n-1$ 时， 得到 n 个相异的根：

$$w_0 = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta}{n}+i\sin\frac{\theta}{n}\right),$$

$$w_1 = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2\pi}{n}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$w_{n-1} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}\right).$$

当 k 以其他整数值代入时, 这些根又重复出现.

例如 $k=n$ 时,

$$w_n = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2n\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2n\pi}{n}\right)$$

$$= r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i\sin\frac{\theta}{n}\right) = w_0.$$

从几何上看, $\sqrt[n]{z}$ 的 n 个值就是以原点为中心, $r^{\frac{1}{n}}$ 为半径的圆的内接正 n 边形的 n 个顶点.

例2　计算 $\sqrt[4]{1+i}$ 的值.

解　$1+i=\sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right]$

$$\sqrt[4]{1+i}=\sqrt[8]{2}\left[\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}\right]\quad(k=0,1,2,3).$$

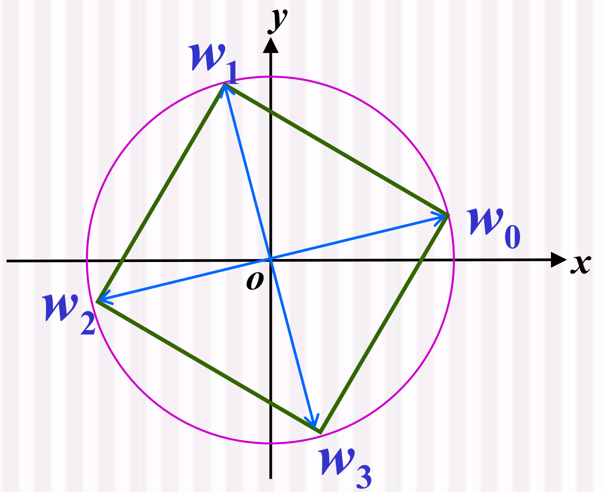
即　$w_0=\sqrt[8]{2}\left[\cos\frac{\pi}{16}+i\sin\frac{\pi}{16}\right],$

$w_1=\sqrt[8]{2}\left[\cos\frac{9\pi}{16}+i\sin\frac{9\pi}{16}\right],$

$$w_2 = \sqrt[8]{2}\left[\cos\frac{17\pi}{16} + i\sin\frac{17\pi}{16}\right],$$

$$w_3 = \sqrt[8]{2}\left[\cos\frac{25\pi}{16} + i\sin\frac{25\pi}{16}\right].$$

这四个根是内接于中心在原点半径为$\sqrt[8]{2}$的圆的正方形的四个顶点.



三、小结与思考

应熟练掌握复数乘积与商的运算. 在各种形式中以三角形式、指数形式最为方便:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} \qquad \frac{z_2}{z_1} = \frac{r_2}{r_1} e^{i(\theta_2-\theta_1)}$$

棣莫佛(de Moivre)公式

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$