博学　审问　慎思　明辨　笃行

概率论与数理统计

中山大學
SUN YAT-SEN UNIVERSITY

主讲老师：邝东阳，kuangdy@mail.sysu.edu.cn

助教：黄培，huangp89@mail2.sysu.edu.cn

范志隆，fanzhlong@mail2.sysu.edu.cn

Part 1
期　　望

博学 | 审问 | 慎思 | 明辨 | 笃行

离散型随机变量

设 X 为一离散型随机变量，其分布律为

$$P(X = x_i) = p_i, \quad i = 1, 2, \cdots$$

如果 $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p_i < +\infty$，则称

绝对收敛

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

为随机变量 X 的数学期望（均值），用符号 EX 表示. 若 $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p_i = +\infty$，则称 X 的数学期望（均值）不存在.

离散型随机变量

注 3.1.1' 设离散型随机变量 X 有分布列

$$P(X=x_k)=1/2^k,\quad k=1,2,\cdots,$$

该分布的期望不存在

其中 $x_k=(-1)^{k-1}2^k/k$，则级数(3.1.1)为

$$\sum_k |x_k| P(X=x_k)=\sum_{k=1}^{\infty} 1/k=+\infty,$$

而级数(3.1.2)为

$$\sum_k x_k P(X=x_k)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}/k=\ln 2. \qquad (3.1.2')$$

由微积分知识可知，改变上面的级数各项的排列次序，级数可以发散或者收敛于任何指定的实数.

随机变量 X 的期望是用来刻画 X 的某种特征的数值，有其客观意义，不应该受到分布列的人为的排序的影响，因此，用级数(3.1.2')来表示 X 的期望是不合适的.

离散型随机变量

甲乙两人射击水平如下所示

甲:

击中环数	8	9	10
概率	0.3	0.1	0.6

乙:

击中环数	8	9	10
概率	0.2	0.5	0.3

试问两人谁的水平高?

假设两人分别射击 N 次, 则他们各自射击的总环数大概为

$$\text{甲: } 8*0.3N+9*0.1N+10*0.6N=9.3N$$

$$\text{乙: } 8*0.2N+9*0.5N+10*0.3N=9.1N$$

Bernoulli

例 3.1.1 设 X 服从伯努利分布 $B(1,p)$，则 X 有分布列

$$P(X=1)=p,\quad P(X=0)=1-p,$$

因而

$$EX=0\times P(X=0)+1\times P(X=1)=0\times(1-p)+1\times p=p.$$

建议手动验证课本附录C

二项分布

例 3.1.2　设 X 服从二项分布 $B(n,p)$，则 X 有分布列

$$P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k},\quad k=0,1,\cdots,n,$$

其中 $q=1-p$，因而

$$EX=\sum_{k=0}^{n} kP(X=k)=\sum_{k=0}^{n} kC_n^k p^k q^{n-k}=\sum_{k=1}^{n} k\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot p^k q^{n-k}$$

$$=np\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}\cdot p^{k-1}q^{n-k}=np\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1}p^{k-1}q^{n-k}$$

$$\xlongequal{k=\tilde{k}+1} np\sum_{\tilde{k}=0}^{n-1} C_{n-1}^{\tilde{k}}p^{\tilde{k}}q^{n-1-\tilde{k}}=np(p+q)^{n-1}=np.$$

Possion

中山大學 SUN YAT-SEN UNIVERSITY

例 3.1.3　设 X 服从泊松分布 $P(\lambda)$，则 X 有分布列

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\quad k=0,1,2,\cdots,$$

因而

$$EX=\sum_{k=0}^{+\infty}kP(X=k)=\sum_{k=1}^{+\infty}k\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

$$=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\overset{k=\bar{k}+1}{=\!=\!=\!=}\lambda e^{-\lambda}\sum_{\bar{k}=0}^{\infty}\frac{\lambda^{\bar{k}}}{\bar{k}!}=\lambda e^{-\lambda}e^{\lambda}=\lambda.$$

连续型随机变量

如果连续型随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)$，则当

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx < \infty$$

时，我们将积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \qquad EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x \mathrm{d} F(x),$$

的值称为 X 的数学期望，记作 EX. 如果

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx = \infty,$$

则称 X 的数学期望不存在.

