2024年春季（1-18周），F207 周一8:00-9:40

（1-9周）F207周三8：00-9：40

复变函数

朱炬波 13973168169
zhujubo@mail.sysu.edu.cn

第一章　复数与复变函数

第二节　复数的几何表示

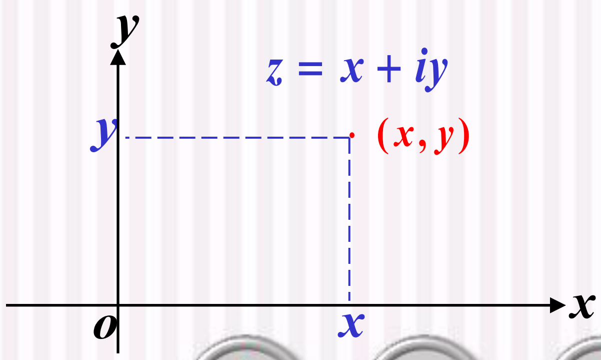
- 一、复平面
- 二、复球面
- 三、小结与思考

一、复平面

1. 复平面的定义

复数 $z = x + iy$ 与有序实数对 (x, y) 成一一对应. 因此, 一个建立了直角坐标系的平面可以用来表示复数, 通常把横轴叫实轴或 x 轴, 纵轴叫虚轴或 y 轴. 这种用来表示复数的平面叫复平面.

复数 $z = x + iy$ 可以用复平面上的点 (x, y) 表示.

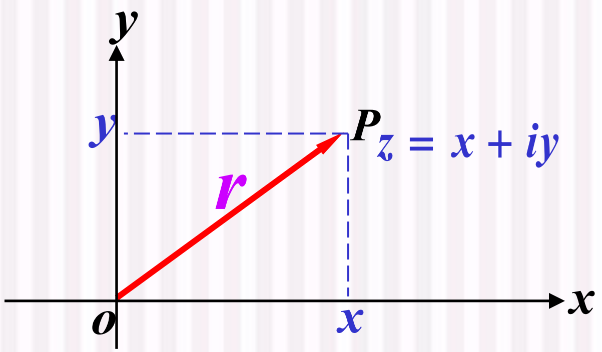


2. 复数的模(或绝对值)

复数 $z = x + iy$ 可以用复平面上的向量 $\overrightarrow{OP}$ 表示,

向量的长度称为 z 的模或绝对值,

记为 $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}.$



显然下列各式成立

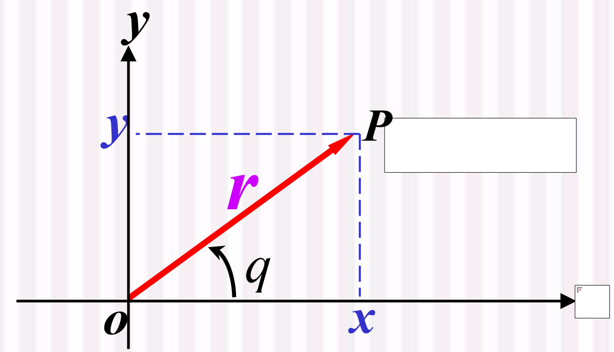
$$|x| \le |z|, \qquad |y| \le |z|,$$

$$|z| \le |x| + |y|, \qquad z \cdot \bar{z} = |z|^2 = |z^2|.$$

3. 复数的辐角

在 $z \neq 0$ 的情况下, 以正实轴为始边, 以表示 z 的向量 $\overrightarrow{OP}$ 为终边的角的弧度数 θ 称为 z 的辐角,

记作 $\text{Arg}z = \theta.$



说明 任何一个复数

Z 0 有无穷多个辐角

如果 θ_1 是其中一个辐角, 那么 z 的全部辐角为

$$\text{Arg}z = \theta_1 + 2k\pi \ (k\text{为任意整数}).$$

特殊地, 当 $z = 0$ 时, $|z| = 0$, 辐角不确定.

辐角主值的定义:

在 $z\,(\neq 0)$ 的辐角中, 把满足 $-\pi < \theta_0 \leq \pi$ 的 θ_0 称为 Arg$z$ 的主值, 记作 $\theta_0 = \arg z$.

