现代控制系统

第二章：系统数学模型

2. 系统数学建模

- 物理系统的数学建模是控制系统设计和分析过程中的关键环节。通常用常微分方程（组）来描述系统的动态特性。本章讨论的实际物理系统包括机械系统、流体系统和电器系统等。
- 预期收获
  - ✓ 体会到能够用微分方程描述物理系统的动态特性
  - ✓ 能够通过泰勒级数展开来实现模型的线性近似
  - ✓ 理解并掌握拉普拉斯变换及其在传递函数计算中的作用
  - ✓ 掌握框图模型和信号流图模型，认识到其在控制系统分析与设计中的作用
  - ✓ 理解数学建模在控制系统设计过程中的重要作用

2. 系统数学建模

2.1 引言

- 数学模型 (Mathematical models)
  - 利用数学工具对系统行为进行的描述
- 线性系统（Linear system）
  - 满足叠加性(superposition)和齐次性(homogeneity)的系统
  - 线性叠加原理
    - 若系统对激励x1(t)的响应为y1(t)，对激励x2(t)的响应为y2(t)，则线性系统对激励x1(t) +x2 (t)的响应必须是y1(t)+y2(t)
  - 齐次性准则
    - 若系统对输入激励x的输出响应为 y ，则线性系统对缩放了常数（ β ）倍的输入激励βx的响应必须是βy

分析研究动态系统的步骤

1. 构建和定义系统及其元件
2. 基于基本的物理模型，确定必要的假设条件并推导数学模型
3. 列写描述该模型的微分方程（组）
4. 求解方程（组），得到所求输出变量的解
5. 检查假设条件和所得到的解
6. 如果必要，重新分析和设计系统

2.2 物理系统的微分方程（组）

根据受控过程自身遵循的物理规律，可以建立描述物理系统动态特性的微分方程。这种方法可以应用于机械系统（牛顿运动定律）、电气系统（基尔霍夫定律）、热力学系统（热力学定律）等，并能够取得同样好的效果。

如图2.1所示，考虑到扭矩$T_a(t)$作用下的弹簧-质量（块）系统，假设弹簧的质量为零，需要测量的物理量是传送到质量块m上的扭矩$T_s(t)$。

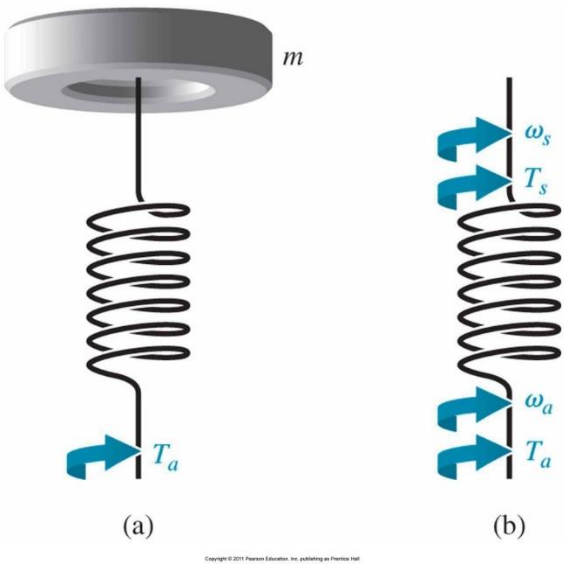


图2.1(a)旋转弹簧一质量系统；
(b)弹簧元件

由于弹簧的质量可以忽略不计，因此作用在弹簧上的扭矩为零：$T_a(t)-T_s(t)=0$。由此可知，作用于弹簧另一端的外部扭矩，通过弹簧原封不动地传递到了另一端，因此，该扭矩称为通过型变量。

如果考虑弹簧两端的旋转角度之差：$\omega(t)=\omega_s(t)-\omega_a(t)$，则需要在弹簧两端测量角速度，才能测得角速度差，角速度因而称为跨越型变量。

表2.1 物理系统的通过型和跨越型变量小结

系统	通过元件的变量	积分通过型变量	跨越元件的变量	积分跨越型变量
电力系统	电流，i	电荷，q	电压差，v_{21}	磁通匝连数，λ_{21}
机械传动系统	力，F	平动动量，P	速度差，v_{21}	位移差，y_{21}
机械旋转系统	扭矩，T	角动量，h	角速度差，ω_{21}	角位移差，θ_{21}
流体系统	流量，Q	容积，V	压强差 P_{21}	压力动量，γ_{21}
热力系统	热流量，q	热能，H	温差 T_{21}	

Table 2.1 Summary of Through- and Across-Variables for Physical Systems

	System	Variable Through Element	Integrated Through-Variable	Variable Across Element	Integrated Across-Variable
电力系统	Electrical	Current, i	Charge, q	Voltage difference, v_{21}	Flux linkage, λ_{21}
机械传动系统	Mechanical translational	Force, F	Translational momentum, P	Velocity difference, v_{21}	Displacement difference, y_{21}
机械旋转系统	Mechanical rotational	Torque, T	Angular momentum, h	Angular velocity difference, ω_{21}	Angular displacement difference, θ_{21}
流体系统	Fluid	Fluid volumetric rate of flow, Q	Volume, V	Pressure difference, P_{21}	Pressure momentum, γ_{21}
热力系统	Thermal	Heat flow rate, q	Heat energy, H	Temperature difference, $\mathcal{T}_{21}$	

表2.2 理想元件遵循的微分方程

感性储能元件

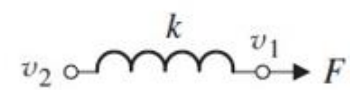
	Physical Element	Governing Equation	Energy E or Power $\mathcal{P}$	Symbol
电阻	Electrical inductance	$v_{21} = L\dfrac{di}{dt}$	$E = \dfrac{1}{2}Li^2$	
平动弹簧	Translational spring	$v_{21} = \dfrac{1}{k}\dfrac{dF}{dt}$	$E = \dfrac{1}{2}\dfrac{F^2}{k}$	
旋转弹簧	Rotational spring	$\omega_{21} = \dfrac{1}{k}\dfrac{dT}{dt}$	$E = \dfrac{1}{2}\dfrac{T^2}{k}$	
流体惯量	Fluid inertia	$P_{21} = I\dfrac{dQ}{dt}$	$E = \dfrac{1}{2}IQ^2$	

表2.2 理想元件遵循的微分方程

容性储能元件

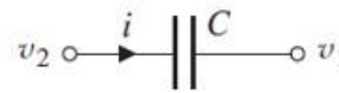
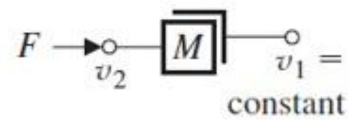
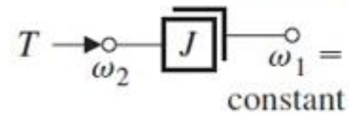
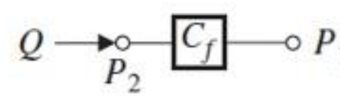
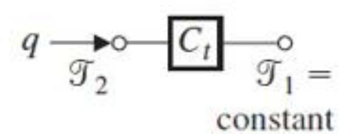
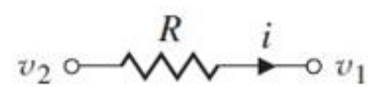
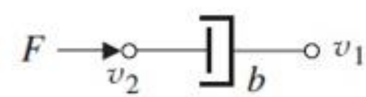
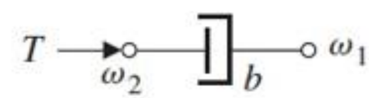
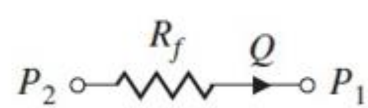
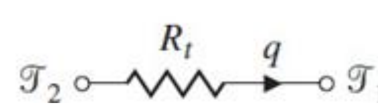
电容	Electrical capacitance	$i = C\frac{dv_{21}}{dt}$	$E = \frac{1}{2}Cv_{21}{}^2$	
平动质量	Translational mass	$F = M\frac{dv_2}{dt}$	$E = \frac{1}{2}Mv_2{}^2$	
转动惯量	Rotational mass	$T = J\frac{d\omega_2}{dt}$	$E = \frac{1}{2}J\omega_2{}^2$	
流体容量	Fluid capacitance	$Q = C_f\frac{dP_{21}}{dt}$	$E = \frac{1}{2}C_fP_{21}{}^2$	
热容量	Thermal capacitance	$q = C_t\frac{d\mathcal{T}_2}{dt}$	$E = C_t\mathcal{T}_2$	

表2.2 理想元件遵循的微分方程

耗能型元件

	物理元件	微分方程	能量或功率	符号
电感	Electrical resistance	$i = \frac{1}{R} v_{21}$	$\mathcal{P} = \frac{1}{R} {v_{21}}^2$	
平动阻尼器	Translational damper	$F = b v_{21}$	$\mathcal{P} = b {v_{21}}^2$	
旋转阻尼器	Rotational damper	$T = b \omega_{21}$	$\mathcal{P} = b {\omega_{21}}^2$	
流阻	Fluid resistance	$Q = \frac{1}{R_f} P_{21}$	$\mathcal{P} = \frac{1}{R_f} {P_{21}}^2$	
热阻	Thermal resistance	$q = \frac{1}{R_t} \mathcal{T}_{21}$	$\mathcal{P} = \frac{1}{R_t} \mathcal{T}_{21}$	

弹簧-质量-阻尼系统

这个简单系统可用于描述汽车减震装置，假定壁摩擦为黏性阻尼，即摩擦力与质量块的运动速度成正比。

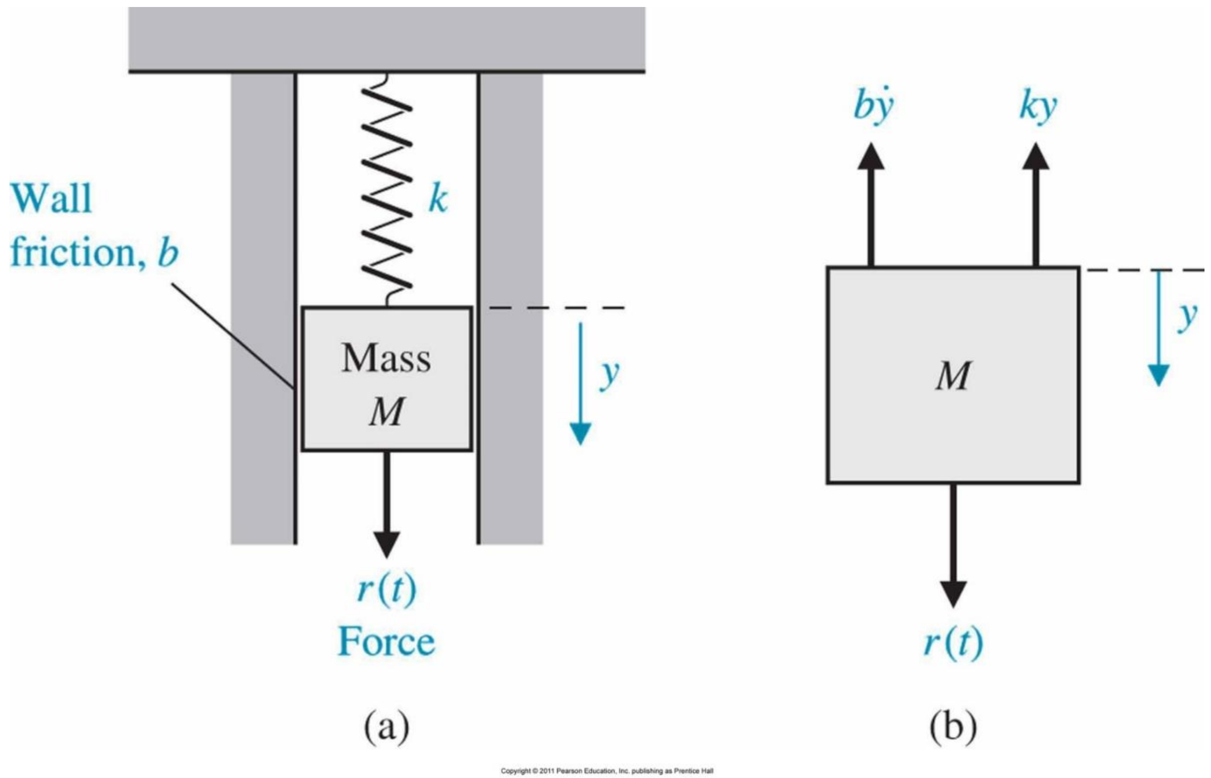


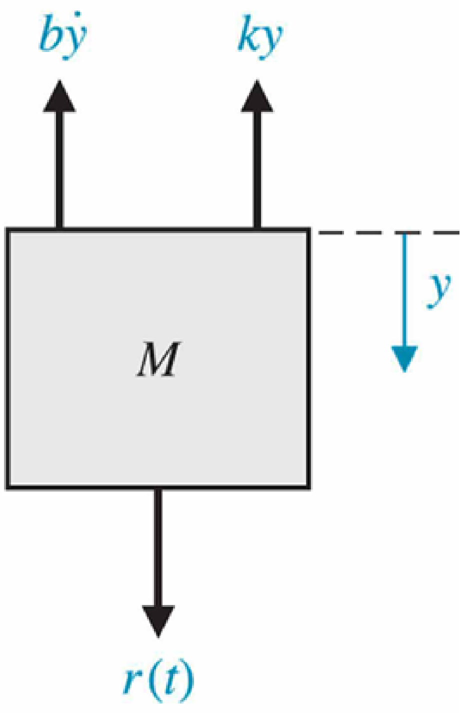
图2.2 (a) 弹簧-质量-阻尼系统 (b) 质量的运动分析图

弹簧-质量-阻尼系统

在质量块-弹簧-阻尼器系统中，分析质量块M的受力情况，由牛顿第二定律可得：

$$M\frac{d^2y(t)}{dt^2}+b\frac{dy(t)}{dt}+ky(t)=r(t)$$

其中，k是理想弹簧元件的弹性系数，b为黏性摩擦的摩擦系统



令 $$v(t)=\frac{dy(t)}{dt}$$

$$M\frac{dv(t)}{dt}+bv(t)+k\int_0^t v(t)dt=r(t)$$

RLC电路

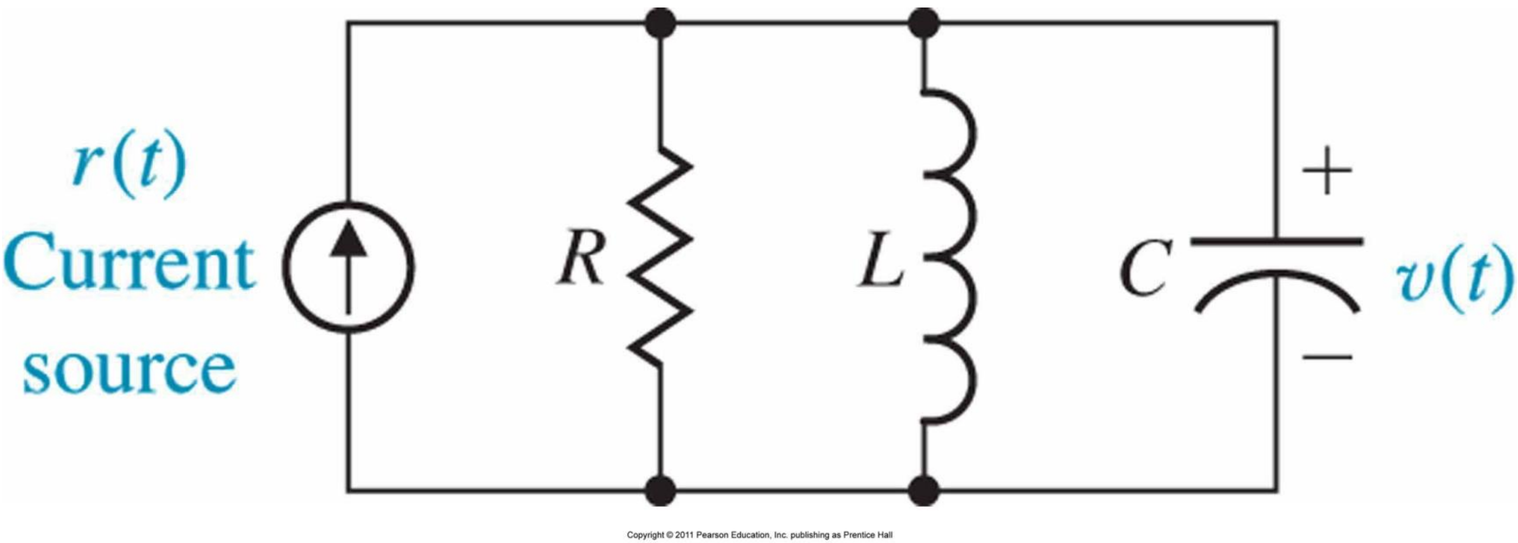
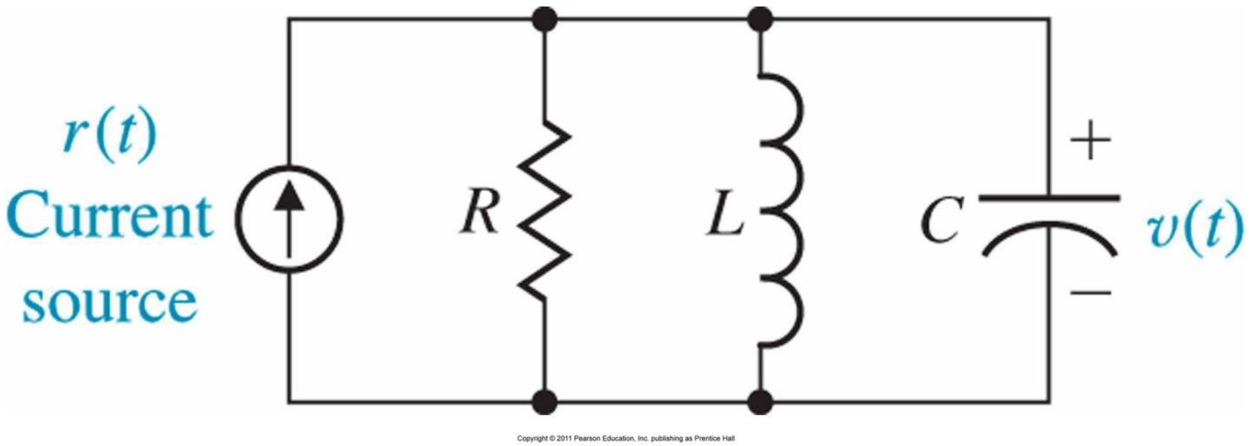


图2.3 RLC电路

RLC电路



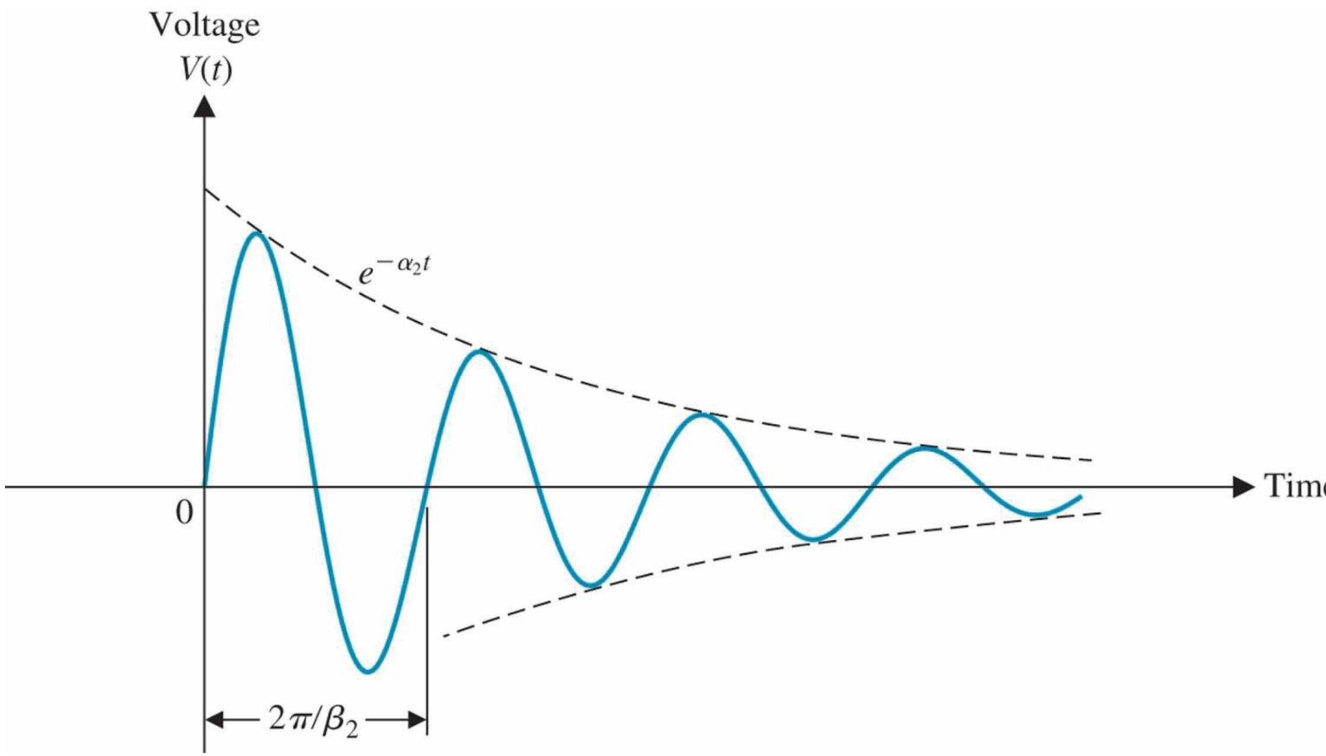
$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$$

$$C\frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{R} + \frac{1}{L}\int_0^t v(t)dt = r(t)$$

