第四章　级数

一、重点与难点

二、内容提要

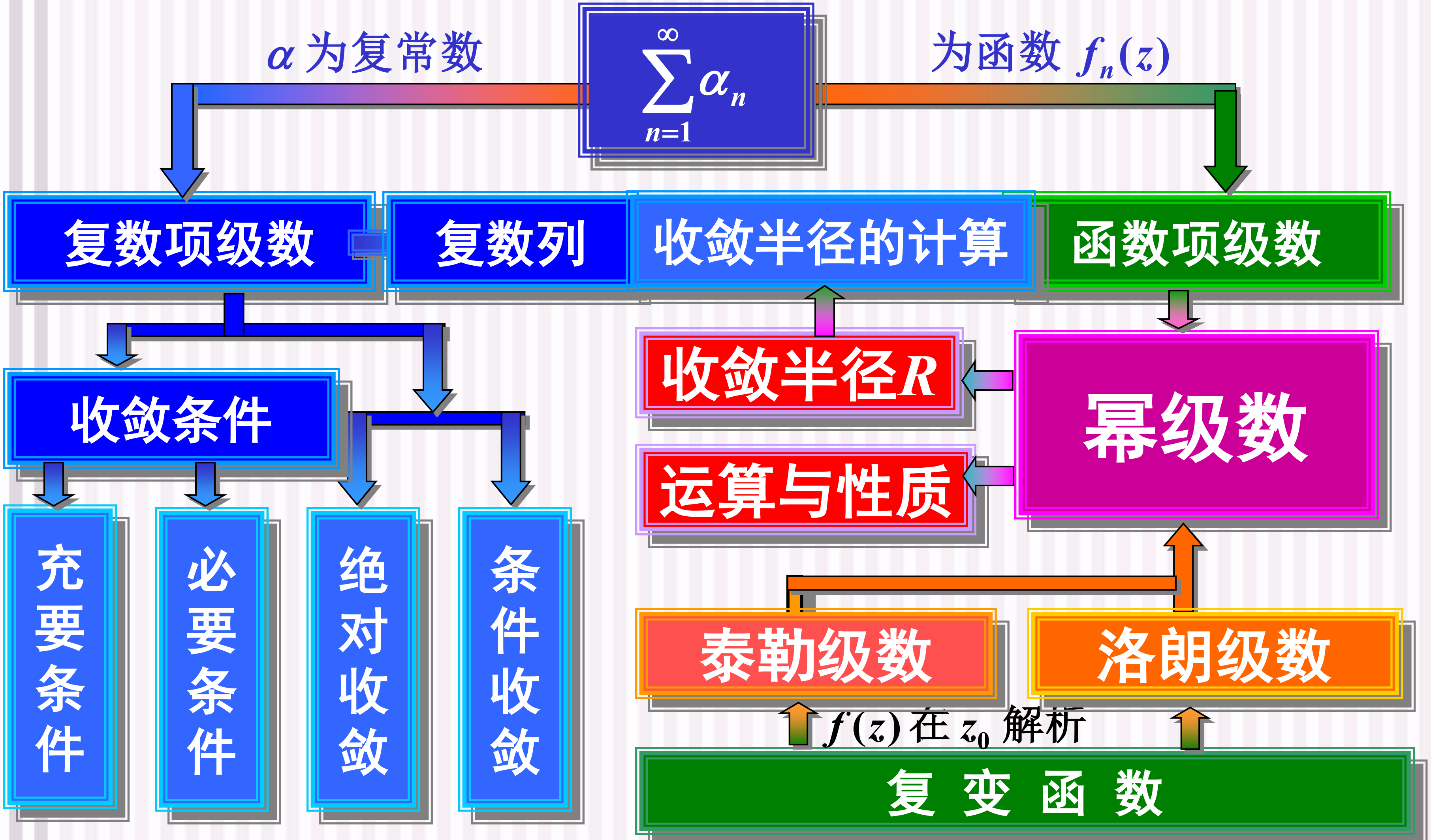
三、典型例题

一、重点与难点

重点： 函数展开成泰勒级数与洛朗级数

难点： 函数展开成洛朗级数

二、内容提要


α 为复常数
$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$
为函数 $f_n(z)$
复数项级数
复数列
收敛半径的计算
函数项级数
收敛条件
充要条件
必要条件
绝对收敛
条件收敛
收敛半径R
运算与性质
幂级数
泰勒级数
洛朗级数
$f(z)$ 在 z_0 解析
复 变 函 数

