博学 审问 慎思 明辨 笃行

概率论与数理统计

中山大學 SUN YAT-SEN UNIVERSITY

主讲老师：邝东阳，kuangdy@mail.sysu.edu.cn

助教：黄培， huangp89@mail2.sysu.edu.cn

范志隆，fanzhlong@mail2.sysu.edu.cn

Part 1

随机变量函数的分布

博学 | 审问 | 慎思 | 明辨 | 笃行

随机变量函数的分布

中山大学 SUN YAT-SEN UNIVERSITY

已知X的分布，要求 $Y=g(X)$ 的分布

$$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$$

$$Y = g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$$

$$(Y_1, Y_2, \cdots, Y_m)$$

$$Y_i = g_i(X_1, X_2, \cdots, X_n)$$

离散型

设 X 的分布律为

$$P(X=x_i)=p_i,\quad i=1,2,\cdots$$

$g:R\to R$，令 $Y=g(X)$，则 Y 的分布律为

$$P(Y=y_j)=P(g(X)=y_j)=\sum_{x_i:g(x_i)=y_j}P(X=x_i)=\sum_{i:g(x_i)=y_j}p_i$$

离散型

例 2.6.1 设 X 有分布列

x	0	1	2	3
$P(X=x)$	0.4	0.3	0.2	0.1

则 X 的函数 $Y=2X+1$ 和 $Z=(X-1)^2$ 分别有分布列

y	1	3	5	7
$P(Y=y)$	0.4	0.3	0.2	0.1

z	0	1	4
$P(Z=z)$	0.3	0.6	0.1

设随机向量 X 的分布律为 $P(X=x)$，则 X 的函数 $Y=g(X)$ 的分布律为

$$P(Y=y)=P(g(X)=y)=\sum_{x:g(x)=y}P(X=x)$$

特别当 ξ,η 是相互独立的非负整值随机变量，各有分布律 $\{a_k\}$ 与 $\{b_k\}$. 那么 $\xi+\eta$ 有分布律

$$P(\xi+\eta=n)=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$$

称此公式为**离散卷积公式**

回顾上一节结论

设 $X \sim B(n,p)$，$Y \sim B(m,p)$ 且 X 和 Y 相互独立，则 $X+Y \sim B(n+m,p)$。

设 $X \sim P(\lambda)$，$Y \sim P(\mu)$，且 X 和 Y 独立，则有 $X+Y \sim P(\lambda+\mu)$。即 *Poisson* 分布亦具有再生性。

这种性质称为**再生性**。

再生性

- 二项分布 (关于试验次数具有再生性)
- $Poisson$ 分布 (关于参数 λ 具有再生性)
- $Pascal$ 分布 (关于成功次数 r 具有再生性)
- 正态分布 (关于两个参数都具有再生性)
- χ^2 分布具有再生性

分布函数法

命题 2.6.1 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，则 $Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$.

证 $p_X(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$，

$$\boxed{F_Y(y) = P(Y \leqslant y)} = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leqslant y\right) = P(X \leqslant \sigma y + \mu) = F_X(\sigma y + \mu),$$

$$\boxed{p_Y(y) = F_Y'(y)} = (F_X(\sigma y + \mu))_y' = F_X'(\sigma y + \mu)(\sigma y + \mu)_y'$$

$$= \sigma p_X(\sigma y + \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}.$$

标准化正态

例 2.6.4 $X\sim N(3,25)$，利用附录 D 的表 1 求概率 $P(X\leqslant 12)$ 和 $P(0\leqslant X\leqslant 12)$.

$$P(X\leqslant 12)=P\left(\frac{X-3}{5}\leqslant\frac{12-3}{5}\right)=P(Z\leqslant 1.8)=\Phi(1.8)=0.9641,$$

$$\begin{aligned}P(0\leqslant X\leqslant 12)&=P\left(\frac{0-3}{5}\leqslant\frac{X-3}{5}\leqslant\frac{12-3}{5}\right)\\&=P(-0.6\leqslant Z\leqslant 1.8)=P(Z\leqslant 1.8)-P(Z\leqslant -0.6)\\&=\Phi(1.8)-\Phi(-0.6)=\Phi(1.8)+\Phi(0.6)-1\\&=0.9641+0.7257-1=0.6898.\end{aligned}$$

