2024年春季（1-18周）， F207 周一8:00-9:40

（1-9周）F207周三8：00-9：40

复变函数

朱炬波 13973168169
zhujubo@mail.sysu.edu.cn

第一章　复数与复变函数

第五节　复变函数

- 一、复变函数的定义
- 二、映射的概念
- 三、典型例题
- 四、小结

一、复变函数的定义

1.复变函数的定义:

设 G 是一个复数 $z=x+iy$ 的集合.如果有一个确定的法则存在,按这个法则,对于集合 G 中的每一个复数 z,就有一个或几个复数 $w=u+iv$ 与之对应,那末称复变数 w 是复变数 z 的函数(简称复变函数),记作 $w=f(z)$.

2.单(多)值函数的定义:

如果 z 的一个值对应着一个 w 的值,那末我们称函数 $f(z)$ 是单值的.

如果 z 的一个值对应着两个或两个以上 w 的值,那末我们称函数 $f(z)$ 是多值的.

3.定义集合和函数值集合:

集合 G 称为 $f(z)$ 的定义集合(定义域);

对应于 G 中所有 z 的一切 w 值所成的集合 G^*,称为函数值集合.

4. 复变函数与自变量之间的关系:

复变函数 w 与自变量 z 之间的关系 $w = f(z)$

相当于两个关系式:

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y),$$

它们确定了自变量为 x 和 y 的两个二元实变函数.

例如, 函数 $w = z^2$, 令 $z = x + iy$, $w = u + iv$,

则 $u + iv = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$,

于是函数 $w = z^2$ 对应于两个二元实变函数:

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy.$$

二、映射的概念

1. 引入:

对于复变函数,由于它反映了两对变量 u,v 和 x,y 之间的对应关系,因而无法用同一平面内的几何图形表示出来,必须看成是两个复平面上的点集之间的对应关系.

2.映射的定义:

如果用z平面上的点表示自变量z的值,而用另一个平面w平面上的点表示函数w的值,那末函数$w=f(z)$在几何上就可以看作是把z平面上的一个点集G(定义集合)变到w平面上的一个点集G^*(函数值集合)的映射(或变换).

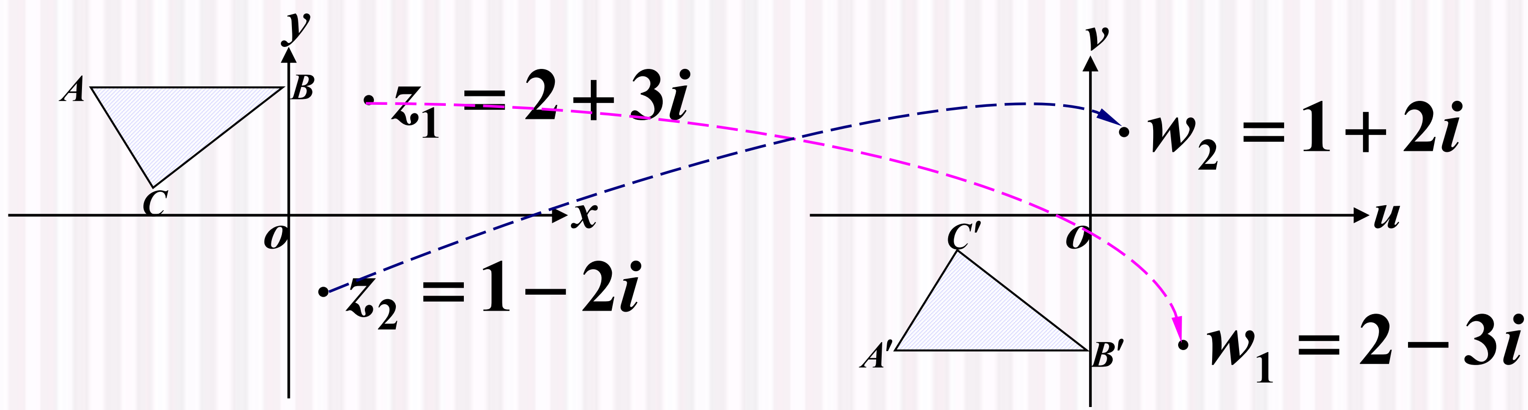
这个映射通常简称为由函数 $w = f(z)$ 所构成的映射.

