第一章　复数与复变函数

- 一、重点与难点
- 二、内容提要
- 三、典型例题

复数的由来

N ⟶ Z ⟶ Q ⟶ R ⟶ C

16世纪解代数方程时，为对负数开偶次方引入虚数

⟶ 复数理论

18世纪认识了复数的几何意义

复变函数的研究内容

复变函数实际上是实变函数在复数领域的推广和发展，包括复数、复变函数的连续性、可微性、积分、级数、映射等等内容。

- ✓ 以Cauchy为代表的积分理论；
- ✓ 以Weistrass为代表的级数理论；
- ✓ 以Riemann为代表的映射理论；

复变函数的应用价值（续）

保罗·纳欣：虚数的故事（通俗数学名著）

他们就像那些站在高耸入云的峰顶上出神凝望的人，下面平地上的物体已从视野中消失，他们意识到的对象只是他们所攀登的高度，在那个高度上一般人都无法适应，也无法呼吸那种稀薄的空气。

复变函数的应用价值（续）

在信号处理中，信号一般都是以复数形式表示的，具有幅度和相位。控制论也大量用到复数。

其中涉及三类变换：

- Fourier变换

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t$$

复变函数的应用价值（续）

- **Laplace变换**

$$F(s)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t,\quad s=\sigma+i\omega$$

- **Z变换**

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n},\quad z=e^{\sigma+i\Omega}$$

