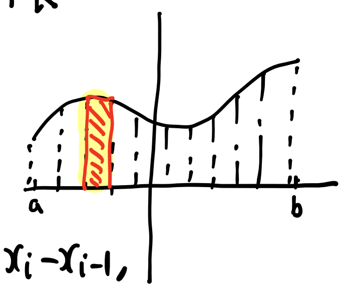
定积分

定积分的定义，是对黎曼和取极限：

$$\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$



其中 T 表示 $[a,b]$ 的一个剖分

$$x_0=a<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,\quad \Delta x_i=x_i-x_{i-1},$$

$\lambda(T)=\max \Delta x_i$ 表示剖分的最大宽度，而 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ 是任取的。

注意，一个函数黎曼可积，是说无论选取什么样的剖分，以及取哪一点 ξ_i，只要 $\lambda(T)$ 充分接近于 0，则 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 就接近于某一个（唯一确定的）极限值。

这个值就称为 f 在 $[a,b]$ 上的黎曼积分，记为

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

有一个重要的结论，就是：闭区间上的连续函数或单调函数都是可积的。

一旦知道函数可积，我们在计算它的积分时就可以选择特别的剖分。

Page 120-3 题

(1) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sin\frac{k}{n}$ 可看成 $\sin x$ 在 $[0,1]$ 上积分的黎曼和，

由此，极限 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sin\frac{k}{n}=\int_0^1 \sin x\,dx$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^4}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{k}{n}\right)^3$

$$=\int_0^1 x^3\,dx$$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+x}\,dx.$$

习题. 计算极限

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\sin\frac{\pi}{n^2}+\left(1+\frac{2}{n}\right)\sin\frac{2\pi}{n^2}+\cdots+\left(1+\frac{n}{n}\right)\sin\frac{n\pi}{n^2}\right].$$

可以先看一种简化的情形:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sin\frac{\pi}{n^2}+\sin\frac{2\pi}{n^2}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n^2}\right]$$

注意到, $\sin\frac{k\pi}{n^2}=\frac{k\pi}{n^2}+o\left(\frac{k^2\pi^2}{n^4}\right)=\frac{k\pi}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, 故

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sin\frac{\pi}{n^2}+\sin\frac{2\pi}{n^2}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n^2}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\pi\left(\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\pi\cdot\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}+\cdots+1\right)=\pi\int_0^1 x\,dx.$$

类似地, 可证明

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\sin\frac{\pi}{n^2}+\left(1+\frac{2}{n}\right)\sin\frac{2\pi}{n^2}+\cdots+\left(1+\frac{n}{n}\right)\sin\frac{n\pi}{n^2}\right].$$

$$=\pi\int_0^1(1+x)x\,dx.$$