如果 G 中的点 z 被映射 $w = f(z)$ 映射成 G^* 中的点 w, 那末 w 称为 z 的象 (映象), 而 z 称为 w 的原象.

3. 两个特殊的映射:

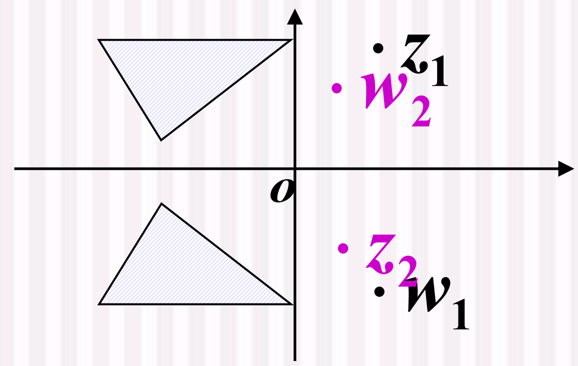
(1) 函数 $w=\bar{z}$ 构成的映射.

将 z 平面上的点 $z=a+ib$ 映射成 w 平面上的点 $w=a-ib$.

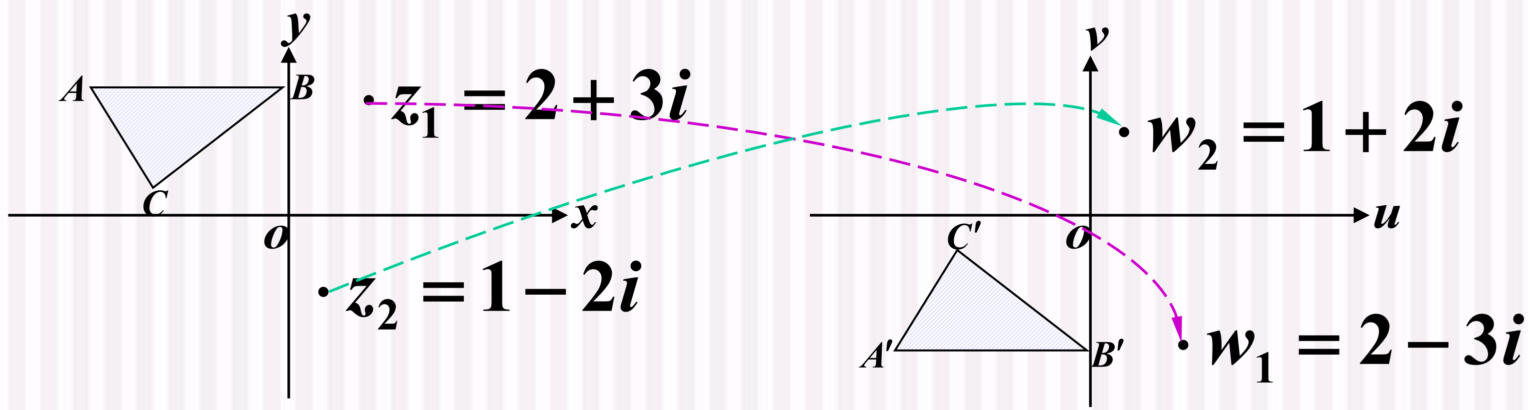


$z_1 \to w_1$, $z_2 \to w_2$, $\Delta ABC \to \Delta A'B'C'$.

如果把 z 平面和 w 平面重叠在一起,不难看出 $w=\bar{z}$ 是关于实轴的一个对称映射.