一、重点与难点

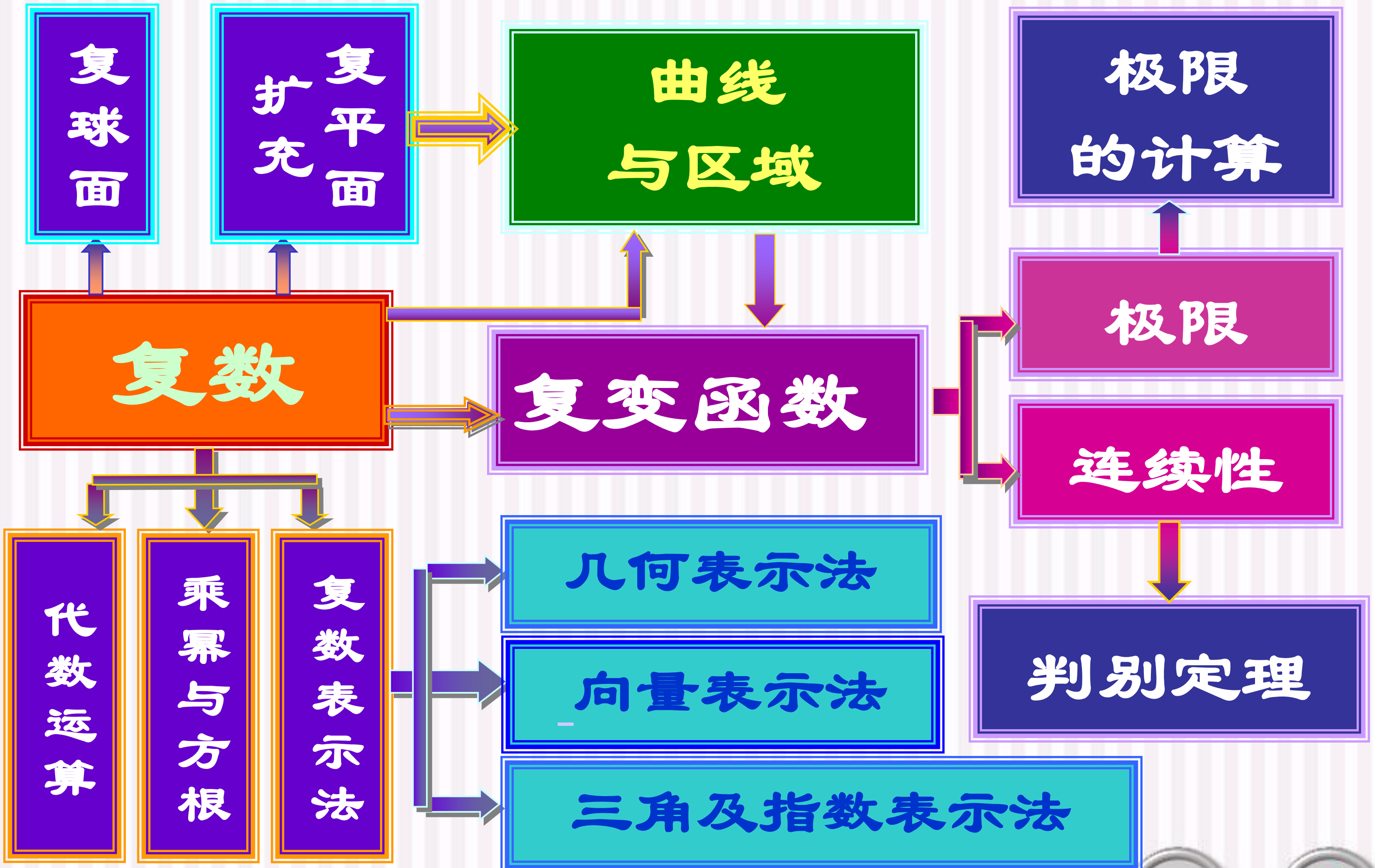
重点： 1. 复数运算和各种表示法

2. 复变函数以及映射的概念

难点： 1. 复数方程表示曲线以及不等式表示区域

2. 映射的概念

二、内容提要


复球面
扩充复平面
曲线与区域
极限的计算
复数
复变函数
极限
连续性
代数运算
乘幂与方根
复数表示法
几何表示法
向量表示法
三角及指数表示法
判别定理

1. 复数的概念

对于任意两实数 x, y, 我们称 $z = x + yi$ 或 $z = x + iy$ 为复数.

其中 x, y 分别称为 z 的实部和虚部,

记作 $x = \mathrm{Re}(z), \quad y = \mathrm{Im}(z).$

当 $x = 0, \ y \neq 0$ 时, $z = iy$ 称为纯虚数;

当 $y = 0$ 时, $z = x + 0i$, 我们把它看作实数 x.

当 $x = 0, \ y = 0$ 时, $z = 0$.

2. 复数的代数运算

设两复数 $z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2,$

1) 两复数的和

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2).$$

2) 两复数的积

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_2 y_1 + x_1 y_2).$$

3)两复数的商

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

4)共轭复数

实部相同而虚部绝对值相等符号相反的两个复数称为共轭复数.

与 z 共轭的复数记为 $\bar{z}$,

若 $z = x + iy$, 则 $\bar{z} = x - iy$.

共轭复数的性质

(1) $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$; $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$; $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$;

(2) $\bar{\bar{z}} = z$; (3) $z \cdot \bar{z} = [\mathrm{Re}(z)]^2 + [\mathrm{Im}(z)]^2$;

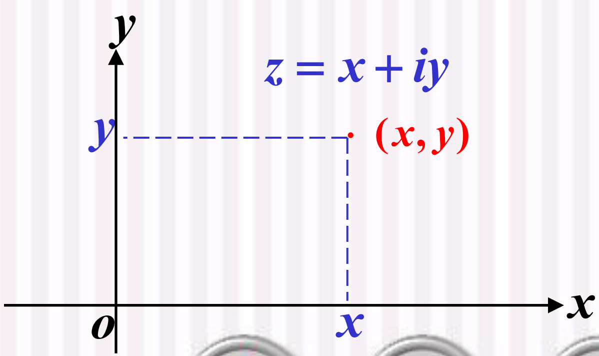
(4) $z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}(z)$, $z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$.

