博学 审问 慎思 明辨 笃行

概率论与数理统计

中山大學
SUN YAT-SEN UNIVERSITY

主讲老师：邝东阳，kuangdy@mail.sysu.edu.cn

助教：黄培，huangp89@mail2.sysu.edu.cn

范志隆，fanzhlong@mail2.sysu.edu.cn

Part 1
条件概率

博学 | 审问 | 慎思 | 明辨 | 笃行

离散型条件分布

回顾介绍随机变量之前条件概率的定义

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

对离散随机变量而言，我们可以依据上式定义相应条件（概率）分布

$$P(X = x_i | Y = y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}, \quad i = 1, 2, \cdots$$

$$P(Y = y_j | X = x_i) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(X = x_i)} = \frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}, \quad j = 1, 2, \cdots$$

离散型条件分布

设二维随机向量 (X_1, X_2) 的联合分布律如下所示：

$X_1 \backslash X_2$	-1	0	5	行和 $p_{i\cdot}$
1	0.17	0.05	0.21	0.43
3	0.04	0.28	0.25	0.57
列和 $p_{\cdot j}$	0.21	0.33	0.46	1.00

试求当 $X_2 = 0$ 时，X_1 的条件分布律。

设 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)\sim M(N;p_1,p_2,\ldots,p_n)$，试求 X_1 在给定 $X_2=k$ 的条件下的条件分布律。

大學
UNIVERSITY

$$P(X_1=i,X_2=j)=\frac{N!}{i!j!(N-i-j)!}p_1^i p_2^j(1-p_1-p_2)^{N-i-j},$$

$$P(X_1=i|X_2=k) = \frac{P(X_1=i,X_2=k)}{P(X_2=k)} \qquad X_2\sim B(N,p_2).$$

$$=\frac{N!}{i!k!(N-i-k)!}p_1^i p_2^k(1-p_1-p_2)^{N-i-k}\Big/C_N^k p_2^k(1-p_2)^{N-k}$$

$$=\frac{(N-k)!}{i!(N-k-i)!}\left(\frac{p_1}{1-p_2}\right)^i\left(1-\frac{p_1}{1-p_2}\right)^{N-k-i} \qquad B(N-k,p_1/(1-p_2)).$$

连续型条件分布 – 条件概率密度

设(X,Y)有概率密度$f(x,y)$，要计算$\mathrm{P}(X \le x|Y = y)$

$$P(X \le x | y \le Y \le y+\epsilon) = \frac{P(X \le x, y \le Y \le y+\epsilon)}{P(y \le Y \le y+\epsilon)}$$

$$= \int_{-\infty}^{x} \int_{y}^{y+\epsilon} f(u,v)\,dv\,du \Big/ \int_{y}^{y+\epsilon} f_Y(y)\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{x} \frac{\int_{y}^{y+\epsilon} f(u,v)\,dv}{\int_{y}^{y+\epsilon} f_Y(y)\,dy} du$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}, \quad f_Y(y) > 0.$$

关于 x 求导并令 $\epsilon \to 0$

记作 $X|Y = y \sim f_{X|Y}(x|y)$.

设 (X,Y) 服从二元正态分布 $N(a,b,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，试求 $X|Y=y$ 的条件概率密度。

$$
\begin{aligned}
f_{X|Y}(x|y) &= \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\exp\{-\frac{(x-(a+\rho\sigma_1\sigma_2^{-1}(y-b)))^2}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)}\}
\end{aligned}
$$

即 $X|Y=y \sim N(a+\rho\sigma_1\sigma_2^{-1}(y-b),\sigma_1^2(1-\rho^2))$。

设 X, Y 服从单位圆上的均匀分布，试求 $f_{X|Y}(x|y)$ 和 $f_{Y|X}(y|x)$.

