



2024年春季 (1-18周) , F207 周一8:00-9:40

(1-9周) F207周三8:00-9:40

复变函数

朱炬波 13973168169
zhujubo@mail.sysu.edu.cn



第一章 复数与复变函数

第四节 区域

一、区域的概念

复变函数 (26)

二、单连通域与多连通域

三、典型例题

四、小结与思考



一、区域的概念

1. 邻域:

平面上以 z_0 为中心, δ (任意的正数) 为半径的圆: $|z - z_0| < \delta$ 内部的点的集合称为 z_0 的邻域.

说明

包括无穷远点自身在内且满足 $|z| > M$ 的所有点的集合, 其中实数 $M > 0$, 称为无穷远点的邻域.



2. 去心邻域:

称由不等式 $0 < |z - z_0| < \delta$ 所确定的点的集合为 z_0 的去心邻域.

说明

不包括无穷远点自身在内, 仅满足 $|z| > M$ 的所有点的集合, 称为无穷远点的去心邻域.
可以表示为 $M < |z| < +\infty$.



3.内点:

设 G 为一平面点集, z_0 为 G 中任意一点. 如果存在 z_0 的一个邻域, 该邻域内的所有点都属于 G , 那末 z_0 称为 G 的内点.

4.开集:

如果 G 内每一点都是它的内点, 那末 G 称为开集.



5.区域:

如果平面点集 D 满足以下两个条件, 则称它为一个区域.

(1) D 是一个开集;

(2) D 是连通的, 就是说 D 中任何两点都可以用完全属于 D 的一条折线连结起来.

6.边界点、边界:

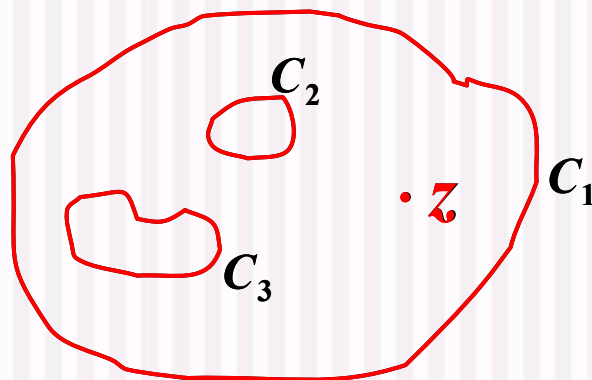
设 D 是复平面内的一个区域, 如果点 P 不属于 D , 但在 P 的任意小的邻域内总有 D 中的点, 这样的 P 点我们称为 D 的边界点.



D 的所有边界点组成 D 的边界.

说明

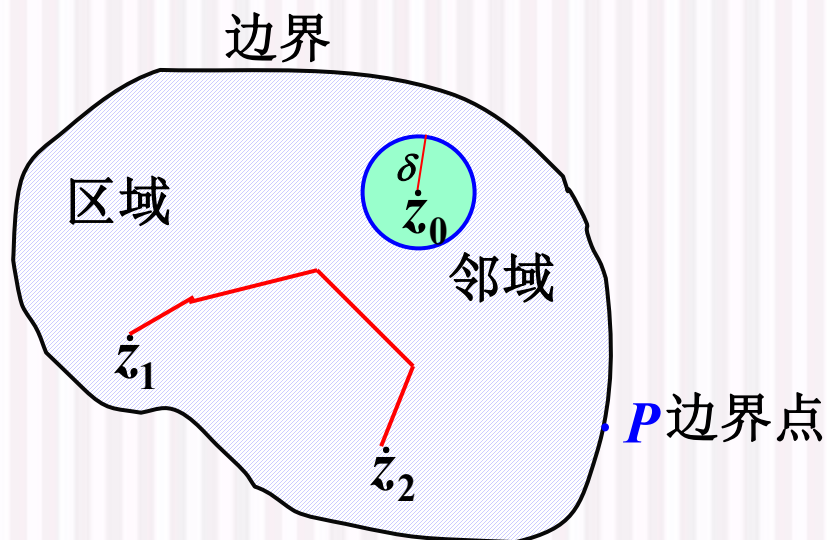
(1) 区域的边界可能是由几条曲线和一些孤立的点所组成的.