RLC电路

当RLC电路的电流恒定，RLC电路的输出电压的响应曲线



相似变量和相似系统

弹簧–质量–阻尼系统（机械系统）和RLC电路（电气系统）的微分方程：

相似系统

$$M\frac{dv(t)}{dt}+bv(t)+k\int_0^t v(t)dt=r(t)$$

$$C\frac{dv(t)}{dt}+\frac{v(t)}{R}+\frac{1}{L}\int_0^t v(t)dt=r(t)$$

速度和电压、力与电流在方程中是等效的变量，因此又称为相似变量，上述两个系统也就称为相似系统

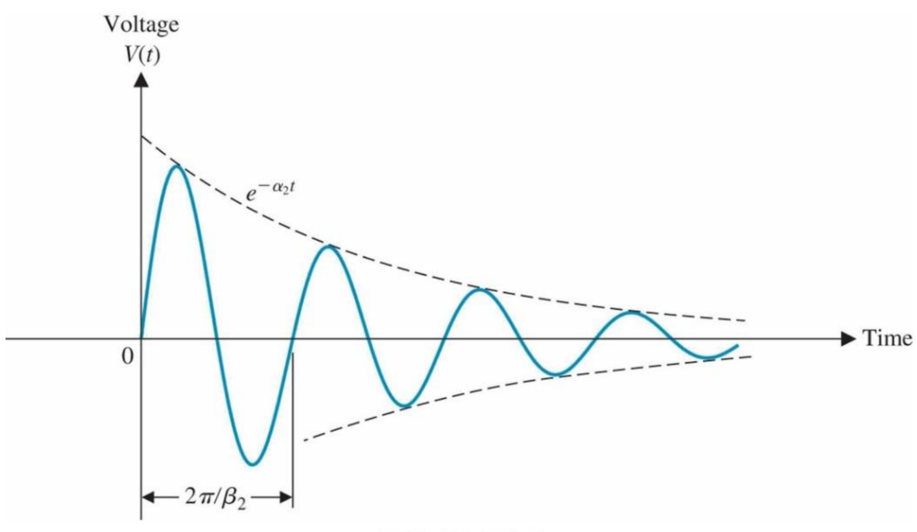


图2.4 典型响应

在系统建模中，相似系统这一概念的作用巨大，由于存在相似系统及相似的解，分析人员可以将一个系统的分析结果，推广到具有相同微分方程模型的其它系统。因此，我们所学的关于电气系统的知识，可以推广到机械、热力和流体等系统。

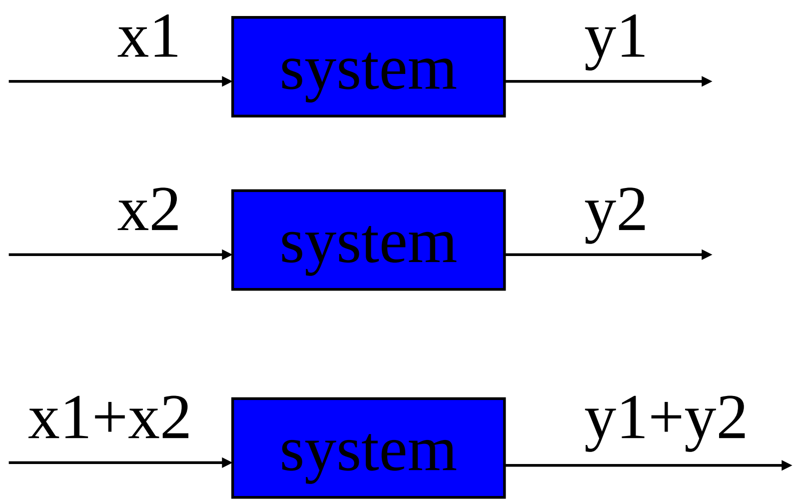
2.3 物理系统的线性近似

- 当不限制参数的变化范围时，所有的物理系统终究都是非线性系统
- 而在参数变化的一定范围内，绝大多数物理系统呈现出线性特性
- 在研究实际物理系统时，合理的假设和线性化处理是非常有用的。这样，就能够根据线性等效系统遵循的物理规律，得到物理系统的线性微分方程模型

2.3 物理系统的线性近似

线性系统：满足叠加性和齐次性的系统

已知



如果

则系统是线性的

2.3 物理系统的线性近似

非线性系统

如果叠加性和其次性不满足，则系统是非线性的。
例如：

$$y = x^2$$

$$y = mx + b$$

但变量在工作点 (xo, yo) 附近做小范围变化时，对小信号变量 $(\Delta x, \Delta y)$ 而言，假设 $y' = yo + \Delta y$，由于 $\Delta y = m\Delta x$，在此情况下 $y = mx + b$ 是线性的

线性近似（Linear approximation）

线性近似：指通过建立设备的输入与输出之间的线性关系而获得的近似模型。

考虑一个具有激励变量x(t)和响应变量y(t)的通用元件，两个变量之间的关系可以写为下面的一般形式：

$$y = g(x(t))$$

该系统的正常工作点为x_0，由于函数曲线在工作点附件的区间内常常是连续可微的，因此，在工作点附近可以进行泰勒级数展开：

$$y = g(x_0) + \frac{dg}{dx}\Big|x = x_0 (x - x_0) + \frac{dg}{dx}\Big|x = x_0 \frac{(x - x_0)\hat{}2}{2!} + \cdots \qquad (2.7)$$

线性近似（Linear approximation）

当（$x-x_0$ ）在小范围内波动时，以函数在工作点处的导数

$$\frac{dg}{dx}\bigg|x=x_0$$

为斜率的直线，能够很好地拟合函数的实际响应曲线。

因此，方程（2.7）可以近似为：

$$y=g(x_0)+\frac{dg}{dx}\bigg|x=x_0(x-x_0)=y_0+m(x-x_0) \qquad (2.8)$$

其中，m表示工作点处的斜率。方程（2.8）可以改写为如下的线性方程：

$$y-y_0=m(x-x_0)$$

或 $$\Delta y=m\Delta x$$

线性近似（Linear approximation）

如图(2.5)(a)所示，质量块M位于非线性弹簧之上，非线性弹簧的弹力特征为$f=y^2$。根据图(2.5)(b)的线性化过程，该系统的位移增量的小信号线性模型：

$$\Delta f = m\,\Delta y$$

其中 $$m = \frac{df}{dy}\Big|_{y_0}$$

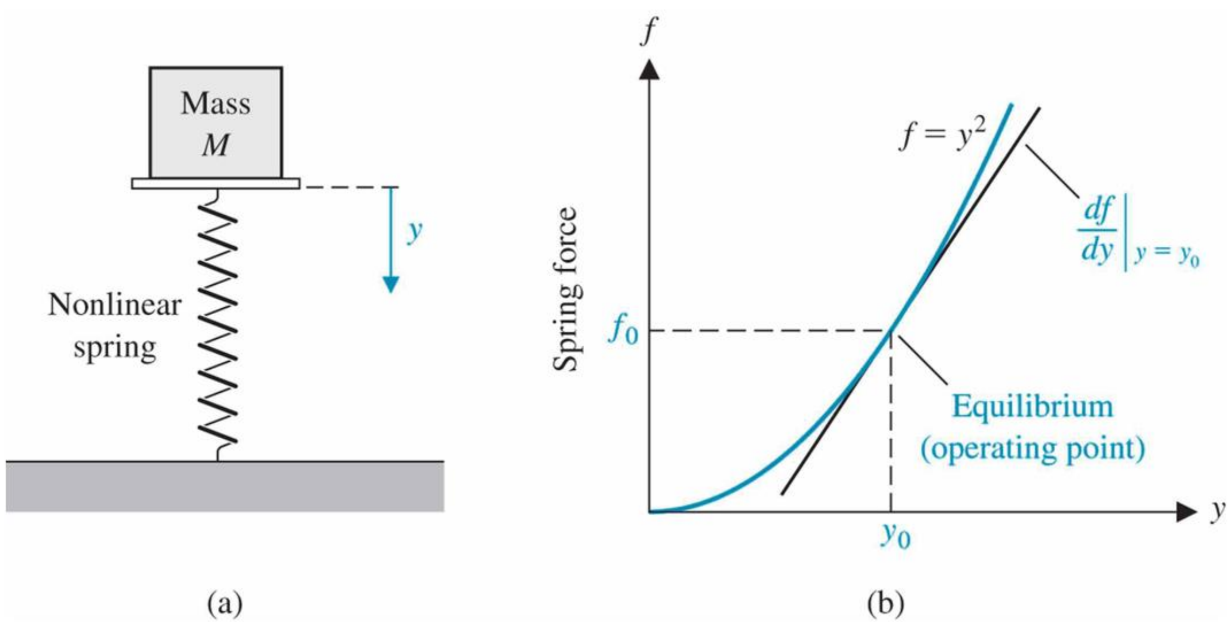


图2.5 (a)质量块位于非线性弹簧之上；(b)弹簧弹力与位移y的关系

线性近似（Linear approximation）

如果响应变量y(t)依赖于多个激励变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，则函数关系可以写为：

$$y = g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

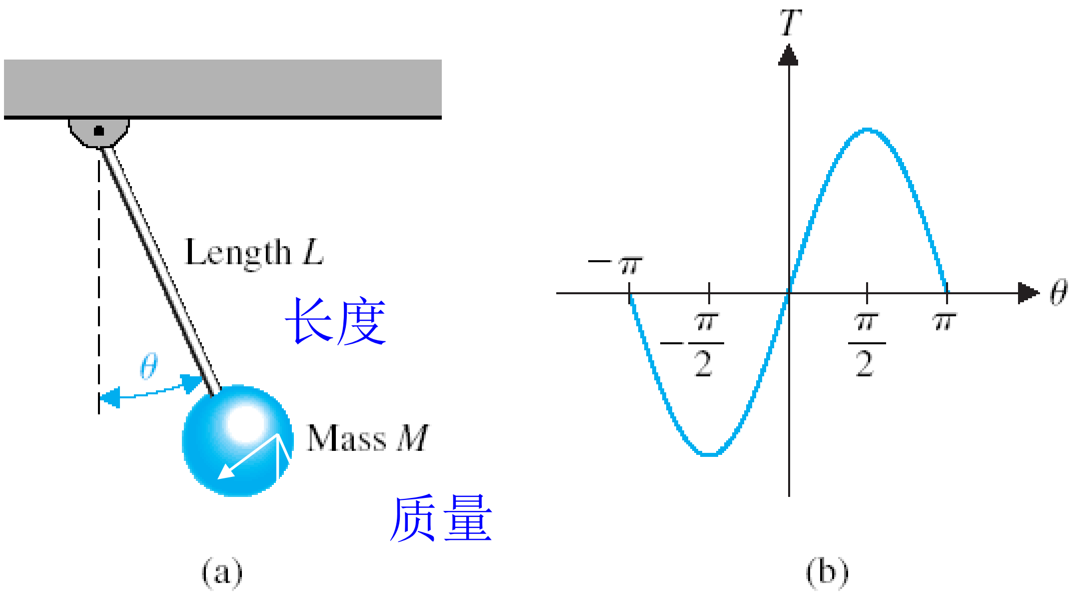
在工作点 $x_{1_0}, x_{2_0}, \cdots, x_{n_0}$ 处，利用多元泰勒级数展开对非线性系统进行线性化近似，当高阶项可以忽略不计时，只取其一阶项，线性近似式可以写为

$$y = g(x_{1_0}, x_{2_0}, \cdots, x_{n_0}) + \frac{\partial g}{\partial x_1}\Big|_{x=x_0}(x_1 - x_{1_0}) + \frac{\partial g}{\partial x_2}\Big|_{x=x_0}(x_2 - x_{2_0}) + \cdots + \frac{\partial g}{\partial x_n}\Big|_{x=x_0}(x_n - x_{n_0})$$

(2.11)

2.3 物理系统的线性近似

例2.1 摆振荡器模型 Pendulum oscillator model



T = 质量上的转矩，输出

θ = 角位移，输入

M = 摆质量

L = 摆长度

图2.6 摆的振荡器

例2.1 摆振荡器模型 Pendulum oscillator model

作用于质量块上的扭矩：$T = MgL\sin\theta$ (2.12)

质量块的平衡位置： $\theta_0 = 0°$

利用式**(2.12)**在平衡点处的一阶导数，可以得到系统的线性近似：

$$T - T_0 \cong MgL \frac{\partial \sin\theta}{\partial\theta}\Big|_{\theta=\theta_0}(\theta - \theta_0)$$

其中 $T_0 = 0$ ，于是可以得到

$$T = MgL(\cos 0°)(\theta - 0°) = MgL\theta \qquad (2.13)$$

在 $(-\pi/4) \le \theta \le (\pi/4)$ 的范围内，式（**2.13**）的近似精度非常高。

2.4 Laplace变换

- **Laplace变换**
  - 将时域函数*f(t)* 转换成复频域函数*F(s)*的变换
  - 容易求解复杂的微分方程

线性微分方程的求解

线性微分方程的求解方法：

解析法、拉普拉斯变换法、计算机辅助求解

拉普拉斯变换法求解微分方程基本步骤：

（1）考虑初始条件，对微分方程中的各项进行拉式变换，变成变量s的代数方程。

$$f(t) \Rightarrow F(s)$$

（2）由变量s的代数方程求出系统输出输出量的拉式变换式。

$$F(s) \Rightarrow Y(s)$$

（3）对输出量的拉式变换式进行拉式反变换，得到系统微分方程的解。

$$Y(s) \Rightarrow y(t)$$

拉普拉斯变换与逆变换

(1) 拉氏变换定义：

设函数f(t)满足 ①t<0时 f(t)=0

② t>0时，f(t)分段连续 $\int_0^\infty \left| f(t)e^{-st} \right| dt < \infty$

则f(t)的拉氏变换存在，其表达式记作：

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

控制工程上函数满足拉氏变换要求：能量有限

(2)拉氏变换基本定理

- 线性定理 $L[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = a_1F_1(s) + a_2F_2(s)$
- 位移定理 $L[e^{-at} f(t)] = F(s+a)$
- 延迟定理 $L[f(t-\tau)] = e^{-\tau s}F(s)$

拉普拉斯变换与逆变换

- **定义**：$F(s)=\int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt = \mathcal{L}\{f(t)\}$
- 其中: $F(s)$是像函数(image function)

  $f(t)$是原函数 (object function)

- **逆 Laplace变换**： $f(t)=\dfrac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{+st}ds$

Laplace变量 s 可看成微分算子

$$s \equiv \frac{d}{dt} \qquad\qquad \frac{1}{s} \equiv \int_{0-}^{t} dt$$

简单函数的 Laplace 变换

1. 阶跃函数 (Step function) $1(t)$
2. 脉冲函数 (Pulse function) $\delta(t)$
3. 斜坡函数 (Ramp function) t
4. 指数延迟函数 (Decaying exponential) e^{at}
5. 正弦函数 (Sinusoid) $sin\omega t$

阶跃和脉冲函数 $1(t), \delta(t)$

- 阶跃函数：

$$1(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t\geq 0\end{cases}$$

$$L[1(t)]=\int_0^{\infty}1(t)\cdot e^{-st}dt=-\frac{e^{-st}}{s}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{s}$$

- 脉冲函数：

$$\delta(t)=\begin{cases}\infty & t=0\\ 0 & t\neq 0\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=1 \qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\cdot f(t)dt=f(0)$$

$$L[\delta(t)]=\int_0^{\infty}\delta(t)\cdot e^{-st}dt=e^{-st}\Big|_{t=0}=1$$

斜坡函数 t

- 斜坡函数：$$f(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ t & t\ge 0\end{cases}$$

- 用部分分式法: $$\int udv = uv - \int vdu$$

则

$$L\left[f(t)\right]=\int_0^{\infty} t\cdot e^{-st}dt=-t\left.\frac{e^{-st}}{s}\right|_0^{\infty}-\int_0^{\infty}\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)dt$$

$$=\int_0^{\infty}\left(\frac{e^{-st}}{s}\right)dt=-\frac{1}{s^2}e^{-st}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{s^2}$$

常见拉氏变换

微分 $s \equiv \dfrac{d}{dt}$　　积分 $\dfrac{1}{s} \equiv \int_{0-}^{t} dt$

	原函数	像函数
脉冲	$\delta(t)$	1
阶跃	$1(t)$	$1/s$
斜坡	t	$\dfrac{1}{s^2}$

典型函数的拉氏变换

时域上函数	f(t) $t \geq 0$	复数（S）域：F（s）
脉冲	δ(t)	1
单位阶跃	$1[t]$	$1/s$
速度	t	$1/s^2$
加速度	$\frac{1}{2}t^2$	$1/s^3$
指数	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
正弦	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

指数延迟函数 e^{at}

- **指数延迟函数**

$$e^{at}$$

指数延迟函数的拉氏变换

$$L\left[e^{at}\right]=\int_0^{\infty} e^{at}e^{-st}dt=\int_0^{\infty} e^{-(s-a)t}dt=-\frac{e^{-(s-a)t}}{s-a}\bigg|_0^{\infty}=\frac{1}{s-a}$$

正弦函数 $sin\omega t$

- **正弦函数**

$$\sin\omega t = \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$$

正弦函数的拉氏变换

$$L\left[\sin\omega t\right] = \int_0^\infty \sin\omega t \cdot e^{-st} dt = \int_0^\infty \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})e^{-st} dt$$

$$= \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{s + j\omega}\right) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Laplace变换性质(1)

- 叠加性Superposition

$$L\left[K_1 f_1(t)+K_2 f_2(t)\right]=K_1 F_1(s)+K_2 F_2(s)$$

- 时间平移Translation in time $L\left[f(t-a)\right]=e^{-as}\cdot F(s)$
- 复频域微分Complex differentiation $L\left[t\cdot f(t)\right]=-\dfrac{d}{ds}F(s)$
- S域平移Translation in the s domain

$$L\left[e^{-at}f(t)\right]=F(s+a)$$

- 实域微分Real differentiation

$$L\left[f'(t)\right]=s\cdot F(s)-f(0^{+})$$

Laplace变换性质(2)

- 时域积分Real integration

$$L\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{1}{s} f^{(-1)}(0^+)$$

$$L\left[\int_0^t\int_0^t\cdots\int_0^t f(t)(dt)^n\right] = \frac{1}{s^n}F(s) + \frac{1}{s^n} f^{(-1)}(0^+) + \frac{1}{s^{n-1}} f^{(-2)}(0^+) + \frac{1}{s} f^{(-n)}(0^+)$$

其中 $\int_0^t\int_0^t\cdots\int_0^t f(t)(dt)^n\Big|_{t=0} = f^{(-n)}(0^+)$

- 终值定理Final value $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$

- 初值定理Initial value $f(0^+) = \lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$

- 复频域积分Complex integration $L\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^\infty F(s)ds$

Laplace变换性质(3)

- **周期函数**的Laplace变换

  (Laplace transform of the periodic function)

$$若 f(t+T) = f(t), 则$$

$$L\left[f(t)\right] = \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T f(t)e^{-st}dt$$

Laplace变换性质(4)

- 卷积定理Convolution theorem

若：$F(s) = L[f(t)], G(s) = L[g(t)]$

则：$L\left[\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau\right] = F(s) \cdot G(s)$

其中

若：$F(s) = L[f(t)], G(s) = L[g(t)]$

则：$L\left[\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau\right] = F(s) \cdot G(s)$

Laplace变换性质(4)证明

证：

$$L[f(t)*g(t)]=L\left[\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau\right]$$

$$=L\left[\int_0^\infty f(t-\tau)1(t-\tau)g(\tau)d\tau\right]$$

$$=\int_0^\infty\left[\int_0^\infty f(t-\tau)1(t-\tau)g(\tau)d\tau\right]e^{-st}dt$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty f(t-\tau)1(t-\tau)e^{-s(t-\tau)}dt\cdot g(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

$$\text{令 } t-\tau=\lambda \quad \int_0^\infty f(\lambda)e^{-s\lambda}d\lambda\int_0^\infty g(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

$$=F(s)G(s)$$

拉普拉斯变换的初值定理、终值定理

初值定理

若 $L[f(t)]=F(s)$，且 $\lim\limits_{s\to\infty} sF(s)$存在，则

$$\lim_{t\to 0_+} f(t)=\lim_{s\to\infty} sF(s)$$

或

$$f(0_+)=\lim_{s\to\infty} sF(s)$$

证明： 根据拉氏变换的微分性质，有

$$L\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)\right]=\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)e^{-st}\mathrm{d}t=sF(s)-f(0)$$

令 $s\to\infty$，对等式两边取极限，得

$$\lim_{s\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)e^{-st}\mathrm{d}t=\lim_{s\to\infty}[sF(s)-f(0)]$$