设X是一随机变量，有连续的分布函数$F(x)$，则$Y=F(X)$服从均匀分布$U(0,1)$

定义

$$F^{-1}(y)=\inf\{x:F(x)>y\},0<y<1,$$

$$F(x)\leqslant y \Leftrightarrow x\leqslant F^{-1}(y).$$

故对$0<y<1$，

$$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(F(X)\leqslant y)=P(X\leqslant F^{-1}(y))=F(F^{-1}(y))=y.$$

即 Y 的分布函数为均匀分布 $U(0,1)$ 的分布函数，从而 $Y\sim U(0,1)$.

2）设随机变量 Y 服从均匀分布 $U(0,1)$，$F(x)$ 是一分布函数，定义

$$F^{-1}(y)=\inf\{x:F(x)>y\},0<y<1 \qquad (2.6.6)$$

（如果函数 $F(x)$ 连续且严格单调上升，则 $F^{-1}(y)$ 就是 $F(x)$ 的反函数），则随机变量 $X=F^{-1}(Y)$ 有分布函数 $F_X(x)=F(x)$.

2）按照(2.6.6)式的定义及 $F(x)$ 的右连续性，有

$$F(x)<y\Rightarrow x<F^{-1}(y)\Rightarrow F(x)\leqslant y.$$

故

$$P(Y>F(x))\leqslant P(F^{-1}(Y)>x)\leqslant P(Y\geqslant F(x)).$$

由于 $P(Y>F(x))=P(Y\geqslant F(x))=1-F(x)$，故

$$P(F^{-1}(Y)>x)=1-F(x),$$

$$F_X(x)=P(X\leqslant x)=1-P(X>x)=1-P(F^{-1}(Y)>x)=F(x).$$

密度变换公式-1

定理 1. *[密度变换公式]* 设随机变量 X 有概率密度函数 $f(x)$, $x \in (a,b)(a,b$ 可以为 $\infty)$, 而 $y = g(x)$ 在 $x \in (a,b)$ 上是严格单调的连续函数，存在唯一的反函数 $x = h(y), y \in (\alpha,\beta)$ 并且 $h'(y)$ 存在且连续，那么 $Y = g(X)$ 也是连续型随机变量且有概率密度函数

$$p(y) = f(h(y))|h'(y)|, \quad y \in (\alpha,\beta).$$

对比课本定理2.6.2

设随机变量 $X \sim U(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, 求 $Y = tgX$ 的概率密度函数。

$$\begin{aligned} F(y) &= P(Y \le y) = P(tg(X) \le y) \\ &= P(X \le arctg(y)) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{arctg(y)} \frac{1}{\pi} dy = \frac{1}{\pi} arctg(y) + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$f(y) = F'(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}. \qquad -\infty < y < \infty$$

尝试利用上述公式直接求解

此分布称为Cauchy分布。Cauchy分布的概率密度一般形式为

$$p(x) = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + (x-\mu)^2}, \quad \lambda \ne 0, -\infty < \mu < \infty.$$

例 2.6.15 设随机变量 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，$Y=\mathrm{e}^X$，则称 Y 服从对数正态分布. 因为 $X=\ln Y$，根据推论 2.6.1，Y 有密度(这里 $G=(0,+\infty)$)

$$p_Y(y)=|(\ln y)'|p_X(\ln y)I_{(0,+\infty)}(y)=\frac{1}{\sigma y\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-(\ln y-\mu)^2/(2\sigma^2)}I_{(0,+\infty)}(y).$$

例 2.6.16 设随机变量 $X \sim E(\lambda)$，则随机变量 $Y=\lambda X \sim E(1)$.

证 X 有密度 $p_X(x)=\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}I_{(0,+\infty)}(x)$，由推论 2.6.2 得

$$p_Y(y)=\frac{1}{\lambda}p_X(y/\lambda)=\mathrm{e}^{-y}I_{(0,+\infty)}(y/\lambda)=\mathrm{e}^{-y}I_{(0,+\infty)}(y),$$

$Y \sim E(1)$.