1. 复数列

设 $\{\alpha_n\}$ $(n=1,2,\cdots)$ 为一复数列, 其中 $\alpha_n = a_n + ib_n$, 又设 $\alpha = a + ib$ 为一确定的复数, 如果任意给定 $\varepsilon > 0$, 相应地都能找到一个正数 $N(\varepsilon)$, 使 $|\alpha_n - \alpha| < \varepsilon$ 在 $n > N$ 时成立, 那末 α 称为复数列 $\{\alpha_n\}$ 当 $n \to \infty$ 时的极限, 记作

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha .$$

此时也称复数列 $\{\alpha_n\}$ 收敛于 α.

2.复数项级数

1) 定义 设$\{\alpha_n\}=\{a_n+b_n\}\ (n=1,2,\cdots)$为一复数列,

表达式 $$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n+\cdots$$

称为复数项无穷级数.

部分和 其最前面 n 项的和 $s_n=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$

称为级数的部分和.

2) 复级数的收敛与发散

如果部分和数列$\{s_n\}$收敛，那末级数$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$收敛，

并且极限$\lim_{n\to\infty} s_n = s$称为级数的和.

如果部分和数列$\{s_n\}$不收敛，那末级数$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$发散.

充要条件 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$收敛$\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$都收敛

必要条件 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$收敛$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0$

3)复级数的绝对收敛与条件收敛

如果$\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$收敛, 那末称级数$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$为绝对收敛.

非绝对收敛的收敛级数称为条件收敛级数.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\text{绝对收敛}\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}a_n\text{与}\sum_{n=1}^{\infty}b_n\text{绝对收敛.}$$

$$\text{绝对收敛}\ \underset{\not\longleftarrow}{\longrightarrow}\ \text{条件收敛}$$

3.复变函数项级数

设$\{f_n(z)\}$ $(n=1,2,\cdots)$为一复变函数序列，其中各项在区域D内有定义. 表达式

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots$$

称为复变函数项级数, 记作$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$.

级数最前面 n 项的和

$$s_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z)$$

称为这级数的**部分和**.

4. 幂级数

1) 在复变函数项级数中, 形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots + c_n(z-a)^n + \cdots$$

的级数称为**幂级数**.

当 $a=0$ 时,

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n + \cdots.$$

2) 收敛定理

----阿贝尔Abel定理

如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在 $z = z_0 (\neq 0)$ 收敛, 那末对满足 $|z| < |z_0|$ 的 z, 级数必绝对收敛, 如果在 $z = z_0$ 级数发散, 那末对满足 $|z| > |z_0|$ 的 z, 级数必发散.

3)收敛圆与收敛半径

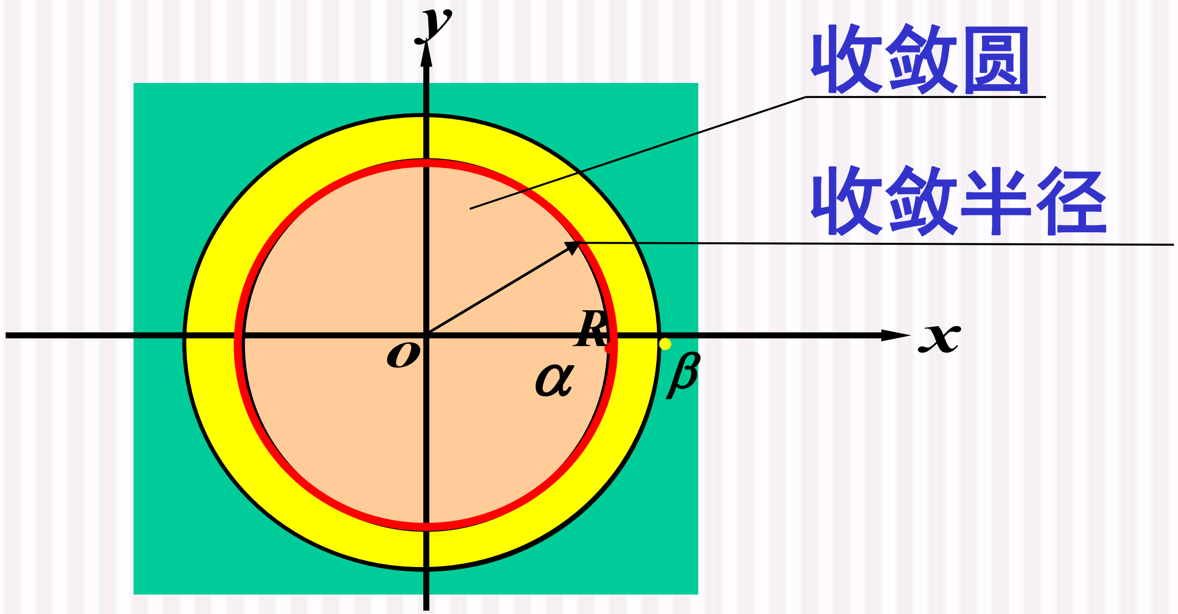
对于一个幂级数, 其收敛半径的情况有三种:

(1) 对所有的正实数都收敛.即级数在复平面内处处收敛.

(2) 对所有的正实数除$z=0$外都发散.

此时, 级数在复平面内除原点外处处发散.

(3) 既存在使级数发散的正实数, 也存在使级数收敛的正实数.



注意 在收敛圆周上是收敛还是发散, 不能作出一般的结论, 要对具体级数进行具体分析.

4)收敛半径的求法

方法1: 比值法

如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lambda \neq 0$, 那末收敛半径 $R = \dfrac{1}{\lambda}$.

方法2: 根值法

如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|} = \lambda \neq 0$, 那末收敛半径 $R = \dfrac{1}{\lambda}$.

即
$$R = \begin{cases} 1/\lambda, & 0 < \lambda < +\infty; \\ +\infty, & \lambda = 0; \\ 0, & \lambda = +\infty. \end{cases}$$

5) 幂级数的运算与性质

(1)设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n,\ R=r_1,\quad g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n,\ R=r_2.$

$$f(z)\pm g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n\pm\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)z^n,$$

$$R=\min(r_1,r_2)$$

$$f(z)\cdot g(z)=(\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n)\cdot(\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n),$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(a_nb_0+a_{n-1}b_1+\cdots+a_0b_n)z^n,\qquad |z|<R$$

(2) 幂级数的代换(复合)运算

如果当 $|z|<r$ 时, $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$, 又设在 $|z|<R$ 内 $g(z)$ 解析且满足 $|g(z)|<r$, 那末当 $|z|<R$ 时, $f[g(z)]=\sum_{n=0}^{\infty}a_n[g(z)]^n$.

复变幂级数在收敛圆内的解析性

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ 的收敛半径为 R, 那末

(1) 它的和函数 $f(z)$, 即 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ 是收敛圆 $|z-a|<R$ 内的解析函数.

(2) $f(z)$ 在收敛圆 $|z-a|<R$ 内的导数可将其幂级数逐项求导得到, 即 $f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z-z_0)^{n-1}$.

(3) $f(z)$ 在收敛圆内可以逐项积分, 即

$$\int_c f(z)\mathrm{d}z=\sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_c (z-a)^n \mathrm{d}z, \quad c\in |z-a|<R.$$

或 $$\int_a^z f(\zeta)\mathrm{d}\zeta=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}(z-a)^{n+1}.$$

5. 泰勒级数

1)定理设 $f(z)$ 在区域 D 内解析, z_0 为 D 内的一点, d 为 z_0 到 D 的边界上各点的最短距离, 那末当 $|z-z_0|<d$ 时, $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ 成立,

泰勒级数

其中 $c_n = \dfrac{1}{n!} f^{(n)}(z_0),\ n=0,1,2,\cdots\cdots$

2)常见函数的泰勒展开式

$$(1)\ e^{z}=1+z+\frac{z^{2}}{2!}+\cdots+\frac{z^{n}}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n}}{n!},\qquad (|z|<\infty)$$

$$(2)\ \frac{1}{1-z}=1+z+z^{2}+\cdots+z^{n}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}z^{n},\qquad (|z|<1)$$

$$(3)\ \frac{1}{1+z}=1-z+z^{2}-\cdots+(-1)^{n}z^{n}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}z^{n},\qquad (|z|<1)$$

$$(4)\ \sin z=z-\frac{z^{3}}{3!}+\frac{z^{5}}{5!}-\cdots+(-1)^{n}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots,\qquad (|z|<\infty)$$

$$(5)\ \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \qquad (|z| < \infty)$$

$$(6)\ \ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} + \cdots,$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} \qquad (|z| < 1)$$

$$(7)\ (1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} z^3 +$$

$$\cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} z^n + \cdots, \qquad (|z| < 1)$$

