概率论与数理统计

中山大學
SUN YAT-SEN UNIVERSITY

主讲老师：邝东阳， kuangdy@mail.sysu.edu.cn

Part 1

条 件 概 率

博学 | 审问 | 慎思 | 明辨 | 笃行

例 1.5.3　在箱子里装有 3 个红球和 7 个白球. 甲乙两人各抽一球，被抽出的球不再放回. 求在甲抽中红球的条件下，乙抽中红球的条件概率.

例 1.5.6　设箱内有 6 个白球和 4 个黑球，在其中接连取 3 次，每次取 1 个球，取后不放回，求取到的 3 个球都是白球的概率.

中山大學 SUN YAT-SEN UNIVERSITY

例 1.5.4 在一副 52 张的扑克牌中任意地抽出两张.

1）已知第一张是红桃，求两张都是红桃的条件概率.

2）已知两张中至少有一张是红桃，求第二张是红桃的条件概率.

3）已知两张中至多有一张是红桃，求第二张是红桃的条件概率.

4）已知两张中恰好有一张是红桃，求第二张是红桃的条件概率.

解 设 A = “第一张是红桃”，B = “第二张是红桃”，则

$$P(A) = 1/4, \quad P(B) = 1/4,$$

$$P(AB) = C_{13}^{2}/C_{52}^{2} = 1/17, \quad P(\bar{A}B) = A_{39}^{1}A_{13}^{1}/A_{52}^{2} = 13/68,$$

$$P(A \cup B) = C_{13}^{1}C_{39}^{1}/C_{52}^{2} + C_{13}^{2}/C_{52}^{2} = 15/34,$$

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = C_{13}^{1}C_{39}^{1}/C_{52}^{2} + C_{39}^{2}/C_{52}^{2} = 16/17,$$

$$P(A\bar{B} \cup \bar{A}B) = C_{13}^{1}C_{39}^{1}/C_{52}^{2} = 13/34.$$

额外内容

中山大学 SUN YAT-SEN UNIVERSITY

↑Example

有 10 个产品, 内有 3 个次品, 从中一个个地抽取 (不放回) 检验, 问第一次取到次品后第二次再取到次品的概率.

↓Example

解: A: 第一次取到次品. B: 第二次取到次品.

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\binom{3}{2}/\binom{10}{2}}{3/10}$$

额外内容

↑Example

将 n 根短绳的 $2n$ 个端头任意两两连接, 试求恰好连成 n 个圈的概率.

↓Example

解: A_i: ith 绳头尾相连形成1个圈.

$$P(A_1\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1\cdots A_{n-1})$$

$$= \frac{1}{2n-1}\cdot\frac{1}{2n-3}\cdot\frac{1}{2n-5}\cdots\cdots\frac{1}{1} = \frac{1}{(2n-1)!!}$$

解法不唯一!

Part 2
独立性

博学 | 审问 | 慎思 | 明辨 | 笃行

两两独立 v.s. 相互独立

例 1.5.10 设有 4 个球，1 号球被涂上红色，2 号球被涂上黄色，3 号球被涂上蓝色，4 号球被涂上红黄蓝三种颜色. 从中任取一个球，各个球被取到的可能性是相同的. 分别以 1,2,3,4 表示取到 1 号，2 号，3 号，4 号球，分别以 A,B,C 表示取中的球带有红，黄，蓝色，则样本空间为 $\Omega=\{1,2,3,4\}$，$A=\{1,4\}$，$B=\{2,4\}$，$C=\{3,4\}$，而

$$P(\{1\})=P(\{2\})=P(\{3\})=P(\{4\})=1/4,$$

$$P(A)=P(B)=P(C)=1/2,$$

$$P(AB)=P(BC)=P(AC)=P(ABC)=P(\{4\})=1/4.$$

由上可知对于现在这个例子，等式(1.5.4)，(1.5.5)和(1.5.6)都成立，但是等式(1.5.7)不成立. 因而可知 A,B,C 两两独立，但 A,B,C 不是相互独立.

例 1.5.11 甲乙丙三人各投篮一次,各人的命中率分别是 0.2,0.4,0.7. 设各人投篮命中是相互独立的事件,求这三个人当中至少有一个人投篮命中的概率.

设 A =“甲命中”,B =“乙命中”,C =“丙命中”,D =“三人中至少有一人命中”.