均匀分布

例 3.1.4 设 X 服从均匀分布 $U(a,b)$，则 X 有密度

$$p(x) = \frac{1}{b-a} I_{[a,b]}(x),$$

因而

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{b-a} I_{[a,b]}(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b \frac{x}{b-a}\,\mathrm{d}x = \left.\frac{x^2}{2(b-a)}\right|_a^b = \frac{a+b}{2}.$$

指数分布

例 3.1.5 设 X 服从指数分布 $E(\lambda)$，则 X 有密度

$$p(x)=\lambda e^{-\lambda x} I_{[0,+\infty)}(x),$$

因而

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty} x p(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot\lambda e^{-\lambda x} I_{[0,+\infty)}(x)\,dx=\int_0^{+\infty}\lambda x e^{-\lambda x}\,dx$$

$$=-x e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\,dx=0-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{\lambda}.$$

正态分布

例 3.1.6　设 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，则 X 有密度

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)},$$

因而

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}\,dx\xlongequal{x=\sigma t+\mu}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sigma t+\mu}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}\,dt$$

$$\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}te^{-t^2/2}\,dt=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\cdot\left(-e^{-t^2/2}\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=0,\qquad\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}\,dt=1.$$

也可由被积函数是奇函数易得

利用了标准正态pdf在全定义域上积分=1

$$EX=\mu.$$

Γ分布

例 3.1.7 设 X 服从 Γ 分布 $\Gamma(\alpha,\beta)$，则 X 有密度

$$p(x)=\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\beta x}I_{[0,+\infty)}(x),$$

因而

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\beta x}I_{[0,+\infty)}(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{+\infty}x^{\alpha}\mathrm{e}^{-\beta x}\,\mathrm{d}x\xlongequal{x=t/\beta}\frac{1}{\beta\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{+\infty}t^{\alpha}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\beta\Gamma(\alpha)}=\frac{\alpha}{\beta}.$$

Cauchy分布

例 3.1.8 设 X 服从柯西(Cauchy)分布,即它的密度为

$$p(x)=\frac{1}{\pi(x^2+1)},\qquad -\infty<x<\infty,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|p(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|x|\mathrm{d}x}{\pi(1+x^2)}=\lim_{\substack{v\to-\infty\\u\to+\infty}}\int_v^u\frac{|x|\mathrm{d}x}{(1+x^2)\pi}$$

$$=\lim_{\substack{v\to-\infty\\u\to+\infty}}\int_0^u\frac{x\mathrm{d}x}{(1+x^2)\pi}-\lim_{\substack{v\to-\infty\\u\to+\infty}}\int_v^0\frac{x\mathrm{d}x}{(1+x^2)\pi}$$

$$=\lim_{u\to+\infty}\int_0^u\frac{x\mathrm{d}x}{(1+x^2)\pi}-\lim_{v\to-\infty}\int_v^0\frac{x\mathrm{d}x}{(1+x^2)\pi}$$

$$=\lim_{u\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\ln(1+u^2)+\lim_{v\to-\infty}\frac{1}{2\pi}\ln(1+v^2)=+\infty.$$

期望的性质

SUN YAT-SEN UNIVERSITY 中山大學

命题 3.1.1 设 X 为随机变量，a, b, c 为常数.

(1) 把常数 c 看作只取值 c 的离散型随机变量，则

$$Ec = c,$$

即常数的期望就是它的本身.

(2) $E(aX+b) = aEX + b$.

(3) 若 $P(X \geqslant 0) = 1$，则 $EX \geqslant 0$.

期望的性质

定理 3.1.1 设 X 是随机变量，$f(x)$ 是实值函数.

1）若 X 为离散型，有分布列 $P(X=x_k)=p_k$, $k=1,2,\cdots$, $\sum_k |f(x_k)|p_k < +\infty$，则

$$Ef(X)=\sum_k f(x_k)P(X=x_k)=\sum_k f(x_k)p_k. \qquad (3.1.6)$$

2）若 X 为连续型，有密度 $p_X(x)$, $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|p_X(x)\mathrm{d}x < +\infty$，则

$$Ef(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)p_X(x)\mathrm{d}x. \qquad (3.1.7)$$

$$Ef(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}F(x).$$

例

例 2.6.1　设 X 有分布列

例 2.6.1(续)　求 EY,EZ.

解 1　前面已求得 Y,Z 的分布列,根据(3.1.2)式可得

$$EY=\sum_k y_k P(Y=y_k)=1\times 0.4+3\times 0.3+5\times 0.2+7\times 0.1=3,$$

$$EZ=\sum_k z_k P(Z=z_k)=0\times 0.3+1\times 0.6+4\times 0.1=1.$$

$P(Y=y)$	0.4	0.3	0.2	0.1

$P(Z=z)$	0.3	0.6	0.1

例

解 2 根据(3.1.6)式可得

$$EY=\sum_k(2x_k+1)P(X=x_k)$$

$$=(2\times0+1)\times0.4+(2\times1+1)\times0.3+\ldots$$

$$=3$$

$$EZ=(0-1)^2\times0.4+\ldots=1$$

飞机场载客汽车上有 20 位乘客, 离开机场后共有 10 个车站可以下车, 若某个车站没有人下车则该车站不停车. 设乘客在每个车站下车的可能性相等, 以 X 表示停车的次数, 求 EX.