3. 复数的其它表示法

（1）几何表示法

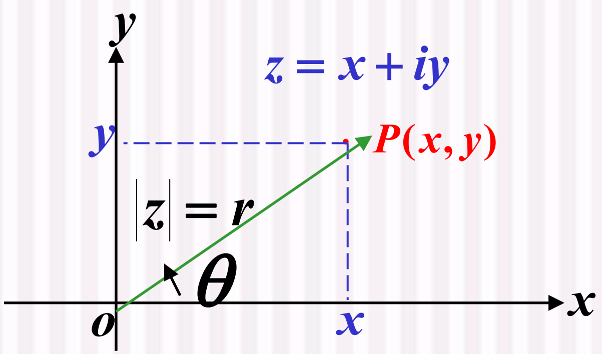
复数 $z = x + iy$ 与有序实数对 (x, y) 成一一对应. 因此, 一个建立了直角坐标系的平面可以用来表示复数, 通常把横轴叫实轴或 x 轴, 纵轴叫虚轴或 y 轴. 这种用来表示复数的平面叫复平面.

复数 $z = x + iy$ 可以用复平面上的点 (x, y) 表示.



（2）向量表示法

在复平面上,复数 z 与从原点指向点 $z=x+iy$ 的平面向量成一一对应,因此,复数 z 也可用向量 $\overrightarrow{OP}$ 来表示.



复数的模(或绝对值)

向量的长度称为 z 的模或绝对值,

记为 $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

模的性质

$$|x| \le |z|, \quad |y| \le |z|, \quad |z| \le |x| + |y|, \quad z \cdot \bar{z} = |z|^2 = |z^2|.$$

三角不等式 (1) $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$; (2) $|z_1 - z_2| \ge \big||z_1| - |z_2|\big|$.

复数的辐角

在 $z \ne 0$ 的情况下,以正实轴为始边, 以表示 z 的向量 $\overrightarrow{OP}$ 为终边的角的弧度数 θ 称为 z 的辐角, 记作 $\mathrm{Arg}z = \theta$. 当 $z = 0$ 时, $|z| = 0$, 而辐角不确定.

任何一个复数 $z \ne 0$ 有无穷多个辐角.

如果 θ_1 是其中一个辐角, 那么 z 的全部辐角为

$$\mathrm{Arg}\, z = \theta_1 + 2k\pi \ (k\text{为任意整数}).$$

辐角的主值

在 $z(\neq 0)$ 的辐角中, 把满足 $-\pi < \theta_0 \leq \pi$ 的 θ_0 称为 $\mathrm{Arg}z$ 的主值, 记作 $\theta_0 = \arg z$.

$z \neq 0$

$$\text{辐角的主值} \arg z = \begin{cases} \arctan\dfrac{y}{x}, & x > 0, \\ \pm\dfrac{\pi}{2}, & x = 0, y \neq 0, \\ \arctan\dfrac{y}{x} \pm \pi, & x < 0, y \neq 0, \\ \pi, & x < 0, y = 0. \end{cases}$$

(其中 $-\dfrac{\pi}{2} < \arctan\dfrac{y}{x} < \dfrac{\pi}{2}$)

（3）三角表示法

利用直角坐标与极坐标的关系 $\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \end{cases}$

复数可以表示成 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

（4）指数表示法

利用欧拉公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta,$

复数可以表示成 $z = re^{i\theta}$

称为复数 z 的指数表示式.

4.复数的乘幂与方根

1) 乘积与商

两个复数乘积的模等于它们的模的乘积;
两个复数乘积的辐角等于它们的辐角的和.

若 $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$,

$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$,

则有

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

$$\text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg}z_1 + \text{Arg}z_2 .$$

几何意义

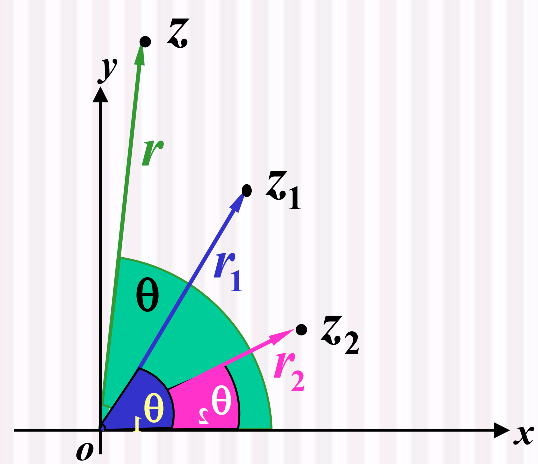
从几何上看, 两复数对应的向量分别为 $\vec{z}_1$, $\vec{z}_2$,

先把 $\vec{z}_1$ 按逆时针方向

旋转一个角 θ_2,

再把它的模扩大到 r_2 倍,

所得向量 $\vec{z}$ 就表示积 $z_1 \cdot z_2$.



