

中山大学本科生期末考试

考试科目：《高等数学一》（A 卷）（珠海校区）

学年学期：2015 学年第 2 学期 姓 名：_____学 号：_____

学 院/系：数学与计算科学学院 学 院：_____年级专业：_____

考试方式：闭卷

考试时长：120 分钟 成绩评定：_____阅卷教师：_____

警示

《中山大学授予学士学位工作细则》第八条：“考试作弊者，不授予学士学位。”

一、求下列极限（共 2 小题，每小题 6 分，共 12 分）

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x}$$

$$\text{因为 } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\sin x \ln x}$$

$$\text{而 } \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\csc x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\csc x \cot x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{x \cos x} = 0,$$

$$\text{所以 } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\sin x \ln x} = e^0 = 1$$

二、求下列积分（共 4 小题，每小题 7 分，共 28 分）

$$1 \quad \int \frac{1}{x(x-2)^2} dx$$

$$\frac{1}{4} \ln|x| - \frac{1}{4} \ln|x-2| - \frac{1}{2(x-2)} + c$$

$$2 \int \frac{3x^3}{1-x^4} dx$$

$$\int \frac{3x^3}{1-x^4} dx = \frac{3}{4} \int \frac{4x^3}{1-x^4} dx = \frac{3}{4} \int \frac{1}{1-x^4} dx^4 = -\frac{3}{4} \int \frac{1}{1-x^4} d(1-x^4) = -\frac{3}{4} \ln |1-x^4| + C.$$

$$3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^3 x dx$$

$$\text{原式} = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx = -\frac{1}{4} \cos^4 x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}$$

$$4 \int_{-1}^1 \frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$$

$$\text{令 } \sqrt{5-4x} = u, \text{ 则 } x = \frac{5}{4} - \frac{1}{4}u^2, \quad dx = -\frac{1}{2}u du$$

$$\text{当 } x = -1, 1 \text{ 时, } u = 3, 1$$

$$\text{原式} = \int_3^1 \frac{1}{8}(5-u^2) du = \frac{1}{6}$$

三、向量代数和空间几何（共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分）

1 求单位向量 \vec{n} ，使 $\vec{n} \perp \vec{a}$ 且 $\vec{n} \perp x$ 轴，其中 $\vec{a} = \{3, 6, 8\}$ 。

2 求过点 $(2, 0, -3)$ 且与直线 $\begin{cases} x-2y+4z-7=0 \\ 3x+5y-2z+1=0 \end{cases}$ 垂直的平面方程。

解: 1 取 $b = i$ ，则 $n \perp a, n \perp b$ 。 答案: $n = \pm \frac{1}{10}(8j - 6k)$

$$2 \quad 16x - 14y - 11z - 65 = 0$$

四、求最值（共 1 小题，每小题 6 分，共 6 分）

求函数 $y = x + \sqrt{1-x}$ 在 $[-5, 1]$ 上的最大值和最小值

解: $y' = 1 - \frac{1}{2\sqrt{1-x}}$ 。令 $y' = 0$ ，得到唯一驻点 $x = \frac{3}{4}$ ，且 $y\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{5}{4}$ 。

又 y' 不存在的点 $x = 1$ ，而区间端点上的函数值为 $y(1) = 1$ ， $y(-5) = -5 + \sqrt{6}$ ，

比较这些值可知，函数在 $[-5, 1]$ 上的最大值，最小值分别为

$$y\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{5}{4}, \quad y(-5) = -5 + \sqrt{6}.$$

五、(共 1 小题, 每小题 11 分, 共 11 分)

设函数 $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$, (1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间与极值点; (2)

求函数 $f(x)$ 的凸凹区间与拐点; (3) 求函数 $f(x)$ 的渐近线。

解: (1) $f'(x) = \frac{x^2(x-1)(x-3)}{(x-1)^4}$, 所以单点区间分别是 $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(3, +\infty)$ 都是单调递增区间, 而 $(1, 3)$ 是单调递减区间。

