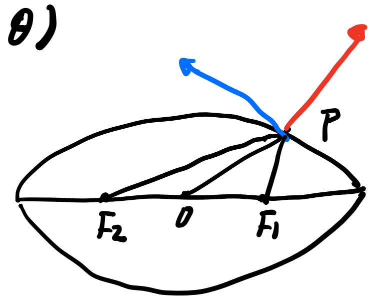
习题 2.3-11

设 (x, y) 是椭圆周 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上的点.

令 $x=a\cos\theta,\ y=b\sin\theta$, 则切方向:

$$(x', y')=(-a\sin\theta,\ b\cos\theta)$$



⇒ 法方向:

$$\vec{n}=(-y', x')=(b\cos\theta,\ a\sin\theta)$$

椭圆焦点为 $(\pm c, 0)$, $c=\sqrt{a^2-b^2}$.

下证: $\overrightarrow{F_1P}$ 和 $\vec{n}$ 的夹角 = $\overrightarrow{F_2P}$ 和 $\vec{n}$ 的夹角.

只须证明:

$$\frac{(a\cos\theta-c,\ b\sin\theta)\cdot\vec{n}}{\sqrt{(a\cos\theta-c)^2+b^2\sin^2\theta}}=\frac{(a\cos\theta+c,\ b\sin\theta)\cdot\vec{n}}{\sqrt{(a\cos\theta+c)^2+b^2\sin^2\theta}}\quad(*)$$

$$\frac{(a\cos\theta-c,\ b\sin\theta)\cdot(b\cos\theta,\ a\sin\theta)}{(a\cos\theta+c,\ b\sin\theta)\cdot(b\cos\theta,\ a\sin\theta)}=\frac{ab-bc\cos\theta}{ab+bc\cos\theta}$$

$$=\frac{a-c\cos\theta}{a+c\cos\theta},$$

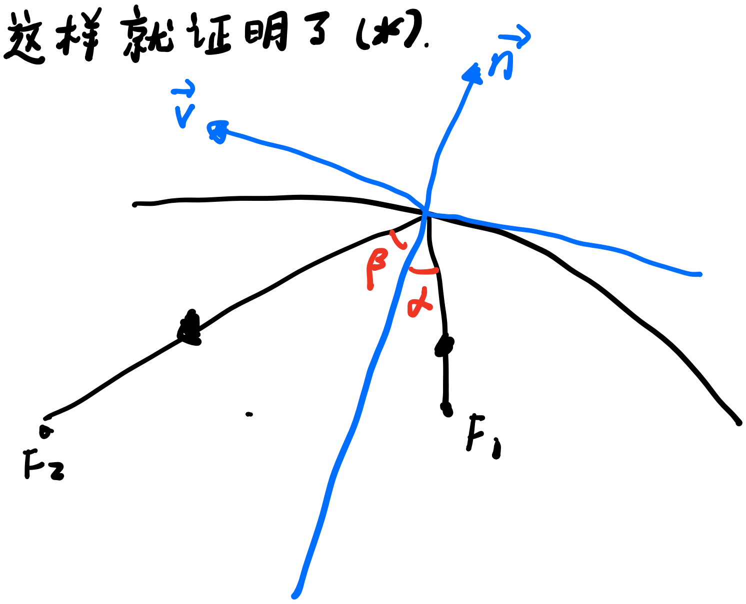
$$(a\cos\theta-c)^2+b^2\sin^2\theta=a^2\cos^2\theta+c^2-2ac\cos\theta+(a^2-c^2)\sin^2\theta$$

$$=a^2-2ac\cos\theta+c^2\cos\theta$$

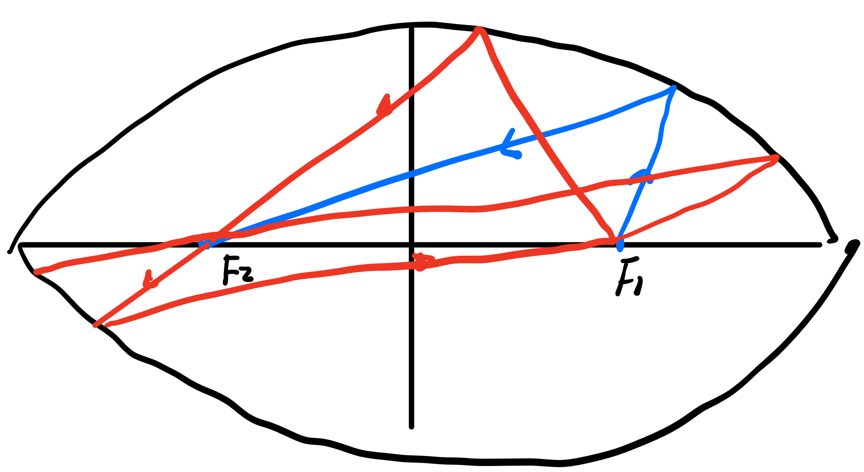
$$= (a - c\cos\theta)^2$$

$$(a\cos\theta + c)^2 + b^2\sin^2\theta = (a + c\cos\theta)^2.$$

这样就证明了(*).



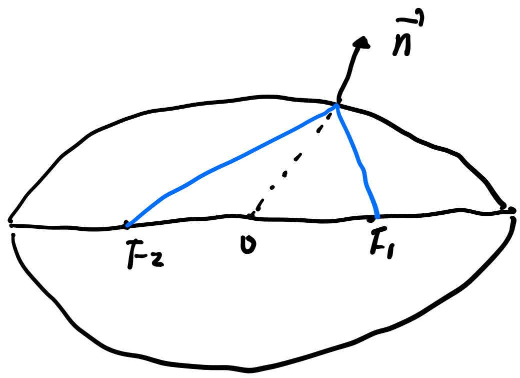
如图，$\alpha=\beta$. 因此，光线从F_1发出，经椭圆周反射之后到达F_2.



另证：椭圆的轨道是二元函数

$$f(p) = |P-F_1| + |P-F_2|$$

的水平集：

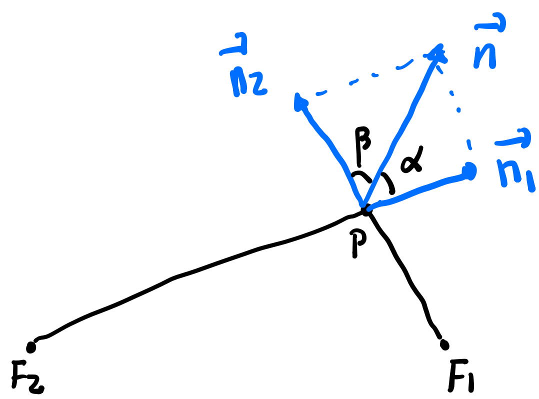


$$\sqrt{(a\cos\theta - c)^2 + b^2\sin^2\theta} + \sqrt{(a\cos\theta + c)^2 + b^2\sin^2\theta}$$

$$= a - c\cdot\cos\theta + (a + c\cdot\cos\theta) = 2a.$$

因此，法方向 $\vec{n}$ 是 $f(p)$ 增加最快的方向（梯度）.

由 f 的定义，$|P-F_1|$ 增加最快的方向是 $\overrightarrow{F_1P}$，而 $|P-F_2|$ 增加最快的方向是 $\overrightarrow{F_2P}$，如图：



$\Rightarrow \alpha = \beta$.

（参考第六章，§6）