复数相乘就是把模相乘，辐角相加.

两个复数的商的模等于它们的模的商; 两个复数的商的辐角等于被除数与除数的辐角之差.

若 $$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1),$$
$$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2),$$

则有

$$\left|\frac{z_2}{z_1}\right| = \frac{|z_2|}{|z_1|}, \quad \mathrm{Arg}\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = \mathrm{Arg}z_2 - \mathrm{Arg}z_1.$$

设复数z_1和z_2的指数形式分别为

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, \quad z_2 = r_2 e^{i\theta_2}, \quad \text{则} \frac{z_2}{z_1} = \frac{r_2}{r_1} e^{i(\theta_2-\theta_1)}.$$

2) 幂与根

(a) n次幂:

n个相同复数 z 的乘积称为 z 的 n 次幂,

记作 z^n, $\quad z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \cdots \cdot z}_{n\text{个}}$.

对于任何正整数 n, 有 $z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$.

n为负整数时, 有$z^{-n} = \dfrac{1}{z^n}$.

因而有 $\quad |z^n| = |z|^n, \qquad \operatorname{Arg} z^n = n \operatorname{Arg} z$.

(b) 棣莫佛公式

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

(c) 计算方程 $w^n = z$ 的根 w，其中 z 为已知复数.

$$w = \sqrt[n]{z} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$

$$(k = 0,1,2,\cdots,n-1)$$

在几何上，$\sqrt[n]{z}$的n个值就是以原点为中心，$\sqrt[n]{r}$为半径的圆的内接正n边形的n个顶点.

5.复球面与扩充复平面

(1) 复球面

南极、北极的定义

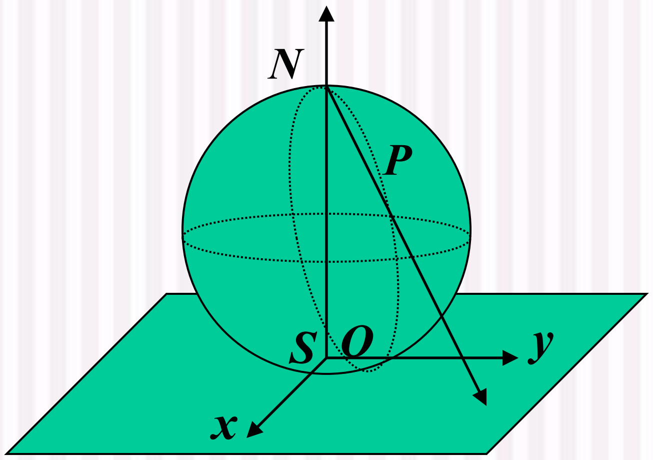
取一个与复平面切于原点 $z=0$ 的球面,

球面上一点 S 与原点重合,

通过 S 作垂直于复平面的

直线与球面相交于另一点 N,

我们称 N 为北极, S 为南极.



复球面的定义

球面上的点, 除去北极 N 外, 与复平面内的点之间存在着一一对应的关系. 我们可以用球面上的点来表示复数.

我们规定: 复数中有一个唯一的“无穷大”与复平面上的无穷远点相对应, 记作. 因而球面上的北极 N 就是复数无穷大的几何表示.

球面上的每一个点都有唯一的复数与之对应, 这样的球面称为复球面.

(2) 扩充复平面的定义

包括无穷远点在内的复平面称为扩充复平面.

不包括无穷远点在内的复平面称为有限复平面, 或简称复平面.

