2024年春季（1-18周），F207 周一8:00-9:40

（1-9周）F207周三8：00-9：40

复变函数

朱炬波 13973168169
zhujubo@mail.sysu.edu.cn

第三节　泰勒级数

- 一、问题的引入
- 二、泰勒定理
- 三、将函数展开成泰勒级数
- 四、典型例题
- 五、小结与思考

一、问题的引入

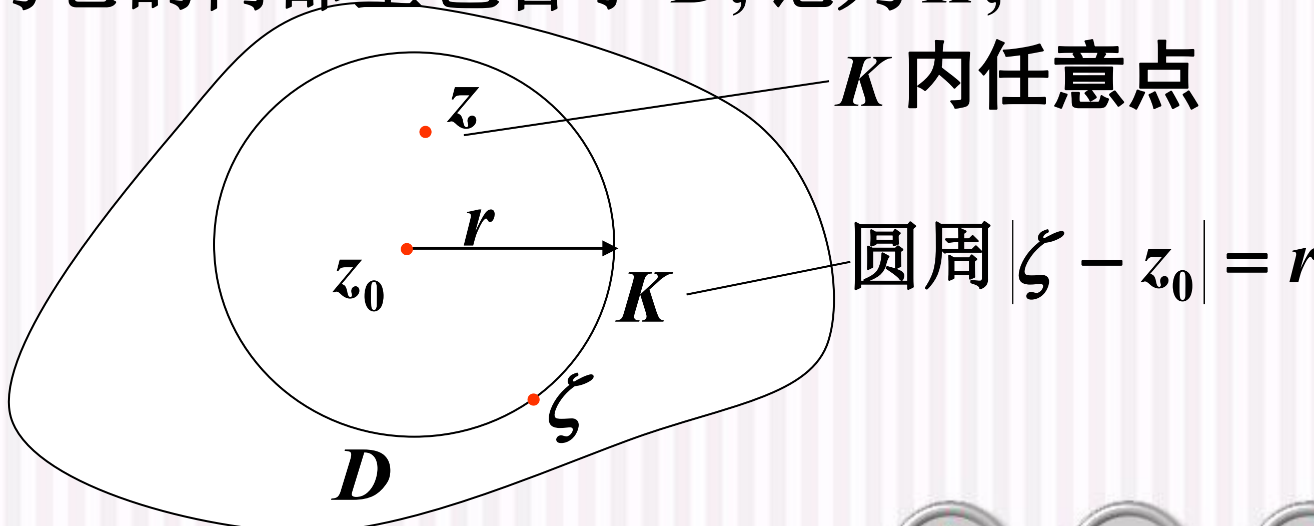
问题: 任一个解析函数能否用幂级数来表达?

设函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析, $|\zeta - z_0| = r$

为 D 内以 z_0 为中心的任一圆周,

它与它的内部全包含于 D, 记为 K,

如图:



由柯西积分公式，有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_K \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta,$$ 其中 K 取正方向.

因为积分变量 ζ 取在圆周 K 上，点 z 在 K 的内部，

所以 $\left|\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|<1.$

则 $$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{\zeta-z_0}\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}}$$

$$=\frac{1}{\zeta-z_0}\left[1+\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)+\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^2+\cdots+\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n+\cdots\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(\zeta-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n.$$

于是 $$f(z)=\sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_K\frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\right](z-z_0)^n$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\oint_K\left[\sum_{n=N}^{\infty}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n\right]\mathrm{d}\zeta.$$

由高阶导数公式, 上式又可写成

$$f(z)=\sum_{n=0}^{N-1}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n+R_N(z)$$

其中 $R_N(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_K\left[\sum_{n=N}^{\infty}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n\right]\mathrm{d}\zeta$

若 $\lim\limits_{N\to\infty}R_N(z)=0$,

可知在K内 $f(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$

即 $f(z)$ 在 K 内可以用幂级数来表示,

令 $$\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|=\frac{|z-z_0|}{r}=q$$

q 是与积分变量 ζ 无关的量, 且 $0\le q<1$,

$f(z)$ 在 $D\,(K\subset D)$ 内解析, **则在K上连续,**

因此 $f(\zeta)$ 在 K 上也连续, $f(\zeta)$ 在 K 上有界,

即存在一个正常数M，在 K上$\left|f(\zeta)\right|\le M$.

$$\left|R_N(z)\right| \le \frac{1}{2\pi}\oint_K \left|\sum_{n=N}^{\infty}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n\right| \mathrm{d}s$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\oint_K \left[\sum_{n=N}^{\infty}\frac{\left|f(\zeta)\right|}{\left|\zeta-z_0\right|}\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|^n\right]\mathrm{d}s$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\cdot\sum_{n=N}^{\infty}\frac{M}{r}q^n\cdot 2\pi r = \frac{Mq^n}{1-q}.$$

$\lim\limits_{N\to\infty} q^n = 0 \longrightarrow \lim\limits_{N\to\infty} R_N(z) = 0$ 在 K 内成立,

从而在K内 $f(z) = \boxed{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n}$ 泰勒级数

$f(z)$ 在 z_0 的泰勒展开式,

圆周 K 的半径可以任意增大,只要 K 在 D内成立.

