2024年春季（1-18周），F207 周一8:00-9:40

（1-9周）F207周三8：00-9：40

复变函数

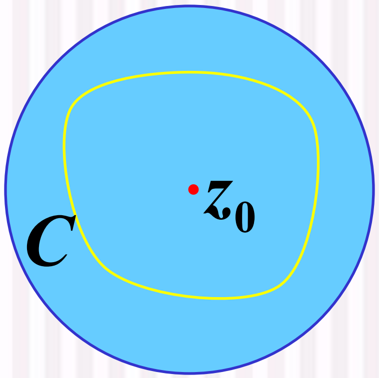
朱炬波 13973168169
zhujubo@mail.sysu.edu.cn

第二节　留 数

- 一、留数的引入
- 二、利用留数求积分
- 三、在无穷远点的留数
- 四、典型例题
- 五、小结与思考

一、留数的引入

设 z_0 为 $f(z)$ 的一个孤立奇点;



z_0 的某去心邻域 $0<|z-z_0|<R$

邻域内包含 z_0 的任一条正向简单闭曲线

$f(z)$ 在 $0<|z-z_0|<R$ 内的洛朗级数:

$$f(z)=\cdots+c_{-n}(z-z_0)^{-n}+\cdots+c_{-1}(z-z_0)^{-1}+\cdots+c_0$$

$$+c_1(z-z_0)+\cdots+c_n(z-z_0)^n+\cdots$$

积分 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z$

$$=\cdots+c_{-n}\underbrace{\oint_C (z-z_0)^{-n}\mathrm{d}z}_{0\ (\text{高阶导数公式})}+\cdots+c_{-1}\underbrace{\oint_C (z-z_0)^{-1}\mathrm{d}z}_{2\pi i}+\cdots$$

$$+\oint_C c_0\mathrm{d}z+\oint_C c_1(z-z_0)\mathrm{d}z+\cdots+\oint_C c_n(z-z_0)^n\mathrm{d}z+\cdots$$

0 (柯西-古萨基本定理)

$=2\pi i c_{-1}$ 洛朗级数中负幂项 $c_{-1}(z-z_0)^{-1}$ 的系数

即 $c_{-1} = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \mathrm{Res}[f(z), z_0]$

$f(z)$在z_0的留数

定义 如果 z_0 为函数 $f(z)$ 的一个孤立奇点, 则沿在 z_0 的某个去心邻域 $0 < |z - z_0| < R$ 内包含 z_0 的任意一条简单闭曲线 C 的积分 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z$ 的值除以 $2\pi i$ 后所得的数称为 $f(z)$ 在 z_0 的留数.

记作 $\mathrm{Res}[f(z), z_0]$. (即 $f(z)$ 在 z_0 为中心的圆环域内的洛朗级数中负幂项 $c_{-1}(z - z_0)^{-1}$ 的系数.)

二、利用留数求积分

1.留数定理 函数 $f(z)$ 在区域 D 内除有限个孤立奇点 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 外处处解析, C 是 D 内包围诸奇点的一条正向简单闭曲线, 那末

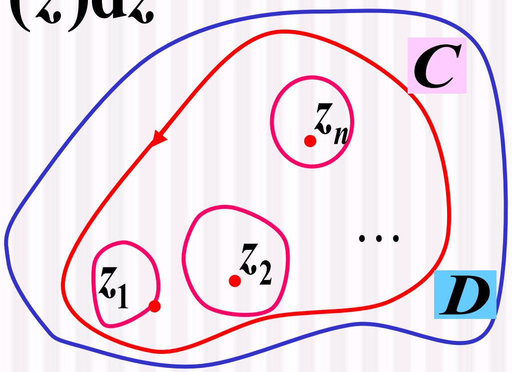
$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}[f(z), z_k].$$

说明: 1. $f(z)$ 在 C 上及 C 内部处处解析;

2. 留数定理将沿封闭曲线 C 积分转化为求被积函数在 C 内各孤立奇点处的留数.

证　如图

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \oint_{C_1} f(z)\mathrm{d}z + \oint_{C_2} f(z)\mathrm{d}z + \cdots + \oint_{C_n} f(z)\mathrm{d}z$$



两边同时除以 $2\pi i$ 且

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} f(z)\mathrm{d}z + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} f(z)\mathrm{d}z + \cdots + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_n} f(z)\mathrm{d}z$$

$$= \mathrm{Res}[f(z), z_1] + \mathrm{Res}[f(z), z_2] + \cdots + \mathrm{Res}[f(z), z_n]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[f(z), z_k]$$ 即可得.