(2) 区域 D 与它的边界一起构成闭区域 \bar{D} .



以上基
本概念
的图示



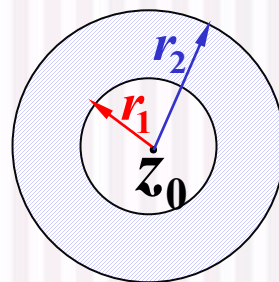
7.有界区域和无界区域:

如果一个区域 D 可以被包含在一个以原点为中心的圆里面,即存在 $M > 0$,使区域的每一个点都满足 $|z| < M$,那末 D 称为有界的,否则称为无界的.



课堂练习 判断下列区域是否有界？

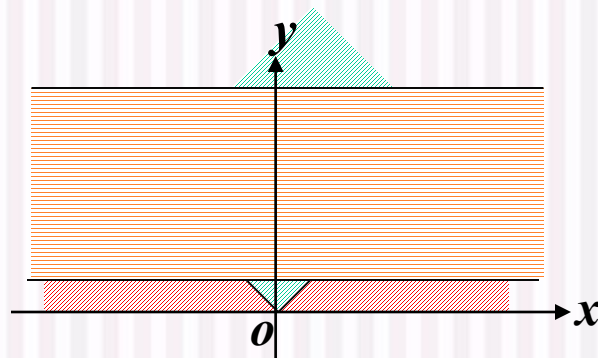
(1) 圆环域: $r_1 < |z - z_0| < r_2$;



(2) 上半平面: $\text{Im } z > 0$;

(3) 角形域: $0 < \arg z < \varphi$;

(4) 带形域: $a < \text{Im } z < b$.



答案 (1)有界; (2) (3) (4)无界.



二、单连通域与多连通域

1. 连续曲线:

如果 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是两个连续的实变函数, 那末方程组 $x = x(t)$, $y = y(t)$, $(a \leq t \leq b)$ 代表一条平面曲线, 称为连续曲线.

平面曲线的复数表示:

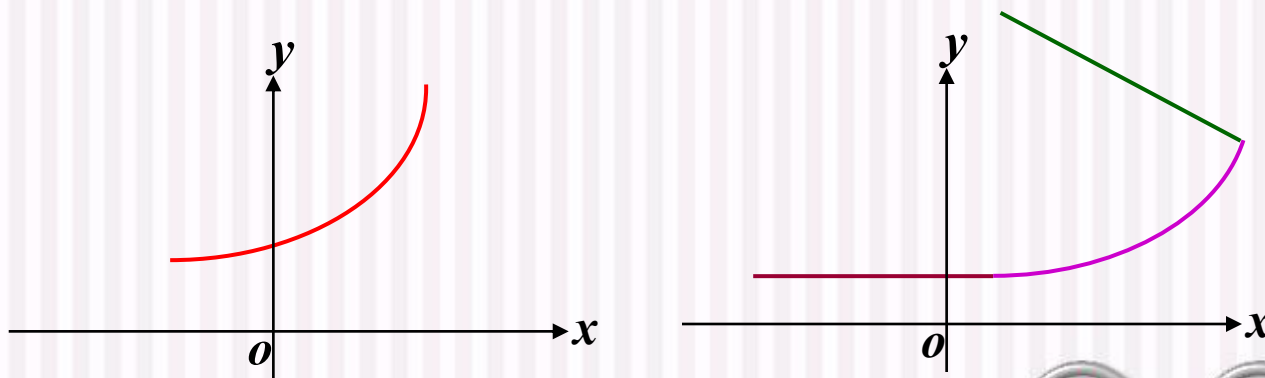
$$z = z(t) = x(t) + iy(t). \quad (a \leq t \leq b)$$



2. 光滑曲线:

如果在 $a \leq t \leq b$ 上, $x'(t)$ 和 $y'(t)$ 都是连续的, 且对于 t 的每一个值, 有 $[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 \neq 0$, 那末称这曲线为光滑的.