如果 z_0 到 D 的边界上各点的最短距离为 d,

那末 $f(z)$ 在 z_0 的泰勒展开式在 $|z-z_0|<d$ 内成立.

但 $f(z)$ 在 z_0 的泰勒级数的收敛半径 R 至少等于 d ,

因为凡满足 $|z-z_0|<d$ 的 z 必能使

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$ 成立，即 $R\geq d$.

由上讨论得重要定理——泰勒展开定理

二、泰勒定理

定理 设 $f(z)$ 在区域 D 内解析，z_0 为 D 内的一点，d 为 z_0 到 D 的边界上各点的最短距离，那末当 $|z - z_0| < d$ 时，$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ 成立，

泰勒展开式　　泰勒级数

其中 $c_n = \dfrac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$，$n = 0, 1, 2, \cdots\cdots$

说明:

1.复变函数展开为泰勒级数的条件要比实函数时弱得多; (想一想, 为什么?)

2.如果 $f(z)$ 在 D 内有奇点, 则 d 等于 z_0 到最近一个奇点 α 之间的距离, 即 $d=|\alpha-z_0|$;

3. 当 $z_0=0$ 时, 级数称为麦克劳林级数;

4.任何解析函数在一点的泰勒级数是唯一的.

(为什么?)

设 $f(z)$ 在 z_0 已被展开成幂级数：

$$f(z)=a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots$$
$$+a_n(z-z_0)^n+\cdots,$$

那末 $f(z_0)=a_0,\ f'(z_0)=a_1,\ \cdots\cdots$

即 $$a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0),\cdots$$

因此，任何解析函数展开成幂级数的结果就是泰勒级数，因而是唯一的.

三、将函数展开成泰勒级数

常用方法: 直接法和间接法.

1.直接法:

由泰勒展开定理计算系数

$$c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0),\ n = 0,1,2,\cdots$$

将函数 $f(z)$ 在 z_0 展开成幂级数.

例如， 求 e^z 在 $z=0$ 的泰勒展开式.

因为 $(e^z)^{(n)}=e^z$,

$$(e^z)^{(n)}\Big|_{z=0}=1,\ (n=0,1,2,\cdots)$$

故有 $$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

因为 e^z 在复平面内处处解析,

所以级数的收敛半径 $R=\infty$.

仿照上例，可得 $\sin z$ 与 $\cos z$ 在 $z=0$ 的泰勒展开式.

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \quad ,$$

$$(R=\infty)$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots \quad ,$$

$$(R=\infty)$$

2. 间接展开法 :

借助于一些已知函数的展开式 , 结合解析函数的性质, 幂级数运算性质 (逐项求导, 积分等)和其它数学技巧 (代换等) , 求函数的泰勒展开式.

间接法的优点:

不需要求各阶导数与收敛半径 , 因而比直接展开更为简洁 , 使用范围也更为广泛 .

例如,

利用间接展开法求 $\sin z$ 在 $z=0$ 的泰勒展开式.

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-iz)^n}{n!}\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

四、典型例题

例1 把函数 $\dfrac{1}{(1+z)^2}$ 展开成 z 的幂级数.

解 由于 $\dfrac{1}{(1+z)^2}$ 在 $|z|=1$ 上有一奇点 $z=-1$,

且在 $|z|<1$ 内处处解析, 可展开成 z 的幂级数,

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-\cdots+(-1)^n z^n+\cdots \qquad |z|<1$$

上式两边逐项求导,

$$\frac{1}{(1+z)^2}=-\left(\frac{1}{1+z}\right)'$$

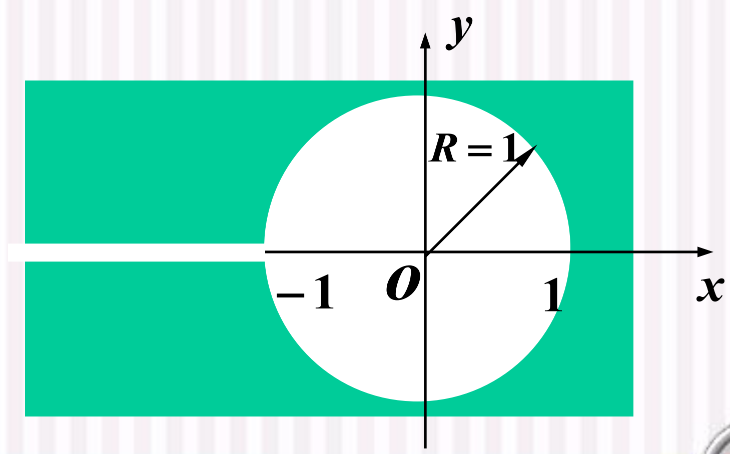
$$=1-2z+3z^2-\cdots+(-1)^{n-1}nz^{n-1}+\cdots,\quad |z|<1.$$

例2 求对数函数的主值 $\ln(1+z)$ 在 $z=0$ 处的泰勒展开式.