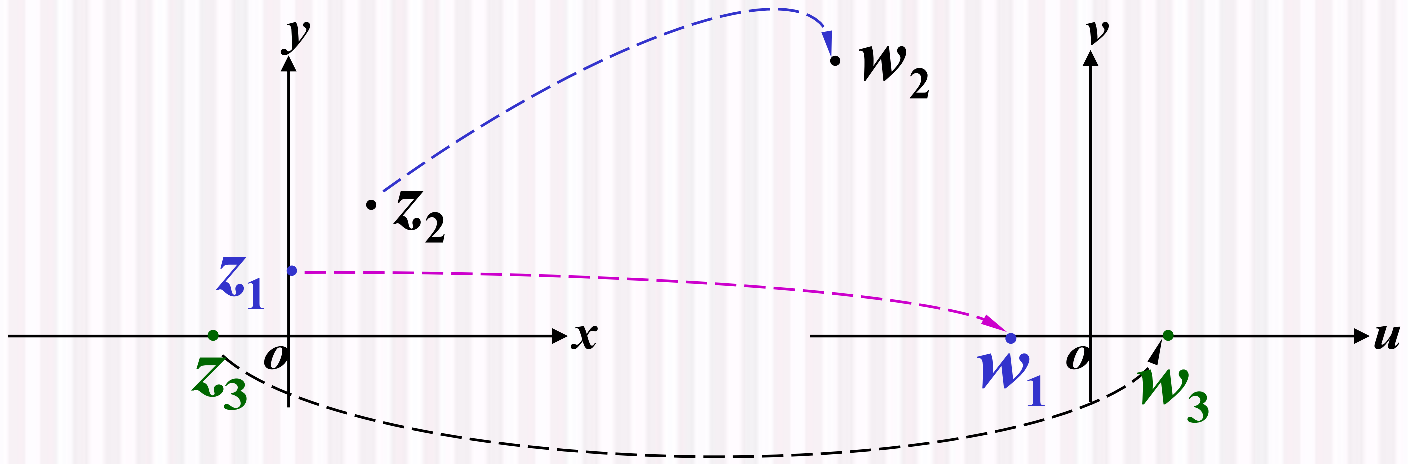
且是全同图形.



$z_1 \to w_1,\quad z_2 \to w_2,\qquad \Delta ABC \to \Delta A'B'C'.$

(2) 函数 $w=z^2$ 构成的映射.

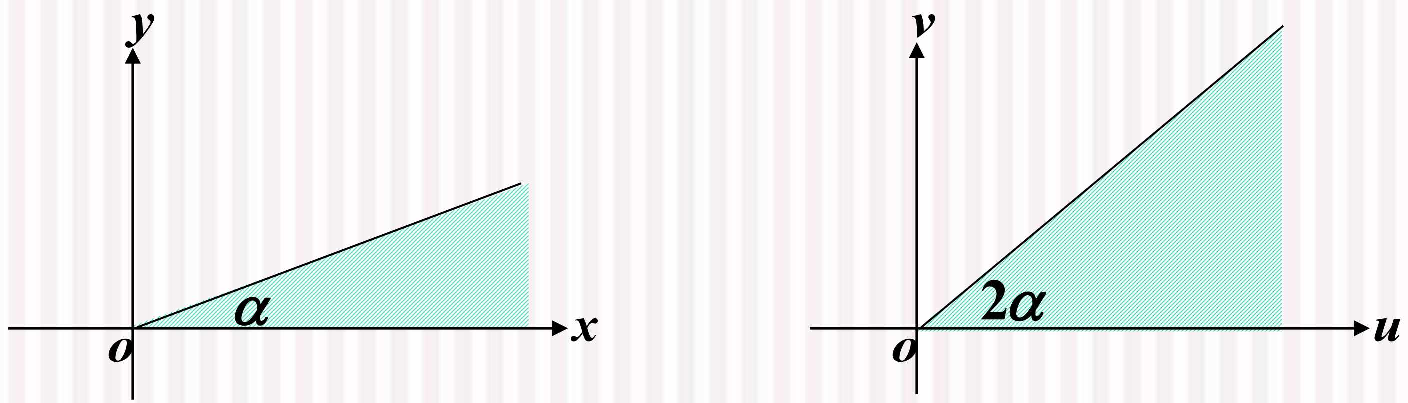
显然将 z 平面上的点 $z_1=i, z_2=1+2i, z_3=-1$ 映射成 w 平面上的点 $w_1=-1, w_2=-3+4i, w_3=1.$



(2) 函数 $w = z^2$ 构成的映射.

根据复数的乘法公式可知,

映射 $w = z^2$ 将 z 的辐角增大一倍.



将 z 平面上与实轴交角为 α 的角形域映射成 w 平面上与实轴交角为 2α 的角形域.

(2) 函数 $w=z^2$ 构成的映射.