6. 洛朗级数

1) 定理　设 $f(z)$ 在圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内处处解析,那末 $f(z)$ 在 D 内可展开成洛朗级数

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

其中　$c_n = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta \qquad (n = 0, \pm 1, \cdots)$

为洛朗系数.

C为圆环域内绕 z_0 的任一正向简单闭曲线.

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$$

$f(z)$在圆环域内的洛朗(Laurent)级数.

函数 $f(z)$在圆环域内的洛朗展开式

某一圆环域内的解析函数展开为含有正、负幂项的级数是唯一的, 这就是$f(z)$ 的洛朗级数.

2)将函数展为洛朗级数的方法

(1) 直接展开法

根据洛朗定理求出系数 $c_n=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta,$

然后写出 $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n.$

(2) 间接展开法

根据正、负幂项组成的的级数的唯一性, 可用代数运算、代换、求导和积分等方法去展开 .

三、典型例题

例1　判别级数的敛散性.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{i}{2^n}\right)$;

解　因为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，　$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$收敛，

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{i}{2^n}\right)$发散.

三、典型例题

例1 判别级数的敛散性.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+5i}{2}\right)^n$;

解 因为 $\left|\left(\frac{1+5i}{2}\right)^n\right|=\left(\frac{\sqrt{26}}{2}\right)^n$, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{26}}{2}\right)^n\neq 0$,

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+5i}{2}\right)^n$ 发散.

三、典型例题

例1 判别级数的敛散性.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}$;

解 因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}=i-\frac{1}{2}-\frac{i}{3}+\frac{1}{4}+\frac{i}{5}+\cdots$

$$=\underbrace{\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\cdots\right)}_{\text{收敛}}+i\underbrace{\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots\right)}_{\text{收敛}},$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}$ 收敛.

三、典型例题

例1　判别级数的敛散性.

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2+3i)^n}$.

解　设 $\alpha_n=\frac{1}{(2+3i)^n}$,

因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{|\alpha_{n+1}|}{|\alpha_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|2+3i|}=\frac{1}{\sqrt{13}}<1$,

由正项级数的比值判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2+3i)^n}$ 绝对收敛.

例2　求下列幂级数的收敛半径

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$　(2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$　(3) $\sum_{n=0}^{\infty}n!z^n$　(4) $\sum_{k=1}^{\infty}z^{k^2}$.

解 (1) 由 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^2}{(n+1)^2}\right|=1$, 得 $R=1$.

(2) 由 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!}{(n+1)!}\right|=0$, 得 $R=\infty$.

(3) 由 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!}{n!}\right|=\infty$, 得 $R=0$.

(4) $\sum_{k=1}^{\infty} z^{k^2}$

因为级数是缺项级数，即 $C_n = \begin{cases} 0, & n \neq k^2; \\ 1, & n = k^2. \end{cases}$

故 $\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{C_n} = 1, \qquad R = 1.$

解析函数展为幂级数的方法

例3　展开函数 $f(z)=e^{e^z}$ 成 z 的幂级数到 z^3 项.

解　　利用定义来求.

$$f'(z)=e^z e^{e^z},\quad f''(z)=e^z e^{e^z}+(e^z)^2 e^{e^z},$$

$$f'''(z)=e^z e^{e^z}+3(e^z)^2 e^{e^z}+(e^z)^3 e^{e^z}$$

由此得

$$f(0)=e, f'(0)=e, f''(0)=2e, f'''(0)=5e.$$

所以

$$e^{e^z}=e+ez+ez^2+\frac{5}{6}ez^3+\cdots.$$

例4 求 $f(z)=e^z\cos z$ 在$z=0$的泰勒展式.

分析： 采用间接法即利用已知的展开式来求.