分析 $\ln(1+z)$ 在从 -1 向左沿负实轴剪开的平面内是解析的, -1 是它的一个奇点,

所以它在 $|z|=1$ 内可以展开成 z 的幂级数.

如图,



解 $[\ln(1+z)]' = \dfrac{1}{1+z}$

$$= 1 - z + z^2 - \cdots + (-1)^n z^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n \qquad (|z| < 1)$$

设 C 为收敛圆 $|z| < 1$ 内从 0 到 z 的曲线,

将展开式两端沿 C 逐项积分, 得

$$\int_0^z \frac{1}{1+z}\mathrm{d}z = \int_0^z \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n \mathrm{d}z$$

即 $\ln(1+z) = z - \dfrac{z^2}{2} + \dfrac{z^3}{3} - \cdots + (-1)^n \dfrac{z^{n+1}}{n+1} + \cdots \quad |z| < 1$

例3 把函数 $f(z)=\dfrac{1}{3z-2}$ 展开成 z 的幂级数.

解 $\dfrac{1}{3z-2}=\dfrac{-1}{2}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{3z}{2}}$

$$=-\frac{1}{2}[1+\frac{3z}{2}+(\frac{3z}{2})^2+\cdots+(\frac{3z}{2})^n+\cdots]$$

$$=-\frac{1}{2}-\frac{3z}{2^2}-\frac{3^2z^2}{2^3}-\cdots-\frac{3^nz^n}{2^{n+1}}-\cdots$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^nz^n}{2^{n+1}},\qquad \left|\frac{3z}{2}\right|<1, \text{即} |z|<\frac{2}{3}.$$

例4 求$\arctan z$在$z=0$的幂级数展开式.

解 因为 $\arctan z=\int_0^z \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}$,

且 $\frac{1}{1+z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot(z^2)^n$, $|z|<1$

所以 $\arctan z=\int_0^z \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}=\int_0^z \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot(z^2)^n\mathrm{d}z$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{2n+1},\quad |z|<1.$$

例5 求$\cos^2 z$的幂级数.

解 因为 $\cos^2 z = \frac{1}{2}(1+\cos 2z)$,

$$\cos 2z = 1 - \frac{(2z)^2}{2!} + \frac{(2z)^4}{4!} - \frac{(2z)^6}{6!} + \cdots$$

$$= 1 - \frac{2^2 z^2}{2!} + \frac{2^4 z^4}{4!} - \frac{2^6 z^6}{6!} + \cdots \quad |z| < \infty$$

所以 $\cos^2 z = \frac{1}{2}(1+\cos 2z)$

$$= 1 - \frac{2z^2}{2!} + \frac{2^3 z^4}{4!} - \frac{2^5 z^6}{6!} + \cdots \quad |z| < \infty$$

例6 将 $\dfrac{e^z}{1+z}$ 展为麦克劳林级数.

解 因为 $\dfrac{e^z}{1+z}$ 的唯一奇点为 $z=-1$,

所以收敛半径为1, 可在 $|z|<1$ 内进行展开,

令 $f(z)=\dfrac{e^z}{1+z}$, 对 $f(z)$ 求导得 $f'(z)=\dfrac{ze^z}{(1+z)^2}$,

即微分方程 $(1+z)f'(z)-zf(z)=0$

对微分方程逐次求导得:

$$(1+z)f''(z)+(1-z)f'(z)-f(z)=0$$

$$(1+z)f'''(z)+(2-z)f''(z)=0$$

$$\cdots\quad\cdots$$

由 $f(0)=1$, 得 $f'(0)=0, f''(0)=1, f'''(0)=-2,\cdots$

所以$f(z)$的麦克劳林级数为

$$\frac{e^z}{1+z}=1+\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{3}z^3+\cdots,\quad |z|<1.$$

附: 常见函数的泰勒展开式

1) $$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \qquad (|z| < \infty)$$

2) $$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad (|z| < 1)$$

3) $$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \cdots + (-1)^n z^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n,$$
$$(|z| < 1)$$

4) $$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots,$$
$$(|z| < \infty)$$

$$5)\ \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots,$$

$$(|z| < \infty)$$

$$6)\ \ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} + \cdots,$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} \qquad (|z| < 1)$$

$$7)(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} z^3 +$$

$$\cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} z^n + \cdots, \qquad (|z| < 1)$$

五、小结与思考

通过本课的学习, 应理解泰勒展开定理,熟记五个基本函数的泰勒展开式,掌握将函数展开成泰勒级数的方法, 能比较熟练的把一些解析函数展开成泰勒级数.

思考题

奇、偶函数的泰勒级数有什么特点?

思考题答案

奇函数的泰勒级数只含 z 的奇次幂项, 偶函数的泰勒级数只含 z 的偶次幂项.

作业

P143，12