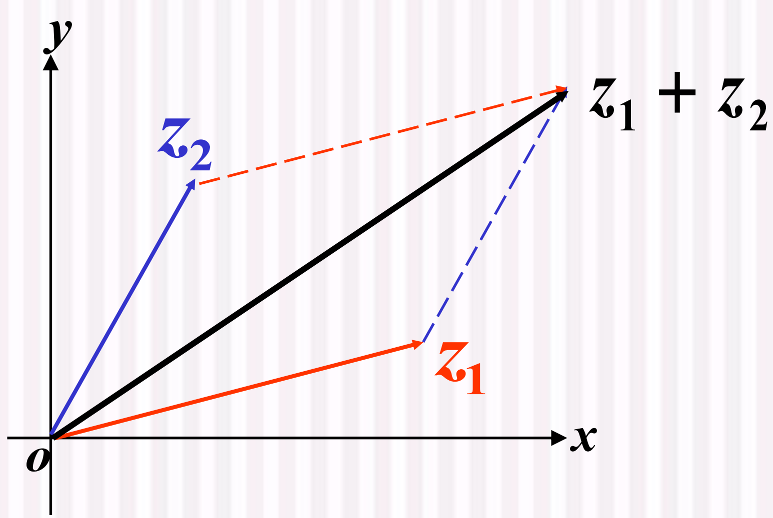
$z \neq 0$ 辐角的主值

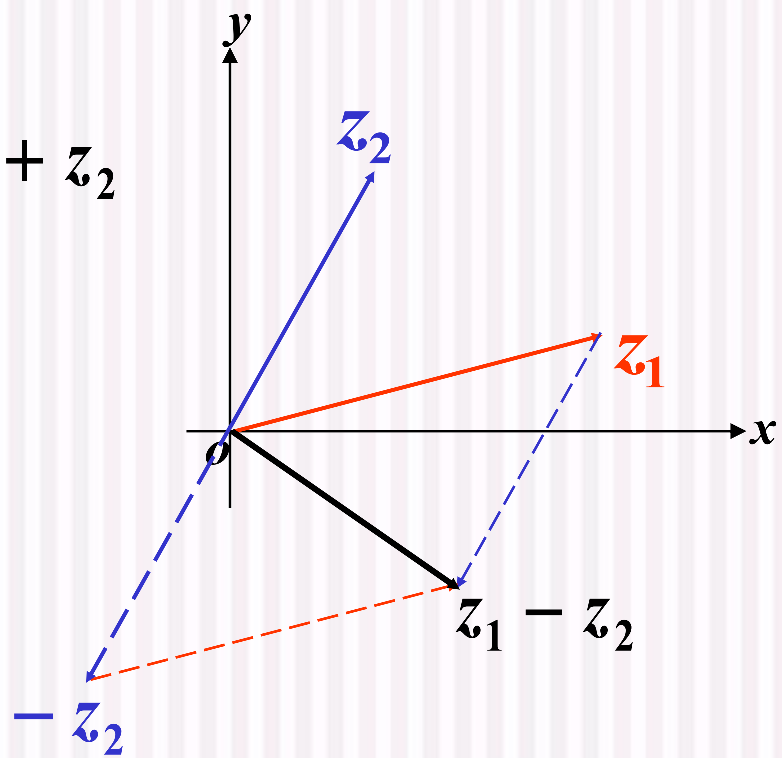
$$\arg z = \begin{cases} \arctan \dfrac{y}{x}, & x > 0, \\ \pm \dfrac{\pi}{2}, & x = 0, y \neq 0, \\ \arctan \dfrac{y}{x} \pm \pi, & x < 0, y \neq 0, \\ \pi, & x < 0, y = 0. \end{cases}$$

(其中 $-\dfrac{\pi}{2} < \arctan \dfrac{y}{x} < \dfrac{\pi}{2}$)

4. 利用平行四边形法求复数的和差

两个复数的加减法运算与相应的向量的加减法运算一致.