(2) $f''(x) = \frac{6x}{(x-1)^3}$, 所以 $f''(x) = 0$ 得到 $x = 0$ 。而当 $x < 0$, $f''(x) < 0$ 凸函数, 但 $x > 0$, $f''(x) > 0$ 凹函数。

(3) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty$, 所 $x = 1$ 是其垂直渐近线

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x} = 1, \quad \text{而} \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x}{(x-1)^2} = 2$$

因此 $y = x - 2$ 是其斜渐近线。

六、多元函数微分学 (共 3 小题, 每小题 7 分, 共 21 分)

1 求由方程 $f(x + 2y + 3z, x^2 + y^2 + z^2) = 0$ 确定的函数 $z = z(x, y)$ 的偏导数和全微分

解: 对方程两边对 x 求偏导, 得到

$$(1 + 3z_x)f_1 + (2x + 2zz_x)f_2 = 0$$

$$\text{由此解出} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f_1 + 2xf_2}{3f_1 + 2zf_2}$$

$$\text{同理可求出} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2f_1 + 2yf_2}{3f_1 + 2zf_2}$$

于是

$$\begin{aligned} dz &= \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \\ &= -\frac{(f_1 + 2xf_2)}{3f_1 + 2zf_2} dx - \frac{(2f_1 + 2yf_2)}{3f_1 + 2zf_2} dy \end{aligned}$$

2 若 $z = \frac{x+y}{x-y}$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 。

解: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x-y-(x+y)}{(x-y)^2} = \frac{-2y}{(x-y)^2}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial \left(\frac{-2y}{(x-y)^2} \right)}{\partial x} = \frac{4y}{(x-y)^3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \left(\frac{-2y}{(x-y)^2} \right)}{\partial y} = \frac{-2x^2}{(x-y)^4}$$

3 求函数 $u(x, y, z) = xyz$ 点 $M_0(1, -1, 1)$ 处沿着从 M_0 到 $M_1(2, 3, 1)$ 的方向导数

解: 方向 l 是从 M_0 到 M_1 , 其方向是 $l = \left(\frac{1}{\sqrt{17}}, \frac{4}{\sqrt{17}}, 0 \right)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(1, -1, 1)} = yz \Big|_{(1, -1, 1)} = -1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(1, -1, 1)} = xz \Big|_{(1, -1, 1)} = 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{(1, -1, 1)} = xy \Big|_{(1, -1, 1)} = -1$$

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{3}{\sqrt{17}}$$

七、证明题 (共 2 小题, 每小题 6 分, 共 12 分)

1 证明: 当 $x > 0$ 时, $\arctan x + \frac{1}{x} > \frac{\pi}{2}$

证明: 考虑辅助函数

$$F(x) = \arctan x + \frac{1}{x} - \frac{\pi}{2},$$

求导得到 $F'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{-1}{(1+x^2)x^2} < 0$,

所以 $F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内严格单调下降, 又

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \frac{\pi}{2} + 0 - \frac{\pi}{2} = 0,$$

由此知道当 $x > 0$ 时, $F(x) > 0$, 移项即得证。

2 设函数 $F(x) = (x-1)^2 f(x)$, 其中 $f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上二阶可导且有 $f(2) = 0$,

证明存在 $\xi (1 < \xi < 2)$ 使得 $F''(\xi) = 0$ 。

证明: 由 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上二阶可导, 故 $F(x)$ 在 $[1, 2]$ 上二阶可导, 因为 $f(2) = 0$,

故 $F(1) = F(2) = 0$ 。

在 $[1, 2]$ 上应用罗尔定理, 至少存在一点 $x_0, (1 < x_0 < 2)$, 使得 $F'(x_0) = 0$ 。

$F'(x) = 2(x-1)f(x) + (x-1)^2 f'(x)$, 得到 $F'(1) = 0$ 。

在 $[1, x_0]$ 上对 $F'(x)$ 应用罗尔定理, 至少有点 $\xi (1 < \xi < x_0 < 2)$ $F''(\xi) = 0$ 。