

模拟试卷五

一、 选择题 ($3' \times 5 = 15'$)

1. 下列变量在给定的变化过程中是无穷小量的是 ()。(贵州大学)

A. $\frac{\sin x}{x} (x \rightarrow 0)$

B. $e^{-x} - 1 (x \rightarrow 0)$

C. $\frac{x^2}{\sqrt{x^3-2x+1}} (x \rightarrow +\infty)$

D. $e^{-\frac{1}{x}} (x \rightarrow 0^-)$

2. 函数 $f(x) = (2-x^2)(4-x^2)(6-x^2)$ 有 () 个驻点。(同济)

A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

3. 如果 $f(x) = \begin{cases} e^{ax}, & x \leq 0 \\ b(1-x^2), & x > 0 \end{cases}$ 处处可导则 ()

A. $a = b = 1$

B. $a = 0, b = 1$

C. $a = 1, b = 0$

D. $a = -2, b = -1$

4. 设 $f(x) = \int_0^{5x} \frac{\sin t}{t} dt$, $\varphi(x) = \int_0^{\sin x} (1+t)^{\frac{1}{t}} dt$, 当 $x \rightarrow 0$ 时,

$f(x)$ 是 $\varphi(x)$ 的 ()。(吉大)

A. 高阶无穷小

B. 低阶无穷小

C. 同阶但不等价无穷小

D. 等价无穷小

5. 设函数 $f(x)$ 满足: $f(x) = e^{-x} + \frac{2}{x^2} \int_1^{+\infty} f(x) dx$, 则 $f(1) =$ ()。(四川大学)

A. e^{-1}

B. $-e^{-1}$

C. $2e^{-1}$

D. $-2e^{-1}$

二、 填空题 ($3' \times 5 = 15'$)

1. 设 $\tan y = x + y$, 则 $dy =$ _____。 (成都理工)
2. $f(x)$ 为连续函数, $F(x) = \int_0^{2x} f(x+t)dt$, 则 $F'(x) =$ _____。 (上海交大)
3. 将 $\sin x$ 在 $x = \frac{\pi}{2}$ 处展开成带拉格朗日型余项的一阶泰勒公式为 $\sin x =$ _____。 (其中 ξ 在 x 和 $\frac{\pi}{2}$ 之间) (华东理工)
4. 当 $0 \leq \theta \leq \pi$, 对数螺线 $\rho = e^\theta$ 的弧长为 _____。 (东华)
5. $\int_{-2}^2 x^2 (\sin x + |x|) dx =$ _____。 (川大)

三、 计算题 (共 60 分)

1. 计算 $\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$ 。 (厦门大学) (7 分)
2. 设 $f(\pi) = 2$, $\int_0^\pi [f(x) + f''(x)] \sin x dx = 5$, 求 $f(0)$ 。 (7 分) (清华)
3. 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} [\frac{x^2+1}{x+1} - (ax+b)] = 0$, 求常数 a, b 。 (7 分) (北林)
4. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (t^2 - x^2) \cos t dt}{x^3}$ 。 (7 分) (成都理工)
5. 计算 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^{10}-1}}$ 。 (7 分) (北大)

6. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1+x^2} + x)^{\frac{1}{x}}$ 。(7分) (西南交大)

7. 求微分方程 $y'' - 4y' + 4y = 3e^{2x} + 2x$ 的通解。(7分) (中国传媒)

8. 设抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 通过点 $(0,0)$, 且当 $x \in [0,1]$ 时, $y \geq 0$ 。试确定 a, b, c 的值, 使得该抛物线与直线 $x = 1, y = 0$ 所围图形的面积为 $\frac{4}{9}$, 且使该图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积最小。(北林) (13分)

四、 证明题 (5' \times 2 = 10')

1. 设 $x_1 = 1$, $x_n = 1 + \frac{x_n}{1+x_n}$ ($n = 1, 2, \dots$), 试证明数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 。(武汉大学)

2. 设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有二阶导数, 且 $f(1)=1$, 证明:

(1) 存在 $\xi \in (0,1)$, 使 $f'(\xi)=1$

(2) 存在 $\eta \in (-1,1)$, 使 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$

(湖南大学)

参考答案：

一、选择题

1.B 2.C 3.B 4.C 5.B

二、填空题

1. $\cot^2 y dx$

2. $3f(3x) - f(x)$

3. $1 - \frac{\sin \xi}{2} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2$

4. $\sqrt{2}(e^\pi - 1)$

5. 8

三、计算题

1. $\frac{1}{4} \ln 2 + \frac{\pi}{8}$

2. $f(0) = 3$

3. $a = 1, b = -1$

4. $-\frac{2}{3}$

5. $\frac{\pi}{10}$

6. e

7. $y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + \frac{3}{2} x^2 e^{2x} + \frac{1}{2} x + \frac{1}{2}$

8. $a = -\frac{5}{3}, b = 2, c = 0$

四、证明题：见视频讲解

扫描下方二维码获取视频讲解哦