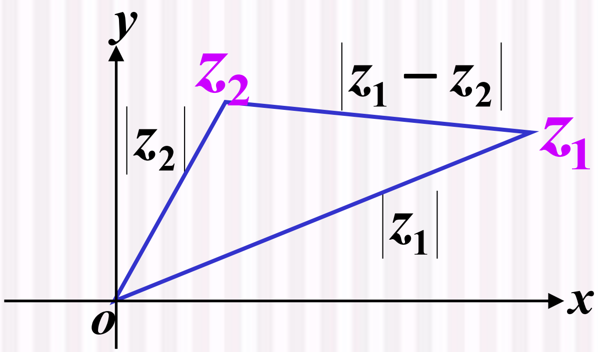


5. 复数和差的模的性质

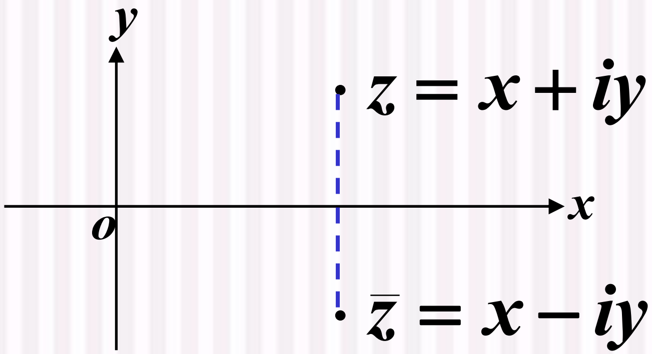
因为$|z_1 - z_2|$表示点z_1和z_2之间的距离，故

(1) $|z_1 - z_2| \le |z_1| + |z_2|$;

(2) $|z_1 - z_2| \ge ||z_1| - |z_2||$.



一对共轭复数z和$\bar{z}$在复平面内的位置是关于实轴对称的.



6. 复数的三角表示和指数表示

利用直角坐标与极坐标的关系 $\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \end{cases}$

复数可以表示成 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

复数的三角表示式

再利用欧拉公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta,$

复数可以表示成 $z = re^{i\theta}$

复数的指数表示式

例1 将下列复数化为三角表示式与指数表示式:

(1) $z=-\sqrt{12}-2i$; (2) $z=\sin\dfrac{\pi}{5}+i\cos\dfrac{\pi}{5}$;

(3) $z=\dfrac{(\cos 5\varphi+i\sin 5\varphi)^2}{(\cos 3\varphi-i\sin 3\varphi)^3}$.

解 (1) $r=|z|=\sqrt{12+4}=4$, 因为 z 在第三象限,

所以 $\theta=\arctan\left(\dfrac{-2}{-\sqrt{12}}\right)-\pi=\arctan\dfrac{\sqrt{3}}{3}-\pi=-\dfrac{5}{6}\pi$,

故三角表示式为 $z=4\left[\cos\left(-\dfrac{5}{6}\pi\right)+i\sin\left(-\dfrac{5}{6}\pi\right)\right]$,

指数表示式为 $z = 4e^{-\frac{5}{6}\pi i}$.

(2) $z = \sin\frac{\pi}{5} + i\cos\frac{\pi}{5}$ 显然 $r = |z| = 1$,

$$\sin\frac{\pi}{5} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) = \cos\frac{3\pi}{10},$$

$$\cos\frac{\pi}{5} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\frac{3\pi}{10},$$

故三角表示式为 $z = \cos\frac{3\pi}{10} + i\sin\frac{3\pi}{10}$,

指数表示式为 $z = e^{\frac{3}{10}\pi i}$.

(3) $z=\dfrac{(\cos 5\varphi+i\sin 5\varphi)^2}{(\cos 3\varphi-i\sin 3\varphi)^3}$.

因为 $\cos 5\varphi+i\sin 5\varphi=e^{5\varphi i}$,

$\cos 3\varphi-i\sin 3\varphi=\cos(-3\varphi)+i\sin(-3\varphi)=e^{-3\varphi i}$,

所以 $\dfrac{(\cos 5\varphi+i\sin 5\varphi)^2}{(\cos 3\varphi-i\sin 3\varphi)^3}=\dfrac{(e^{5\varphi i})^2}{(e^{-3\varphi i})^3}=e^{19\varphi i}$,

故三角表示式为 $z=\cos 19\varphi+i\sin 19\varphi$,

指数表示式为 $z=e^{19\varphi i}$.

例2 把复数 $z=1-\cos\alpha+i\sin\alpha, 0\le\alpha\le\pi$ 化为三角表示式与指数表示式,并求 z 的辐角的主值.

解 $z=1-\cos\alpha+i\sin\alpha=2\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2+2i\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$

$$=2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+i\cos\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$=2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\pi-\alpha}{2}+i\sin\frac{\pi-\alpha}{2}\right)$$ (三角式)

$$=2\sin\frac{\alpha}{2}e^{\frac{\pi-\alpha}{2}i}.$$ (指数式) $\arg z=\frac{\pi-\alpha}{2}.$

例3 求复数 $z=\dfrac{\eta\cos\theta-1}{\eta\cos\theta+1}$ 的实部和虚部,

其中 $\eta=e^{i\varphi}$.