对于复数 来说, 实部,虚部,辐角等概念均无意义, 它的模规定为正无穷大.

关于∞的四则运算规定如下:

(a) 加法: $\alpha+\infty=\infty+\alpha=\infty, \quad (\alpha\neq\infty)$

(b) 减法: $\alpha-\infty=\infty-\alpha=\infty, \quad (\alpha\neq\infty)$

(c) 乘法: $\alpha\cdot\infty=\infty\cdot\alpha=\infty, \quad (\alpha\neq 0)$

(d) 除法: $\dfrac{\alpha}{\infty}=0, \quad \dfrac{\infty}{\alpha}=\infty, (\alpha\neq\infty), \quad \dfrac{\alpha}{0}=\infty, (\alpha\neq 0)$

6.曲线与区域

(1)邻域

平面上以 z_0 为中心, δ (任意的正数)为半径的圆: $|z-z_0|<\delta$ 内部的点的集合称为 z_0 的邻域.

不等式 $0<|z-z_0|<\delta$ 所确定的点的集合称为 z_0 的去心邻域.

(2)内点

设 G 为一平面点集, z_0 为 G 中任意一点. 如果存在 z_0 的一个邻域, 该邻域内的所有点都属于 G, 那末 z_0 称为 G 的内点.

(3) 开集

如果 G 内每一点都是它的内点, 那末G 称为开集.

(4) 区域

如果平面点集D满足以下两个条件, 则称它为一个区域.

(a) D是一个开集;

(b) D是连通的, 即D中任何两点都可以用完全属于D的一条折线连结起来.

(5) 边界点、边界

设D是复平面内的一个区域, 如果点P 不属于D, 但在P的任意小的邻域内总有D中的点,这样的P点我们称为D的**边界点**.

D的所有边界点组成D的**边界**.

(6)闭区域 区域D与它的边界一起构成闭区域.

(7) 有界区域和无界区域

如果一个区域 D 可以被包含在一个以原点为中心的圆里面,即存在 $M>0$,使区域的每一个点都满足 $|z|<M$,那末 D 称为有界的,否则称为无界的.

(8) 简单曲线

设$C: z = z(t)\ (a \le t \le b)$为一条连续曲线, $z(a)$与$z(b)$分别称为C的起点和终点.

对于满足$a < t_1 < b,\ a \le t_2 \le b$的$t_1$与$t_2$,当$t_1 \ne t_2$而有$z(t_1) = z(t_2)$时,点$z(t_1)$称为曲线$C$的重点.

没有重点的曲线C称为简单曲线(或若尔当曲线).

如果简单曲线C的起点和终点重合,即$z(a) = z(b)$,那末称C为简单闭曲线.

简单闭曲线的性质

任意一条简单闭曲线C将复平面唯一地分成三个互不相交的点集.

(9) 光滑曲线

如果在 $a \le t \le b$ 上, $x'(t)$ 和 $y'(t)$ 都是连续的,且对于 t 的每一个值, 有 $[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 \neq 0$,那末称这曲线为光滑的.

由几段依次相接的光滑曲线所组成的曲线称为按段光滑曲线.

(10) 单连通域与多连通域

复平面上的一个区域B, 如果在其中任作一条简单闭曲线, 而曲线的内部总属于B, 就称为单连通域. 一个区域如果不是单连通域, 就称为多连通域.

从几何上看，单连通域就是无洞、无割痕的域.

7. 复变函数的概念

(1) 复变函数的定义

设 G 是一个复数 $z = x + iy$ 的集合. 如果有一个确定的法则存在, 按这个法则, 对于集合 G 中的每一个复数 z, 就有一个或几个复数 $w = u + iv$ 与之对应, 那末称复变数 w 是复变数 z 的函数 (简称复变函数), 记作 $w = f(z)$.

复变函数 w 与自变量 z 之间的关系 $w = f(z)$ 相当于两个关系式: $u = u(x, y),\quad v = v(x, y).$

(2) 映射的定义

对于复变函数,由于它反映了两对变量 u,v 和 x,y 之间的对应关系,因而无法用同一平面内的几何图形表示出来,必须看成是两个复平面上的点集之间的对应关系.