密度变换公式-2

设随机变量 ξ 的密度函数为 $p_\xi(x)$, $a < x < b$. 如果可以把 (a,b) 分割为一些 (有限个或可列个) 互不重叠的子区间的和 $(a,b)=\bigcup_j I_j$, 使得函数 $u=g(t)$, $t\in(a,b)$ 在每个子区间上有唯一的反函数 $h_j(u)$, 并且 $h_j'(u)$ 存在连续, 则 $\eta=g(\xi)$ 是连续型随机变量, 其密度函数为:

$$p_\eta(x)=\sum_j p_\xi(h_j(x))|h_j'(x)|\ .$$

对比课本定理2.6.4

设 $X \sim N(0,1)$，求 $Y = X^2$ 的概率密度。

由于函数 $y = x^2$ 在 $(-\infty, 0)$ 和 $[0, \infty)$ 上严格单调，

$$\begin{aligned} f(y) &= \phi(-\sqrt{y})|-\sqrt{y}'|I_{\{y>0\}} + \phi(\sqrt{y})|\sqrt{y}'|I_{\{y>0\}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{y}{2}} I_{\{y>0\}} \end{aligned}$$

$$Y \sim \Gamma(1/2, 1/2)$$

$$Y \sim \chi_1^2.$$

对比课本例2.6.6使用分布函数法的解法

例 2.6.7 设 X,Y 相互独立,都服从正态分布 $N(0,1)$,求 $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ 的分布.

解 当 $z<0$ 时,$F_Z(z)=P(Z\leqslant z)=P(\sqrt{X^2+Y^2}\leqslant z)=0.$

当 $z\geqslant 0$ 时,$F_Z(z)=P(Z\leqslant z)=P(\sqrt{X^2+Y^2}\leqslant z)=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant z^2}\frac{1}{2\pi}e^{-(x^2+y^2)/2}dxdy,$

作极坐标变换 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ 得

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}\partial x/\partial r & \partial x/\partial\theta\\ \partial y/\partial r & \partial y/\partial\theta\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r,$$

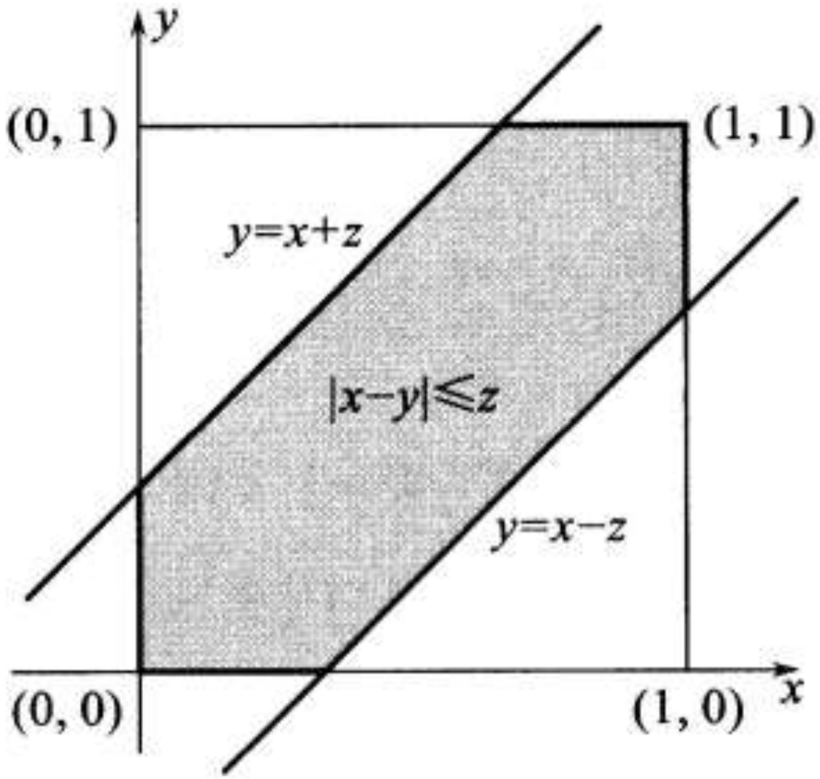
$$F_Z(z)=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^z\frac{1}{2\pi}e^{-r^2/2}|J|dr=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^z\frac{1}{2\pi}e^{-r^2/2}rdr=\int_0^z re^{-r^2/2}dr.$$

因此,Z 有密度

$$p_Z(z)=F_Z'(z)=ze^{-z^2/2}I_{[0,+\infty)}(z).$$

此分布称为瑞利(Rayleigh)分布.

