机器人原理课程

2. 空间描述和变换b

部分课件来自于台湾大学 林沛群 教授 “机器人学导论”课程课件，在此表示感谢！

王久珂

wangjk57@mail.sysu.edu.cn

空间描述和变换

- 在前一小节中，已经介绍了三种表示姿态的常用方法：XYZ 固定角、ZYX欧拉角和ZYZ 欧拉角。
- 每个表示法均需要按一定顺序进行绕主轴的三个旋转。这些表示法是24 种表示法中的典型方法，且都被称作转角排列设定法。
- 其中，12 种为固定角设定法,另12 种为欧拉角设定法。注意到由于二者的对偶性，对于绕主轴连续旋转的旋转矩阵实际上只有12 种唯一的参数设定法。
- **没有特别的理由优先采用何种表示法**，不同作者可以采用不同的表示法，所以把所有24 种设定法的等效旋转矩阵列出来是有用的。
- 附录B（在本书后面）给出了所有24 种设定法的等效旋转矩阵。

空间描述和变换

- 旋转矩阵是一种特殊的各列相互正交的单位阵。
- 旋转矩阵的行列式恒为+1。
- 旋转矩阵也可被称为标准正交阵，“标准”是指其行列式的值为 $+1$
- 正交阵的凯莱公式： 对于任何正交阵 R 存在一个反对称阵 S, 满足

$$R = (I_3 - S)^{-1}(I_3 + S)$$

- 三维反对称阵（即 $S = -S^{\mathrm{T}}$）可由 3 个参数 (s_x， s_y， s_z)表示为

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -s_z & s_y \\ s_z & 0 & -s_x \\ -s_y & s_x & 0 \end{bmatrix}$$

- 因此，可直接得出结论，任何 3X3 旋转矩阵可用 3 个参数确定。

空间描述和变换

- 假定 R 为 3 列：

$$R = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$$

- 这 3 个矢量是在参考坐标系中的某坐标系的单位轴。每个矢量都是单位矢量，且相互垂直。
- 所以 9 个矩阵元素有 6 个约束：

$$|\boldsymbol{x}| = 1$$
$$|\boldsymbol{y}| = 1$$
$$|\boldsymbol{z}| = 1$$
$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = 0$$
$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{z} = 0$$
$$\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{z} = 0$$

空间描述和变换

- 一个等效角度 -轴线表示法的例子：

符号 $Rx(30.0)$表示绕一个给定轴 $\boldsymbol{x}$旋转 30 度的姿态描述。

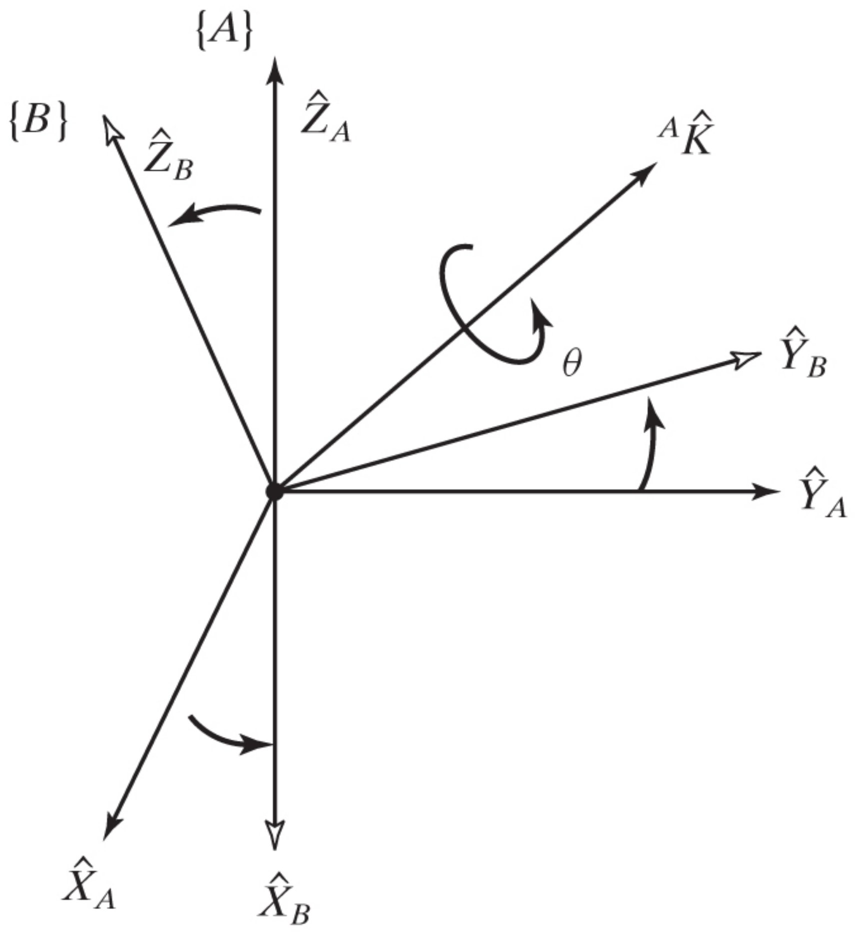
- 如果轴的方向是一般方向（而不是主轴方向），任何姿态都可通过选择适当的轴和角度来得到。坐标系{B}的表示法如下：

1. 首先将坐标系{B}和一个已知的参考坐标系{A}重合
2. 将{B}绕矢量 ${}^{A}\mathbf{k}$按右手定则转 θ角。

空间描述和变换

- {B}相对于{A}的一般姿态可用 ${}^{A}_{B}R(\boldsymbol{k},\theta)$或$R_K(\theta)$来表示，并称作等效角度-轴线表示
- 确定矢量a点 只需要两个参数，因为它的长度恒为 1。角度确定了第三个参数
- 经常用旋转量θ乘以单位方向矢量 $\boldsymbol{k}$ 形成一个简单的 3×1 的矢量来描述姿态，用 $\boldsymbol{k}$ 表示

空间描述和变换



- 当选择{A}的主轴中的一个轴作为旋转轴时，则等效旋转矩阵成为我们熟悉的平面旋转矩阵：

$$R_X(\theta)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

$$R_Y(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & \sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta\end{bmatrix}$$

$$R_Z(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

空间描述和变换

- 如果旋转轴为一般轴，则等效旋转矩阵为:

$$R_K(\theta)=\begin{bmatrix} k_xk_xv\theta+c\theta & k_xk_yv\theta-k_zs\theta & k_xk_zv\theta+k_ys\theta \\ k_xk_yv\theta+k_zs\theta & k_xk_yv\theta+c\theta & k_yk_zv\theta-k_xs\theta \\ k_xk_zv\theta-k_ys\theta & k_yk_zv\theta+k_xs\theta & k_zk_zv\theta+c\theta \end{bmatrix}$$

式中，$c\theta=\cos\theta, s\theta=\sin\theta, v\theta=1-\cos\theta$,${}^{A}\boldsymbol{k}=(k_xk_yk_z)^{\mathrm{T}}$。θ的符号由右手定则确定， 即大拇指指向 ${}^{A}\boldsymbol{k}$的正方向。

- 上式将角度一轴线表示转变成旋转矩阵表示。

空间描述和变换

- 从一个给定的旋转矩阵求出 k 和 θ
- 如果

$$ {}^{A}_{B}R_{K}(\theta) = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} $$

然后

$$ \theta = A\cos\left(\frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2}\right) $$

并且

$$ \hat{K} = \frac{1}{2\sin\theta} \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix} $$

欧拉参数

- 另一种姿态表示法是通过 4 个数值来表示的，称为欧拉参数
- 根据等效旋转轴$\boldsymbol{k} = (k_x, k_y, k_z)^{\mathrm{T}}$和等效旋转角 。得到欧拉参数如下

$$\varepsilon 1 = k_x \sin\frac{\theta}{2}$$

$$\varepsilon 2 = k_y \sin\frac{\theta}{2}$$

$$\varepsilon 3 = k_z \sin\frac{\theta}{2}$$

$$\varepsilon 4 = \cos\frac{\theta}{2}$$

- 这 4 个参数是不独立的。

$$\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2 = 1$$

- 这个关系总是保持不变。因此，姿态可以看作是四维空间中单位超球面上的一点。

空间描述和变换

- 欧拉参数可被视为一个单位四元数。

欧拉参数组表示的旋转矩阵R_ϵ是

$$R_\epsilon = \begin{bmatrix} 1-2\varepsilon_2^2-2\varepsilon_3^2 & 2(\varepsilon_1\varepsilon_2-\varepsilon_3\varepsilon_4) & 2(\varepsilon_1\varepsilon_3+\varepsilon_2\varepsilon_4) \\ 2(\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_3\varepsilon_4) & 1-2\varepsilon_1^2-2\varepsilon_3^2 & 2(\varepsilon_2\varepsilon_3-\varepsilon_1\varepsilon_4) \\ 2(\varepsilon_1\varepsilon_3-\varepsilon_2\varepsilon_4) & 2(\varepsilon_2\varepsilon_3+\varepsilon_1\varepsilon_4) & 1-2\varepsilon_1^2-2\varepsilon_2^2 \end{bmatrix}$$