如果用 z 平面上的点表示自变量 z 的值,而用另一个平面 w 平面上的点表示函数 w 的值,那末函数 $w=f(z)$ 在几何上就可以看作是把 z 平面上的一个点集 G (定义集合) 变到 w 平面上的一个点集 G^* (函数值集合)的映射(或变换).

8. 复变函数的极限

函数极限的定义

设函数 $w = f(z)$ 定义在 z_0 的去心邻域 $0 < |z - z_0| < \rho$ 内, 如果有一确定的数 A 存在, 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 相应的必有一正数 $\delta(\varepsilon)$ $(0 < \delta \le \rho)$, 使得当 $0 < |z - z_0| < \delta$ 时有 $|f(z) - A| < \varepsilon$ 那末称 A 为 $f(z)$ 当 z 趋向于 z_0 时的极限.

记作 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$. (或 $f(z) \xrightarrow{z \to z_0} A$)

注意: 定义中 $z \to z_0$ 的方式是任意的.

极限计算的定理

设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, $A=u_0+iv_0$, $z_0=x_0+iy_0$, 那末 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$ 的充要条件是

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=u_0, \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=v_0.$$

该定理将求复变函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 的极限问题,转化为求两个二元实变函数 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 的极限问题.

极限运算法则

设 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A,\ \lim\limits_{z\to z_0} g(z) = B$, 那么

(1) $\lim\limits_{z\to z_0}[f(z) \pm g(z)] = A \pm B;$

(2) $\lim\limits_{z\to z_0}[f(z)g(z)] = AB;$

(3) $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{A}{B} \quad (B \neq 0).$

与实变函数的极限运算法则类似.

9. 复变函数的连续性

(1) 连续的定义

如果 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$, 那么我们就说 $f(z)$ 在 z_0 处连续. 如果 $f(z)$ 在区域 D 内处处连续, 我们说 $f(z)$ 在 D 内连续.

函数 $f(z)$ 在曲线 C 上 z_0 处连续的意义是

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0), \quad z \in C.$$

连续的充要条件

函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在 $z_0=x_0+iy_0$ 连续的充要条件是：$u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

连续的性质

(a) 在 z_0 连续的两个函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 的和、差、积、商 (分母在 z_0 不为零) 在 z_0 处仍连续.

(b) 如果函数 $h=g(z)$ 在 z_0 连续，函数 $w=f(h)$ 在 $h_0=g(z_0)$ 连续，那末复合函数 $w=f[g(z)]$ 在 z_0 处连续.

特殊的:

有理整函数(多项式)

$$w = P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n,$$

对复平面内的所有点 z 都是连续的;

有理分式函数

$$w = \frac{P(z)}{Q(z)},$$ 其中 $P(z)$ 和 $Q(z)$ 都是多项式,

在复平面内使分母不为零的点也是连续的.

三、典型例题

例1 设 z_1, z_2 是两个复数,求证

1) $|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\,\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$;

2) $|z_1 - z_2| \geq \big||z_1| - |z_2|\big|$.

证 1) $|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2})$

$= (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1 - z_1\bar{z}_2$

$= |z_1|^2 + |z_2|^2 - (\overline{z_1\bar{z}_2} + z_1\bar{z}_2)$

$= |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\,\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$.

2) 由1)知 $|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\,\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2),$

又 $||z_1| - |z_2||^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|z_1||z_2|$

$= |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|z_1||\bar{z}_2|$

$= |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|z_1\bar{z}_2|,$

因为 $|z_1\bar{z}_2| \geq \mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2),$

所以 $|z_1|^2+|z_2|^2-2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) \geq |z_1|^2+|z_2|^2-2|z_1\bar{z}_2|,$

即 $|z_1-z_2|^2 \geq \left||z_1|-|z_2|\right|^2.$

两边开方,得 $|z_1-z_2| \geq \left||z_1|-|z_2|\right|.$

其几何意义是三角形任意一边的长不小于其它两边边长之差的绝对值.