例 2.6.8 设 X,Y 独立，都服从 $[0,1]$ 上的均匀分布，求 X 与 Y 的距离 $Z=|X-Y|$ 的密度.



当 $z<0$ 时 $F_Z(z)=0$,

当 $0\leqslant z<1$ 时,

$$F_Z(z)=P(|X-Y|\leqslant z)=\frac{\text{阴影面积}}{\text{正方形面积}}=2z-z^2.$$

$z\geq 1$时 $F_Z(z)=P(|X-Y|\leqslant z)=1.$

$$p_Z(z)=F'_Z(z)=2(1-z)I_{[0,1]}(z).$$

定理 2. 设 (ξ_1, ξ_2) 是 2 维连续型随机向量，具有联合密度函数 $p(x_1, x_2)$，设 $\zeta_j = f_j(\xi_1, \xi_2), j = 1, 2$. 若 (ξ_1, ξ_2) 与 (ζ_1, ζ_2) 一一对应，逆映射 $\xi_j = h_j(\zeta_1, \zeta_2), j = 1, 2$. 假定每个 $h_j(y_1, y_2)$ 都有一阶连续偏导数. 则 (ζ_1, ζ_2) 亦为连续型随机向量，且其联合概率密度为

$$q(y_1, y_2) = \begin{cases} p\left(h_1(y_1, y_2), h_n(y_1, y_2)\right)|J|, & (y_1, y_2) \in \mathbb{D}, \\ 0, & (y_1, y_2) \notin \mathbb{D}, \end{cases} \tag{2.1}$$

其中 $\mathbb{D}$ 是随机向量 (ζ_1, ζ_2) 的所有可能值的集合，J 是变换的 $Jaccobi$ 行列式，即

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} & \frac{\partial h_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial h_2}{\partial y_1} & \frac{\partial h_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}$$

对比课本定理2.6.3

在直角坐标平面上随机选取一点，分别以随机变量 ξ 与 η 表示其横坐标和纵坐标，可以认为 ξ 与 η 相互独立. 如果 ξ 与 η 都服从正态分布 $N(0,1)$，试求其极坐标 (ρ,θ) 的分布.

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases} \qquad |J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos t & -r\sin t \\ \sin t & r\cos t \end{vmatrix} = r\,.$$

$$p(x,y) = \frac{1}{2\pi}\exp\left\{-\frac{x^2+y^2}{2}\right\},$$

θ与ρ相互独立，

θ服从$[0,2\pi)$ 上的均匀分布；

$$q(r,t) = \frac{1}{2\pi} r\exp\left\{-\frac{r^2}{2}\right\}, \quad r>0,\ t\in[0,2\pi).$$

ρ 服从 Weibull 分布 (参数 $\lambda = 1/2, \alpha = 2$).

例 2.6.19 设 X_1,X_2 相互独立，都服从指数分布 $E(1)$. 令 $Y_1=X_1+X_2$, $Y_2=X_1/X_2$, 求 (Y_1,Y_2) 的联合密度.

