闭区间上连续函数的性质

（介值定理）设 f 在 $[a,b]$ 上连续，$f(a)<f(b)$。则对任意 η，$f(a)<\eta<f(b)$，存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f(\xi)=\eta$.

习题：设 f 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f([a,b])\subset[a,b]$。则存在 $\xi\in[a,b]$ s.t. $f(\xi)=\xi$.

证明：考虑 $F(x)=f(x)-x$. 则 $F(a)=f(a)-a\geq 0$, $F(b)=f(b)-b\leq 0$. 若 $F(a)=0$（或 $F(b)=0$），则 a（或 b）是 f 的不动点.

否则，设 $F(a)>0$，$F(b)<0$. 由介值定理，存在 $\xi\in(a,b)$ s.t. $F(\xi)=0$，即

$$f(\xi)=\xi.$$

参考习题1.6-4.

以上结论是 Brouwer 不动点定理的特例：记

$$D=\{x\in\mathbb{R}^n \mid x_1^2+\cdots+x_n^2\leq 1\}.$$

若 $f: D\to D$ 连续，则存在 $\xi\in D$ s.t. $f(\xi)=\xi$.

介值定理的另一个应用是用来证明：

任意一个奇数阶多项式至少有一个实根

习题1.6-2

设 $0<\varepsilon<1$. 证明对任意 y_0，方程 $y_0 = x-\varepsilon\sin x$ 的解存在且唯一.

证明：记 $f(x)=x-\varepsilon\sin x$，则 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
因此，对任意 y_0，存在 x_0 s.t.

$$f(x_0) = y_0.$$

注意到，$f(x)$ 是一个严格单调函数：设 $x_1>x_2$，则

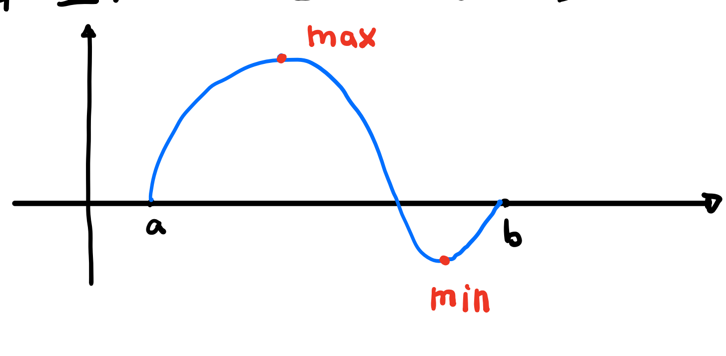
$$\begin{aligned} f(x_1)-f(x_2) &= x_1-x_2-\varepsilon(\sin x_1-\sin x_2) \\ &> x_1-x_2-\varepsilon(x_1-x_2) \\ &= (1-\varepsilon)(x_1-x_2) > 0. \end{aligned}$$

因此，x_0 是 $f(x)=y_0$ 唯一的解.

另一个性质：

(最值定理) 设 f 在 $[a,b]$ 上连续，则 f 在 $[a,b]$ 中取到最大值和最小值. 特别地，存在 $M>0$ 使得 $|f|\le M$.

最值定理出现在 Rolle 定理的证明中：



习题. 设 f 在 $[a,b]$ 上连续，$a\le x_1<x_2<\cdots<x_n\le b$. 证明存在 $\xi\in[a,b]$ 使得

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

证明：令 $g(x)=f(x)-\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$. 由于 f 连续，在 $[a,b]$ 上存在最小值点和最大值点，分别记为 c 和 d. 则

$$g(c)\le 0,\quad g(d)\ge 0.$$

若 $g(c)=0$ 或 $g(d)=0$，则取 $\xi=c$ 或 d. 否则，$g(c)<0, g(d)>0$. 由介值定理，存在 ξ 在 c 和 d 之间，s.t. $g(\xi)=0$.

若取 $x_1<x_2<\cdots<x_n$ 为 $[a,b]$ 的剖分，$x_{i+1}-x_i=\frac{b-a}{n}$，则

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}(b-a)=f(\xi_n)(b-a)$$

$$\to\int_a^b f(x)dx.$$

当 ξ_n 在 $[a,b]$ 中变动，并收敛到某一点 ξ 时，我们就得到了积分中值定理：

$$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a).$$