在时间区间 $[0_+,\infty)$ 内，$\lim\limits_{s\to\infty} e^{-st}=0$，因此等式左边为

拉普拉斯变换的初值定理、终值定理

令 $s\to\infty$，对等式两边取极限，得

$$\lim_{s\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)e^{-st}\mathrm{d}t=\lim_{s\to\infty}[sF(s)-f(0)]$$

在时间区间 $[0_+,\infty)$ 内，$\lim\limits_{s\to\infty}e^{-st}=0$，因此等式左边为

$$\lim_{s\to\infty}\int_{0_+}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)e^{-st}\mathrm{d}t=\lim_{s\to\infty}\int_{0_+}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)\lim_{s\to\infty}e^{-st}\mathrm{d}t=0$$

于是

$$\lim_{s\to\infty}[sF(s)-f(0_+)]=0$$

即

$$f(0_+)=\lim_{t\to0_+}f(t)=\lim_{s\to\infty}sF(s)$$

利用初值定理，我们可以从 $f(t)$ 的拉氏变换，直接求出 $f(t)$ 在 $\boldsymbol{t}=\mathbf{0}_+$时的值。虽然初值定理不能严格地给出$\boldsymbol{t}=\mathbf{0}$时的 $f(t)$ 值，但是能够给出时间略大于零时的 $f(t)$ 值。

拉普拉斯变换的初值定理、终值定理

终值定理

若时间函数 $f(t)$ 及其一阶导数都是可拉氏变换的, 而 $L[f(t)]=F(s)$，

且 $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$ 存在，则 $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)=\lim\limits_{s\to 0} sF(s)$

证明： 根据拉氏变换的微分性质，有

$$L\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)\right]=\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)e^{-st}\mathrm{d}t=sF(s)-f(0)$$

令 $s\to 0$，对等式两边取极限，得 $\lim\limits_{s\to 0}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)e^{-st}\mathrm{d}t=\lim\limits_{s\to 0}[sF(s)-f(0)]$

等式左边为

$$\lim_{s\to 0}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)e^{-st}\mathrm{d}t=\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)\lim_{s\to 0}e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^\infty \mathrm{d}f(t)=\lim_{t\to\infty}\int_0^t \mathrm{d}f(t)$$

$$=\lim_{t\to\infty}[f(t)-f(0)]$$

于是

$$\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{s\to 0} sF(s)$$

拉普拉斯变换的初值定理、终值定理

终值定理

若时间函数 $f(t)$ 及其一阶导数都是可拉氏变换的, 而 $L[f(t)] = F(s)$,

且 $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$ 存在，则 $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = \lim\limits_{s\to 0} sF(s)$

终值定理表明：时间函数 $f(t)$ 的稳态值与复频域中 **s＝0** 附近的 $sF(s)$ 的值相同。因此， $f(t)$ 在 $t\to\infty$ 时的值可以直接由 $\lim\limits_{s\to 0} sF(s)$ 得到。

利用该性质，可在复频域中得到控制系统在时间域中的稳态值，利用该性质还可以求得控制系统的稳态误差。

特别指出：运用终值定理的前提是时间函数 $f(t)$ 有终值存在，即 $sF(s)$ 的所有极点位于左半**s**平面。

拉普拉斯变换的初值定理、终值定理

初值定理 若 $L[f(t)]=F(s)$，且 $\lim\limits_{s\to\infty} sF(s)$ 存在，则 $\lim\limits_{t\to 0_+} f(t)=\lim\limits_{s\to\infty} sF(s)$

终值定理 若时间函数 $f(t)$ 及其一阶导数都是可拉氏变换的, 而 $L[f(t)]=F(s)$，

且 $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$ 存在，则 $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)=\lim\limits_{s\to 0} sF(s)$

【例】已知 $f(t)=e^{-t}\cos t\cdot u(t)$，求 $f(0_+)$和 $f(\infty)$。

解 由于

$$L[\cos t\cdot u(t)e^{-t}]=\frac{s+1}{(s+1)^2+1}$$

由初值定理，得

$$f(0_+)=\lim_{s\to\infty} sF(s)=\lim_{s\to\infty}\frac{s(s+1)}{(s+1)^2+1}=1$$

由终值定理，得

$$f(\infty)=\lim_{s\to 0} sF(s)=\lim_{s\to 0}\frac{s(s+1)}{(s+1)^2+1}=0$$

逆拉式变换

- 部分分式展开法Partial–fraction expansion method

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_0}=\frac{K(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

1) **一阶极点:**

设 $$\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{K_1}{(s-p_1)}+\frac{K_2}{(s-p_2)}+\cdots+\frac{K_n}{(s-p_n)}$$

其中$K_1, K_2, \ldots, K_n$ 是未知常数.

则 $$f(t)=L^{-1}\left[F(s)\right]=\sum_{i=1}^{n}\frac{B(p_i)}{A'(p_i)}\cdot e^{p_i t}$$ 其中 $$A'(p_i)=\left.\frac{dA(s)}{ds}\right|_{s=p_i}$$

逆拉式变换

2)多重极点:

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{B(s)}{a_n(s-p_1)^r(s-p_{r+1})\cdots(s-p_n)}$$

$$=\frac{K_{11}}{(s-p_1)^r}+\frac{K_{12}}{(s-p_1)^{r-1}}+\cdots+\frac{K_{1r}}{s-p_1}+\frac{K_{r+1}}{s-p_{r+1}}+\frac{K_{r+2}}{s-p_{r+2}}+\cdots+\frac{K_n}{s-p_n}$$

其中

$$K_j=\left[F(s)(s-p_j)\right]\Big|_{s=p_j}=\frac{B(s_{p_j})}{A'(s_{p_j})}(j=r+1,r+2,\cdots,n)$$

$$K_{11}=\left[F(s)(s-p_1)^r\right]\Big|_{s=p1}$$

$$K_{12}=\frac{d}{ds}\left[F(s)(s-p_1)^r\right]\Big|_{s=p1}$$

$$K_{1r}=\frac{1}{(r-1)!}\frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}}\left[F(s)(s-p_1)^r\right]\Big|_{s=p1}$$

逆拉式变换

- 查表2.5可知 $L\left[t^{r-1}\right]=\dfrac{(r-1)!}{s^r}$ $L[e^{p_1 t}1(t)]=\dfrac{1}{(s-p_1)}$
- 用**s域平移定理**:

$$L\left[e^{-at}f(t)\right]=F(s+a)$$

则 $L^{-1}\left[\dfrac{1}{(s-p_1)^k}\right]=\dfrac{t^{k-1}}{(k-1)!}e^{p_1 t}1(t)$

$$f(t)=L^{-1}[F(s)]=\left[\frac{K_{11}}{(r-1)!}t^{r-1}+\frac{K_{12}}{(r-2)!}t^{r-2}+\cdots+K_{1r}\right]e^{p_1 t}+K_{r+1}e^{p_{r+1}t}+\cdots+K_n e^{p_n t}$$

2.5 线性系统的传递函数 (Transfer Function)

解微分方程分析系统的输出响应很麻烦

能否不解微分方程进行系统分析？

--引申出新的概念---传递函数

- 定义：线性定常系统的传递函数，在零初始条件下，系统输出量的拉氏变换与输入量的拉氏变换之比。

$$\text{传递函数}=\left.\frac{\text{输出信号的拉氏变换}}{\text{输入信号的拉氏变换}}\right|_{\text{零初始条件}}=\frac{C(s)}{R(s)}$$

用拉氏变换求解微分方程

微分方程

↓ 拉氏变换

关于s的代数方程

↓ 代入初始条件并整理

$X(s)$

↓ 逆拉氏变换

$X(t)$

2.5 线性系统的传递函数 (Transfer Function)

- 例：**弹簧-质量-阻尼系统**

其传递函数为

$$M\frac{d^2y(t)}{dt^2}+b\frac{dy(t)}{dt}+ky(t)=r(t)$$

$$M(s^2Y(s)-sy(0^-)-\frac{dy(0^-)}{dt})+b(sY(s)-y(0^-))+kY(s)=R(s)$$

$$\frac{output}{input}=G(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{1}{Ms^2+bs+k}$$

传递函数的性质

- 性质1　传递函数是复变量s的有理真分式函数，m≤n，且具有复变量函数的所有性质。（物理可实现）
- 性质2　G(s)取决于系统的结构和参数，与输入量的形式和初始条件等外部因素无关，可见传递函数有效地描述了系统的固有特性。
- 性质3　G(s)虽然描述了输出与输入之间的关系，但它不提供任何该系统的物理结构。因为许多不同的物理系统具有完全相同的传递函数。

性质4　传递函数与微分方程之间有联系

$$G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}$$

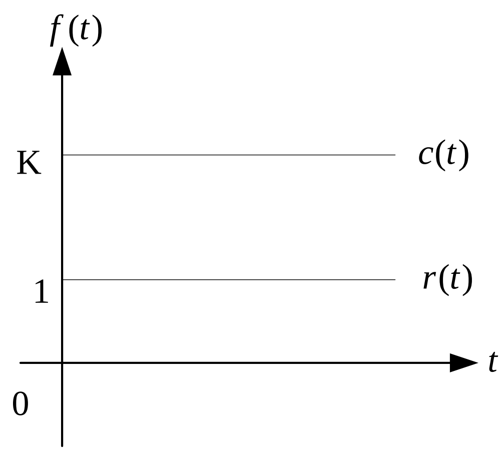
如果将 $S \Leftrightarrow \dfrac{d}{dt}$ 置换，　传递函数 $\Leftrightarrow$ 微分方程

典型环节的传递函数

- 1、比例环节：成比例的复现输入信号

微分方程：$c(\mathrm{t})=K\,r(\mathrm{t})$

传递函数：$\boldsymbol{G(s)=K}$

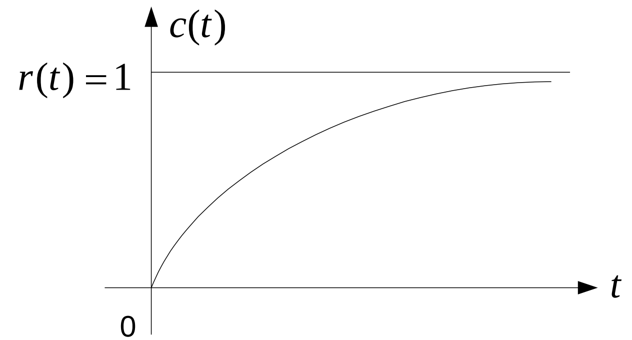


实例有：放大器、减速机、杠杆机构等

典型环节的传递函数

- 2、惯性环节：输出量延缓地反应输入量的变化规律

微分方程： $$T\frac{dc(t)}{dt}+c(t)=r(t)$$

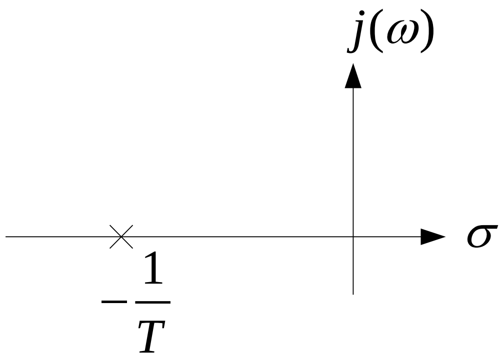


传递函数： $$Ts\,c(s)+c(s)=R(s)$$

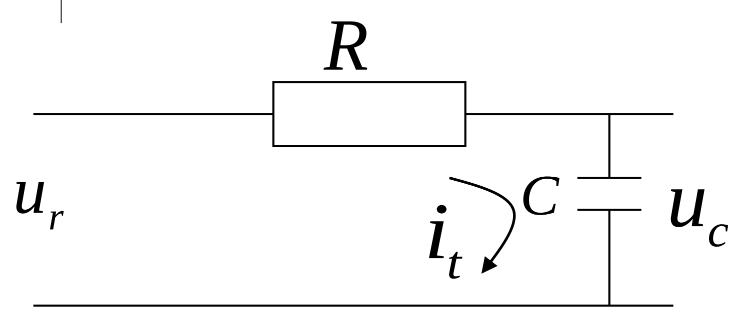
$$G(s)=\frac{1}{Ts+1}$$

T 为惯性环节时间常数

零、极点图：



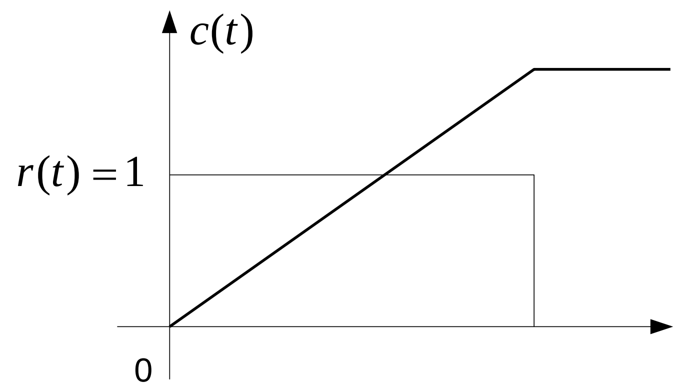
RC滤波网络属于惯性环节



典型环节的传递函数

3.积分环节：输出量为输入量的积分--具有记忆功能，用来改善系统的稳态性能。

微分方程为： $$c(t)=\frac{1}{T}\int_0^t r(\tau)d\tau$$

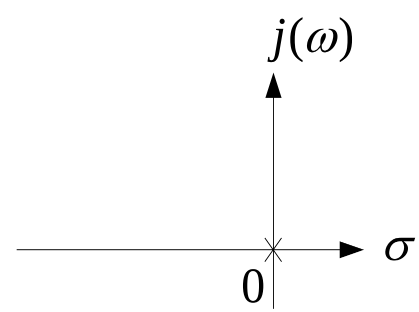


传递函数为： $$C(s)=\frac{1}{Ts}\cdot R(s)$$

$$G(s)=\frac{1}{Ts}$$

T 为积分时间常数

零、极点图



典型环节的传递函数

4、微分环节：输出量为输入量的微分—预示输入信号的变化趋势，监测系统的动态行为。

微分方程为： $c(t)=\dfrac{dr(t)}{dt}$

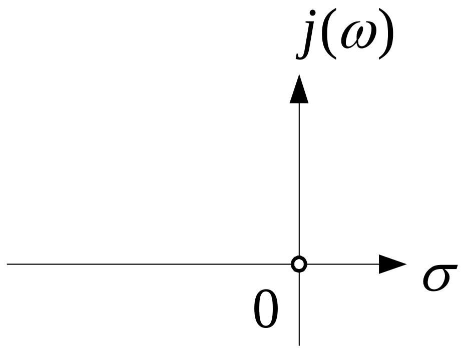
传递函数为： $C(s)=s\cdot R(s)$

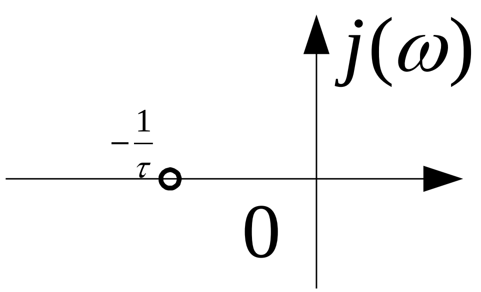
$$G(s)=s$$

一阶微分方程为： $c(t)=\tau\dfrac{dr(t)}{dt}+r(t)$

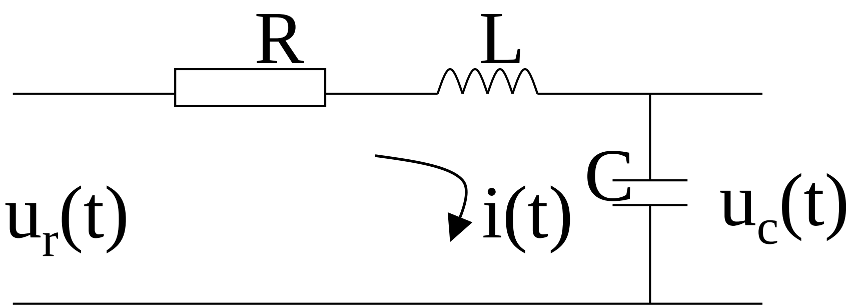
$$G(s)=\tau s+1$$

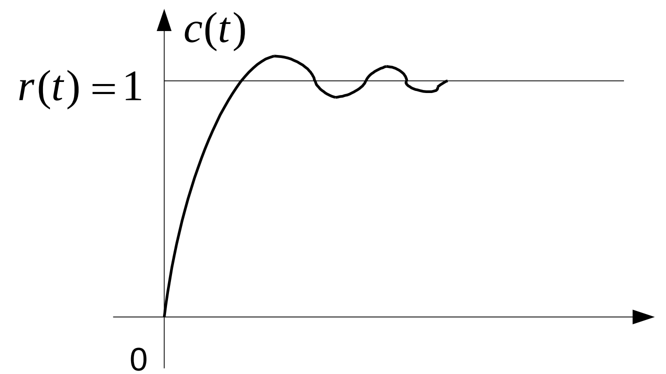
零、极点图：





5.振荡环节：有两个储能元件，在运动过程中能量相互交换，输出带有振荡特性。





微分方程为： $$LC\frac{d^2c(t)}{dt^2}+RC\frac{dc(t)}{dt}+c(t)=r(t)$$

传递函数为： $$G(s)=\frac{1}{LCs^2+RCs+1}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

令： $\omega_n=\frac{1}{\sqrt{LC}}$ 称为自然振荡（无阻尼）角频率

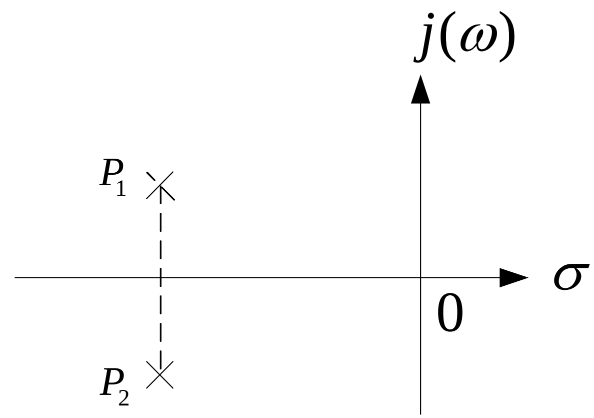
$\xi=\frac{1}{2}R\sqrt{\frac{C}{L}}$ 为阻尼系数

$0<\xi<1$时衰减振荡

$\xi>1$单调增

5.振荡环节：有两个储能元件，在运动过程中能量相互交换，输出带有振荡特性。

零、极点图:



振荡环节有一对位于S左半平面的共轭极点:

$$p_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

弹簧 - 质量 - 阻尼器串联系统也属于这一类:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + fs + 1}$$