$$p(x_1,x_2)=e^{-x_1-x_2}I_D(x_1,x_2),\qquad D=\{(x_1,x_2):x_1>0,x_2>0\}$$

$$\begin{cases} y_1=x_1+x_2, \\ y_2=x_1/x_2, \end{cases} \quad x_1,x_2\in D \qquad \begin{cases} x_1=\dfrac{y_1y_2}{1+y_2}, \\ x_2=\dfrac{y_1}{1+y_2}, \end{cases} \quad (y_1,y_2)\in G,\quad G=\{(y_1,y_2):y_1>0,y_2>0\}.$$

$$\frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(y_1,y_2)}=\begin{vmatrix} \dfrac{y_2}{1+y_2} & \dfrac{y_1}{(1+y_2)^2} \\ \dfrac{1}{1+y_2} & \dfrac{-y_1}{(1+y_2)^2} \end{vmatrix}=\frac{-y_1}{(1+y_2)^2}.\qquad q(y_1,y_2)=\frac{y_1}{(1+y_2)^2}e^{-y_1}I_G(y_1,y_2).$$

线性变换公式

推论 2.6.4 设随机向量 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}$ 有密度 $p_X(x)$，$\boldsymbol{A}$ 是非奇异矩阵，则随机向量 $\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}Y_1\\Y_2\end{pmatrix}=\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{b}$ 有密度

$$p_Y(\boldsymbol{y}) = p_X(\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{b}))\,|\det \boldsymbol{A}|^{-1}.$$

相互独立+最值分布

设 X,Y 独立，分别有分布函数 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$，又设 $R=\max\{X,Y\}$，$S=$ …… $X,Y\}$，则

$$F_R(r)=P(R\leqslant r)=P(\max\{X,Y\}\leqslant r)=P(X\leqslant r,Y\leqslant r)$$

$$=P(X\leqslant r)P(Y\leqslant r)=F_X(r)F_Y(r).$$

$$F_S(s)=P(S\leqslant s)=P(\min\{X,Y\}\leqslant s)=1-P(\min\{X,Y\}>s)$$

$$=1-P(X>s,Y>s)=1-P(X>s)P(Y>s)$$

$$=1-[1-P(X\leqslant s)][1-P(Y\leqslant s)]$$

$$=1-[1-F_X(s)][1-F_Y(s)].$$

推广到多个变量的情况？

设 $X_1, \ldots, X_n i.i.d \sim U(0,\theta), \theta > 0$, 求 $X_{(n)} = max_{1\le i\le n} X_i$ 的密度函数.

中山大學 SUN YAT-SEN UNIVERSITY

每个X_i的分布均为$F(x)$， 对应密度为$f(x)$由先前给出的公式

$$F_{X_{(n)}}(x) = F^n(x),$$

对上述公式求导得密度为

$$f_{X_n}(x) = nF^{n-1}(x)f(x)$$

和、差、积、商

定理 2.6.1 设二维随机向量(X,Y)的联合密度为$p(x,y)$，则随机变量$X+Y, X-Y, XY$和X/Y的密度分别为

1) $$p_{X+Y}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,z-x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}p(z-y,y)\mathrm{d}y. \tag{2.6.1}$$

2) $$p_{X-Y}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,x-z)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}p(z+y,y)\mathrm{d}y.$$

3) $$p_{XY}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,z/x)/|x|\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}p(z/y,y)/|y|\mathrm{d}y.$$

4) $$p_{X/Y}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(yz,y)|y|\mathrm{d}y. \tag{2.6.2}$$

和

$$F(z) = P(X + Y \le z) = \int\int_{x+y<z} f(x, y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{z-x} f(x, y)dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{z} f(x, t - x)dt = \int_{-\infty}^{z} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t - x)dx \right\} dt.$$

当X与Y独立时，分别记X和Y的概率密度为$f_1(x)$和$f_2(y)$，则$X + Y$的概率密度为

$$p(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(z - x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(z - y) f_2(y)dy$$

称此公式为**卷积公式**。

和

注 2.6.2　若 X,Y 都是只取非负整数值的离散型随机变量，则代替(2.6.1)式的是

$$P(X+Y=k)=\sum_{i=0}^{k}P(X=i,Y=k-i)$$

$$=\sum_{i=0}^{k}P(X=k-i,Y=i),\quad k=0,1,\cdots.$$

如有相互独立条件 $$=\sum_{i=0}^{k}P(X=k-i)P(Y=i),\quad k=0,1,\cdots.$$

命题 2.6.2　如果 X,Y 相互独立，且 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，则

$$X+Y\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2).$$

例 2.6.12 设随机变量 X,Y 相互独立，都服从指数分布 $E(\lambda)$，则 $Z=X+Y\sim\Gamma(2,\lambda)$.