空间描述和变换

- 给定旋转矩阵. 得到对应的欧拉参数是

$$\varepsilon 1=\frac{r_{32}-r_{23}}{4\boldsymbol{\varepsilon}_4}$$

$$\varepsilon_2=\frac{r_{13}-r_{31}}{4\boldsymbol{\varepsilon}_4}$$

$$\varepsilon 3=\frac{r_{21}-r_{12}}{4\varepsilon_4}$$

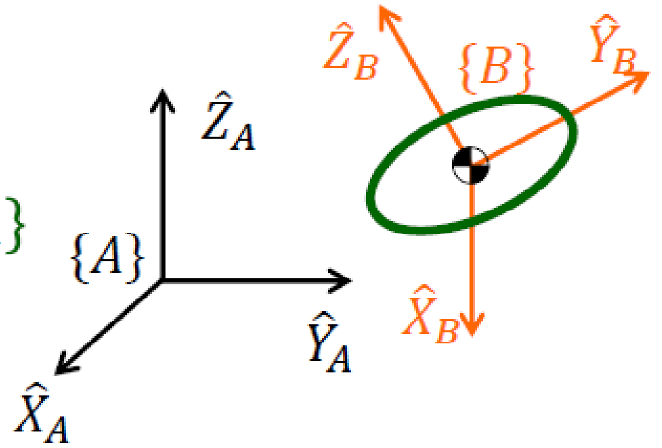
$$\varepsilon 4=\frac{1}{2}\sqrt{1+r_{11}+r_{22}+r_{33}}$$

从数值计算的角度来讲，如果旋转矩阵表示的是绕某一轴旋转 180°, 式4将失去意义，因为 ε4 =0。

空间描述和变换

- 「導讀-3」的問題：該如何整合表達剛體的狀態？
- ⇨在剛體(Rigid body)上建立frame，常建立在質心上
  - 移動：由body frame 的原點位置判定

$$ {}^{A}P_{B\,org} = \begin{bmatrix} P_{B\,x} \\ P_{B\,y} \\ P_{B\,z} \end{bmatrix} = \text{origin of } \{B\} \text{ represented in } \{A\} $$



  - 轉動：由body frame的姿態判定

$$ {}^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} \hat{X}_B \cdot \hat{X}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{X}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{X}_A \\ \hat{X}_B \cdot \hat{Y}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{Y}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{Y}_A \\ \hat{X}_B \cdot \hat{Z}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{Z}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{Z}_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ {}^{A}\hat{X}_B & {}^{A}\hat{Y}_B & {}^{A}\hat{Z}_B \\ | & | & | \end{bmatrix} $$

  - 彙整後：

$$ \{B\} = \{ {}^{A}_{B}R,\ {}^{A}P_{B\,org} \} $$

但無法進行量化計算

空间描述和变换

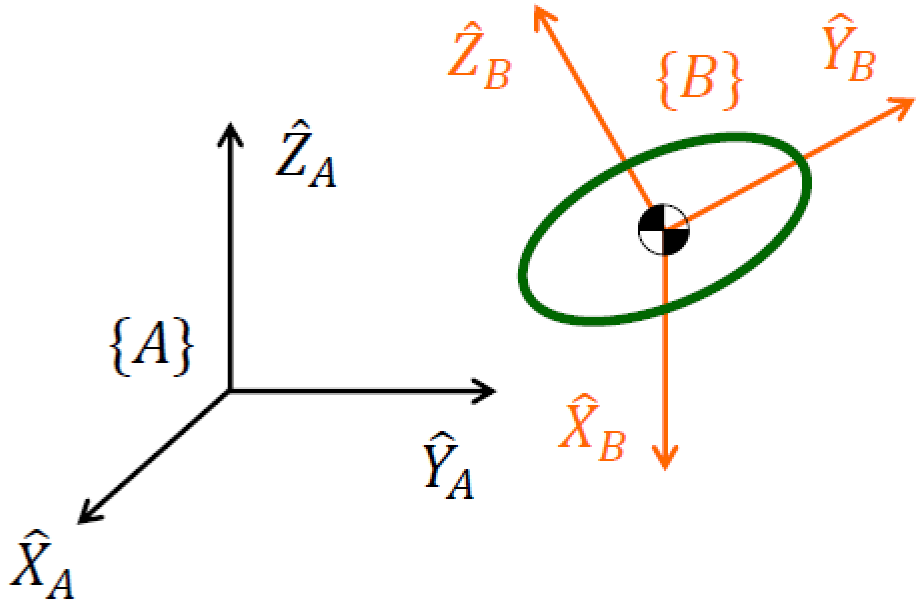
- 如何將移動和轉動整合在一起描述？

⇨ Homogeneous transformation matrix

$$\left[\begin{array}{ccc|c} & {}^{A}_{B}R_{3\times 3} & & {}^{A}P_{B\,org\,3\times 1} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]_{4\times 4}$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} | & | & | & | \\ {}^{A}\hat{X}_{B} & {}^{A}\hat{Y}_{B} & {}^{A}\hat{Z}_{B} & {}^{A}P_{B\,org} \\ | & | & | & | \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$= {}^{A}_{B}T$$



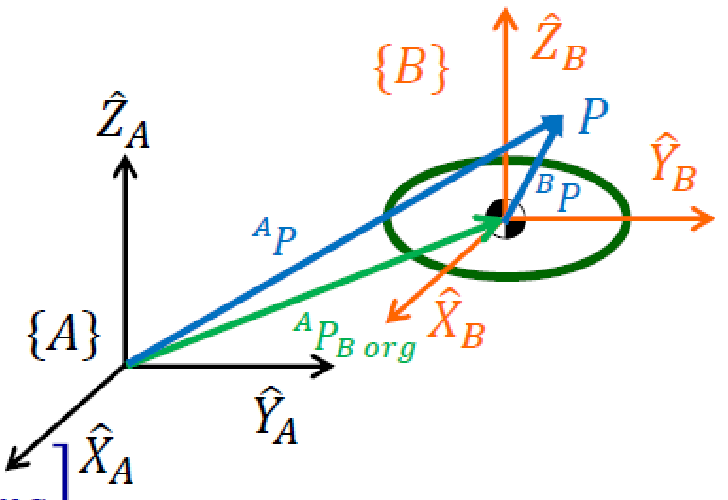
空间描述和变换

- 以Mapping，轉換向量（或點）之座標系的方式來確認${}^{A}_{B}T$運算之正確性

  - 僅有 移動

$${}^{A}P_{3\times 1} = {}^{B}P_{3\times 1} + {}^{A}P_{B\,org\ 3\times 1}$$

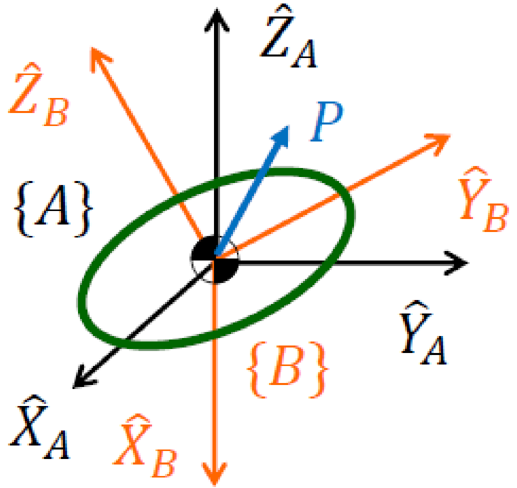
$$\begin{bmatrix} {}^{A}P \\ 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:c} & I_{3\times 3} & & {}^{A}P_{B\,org} \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} {}^{B}P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{B}P + {}^{A}P_{B\,org} \\ 1 \end{bmatrix}$$