由几段依次相接的光滑曲线所组成的曲线称为按段光滑曲线.



3. 简单曲线:

设 $C : z = z(t) (a \leq t \leq b)$ 为一条连续曲线, $z(a)$ 与 $z(b)$ 分别称为 C 的起点和终点.

对于满足 $a < t_1 < b$, $a \leq t_2 \leq b$ 的 t_1 与 t_2 , 当 $t_1 \neq t_2$ 而有 $z(t_1) = z(t_2)$ 时, 点 $z(t_1)$ 称为曲线 C 的重点.

没有重点的曲线 C 称为简单曲线 (或若尔当曲线).

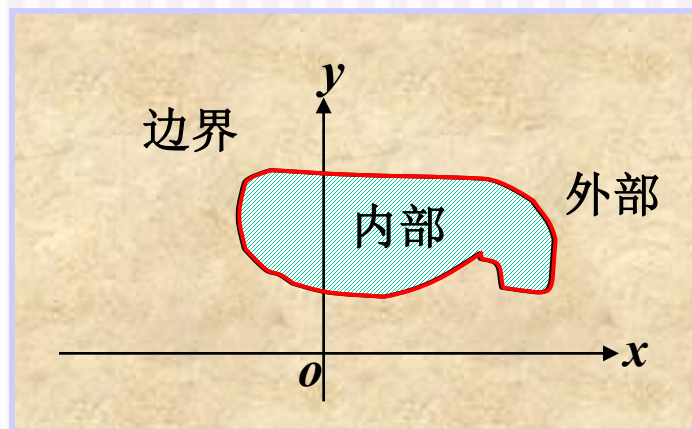


如果简单曲线 C 的起点和终点重合, 即 $z(a) = z(b)$, 那末称 C 为简单闭曲线.

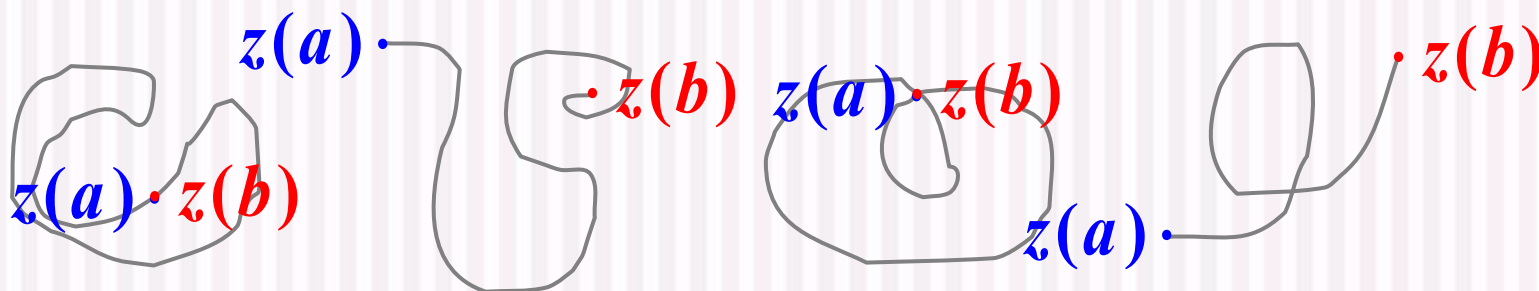
换句话说, **简单曲线自身不相交**.

简单闭曲线的性质:

任意一条简单闭曲线 C 将复平面唯一地分成三个互不相交的点集.



