5.9 操作臂的静力

- 操作臂的链式结构特性自然让我们想到力和力矩是如何从一个连杆向下一个连杆“传递”的。考虑操作臂的自由末端（末端执行器）在工作空间推动某个物体，或用手部抓举着某个负载的典型情况。
- 对于操作臂的静力，首先锁定所有的关节使得操作臂成为一个结构。然后对这种结构中的连杆进行讨论，在各连杆坐标系中写出力和力矩的平衡关系。最后，为了保持操作臂的静态平衡，计算出需要在各关节轴依次施加多大的静力矩。通过这种方法，可以求出为了使末端执行器支撑住某个静负载所需的一组关节力矩。

5.9 操作臂的静力

- 在本节中，不考虑作用在连杆上的重力。
- 关节静力和静力矩是由施加在最后一个连杆上的静力或静力矩（或两者共同）引起的，例如，当操作臂的末端执行器和环境接触时就是这样的。
- 为相邻杆件所施加的力和力矩定义以下特殊的符号：
  - $\boldsymbol{f}_i$ =连杆$i-1$施加在连杆i 上的力，
  - $\boldsymbol{n}_i$ =连杆 $i-1$ 施加在连杆i上的力矩。

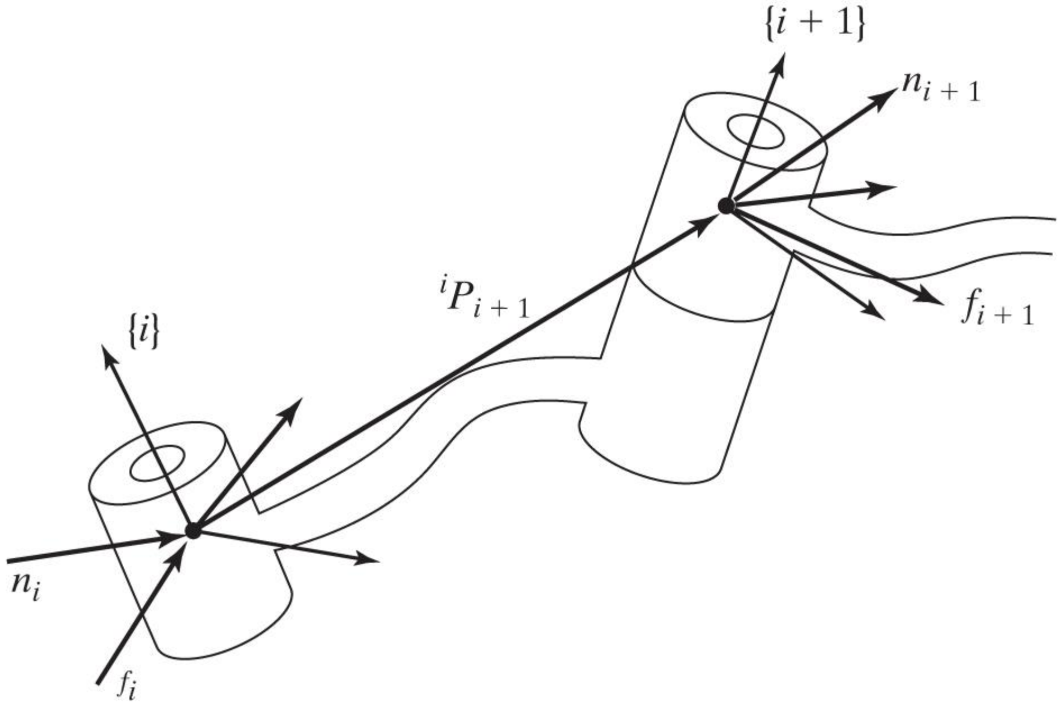
5.9 操作臂的静力

- 按照惯例建立连杆坐标系,将这些力相加并令其和为0, 有

$$ {}^{i}\boldsymbol{f}_i - {}^{i}\boldsymbol{f}_{i+1} = 0 $$

- 将绕坐标系{i}原点的力矩相加,有

$$ {}^{i}\boldsymbol{n}_i - {}^{i}\boldsymbol{n}_{i+1} - {}^{i}\boldsymbol{p}_{i+1} \times {}^{i}\boldsymbol{f}_{i+1} = 0 $$