解 1

$$\begin{aligned}P(D) &= P(A\cup B\cup C) = P(A)+P(B)+P(C)\\ &\quad -P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)\\ &= P(A)+P(B)+P(C)-P(A)P(B)-P(A)P(C)\\ &\quad -P(B)P(C)+P(A)P(B)P(C)\\ &= 0.2+0.4+0.7-0.2\times0.4-0.2\times0.7\\ &\quad -0.4\times0.7+0.2\times0.4\times0.7=0.856.\end{aligned}$$

解 2

$$\begin{aligned}P(\bar{D}) &= P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) = P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C})\\ &= [1-P(A)][1-P(B)][1-P(C)]\\ &= (1-0.2)(1-0.4)(1-0.7)=0.144.\end{aligned}$$

故

例 1.5.12 设事件 A,B,C,D 相互独立. 证明事件 $A\cup B$ 与事件 $C\bar{D}$ 相互独立.

证

$$
\begin{aligned}
P\{(A\cup B)(C\bar{D})\} &= P\{(AB\cup A\bar{B}\cup \bar{A}B)(C\bar{D})\}\\
&= P\{(ABC\bar{D}\cup A\bar{B}C\bar{D}\cup \bar{A}BC\bar{D})\} = P(ABC\bar{D})+P(A\bar{B}C\bar{D})+P(\bar{A}BC\bar{D})\\
&= P(AB)P(C\bar{D})+P(A\bar{B})P(C\bar{D})+P(\bar{A}B)P(C\bar{D})\\
&= [P(AB)+P(A\bar{B})+P(\bar{A}B)]P(C\bar{D}) = P(A\cup B)P(C\bar{D}).
\end{aligned}
$$

注 1.5.5 例 1.5.12 可以推广到一般的情况. 事实上可以证明, 若事件 $A_{11},\cdots,A_{1n_1},A_{21},\cdots,A_{2n_2},\cdots,A_{k1},\cdots,A_{kn_k}$ 相互独立, A_i 是对 $A_{i1},\cdots,A_{in_i},\bar{A}_{i1},\cdots,\bar{A}_{in_i}$ 进行交运算和并运算得到的事件, $i=1,2,\cdots,k$, 则事件 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 相互独立.

电

解 设 A = “A 断路”，B = “B 断路”，C = “C 断路”，D = “D 断路”，E = “E 断路”，T = “线路断路”，则

$$P(A)=0.2,\ P(B)=0.3,\ P(C)=0.4,\ P(D)=0.5,\ P(E)=0.6.$$

$$\begin{aligned}
P(T) &= P\{(A\cup B)(CD\cup E)\} = P(A\cup B)P(CD\cup E)\\
&= [P(A)+P(B)-P(AB)][P(CD)+P(E)-P(CDE)]\\
&= [P(A)+P(B)-P(A)P(B)][P(C)P(D)+P(E)-P(C)P(D)P(E)]\\
&= (0.2+0.3-0.2\times 0.3)(0.4\times 0.5+0.6-0.4\times 0.5\times 0.6)\\
&= 0.2992.
\end{aligned}$$

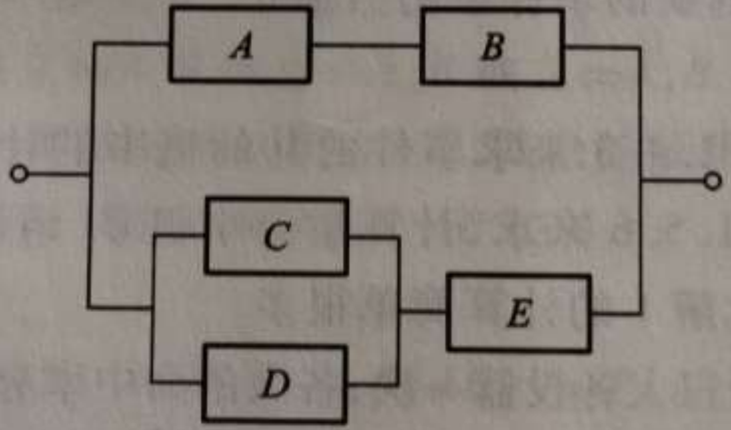


图 1.12

额外内容

中山大學 SUN YAT-SEN UNIVERSITY

↑Example

(两两独立而不相互独立的反例) 有四个同样的小球，分别在其上写上 "1"，"2"，"3" 和 "1,2,3"。引进三个事件: A_i={随机取一球，球上有数字 i}, $i = 1, 2, 3$. 试讨论事件 A_1, A_2, A_3 是否相互独立.

↓Example

解: 见课本例 1.5.6.