[证毕]

2.留数的计算方法

(1) 如果 z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点，则 $\mathrm{Res}[f(z),z_0]=0.$

(2) 如果 z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点, 则需将 $f(z)$ 展开成洛朗级数求 c_{-1}.

(3) 如果 z_0 为 $f(z)$的极点, 则有如下计算规则

•规则1 如果 z_0 为 $f(z)$的一级极点, 那末

$$\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z).$$

•**规则2** 如果 z_0 为 $f(z)$ 的 m 级极点, 那末

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}} [(z-z_0)^m f(z)].$$

证 $f(z) = c_{-m}(z-z_0)^{-m} + \cdots + c_{-2}(z-z_0)^{-2} +$

$$+ c_{-1}(z-z_0)^{-1} + c_0 + c_1(z-z_0) + \cdots$$

$$(z-z_0)^m f(z) = c_{-m} + c_{-m+1}(z-z_0) + \cdots + c_{-1}(z-z_0)^{m-1}$$

$$+ c_0(z-z_0)^m + c_1(z-z_0)^{m+1} + \cdots$$

两边求 $m-1$ 阶导数,

得 $\dfrac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)]$

$=(m-1)!c_{-1}+$(含有 $z-z_0$ 正幂的项)

$$\lim_{z\to z_0}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)]=(m-1)!c_{-1},$$

所以 $\operatorname{Res}[f(z),z_0]=c_{-1}$

$$=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)].$$ [证毕]

•**规则3** 设 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$, $P(z)$ 及 $Q(z)$ 在 z_0 都解析,

如果 $P(z_0)\neq 0, Q(z_0)=0, Q'(z_0)\neq 0$, 那末 z_0 为

$f(z)$ 的一级极点, 且有 $\operatorname{Res}[f(z),z_0]=\dfrac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$.

证 因为 $Q(z_0)=0, Q'(z_0)\neq 0$

所以 z_0 为 $Q(z)$ 的一级零点,

z_0 为 $\dfrac{1}{Q(z)}$ 的一级极点.

因此 $$\frac{1}{Q(z)}=\frac{1}{z-z_0}\cdot\varphi(z),$$

其中$\varphi(z)$在z_0解析且$\varphi(z_0)\neq 0,$

$$f(z)=\frac{1}{z-z_0}\cdot P(z)\varphi(z).$$

在z_0解析且$P(z_0)\varphi(z_0)\neq 0.$

所以z_0为$f(z)$的一级极点,

$$\operatorname{Res}[f(z),z_0]=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=\lim_{z\to z_0}\frac{P(z)}{\dfrac{Q(z)-Q(z_0)}{z-z_0}}$$

$$=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}.$$

三、在无穷远点的留数

1.定义　设函数 $f(z)$在圆环域 $R<|z|<+\infty$内解析，

C为圆环域内绕原点的任何一条正向简单闭曲线，

则积分 $\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{C^{-1}} f(z)\mathrm{d}z$ 的值与C无关 则称此定值

为 $f(z)$在∞点的留数，

记作 $\operatorname{Res}[f(z),\infty]=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{C^{-}} f(z)\mathrm{d}z=-\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{C} f(z)\mathrm{d}z$

注意积分路线取顺时针方向

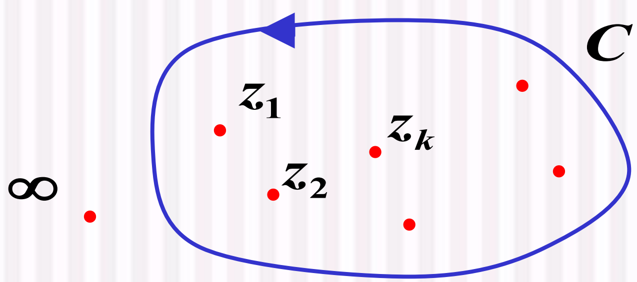
$=-c_{-1}$

说明 $\operatorname{Res}[f(z),\infty]=-c_{-1}$

2.定理二

如果函数 $f(z)$ 在扩充复平面内只有有限个孤立奇点, 那末 $f(z)$ 在所有各奇点 (包括∞点)的留数的总和必等于零.

