



2024年春季 (1-18周) , F207 周一8:00-9:40

(1-9周) F207周三8:00-9:40

复变函数

朱炬波 13973168169
zhujubo@mail.sysu.edu.cn



第七节 解析函数与调和函数的关系

- 一、调和函数的定义
- 二、解析函数与调和函数的关系
- 三、小结与思考



一、调和函数的定义

定义

如果二元实变函数 $\varphi(x, y)$ 在区域 D 内具有二阶连续偏导数, 并且满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0,$$

那末称 $\varphi(x, y)$ 为区域 D 内的调和函数.

调和函数在流体力学和电磁场理论等实际问题中有很重要的应用.



二、解析函数与调和函数的关系

1. 两者的关系

定理 任何在区域 D 内解析的函数, 它的实部和虚部都是 D 内的调和函数.

证 设 $w = f(z) = u + iv$ 为 D 内的一个解析函数,

$$\text{那末 } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

$$\text{从而 } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}.$$



根据解析函数高阶导数定理,

→ u 与 v 具有任意阶的连续偏导数,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y},$$

$$\text{从而 } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \text{同理 } \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0,$$

因此 u 与 v 都是调和函数.

[证毕]



2. 共轭调和函数的定义

设 $u(x, y)$ 为区域 D 内给定的调和函数, 我们把使 $u + iv$ 在 D 内构成解析函数的调和函数 $v(x, y)$ 称为 $u(x, y)$ 的共轭调和函数.

换句话说, 在 D 内满足方程 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ 的两个调和函数中, v 称为 u 的共轭调和函数.

区域 D 内的解析函数的虚部为实部的共轭调和函数.



3. 偏积分法

如果已知一个调和函数 u , 那末就可以利用柯西—黎曼方程求得它的共轭调和函数 v , 从而构成一个解析函数 $u+vi$. 这种方法称为**偏积分法**.

例1 证明 $u(x, y) = y^3 - 3x^2y$ 为调和函数, 并求其共轭调和函数 $v(x, y)$ 和由它们构成的解析函数.

解 因为 $\frac{\partial u}{\partial x} = -6xy, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -6y,$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3y^2 - 3x^2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6y,$$



于是 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, 故 $u(x, y)$ 为调和函数.

$$\text{因为 } \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = -6xy,$$

$$v = -6 \int xy dy = -3xy^2 + g(x),$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -3y^2 + g'(x),$$

$$\text{又因为 } \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -3y^2 + 3x^2,$$



$$-3y^2 + g'(x) = -3y^2 + 3x^2, \quad (c \text{ 为任意常数})$$

$$\text{故 } g(x) = \int 3x^2 dx = x^3 + c, \quad v(x, y) = x^3 - 3xy^2 + c,$$

$$\text{得一个解析函数 } w = y^3 - 3x^2y + i(x^3 - 3xy^2 + c).$$

$$\text{这个函数可以化为 } w = f(z) = i(z^3 + c).$$

课堂练习 证明 $u(x, y) = x^3 - 6x^2y - 3xy^2 + 2y^3$ 为调和函数, 并求其共轭调和函数.

答案 $v(x, y) = 3x^2y - 6xy^2 - y^3 + 2x^3 + c.$
(c 为任意常数)



例2 已知 $v(x, y) = e^x(y \cos y + x \sin y) + x + y$ 为调和函数, 求一解析函数 $f(z) = u + iv$, 使 $f(0) = 0$.

解
$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^x(y \cos y + x \sin y + 1),$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = e^x(\cos y - y \sin y + x \cos y) + 1,$$

由
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = e^x(\cos y - y \sin y + x \cos y) + 1,$$

得
$$u = \int [e^x(\cos y - y \sin y + x \cos y) + 1] dx$$



$$u = e^x(x \cos y - y \sin y) + x + g(y),$$

$$\text{由 } \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \text{ 得}$$

$$e^x(y \cos y + x \sin y + \sin y) + 1$$

$$= e^x(x \sin y + y \cos y + \sin y) - g'(y),$$

$$\text{故 } g(y) = -y + c,$$

$$\text{于是 } u = e^x(x \cos y - y \sin y) + x - y + c,$$



$$f(z) = u + iv$$

$$= xe^x e^{iy} + iye^x e^{iy} + x(1+i) + iy(1+i) + c$$

$$= ze^z + (1+i)z + c,$$

由 $f(0) = 0$, 得 $c = 0$,

所求解析函数为 $f(z) = ze^z + (1+i)z$.