验证 $P(A_1A_2A_3) \neq P(A_1)P(A_2)P(A_3)$

$\frac{1}{4} \neq \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}$

额外内容

$\uparrow$Example

A, B, C 三人独立地破译密码，每人能破译密码的概率分别为 $1/3, 1/4, 1/5$. 问密码能被破译的概率有多大?

$\downarrow$Example

解:

即"至少有一人能破译"

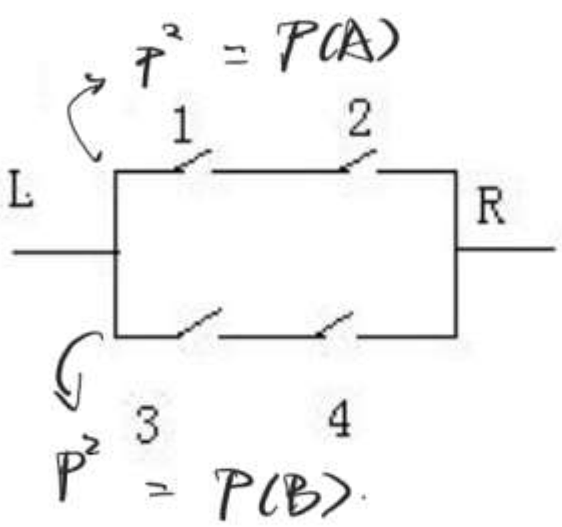
$$P(A+B+C) = 1 - P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})$$

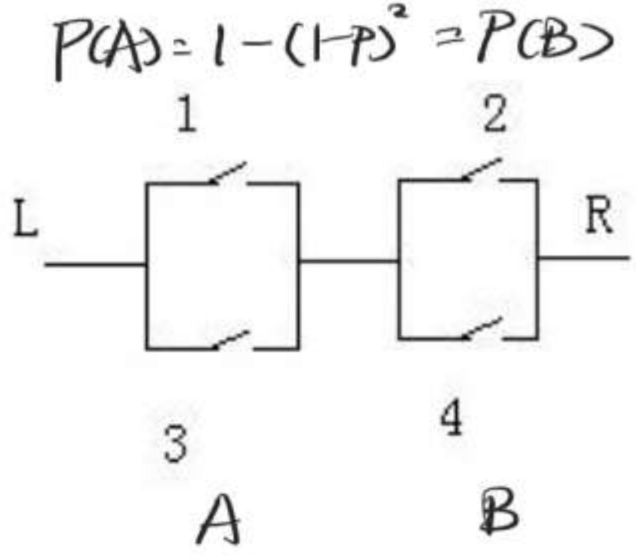
$$= 1 - P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C}).$$ 独立性.

$$= 1 - \boxed{1/3 \cdot 1/4 \cdot 1/5}$$ 这里有误，应为 $\frac{2}{3} * \frac{3}{4} * \frac{4}{5}$

$$= 59/60$$

在元件可靠性研究中, 我们考虑如下两种电路:





其中 1-4 表示 4 个继电器, 它们是否开通是相互独立的, 设继电器导通的概率为 p, $(0 < p < 1)$, 求两种电路从 L 到 R 为通路的概率.

解: 左: $P(A+B) = 1 - P(\bar{A}\bar{B})$

$= 1 - P(\bar{A})P(\bar{B})$

$= 1 - (1-p^2)(1-p^2)$

右: $P(AB)$

$= P(A)P(B)$

$= [1-(1-p^2)]^2$

Part 2
全概率公式

博学 | 审问 | 慎思 | 明辨 | 笃行

例 1.5.8 某小组 3 个人轮流抽签分配 2 张足球票，求各个人能抽到球票的概率.

解 以 A_1, A_2, A_3 分别记第 1，第 2，第 3 个人抽到足球票，则

$$P(A_1)=2/3,$$

$$\begin{aligned}P(A_2)&=P(A_1)P(A_2\mid A_1)+P(\bar{A}_1)P(A_2\mid \bar{A}_1)\\&=(2/3)(1/2)+(1/3)(2/2)=2/3,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(A_3)&=P(A_1A_2)P(A_3\mid A_1A_2)+P(A_1\bar{A}_2)P(A_3\mid A_1\bar{A}_2)\\&\quad+P(\bar{A}_1A_2)P(A_3\mid \bar{A}_1A_2)\\&=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)+P(A_1)P(\bar{A}_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1\bar{A}_2)\\&\quad+P(\bar{A}_1)P(A_2\mid \bar{A}_1)P(A_3\mid \bar{A}_1A_2)\\&=(2/3)(1/2)\times 0+(2/3)(1/2)\times 1+(1/3)(2/2)\times 1=2/3.\end{aligned}$$

额外内容

中山大學 SUN YAT-SEN UNIVERSITY

↑Example

设某厂产品的一个零部件是由三家上游厂商供货的. 已知有一半是 B_1 厂提供的, B_2 厂商和 B_3 分别提供 25% . 已知厂商 B_1 和 B_2 的次品率都是 2%, B_3 的次品率为 4%, 从该厂产品中任取一个产品, 问该产品的这个零部件是次品的概率.