  - 僅有 轉動

$${}^{A}P_{3\times 1} = \underset{3\times 3}{{}^{A}_{B}R}\, {}^{B}P_{3\times 1}$$

$$\begin{bmatrix} {}^{A}P \\ 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:c} & & & 0 \\ & {}^{A}_{B}R & & 0 \\ & & & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} {}^{B}P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{A}_{B}R\, {}^{B}P \\ 1 \end{bmatrix}$$



空间描述和变换

- 移動和轉動複合

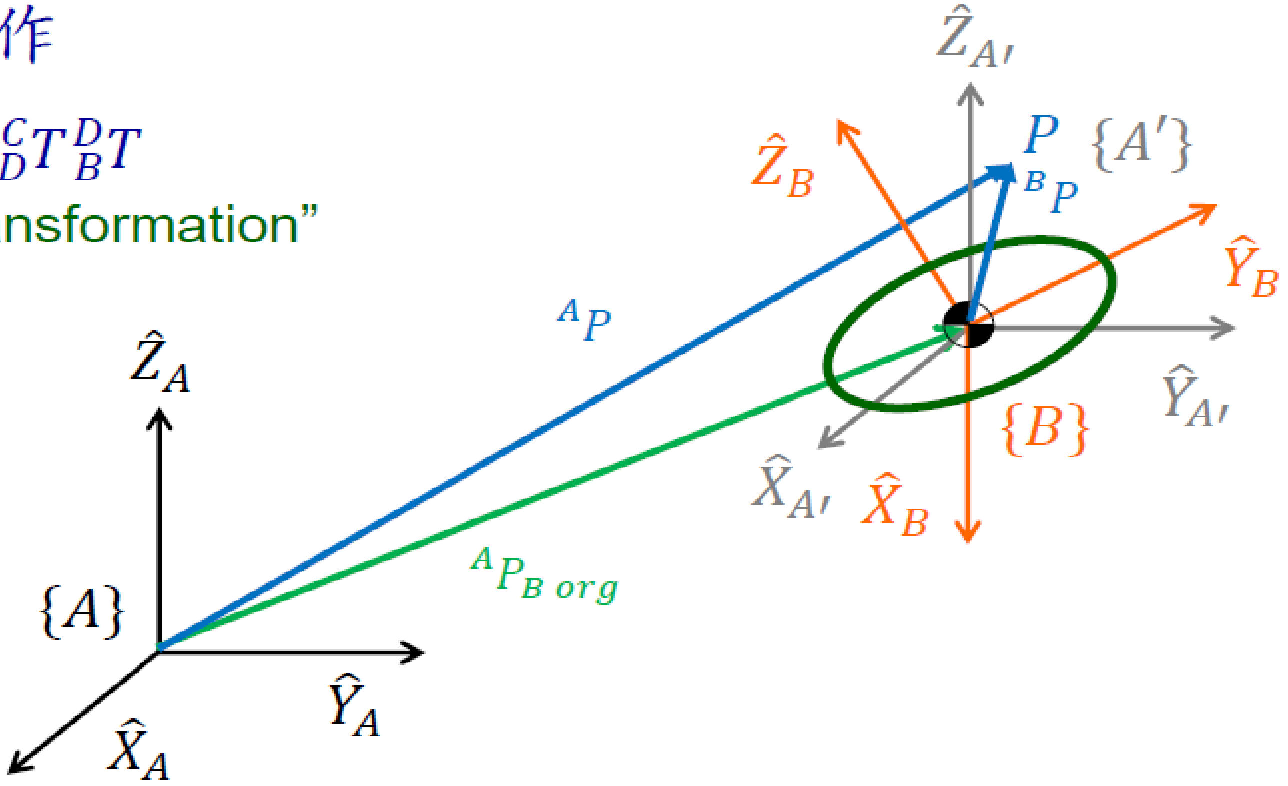
$$^{A}P_{3\times 1} = {}^{A}_{B}R\,{}^{B}P_{3\times 1} + {}^{A}P_{B\,org\ 3\times 1}$$

$$\begin{bmatrix} ^{A}P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{A}_{B}R & {}^{A}P_{B\,org} \\ 0\quad 0\quad 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ^{B}P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{A}_{B}R\,{}^{B}P + {}^{A}P_{B\,org} \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 可連續操作

$${}^{A}_{B}T = {}^{A}_{C}T\,{}^{C}_{D}T\,{}^{D}_{B}T$$

"sequential transformation"

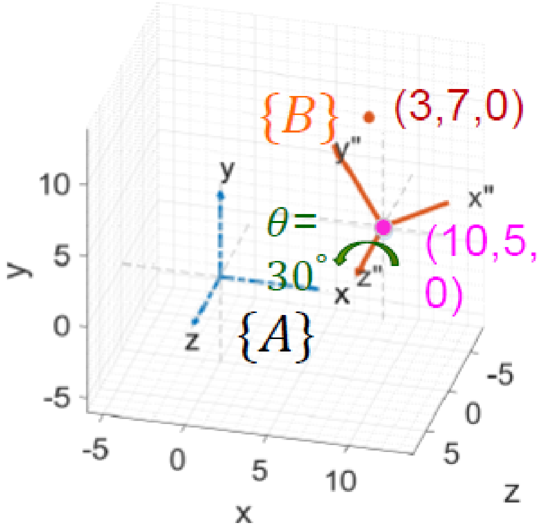


空间描述和变换

- Ex:

$$ {}^{B}P = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^{A}P_{Borg} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^{A}\hat{X}_B = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^{A}\hat{Y}_B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^{A}\hat{Z}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad {}^{A}P = ? $$

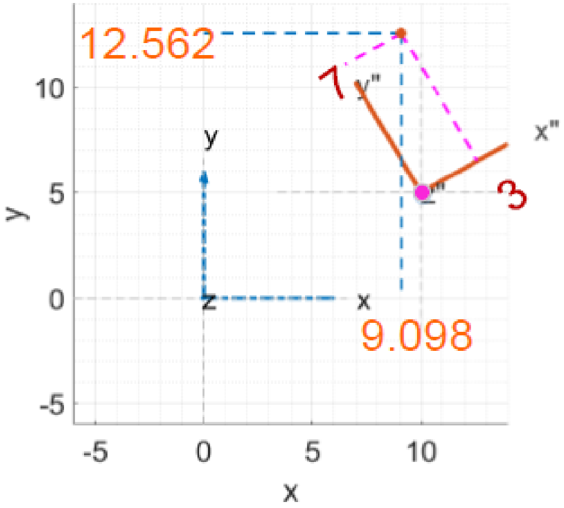
$$ \begin{bmatrix} {}^{A}P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{A}_{B}R & {}^{A}P_{B\,org} \\ 0 \quad 0 \quad 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{B}P \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} & 0 & 10 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{\text{單純看}\,{}^{A}_{B}T\text{: 表達}\{B\}\text{相對於}\{A\}\text{的方法}} \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.098 \\ 12.562 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | \\ {}^{A}P \\ | \\ 1 \end{bmatrix} $$



看整個操作：

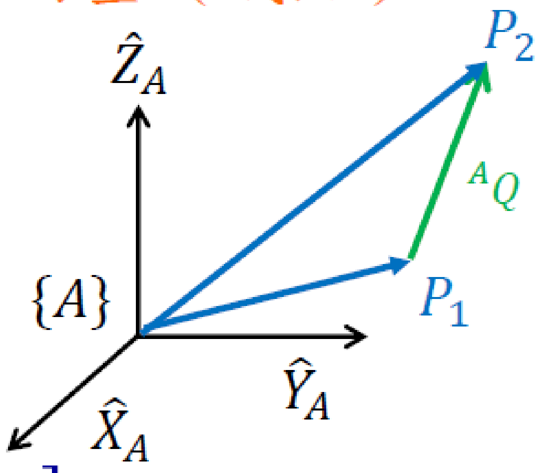
轉換point在不同frame下的表達

投影至XY平面驗證答案



空间描述和变换

- ${}^{A}_{B}T$除了Mapping之外，也可當Operator，對向量（或點）進行移動或轉動



- 僅有 移動

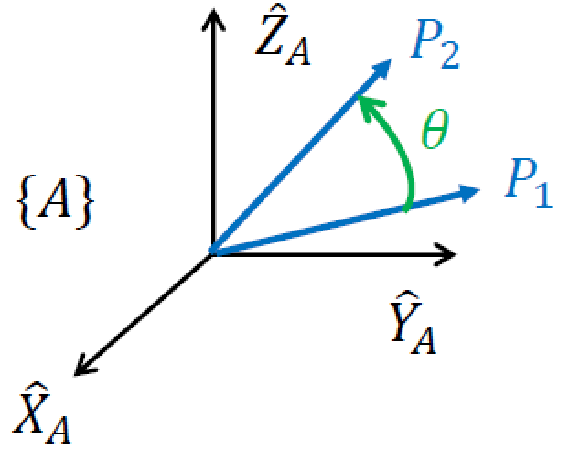
$$ {}^{A}P_{2\,3\times1} = {}^{A}P_{1\,3\times1} + {}^{A}Q_{\,3\times1} $$

$$ \begin{bmatrix} {}^{A}P_2 \\ 1 \end{bmatrix} = D(Q) \begin{bmatrix} {}^{A}P_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & I & & {}^{A}Q \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{A}P_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{A}P_1 + {}^{A}Q \\ 1 \end{bmatrix} $$