例2 设$|z_0|<1$,证明:若$|z|<1$,则$\left|\dfrac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}\right|<1.$

证 若 $|z|<1$,则

$$|z|^2(1-|z_0|^2)<1-|z_0|^2,$$

因为 $$|z|^2+|z_0|^2<1+|z_0|^2<1+|z|^2|z_0|^2.$$

又 $$|z-z_0|^2=|z|^2+|z_0|^2-2\,\mathrm{Re}(z\bar{z}_0)$$

$$<1+|z|^2|z_0|^2-2\,\mathrm{Re}(z\bar{z}_0)=|1-z\bar{z}_0|^2,$$

所以 $\left|\dfrac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}\right|^2<1,$ 即 $\left|\dfrac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}\right|<1.$

例3 已知 $x^2+x+1=0$,求 $x^{11}+x^7+x^3$ 的值.

解 因为 $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$,

而 $x^2+x+1=0$,故x是一个三次单位根,

从而 $x^{11}=x^2, x^7=x, x^3=1$

所以 $x^{11}+x^7+x^3=x^2+x+1=0.$

例4 设ω是任意一个不等于1的n次单位根,求 $1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{n-1}$ 的值.

解 因为 $\omega^n=1$

所以 $1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{n-1}$

$$=\frac{1-\omega^n}{1-\omega}=0.$$

例5 解方程 $z^2-4iz-(4-9i)=0.$

解 原方程为 $z^2-4iz+(2i)^2+4-(4-9i)=0.$

即 $(z-2i)^2=-9i$

于是 $z-2i=\sqrt{-9i}$

$$=3\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}+i\sin\frac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}\right),\quad k=0,1$$

故 $z_1=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}+\left(2-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)i,z_2=\dfrac{-3\sqrt{2}}{2}+\left(2+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)i.$

例6 满足下列条件的点组成何种图形?是不是区域?若是区域请指出是单连通区域还是多连通区域.

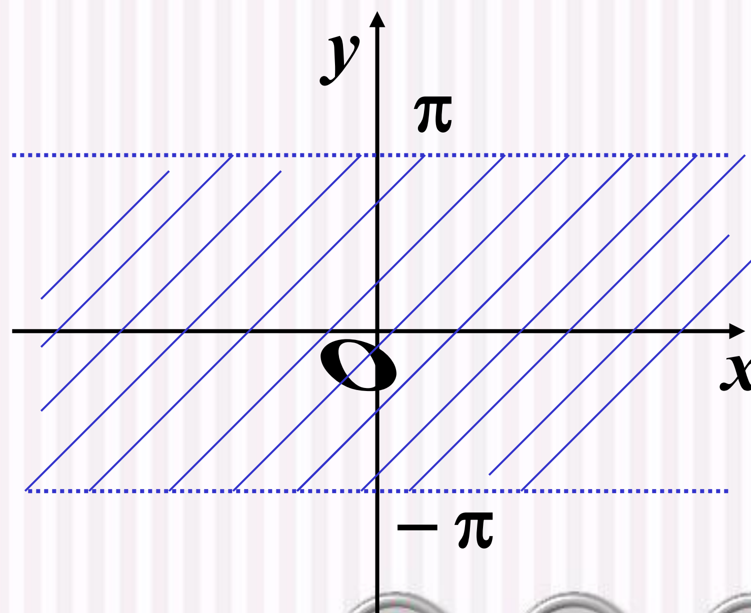
(1) $\mathrm{I_m}(z) = 0;$

解 $\mathrm{I_m}(z) = 0$是实数轴,不是区域.

