



2024年春季 (1-18周) , F207 周一8:00-9:40

(1-9周) F207周三8:00-9:40

# 复变函数

朱炬波 13973168169  
zhujubo@mail.sysu.edu.cn



# 第三节 唯一决定分式线性映射的条件

- 一、分式线性映射的确定
- 二、分式线性映射对圆域的映射
- 三、典型例题
- 四、小结与思考



# 一、分式线性映射的确定

$$\text{分式线性映射 } w = \frac{az + b}{cz + d} \quad (ad - bc \neq 0)$$

含有三个独立的常数,

只需给定三个条件就能决定一个分式线性映射.

**定理** 在 $z$ 平面上任意给定三个相异的点 $z_1, z_2, z_3$ ,  
在 $w$ 平面上也任意给定三个相异的点 $w_1, w_2, w_3$ ,  
那末就存在唯一的分式线性映射, 将 $z_k$  ( $k = 1, 2, 3$ )  
依次映射成 $w_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ).





证 设  $w = \frac{az + b}{cz + d}$  ( $ad - bc \neq 0$ ) 将相异点

$z_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) 依次映射成  $w_k = \frac{az_k + b}{cz_k + d}$  ( $k = 1, 2, 3$ )

$$\text{所以 } w - w_k = \frac{(z - z_k)(ad - bc)}{(cz + d)(cz_k + d)}, \quad (k = 1, 2)$$

$$w_3 - w_k = \frac{(z_3 - z_k)(ad - bc)}{(cz_3 + d)(cz_k + d)}, \quad (k = 1, 2)$$

由此得 
$$\frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}.$$



唯一性:

如果另一映射  $w = \frac{az + b}{cz + d}$  ( $ad - bc \neq 0$ ) 也将

$z_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) 依次映射成  $w_k = \frac{az_k + b}{cz_k + d}$  ( $k = 1, 2, 3$ )

重复上述步骤, 仍得到相同形式的结果.

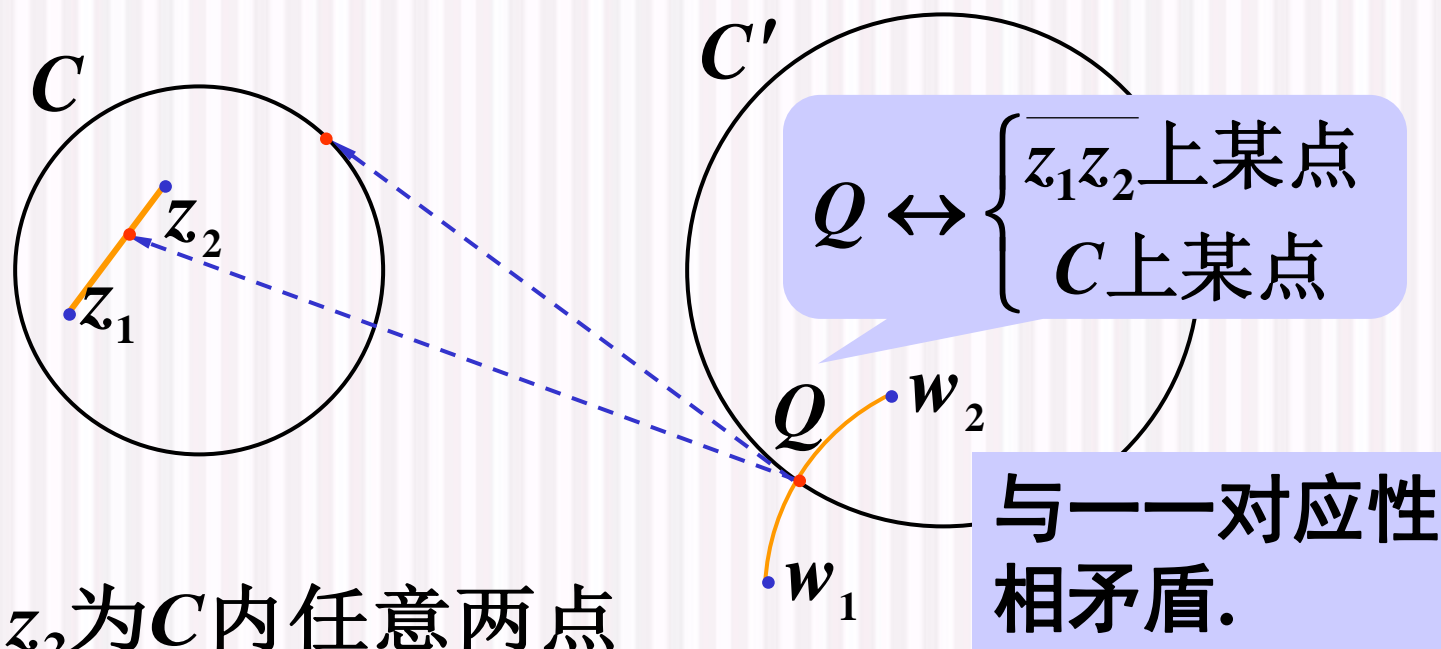
所以三对对应点可唯一确定一个分式线性映射.