$$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{第 } i \text{ 个车站有人下车} \\ 0, & \text{第 } i \text{ 个车站无人下车} \end{cases} \quad i = 1, \cdots, 20. \qquad X = \sum_{i=1}^{20} Y_i$$

$$\begin{aligned} EX &= \sum_{i=1}^{20} EY_i = \sum_{i=1}^{20} P(\text{第 } i \text{ 个车站有人下车}) \\ &= \sum_{i=1}^{20} [1 - 0.9^{20}] = 8.784. \end{aligned}$$

例 2.6.15　设随机变量 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，$Y=e^X$，则称 Y 服从对数正态分布. 因为 $X=\ln Y$，根据推论 2.6.1，Y 有密度（这里 $G=(0,+\infty)$）

$$p_Y(y) = |(\ln y)'|\, p_X(\ln y) I_{(0,+\infty)}(y) = \frac{1}{\sigma y\sqrt{2\pi}} e^{-(\ln y-\mu)^2/(2\sigma^2)} I_{(0,+\infty)}(y).$$

例 2.6.15（续）　求 EY.

解 1　前面已求得 Y 的密度，根据(3.1.4)式可得

$$EY = \int_{-\infty}^{+\infty} y p_Y(y)\,dy = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(\ln y-\mu)^2/(2\sigma^2)}\,dy$$

解 2　根据(3.1.7)式可得

计算一下该积分

$$EY = Ee^X = \int_{-\infty}^{+\infty} e^x \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}\,dx = e^{\mu+\sigma^2/2}.$$

多元随机变量-离散型

定理 3.1.2 设(X,Y)为随机向量,$f(x,y)$是二元实值函数.

1) 若(X,Y)是离散型,有分布列 $P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij}, i=1,2,\cdots,j=1,\cdots$, $\sum_{i,j}|f(x_i,y_j)|P(X=x_i,Y=y_j)<+\infty$,则

$$Ef(X,Y)=\sum_{i,j}f(x_i,y_j)P(X=x_i,Y=y_j). \tag{3.1.9}$$

多元随机变量-连续型

2）若 (X,Y) 是连续型，有密度 $p(x,y)$，$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x,y)|p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y<+\infty$，则

$$Ef(X,Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{3.1.10}$$

类似于(3.1.8)，有时把(3.1.9)和(3.1.10)式都记为：

$$Ef(X,Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}F(x,y). \tag{3.1.11}$$

推论 3.1.1 1）设(X,Y)是离散型随机向量，有分布列$P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij}$，$i=1,2,\cdots$，$j=1,2,\cdots$，则

$$EX=\sum_{i,j}x_iP(X=x_i,Y=y_j),\quad EY=\sum_{i,j}y_jP(X=x_i,Y=y_j).$$

2）设(X,Y)是连续型随机向量，有密度$p(x,y)$，则

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad EY=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yp(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\quad (3.1.12)$$

期望的性质

假定各变量的期望都存在

$$E(c_1X_1 + c_2X_2 + \cdots + c_nX_n) = c_1EX_1 + c_2EX_2 + \cdots + c_nEX_n,$$

假设随机变量 $X \sim B(n, p)$, 求 EX. 即课本例3.1.9

期望的性质

命题3.1.3的推广

2. 若干个独立随机变量之积的期望, 等于各变量的期望之积, 即

$$E(X_1X_2\cdots X_n) = EX_1EX_2\cdots EX_n,$$

这里假定各变量相互独立且期望都存在.

例 3.1.10 设共有 N 个产品,其中有 M 个次品,$N-M$ 个正品. 每次从中取1个，不放回地取 n 次. 令

$$X_k=\begin{cases}1, & \text{第 } k \text{ 次抽得次品},\\ 0, & \text{第 } k \text{ 次抽得正品},\end{cases}$$

$k=1,2,\cdots,n$. 则 $Y=X_1+X_2+\cdots+X_n$ 就是取得的次品总数,因此 Y 服从超几何分布. 求 EY.

利用期望定义直接计算存在一定难度

解 1 把例 1.2.5 中的“球”换为产品,“白球”换为次品,$a+b$ 换为 N,a 换为 M,则从例中的三个解法都可求得事件 A_k = “第 k 次抽得次品”的概率为 $P(A_k)=M/N$. 于是

$$EY=\sum_{i=k}^{n}EX_k=\sum_{i=k}^{n}P(A_k)=nM/N.$$

分位数

定义 3.1.3 设 X 为随机变量,$0<\alpha<1$,如果实数 x^* 满足条件

$$P(X<x^*)\leqslant\alpha\leqslant P(X\leqslant x^*),$$

则称 x^* 为 X 的 α **分位数**. 由命题 2.1.2 可知,上式可以用 X 的分布函数 $F(x)$ 表示为

$$F(x^*-)\leqslant\alpha\leqslant F(x^*). \tag{3.1.15}$$

X 的 $1-\alpha$ 分位数又称为 X 的**上 α 分位数**.