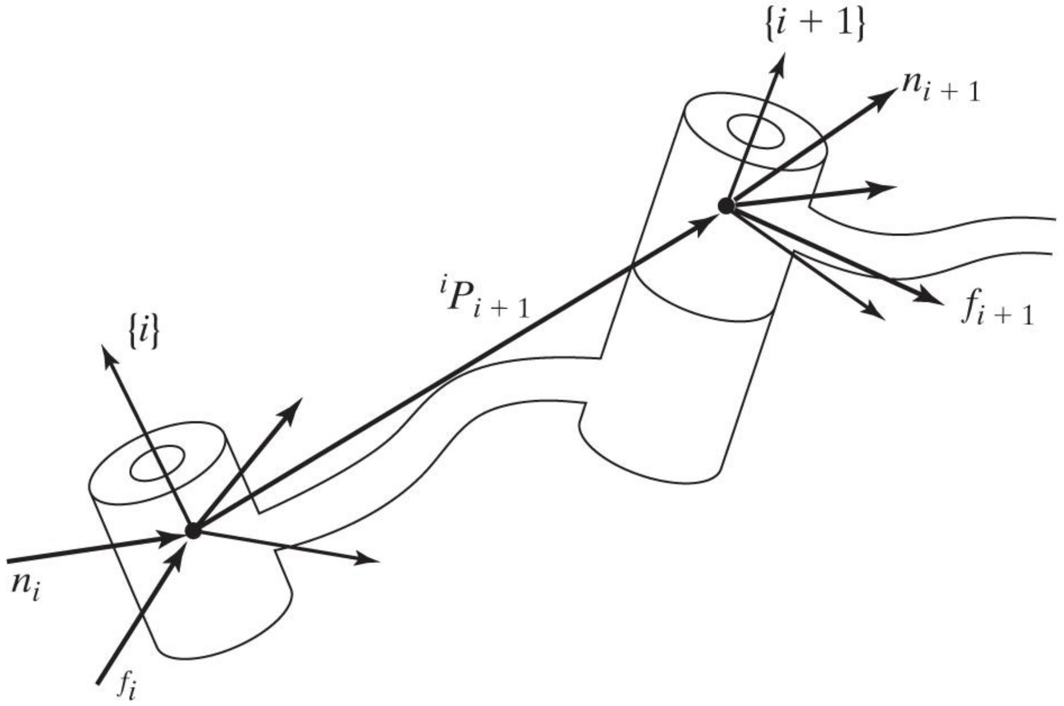


5.9 操作臂的静力

- 从施加于机器人末端执行器的力和力矩的描述开始，就可以计算出作用于每一个连杆的力和力矩. 从末端连杆到基座（连杆0）进行计算。

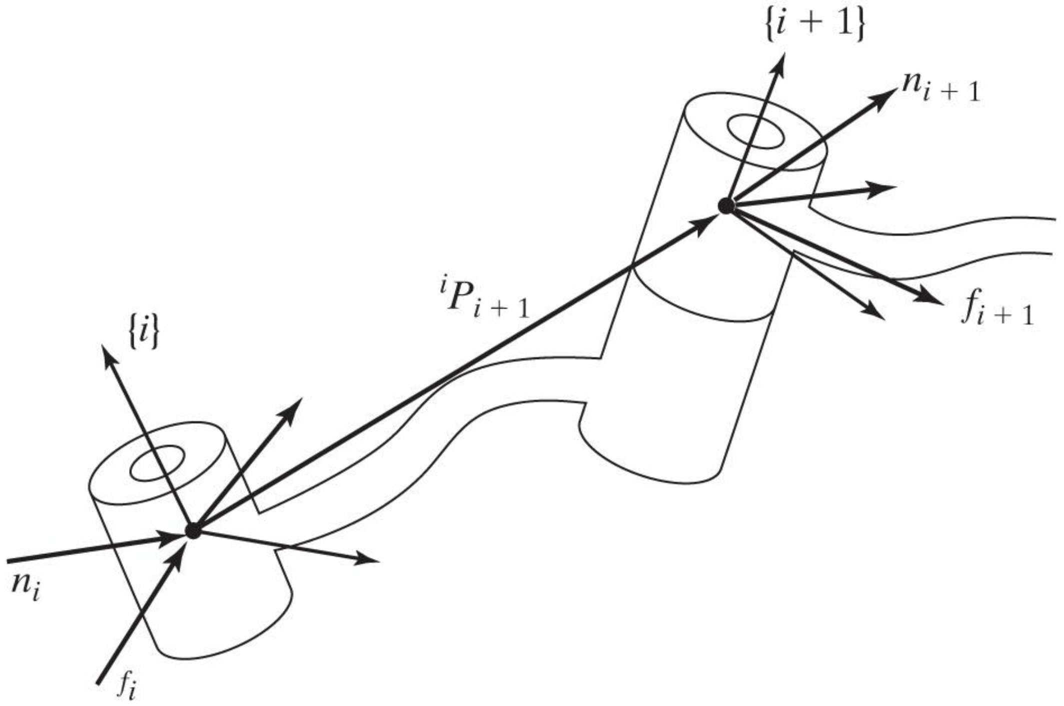
$$ {}^{i}\boldsymbol{f}_{i} = {}^{i}\boldsymbol{f}_{i+1} $$

$$ {}^{i}\boldsymbol{n}_{i} = {}^{i}\boldsymbol{n}_{i+1} + {}^{i}\boldsymbol{p}_{i+1} \times {}^{i}\boldsymbol{f}_{i+1} $$