典型环节的传递函数

6.延迟环节：输出端要隔一定时间后才能复现输入信号

微分方程为： $c(t)=r(t-\tau)$

传递函数为： $G(s)=e^{-\tau s}$　　τ 为延迟时间

当延迟时间很小时可得：

$$G(s)\approx\frac{1}{\tau s+1}$$

特点：输出量能准确复现输入量，但须延迟一段时间。

实例：管道压力、流量、皮带运输等物理量的控制，其数学模型就包含有延迟环节。

实例：弹簧–质量–阻尼系统 Spring-mass-damper system

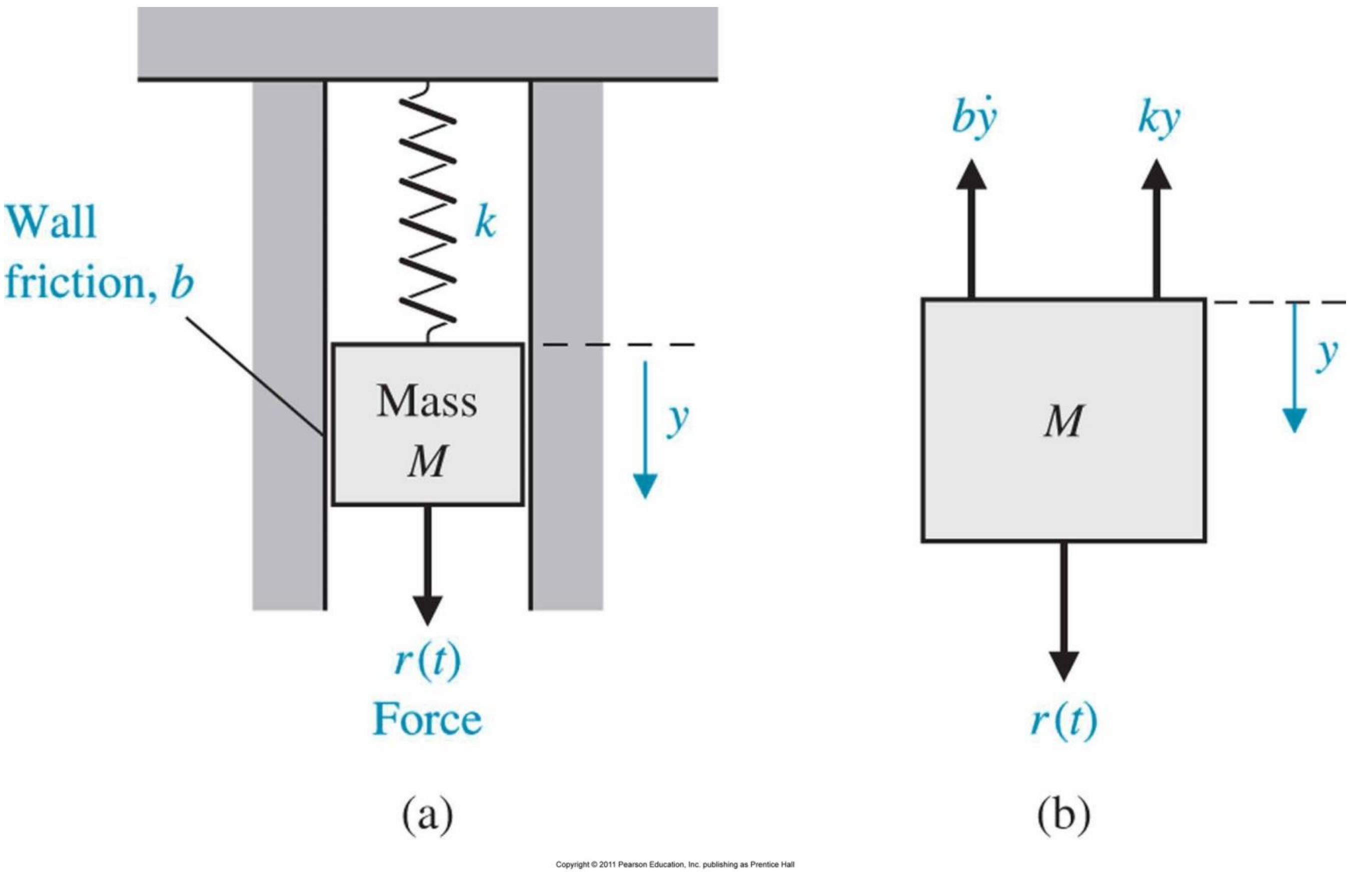


图2.2 (a) 弹簧-质量-阻尼系统 (b) 质量的运动分析图

弹簧–质量–阻尼系统
Spring-mass-damper system

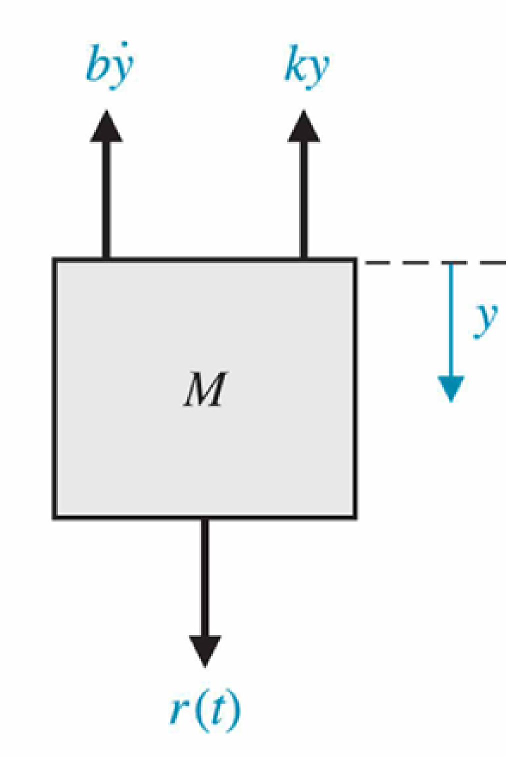
在质量块–弹簧–阻尼器系统中，分析质量块M的受力情况，

有牛顿第二定律可得：

$$M\frac{d^2y(t)}{dt^2}+b\frac{dy(t)}{dt}+ky(t)=r(t)$$

令 $$v(t)=\frac{dy(t)}{dt}$$

$$M\frac{dv(t)}{dt}+bv(t)+k\int_0^t v(t)dt=r(t)$$



弹簧–质量–阻尼系统（1）

考虑 (2.1)式所示的方程： $M\frac{d^2y}{dt^2}+b\frac{dy}{dt}+ky=r(t)$

Laplace 变换得：

$$M(s^2Y(s)-sy(0^-)-\frac{dy(0^-)}{dt})+b(sY(s)-y(0^-))+kY(s)=R(s)$$

当 $r(t)=0,\ \ y(0^-)=y_0$ 及 $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0^-}=0$

有 $$Ms^2Y(s)-Msy_0+bsY(s)-by_0+kY(s)=0$$

弹簧-质量-阻尼系统（2）

由 $$Ms^2Y(s)-Msy_0+bsY(s)-by_0+kY(s)=0$$

解 $Y(s)$得 $$Y(s)=\frac{(Ms+b)y_0}{Ms^2+bs+k}=\frac{p(s)}{q(s)}$$

当 $\frac{k}{M}=2$，$\frac{b}{M}=3$, 则 $$Y(s)=\frac{(s+3)y_0}{(s+1)(s+2)}$$

用部分分式法展开，设 $$Y(s)=\frac{k_1}{s+1}+\frac{k_2}{s+2}$$

弹簧-质量-阻尼系统（3）

当 $y_0 = 1$,有

$$k_1 = \frac{(s-s_1)p(s)}{q(s)}\Big|_{s=s_1}$$

$$= \frac{(s+1)(s+3)}{(s+1)(s+2)}\Big|_{s_1=-1} = 2$$

又$k_2 = -1$,则

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{2}{s+1}\} + \mathcal{L}^{-1}\{\frac{-1}{s+2}\}$$

解得

$$y(t) = 2e^{-t} - e^{-2t}$$

解线性系统微分方程

考虑下面的微分方程

$$\frac{d^n y}{dt^n}+q_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+q_0 y=p_{n-1}\frac{d^{n-1}r}{dt^{n-1}}+p_{n-2}\frac{d^{n-2}r}{dt^{n-2}}+\cdots+p_0 r$$

在**零初始条件**下，系统可用传递函数表示为

$$Y(s)=G(s)R(s)=\frac{p(s)}{q(s)}R(s)=\frac{(p_{n-1}s^{n-1}+p_{n-2}s^{n-2}+\cdots+p_0)}{(s^n+q_{n-1}s^{n-1}+\cdots+q_0)}R(s)$$

完整的输出响应包括**零输入响应**（由初始状态决定）和由输入作用激励的**零状态响应**。于是：

$$Y(s)=\frac{m(s)}{q(s)}+\frac{p(s)}{q(s)}R(s)$$

其中q(s)=0构成了系统的特征方程。

解线性系统微分方程

若输入具有有理式的形式： $R(s)=\dfrac{n(s)}{d(s)}$

则 $$Y(s)=\frac{m(s)}{q(s)}+\frac{p(s)}{q(s)}\frac{n(s)}{d(s)}=Y_1(s)+Y_2(s)+Y_3(s) \qquad (2.46)$$

- $Y_1(s)$：零输入响应的部分分式展开式
- $Y_2(s)$：部分分式展开式中与q(s)的因式有关的部分分式
- $Y_3(s)$：部分分式展开式中与d(s)的因式有关的部分分式

解线性系统微分方程

若对式（2.46）作Laplace逆变换可得

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_3(t)$$

- **瞬态响应**为 $y_1(t) + y_2(t)$
- **稳态响应**为 $y_3(t)$

例2.2 一个微分方程的解

- 考虑下述微分方程所描述的系统：

$$\frac{d^2y}{dt^2}+4\frac{dy}{dt}+3y=2r(t)$$

其中初始条件为 $y(0)=1, \frac{dy}{dt}\Big|_{t=0}=0$ ，

输入激励为$t \geq 0$时$r(t)=1$

例2.2 一个微分方程的解

- 由$Laplace$变换可得：

$$[s^2Y(s)-sy(0)]+4[sY(s)-y(0)]+sY(s)=2R(s)$$

- 由于$R(s)=\frac{1}{s}$，$y(0)=1$，故有：

$$Y(s)=\frac{s+4}{s^2+4s+3}+\frac{2}{s^2+4s+3}\cdot\frac{1}{s}$$

其中$q(s)=s^2+4s+3=(s+3)(s+1)=0$为特征方程，

而$d(s)=s$

例2.2 一个微分方程的解

- 于是Y(s)的部分分式展开式为：

$$Y(s)=\left[\frac{3/2}{s+1}+\frac{-1/2}{s+3}\right]+\left[\frac{-1}{s+1}+\frac{1/3}{s+3}\right]+\frac{2/3}{s}$$
$$=Y_1(s)+Y_2(s)+Y_3(s)$$

- 时间响应函数则为：

$$y(t)=\left[\frac{3}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-3t}\right]+\left[-e^{-t}+\frac{1}{3}e^{-3t}\right]+\frac{2}{3}$$

- 可见，系统的稳态响应为 $\frac{2}{3}$

例2.3 运算放大器电路的传递函数

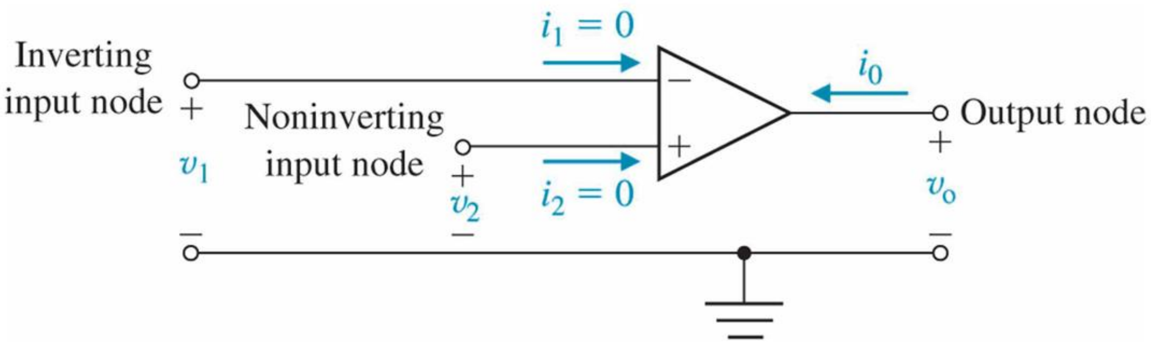


图2.14 理想的运算放大器

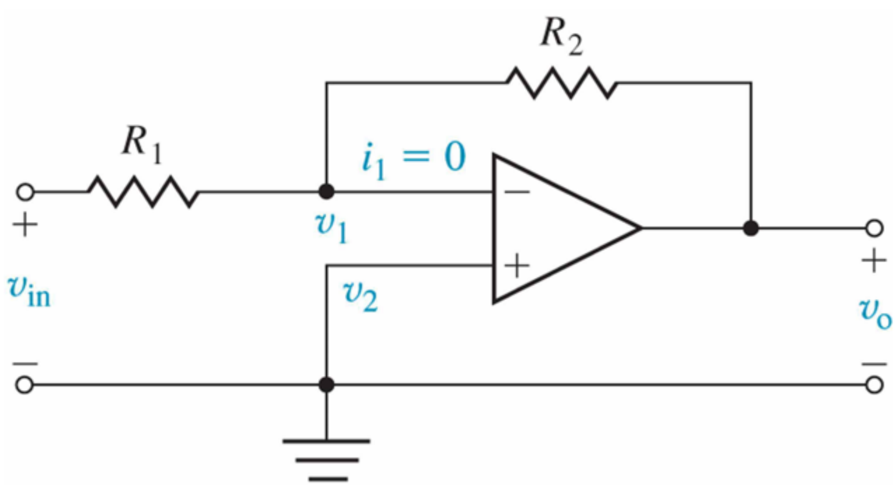
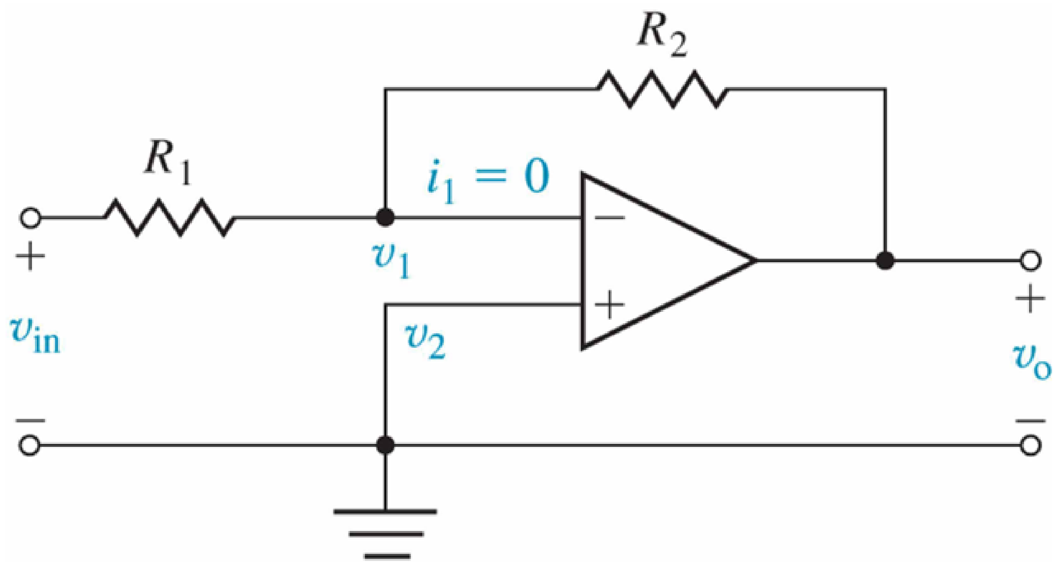


图2.15 工作在理想条件下的倒相放大器

例2.3 运算放大器电路的传递函数



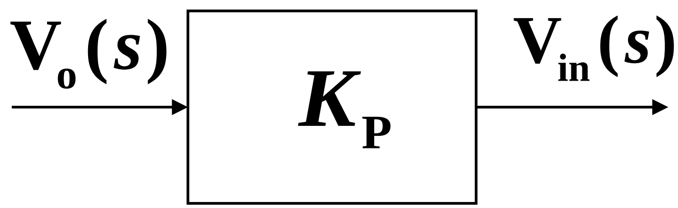
解: $\dfrac{v_1 - v_{in}}{R_1} + \dfrac{v_1 - v_o}{R_2} = 0$

理想情况下: $v_1 = v_2$=0

因此 $-\dfrac{v_{in}}{R_1} - \dfrac{v_o}{R_2} = 0$

例2.3 运算放大器电路的传递函数

由此导出 $$\frac{V_o(s)}{V_{in}(s)} = -\frac{R_2}{R_1} = K_P$$



这个结论可以推广为：当负反馈端作为输入时，运算放大器的传递函数等于负的反馈复阻抗与输入复阻抗之比（自动控制中常用负极性端作为输入端）

例2.4 相似系统的传递函数

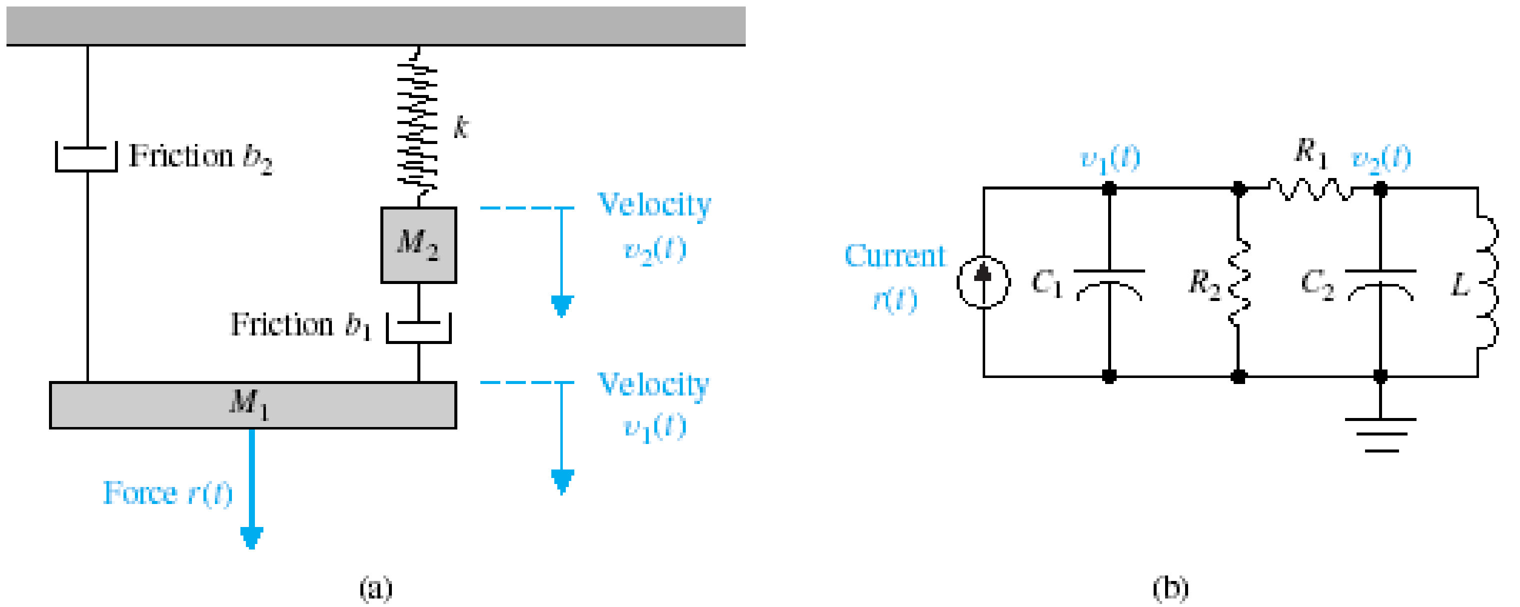
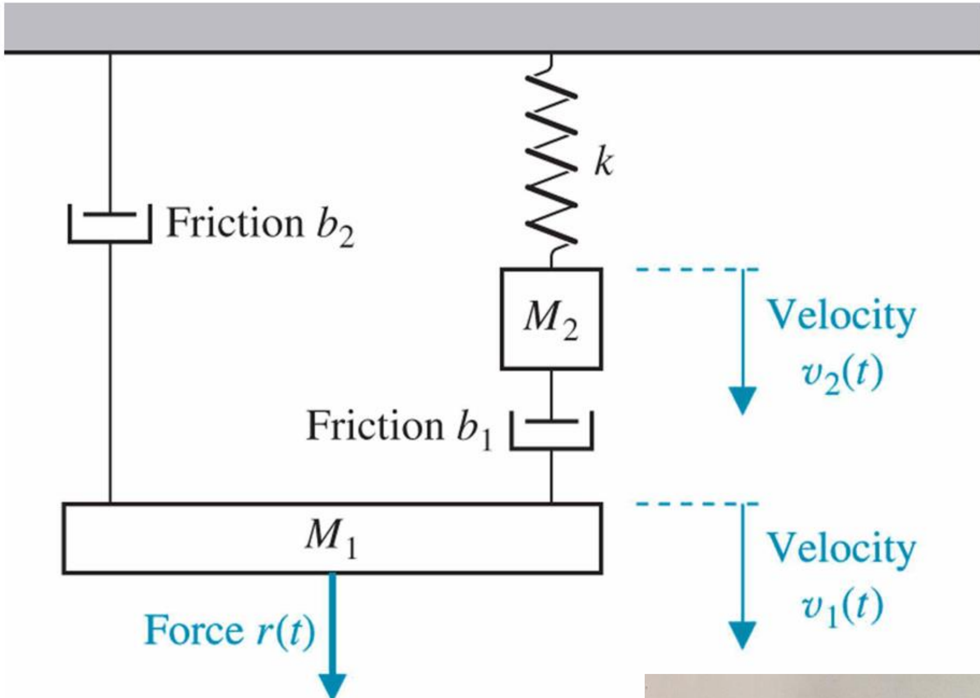
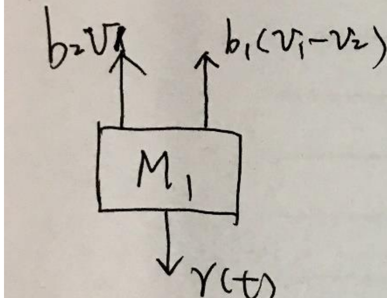