- 僅有 轉動

$$ {}^{A}P_{2\,3\times1} = \underset{3\times3}{R_{\hat{K}}(\theta)}\, {}^{A}P_{1\,3\times1} $$

$$ \begin{bmatrix} {}^{A}P_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & 0 \\ & R_{\hat{K}}(\theta) & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{A}P_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{\hat{K}}(\theta)\, {}^{A}P_1 \\ 1 \end{bmatrix} $$

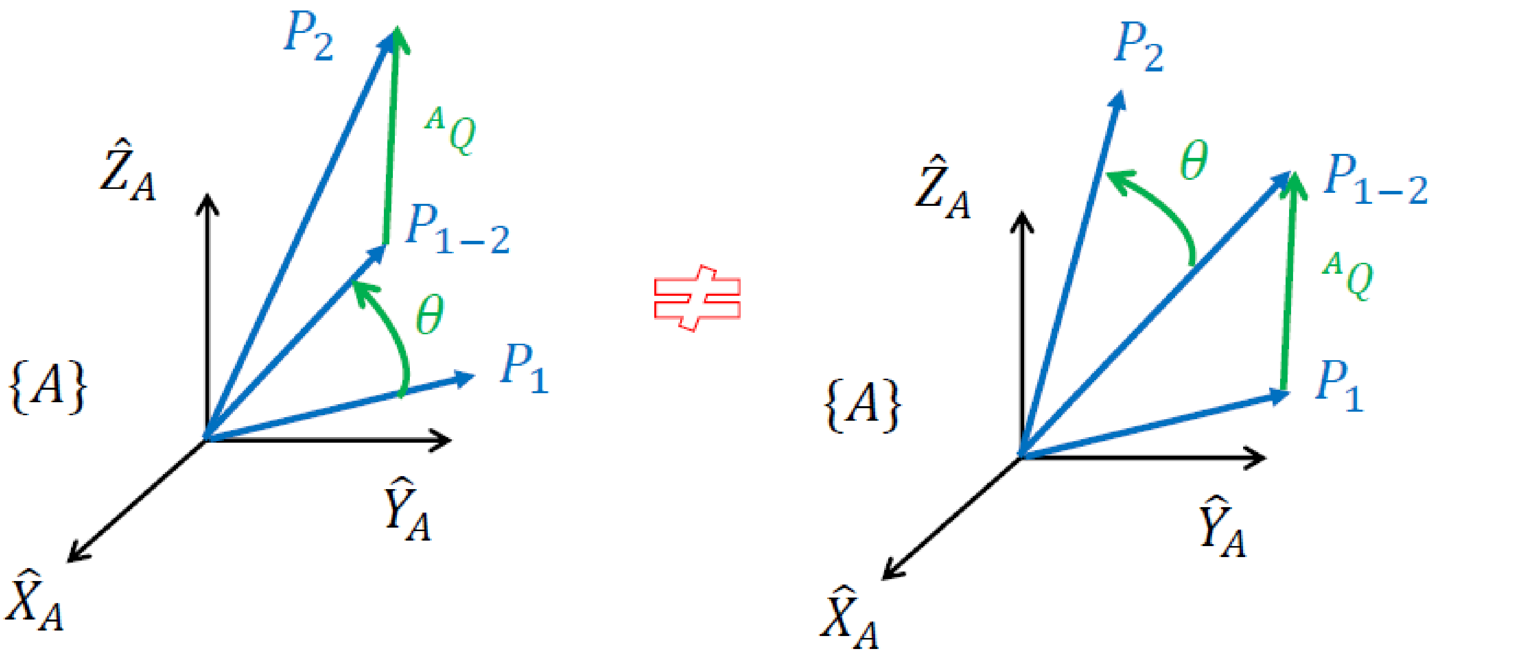


空间描述和变换

- 移動和轉動複合

$$ {}^{A}P_{2\,3\times1} = \underset{3\times3}{R_{\hat{K}}(\theta)}\, {}^{A}P_{1\,3\times1} + {}^{A}Q_{3\times1} $$ 先轉動再移動

$$ \begin{bmatrix} {}^{A}P_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{\hat{K}}(\theta) & & & {}^{A}Q \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{A}P_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{\hat{K}}(\theta)\, {}^{A}P_1 + {}^{A}Q \\ 1 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} {}^{A}P_1 \\ 1 \end{bmatrix} $$



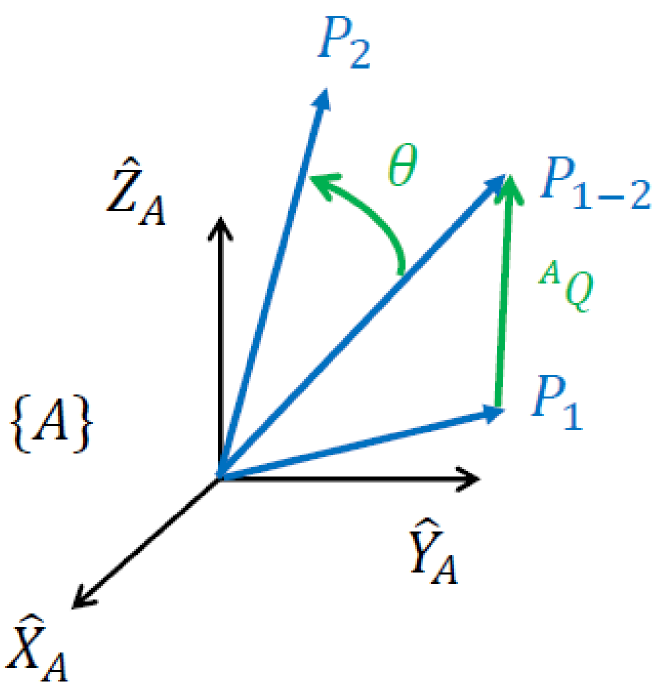
先轉動再移動

先移動再轉動（ ${}^{A}Q$也會被轉動到 ）

$$ {}^{A}P_2 = R_{\hat{K}}(\theta)\left({}^{A}P_1 + {}^{A}Q\right) = R_{\hat{K}}(\theta)\, {}^{A}P_1 + R_{\hat{K}}(\theta)\, {}^{A}Q $$

空间描述和变换

- In-video Quiz: 如果要如下圖所示的先移動再轉動，那T應該如何表達？



A. $\begin{bmatrix} R_{\hat{K}}(\theta) & & & {}^AQ \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} & I & & {}^AQ \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & & & 0 \\ & R_{\hat{K}}(\theta) & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} & & & 0 \\ & R_{\hat{K}}(\theta) & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & I & & {}^AQ \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

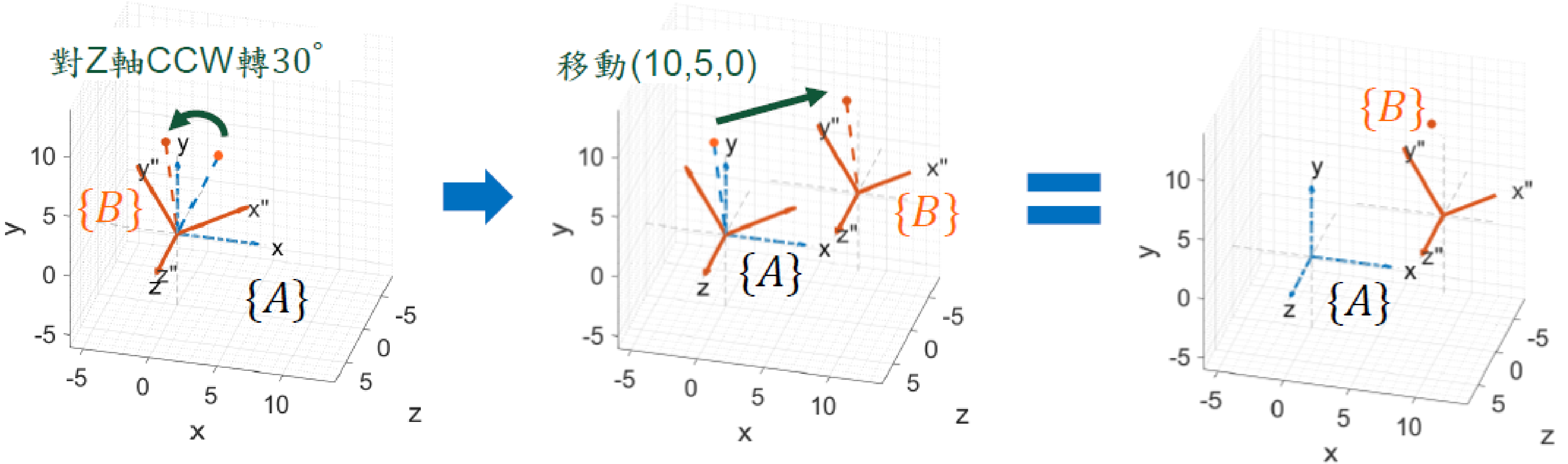
D. $\begin{bmatrix} R_{\hat{K}}(\theta) & & & {}^AQ \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & & & 0 \\ & R_{\hat{K}}(\theta) & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

