序列的极限描述一列实数点的变化趋势.
我们需要掌握一些基本的例子:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1 \quad (a>0)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0 \quad (a>1)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0 \quad (a>1)$$

习题1.3-6

证明: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

证明: 显然 $\sqrt[n]{n}\geq 1$. 设 $\sqrt[n]{n}=1+\varepsilon_n$, 则

$$n=(1+\varepsilon_n)^n\geq\frac{n(n-1)}{2}\varepsilon_n^2,$$

所以,

$$\varepsilon_n\leq\sqrt{\frac{2}{n-1}},$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=\lim_{n\to\infty}(1+\varepsilon_n)=1.$$

以上结论等价于 $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0$.

课本中引入了一个十分重要的例子:

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n!}\right).$$

它的证明用到以下一个事实.

定理: 单调有界序列必有极限.

习题: 设 $a_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$. 证明$\{a_n\}$收敛并求出极限.

证明: $\{a_n\}$ 的收敛性是比较简单的, 注意到:

$$a_{n+1} - a_n = \left(\frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n+2}\right) - \left(\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$$
$$= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}$$
$$> \frac{2}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = 0,$$

并且 $a_n < \frac{n}{n+1} < 1$. 因为, $\{a_n\}$ 单调增加有上界, 极限存在.

如何算出 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$?

假如我们知道, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)=\gamma$ (Euler 常数), 则

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n}-\ln 2n\right) - \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$$
$$+ \ln 2$$
$$= \gamma - \gamma + \ln 2 = \ln 2.$$

但是，我们也可以用积分来处理这个问题，实际上：

$$a_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \cdots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right),$$

将它看成 $\frac{1}{1+x}$ 在 $[0,1]$ 上的黎曼和，则

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2.$$

* Euler 常数

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} - \ln n\right).$$

证明用到不等式

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} \quad (见复习-1)$$

相当于 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

考虑 $\frac{1}{n}$ 和 $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ 的差：

$$0 < \frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$< \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

记 $a_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} - \ln n$. 则

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<0,$$

$$a_n>\ln 2+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln n$$
$$=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)>0.$$

因此，$\{a_n\}$ 收敛.

参考:

Page 173, 练习 16:

(1) 利用 $\int_n^{n+1}\frac{dx}{x}$ 推出:

$$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}.$$

(2) 证明 $x_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\ln n$ 单调增加，$y_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$ 单调减小.

(3) 由于 $y_n-x_n=\frac{1}{n}\to 0$，所以

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}y_n=\gamma.$$