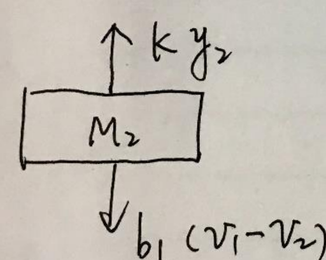
图2.16 (a) 双质量机械系统 (b) 相似的双节点电路系统

$$C_1 = M_1, C_2 = M_2, L = 1/K, R_1 = 1/b_1, R_2 = 1/b_2$$

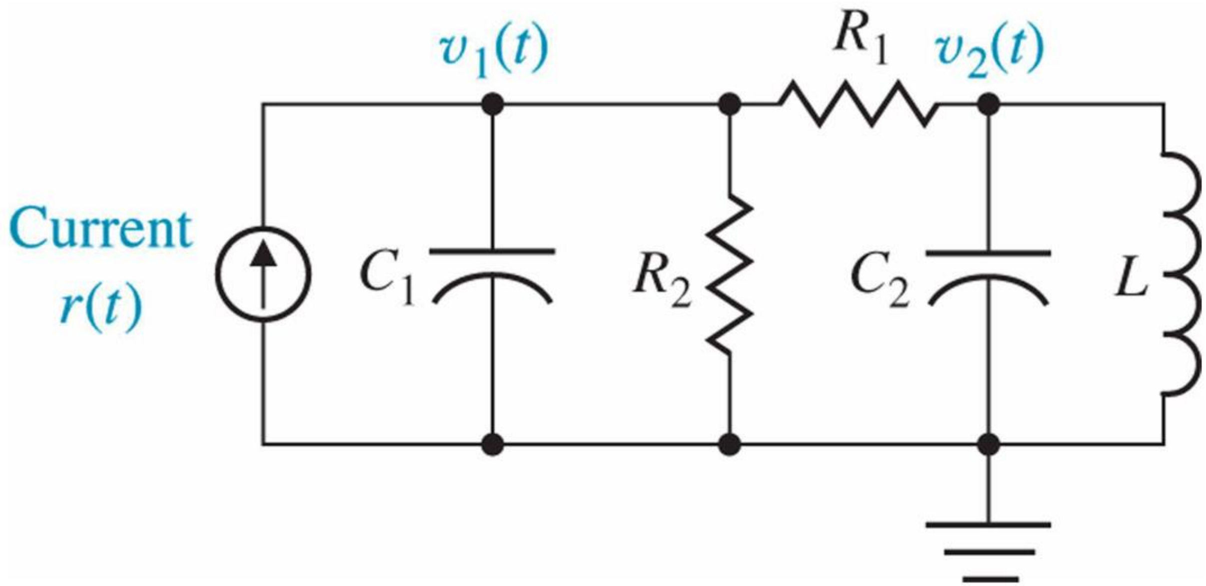




$$r(t) = M_1 \frac{dv_1(t)}{dt} + b_2 v_1(t) + b_1 \left(v_1(t) - v_2(t) \right) \quad ①$$



$$b_1 \left(v_1(t) - v_2(t) \right) = k \int v_2(t)\,dt + M_2 \frac{dv_2(t)}{dt} \quad ②$$



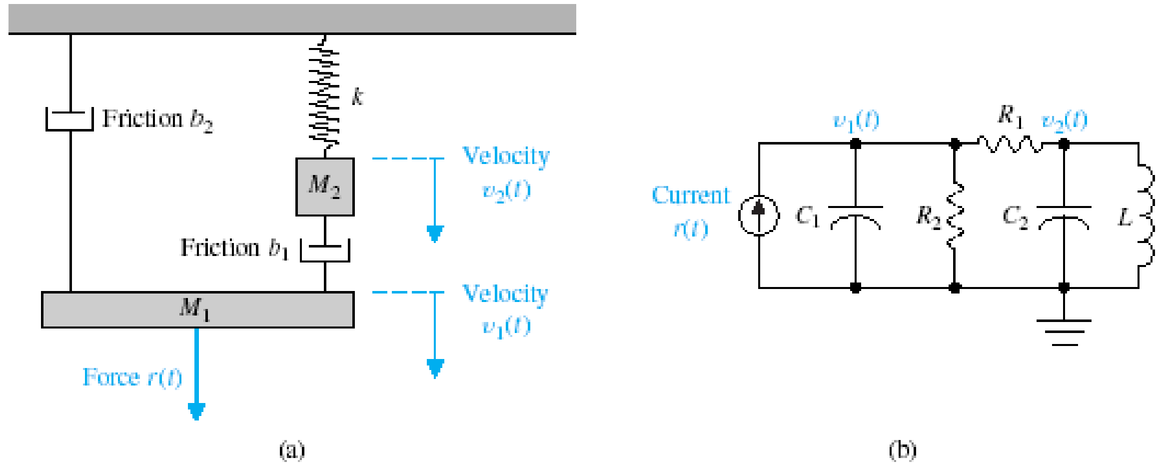
$$r(t) = C_1 \frac{dv_1(t)}{dt} + \frac{v_1(t)}{R_2} + \frac{v_1(t) - v_2(t)}{R_1} \quad ①$$

直流电源

$$i_L + i_{C_2} = i_{R_1} \quad ②$$

$$\rightarrow \frac{1}{L} \int v_2(t)\, dt + C_2 \frac{dv_2(t)}{dt} = \frac{v_1(t) - v_2(t)}{R_1}$$

②



$$C_1 = M_1, C_2 = M_2, L = 1/K, R_1 = 1/b_1, R_2 = 1/b_2$$

- 上述机械（电气）系统的传递函数为：

$$\frac{R(s)}{V_1(s)} = M_1 s + b_2 + b_1 \,\|\, (M_2 s + k/s)$$

$$= M_1 s + b_2 + \frac{(M_2 s + k/s) b_1}{M_2 s + k/s + b_1}$$

$$= \frac{(M_1 s + b_2)(M_2 s + k/s + b_1) + (M_2 s + k/s) b_1}{M_2 s + k/s + b_1}$$

$$\frac{V_1(s)}{R(s)} = \frac{M_2 s + k/s + b_1}{(M_1 s + b_2)(M_2 s + k/s + b_1) + (M_2 s + k/s) b_1}$$

例2.4　相似系统的传递函数

- 或者

$$\frac{V_1(s)}{R(s)}=\frac{1}{M_1 s}\parallel\frac{1}{b_2}\parallel\left(\frac{1}{b_1}+\frac{1}{M_2 s}\parallel\frac{s}{k}\right)$$

$$\frac{V_1(s)}{R(s)}=\frac{(M_2 s^2+k+b_1 s)}{M_1 M_2 \mathrm{s}^3+(M_1 \mathrm{b}_1+\mathrm{b}_1 M_2+M_2 \mathrm{b}_2)\mathrm{s}^2+(M_1 \mathrm{k}+\mathrm{b}_2 \mathrm{b}_1)\mathrm{s}+\mathrm{b}_1 \mathrm{k}+\mathrm{b}_2 \mathrm{k}}$$

对照表

机械系统			电路系统		
	微分方程	laplace		微分方程	laplace
力	$\sum_n F_n = 0$		电流	$\sum_n i_n = 0$	
速度	$\sum_i v_i = 0$		电压	$\sum_i V_i = 0$	
质量	$r(t) = M\frac{dv}{dt}$	$\frac{V(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ms}$	电容	$r(t) = C\frac{dv}{dt}$	$\frac{V(s)}{R(s)} = \frac{1}{Cs}$
弹簧	$r(t) = k\int vdt$	$\frac{V(s)}{R(s)} = \frac{s}{k}$	电感	$r(t) = \frac{1}{L}\int vdt$	$\frac{V(s)}{R(s)} = Ls$
阻尼	$r(t) = bv(t)$	$\frac{V(s)}{R(s)} = \frac{1}{b}$	电阻	$r(t) = \frac{1}{R}v(t)$	$\frac{V(s)}{R(s)} = R$

对照表

机械系统			电路系统		
	V(s)/F(s)	**F(s)/V(s)**		**V(s)/I(s)**	**I(s)/V(s)**
质量	1/Ms	Ms	电容	1/Cs	Cs
弹簧	s/k	k/s	电感	Ls	1/Ls
阻尼	1/b	b	电阻	R	1/R

作业

- Page 107: P2.22
- Page 108: P2.26
- Page 115: P2.50

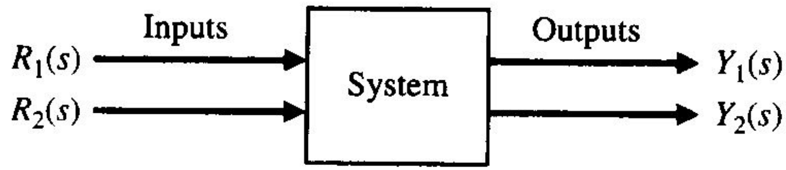
2.6 框图（Block diagrams）模型

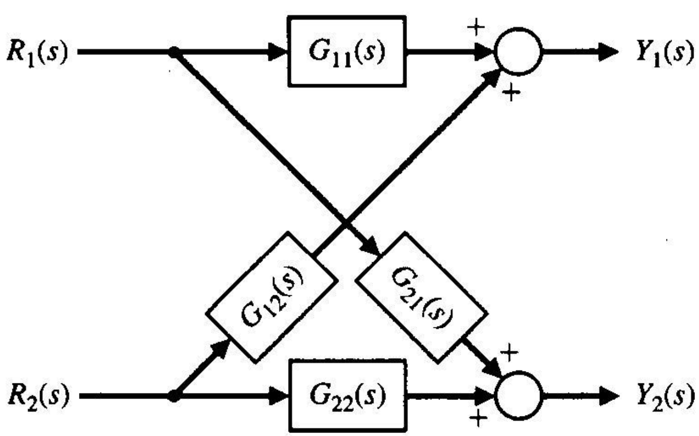
- **定义:**
  - 由单方向功能方框组成的一种结构图，这些方框代表了系统元件的传递函数。
- **举例:**
  - 磁场电流控制电机

2.6 框图（Block diagrams）模型

- 多个受控变量的系统

- 举例:



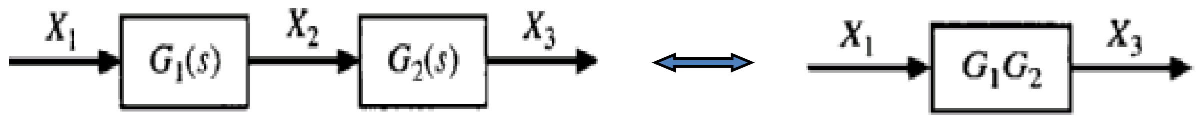


$$Y_1(s) = G_{11}(s)R_1(s) + G_{12}(s)R_2(s)$$

$$Y_2(s) = G_{21}(s)R_1(s) + G_{22}(s)R_2(s)$$

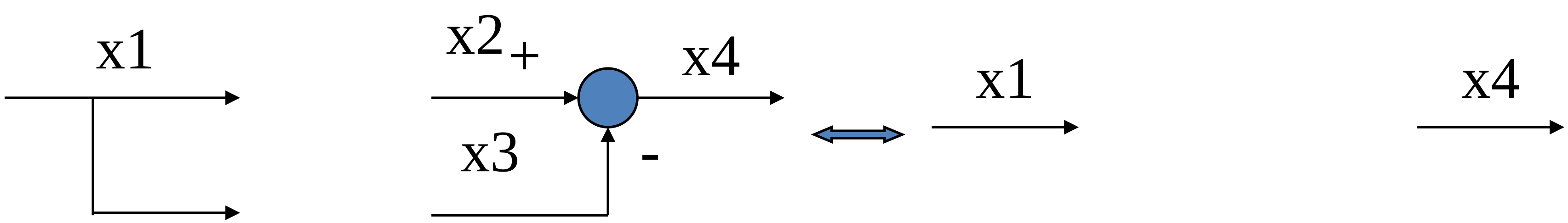
串联与并联

- 串联:



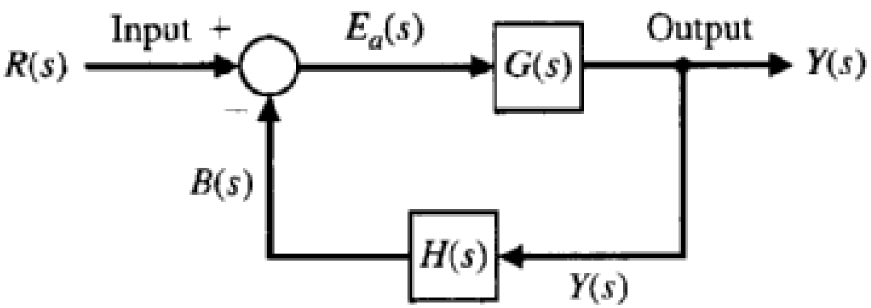
- 并联:

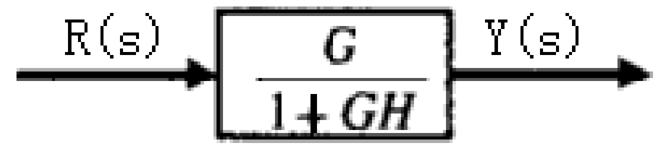
$$X_3(s) = G_2(s)X_2(s) = G_1(s)G_2(s)X_1(s)$$



$$X_4(s) = X_2(s) + X_3(s) = G_1(s)X_1(s) + G_2(s)X_1(s) = (G_1(s) + G_2(s))X_1(s)$$

负反馈系统

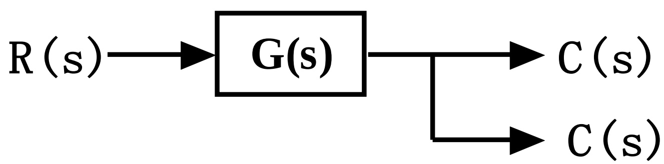




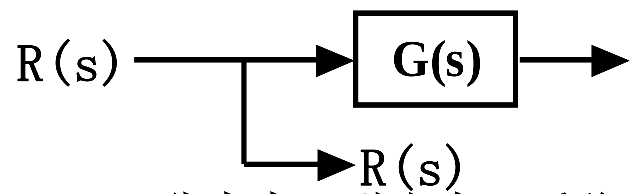
$$\left.\begin{aligned} E_a(s) &= R(s) - B(s) = R(s) - H(s)Y(s) \\ Y(s) &= G(s)E_a(s) \end{aligned}\right\} \quad Y(s)[1+G(s)H(s)] = G(s)R(s)$$

结构图的变位变换

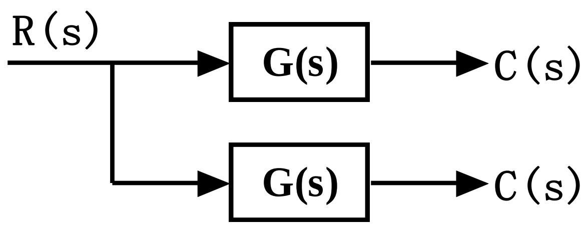
（1） 分支点的移动(前乘，后除)

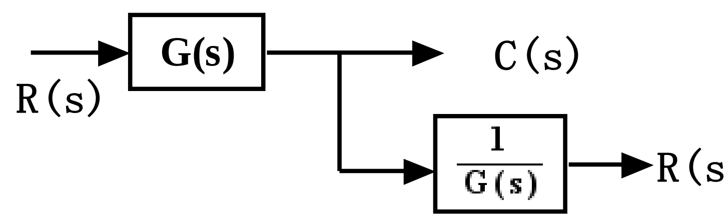


分支点（引出点）前移



分支点（引出点）后移

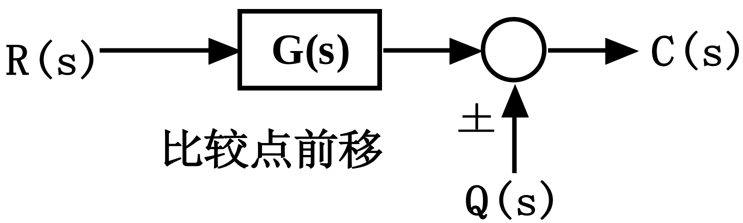




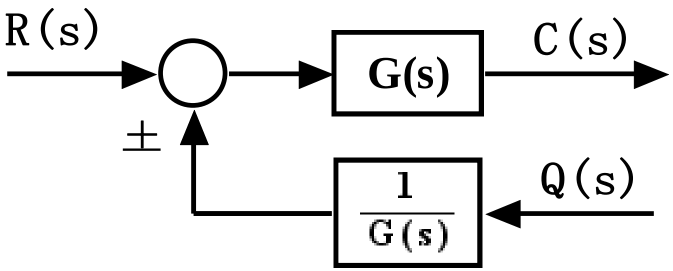
$$C(s) = R(s)G(s)$$

$$R(s) = R(s)G(s)\frac{1}{G(s)} = R(s)$$

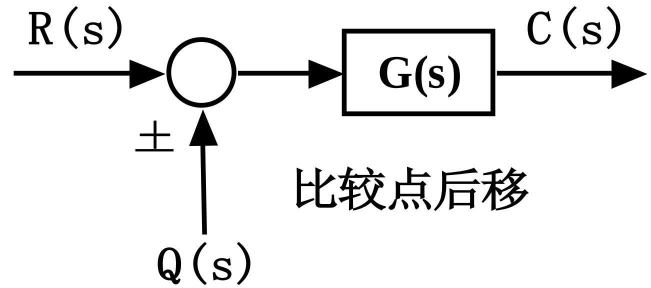
（2）比较点的移动(前除，后乘)



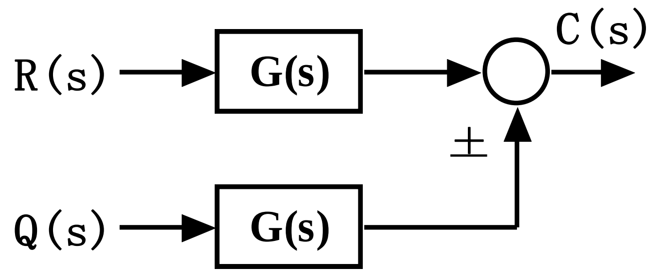
比较点前移



$$C(s) = R(s)G(s) \pm Q(s)$$
$$= [R(s) + \frac{Q(s)}{G(s)}]G(s)$$



比较点后移

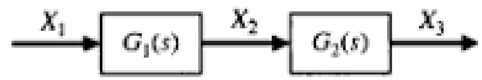


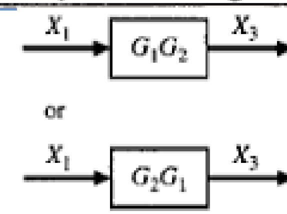
$$C(s) = [R(s) \pm Q(s)]G(s)$$
$$= R(s)G(s) \pm Q(s)G(s)$$

表2.6 框图的基本变换

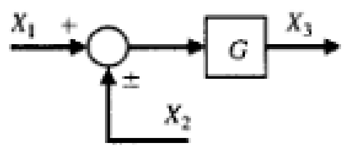
Transformation | **Original Diagram** | **Equivalent Diagram**

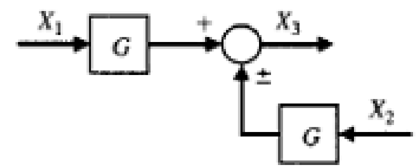
1. Combining blocks in cascade
合并串联方框



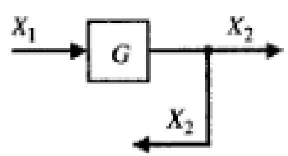


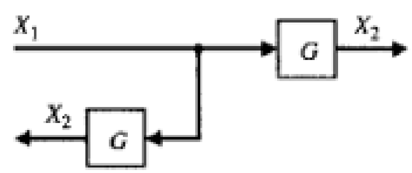
2. Moving a summing point behind a block
相加点后移



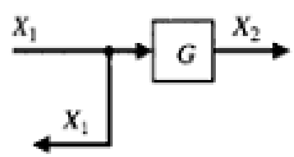


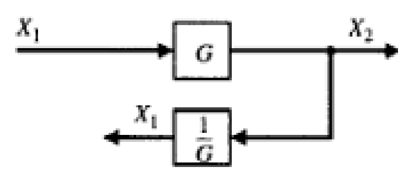
3. Moving a pickoff point ahead of a block
分支点前移



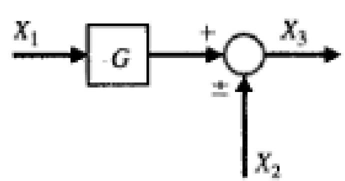


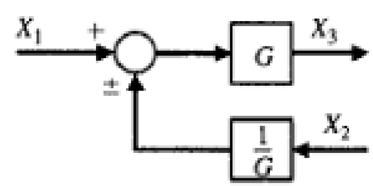
4. Moving a pickoff point behind a block
分支点后移