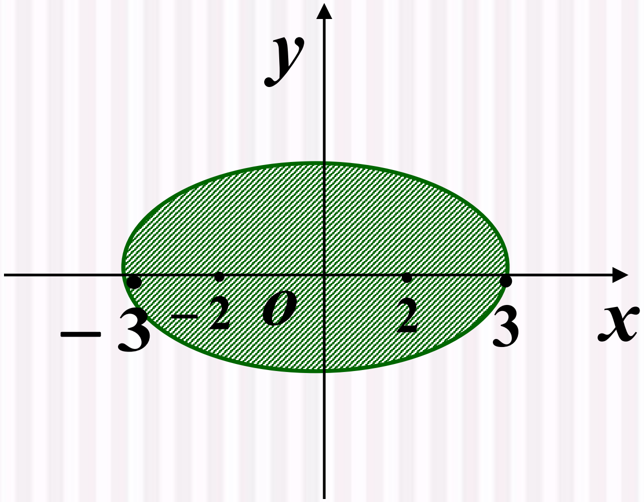
(2) $-\pi < \mathrm{I_m}(z) < \pi;$

解 $-\pi < \mathrm{I_m}(z) < \pi$

是以 $y = -\pi, \quad y = \pi$ 为界的带形单连通区域.

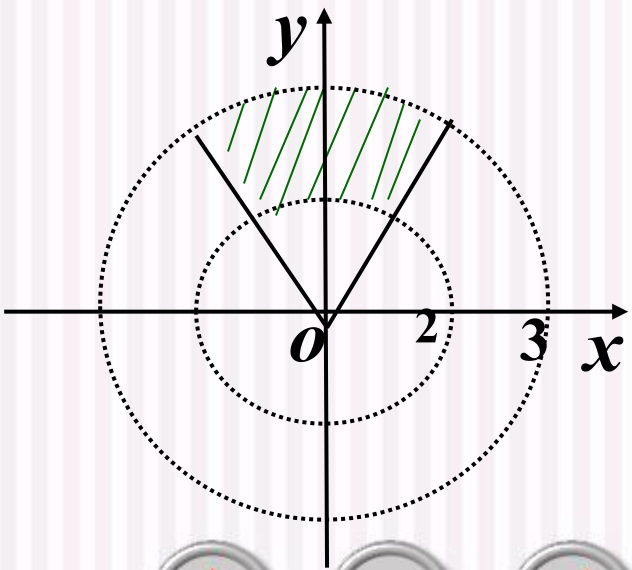


(3) $|z-2|+|z+2|\le 6$



解 是以 ± 2为焦点,以3为半长轴的椭圆闭区域,它不是区域.

(4) $\dfrac{\pi}{3}\le \arg z\le \dfrac{2\pi}{3}$,且$2<|z|<3$



解 不是区域，因为图中

$$\arg z=\frac{\pi}{3},\ \arg z=\frac{2\pi}{3}$$

在圆环内的点不是内点.

例7 函数$w=1/z$将z平面上的下列曲线变成w平面上的什么曲线?

(1) $x^2+y^2=9$, (2) $x=2$.

解 (1) 因为 $x^2+y^2=|z|^2=9$

又 $w=\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{x+iy}=\dfrac{x-iy}{x^2+y^2}=\dfrac{1}{9}(x-iy)$,

于是 $w=u+iv=\dfrac{1}{9}x-\dfrac{1}{9}iy \Rightarrow u=\dfrac{1}{9}x,\ \ v=-\dfrac{1}{9}y$

$u^2+v^2=\dfrac{1}{81}(x^2+y^2)=\dfrac{1}{9}$ 表示 w 平面上的圆.

(2) $x = 2$.

解 因为 $z = x + iy = 2 + iy$

所以 $w = \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{2+iy} = \dfrac{2-iy}{4+y^2} = u + iv$

$$\Rightarrow u = \frac{2}{4+y^2},\quad v = -\frac{y}{4+y^2}$$

因为 $u^2+v^2 = \dfrac{4+y^2}{(4+y^2)^2} = \dfrac{1}{4+y^2} = \dfrac{u}{2}$,

所以 $u^2 + v^2 - \dfrac{u}{2} = 0 \Rightarrow \left(u - \dfrac{1}{4}\right)^2 + v^2 = \dfrac{1}{16}$

表示 w平面上以$\left(\dfrac{1}{4}, 0\right)$为圆心，$\dfrac{1}{4}$为半径的圆.