解 因为 $e^z\cos z=\dfrac{1}{2}e^z(e^{iz}+e^{-iz})$

$$=\frac{1}{2}[e^{(1+i)z}+e^{(1-i)z}]=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+i)^n z^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-i)^n z^n}{n!}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}[(1+i)^n+(1-i)^n]z^n\quad(|z|<\infty)$$

由于 $1+i=\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}}$, $1-i=\sqrt{2}e^{\frac{-\pi i}{4}}$;

所以$e^{z}\cos z=\dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(\sqrt{2})^{n}}{n!}\left(e^{\frac{n\pi i}{4}}+e^{\frac{-n\pi i}{4}}\right)z^{n}$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{2})^{n}}{n!}\cos\frac{n\pi}{4}z^{n}. \qquad (|z|<\infty)$$

例5 把 $e^z \sin z$ 展开成 z 的幂级数.

分析：利用级数的乘除运算较为简单.

解 因为 $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$,

两级数均在 $|z| < \infty$ 内绝对收敛,

故乘积也绝对收敛.

所以 $e^z \sin z = 0 + (1+0)z + (0+1+0)z^2 + \cdots$

$$= z + z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{30}z^5 + \cdots. \quad (|z| < \infty)$$

例6 求 $f(z)=\sec z$ 在点 $z=0$ 的泰勒展开式.

解 利用待定系数法

设 $f(z)=c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots+c_nz^n+\cdots$

又 $f(-z)=f(z)=c_0-c_1z+c_2z^2-\cdots,$

由泰勒展式的唯一性,

$c_1=c_3=c_5=\cdots=0,$ 又 $\cos z=1-\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^4}{4!}-\cdots,$

所以

$$1=\cos z\sec z=\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots\right)(c_0+c_2z^2+c_4z^4+\cdots)$$

$$= c_0 + \left(c_2 - \frac{c_0}{2!}\right)z^2 + \left(c_4 - \frac{c_2}{2!} + \frac{c_0}{4!}\right)z^4 + \cdots$$

比较两端系数得

$$c_0 = 1, \quad c_2 = \frac{1}{2!}, \quad c_4 = \frac{5}{4!}, \cdots$$

所以 $\sec z = 1 + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{5}{4!}z^4 + \cdots \quad \left(|z| < \frac{\pi}{2}\right)$

例7 求函数 $\dfrac{1}{(1-z)^3}$ 在 $|z|<1$ 内的泰勒展开式.

分析：利用逐项求导、逐项积分法.

解 因为 $\dfrac{1}{(1-z)^3}=\dfrac{1}{2}[(1-z)^{-1}]''\qquad(|z|<1)$

所以 $$\frac{1}{(1-z)^3}=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}z^n\right)''=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)z^{n-2}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}(m+2)(m+1)z^m.\qquad(|z|<1)$$

例8 把 $e^{\frac{1}{1-z}}$ 展开成 z 的幂级数.

解 利用微分方程法

因为 $f(z)=e^{\frac{1}{1-z}}$,

$$f'(z)=e^{\frac{1}{1-z}}\frac{1}{(1-z)^2}=f(z)\frac{1}{(1-z)^2},$$

所以 $(1-z)^2 f'(z)-f(z)=0,$

对上式求导得 $(1-z)^2 f''(z)+(2z-3)f'(z)=0$

$$(1-z)^2 f'''(z)+(4z-5)f''(z)+2f'(z)=0$$

$$\cdots\cdots$$

由此可得

$$f(0)=f'(0)=e,\quad f''(0)=3e,\quad f'''(0)=13e,\quad \cdots$$

故 $$e^{\frac{1}{1-z}}=e\left(1+z+\frac{3}{2!}z^2+\frac{13}{3!}z^3+\cdots\right).\qquad (|z|<1)$$

例9 求 $f(z)=\dfrac{z^4+z^3-5z^2-8z-7}{(z-3)(z+1)^2}$ 在点 $z=0$ 的泰勒展开式.

分析: 利用部分分式与几何级数结合法. 即把函数分成部分分式后, 应用等比级数求和公式.