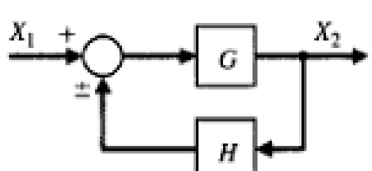


5. Moving a summing point ahead of a block
相加点前移

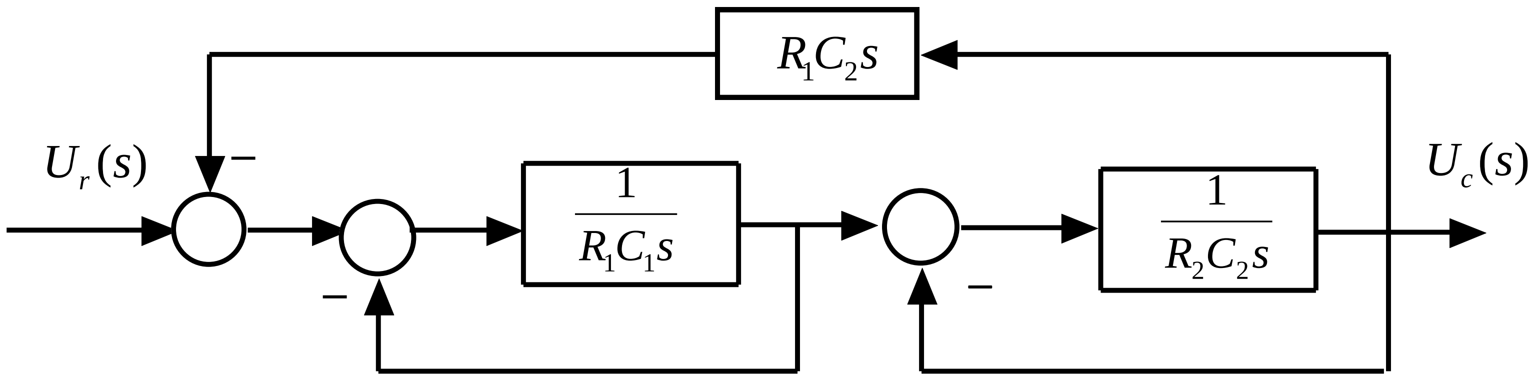




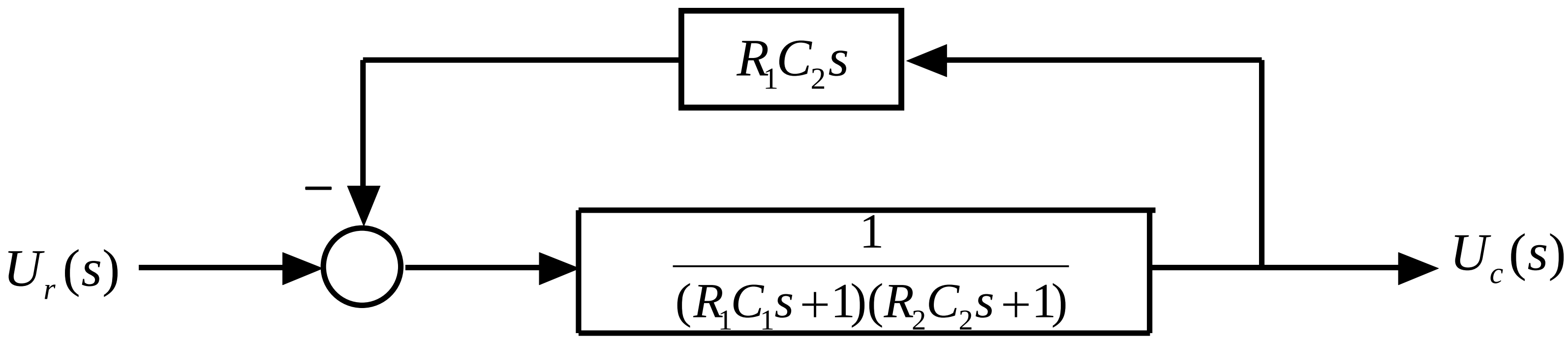
6. Eliminating a feedback loop
消去反馈回路



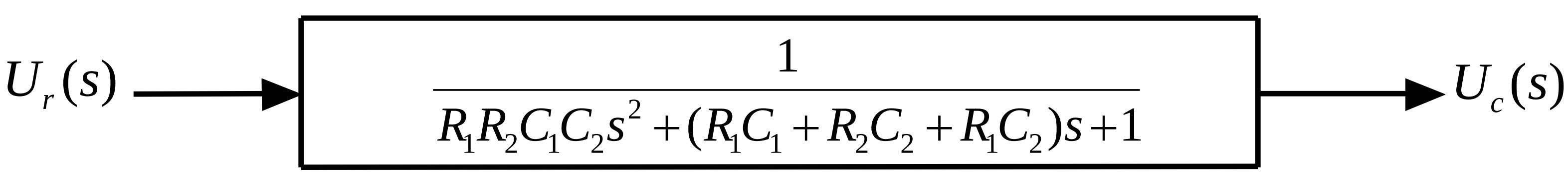
方框图化简



R_1C_2s
$U_r(s)$
$\frac{1}{R_1C_1s}$
$\frac{1}{R_2C_2s}$
$U_c(s)$



R_1C_2s
$U_r(s)$
$\frac{1}{(R_1C_1s+1)(R_2C_2s+1)}$
$U_c(s)$



$U_r(s)$
$\frac{1}{R_1R_2C_1C_2s^2+(R_1C_1+R_2C_2+R_1C_2)s+1}$
$U_c(s)$

例 2.7 方框图化简

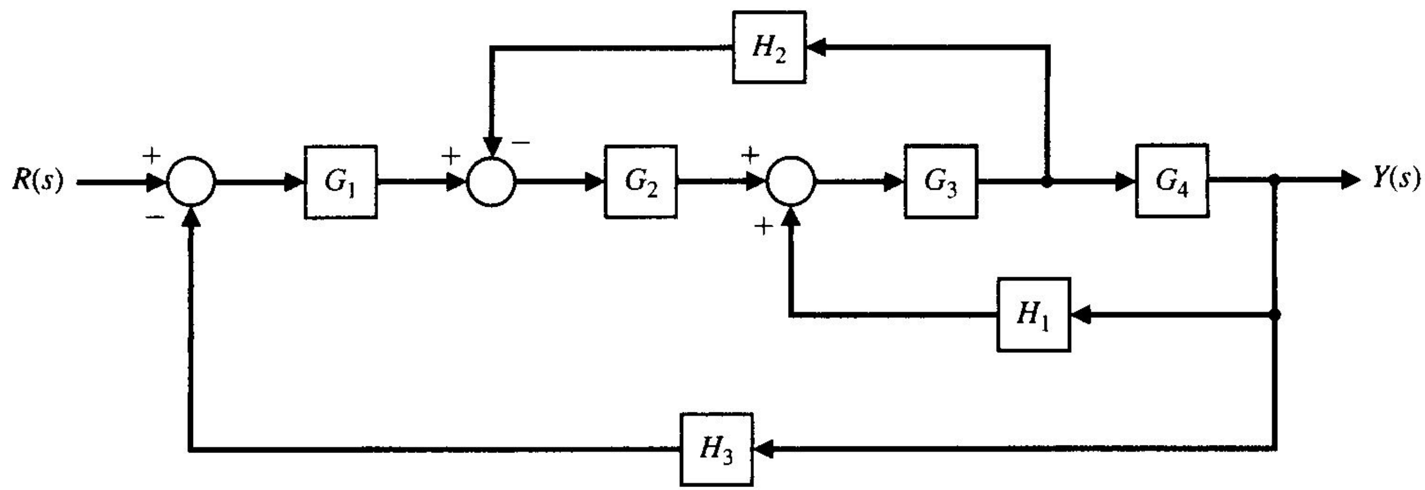
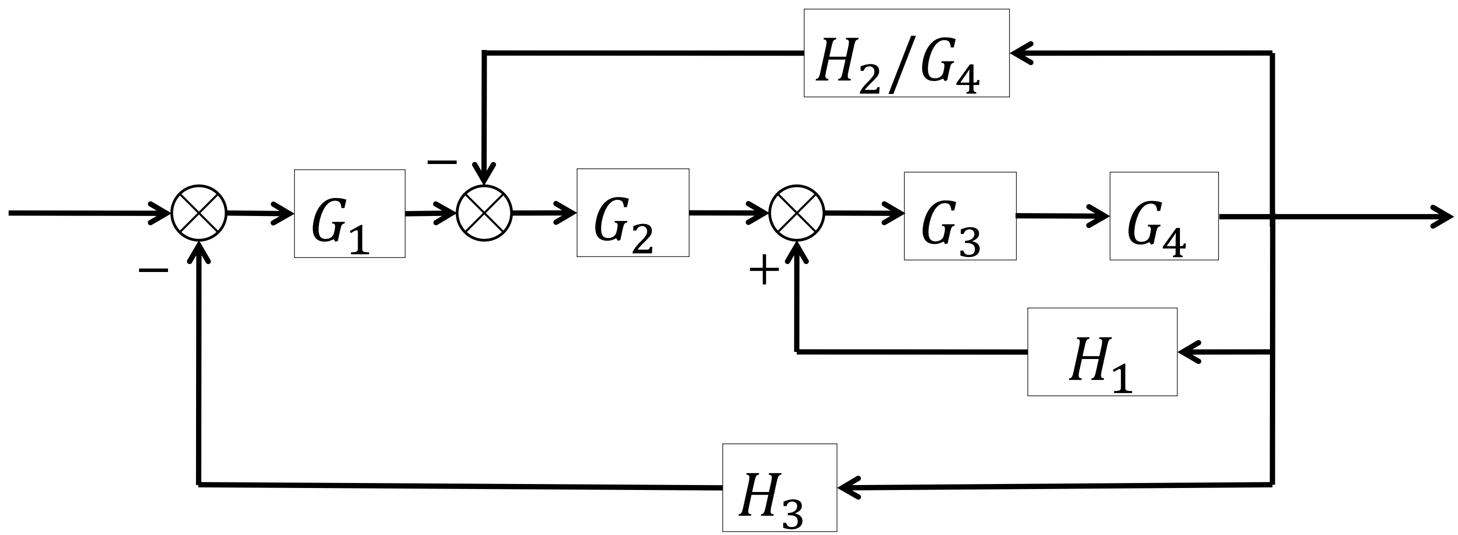
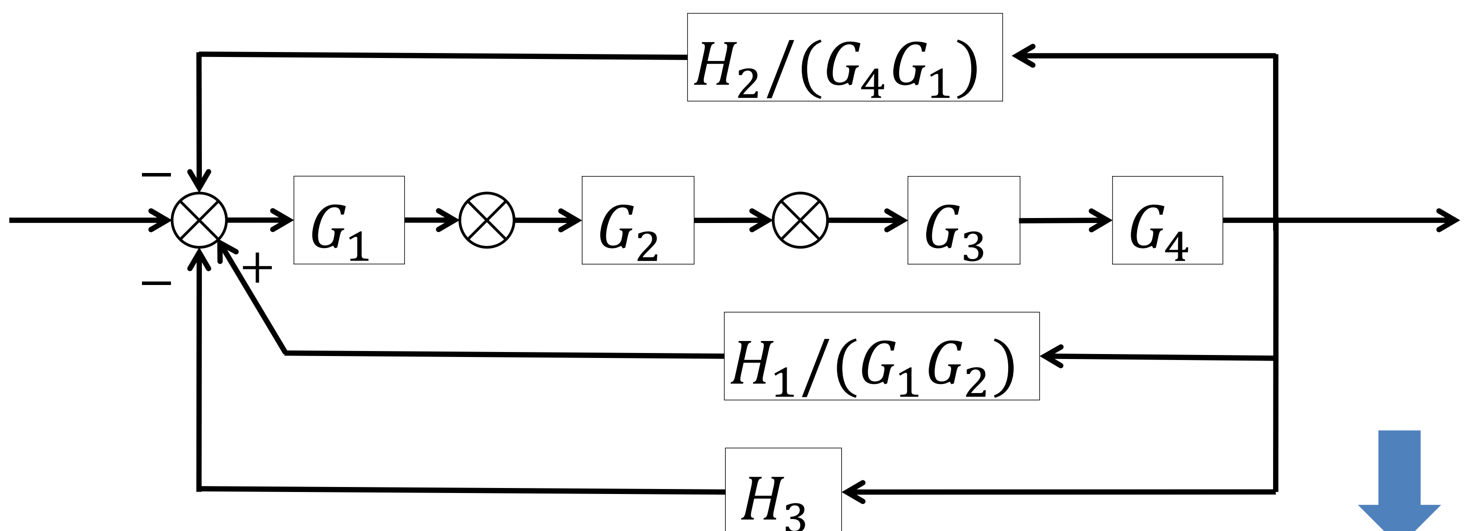


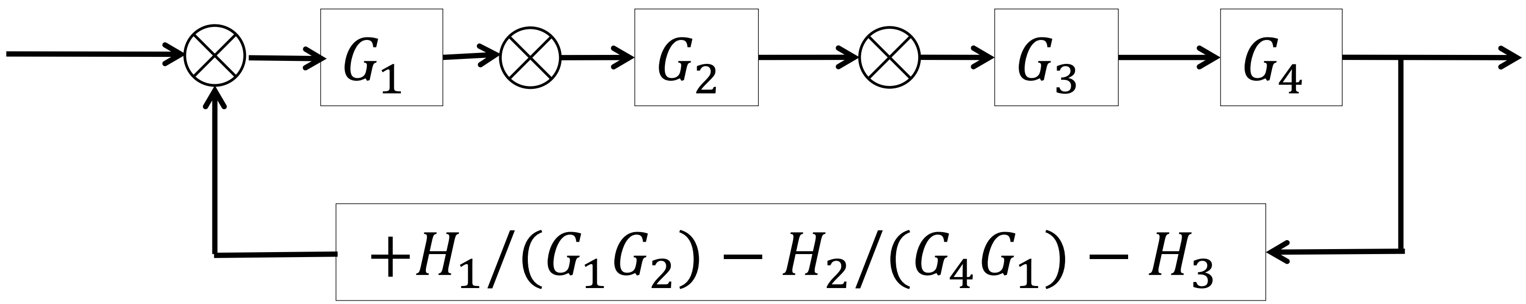
图2.26 多回路反馈控制系统



H_2/G_4
$-$
G_1
G_2
G_3
G_4
$-$
$+$
H_1
H_3



$H_2/(G_4G_1)$
$-$
G_1
G_2
G_3
G_4
$-$
$+$
$H_1/(G_1G_2)$
H_3



$$\frac{G_1G_2G_3G_4}{1-G_1G_2G_3G_4\left(\frac{H_1}{G_1G_2}-\frac{H_2}{G_4G_1}-H_3\right)}$$

$$\frac{G_1G_2G_3G_4}{1-G_3G_4H_1+G_2G_3H_2+G_1G_2G_3G_4H_3}$$

- 对于有公共前向传函的**闭环传函=**

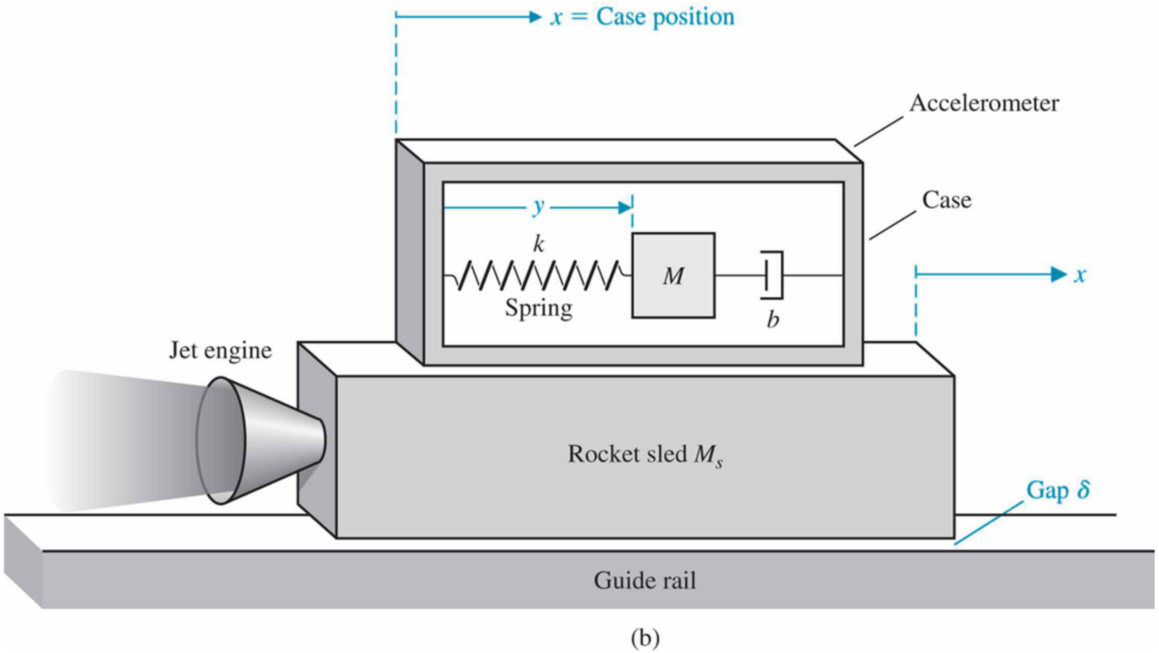
$$\frac{\textbf{前向传函之积}}{\textbf{1±不同回路的传函之和}}$$

例题

- Page 111: P2.35
- Page 111: P2.36

2.8 设计实例

(a)



(b)

图2.45 (a) 喷气引擎火箭试验撬；(b) 装在试验撬上的加速度计

2.8 设计实例

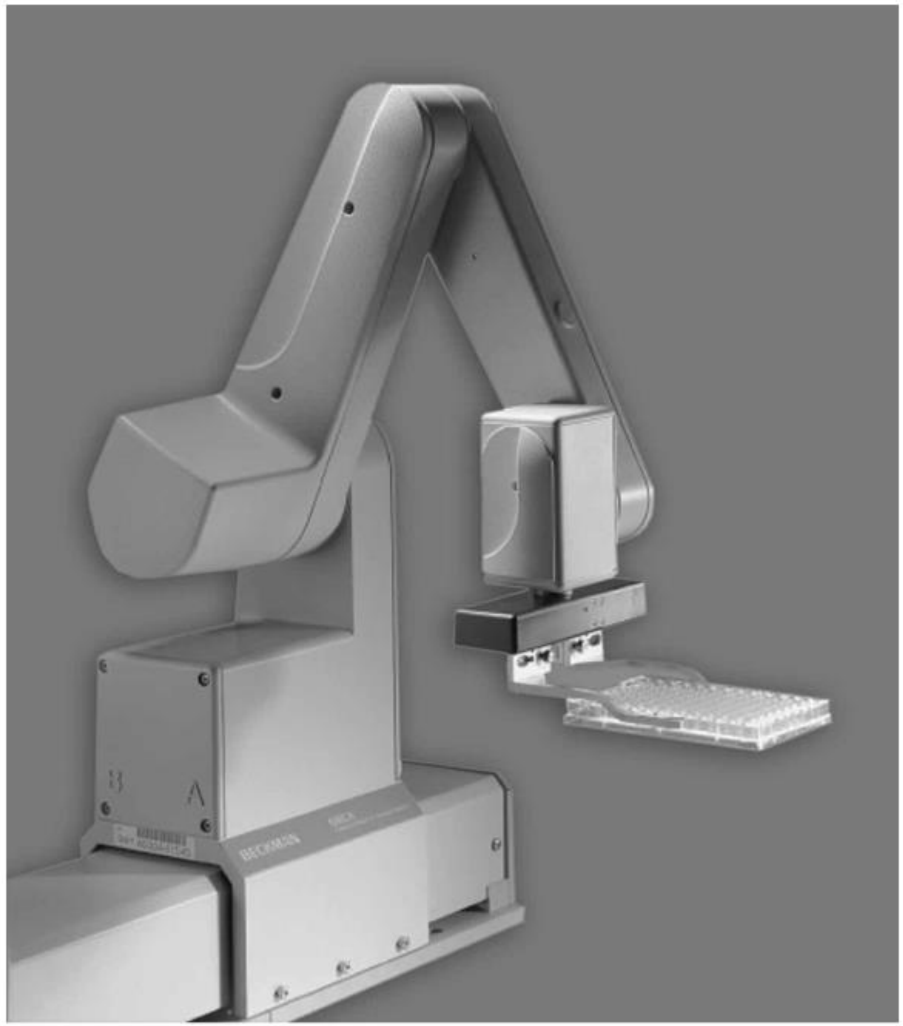


图2.47 用于样品准备的实验用机器人

2.8 设计实例

Table 2.9 ORCA Robot Arm Hardware Specifications

Arm	Articulated, Rail-Mounted	Teach Pendant	Joy Stick with Emergency Stop
Degrees of freedom	6	Cycle time	4 s (move 1 inch up, 12 inch across, 1 inch down, and back)
Reach	±54 cm	Maximum speed	75 cm/s
Height	78 cm	Dwell time	50 ms typical (for moves within a motion)
Rail	1 and 2 m	Payload	0.5 kg continuous, 2.5 kg transient (with restrictions)
Weight	8.0 kg	Vertical deflection	<1.5 mm at continuous payload
Precision	±0.25 mm	Cross-sectional work envelope	1 m^2
Finger travel (gripper)	40 mm		
Gripper rotation	±77 revolutions		