5.9 操作臂的静力

- 按照定义在连杆自身坐标系中的力和力矩写出这些表达式，用坐标系｛i+1｝相对于坐标系｛i｝的旋转矩阵进行变换，就得到了连杆之间的静力“传递”表达式：



$$
{}^{i}\boldsymbol{f}_{i} = {}^{i}_{i+1}R\,{}^{i+1}\boldsymbol{f}_{i+1}
$$

$$
{}^{i}\boldsymbol{n}_{i} = {}^{i}_{i+1}R\,{}^{i+1}\boldsymbol{n}_{i+1} + {}^{i}\boldsymbol{p}_{i+1} \times {}^{i}\boldsymbol{f}_{i}
$$

5.9 操作臂的静力

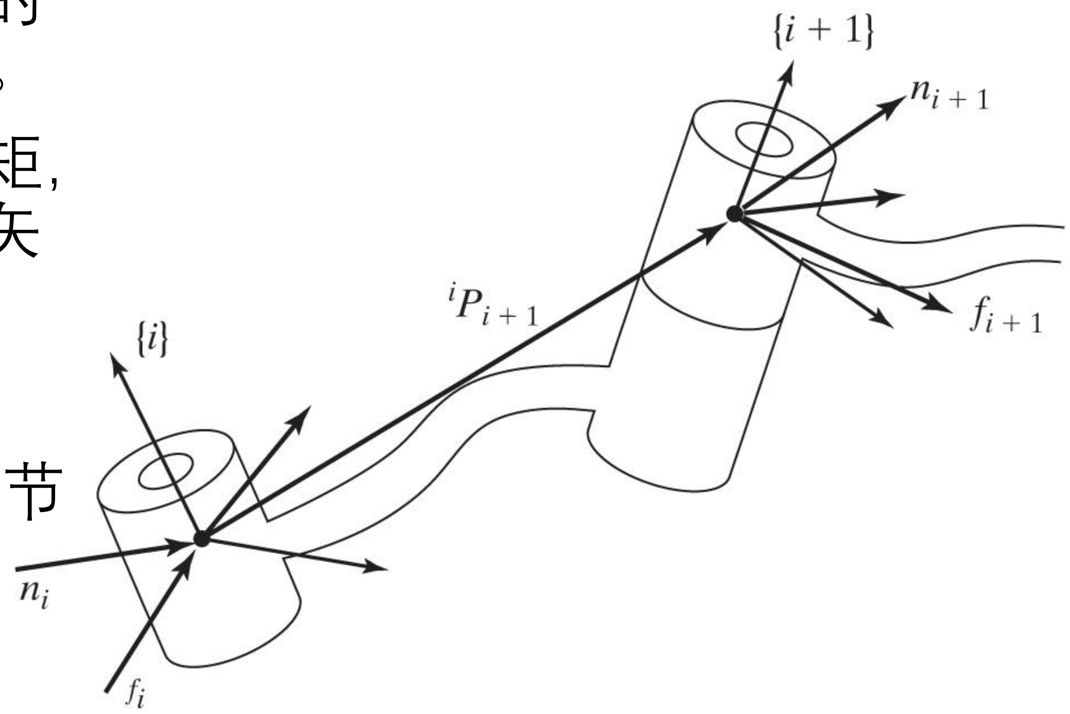
- 除了绕关节轴的力矩之外，力和力矩矢量的所有分量都可以由操作臂机构本身来平衡。
- 因此，为了求出保持系统静平衡的关节力矩，应计算关节轴矢量和施加在连杆上的力矩矢量的点乘：

$$\tau_i = {}^i\boldsymbol{n}_i^T\,{}^i\boldsymbol{z}_i$$

- 对于关节i是移动关节的情况，可以算出关节驱动力为

$$\tau_i = {}^i\boldsymbol{f}_i^T\,{}^i\boldsymbol{z}_i$$

- 按照惯例，通常将使关节角增大的旋转方向定义为关节力矩的正方向。



例 5.7 例 5.3 的两连杆操作臂在末端执行器施加力矢量 ^3F（可以认为该力是施加在坐标系{3}原点上的）。按照位形函数和作用力的函数给出所需关节力矩(参见图 5-12)。