[证毕]



## 二、分式线性映射对圆域的映射

### 1. 问题：圆域内部被映射成什么区域？



$z_1, z_2$  为  $C$  内任意两点

假设： $\overline{z_1z_2} \rightarrow$  圆弧  $w_1w_2$ , 且  $w_1$  在  $C'$  外部,  $w_2$  在  $C'$  内部.



**结论:** 在分式线性映射下,  $C$  的内部不是映射成  $C'$  的内部便映射成  $C'$  的外部.

**判别方法:**

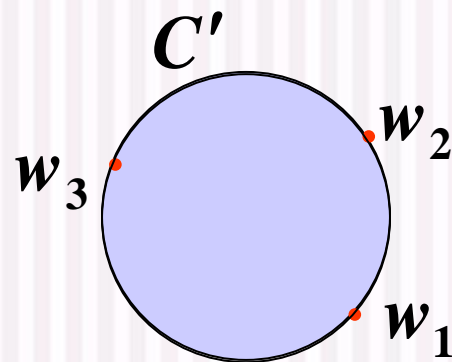
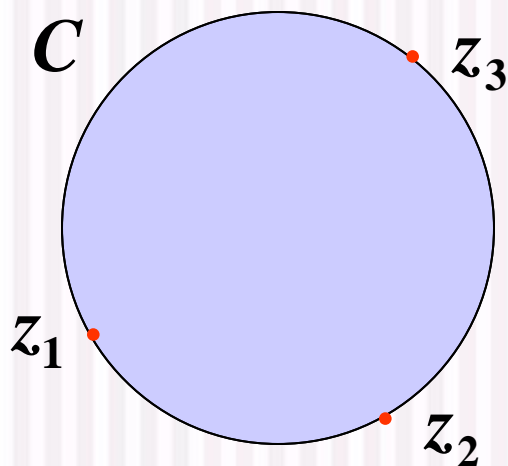
**方法1** 在分式线性映射下, 如果在圆周  $C$  内任取一点  $z_0$ , 若  $z_0$  的象在  $C'$  内部, 则  $C$  的内部就映为  $C'$  的内部; 若  $z_0$  的象在  $C'$  外部, 则  $C$  的内部就映为  $C'$  的外部.



**方法2** 在  $C$  上取三点  $z_1, z_2, z_3$ , 若绕向:

$z_1 \rightarrow z_2 \rightarrow z_3$ , 与  $C'$  上绕向  $w_1 \rightarrow w_2 \rightarrow w_3$  相同.

则  $C$  的内部就映为  $C'$  的内部.

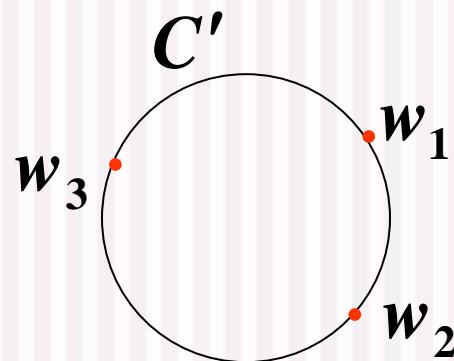
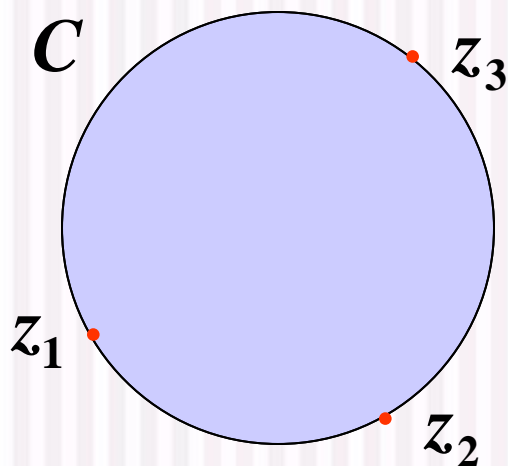




