概率论与数理统计

中山大學
SUN YAT-SEN UNIVERSITY

主讲老师：邝东阳， kuangdy@mail.sysu.edu.cn

Part 1
随机变量

博学 | 审问 | 慎思 | 明辨 | 笃行

定义 2.1.1. 一个随机变量*(random variable)*是从样本空间Ω到实数轴的一个(映射)函数。具体的讲，称样本空间Ω到实数轴$\mathbb{R}$的一个映射$X(\cdot)$为随机变量，如果

$$\{\omega : X(\omega) < x\} \in \mathcal{F}$$ **可测性条件**

对任意的实数$x \in \mathbb{R}$。$X(\cdot)$经常简写为X.

例2.1.1. 随机事件的示性函数是随机变量。

Part 2

分布函数

博学 | 审问 | 慎思 | 明辨 | 笃行

定义 2.1.1 设 X 为随机变量，称函数

$$F_X(x)=P(\{\omega:X(\omega)\leqslant x\}),\quad -\infty<x<+\infty \tag{2.1.2}$$

为 X 的累积分布函数(cumulative distribution function (cdf))或分布函数.

事件$\{\omega:X(\omega)\leqslant x\}$常简记为$\{X\leqslant x\}$

$$F(x)=P(X\leq x),\quad for\ all\ x\ \in\mathbb{R}$$

例2.2.1. 投掷三枚硬币，X=正面向上的个数。则X的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} 0 & if\ -\infty < x < 0 \\ \frac{1}{8} & if\ 0 \le x < 1 \\ \frac{1}{2} & if\ 1 \le x < 2 \\ \frac{7}{8} & if\ 2 \le x < 3 \\ 1 & if\ 3 \le x < \infty \end{cases}$$

分布函数$F(x)$满足:

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=0$和$\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=1$;
2. $F(x)$是一个非降的函数;
3. $F(x)$是一个右连续的函数, 即对任意的x_0有$\lim\limits_{x\downarrow x_0} F(x)=F(x_0)$.

反之，若一个函数满足1-3，则这个函数是一个分布函数。

例 2.1.3 设某工厂生产的显像管的寿命 X(万小时)是一随机变量,有分布函数

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1-e^{-x/2}, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

求显像管的寿命超过 2 万小时的概率 p_1,超过 2 万小时但不超过 4 万小时的概率 p_2,恰好为 2 万小时的概率 p_3.

解 $p_1=P(X>2)=1-P(X\leqslant 2)=1-F(2)=1-(1-e^{-2/2})=e^{-1}=0.368.$

$$p_2=P(2<X\leqslant 4)=P(X\leqslant 4)-P(X\leqslant 2)=F(4)-F(2)$$
$$=(1-e^{-4/2})-(1-e^{-2/2})=e^{-1}-e^{-2}=0.233.$$

由于对任意正整数 n 都有

$$0\leqslant p_3=P(X=2)\leqslant P(2-1/n<X\leqslant 2)=P(X\leqslant 2)-P(X\leqslant 2-1/n)$$
$$=F(2)-F(2-1/n)=e^{-(2-1/n)/2}-e^{-1},$$

令 $n\to\infty$ 得 $p_3=0$.

命题 2.1.2 分布函数 $F(x)$ 在每一点上都存在左极限，以 $F(a-)$ 记 $F(x)$ 在点 a 的**左极限** $\lim\limits_{x\to a^-}F(x)$，则

$$F(a-) = P(X < a).$$

命题 2.1.3 设随机变量 X 有分布函数 $F(x)$，则对任意实数 a，

$$P(X=a)=F(a)-F(a-),$$

特别，$P(X=a)=0$ 的充分必要条件是 a 是 $F(x)$ 的连续点.

定义 2.2.3. 若存在非负函数$f(x)$使得随机变量X的分布函数

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx, \quad for\ all\ x\ \in \mathbb{R}$$

则称随机变量X为连续型的，并称$f(x)$为X的概率密度函数*(pdf, probability density function)*。

1. $f(x) \geq 0, forall\ x \in \mathbb{R}.$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$

3. 若$f(x)$在x点连续，则$F'(x) = f(x).$

4. 对任意的Borel可测集合B, $P(X \in B) = \int_{x \in B} f(x)dx$

反之，若一个函数$f(x)$满足如上**1-2**两条，则存在某个连续型随机变量使得$f(x)$为其概率密度。

定义 2.2.4. 称随机变量X为连续型$(continuous)$的，如果它的分布函数是连续的；称随机变量X为离散型$(discrete)$的，如果它的分布函数是一个阶梯函数。

既非连续也非离散的随机变量是存在的，比如

例2.2.2. 设随机变量Y的分布函数为

$$F(y) = \begin{cases} \frac{1-\epsilon}{1+e^{-y}} & if\ y < 0 \\ \epsilon + \frac{1-\epsilon}{1+e^{-y}} & if\ y \geq 0 \end{cases}$$

其中$0 < \epsilon < 1$. 则Y既不是连续的也不是离散的。