↓Example

解: A: 取出零部件为次品. B_i, 次品来自 B_i.

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(A|B_i)P(B_i)$$

$$= 0.02 \cdot 0.5 + 0.02 \cdot 0.25 + 0.04 \cdot 0.25$$

↑Example

将 n 根短绳的 $2n$ 个端头任意两两连接, 求恰好连成 n 个圈的概率.

↓Example

解:

A_n: "恰好形成 n 个圈", B: "第1绳形成1个圈"

$$P(A_n) = P(B)P(A_n|B) + P(B^c)\underbrace{P(A_n|B^c)}_{0}$$

$$= P(B)P(A_n|B)$$

$$= \frac{1}{2n-1}\underbrace{P(A_n|B)}_{n-1\text{根绳形成}n-1\text{个圈}}$$

$$= \frac{1}{2n-1}\cdot\frac{1}{2n-3}\cdots\cdots\frac{1}{1}$$

$$= \frac{1}{(2n-1)!!}$$

Part 1
Bayesian
公 式

博学 | 审问 | 慎思 | 明辨 | 笃行

Bayesian

例 1.5.7 从某学校的男生,女生和教师中任意选出一人投篮一次,若投中则得 1 分,投不中则得 0 分. 已知选中男生的概率为 0.5,选中女生的概率为 0.4,选中教师的概率为 0.1. 而男生投篮的命中率为 0.4,女生投篮的命中率为 0.3,教师投篮的命中率为 0.2.

1) 求得到 1 分的概率.

2) 已知得到 1 分,求选中男生的条件概率.

Check on some relevant videos from [3Blue1Brown]

↑Example

中山大學 YAT-SEN UNIVERSITY

一种诊断某癌症的试剂, 经临床试验有如下记录: 有癌症病人阳性的概率为 95%, 无癌症病人阴性的概率为 95%. 现用这种试剂在某社区进行癌症普查, 设该社区癌症发病率为 0.5%, 问某人反应为阳性时该人患癌症的概率.

↓Example

解:

A: 病人患癌症. B: 病人阳性

$P(B|A)=0.95$, $P(B^c|A^c)=0.95$

$P(A)=0.005$ ← Prior.

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A^c)P(A^c)+P(B|A)P(A)}$$

$P(B|A^c)+P(B^c|A^c)=1$

假设某个人独立向同一目标射击 n 次, 每次命中目标的概率为 $p(p < 0.05)$, 求他在 n 次射击中至少有一次命中目标的概率.

解: A_i：第 i 次命中

$$P(A_1+\cdots+A_n) = 1 - P(\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_n)$$
$$= 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)\cdots P(\bar{A}_n)$$
$$= 1 - (1-p)^n$$

注意：每次命中概率很小，但 $n\to\infty$ 时，至少命中1次的概率为1.

↑Example

如果我们提出这样一个问题:“你考试作弊过吗?”恐怕我们得不到正确的回答。对此,我们的另一种做法是列出如下两个问题(其中一个是无关紧要的):

S: 你考试作弊过吗?

T: 你的电话号码末尾是偶数吗?

要求被提问者在无人旁观情况下投掷一个硬币,出现正面时正确回答 S,反面时正确回答 T。提问者并不知道被提问者回答的是哪个问题。在一次对 120 名学生的调查中,有 40 个回答“是”。试计算考试作弊的概率。$= \frac{\text{回答S且是}}{\text{回答S}}$

$P(Y) = P(Y|S)P(S) + P(Y|T)P(T)$

$= \frac{1}{2}[P(Y|S) + P(Y|T)]$

$\frac{1}{3} = \frac{1}{2}P(Y|S) + \frac{1}{4}$

↓Example

解: S: 回答S, T: 回答T, Y: 回答是

$\Rightarrow P(Y|S) = \frac{1}{6}$

$$P(Y|S) = \frac{P(SY)}{P(S)} = \frac{P(S|Y)P(Y)}{P(S)} = \frac{? \cdot 1/3}{1/2}$$