2.8 设计实例

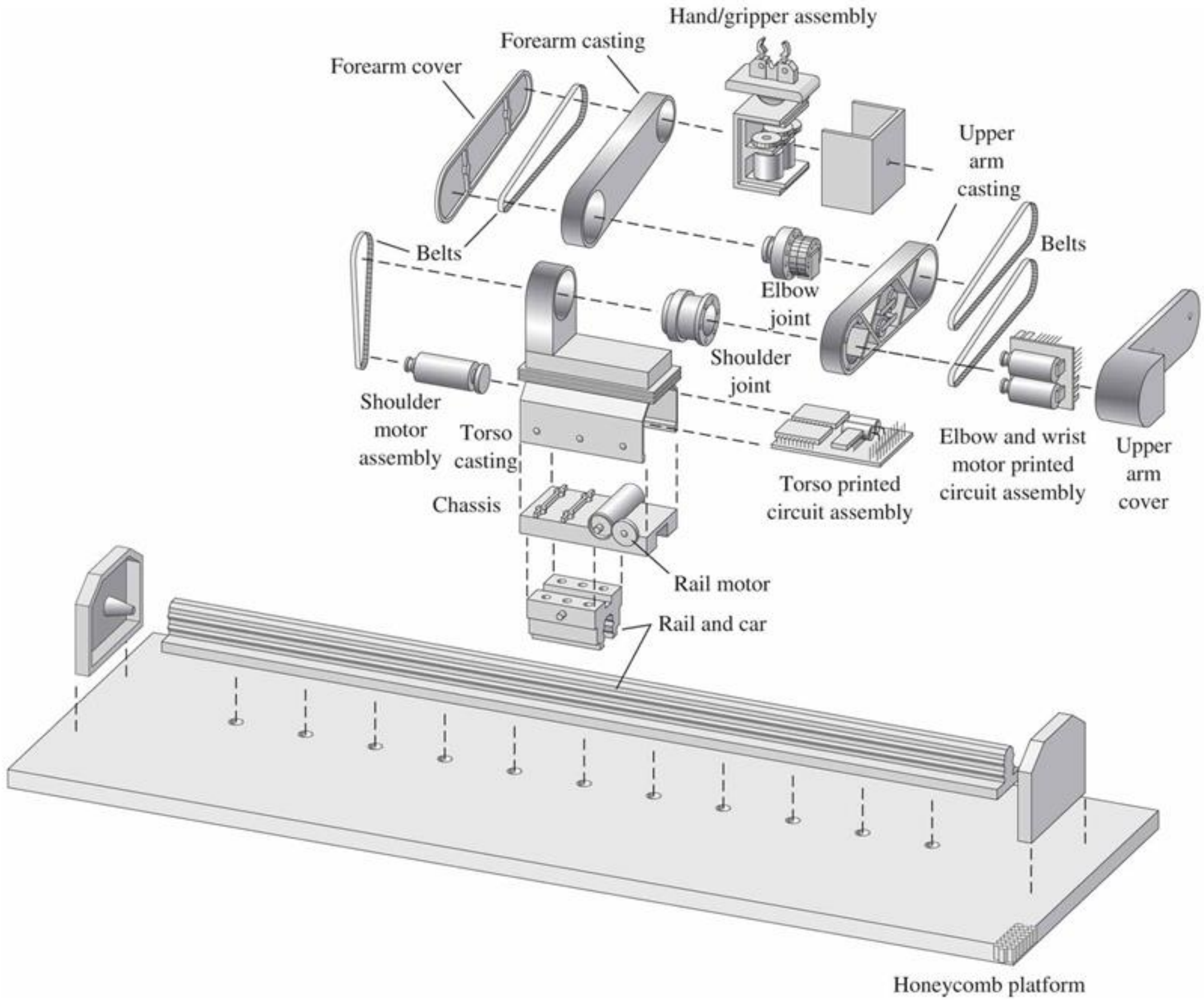


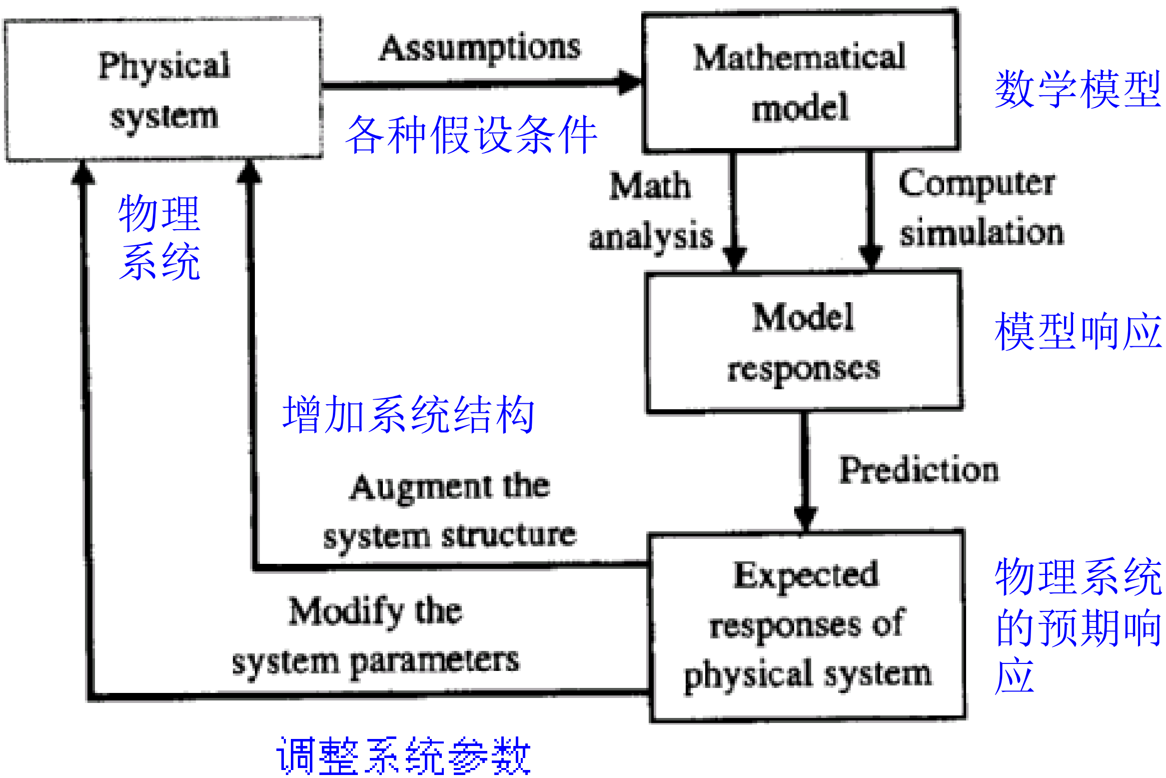
图2.48 ORCA机器人的元件拆分图

惠普公司的“化学分析优化机器人”

2.9 利用控制系统设计软件进行系统仿真

仿真(Simulation)：

通过建立系统模型，利用实际输入信号对系统的行为进行研究的一种模拟活动。



利用系统仿真模型进行分析和设计

2.9 利用控制系统设计软件进行系统仿真

计算机仿真的好处

- 能大幅度缩减所需时间和费用
- 能在各种假定条件下，甚至是当前无法实现的条件下，对系统进行研究
- 可行的、安全的系统分析和评价技术

利用MATLAB进行系统仿真

Roots: 计算方程的根

Tf: 计算传递函数

Series: 计算串联多项式的传递函数

Parallel: 计算并联多项式的传递函数

Feedback: 计算闭环的传递函数

Zero, Pole : 计算传递函数的零极点

利用MATLAB进行系统仿真

Poly: 由根重组多项式

Conv: 计算两个多项式的卷积

Polyval: 计算一个 多项式的值

Minreal: 消去公因式

Pzmap： 画零极点图

Step: 计算系统对单位阶跃输入的响应

1. 系统瞬态响应

质量块-弹簧-阻尼器系统的零输入动态响应

$$y(t)=\frac{y(0)}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t+\theta)$$

$$y(0)=0.15m,\qquad \theta=\cos^{-1}\zeta,\qquad \omega_n=\sqrt{2}\,\frac{rad}{\sec},\qquad \zeta_2=\frac{1}{2\sqrt{2}}\qquad \left(\frac{k}{M}=2,\frac{b}{M}=1\right)$$

```
>>y0=0.15;
>>wn=sqrt(2);
>>zeta=1/(2*sqrt(2));
>>t=[0:0.1:10];
>>unforced
```

ω_n

ζ

unforced.m

```
%Compute Unforced Response to an Initial Condition
%
c=(y0/sqrt(1-zeta^2));
y=c*exp(-zeta*wn*t).*sin(wn*sqrt(1-zeta^2)*t+acos(zeta));
%
bu=c*exp(-zeta*wn*t);bl=-bu;
%
plot(t,y,t,bu,'--',t,bl,'--'), grid
xlabel('Time (s)'), ylabel('y(t) (m)')
legend(['\omega_n=',num2str(wn),'     \zeta=',num2str(zeta)])
```

$y(0)/\sqrt{1-\zeta^2}$

$e^{-\zeta\omega_n t}$ envelope

1. 系统瞬态响应

$$y(t)=\frac{y(0)}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t+\theta)$$

$$y(0)=0.15m,\qquad \theta=\cos^{-1}\zeta,\qquad \omega_n=\sqrt{2}\,\tfrac{rad}{\sec},\qquad \zeta_2=\tfrac{1}{2\sqrt{2}}\qquad \left(\tfrac{k}{M}=2,\tfrac{b}{M}=1\right)$$

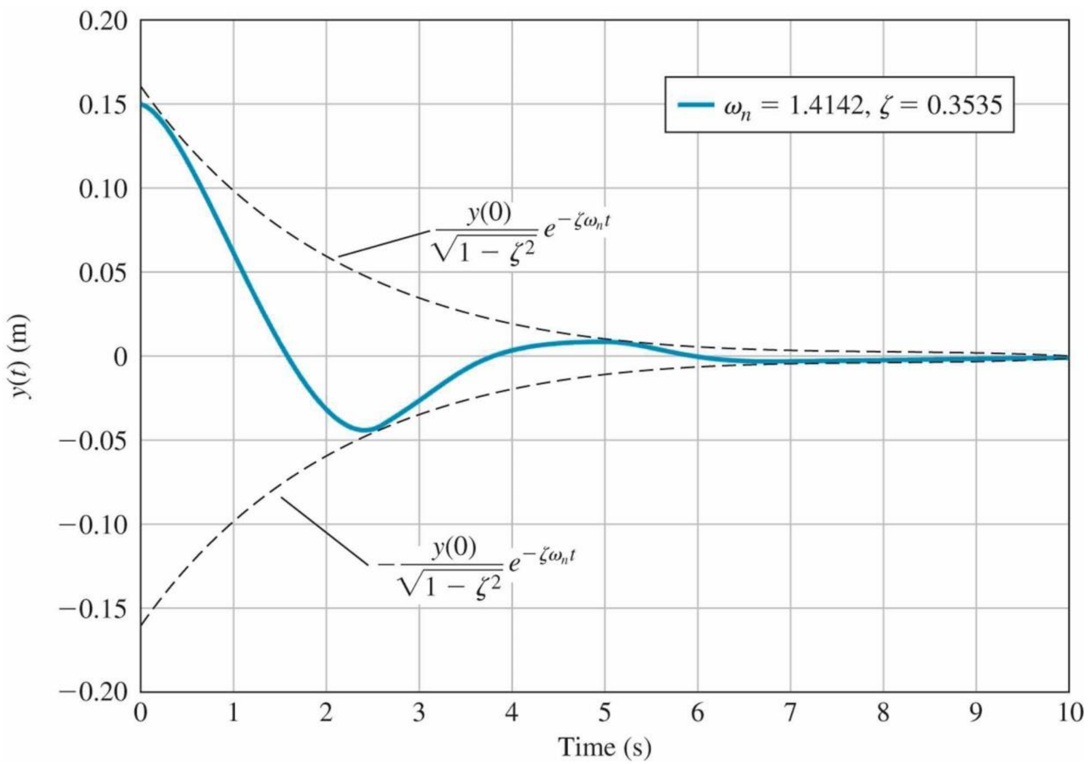


图 2.51

质量-弹簧-阻尼器系统的零输入响应

2.多项式polynomial

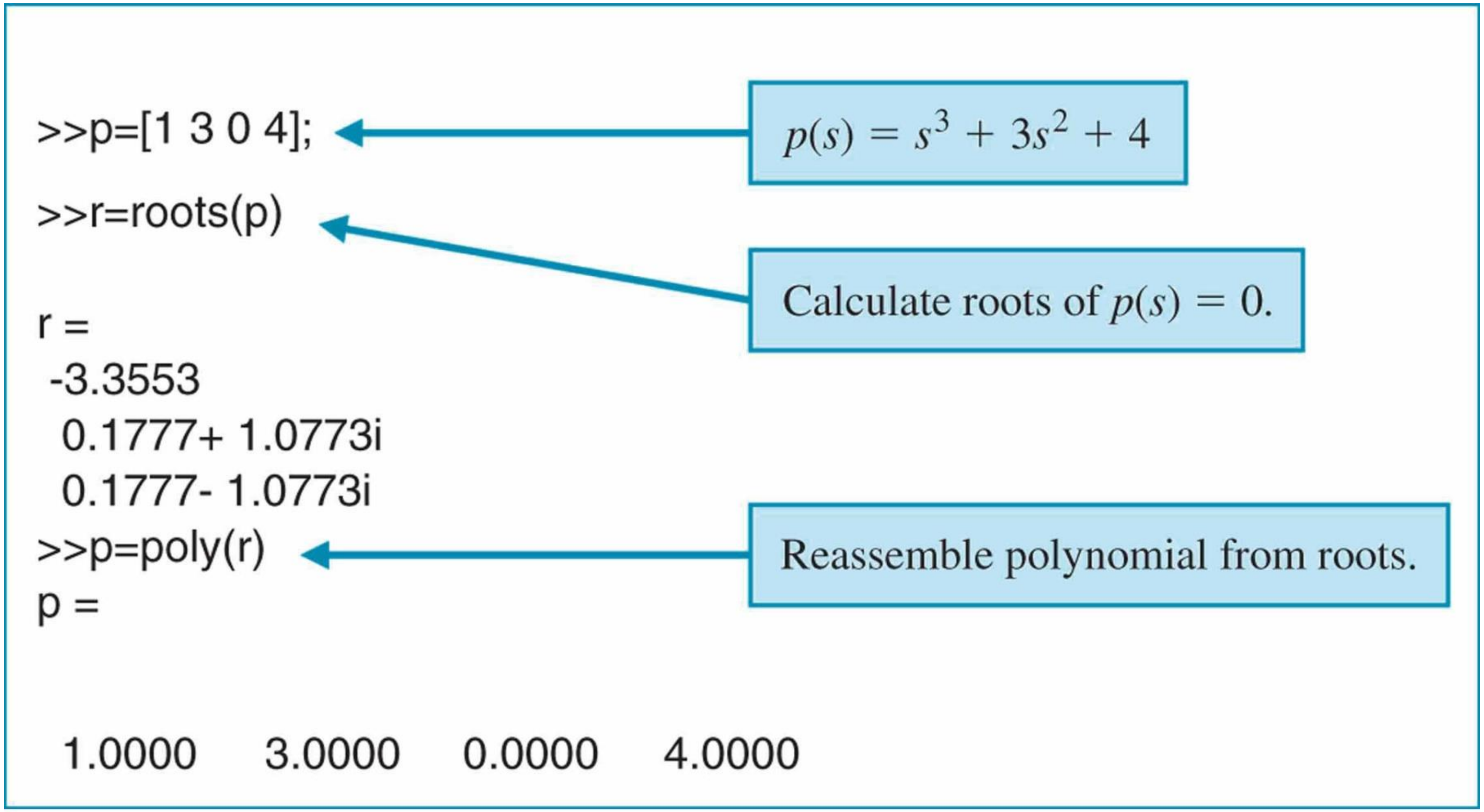


图2.52 输入多项式并求解零化方程的根

2. 多项式polynomial

```
>>p=[3 2 1]; q=[1 4];
>>n=conv(p,q)
n=
   3    14    9    4

>>value=polyval(n,-5)
value =

   -66
```

Multiply p and q.

$n(s) = 3s^3 + 14s^2 + 9s + 4$

Evaluate $n(s)$ at $s = -5$.