解 $z=\dfrac{\eta\cos\theta-1}{\eta\cos\theta+1}=\dfrac{\cos\varphi\cos\theta-1+i\sin\varphi\cos\theta}{\cos\varphi\cos\theta+1+i\sin\varphi\cos\theta}$

$$=\frac{(\cos\varphi\cos\theta)^2-1+(\sin\varphi\cos\theta)^2+2i\sin\varphi\cos\theta}{(\cos\varphi\cos\theta+1)^2+(\sin\varphi\cos\theta)^2}$$

$$=\underbrace{\boxed{\frac{-(\sin\theta)^2}{2\cos\varphi\cos\theta+1+(\cos\theta)^2}}}_{=\operatorname{Re} z}+\underbrace{\boxed{\frac{2\sin\varphi\cos\theta}{2\cos\varphi\cos\theta+1+(\cos\theta)^2}}}_{=\operatorname{Im} z}i.$$

例4 设 z_1, z_2 为两个任意复数, 证明:

(1) $|z_1\bar{z}_2| = |z_1||z_2|$; (2) $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$.

证 (1) $|z_1\bar{z}_2| = \sqrt{(z_1\bar{z}_2)\overline{(z_1\bar{z}_2)}} = \sqrt{(z_1\bar{z}_2)(\bar{z}_1 z_2)}$

$$= \sqrt{(z_1\bar{z}_1)(\bar{z}_2 z_2)} = |z_1||z_2|.$$

(2) $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2)$

$$= z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 + z_1\bar{z}_2$$

$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + \bar{z}_1 z_2 + z_1\bar{z}_2$$

因为 $\bar{z}_1 z_2 + z_1 \bar{z}_2 = 2\,\mathrm{Re}(z_1 \bar{z}_2)$,

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1 \bar{z}_2) \\ &\le |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1 \bar{z}_2| \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| \\ &= (|z_1| + |z_2|)^2, \end{aligned}$$

两边同时开方得 $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$.

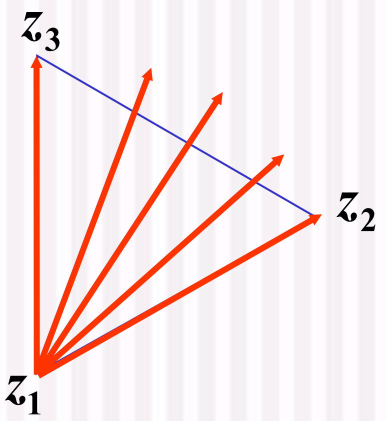
例5 证明：三个复数 z_1, z_2, z_3 成为等边三角形顶点的充要条件是 $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1$.

证 $\Delta z_1 z_2 z_3$ 是等边三角形的充要条件为：

向量 $\overrightarrow{z_1 z_2}$ 绕 z_1 旋转 $\dfrac{\pi}{3}$ 或 $-\dfrac{\pi}{3}$ 即得向量 $\overrightarrow{z_1 z_3}$,

即 $z_3 - z_1 = (z_2 - z_1) e^{\pm \frac{\pi}{3} i}$,

或 $\dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2} i$,



$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} - \frac{1}{2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

两边平方, 并化简得

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1.$$

下面例子表明, 很多平面图形能用复数形式的方程(或不等式)来表示; 也可以由给定的复数形式的方程(或不等式)来确定它所表示的平面图形.

例6 将通过两点 $z_1 = x_1 + iy_1$ 与 $z_2 = x_2 + iy_2$ 的直线用复数形式的方程来表示.

解 通过两点 (x_1, y_1) 与 (x_2, y_2) 的直线的方程

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \end{cases} \quad \text{参数 } t \in (-\infty, +\infty),$$

所以它的复数形式的参数方程为

$$z = z_1 + t(z_2 - z_1) \quad \text{参数 } t \in (-\infty, +\infty),$$

故,由 z_1 到 z_2 的直线段的参数方程为

$$z = z_1 + t(z_2 - z_1) \quad (0 \le t \le 1)$$

若取 $t = \dfrac{1}{2}$,

得线段 $\overline{z_1 z_2}$ 的中点坐标为 $z = \dfrac{z_1 + z_2}{2}$.

