一个函数如果是可微的，则

$$\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x)\Delta x+o(\Delta x).$$

我们将 $f'(x)\Delta x$（改变量的线性部分）称为 f 的微分，记为

$$df=f'(x)\Delta x,$$

在以上记号下，$dx=\Delta x$，故可将 df 表示为

$$df=f'(x)\,dx.$$

通常涉及到变量代换问题时，如 $x=\varphi(t)$，考虑 $f(\varphi(t))$，看作关于 t 的函数，则

$$df=[f(\varphi(t))]'dt=f'(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt,$$

由于 $dx=\varphi'(t)\,dt$，故

$$df=f'(x)\,dx.$$

注意，这里 x 是一个中间变量（$x=\varphi(t)$），但上面的公式实际上与将 x 看作自变量时是一致的。这就是所谓一阶微分的形式不变性。

求一个一元函数的微分和求导没有实质性的区别。

以 kepler 方程 $y=x-\varepsilon\sin x$ $(0<\varepsilon<1)$ 为例，已知 y 是严格递增函数，且 $y'(x)=1-\varepsilon\cos x>0$，故存在反函数 $x=x(y)$.

由反函数的求导法则，

$$x'(y)=\frac{1}{y'(x)}=\frac{1}{1-\varepsilon\cos x(y)}.$$

也可以将 $y=x-\varepsilon\sin x$ 看成关于 y 的等式：

$$y-x(y)-\varepsilon\sin x(y)=0.$$

对 y 求导就得到：

$$1-x'(y)-\varepsilon\cos x(y)\cdot x'(y)=0,$$

同样推出

$$x'(y)=\frac{1}{1-\varepsilon\cdot\cos x(y)}.$$

如果对等式 $y=x-\varepsilon\sin x$ 两边求微分：

$$dy=dx-\varepsilon\cdot\cos x\cdot dx$$

（无论将 y 看成 $y(x)$ 还是将 x 看成 $x(y)$），

$$\Rightarrow\quad dx=\frac{dy}{1-\varepsilon\cdot\cos x}$$

在多元函数的微分学中，我们还将接触到多元函数的微分：

$$dF(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy.$$

如果我们知道函数 $y=y(x)$ 满足方程 $F(x,y)=0$，则

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0,$$

$$\Rightarrow y'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$