(X, Y)的联合概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & if\ x^2+y^2 \le 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

边缘分布

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2} & if\ -1 \le x \le 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

条件分布

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{1-y^2}} & if\ -\sqrt{1-y^2} \le x \le \sqrt{1-y^2} \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

把x, y互换，就可以得到$f_{Y|X}(y|x)$。

推广到高维

高维下的条件密度同样可以定义为相应的概率密度比

$$h(x_{k+1},\ldots,x_n|x_1,\ldots,x_k)=\frac{f(x_1,\ldots,x_n)}{g(x_1,\ldots,x_k)},\quad \text{其中 } g(x_1,\ldots,x_k)>0.$$

注: 若记 $(X_1,\cdots,X_k)=\boldsymbol{X}$, $(X_{k+1},\cdots,X_n)=\boldsymbol{Y}$, $(x_1,\ldots,x_k)=\boldsymbol{x}$, $(x_{k+1},\ldots,x_n)=\boldsymbol{y}$, 则上式还可表示为:

$$h(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x})=\frac{f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{g(\boldsymbol{x})},\ g(\boldsymbol{x})>0$$

Part 2
独　立　性

博学 | 审问 | 慎思 | 明辨 | 笃行

独立性

回顾之前关于事件独立性的定义

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

称离散型随机变量 $X_1, \cdots, X_n$ 相互独立，若它们的联合分布律等于各自的边缘分布律的乘积，即

$$P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \cdots P(X_n = x_n),$$

其中 $(x_1, \ldots, x_n)$ 为 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的值域中的任意一点.

中山大學 SUN YAT-SEN UNIVERSITY

X \ Y	0	1	2	3	行合计
-1	1/12	1/12	0	1/6	1/3
0	0	1/6	1/12	0	1/4
1	1/6	0	1/6	1/12	5/12
列合计	1/4	1/4	1/4	1/4	1

$$P(X=0,Y=0)=0$$

因而 X,Y 不独立.

$$P(X=0)P(Y=0)=(1/4)(1/4)$$

称连续型随机变量 $X_1, \cdots, X_n$ 相互独立，若它们的联合密度等于各自的边缘密度的乘积，即

可以允许在一个“面积=0”的集合上不成立

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1) \cdots f_n(x_n), \quad \forall \quad (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

设 $X_1, \cdots, X_n$ 为 n 个随机变量，如果它们的联合分布函数等于各自边缘分布函数的乘积，即

$$F(x_1, \cdots, x_n) = F_1(x_1) \cdots F_n(x_n), \quad \forall \ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

则称随机变量 $X_1, \cdots, X_n$ 相互独立.

如果随机变量 $X_1, \cdots, X_n$ 相互独立，则容易证明其中任何一部分随机变量也相互独立. 然而一般来说, 仅由某一部分独立却无法推出 $X_1, \cdots, X_n$ 相互独立. 如见下例:

若 ξ, η 相互独立, 都服从 -1 和 1 这两点上的等可能分布，而 $\zeta = \xi\eta$。则 ζ, ξ, η 两两独立但不相互独立。

两两独立 v.s. 相互独立

显然3个随机变量取值范围都是{-1， 1}。且取值对应概率都是1/2.
两两独立需要验证三对情况，$\epsilon \sim \eta$, $\epsilon \sim \zeta$, $\eta \sim \zeta$ 。

第一个情况已告知相互独立，
后两种验证是类似的，现以其中一种为例：

$$\mathrm{P}(\epsilon=-1,\zeta=-1)=P(\epsilon=-1,\eta=1)=\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\frac{1}{2}=\mathrm{P}(\epsilon=-1)P(\zeta=-1),$$

不相互独立是因为

$$\mathrm{P}(\epsilon=-1,\eta=-1,\zeta=-1)=0$$

显然不是三个对应边缘概率的乘积。（注意$\zeta=\epsilon\eta$ 这一条件）

独立性

例 2.5.2　设随机变量 X,Y 独立，$X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，则 (X,Y) 有

[illegible]

$$p(x,y)=p_X(x)p_Y(y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\},$$

由定义 2.4.6，(X,Y) 服从二维正态分布 $N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,0)$.

命题 2.5.1 设随机向量(X,Y)服从二维正态分布$N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，则$X,Y$相互独立的充要条件为$\rho=0$.