证



(绕原点的并将 z_k 包含在内部的正向简单闭曲线)

由留数定义有:

$$\operatorname{Res}[f(z),\infty]+\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}[f(z),z_k]$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^{-1}}f(z)\mathrm{d}z+\frac{1}{2\pi i}\oint_{C}f(z)\mathrm{d}z=0.$$

[证毕]

说明：由定理得

$$\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),z_k]=-\mathrm{Res}[f(z),\infty],$$

$$\therefore \quad \oint_C f(z)\mathrm{d}z=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),z_k] \quad \text{(留数定理)}$$

$$=-2\pi i\mathrm{Res}[f(z),\infty].$$

计算积分 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z \longrightarrow$ 计算无穷远点的留数.

优点: 使计算积分进一步得到简化.

(避免了计算诸有限点处的留数)

3.在无穷远点处留数的计算

•规则4

$$\mathrm{Res}[f(z),\infty]=-\mathrm{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\frac{1}{z^2},0\right]$$

说明：定理二和规则4提供了计算函数沿闭曲线积分的又一种方法:

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=2\pi i\,\mathrm{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\frac{1}{z^2},0\right]$$

此法在很多情况下此法更为简单.

证　现取正向简单闭曲线C为半径足够大的

正向圆周：$|z|=\rho$.　令 $z=\dfrac{1}{\zeta}$,

并设 $z=\rho e^{i\theta}, \zeta=re^{i\varphi}$,　那末 $\rho=\dfrac{1}{r}, \theta=-\varphi$,

于是有 $\operatorname{Res}[f(z),\infty]=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{C^-} f(z)\mathrm{d}z$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{-2\pi} f(\rho e^{i\theta})\rho i e^{i\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} f\left(\frac{1}{re^{i\varphi}}\right)\frac{i}{re^{i\varphi}}\mathrm{d}\varphi.$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} f\left(\frac{1}{re^{i\varphi}}\right)\frac{i}{(re^{i\varphi})^2}\mathrm{d}re^{i\varphi}$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=\frac{1}{\rho}} f\left(\frac{1}{\zeta}\right)\frac{1}{\zeta^2}\mathrm{d}\zeta \qquad \left(|\zeta|=\frac{1}{\rho}\text{为正向}\right).$$

在 $|\zeta|=\frac{1}{\rho}$ 内除 $\zeta=0$ 外无其他奇点.

$$= -\mathrm{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\frac{1}{z^2}, 0\right].$$

[证毕]

四、典型例题

例1 求 $f(z)=\dfrac{e^z}{z^n}$ 在 $z=0$ 的留数.

解 因为 $z=0$ 是 $f(z)$ 的 n 阶极点，

所以 $$\operatorname{Res}\left[\frac{e^z}{z^n},0\right]=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}\left(z^n\cdot\frac{e^z}{z^n}\right)$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}.$$

例2　求 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}=\dfrac{z-\sin z}{z^6}$ 在 $z=0$ 的留数.

分析　$P(0)=P'(0)=P''(0)=0,\quad P'''(0)\neq 0.$

$z=0$ 是 $z-\sin z$ 的三级零点

所以 $z=0$ 是 $f(z)$ 的三级极点，由规则3得

$$\operatorname{Res}[f(z),0]=\frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left[z^3\cdot\frac{z-\sin z}{z^6}\right].$$

计算较麻烦.

解　如果利用洛朗展开式求c_{-1}较方便:

$$\frac{z-\sin z}{z^6}=\frac{1}{z^6}\left[z-\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\right)\right]$$

$$=\frac{1}{3!z^3}-\frac{1}{5!z}+\cdots,$$

$$\therefore\ \mathrm{Res}\left[\frac{z-\sin z}{z^6},0\right]=c_{-1}=-\frac{1}{5!}.$$

说明: 1. 在实际计算中应灵活运用计算规则.

如 z_0 为 m 级极点, 当 m 较大而导数又难以计算时,

可直接展开洛朗级数求 c_{-1} 来计算留数.

2. 在应用规则2时, 为了计算方便一般不要将m

取得比实际的级数高. 但有时把m取得比实际的

级数高反而使计算方便. 如上例取 $m=6$:

$$\operatorname{Res}[f(z),0]=\frac{1}{(6-1)!}\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{d}^5}{\mathrm{d}z^5}\left[z^6\cdot\frac{z-\sin z}{z^6}\right]=-\frac{1}{5!}.$$

例3　求 $f(z)=\dfrac{e^z-1}{z^5}$ 在 $z=0$ 的留数.

解　　$z=0$ 是 $f(z)$ 的四级极点.