**方法2** 在  $C$  上取三点  $z_1, z_2, z_3$ , 若绕向:

$z_1 \rightarrow z_2 \rightarrow z_3$ , 与  $C'$  上绕向  $w_1 \rightarrow w_2 \rightarrow w_3$  相同.

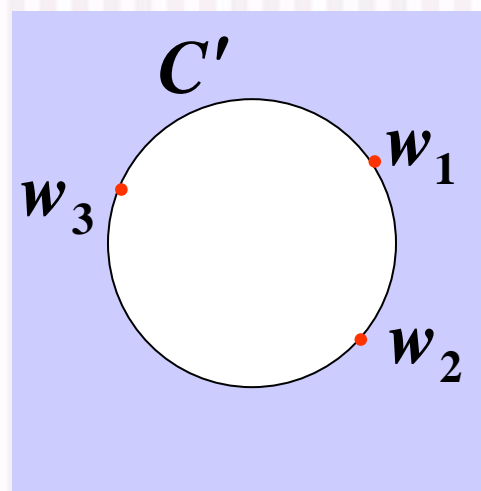
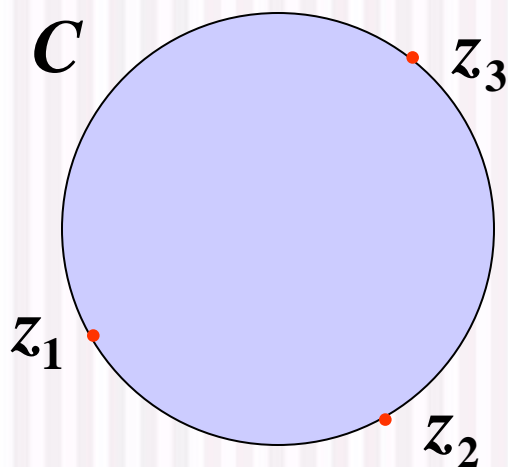
则  $C$  的内部就映为  $C'$  的内部. 若绕向相反, 则  $C$  的内部就映射为  $C'$  的外部.



**方法2** 在  $C$  上取三点  $z_1, z_2, z_3$ , 若绕向:

$z_1 \rightarrow z_2 \rightarrow z_3$ , 与  $C'$  上绕向  $w_1 \rightarrow w_2 \rightarrow w_3$  相同.

则  $C$  的内部就映为  $C'$  的内部. 若绕向相反, 则  $C$  的内部就映射为  $C'$  的外部.



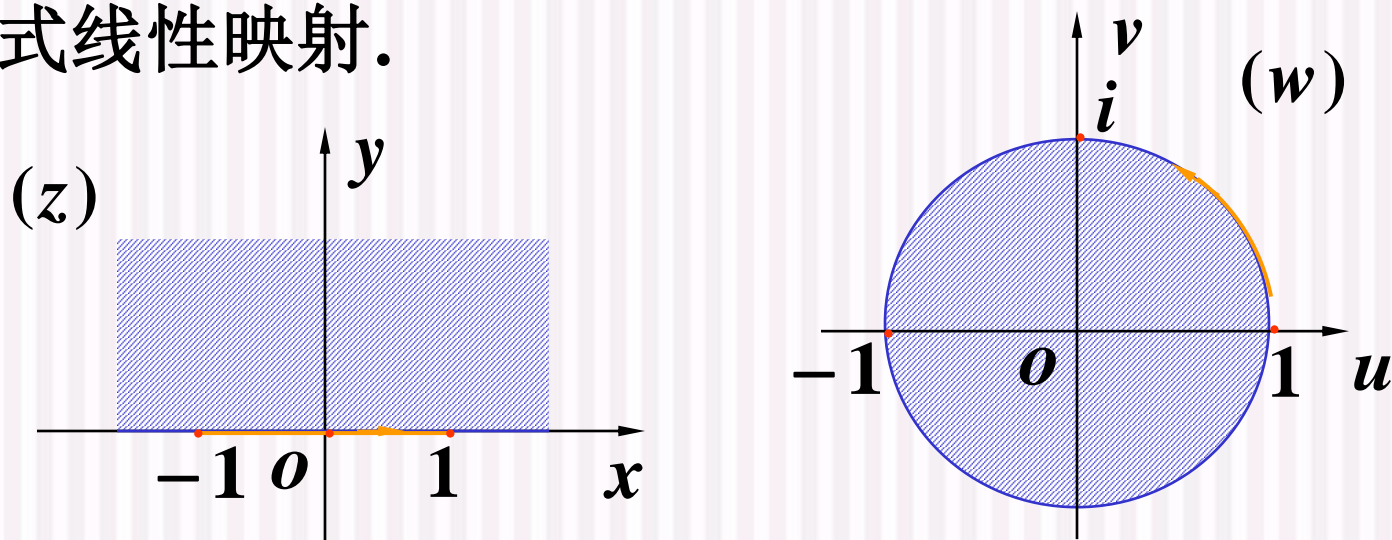
## 2.分式线性映射对圆弧边界区域的映射:

- 1) 当二圆周上没有点映射成无穷远点时, 这二圆周的弧所围成的区域映射成二圆弧所围成的区域.
- 2) 当二圆周上有一点映射成无穷远点时, 这二圆周的弧所围成的区域映射成一圆弧与一直线所围成的区域.
- 3) 当二圆交点中的一个映射成无穷远点时, 这二圆周的弧所围成的区域映成角形区域.



### 三、典型例题

例1 求将上半平面  $\text{Im}(z) > 0$  映射成单位圆  $|w| < 1$  的分式线性映射.



解 在  $x$  轴上任取三点  $z_1 = -1, z_2 = 0, z_3 = 1$  使之依次对应于  $|w| = 1$  上的三点  $w_1 = 1, w_2 = i, w_3 = -1$



由于  $z_1 \rightarrow z_2 \rightarrow z_3$  与  $w_1 \rightarrow w_2 \rightarrow w_3$  绕向相同,

所求分式线性映射为  $\frac{w-1}{w-i} : \frac{-1-1}{-1-i} = \frac{z+1}{z-0} : \frac{1+1}{1-0},$

化简得:  $w = \frac{z-i}{iz-1}.$

**注意:** 本题中如果选取其他三对不同点, 也能得出满足要求但不同于本题结果的分式线性映射.

可见, 把上半平面映射成单位圆的分式线性映射不唯一, 有无穷多个.