4. 不定积分法

已知调和函数 $u(x, y)$ 或 $v(x, y)$, 用不定积分求解析函数的方法称为不定积分法.

不定积分法的实施过程:

解析函数 $f(z) = u + iv$ 的导数 $f'(z)$ 仍为解析函数,

且 $f'(z) = u_x + iv_x = u_x - iu_y = v_y + iv_x$

把 $u_x - iu_y$ 与 $v_y + iv_x$ 用 z 来表示,

$$f'(z) = u_x - iu_y = U(z), \quad f'(z) = v_y + iv_x = V(z),$$



将上两式积分, 得

$$f(z) = \int U(z)dz + c,$$

适用于已知实部 u 求 $f(z)$,

$$f(z) = \int V(z)dz + c,$$

适用于已知虚部 v 求 $f(z)$,



例3 求 k 值, 使 $u = x^2 + ky^2$ 为调和函数. 再求 v , 使 $f(z) = u + iv$ 为解析函数, 并求 $f(i) = -1$ 的 $f(z)$.

解 因为 $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2,$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2ky, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2k,$$

根据调和函数的定义可得 $k = -1$,

$$\text{因为 } f'(z) = U(z) = u_x - iu_y = 2x - 2kyi$$



$$= 2x - 2kyi = 2x + 2yi = 2z,$$

根据不定积分法 $f(z) = \int 2zdz = z^2 + c,$

由 $f(i) = -1$, 得 $c = 0$,

所求解析函数为

$$f(z) = x^2 - y^2 + 2xyi = z^2.$$



例4 用不定积分法求解例1中的解析函数 $f(z)$

实部 $u(x, y) = y^3 - 3x^2y$.

解
$$f'(z) = U(z) = u_x - iu_y$$
$$= 3i(x^2 + 2xyi - y^2) = 3iz^2,$$

$$f(z) = \int 3iz^2 dz = iz^3 + c_1,$$

(因为 $f(z)$ 的实部为已知函数, 不可能包含实的任意常数, 所以常数 c_1 为任意纯虚数)

故 $f(z) = i(z^3 + c)$. (c 为任意实常数)



例5 用不定积分法求解例2中的解析函数 $f(z)$

虚部 $v(x, y) = e^x(y \cos y + x \sin y) + x + y.$

解

$$\begin{aligned}
 f'(z) &= V(z) = v_y + i v_x \\
 &= e^x(\cos y - y \sin y + x \cos y) + 1 \\
 &\quad + i[e^x(y \cos y + x \sin y + \sin y) + 1] \\
 &= e^x(\cos y + i \sin y) + i(x + iy)e^x \sin y \\
 &\quad + (x + iy)e^x \cos y + 1 + i
 \end{aligned}$$



$$= e^x (\cos y + i \sin y) + (x + iy)e^x [\cos y + i \sin y] + 1 + i$$

$$= e^{x+iy} + (x + iy)e^{x+iy} + 1 + i$$

$$= e^z + ze^z + 1 + i,$$

$$f(z) = \int V(z)dz = \int (e^z + ze^z + 1 + i)dz$$

$$= ze^z + (1 + i)z + c. \quad (c \text{ 为任意实常数})$$



例6 已知 $u + v = (x - y)(x^2 + 4xy + y^2) - 2(x + y)$,
试确定解析函数 $f(z) = u + iv$.

解 两边同时求导数

$$u_x + v_x = (x^2 + 4xy + y^2) + (x - y)(2x + 4y) - 2,$$

$$u_y + v_y = -(x^2 + 4xy + y^2) + (x - y)(4x + 2y) - 2,$$

$$\text{且 } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

所以上面两式分别相加减可得



$$v_y = 3x^2 - 3y^2 - 2, \quad v_x = 6xy,$$

$$\begin{aligned} f'(z) &= v_y + i v_x = 3x^2 - 3y^2 - 2 + 6xyi \\ &= 3z^2 - 2, \end{aligned}$$

$$f(z) = \int (3z^2 - 2) dz = z^3 - 2z + c(1 - i).$$

(c 为任意实常数)



三、小结与思考

本节我们学习了调和函数的概念、解析函数与调和函数的关系以及共轭调和函数的概念.

应注意的是: 1. 任意两个调和函数 u 与 v 所构成的函数 $u+iv$ 不一定是解析函数.

2. 满足柯西—黎曼方程 $u_x = v_y, v_x = -u_y$ 的 v 称为 u 的共轭调和函数, u 与 v 注意的是地位不能颠倒.



作业

P102, 23, 24, 28, 30 (1、3)