证 设(X,Y)的密度为$p(x,y)$，根据定义 2.4.6 和命题 2.4.5，

1) $$\rho=0\Rightarrow p(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

$$\Rightarrow p(x,y)=p_X(x)p_Y(y)\Rightarrow X,Y\text{ 独立}.$$

2) $$\rho\neq 0\Rightarrow p(\mu_1,\mu_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\neq\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}=p_X(\mu_1)p_Y(\mu_2),$$

由于$p(x,y)$，$p_X(x)$，$p_Y(y)$都是连续函数，故在一个面积大于零的集合上

$$p(x,y)\neq p_X(x)p_Y(y),$$

二项分布的加法定理

例 2.5.3 设在每次试验中，A 出现的概率是 p. 独立地重复作 $m+n$ 次试验. 设 X 和 Y 分别为在前 m 次和后 n 次试验中 A 出现的次数，则 $X\sim B(m,p)$，$Y\sim B(n,p)$. 设 $Z=X+Y$，则 Z 为在这 $m+n$ 次试验中 A 出现的次数，故 $Z=X+Y\sim B(m+n,p)$.

$$P(Z=k)=\sum_{i+j=k}P(X=i,Y=j)=\sum_{i+j=k}P(X=i)P(Y=j)$$

$$=\sum_{i+j=k}\mathrm{C}_m^i p^i q^{m-i}\mathrm{C}_n^j p^j q^{n-j}=p^k q^{m+n-k}\sum_{i+j=k}\mathrm{C}_m^i\mathrm{C}_n^j=\mathrm{C}_{m+n}^k p^k q^{m+n-k}$$

(上式最后一步用到了恒等式 $\sum\limits_{i+j=k}\mathrm{C}_m^i\mathrm{C}_n^j=\mathrm{C}_{m+n}^k$. 展开等式 $(1+x)^m(1+x)^n=(1+x)^{m+n}$ 两边的二项式，比较两边的 x^k 的系数便得到这恒等式)，从而 $Z=X+Y\sim B(m+n,p)$.

Poisson分布的加法定理

命题 2.5.3 设随机变量 X,Y 独立，$X\sim P(a)$，$Y\sim P(b)$，则 $Z=X+Y\sim P(a+b)$.

证 由于 X,Y 独立，对 $k=0,1,2,\cdots$，我们有

$$P(Z=k)=\sum_{i=0}^{k}P(X=i,Y=k-i)=\sum_{i=0}^{k}P(X=i)P(Y=k-i)$$

$$=\sum_{i=0}^{k}\frac{a^{i}}{i!}e^{-a}\frac{b^{k-i}}{(k-i)!}e^{-b}=\frac{1}{k!}e^{-(a+b)}\sum_{i=0}^{k}C_{k}^{i}a^{i}b^{k-i}$$

$$=\frac{(a+b)^{k}}{k!}e^{-(a+b)}$$

（上式最后一步用了二项式定理），故 $Z\sim P(a+b)$.

事件独立 v.s. 随机变量独立

例 2.5.4 设 A,B 都是事件，令

$$X(\omega)=\begin{cases}1, & \omega\in A,\\ 0, & \omega\notin A,\end{cases}\qquad Y(\omega)=\begin{cases}1, & \omega\in B,\\ 0, & \omega\notin B,\end{cases}$$

则 X,Y 都是服从伯努利分布的随机变量. 根据定义容易证明事件 A,B 独立当且仅当随机变量 X,Y 独立.（留作习题）

设有 n 个事件：$A_1, A_2, \cdots, A_n$，对于每个事件 A_i，定义：$X_i = I_{A_i}$ (A_i 的示性函数)，$i=1, 2, \cdots, n$，则可证明：$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 独立 $\Longleftrightarrow$ $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立。

独立性

设 (X,Y) 服从矩形 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上的均匀分布，则 X 与 Y 相互独立。

先计算边缘密度 $f_X(x)=$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{I_{x\in[a,b]}I_{y\in[c,d]}}{(d-c)(b-a)}dy=\frac{I_{x\in[a,b]}}{(d-c)(b-a)}\int_c^d dy=\frac{I_{x\in[a,b]}}{b-a}$$