课堂练习 判断下列曲线是否为简单曲线？



答案

简单
闭

简单
不闭

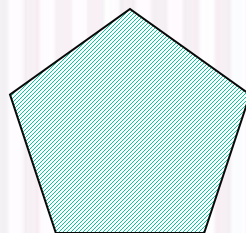
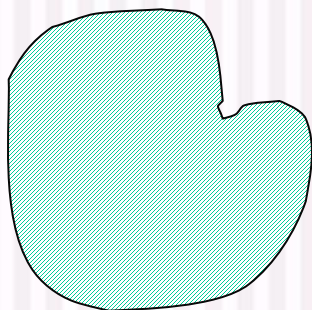
不简
单
闭

不简
单
不闭

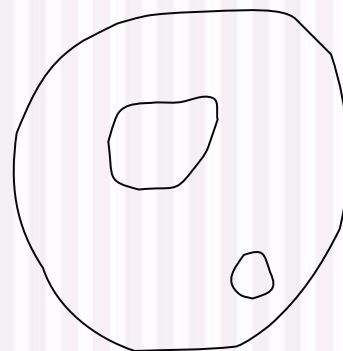


4. 单连通域与多连通域的定义:

复平面上的一个区域 B , 如果在其中任作一条简单闭曲线, 而曲线的内部总属于 B , 就称为单连通域. 一个区域如果不是单连通域, 就称为多连通域.



单连通域



多连通域



三、典型例题

例1 指明下列不等式所确定的区域, 是有界的还是无界的, 单连通的还是多连通的.

(1) $\operatorname{Re}(z^2) \leq 1$; (2) $|\arg z| < \frac{\pi}{3}$; (3) $\left| \frac{1}{z} \right| < 3$;

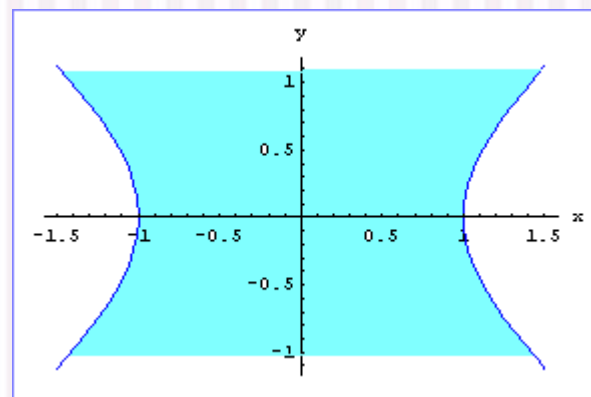
(4) $|z-1| + |z+1| < 4$; (5) $|z-1| \cdot |z+1| < 1$.

解 (1) 当 $z = x + iy$ 时,

$$\operatorname{Re}(z^2) = x^2 - y^2,$$

$$\operatorname{Re}(z^2) \leq 1 \Leftrightarrow x^2 - y^2 \leq 1,$$

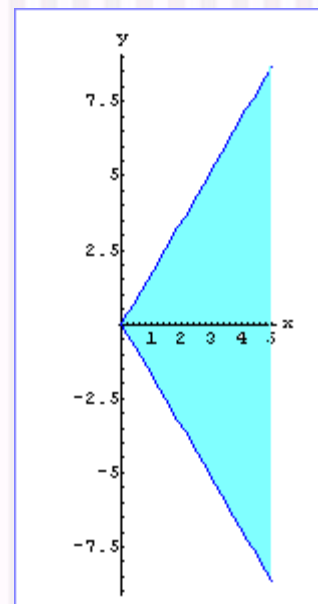
无界的单连通域(如图).



$$(2) |\arg z| < \frac{\pi}{3}$$

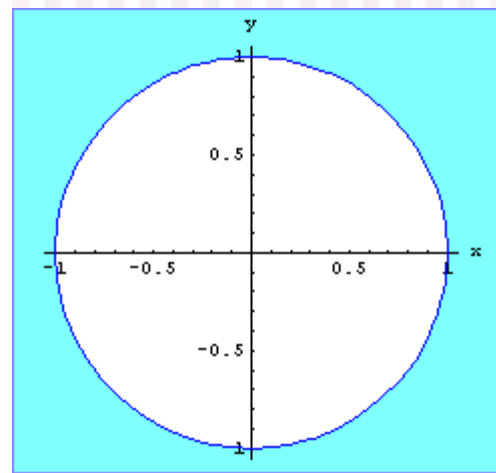
$$|\arg z| < \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} < \arg z < \frac{\pi}{3},$$

是角形域, 无界的单连通域(如图).



$$(3) \left| \frac{1}{z} \right| < 3 \quad \left| \frac{1}{z} \right| < 3 \Leftrightarrow |z| > \frac{1}{3},$$

是以原点为中心, 半径为 $\frac{1}{3}$ 的圆的外部, 无界的多连通域.