空间描述和变换

- Ex: Point $P_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$，先對Z軸CCW轉30°, 然後移動$\begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$到$P_2$ ⇨ P_2 =?

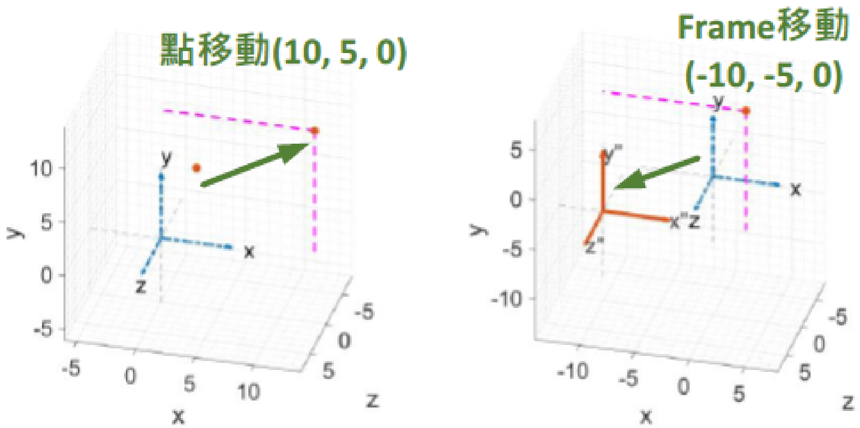
$$\begin{bmatrix} {}^{A}P_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{\hat{K}}(\theta) & & & {}^{A}Q \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{A}P_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:c} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 10 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 9.098 \\ 12.562 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} | \\ {}^{A}P_2 \\ | \\ 1 \end{bmatrix}$$

和「Mapping -3」的答案相同，Why?

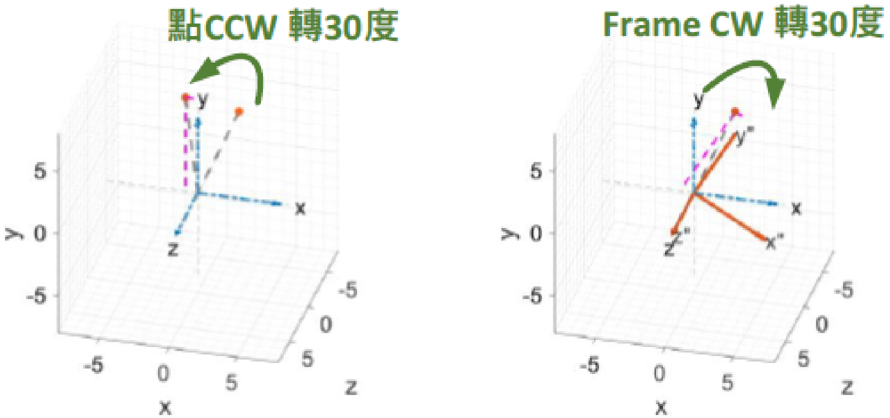


空间描述和变换

- 因為運動是相對的，${}^{A}_{B}T$當Operator時對向量（或點）進行移動或轉動的操作，也可以想成是對frame進行「反向」的移動或轉動的操作
  - Point往前移 = frame往後移



  - Point逆時針轉= frame順時針轉

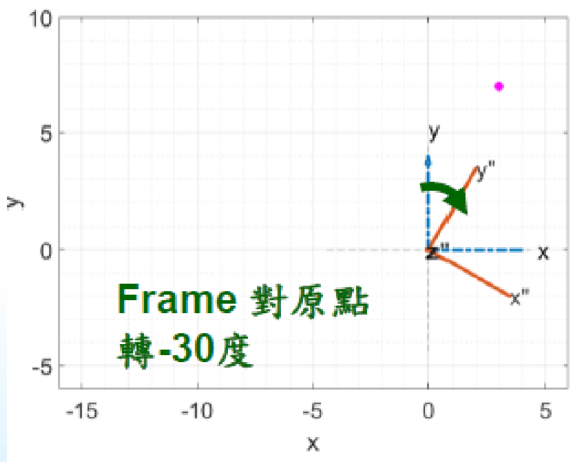


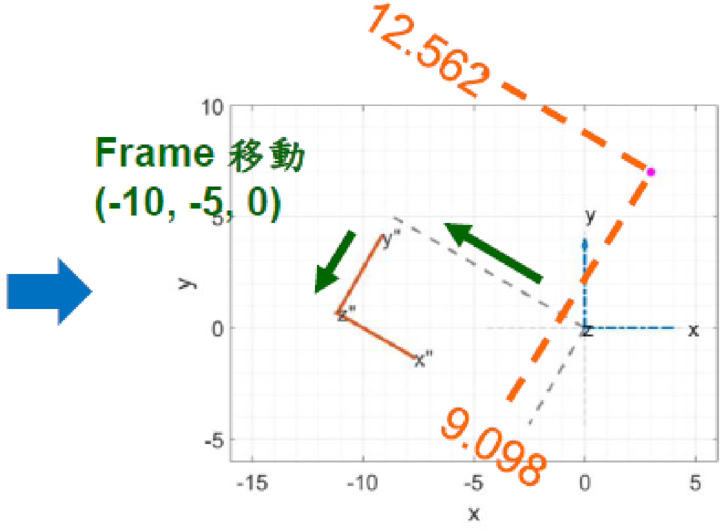
空间描述和变换

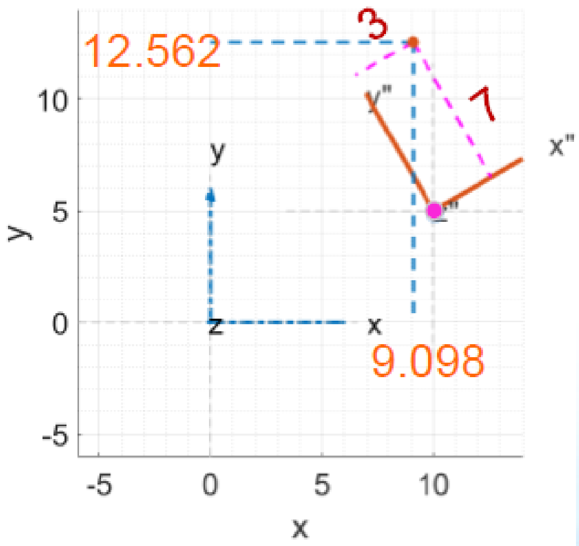
- Ex: Revisit Operator-3的範例，改以frame轉動的角度來想

$$\text{Point } P_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}，先對Z軸CCW轉30^\circ, 然後移動\begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}到P_2 \quad \Rightarrow P_2 = ?$$

