函数的极限是序列极限的"连续版本".

$\lim_{x\to a} f(x) = A$ 当且仅当对任意 $x_n \to a$, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

例子. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

另一个重要极限:

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

以及它们的变形:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a \quad (a>0).$$

习题: 求 $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x}$.

记 $y = (1+x)^\alpha - 1$, $1+y = (1+x)^\alpha$,

$\Rightarrow \ln(1+y) = \alpha \ln(1+x)$.

由于 $y \to 0$, $\ln(1+y) \sim y$ (用 $\sim$ 表示等价无穷小量), 故

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{\ln(1+x)}$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{\alpha y}{\ln(1+y)} = \alpha.$$

以上的方法称为"等价无穷小量代换"。它基于如下理由：

若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{h(x)}{g(x)}=1$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{h(x)}\frac{h(x)}{g(x)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{h(x)}.$$

习题： 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}=-\frac{1}{2}$.

$$\frac{\sin x-\tan x}{x^3}=\frac{\sin x(\cos x-1)}{\cos x\cdot x^3}$$

$$=\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\cos x-1}{x^2}$$

我们把式子分开，使得每部分都有(非零的)极限.

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}=1\cdot 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}.$$

求平方根 $\sqrt{a}$

设 $a>0$，取 $x_1>0$，$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)$. 证明

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt{a}.$$

首先，$\sqrt{a}\le\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)=x_{n+1}$.

注意到，

$$x_{n+1}-\sqrt{a} = \frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}-2\sqrt{a}\right)$$
$$= \frac{1}{2x_n}\left(x_n^2-2\sqrt{a}x_n+a\right)$$
$$= \frac{1}{2x_n}\left(x_n-\sqrt{a}\right)^2$$
$$< \frac{1}{2}\left(x_n-\sqrt{a}\right),$$

因此， $x_{n+1}-\sqrt{a} < \frac{1}{2^n}(x_1-\sqrt{a})$. 当 $n\to\infty$ 时，$x_{n+1}\to\sqrt{a}$.

若用 ε_n 表示误差 $x_n-\sqrt{a}$，则 $\varepsilon_{n+1}\approx \frac{1}{\sqrt{a}}\varepsilon_n^2$. 所以，以上是求平方根的快速算法.

Page 64-65

14. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} n(x^{\frac{1}{n}}-1) = \ln x$.

记 $a_n = x^{\frac{1}{n}}-1$，则 $x^{\frac{1}{n}} = 1+a_n$，$\frac{1}{n} = \frac{\ln(1+a_n)}{\ln x}$.

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} n(x^{\frac{1}{n}}-1) = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{n}}$$
$$= \ln x\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\ln(1+a_n)} \quad (a_n\to 0)$$
$$= \ln x.$$

16. 证明: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

利用 $1-\cos x = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$，可得

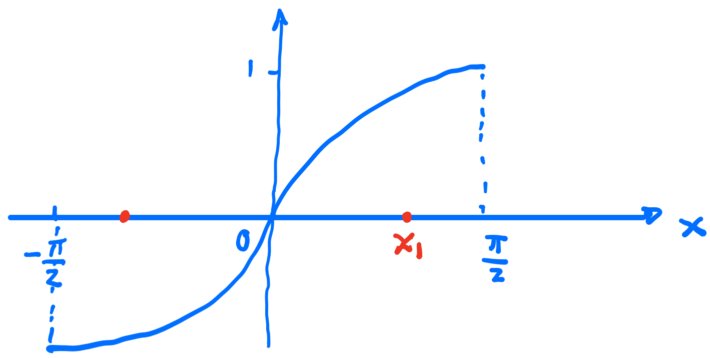
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}.$$

25. 设 $x_{n+1} = \sin x_n$，$x_1 = \sin x_0$. 证明：对于任意 x_0，

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

证明：对任意 x_0，$x_1 = \sin x_0 \in [-1, 1] \subset \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.



不妨设 $0 < x_1 \le 1$，则 $0 < x_{n+1} = \sin x_n < x_n$. 因此，$\{x_n\}$ 单调下降，记

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

由 $\sin x$ 的连续性，$a = \sin a$ $(a<1)$，故 $a = 0$.