解

$$f(z)=z+2+\frac{2}{z-3}+\frac{1}{(z+1)^2}$$

$$\frac{1}{z-3}=-\frac{1}{3}\left(1-\frac{z}{3}\right)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3^{n+1}}\right)z^n \qquad (|z|<3)$$

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{1-(-z)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n \qquad (|z|<1)$$

两端求导得

$$-\frac{1}{(1+z)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}n(-1)^n z^{n-1},\quad (|z|<1)$$

即 $$\frac{1}{(1+z)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nz^{n-1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)z^n\quad (|z|<1)$$

故 $$f(z)=z+2+\frac{2}{z-3}+\frac{1}{(z+1)^2}$$

$$= z + 2 + 2\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3^{n+1}}\right)z^n + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)z^n$$

$$= 2 + z - \frac{2}{3} - \frac{2}{9}z + 2\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{-1}{3^{n+1}}\right)z^n + 1 - 2z + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n(n+1)z^n$$

$$= 2\frac{1}{3} - 1\frac{2}{9}z + \sum_{n=2}^{\infty}\left[(-1)^n(n+1) - \frac{2}{3^{n+1}}\right]z^n \qquad (|z| < 1)$$

例10 求 $z^2e^{\frac{1}{z}}$ 在 $z=0$ 的去心邻域的洛朗级数.

解 在 $0<|z|<\infty$ 内,

因为 $e^z=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} \Rightarrow e^{\frac{1}{z}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^n}$,

所以 $z^2e^{\frac{1}{z}}=z^2\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\cdots+\frac{1}{n!z^n}+\cdots\right)$

$$=z^2+z+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!z}+\cdots+\frac{1}{n!z^{n-2}}+\cdots.$$

例11 将 $f(z)=\dfrac{1}{(z+i)(z-2)}$ 在下列圆环域内展开成洛朗级数.

(1) $1<|z|<2$, (2) $2<|z|<\infty$.

解 (1) 在 $1<|z|<2$ 内, 有 $\left|\dfrac{i}{z}\right|<1$, $\left|\dfrac{z}{2}\right|<1$.

$$f(z)=\frac{1}{(z+i)(z-2)}=-\frac{1}{2+i}\cdot\left(\frac{1}{z+i}+\frac{1}{2-z}\right)$$

$$=\frac{-1}{2+i}\cdot\left[\frac{1}{z\left(1+\frac{i}{z}\right)}+\frac{1}{2\left(1-\frac{z}{2}\right)}\right]=-\frac{1}{2+i}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n z^{-n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}\right]$$

$$=-\frac{1}{2+i}\sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n z^{-n-1}-\frac{1}{2+i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}.$$

(2) 在 $2<|z|<\infty$ 内, $\left|\frac{i}{z}\right|<1,\quad \left|\frac{2}{z}\right|<1$

故 $f(z)=-\frac{1}{2+i}\left[\frac{1}{z+i}-\frac{1}{z-2}\right]$

$$=-\frac{1}{2+i}\left[\frac{1}{z\left(1+\frac{i}{z}\right)}-\frac{1}{z\left(1-\frac{2}{z}\right)}\right]$$

$$=-\frac{1}{2+i}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n z^{-n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}2^n\cdot z^{-n-1}\right]$$

$$=-\frac{1}{2+i}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-i)^n-2^n\right]z^{-n-1}.$$

同一级数在不同圆环域内的洛朗级数展开式是不同的.

例12 求积分 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z$ 的值, 其中 C 为正向圆周 $|z|=3$, 且 $f(z)=\dfrac{1}{z(z+1)^2}$.

解 在 $1<|z|<\infty$ 时,

$$f(z)=\frac{1}{z\cdot(z+1)^2}=\frac{1}{z}\cdot\left(\frac{-1}{1+z}\right)'=-\frac{1}{z}\left[\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z}}\right]'$$

$$=-\frac{1}{z}\left[\frac{1}{z}\cdot\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\cdots\right)\right]'$$

$$=-\frac{1}{z}\cdot\left(-\frac{1}{z^2}+\frac{2}{z^3}-\frac{3}{z^4}-\cdots\right)=\frac{1}{z^3}-\frac{2}{z^4}+\cdots$$

因为 $C_n=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta$

所以 $C_{-1}=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C f(\zeta)\mathrm{d}\zeta \Rightarrow \oint_C f(z)\mathrm{d}z=2\pi iC_{-1}$

故 $\displaystyle\oint_C \frac{1}{z(z+1)^2}\mathrm{d}z=0.$