例8　求下列方程所表示的曲线:

(1) $|z+i|=2$;　　(2) $|z-2i|=|z+2|$;

(3) $\mathrm{Im}(i+\bar{z})=4$.

解　(1) 方程 $|z+i|=2$ 表示所有与点 $-i$ 距离为2的点的轨迹.

即表示中心为 $-i$, 半径为 2 的圆.

设 $z=x+iy$,　$|x+(y+1)i|=2$,

$\sqrt{x^2+(y+1)^2}=2$, 圆方程 $x^2+(y+1)^2=4$.

(2) $|z-2i|=|z+2|$

表示所有与点 $2i$ 和 -2 距离相等的点的轨迹.

故方程表示的曲线就是连接点 $2i$ 和 -2 的线段的垂直平分线. 设 $z=x+iy$,

$|x+yi-2i|=|x+yi+2|$, 化简后得 $y=-x.$

(3) $\operatorname{Im}(i+\bar{z})=4$ 设 $z=x+iy$,

$i+\bar{z}=x+(1-y)i$, $\operatorname{Im}(i+\bar{z})=1-y=4$,

所求曲线方程为 $y=-3.$

二、复球面

1. 南极、北极的定义

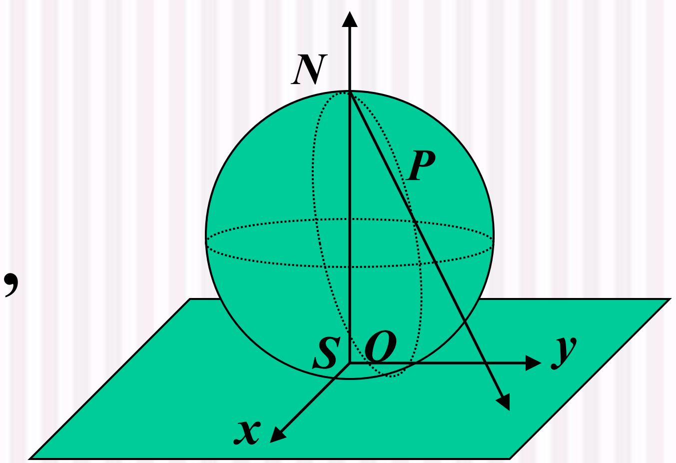
取一个与复平面切于原点 $z=0$ 的球面，

球面上一点 S 与原点重合，

通过 S 作垂直于复平面的

直线与球面相交于另一点 N，

我们称 N 为北极，S 为南极.



2. 复球面的定义

球面上的点, 除去北极 N 外, 与复平面内的点之间存在着一一对应的关系. 我们可以用球面上的点来表示复数.

我们规定: 复数中有一个唯一的“无穷大”与复平面上的无穷远点相对应, 记作∞ 因而球面上的北极 N 就是复数无穷大∞的几何表示.

球面上的每一个点都有唯一的复数与之对应, 这样的球面称为复球面.

3. 扩充复平面的定义

包括无穷远点在内的复平面称为扩充复平面.

不包括无穷远点在内的复平面称为有限复平面,或简称复平面.

对于复数∞来说, 实部,虚部,辐角等概念均无意义, 它的模规定为正无穷大.

复球面的优越处:

能将扩充复平面的无穷远点明显地表示出来.

关于∞的四则运算规定如下:

(1) 加法: $\alpha+\infty=\infty+\alpha=\infty, \quad (\alpha\neq\infty)$

(2) 减法: $\alpha-\infty=\infty-\alpha=\infty, \quad (\alpha\neq\infty)$

(3) 乘法: $\alpha\cdot\infty=\infty\cdot\alpha=\infty, \quad (\alpha\neq 0)$

(4) 除法: $\dfrac{\alpha}{\infty}=0, \quad \dfrac{\infty}{\alpha}=\infty, (\alpha\neq\infty), \quad \dfrac{\alpha}{0}=\infty, (\alpha\neq 0)$

三、小结与思考

学习的主要内容有复数的模、辐角;复数的各种表示法. 并且介绍了复平面、复球面和扩充复平面.

注意：为了用球面上的点来表示复数，引入了无穷远点．无穷远点与无穷大这个复数相对应,所谓无穷大是指模为正无穷大（辐角无意义）的唯一的一个复数，不要与实数中的无穷大或正、负无穷大混为一谈.

思考题

是否任意复数都有辐角?

作业

P31，1、8、11