同理易得： $f_Y(y)=\frac{I_{y\in[c,d]}}{\mathrm{d}-c}$

显然有 $f_{X,Y}(x,y)=\frac{I_{x\in[a,b]}I_{y\in[c,d]}}{(d-c)(b-a)}=$ $\frac{I_{x\in[a,b]}}{b-a}\frac{I_{y\in[c,d]}}{\mathrm{d}-c}=f_X(x)f_Y(y)$

设 (X,Y) 服从单位圆上的均匀分布，则 X 与 Y 不独立。

从之前我们的计算结果易得$f(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y)$

(X,Y)的联合概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & if\ x^2+y^2 \leq 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

边缘分布

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2} & if\ -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

额外内容

定理 2.5.5 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，则

1）对任意 $k \leqslant n$ 和 $1 \leqslant l_1 < \cdots < l_k \leqslant n$，$X_{l_1}, X_{l_2}, \cdots, X_{l_k}$ 相互独立.

2）对任意函数 $f_1, f_2, \cdots, f_n$，随机变量 $f_1(X_1), f_2(X_2), \cdots, f_n(X_n)$ 相互独立.

3）对实直线的任意子集 $B_1, B_2, \cdots, B_n$，事件 $\{X_1 \in B_1\}, \{X_2 \in B_2\}, \cdots, \{X_n \in B_n\}$ 相互独立.

4）对（以随机变量为元素的）集合 $\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ 的任意 k 互不相交的子集 $\{X_{11}, \cdots, X_{1n_1}\}, \cdots, \{X_{k1}, \cdots, X_{kn_k}\}$ 及任意 k 个 $n_1, n_2, \cdots, n_k$ 元函数 $f_1, f_2, \cdots, f_k$，随机变量 $f_1(X_{11}, \cdots, X_{1n_1}), \cdots, f_k(X_{k1}, \cdots, X_{kn_k})$ 相互独立.

定理 2.5.6 随机变量 $X_1,\cdots,X_m,Y_1,\cdots,Y_n$ 相互独立的充分必要条件是：

1）随机向量$(X_1,X_2,\cdots,X_m)$和随机向量$(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$相互独立.

2）随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_m$ 相互独立.

3）随机变量 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 相互独立.

定理 2.5.7* 下面的各个命题等价.

1）随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立.

2）对任意 $k\leqslant n$ 和 $1\leqslant l_1<\cdots<l_k\leqslant n$, $X_{l_1},X_{l_2},\cdots,X_{l_k}$ 相互独立.

3）对任意 Borel 可测函数 $f_1,f_2,\cdots,f_n$，随机变量 $f_1(X_1),f_2(X_2),\cdots,f_n(X_n)$ 相互独立.

4）对实直线的任意 Borel 子集 $B_1,B_2,\cdots,B_n$，事件 $\{X_1\in B_1\},\{X_2\in B_2\},\cdots,\{X_n\in B_n\}$ 相互独立.

5）对实直线的任意 Borel 子集 $B_1,B_2,\cdots,B_n$,

$$P(X_1\in B_1,X_2\in B_2,\cdots,X_n\in B_n)=P(X_1\in B_1)P(X_2\in B_2)\cdots P(X_n\in B_n).$$

6）对任意 $m<n$ 及任意 m 元和 $n-m$ 元 Borel 可测函数 f 和 g，随机变量 $f(X_1,X_2,\cdots,X_m)$ 和 $g(X_{m+1},X_{m+2},\cdots,X_n)$ 相互独立.

例

例 2.5.5　设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立，t 是任意实数，则随机变量 e^{tX_1}，$\cdots, e^{tX_n}$ 也独立.

例 2.5.6*　设随机变量 X, Y, Z 相互独立，$\xi = \sin X$，$\eta = Y + Z$，则根据定理 2.5.5 之 4)，ξ 和 η 相互独立.

作业

P94: （DUE: 假期结束后的第二堂课）

20，23，25，27，30，34，35