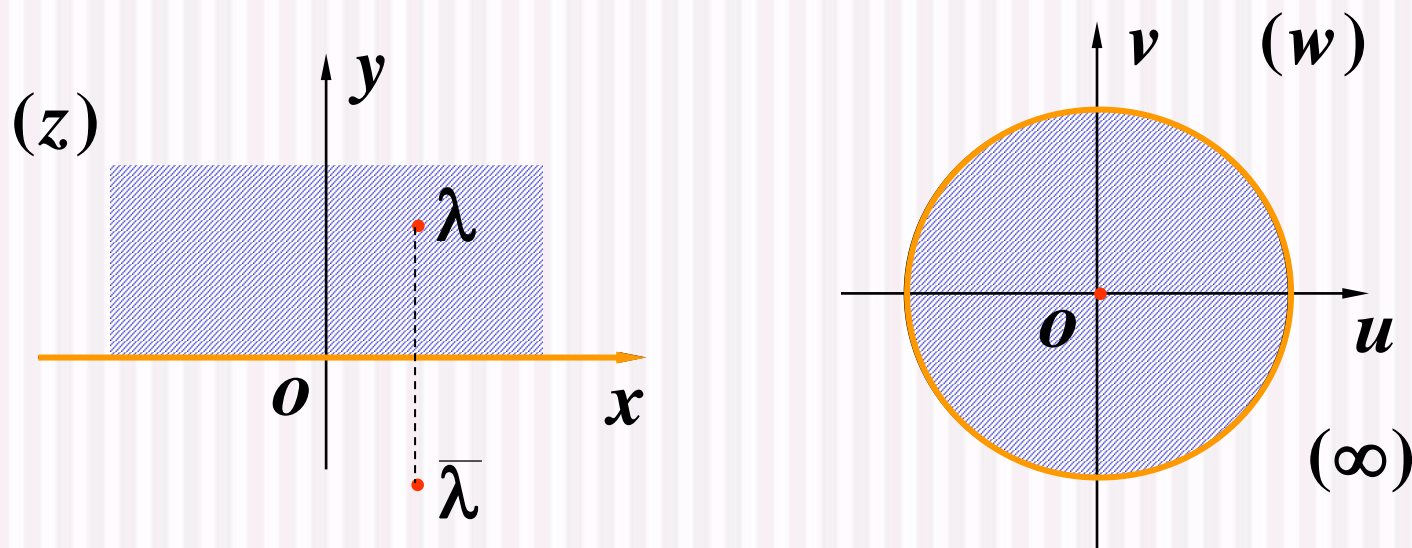




另解：设实轴映射成单位圆周，

上半平面某点  $z = \lambda$  映射成圆心  $w = 0$

那么  $z = \bar{\lambda}$  必映射成  $w = \infty$



则所求映射具有下列形式： $w = k \left( \frac{z - \lambda}{z - \bar{\lambda}} \right)$   $k$  为常数。



由于 $z$ 为实数时,  $|w| = 1$ ,  $\left| \frac{z - \lambda}{z - \bar{\lambda}} \right| = 1$ ,

所以  $|w| = |k| \left| \frac{z - \lambda}{z - \bar{\lambda}} \right| = |k| = 1$ , 即  $k = e^{i\theta}$  ( $\theta$ 为任意实数).

$$w = e^{i\theta} \left( \frac{z - \lambda}{z - \bar{\lambda}} \right), \quad (\text{Im}(\lambda) > 0)$$

上半平面映为单位圆的分式线性映射的一般形式

说明: 取  $\lambda = i, \theta = -\frac{\pi}{2}$ , 得  $w = \frac{z - i}{iz - 1}$ .

若取  $\lambda = i, \theta = 0$ , 得  $w = \frac{z - i}{z + i}$ .



**例2** 求将上半平面  $\text{Im}(z) > 0$  映射成单位圆  $|w| < 1$ , 且满足条件  $w(2i) = 0$ ,  $\arg w'(2i) = 0$  的分式线性映射.

**解** 由条件  $w(2i) = 0$  知:

$z = 2i$  映射成  $w = 0$ .

依上题结论得  $w = e^{i\theta} \left( \frac{z - 2i}{z + 2i} \right),$



因为  $w'(z) = e^{i\theta} \frac{4i}{(z+2i)^2},$

所以  $w'(2i) = e^{i\theta} \left(-\frac{i}{4}\right).$

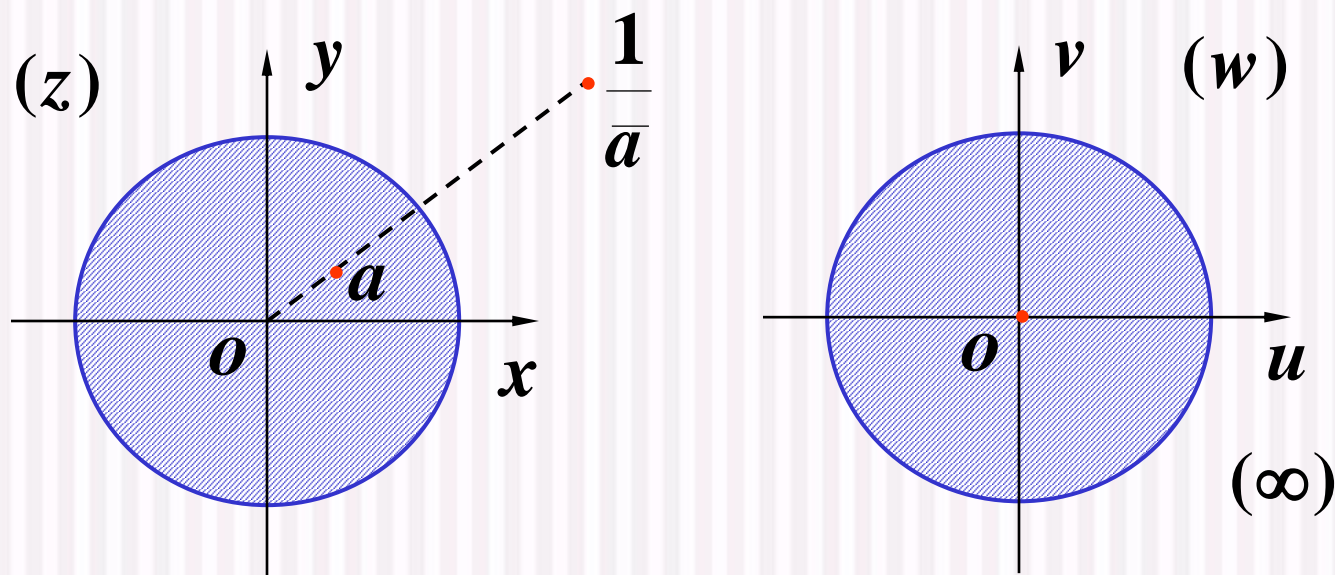
$$\begin{aligned}\arg w'(2i) &= \arg e^{i\theta} + \arg\left(-\frac{i}{4}\right) \\ &= \theta + \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0,\end{aligned}$$