图2.53 多项式的乘积和求值

3. 传递函数 transfer function

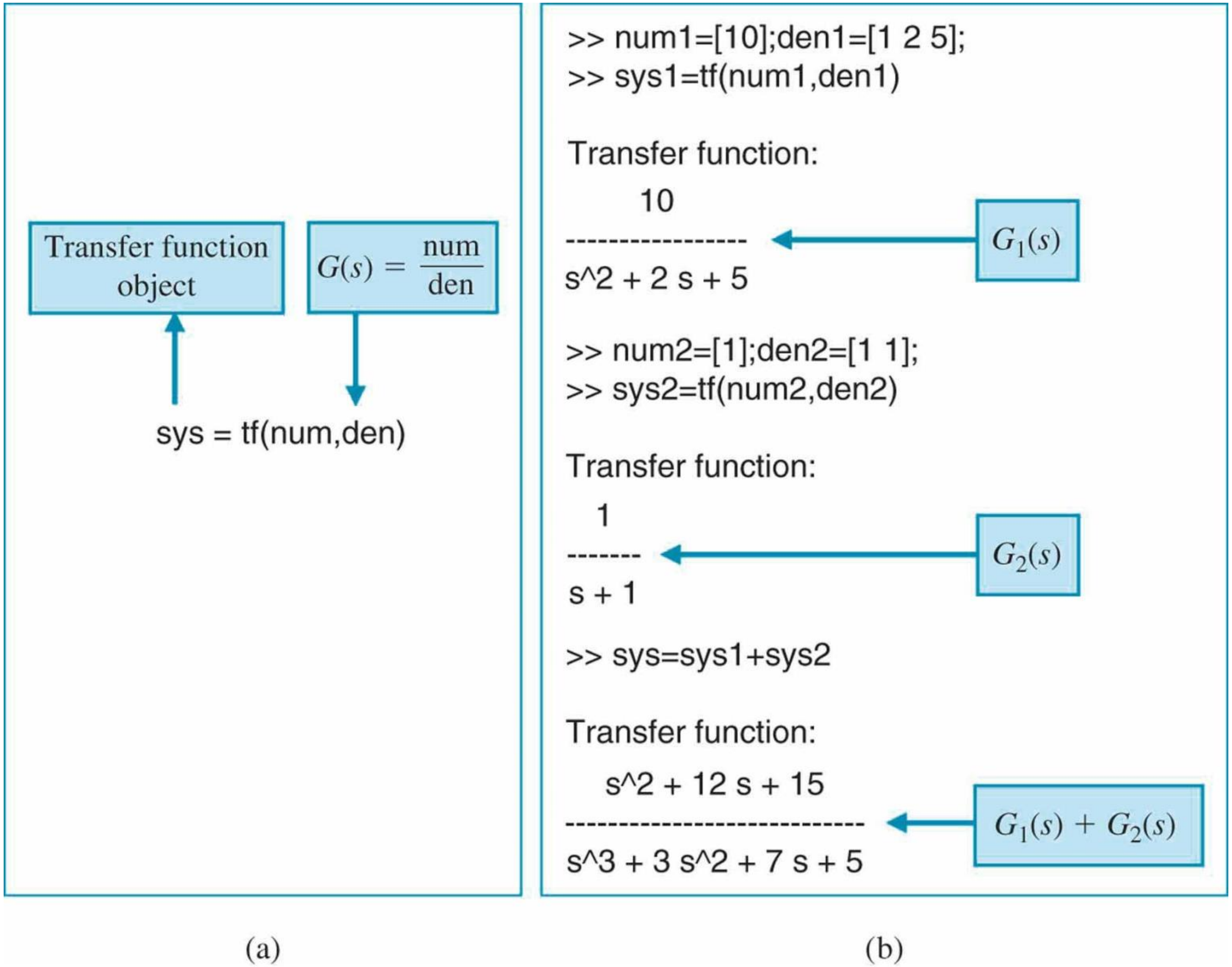


图2.54 传递函数的使用说明

4. 零极点 pole & zero

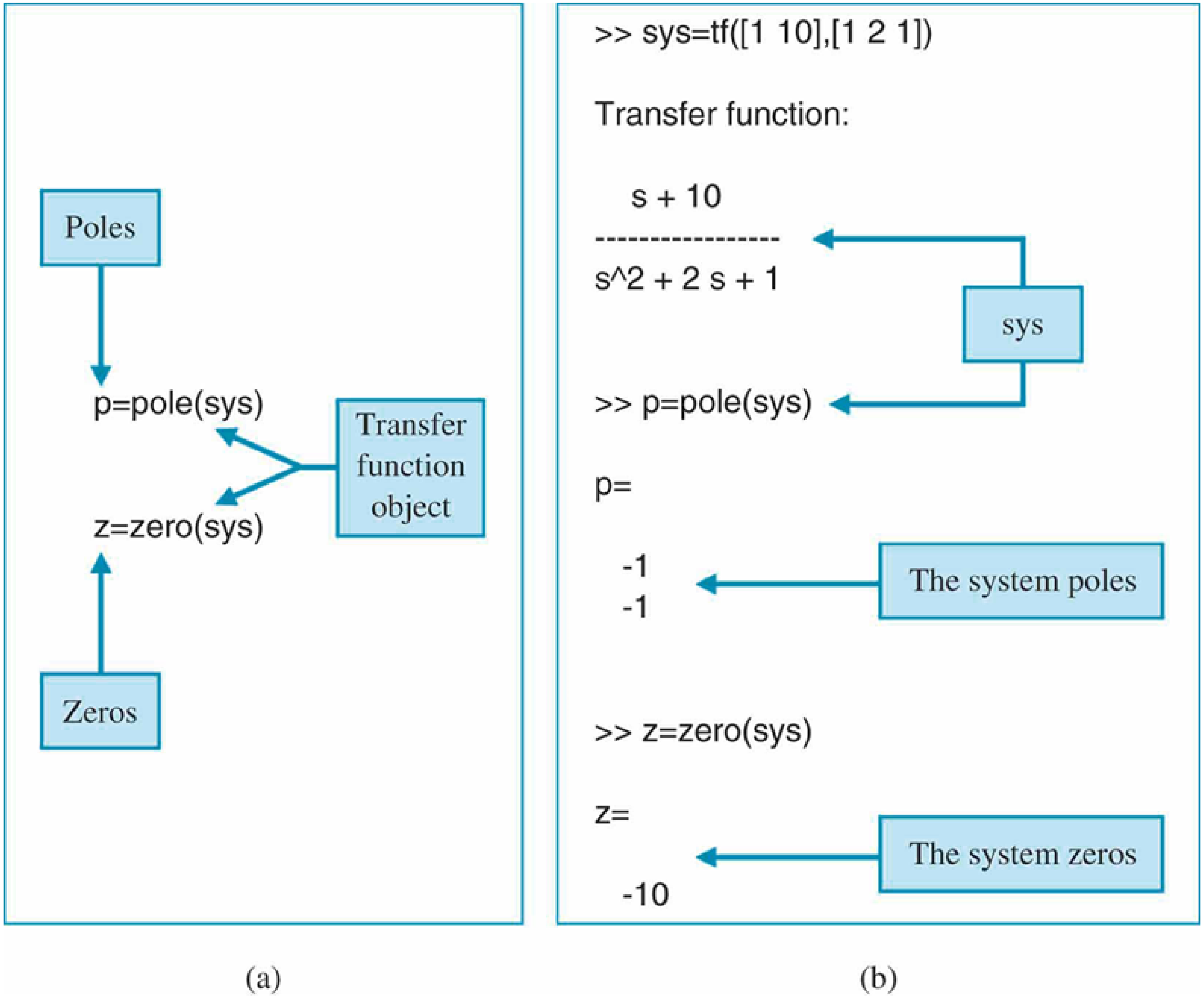


图2.55 函数 pole和zero的使用说明

4. 零极点 pole & zero

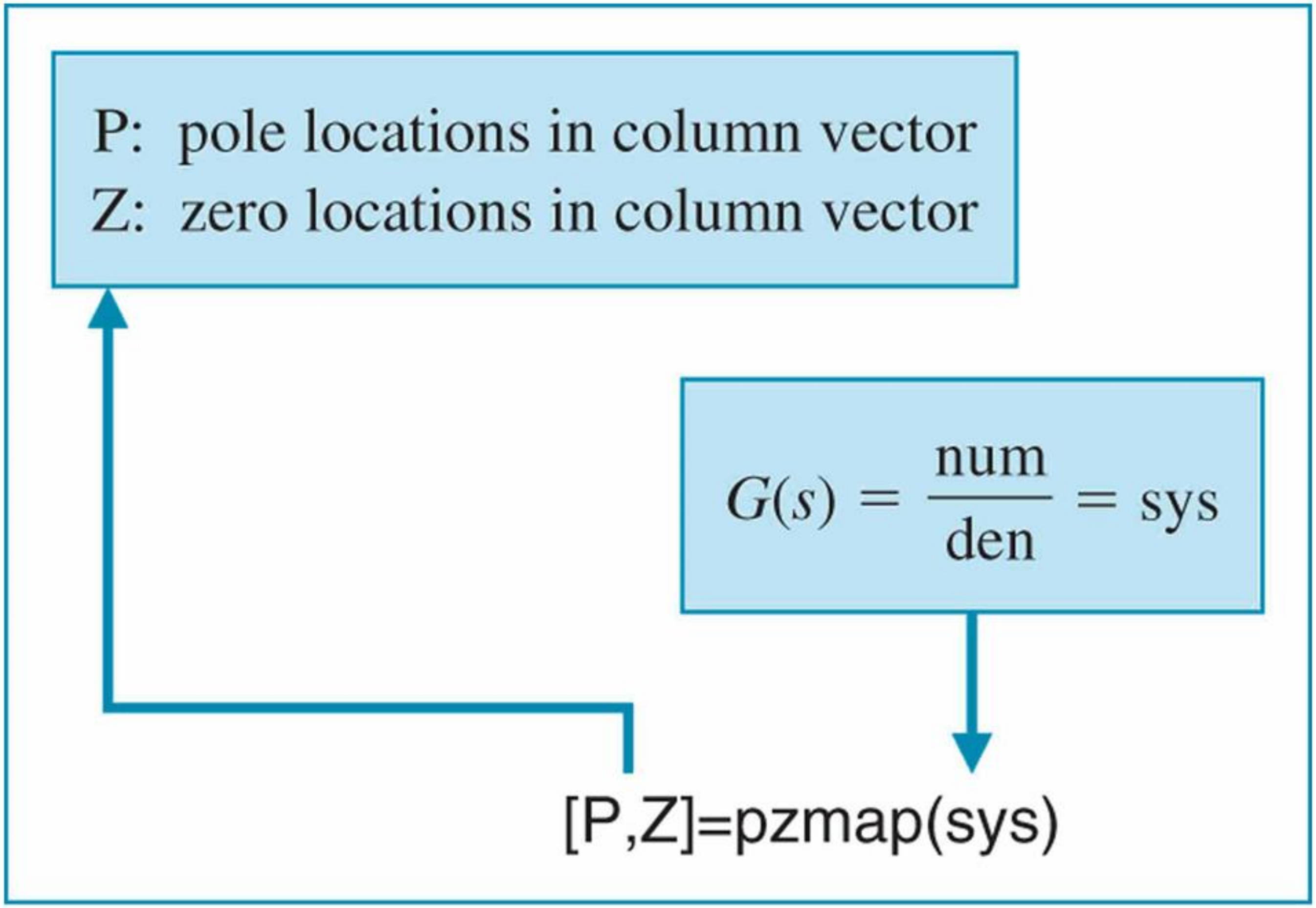


图2.56 函数 pzmap的使用说明

例2.18

$$G(s)=\frac{6s^2+1}{s^3+3s^2+3s+1}$$

$$H(s)=\frac{(s+1)(s+2)}{(s+2i)(s-2i)(s+3)}$$

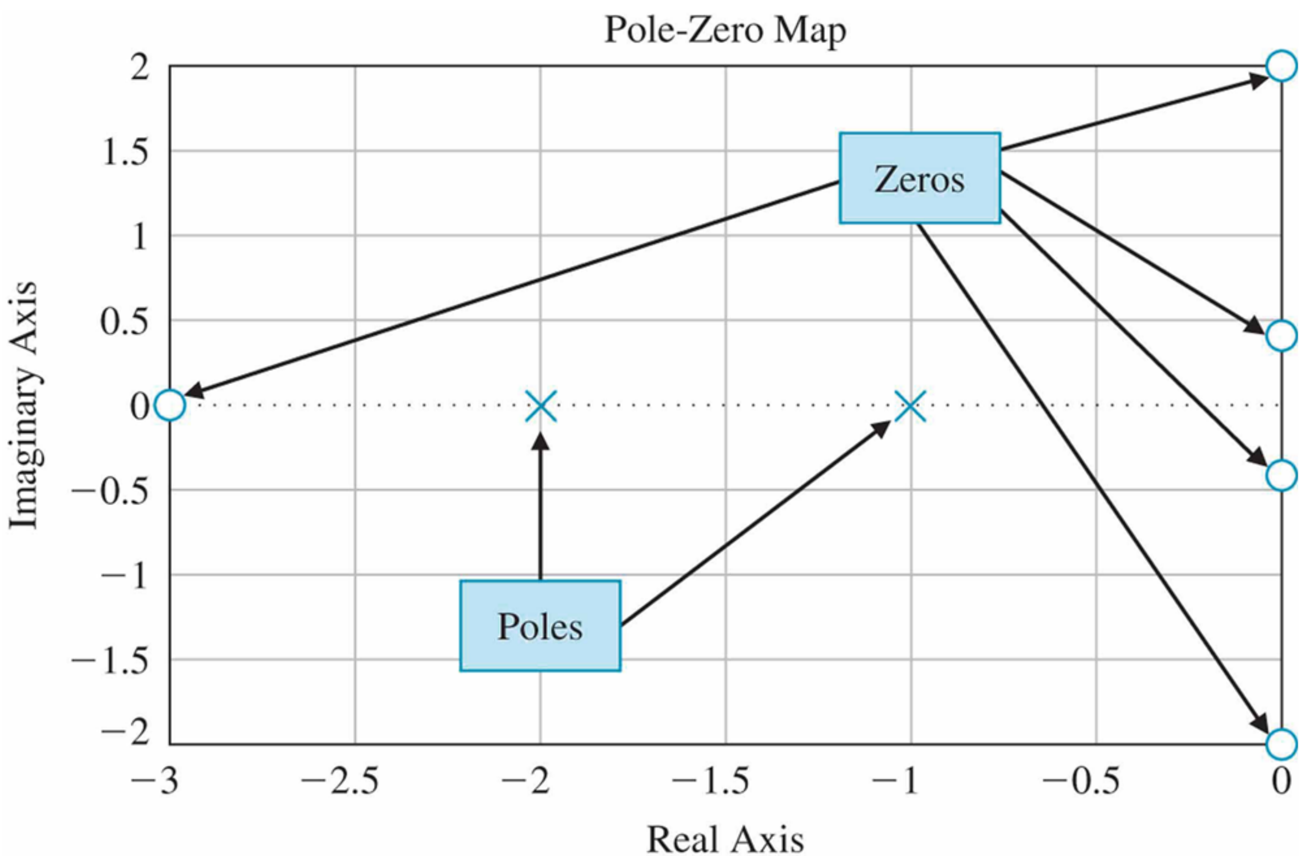


图 **2.57** G(s)/H(s) 的零极点图

```
>>numg=[6 0 1]; deng=[1 3 3 1];sysg=tf(numg,deng);
>>z=zero(sysg)

z =
    0 + 0.4082i
    0 - 0.4082i

>>p=pole(sysg)

p =
    -1.0000
    -1.0000 + 0.0000i
    -1.0000 -  0.0000i

>>n1=[1 1]; n2=[1 2]; d1=[1 2*i]; d2=[1 -2*i]; d3=[1 3];
>>numh=conv(n1,n2); denh=conv(d1,conv(d2,d3));
>>sysh=tf(numh,denh)

Transfer function:
      s^2 + 3 s + 2
-----------------------
s^3 + 3 s^2 + 4 s + 12

>>sys=sysg/sysh

Transfer function:
6 s^5 + 18 s^4 + 25 s^3 + 75 s^2 + 4 s +12
-------------------------------------------
  s^5 + 6 s^4 + 14 s^3 + 16 s^2 + 9 s + 2

>>pzmap(sys)
```

Compute poles and zeros of $G(s)$

Expand $H(s)$

$H(s)$

$\frac{G(s)}{H(s)} = \text{sys}$

Pole-zero map

图 2.58 传递函数G(s)和H(s) 的一些运算示例

2.10 循序渐进设计实例：磁盘驱动读取系统

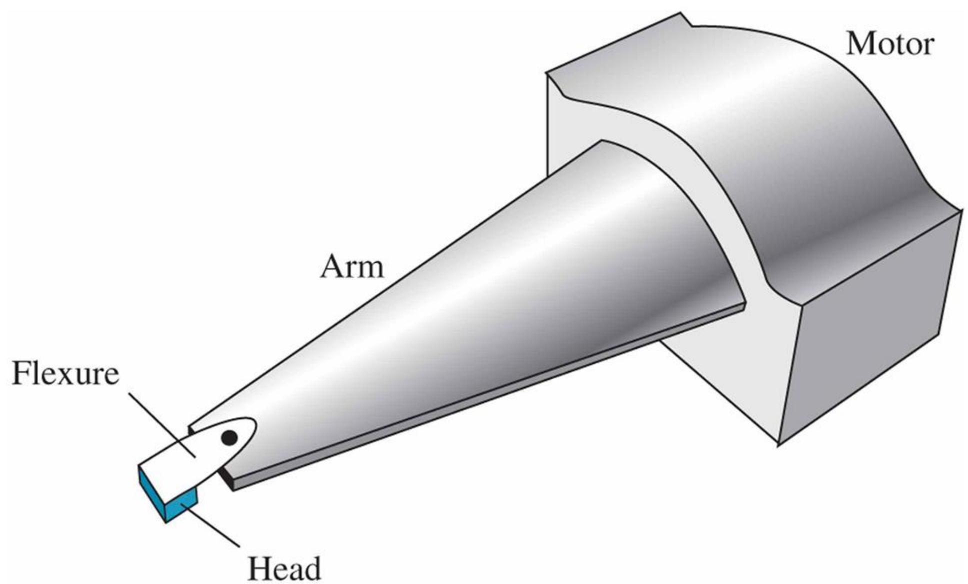


图2.75 磁头安装结构图

- 磁头安装在一个与手臂相连的片上，它读取磁盘上各点处不同的磁通量并将信号提供给放大器
- 弹性簧片flexure 用于使磁头浮于磁盘100 nm间隙的上方

2.10 循序渐进设计实例：磁盘驱动读取系统

偏差信号（error signal）是在磁头读取磁盘上预先录制的索引磁道（index track）时产生的

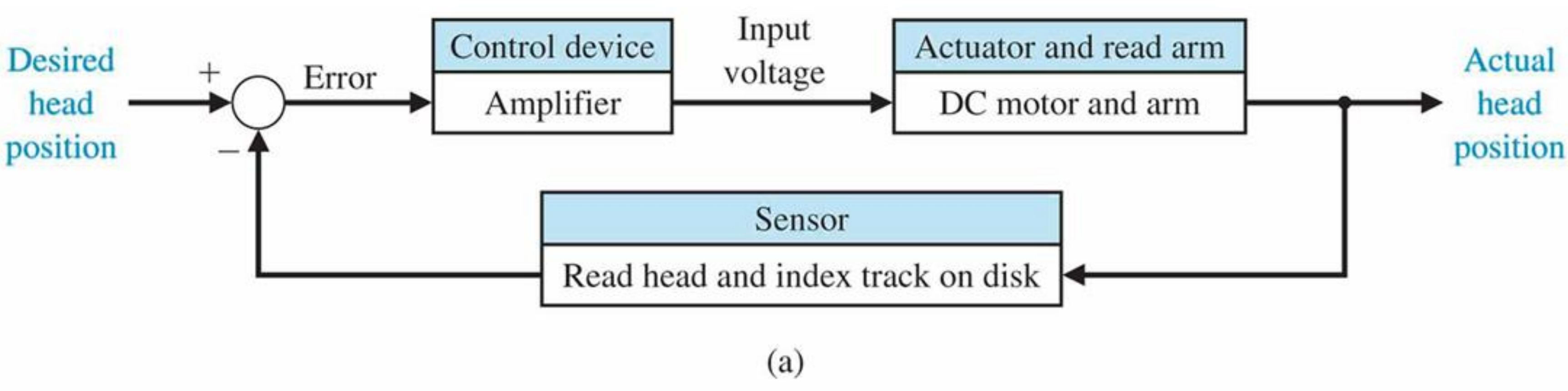


图2.76 磁盘驱动器读取系统框图模型

假定簧片是完全刚性的，不会出现明显的弯曲

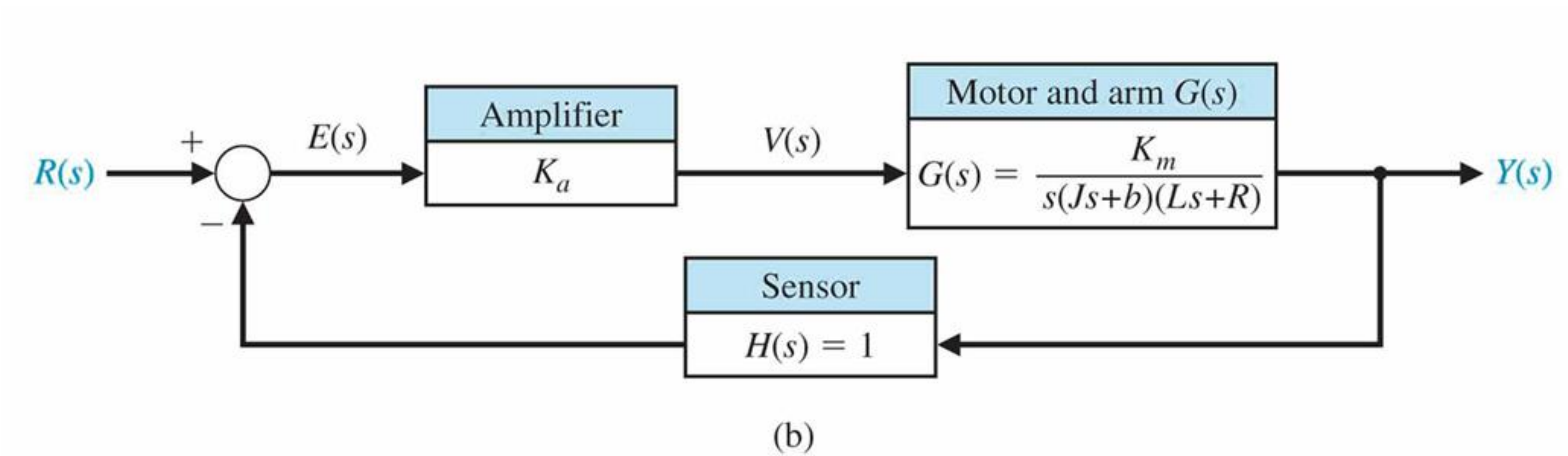


图2.76 磁盘驱动器读取系统框图模型

2.10 循序渐进设计实例：磁盘驱动读取系统

表2.10 磁盘驱动器读取系统典型参数

参数	符号	典型值
手臂与磁头的转动惯性	J	$1 N.m.s^2/rad$
摩擦系数	b	20kg/m/s
放大系数	Ka	10—100
电枢电阻	R	1Ω
电机系数	Km	5N.m/A
电枢电感	L	1mH

2.10 循序渐进设计实例：磁盘驱动读取系统

$$G(s)=\frac{K_{\mathrm{m}}}{s(Js+b)(Ls+R)}=\frac{5000}{s(s+20)(s+1000)}$$

$$G(s)=\frac{K_m/bR}{s(\tau_L s+1)(\tau s+1)}$$

其中 $\tau_L=J/b=50$ ms， $\tau=L/R=1$ ms.

由于 $\tau \ll \tau_L$ ，我们经常忽略 τ ，可得

$$G(s)\approx\frac{K_m/bR}{s(\tau_L s+1)}=\frac{0.25}{s(0.05s+1)} \quad 或 \quad G(s)=\frac{5}{s(s+20)}$$

闭环系统的传递函数为

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{5K_a}{s^2+20s+5K_a}$$

2.10 循序渐进设计实例：磁盘驱动读取系统

当 $K_a = 40$, 有 $Y(s) = \dfrac{200}{s^2 + 20s + 200} R(s)$

当 $R(s) = \dfrac{0.1}{s}$， 求得单位阶跃响应

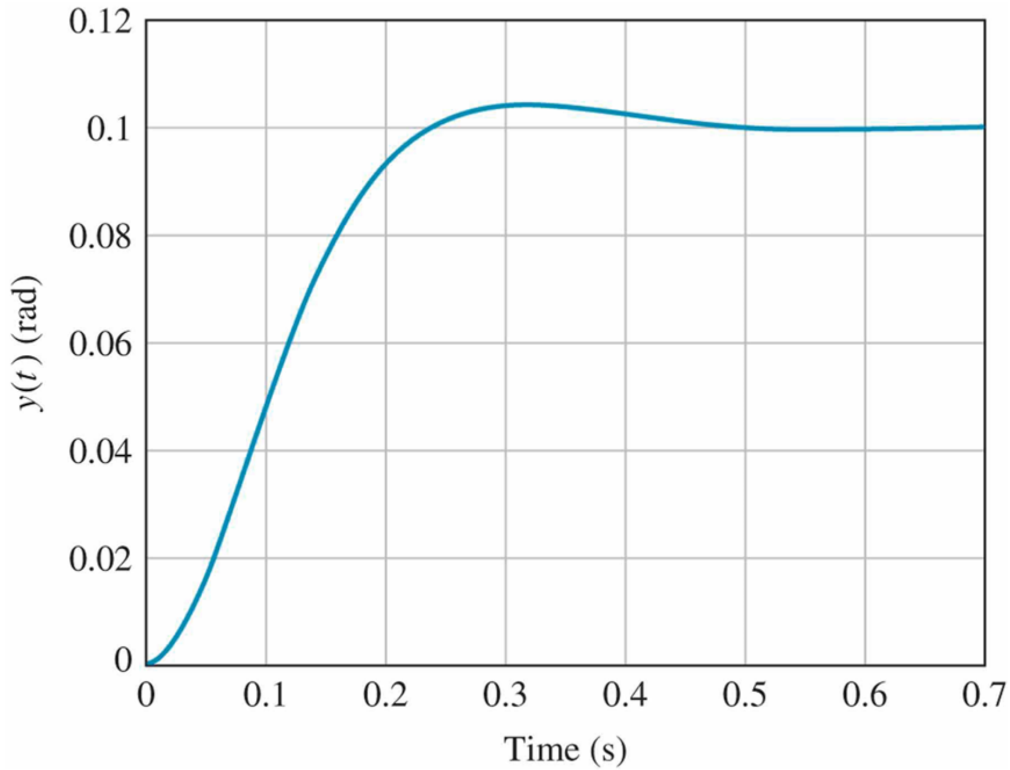


图2.78
系统阶跃响应图

[Ansys Motion新一代强大的柔性多体动力学仿真软件介绍_哔哩哔哩_bilibili]

[Flightmare- 一个灵活的四旋翼模拟器_哔哩哔哩_bilibili]

[Isaac Gym - Preview Release | NVIDIA Developer]

[[转]NVIDIA ISAAC AI 机器人全栈开发平台_哔哩哔哩_bilibili]

[预瞄驾驶员模型、carsim_哔哩哔哩_bilibili]

[使用Airsim模拟无人机飞跃张家界_哔哩哔哩_bilibili]

2.11 小结

- 会用微分方程建立系统的数学模型
- 能对非线性元件进行线性化
- 拉普拉斯变换
- 传递函数
- 方框图
- 控制系统的计算机仿真