函数 $w=z^2$ 对应于两个二元实变函数:

$$u=x^2-y^2,\quad v=2xy.$$

它把 z 平面上的两族分别以直线 $y=\pm x$ 和坐标轴为渐近线的等轴双曲线

$$x^2-y^2=c_1,\quad 2xy=c_2,$$

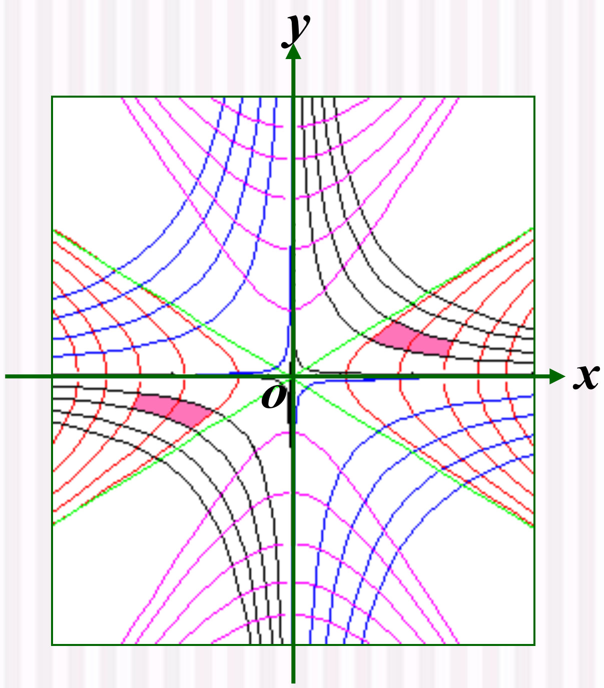
分别映射成 w 平面上的两族平行直线

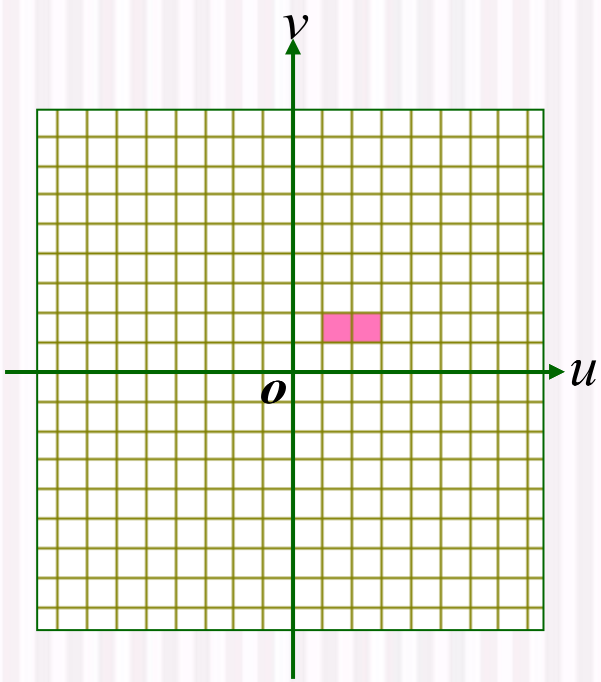
$$u=c_1,\quad v=c_2.$$

(如下页图)

(2) 函数 $w = z^2$ 构成的映射.

将第一图中两块阴影部分映射成第二图中同一个长方形.





(2) 函数 $w = z^2$ 构成的映射.

直线 $x = \lambda$ 的象的参数方程为:

$$u = \lambda^2 - y^2, \quad v = 2\lambda y. \quad (y\text{为参数})$$

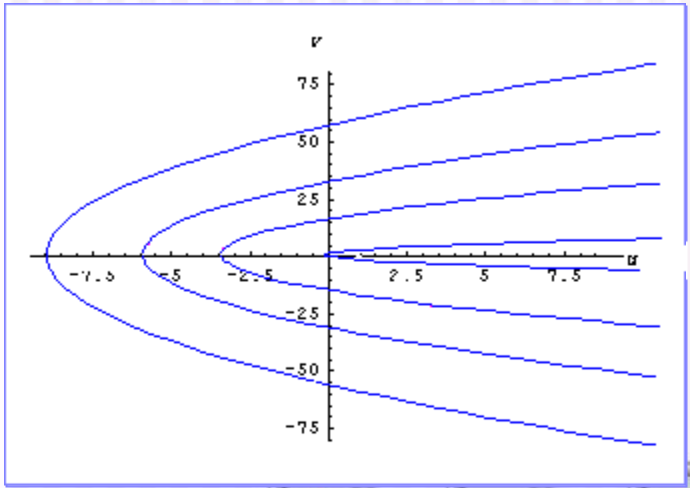
消去参数 y 得: $\quad v^2 = 4\lambda^2(\lambda^2 - u)$,