所以  $\theta = \frac{\pi}{2}.$

从而所求映射为  $w = i\left(\frac{z-2i}{z+2i}\right).$



例3 求将单位圆  $|z| < 1$  映射成单位圆  $|w| < 1$  的分式线性映射.



解 设  $z = a \rightarrow w = 0$ , 则  $z = \frac{1}{\bar{a}} \rightarrow w = \infty$ .





因此可设所求分式线性映射为：

$$\begin{aligned}w &= k \frac{z-a}{z-\frac{1}{\bar{a}}} = k\bar{a} \frac{z-a}{\bar{a}z-1} \\&= k' \frac{z-a}{1-\bar{a}z}, \quad (k' = -k\bar{a})\end{aligned}$$

$$\text{因为 } |z|=1 \leftrightarrow |w|=1, \quad |w| = |k'| \left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right|,$$

$$\text{所以 } |w| = |k'| \left| \frac{1-a}{1-\bar{a}} \right| = 1.$$



又因为  $|1-a| = |1-\bar{a}|$ ,

所以  $|k'| = 1$ , 即  $k' = e^{i\theta}$ .

故所求分式线性映射为:

$$w = e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \quad (\theta \text{ 为任意实数})$$

将单位圆映为单位圆的常用映射



例4 求将单位圆映射为单位圆且满足条件  $w\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ ,

$w'\left(\frac{1}{2}\right) > 0$  的分式线性映射.

解 由条件  $w\left(\frac{1}{2}\right) = 0$  知:

$z = \frac{1}{2}$  映射成  $w = 0$ .

依上题结论得  $w = e^{i\theta} \frac{2z - 1}{2 - z}$ .



由此得  $w'\left(\frac{1}{2}\right) = e^{i\theta} \frac{4}{3},$

故  $\arg w'\left(\frac{1}{2}\right) = \theta.$

因为  $w'\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ , 则  $w'\left(\frac{1}{2}\right)$  为正实数, 得  $\theta = 0.$