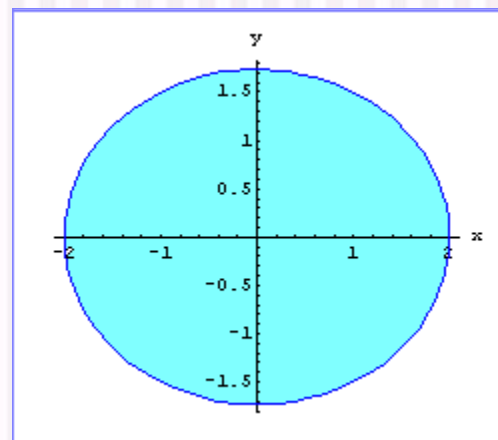
$$(4) |z-1| + |z+1| < 4$$

$$|z-1| + |z+1| = 4$$

表示到1, -1的距离之和为定值4的点的轨迹,
是椭圆,

$|z-1| + |z+1| < 4$ 表示该椭圆内部,

有界的单连通域.



$$(5) |z-1| \cdot |z+1| < 1$$

令 $z = r \cos \theta + ir \sin \theta$, 边界 $|z-1| \cdot |z+1| = 1 \Leftrightarrow$

$$[(r \cos \theta - 1)^2 + r^2 \sin^2 \theta] \cdot [(r \cos \theta + 1)^2 + r^2 \sin^2 \theta] = 1$$

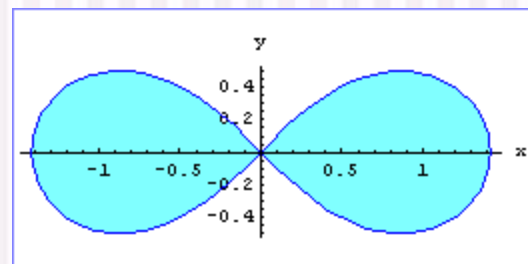
$$(r^2 + 2r \cos \theta + 1)(r^2 - 2r \cos \theta + 1) = 1$$

$$(r^2 + 1)^2 - 4(r \cos \theta)^2 = 1 \Rightarrow r = 0 \text{ 或 } r^2 = 2 \cos 2\theta,$$

$r^2 = 2 \cos 2\theta$ 是双叶玫瑰线 (也称双纽线),

$|z-1| \cdot |z+1| < 1$ 是其内部,

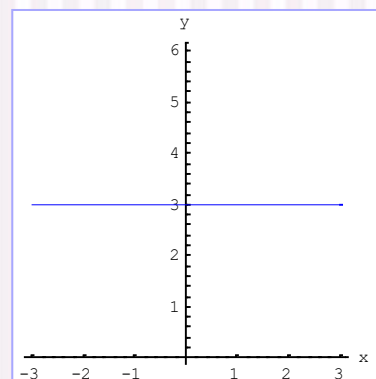
有界的单连通域.



例2 满足下列条件的点集是什么, 如果是区域, 指出是单连通域还是多连通域?

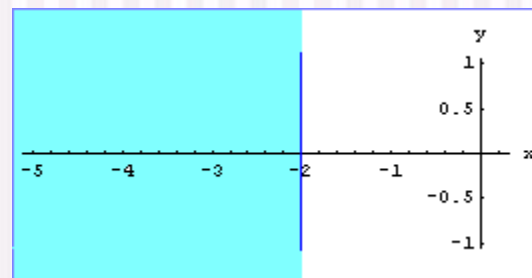
解 (1) $\operatorname{Im} z = 3$,

是一条平行于实轴的直线,
不是区域.