投影至XY平面來看







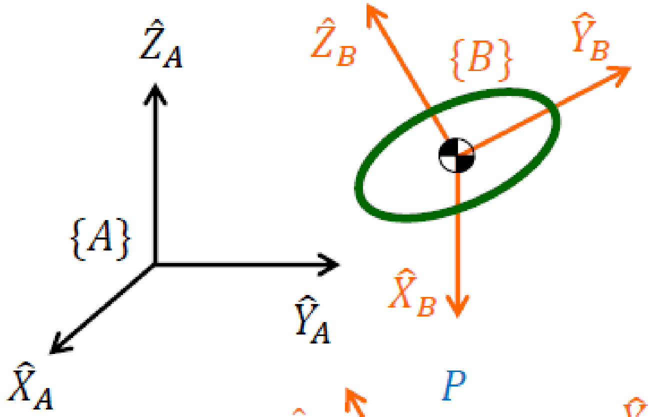
與Operator -3的答案相同

空间描述和变换

- Homogeneous transformation matrix 的三種用法

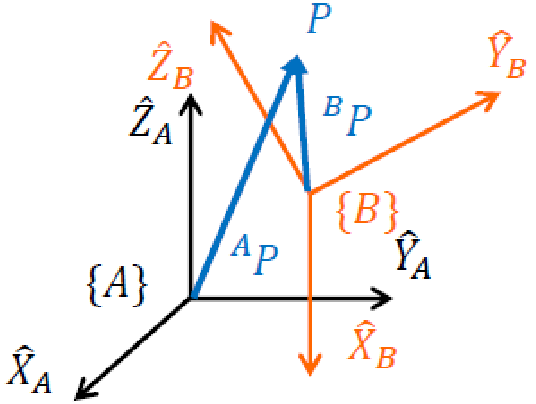
  - 描述一個frame(相對於另一個frame)的空間狀態

$$
{}^{A}_{B}T = \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ {}^{A}\hat{X}_B & {}^{A}\hat{Y}_B & {}^{A}\hat{Z}_B & {}^{A}P_{B\,org} \\ | & | & | & | \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$



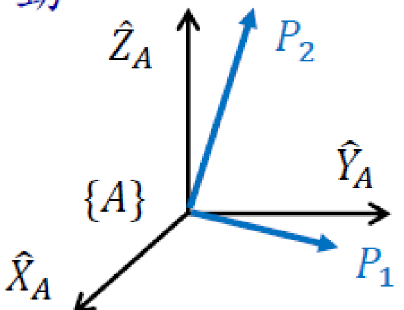
  - 將point由某一個frame的表達換到另一個frame來表達

$$
\begin{bmatrix} {}^{A}P \\ 1 \end{bmatrix} = {}^{A}_{B}T \begin{bmatrix} {}^{B}P \\ 1 \end{bmatrix}
$$

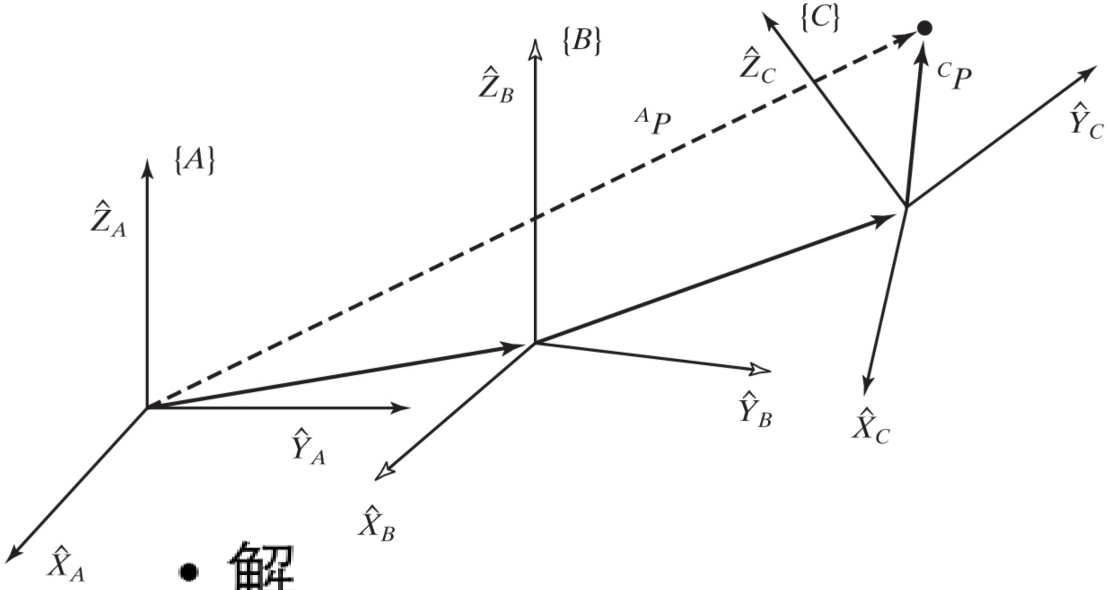


  - 將point(vector)在同一個frame中進行移動和轉動

$$
\begin{bmatrix} {}^{A}P_2 \\ 1 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} {}^{A}P_1 \\ 1 \end{bmatrix}
$$



复合变换



- 已知坐标系$\{C\}$相对于坐标系{B}定义，坐标系$\{B\}$相对于坐标系$\{A\}$定义。已知${}^{C}P$求${}^{A}P$。

- 解

$$ {}^{B}\boldsymbol{p} = {}^{B}_{C}T\,{}^{C}\boldsymbol{p} $$
$$ {}^{A}\boldsymbol{p} = {}^{A}_{B}T\,{}^{B}\boldsymbol{p} $$

联立上两式，${}^{A}\boldsymbol{p} = {}^{A}_{B}T\,{}^{B}_{C}T\,{}^{C}\boldsymbol{p}$

因此，从$\{C\}$到$\{A\}$的变换：${}^{A}_{C}T = {}^{A}_{B}T\,{}^{B}_{C}T$

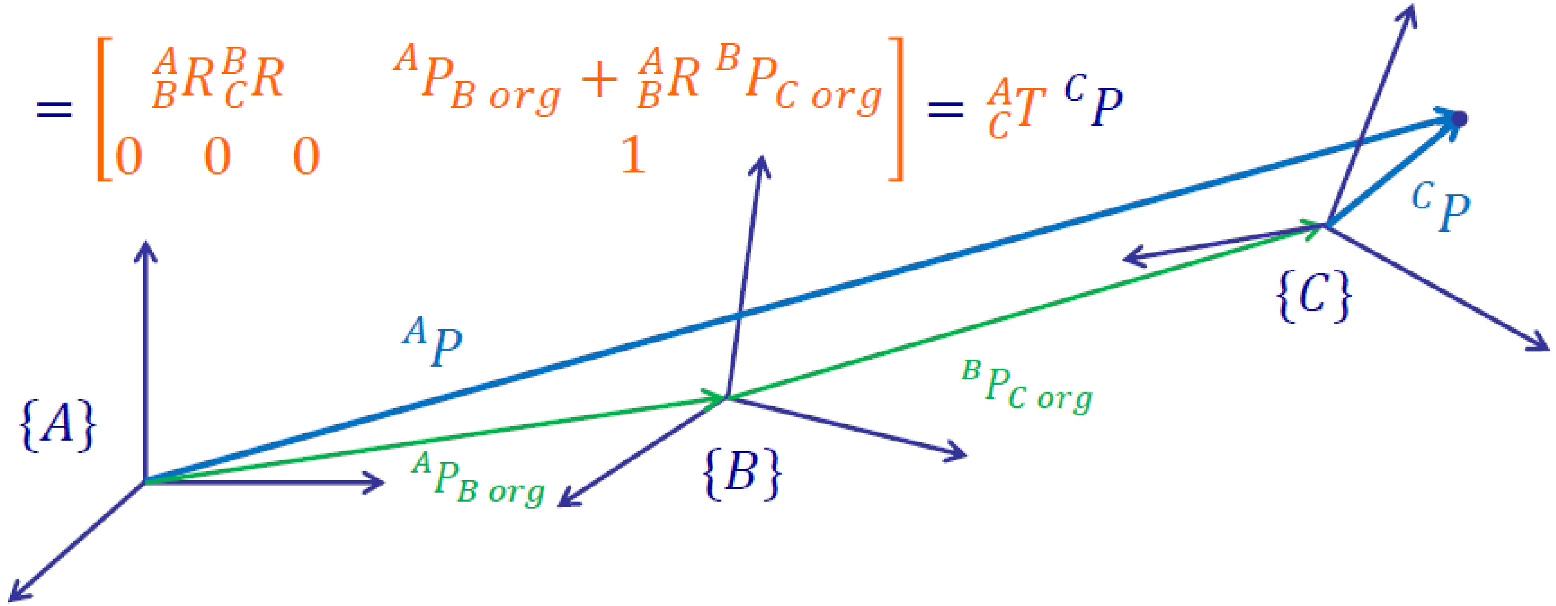
空间描述和变换

- 連續運算

$$^{A}P = {}^{A}_{B}T\,{}^{B}P = {}^{A}_{B}T({}^{B}_{C}T\,{}^{C}P) = {}^{A}_{B}T\,{}^{B}_{C}T\,{}^{C}P$$

$$= \left[\begin{array}{ccc:c} & {}^{A}_{B}R & & {}^{A}P_{B\,org} \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{ccc:c} & {}^{B}_{C}R & & {}^{B}P_{C\,org} \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]{}^{C}P$$

$$= \begin{bmatrix} {}^{A}_{B}R\,{}^{B}_{C}R & {}^{A}P_{B\,org} + {}^{A}_{B}R\,{}^{B}P_{C\,org} \\ 0 \quad 0 \quad 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^{A}_{C}T\,{}^{C}P$$



$$^{A}P = {}^{A}_{B}T\,{}^{B}_{C}T\,{}^{C}_{D}T\,{}^{D}P$$

$$= \begin{bmatrix} {}^{A}_{B}R\,{}^{B}_{C}R\,{}^{C}_{D}R & {}^{A}P_{B\,org} + {}^{A}_{B}R\,{}^{B}P_{C\,org} + {}^{A}_{B}R\,{}^{B}_{C}R\,{}^{C}P_{D\,org} \\ 0 \quad 0 \quad 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^{A}_{D}T\,{}^{D}P$$