以原点为焦点,开口向左的抛物线.(图中红色曲线)

同理直线 $y = \mu$ 的象为:

$$v^2 = 4\mu^2(\mu^2 + u),$$

以原点为焦点,开口相右的抛物线.(图中蓝色曲线)



4. 反函数的定义:

设 $w=f(z)$ 的定义集合为 z 平面上的集合 G, 函数值集合为 w 平面上的集合 G^*, 那末 G^* 中的每一个点 w 必将对应着 G 中的一个(或几个)点. 于是在 G^* 上就确定了一个单值(或多值)函数 $z=\varphi(w)$, 它称为函数 $w=f(z)$ 的反函数, 也称为映射 $w=f(z)$ 的逆映射.

根据反函数的定义,

$$\forall w \in G^*, \quad w = f[\varphi(w)],$$

当反函数为单值函数时，$z = \varphi[f(z)],\ z \in G.$

如果函数(映射) $w = f(z)$ 与它的反函数(逆映射) $z = \varphi(w)$ 都是单值的,那末称函数(映射) $w = f(z)$ 是一一对应的.也可称集合 G 与集合 G^* 是一一对应的.

今后不再区别函数与映射.

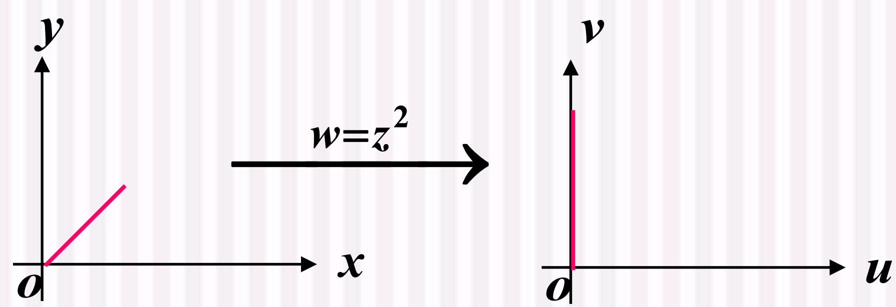
三、典型例题

例1 在映射 $w=z^2$ 下求下列平面点集在 w 平面上的象：

(1) 线段 $0<r<2,\ \theta=\dfrac{\pi}{4}$; 还是线段.

解 设 $z=re^{i\theta}$,

$$w=\rho e^{i\varphi},$$



则 $\rho=r^2,\quad \varphi=2\theta,$

故线段 $0<r<2,\ \theta=\dfrac{\pi}{4}$ 映射为 $0<\rho<4,\ \varphi=\dfrac{\pi}{2},$

例1 对于映射 $w = z + \frac{1}{z}$，求圆周 $|z| = 2$ 的象.

解 令 $z = x + iy,\ w = u + iv,$

映射 $w = z + \frac{1}{z} \Rightarrow u + iv = x + iy + \frac{x - iy}{x^2 + y^2},$

于是 $u = x + \frac{x}{x^2 + y^2},\quad v = y - \frac{y}{x^2 + y^2},$

圆周 $|z| = 2$ 的参数方程为:

$$\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = 2\sin\theta, \end{cases} \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

所以象的参数方程为 $\begin{cases} u = \dfrac{5}{2}\cos\theta \\ v = \dfrac{3}{2}\sin\theta, \end{cases}$ $0 \le \theta \le 2\pi$

表示 w 平面上的椭圆: $\dfrac{u^2}{\left(\dfrac{5}{2}\right)^2} + \dfrac{v^2}{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2} = 1.$

四、小结

复变函数以及映射的概念是本章的一个重点.

注意: 复变函数与一元实变函数的定义完全一样, 只要将后者定义中的“实数”换为“复数”就行了.