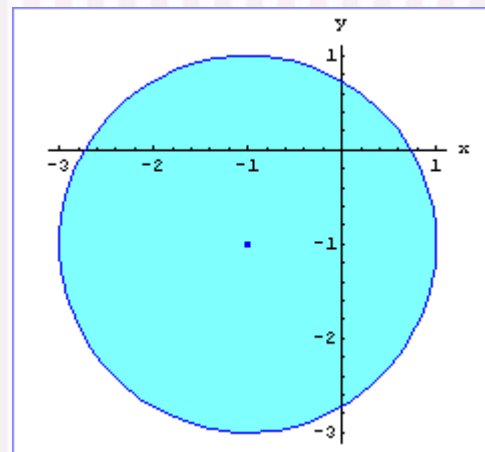
(2) $\operatorname{Re} z > -2$,

以 $\operatorname{Re} z = -2$ 为左界的半平面
(不包括直线 $\operatorname{Re} z = -2$),
单连通域.



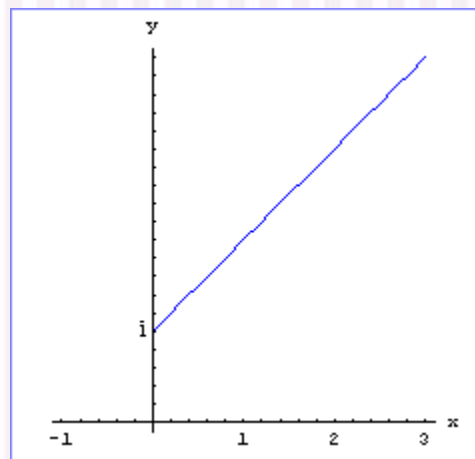
$$(3) 0 < |z + 1 + i| < 2,$$

以 $-(1+i)$ 为圆心, 2 为半径
的去心圆盘,
是多连通域.



$$(4) \arg(z - i) = \frac{\pi}{4},$$

以 i 为端点, 斜率为 1 的半射线
(不包括端点 i),
不是区域.



$$(5) 0 < \arg \frac{z-i}{z+i} < \frac{\pi}{4},$$

当 $z = x + iy$ 时,

$$\frac{z-i}{z+i} = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + (y+1)^2} + i \frac{-2x}{x^2 + (y+1)^2},$$

由 $0 < \arg \frac{z-i}{z+i} < \frac{\pi}{4}$ 知

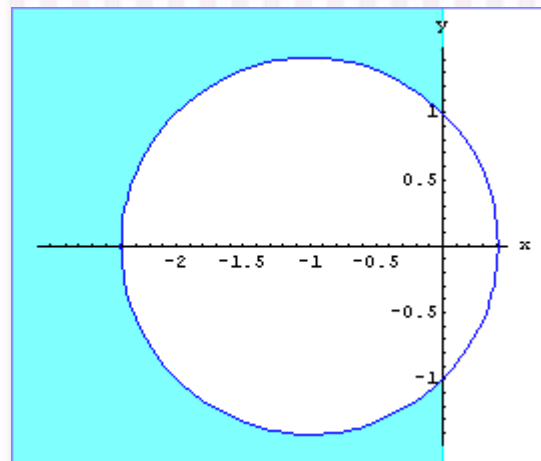
$$\frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + (y+1)^2} > 0, \quad \frac{-2x}{x^2 + (y+1)^2} > 0,$$



因为 $x^2 + (y+1)^2 > 0$,

$$\text{于是 } \begin{cases} -2x > 0, \\ x^2 + y^2 - 1 > 0, \\ -2x < x^2 + y^2 - 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 0, \\ x^2 + y^2 > 1, \\ (x+1)^2 + y^2 > 2. \end{cases}$$

表示在圆 $(x+1)^2 + y^2 = 2$ 的外部且属于左半平面的点集,
单连通域.



四、小结与思考

应理解区域的有关概念：

邻域、去心邻域、内点、开集、边界点、边界、
区域、有界区域、无界区域

理解单连通域与多连通域.



作业

P31, 14、15、22