空间描述和变换

❑ 反矩阵 $_B^AT = \begin{bmatrix} & _B^AR & & ^AP_{B\,org} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad _A^BT = {_B^AT}^{-1} = ?$

$$_B^AT\,_A^BT = {_B^AT}\,{_B^AT}^{-1} = I_{4\times 4}$$

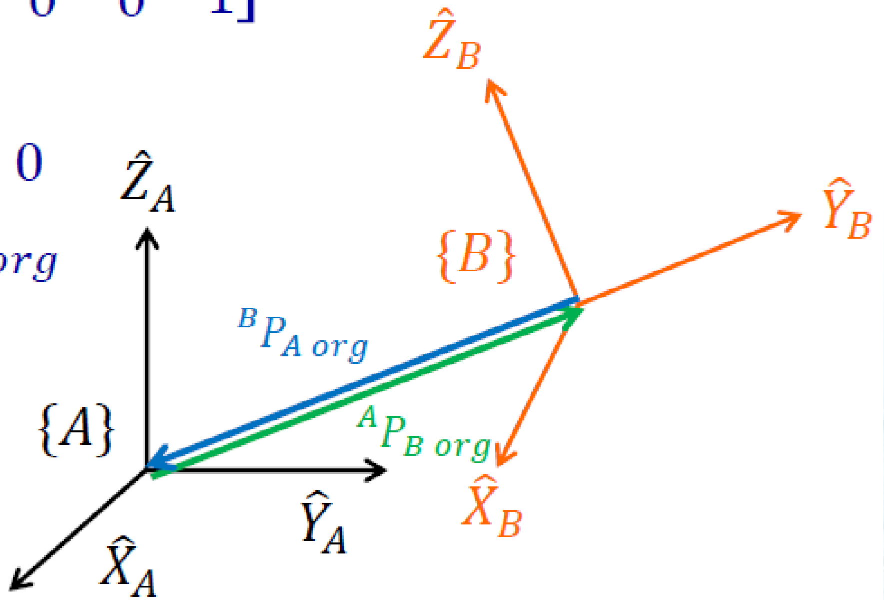
$$\begin{bmatrix} & _B^AR & & ^AP_{B\,org} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & _A^BR & & ^BP_{A\,org} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} _B^AR\,_A^BR & & & ^AP_{B\,org} + {_B^AR}\,^BP_{A\,org} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & 0 \\ & I_{3\times 3} & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$_B^AR\,_A^BR = I_{3\times 3} \qquad ^AP_{B\,org} + {_B^AR}\,^BP_{A\,org} = 0$$

$$\Rightarrow {_A^BR} = {_B^AR}^T \qquad \Rightarrow {^BP_{Aorg}} = -{_B^AR}^T\,{^AP_{Borg}}$$

$$\Rightarrow \quad {_B^AT}^{-1} = \begin{bmatrix} & {_B^AR}^T & & -{_B^AR}^T\,{^AP_{B\,org}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



空间描述和变换

- 連續運算，求未知之相對關係

$$ {}^{U}_{D}T = {}^{U}_{A}T\,{}^{A}_{D}T = {}^{U}_{B}T\,{}^{B}_{C}T\,{}^{C}_{D}T $$

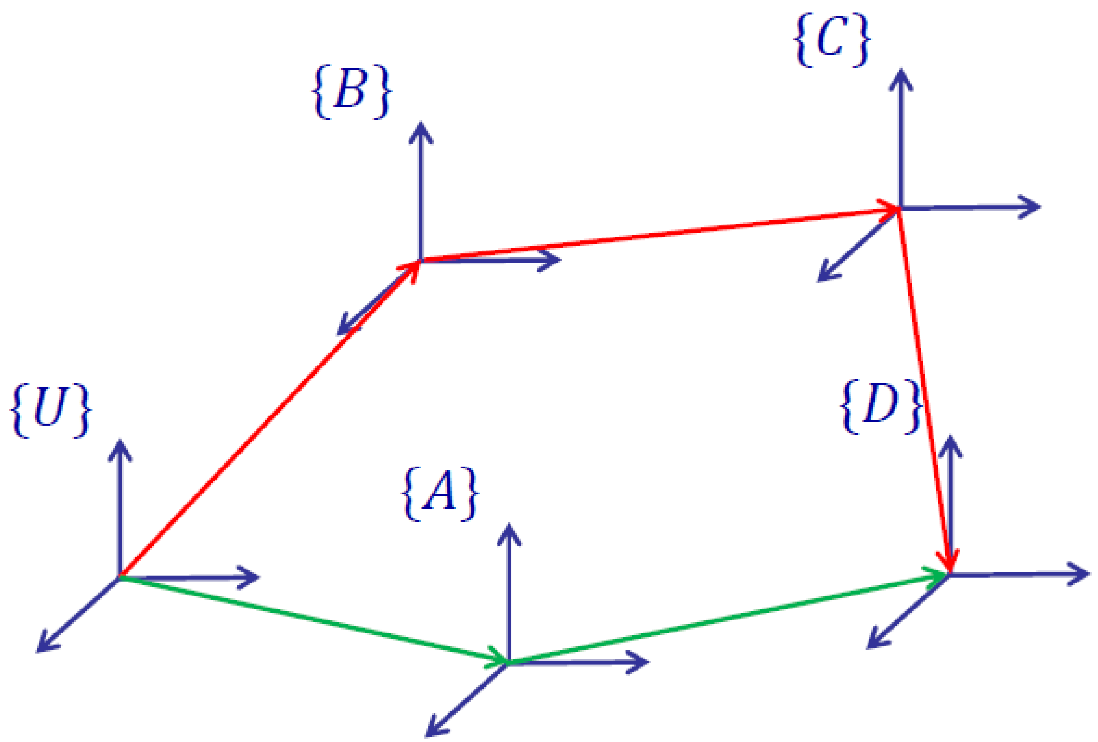
if ${}^{C}_{D}T$ unknown

$$ = ({}^{U}_{B}T\,{}^{B}_{C}T)^{-1}\,{}^{U}_{A}T\,{}^{A}_{D}T $$

$$ = {}^{B}_{C}T^{-1}\,{}^{U}_{B}T^{-1}\,{}^{U}_{A}T\,{}^{A}_{D}T $$

if ${}^{B}_{C}T$ unknown

$$ = {}^{U}_{B}T^{-1}\,{}^{U}_{A}T\,{}^{A}_{D}T\,{}^{C}_{D}T^{-1} $$



空间描述和变换

- 連續運算 法則
  - Initial condition: {A} and {B} coincide $\quad {}^{A}_{B}T = I_{4\times 4}$
  - {B} 對 {A} 的轉軸旋轉：用 “premultiply”
    - 以operator來想，對某一個向量，「以同一個座標為基準」，進行轉動或移動的操作
    - Ex: $\{B\}$依序經過T_1、T_2、T_3三次transformations

$$ {}^{A}_{B}T = T_3 T_2 T_1 I \qquad v' = {}^{A}_{B}T v = T_3 T_2 T_1 v $$

  - {B} 對 {B} 自身的轉軸旋轉：用“postmultiply”
    - 以mapping來想，對某一個向量，從最後一個frame「逐漸轉動或移動」來回到第一個frame
    - Ex: $\{B\}$依序經過T_1、T_2、T_3三次transformation