由于 X,Y 独立，由(2.6.3)式得

$$
\begin{aligned}
p_Z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x)p_Y(z-x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} I_{[0,+\infty)}(x)\lambda \mathrm{e}^{-\lambda(z-x)} I_{[0,+\infty)}(z-x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 \mathrm{e}^{-\lambda z} I_{[0,+\infty)}(x) I_{(-\infty,z]}(x)\,\mathrm{d}x \\
&= I_{[0,+\infty)}(z)\int_0^z \lambda^2 \mathrm{e}^{-\lambda z}\,\mathrm{d}x = \lambda^2 z\mathrm{e}^{-\lambda z} I_{[0,+\infty)}(z).
\end{aligned}
$$

命题 2.6.3 设随机变量 X,Y 相互独立，$X\sim\Gamma(\alpha_1,\beta)$，$Y\sim\Gamma(\alpha_2,\beta)$，则

$$X+Y\sim\Gamma(\alpha_1+\alpha_2,\beta).$$

设 X 服从期望为 2 的指数分布，$Y \sim U(0,1)$，且 X 和 Y 相互独立。求 $X-Y$ 的概率密度和 $P(X \le Y)$。

由题设知$-Y \sim U(-1,0)$，并记X和$-Y$的密度分别为f_1和f_2

$$f_{X-Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(z-x) dy = \begin{cases} \int_z^{z+1} f_1(x)dx & z \ge 0 \\ \int_0^{z+1} f_1(x)dx & -1 < z < 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$= \begin{cases} e^{-\frac{z}{2}}(1-e^{-\frac{1}{2}}) & z \ge 0 \\ 1-e^{-\frac{z+1}{2}} & -1 < z < 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

注意这里积分界的确定

$$P(X \le Y) = P(X - Y \le 0) = 1 - e^{-\frac{1}{2}}$$

商

中山大學
SUN YAT-SEN UNIVERSITY

$$
\begin{aligned}
F(x) &= P\left(\frac{\xi}{\eta} \le x\right) = \int\int_{\frac{u}{v} \le x} p(u, v)\,du\,dv \\
&= \int\int_{u \le xv,\ v>0} p(u, v)\,du\,dv + \int\int_{u \ge xv,\ v<0} p(u, v)\,du\,dv \\
&= \int_0^{\infty} dv \int_{-\infty}^{xv} p(u, v)\,du + \int_{-\infty}^{0} dv \int_{xv}^{\infty} p(u, v)\,du \\
&= \int_0^{\infty} dv \int_{-\infty}^{x} v\,p(tv, v)\,dt + \int_{-\infty}^{0} dv \int_{x}^{\infty} v\,p(tv, v)\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{x} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |v| p(tv, v)\,dv \right\} dt.
\end{aligned}
$$

设随机变量 ξ 与 η 相互独立, 同服从参数 $\lambda=1$ 的指数分布, 试求 ξ/η 的密度函数.

(ξ,η) 的联合密度为 $\quad p(u,v)=e^{-u-v},\quad u>0,\ v>0,$

被积函数$|t|p(xt,t)\neq 0$, 当且仅当, $t>0$和$xt>0$,

$$p_{\frac{\xi}{\eta}}(x)=\begin{cases}\int_0^{\infty} t\, e^{-xt-t}dt=\frac{1}{(1+x)^2} & x>0;\\ 0 & x\leq 0.\end{cases}$$

- n 个独立同分布 $B(1,p)$ 的 0-1 分布随机变量之和为二项分布 $B(n,p)$;
- 有限个独立二项随机变量 (成功的概率相同) 之和仍为二项分布;
- 有限个独立的 $Poisson$ 分布随机变量之和服从 $Poisson$ 分布，参数相加;
- r 个独立同分布几何分布 $G(p)$ 的随机变量之和服从参数为 r 和 p 的 $Pascal$ 分布;
- 任意有限个独立的正态分布随机变量的线性组合仍然服从正态分布;