应用式(5.80)～式(5.82)，从末端连杆开始向机器人的基座计算：

$$^2f_2=\begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.84}$$

$$^2n_2=l_2\hat{X}_2\times\begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2f_y \end{bmatrix} \tag{5.85}$$

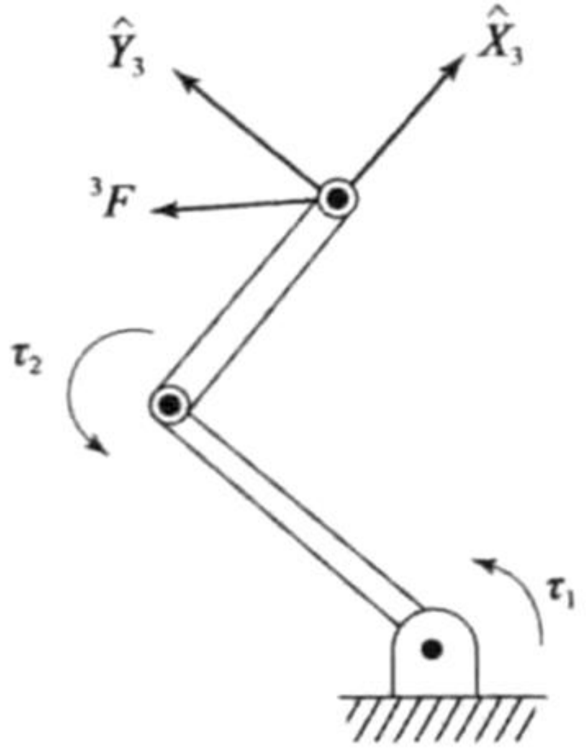
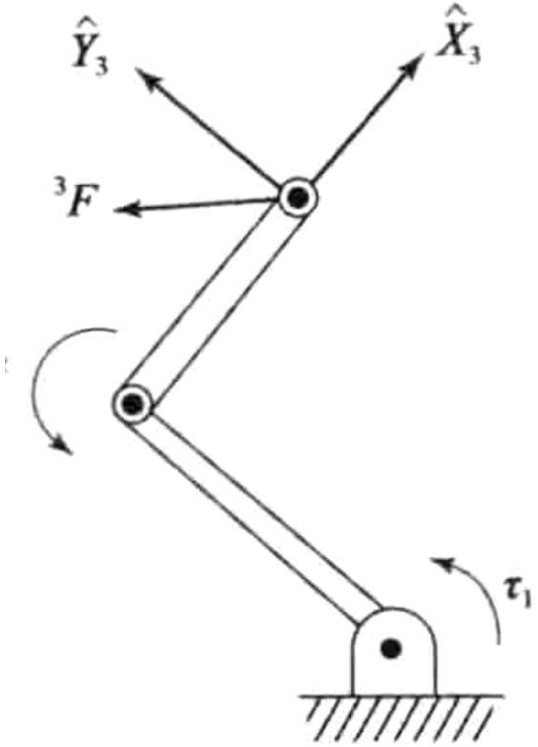


图 5-12　两连杆操作臂在末端对外施加力



$$^1f_1 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_2 f_x - s_2 f_y \\ s_2 f_x + c_2 f_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$^1n_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 f_y \end{bmatrix} + l_1 \hat{X}_1 \times {}^1f_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 s_2 f_x + l_1 c_2 f_y + l_2 f_y \end{bmatrix}$$

$$\tau_1 = l_1 s_2 f_x + (l_2 + l_1 c_2) f_y$$
$$\tau_2 = l_2 f_y$$

可将这个关系写成矩阵算子：

$$\tau = \begin{bmatrix} l_1 s_2 & l_2 + l_1 c_2 \\ 0 & l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix}$$

这个矩阵是式(5.66)中求出的雅可比矩阵的转置，但这并不是巧合！

5. 10 力域中的雅可比

- 在静态下，关节力矩完全与在手部上的力平衡。当力作用在机构上时，如果机构经过一个位移，就作了功（从技术意义上讲）。功被定义为作用力通过一段距离，它是以能量为单位的标量。如令位移趋向于无穷小就可以用**虚功**原理来描述静止的情况。功具有能量的单位，所以它在任何广义坐标系下的测量值都相同。特别是在笛卡儿空间作的功应当等于关节空间作的功。在多维空间中，功是一个力或力矩矢量与位移矢量的点积。于是有

$$\boldsymbol{f} \cdot \delta \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\tau} \cdot \delta \boldsymbol{\theta}$$