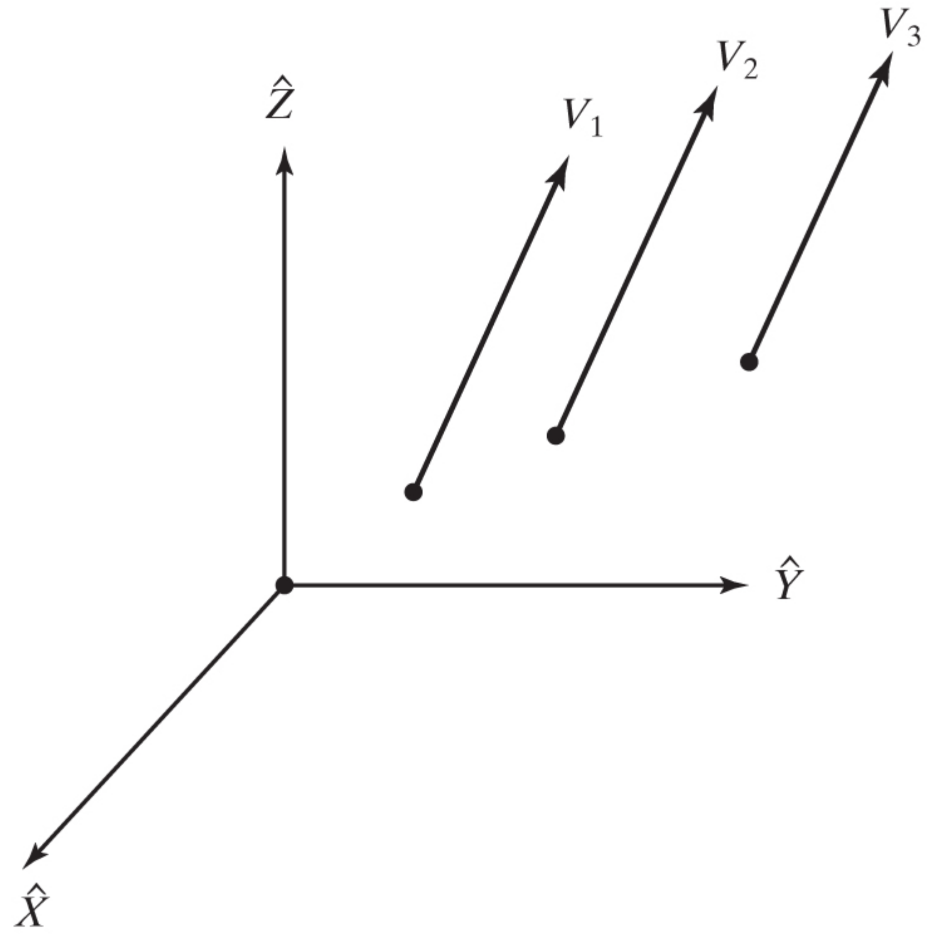
$$ {}^{A}_{B}T = I T_1 T_2 T_3 \qquad {}^{A}P = {}^{A}_{B}T\,{}^{B}P = I T_1 T_2 T_3\,{}^{B}P $$

空间描述和变换

- 連續運算 小結
  - 以固定的$\{A\}$或移動的$\{B\}$為基準進行移動換轉動操作，transformation matrix應用不同的連乘方式
  - 思考邏輯和考量Fixed angles vs. Euler angles的連續旋轉順序相似

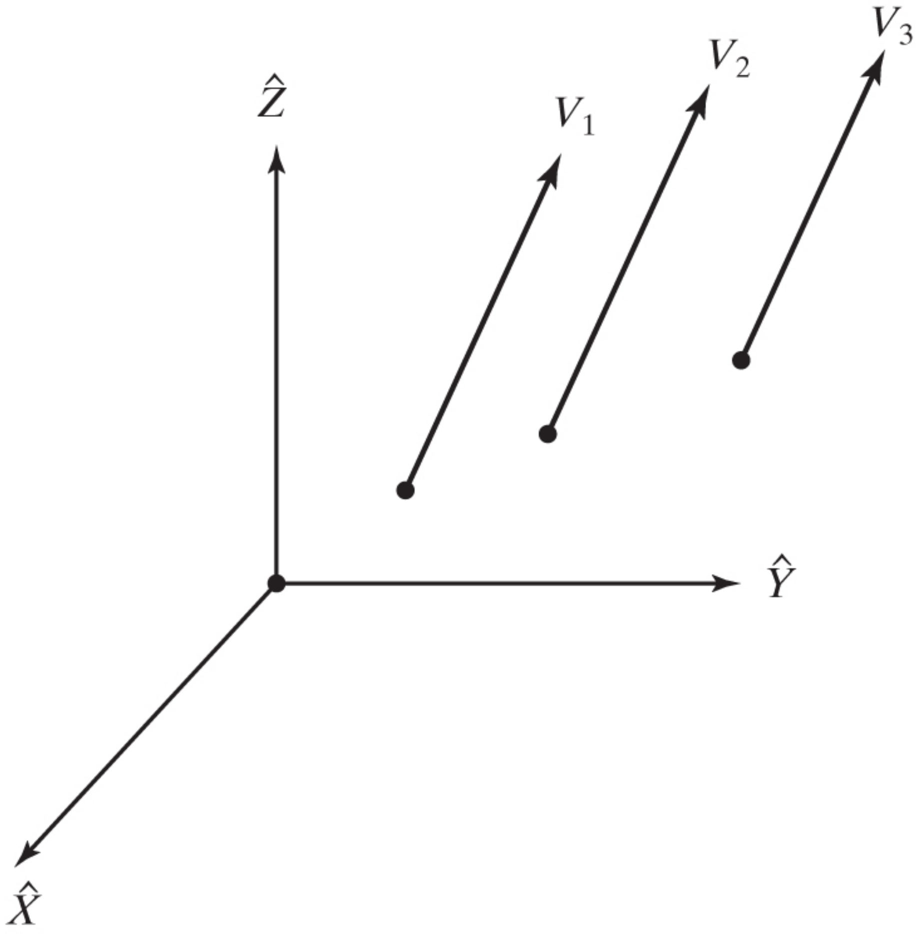
2.9 自由矢量的变换

- 因为这些矢量的类型不同，所以它们的变换形式是不同的。
- 如果 两个矢量具有相同的 维数、大小和方向，则这两个矢量相等。例如右图。
- 如果两个矢 量在某一功能上产生了相同的作用效果，那么这两个 矢量在这一特定功能方面来讲就是等效的。



2.9 自由矢量的变换

- 如果在图中的判断标准是**运行距离**，这三个矢量的效果相同，那么它们在这一**功能**上来讲是等效的。
- 如果判断标准是在xy 平面上的高度，那么这三个矢量是不等效的，尽管它们是相等的矢量。
- 因此，矢量之间的关系和是否等效完全取决 于当时的判断 条件。而且，在某些情况下，不 相等的矢量可能会产生等价的作用效果。



2. 10 计算问题

- 在操作系统的设计当中，高效的计算能力将始终是一个重要问题。
- 齐次变换是一个很重要的概念，但是在典型工业机器人上使用的变换软件并不直接采用齐次变换。**主要原因**是我们不想把时间浪费在数字 0 和 1 与其他数字相乘上面。
- 当进行相同计算时，计算 **顺序**的不同将会导致计算量的差别很大。对于矢量的多次旋转

2.10 计算问题

$$^{A}P = {}^{A}_{B}R\, {}^{B}_{C}R\, {}^{C}_{D}R\, {}^{D}P$$

- 一种方法是首先将这三个旋转矩阵相乘，得到 ${}^{A}_{D}R$，表示为

$$^{A}P = {}^{A}_{D}R\, {}^{D}P$$

所以总共需要 63 次乘法和 42次加法运算。

- 另一种方法是一次做一个矩阵计算来进行矢量变换

$$^{A}P = {}^{A}_{B}R\, {}^{B}_{C}R\, {}^{C}_{D}R\, {}^{D}P$$

$$^{A}P = {}^{A}_{B}R\, {}^{B}_{C}R\, {}^{C}P$$

$$^{A}P = {}^{A}_{B}R\, {}^{B}P$$

$$^{A}P = {}^{A}P$$

总的计算次数只需要 27 次乘法运算和 18 次加法运算

作业题

课本第二章课后题：1，2，16题

机器人原理课程

2. 空间描述和变换b

部分课件来自于台湾大学 林沛群 教授 “机器人学导论”课程课件，在此表示感谢！

王久珂
wangjk57@mail.sysu.edu.cn