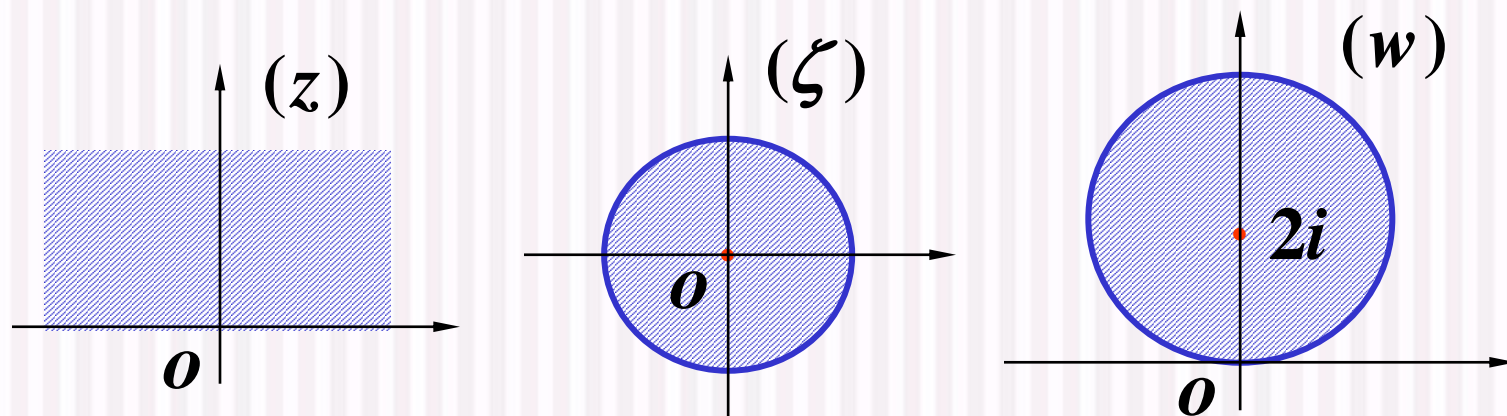
所以所求映射为  $w = \frac{2z-1}{2-z}.$



例5 求将  $\text{Im}(z) > 0$  映射成  $|w - 2i| < 2$  且满足条件

$$w(2i) = 2i, \arg w'(2i) = -\frac{\pi}{2} \text{ 的分式线性映射.}$$

分析 为将  $\text{Im}(z) > 0$  映射成  $|w - 2i| < 2$  可考虑:



上半平面  
 $\text{Im}(z) > 0$



单位圆域  
 $|\zeta| < 1$

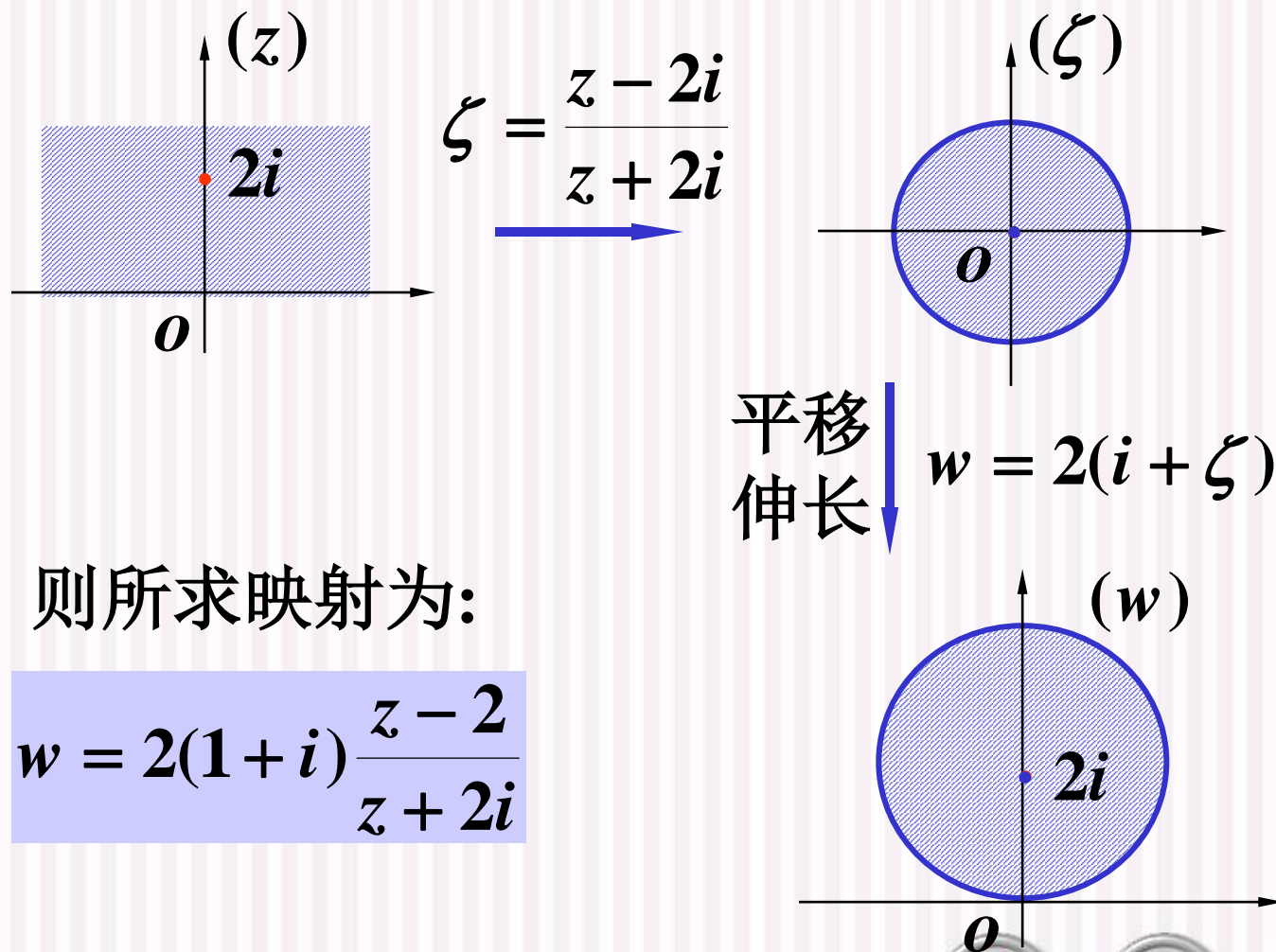


单位圆域  
 $|w - 2i| < 2$





解 如图示

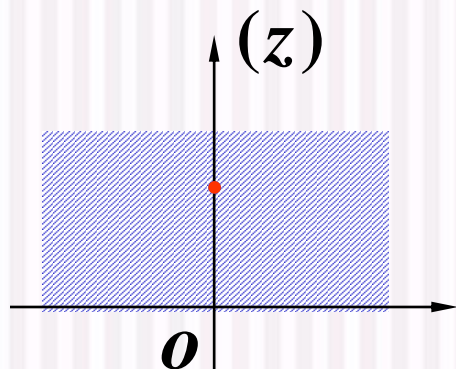


则所求映射为:

$$w = 2(1 + i) \frac{z - 2i}{z + 2i}$$

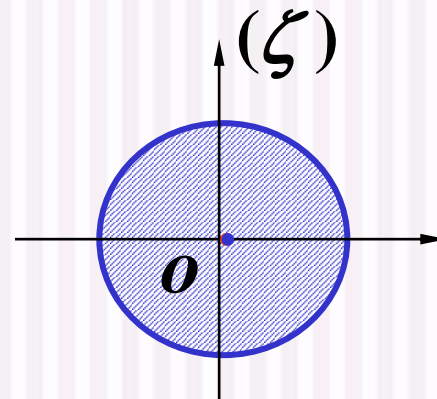


另解 如图示:



$$\zeta = e^{i\theta} \frac{z - 2i}{z + 2i}$$

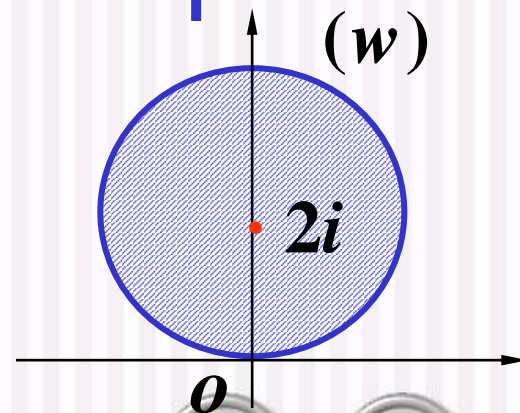
$$\zeta(2i) = 0$$



所以 
$$\frac{w - 2i}{2} = e^{i\theta} \frac{z - 2i}{z + 2i}$$

由此得 
$$w'(2i) = 2e^{i\theta} \frac{1}{4i}.$$

$$\zeta = \frac{w - 2i}{2}$$



$$\arg w'(2i) = \theta - \frac{\pi}{2},$$

$$\text{由于已知 } w'(2i) = -\frac{\pi}{2},$$

从而得  $\theta = 0$ .

$$\text{于是所求的映射为 } \frac{w - 2i}{2} = \frac{z - 2i}{z + 2i},$$

$$\text{或 } w = 2(1 + i) \frac{z - 2i}{z + 2i}.$$



## 四、小结与思考

分式线性映射是共形映射的一个重要内容，应熟练掌握并会应用分式线性映射的各种性质寻找一些简单而典型的区域之间的共形映射；掌握上半平面到上半平面，上半平面到单位圆，单位圆到单位圆的分式线性映射。



## 思考题

在求分式线性映射时,如果在三对点中出现 $\infty$ ,应该怎么办?





## 思考题答案

将含有  $\infty$  的因式用数字 1 代替.

作业：P246, 15、16 (1、2)、18