- 也可以写成

$$\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}} \delta \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\tau}^{\mathrm{T}} \delta \boldsymbol{\theta}$$

5. 10 力域中的雅可比

- 雅可比矩阵的定义为

$$\delta \boldsymbol{x} = J\delta\boldsymbol{\theta}$$

- 因此可写出

$$\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}} J\delta\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\tau}^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{\theta}$$

- 上式均成立，因此有

$$\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}} J = \boldsymbol{\tau}^{\mathrm{T}}$$

- 对两边转置，可得：

$$\boldsymbol{\tau} = J^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}$$

5. 10 力域中的雅可比

- 两连杆操作臂的特殊情况具有一般意义：雅可比矩阵的转置将作用在手臂上的笛卡儿力映射成了等效关节力矩。
- 当得到相对于坐标系｛0｝的雅可比矩阵后，可以由下式对坐标系｛0｝中的力矢量进行变换：

$$\boldsymbol{\tau} = {}^{0}J^{\mathrm{T}}\,{}^{0}\boldsymbol{f}$$

- 当雅可比矩阵不满秩时，存在某些特定的方向，末端执行器在这些方向上不能施加期望的静态力。
- 这也意味着，在奇异位形的附近，机械特性趋向于无穷大，以致只要很小的关节力矩就可在末端执行器产生很大的力。因此，在力域中和在位置域中奇异都是存在的。

5. 11 速度和静力的笛卡儿变换

- 可以根据6×1 维的刚体广义速度表达式进行讨论：

$$\boldsymbol{\nu} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix}$$

- 同样，考虑6×1 维的广义力矢量表达式，即

$$\boldsymbol{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{n} \end{bmatrix}$$

- 可以想到用6×6 变换阵将这些量从一个坐标系映射到另一个坐标系。这和在连杆之间速度和力的传递中已经作过的工作完全一致。

5. 11 速度和静力的笛卡儿变换

- 这里涉及的两个坐标系之间是刚性连接的

$$\begin{bmatrix} {}^{B}\boldsymbol{v}_{B} \\ {}^{B}\boldsymbol{\omega}_{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{B}_{A}R & -{}^{B}_{A}R\,{}^{A}\boldsymbol{p}_{BORG}\times \\ 0 & {}^{B}_{A}R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{A}\boldsymbol{v}_{A} \\ {}^{A}\boldsymbol{\omega}_{A} \end{bmatrix}$$

- 叉乘可看成是矩阵算子

$$\boldsymbol{p}\times = \begin{bmatrix} 0 & -p_z & p_y \\ p_z & 0 & -p_x \\ -p_y & p_x & 0 \end{bmatrix}$$

- 将一个坐标系的速度与另一个坐标系的速度相联系，因此这个6 X6 算子被称为**速度变换矩阵**，用符号 T_v表示。它是一个把｛A｝中的速度映射到{B}中的速度的速度变换

$$^{B}\boldsymbol{v}_{B} = {}^{B}_{A}T_{v}\,{}^{A}\boldsymbol{v}_{A}$$

5. 11 速度和静力的笛卡儿变换

- 已知｛B｝中速度值，计算在｛A｝中的速度描述

$$^{A}\boldsymbol{v}_{A} = {}^{A}_{B}T_{v}\,{}^{B}\boldsymbol{v}_{B}$$

- 从坐标系到坐标系的速度变换是由 ${}^{A}_{B}T_{v}$ （或它的逆变换）确定的，并且应被看作是瞬时的结果，除非两个坐标系之间的关系是静止不变的。

5. 11 速度和静力的笛卡儿变换

- 可将在坐标系 {B} 中描述的广义力矢量变换成在坐标系 {A} 中的描述，即为

$$\begin{bmatrix} {}^{A}\boldsymbol{f}_{A} \\ {}^{A}\boldsymbol{n}_{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{A}_{B}R & \mathbf{0} \\ {}^{A}R_{BORG} & {}^{A}_{B}R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{B}\boldsymbol{f}_{B} \\ {}^{B}\boldsymbol{n}_{B} \end{bmatrix}$$

$$ {}^{A}\mathcal{F}_{A} = {}^{A}_{B}\mathcal{T}_{f}\, {}^{B}\mathcal{F}_{B} $$

- 速度和力变换矩阵与雅可比矩阵相似，把不同坐标系中的速度和力联系起来。

问题?