在 $0<|z|<+\infty$ 内将 $f(z)$ 展成洛朗级数:

$$\frac{e^z-1}{z^5}=\frac{1}{z^5}\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^5}{5!}+\frac{z^6}{6!}+\cdots-1\right)$$

$$=\frac{1}{z^4}+\frac{1}{2!z^3}+\frac{1}{3!z^2}+\frac{1}{4!z}+\frac{1}{5!}+\frac{z}{6!}+\cdots,$$

所以 $\operatorname{Res}[f(z),0]=c_{-1}=\dfrac{1}{4!}=\dfrac{1}{24}.$

例4 计算积分 $\oint_C \frac{e^z}{z(z-1)^2}\mathrm{d}z$，$C$为正向圆周: $|z|=2.$

解 $z=0$ 为一级极点， $z=1$为二级极点，

$$\mathrm{Res}[f(z),0]=\lim_{z\to 0} z\cdot\frac{e^z}{z(z-1)^2}\mathrm{d}z$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{e^z}{(z-1)^2},$$

$$\mathrm{Res}[f(z),1]=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(z-1)^2\frac{e^z}{z(z-1)^2}\right]$$

$$= \lim_{z \to 1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{e^z}{z}\right) = \lim_{z \to 1} \frac{e^z(z-1)}{z^2} = 0,$$

所以 $\displaystyle\oint_C \frac{e^z}{z(z-1)^2}\mathrm{d}z$

$$= 2\pi i\{\mathrm{Res}[f(z),0] + \mathrm{Res}[f(z),1]\}$$

$$= 2\pi i(1+0)$$

$$= 2\pi i.$$

例5　计算积分 $\oint_C \frac{z}{z^4-1}\mathrm{d}z$, C为正向圆周: $|z|=2$.

解　函数 $\frac{z}{z^4-1}$ 在 $|z|=2$ 的外部, 除 ∞ 点外没有其他奇点. 根据定理 2与规则4:

$$\oint_C \frac{z}{z^4-1}\mathrm{d}z = -2\pi i \mathrm{Res}[f(z),\infty]$$

$$= 2\pi i \mathrm{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\frac{1}{z^2},0\right]$$

$$= 2\pi i \mathrm{Res}\left[\frac{z}{1-z^4},0\right] = 0.$$

与以下解法作比较：

被积函数 $\frac{z}{z^4-1}$ 有四个一级极点 $\pm 1, \pm i$ 都

在圆周 $|z|=2$ 的内部，所以

$$\oint_C \frac{z}{z^4-1}\mathrm{d}z = 2\pi i\{\mathrm{Res}[f(z),1]+\mathrm{Res}[f(z),-1]$$

$$+\mathrm{Res}[f(z),i]+\mathrm{Res}[f(z),-i]\}$$

由规则3 $\quad \frac{P(z)}{Q'(z)} = \frac{z}{4z^3} = \frac{1}{4z^2},$

$$\oint_C \frac{z}{z^4-1}\mathrm{d}z = 2\pi i\left\{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right\} = 0\,.$$

可见, 利用无穷远点的留数更简单.

例6　计算积分 $\displaystyle\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z+i)^{10}(z-1)(z-3)}$,

C为正向圆周 : $|z| = 2$.

解　被积函数 $f(z) = \dfrac{1}{(z+i)^{10}(z-1)(z-3)}$ 除 ∞

点外, 其他奇点为 $-i, 1, 3$.

则 $\operatorname{Res}[f(z),-i]+\operatorname{Res}[f(z),1]$

$$+\operatorname{Res}[f(z),3]+\operatorname{Res}[f(z),\infty]=0\,.$$

由于 $-i$ 与 1在C的内部,

所以 $$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z+i)^{10}(z-1)(z-3)}$$

$$=2\pi i\{\operatorname{Res}[f(z),-i]+\operatorname{Res}[f(z),1]\}$$

$$=-2\pi i\{\operatorname{Res}[f(z),3]+\operatorname{Res}[f(z),\infty]\}$$

$$=-2\pi i\left\{\frac{1}{2(3+i)^{10}}+0\right\}=-\frac{\pi i}{(3+i)^{10}}\,.$$

思考题

计算 $\oint_C \frac{\sin^2 z}{z^2(z-1)}\mathrm{d}z,\ C: |z| = 2$正向.

五、小结与思考

本节我们学习了留数的概念、计算以及留数定理. 应重点掌握计算留数的一般方法,尤其是极点处留数的求法, 并会应用留数定理计算闭路复积分.

作业

P184，8（1、2）、9（1、2）