

模拟试卷四

一、单项选择题 ($3' \times 5 = 15'$)

1. 已知极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 - x - 1} - (ax + b)] = 0$, 则 a, b 值为 ()

- A. $1, -\frac{1}{2}$ B. $1, \frac{1}{2}$ C. $-1, \frac{1}{2}$ D. $-1, -\frac{1}{2}$

2. 函数 $f(x)$ 二阶可导, 若 $f'(x_0)f''(x_0) < 0$, 则 ()。(同济)

- A. $f(x_0)$ 是极小值; B. $f(x_0)$ 是极大值;
C. $f(x_0)$ 不是极值; D. 不能确定 $f(x_0)$ 是否是极值。

3. 已知函数 $y = f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 且 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h^2)}{h^2} = 1$, 则 () (天大)

- A. $f(0) = 0, f'_+(0)$ 存在; B. $f(0) = 1, f'_-(0)$ 存在;
C. $f(0) = 0, f'_-(0)$ 存在; D. $f(0) = 1, f'_+(0)$ 存在。

4. 函数 $f(x) = \frac{x(x-1)}{|x|(x^2-3x+2)}$ 第一类间断点个数为 () (华东交大)

- A. 3 B. 2 C. 1 D. 0

5. 设在 $[a, b]$ 上 $f(x) > 0$, $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$, $S_1 = \int_a^b f(x) dx$, $S_2 = f(b)(b-a)$, $S_3 = \frac{1}{2}(f(a) + f(b))(b-a)$, 则: ()

- A. $S_1 < S_2 < S_3$ B. $S_1 < S_3 < S_2$ C. $S_3 < S_1 < S_2$ D. $S_2 < S_1 < S_3$

二、填空题 ($3' \times 5 = 15'$)

1. 设 $f'(2) = 3$, 则函数 $y = f(2x^2)$ 在 $x = 1$ 处的微分为 _____。(同济)

2. $\int_{-5\pi}^{5\pi} [\ln(x + \sqrt{1+x^2}) + \sqrt{1-\sin^2 x}] dx =$ _____。 (同济)

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_1^{\cos x} e^{-t^2} dt}{x^2} =$ _____。 (厦门大学)

4. 反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)} dx =$ _____。 (华南农业)

5. $y = f(x)$ 由方程 $x^3 + y^3 - \sin x + 6y = 0$ 确定, 则 $dy|_{x=0} =$ _____。 (吉大)

三、 计算题 (7' \times 6 = 42')

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \cos x + 1}{\sqrt{1+x}-1} dx$ (北京林业)

2. $\int \frac{x+1}{x^3+2x^2-x-2} dx$ 。 (南开)

3. 求积分 $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx$ 。 (中国传媒)

4. 求曲线 $\begin{cases} x = 3t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$ 在 $t = 1$ 处的曲率。 (华东理工)

5. 已知 $f(x) = \int_1^{x^2} \frac{\sin t}{t} dt$, 求 $\int_0^1 xf(x) dx$ 。 (北航)

6. $\lim_{x \rightarrow 1} (1 + \ln x)^{\frac{3}{x-1}}$ (南开)

四、解答题 (共 24 分)

1. 设 $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$ (四川大学)

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间与极值; (4 分)

(2) 求 $f(x)$ 的凹凸区间与拐点; (4 分)

(3) 求 $f(x)$ 的渐近线方程。 (4 分)

2. 求心脏线 $r = a(1 + \cos \theta)$ ($a > 0$) 上对应 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 的弧线段的长度, 且求该弧段与射线 $\theta = 0$ 及 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 所围图形绕极轴旋转所得旋转体的体积。 (上海交大) (12 分)

五、证明题 (4 分)

设 $f(x)g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0) = f(1) = 0$.

证: $\exists \xi \in (0,1)$ 使 $f'(\xi) + g(\xi)f(\xi) = 0$.

参考答案：

一、选择题

1、A 2、C 3、A 4、B 5、D

二、填空题

1、 $12dx$

2、20

3、 $-\frac{1}{2e}$

4、 $\ln 2$

5、 $\frac{1}{6}dx$

三、计算题

1、2

2、 $\frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C$

3、 $\frac{7\pi^2}{144}$

4、 $\frac{1}{6}$

5、 $\frac{1}{2}(\cos 1 - 1)$

6、 e^3

四、解答题

1、

(1) 单增区间为： $(-\infty, 1), (3, +\infty)$ ， 单减区间： $(1, 3)$

极小值为： $f(3) = \frac{27}{4}$ ， 无极大值

(2) 凹区间： $(0, 1), (1, +\infty)$ ， 凸区间： $(-\infty, 0)$

拐点：(0,0)

(3) 无水平渐近线，铅直渐近线： $x=1$ ，斜渐近线： $y=x+2$

2、(1) $2\sqrt{2}a$

(2) $\frac{5}{2}a^3\pi$

五、证明题：见视频讲解

扫描下方二维码获取视频讲解哦