α 分位数对于任何随机变量都存在,但可能不唯一.

定义 3.1.4 随机变量的 0.5 分位数又称中位数

Median v.s Mean, 优点

- 中位数总是存在的.
- 和期望值相比中位数的一个优点是它受个别特别大或特别小的值的影响很小, 而期望则不然: 收入差距非常大时, 中位数比均值更加有效

Median v.s Mean, 缺点

1. 均值有很多优良的性质, 这些性质时使得在数学处理上很方便. 例如, $E(X_1+X_2)=EX_1+EX_2$, 而 X_1+X_2 的中位数与 X_1, X_2 各自的中位数之间, 不存在简单的联系, 这使中位数在数学上的处理很复杂且不方便;
2. 中位数本身固有的某些缺点: 中位数可以不唯一, 且对于离散型随机变量不易定义.

例

设随机变量 $X \sim B(1, \frac{1}{2})$, 求 X 的中位数.

分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{1}{2}, & 0 < x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

由中位数的定义知区间(0,1)内的每一个数都是ξ的中位数。

例

例 3.1.11　设 X 服从指数分布 $E(1)$，求 X 的 0.4 分位数 $x_{0.4}$.

解　X 有连续的分布函数 $F(x)=(1-e^{-x})I_{(0,+\infty)}(x)$，方程

$$(1-e^{-x})I_{(0,+\infty)}(x)=0.4$$

解 $x=-\ln(1-0.4)=0.5108$，

Part 1
额外内容：
条 件 期 望

博学 | 审问 | 慎思 | 明辨 | 笃行

条件期望

设 X 和 Y 为随机变量，若 (X,Y) 为离散型，且在给定 $X=x$ 之下，Y 有分布 $P(Y=a_i|X=x)=p_i$，$i=1,2,\ldots$，或者 (X,Y) 为连续型，且在给定 $X=x$ 之下，Y 的条件密度函数为 $f(y|x)$. 则

$$E(Y|X=x)=\begin{cases}\int_{-\infty}^{+\infty} yf(y|x)dy, & (X,Y)\text{ 为连续型；}\\ \sum_i a_i p_i, & (X,Y)\text{ 为离散型.}\end{cases}$$

Y 的条件期望, 我们记为 $E(Y|X=x)$, 也可简记为 $E(Y|x)$.

期望所具有的性质条件期望同样满足。

设$(X,Y)\sim M(N,p_1,p_2)$，试计算$E(X|Y=k)$。

由于$X|Y=k\sim B(N-k,\frac{p_1}{1-p_2})$

由二项分布的性质知$E(X|Y=k)=(N-k)\frac{p_1}{1-p_2}$.

条件期望

条件期望 $E(Y|X=x)$ 是 x 的函数 当我们将 x 换为 X 时，$E(Y|X)$ 就是一个随机变量.

设X,Y为两个随机变量，$g(X)$为可积的随机变量。则有

$$Eg(X) = E\{E[g(X)|Y]\} \qquad \text{[全期望公式]}$$

特别地，$EX = E\{E[X|Y]\}$

证明大概

设Y的p.d.f为$p(y)$，$X|Y=y$的p.d.f为$q(x|y)$。

$$
\begin{aligned}
Eg(X) &= \iint_{-\infty}^{\infty} g(x)q(x|y)p(y)dxdy \\
&= \int\int_{-\infty}^{\infty} g(x)q(x|y)dxp(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} E[g(X)|Y=y]p(y)dy \\
&= E\{E[g(X)|Y]\}
\end{aligned}
$$

例

中山大學 SUN YAT-SEN UNIVERSITY

一窃贼被关在有 3 个门的地牢里, 其中第一个门通向自由. 出这门走 3 个小时便可以回到地面; 第 2 个门通向另一个地道, 走 5 个小时将返回到地牢; 第 3 个门通向更长的地道, 走 7 个小时也回到地牢. 若窃贼每次选择 3 个门的可能性总相同, 求他为获得自由而奔走的平均时间.

例

设这个窃贼需要走X小时才能到达地面，

设Y代表他每次对3个门的选择情况，以1/3的概率取值1，2，3。

$$EX = E[E(X|Y)] = \sum_{i=1}^{3} E(X|Y=i)P(Y=i)$$

注意到$E(X|Y=1)=3, E(X|Y=2)=5+EX, E(X|Y=3)=7+EX$，

$$EX = \frac{1}{3}[3+5+EX+7+EX] \ = 15$$