§1 实数的算术

$$\sqrt{ab} \le \frac{1}{2}(a+b)$$

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \ge 2$$

$$a^2+b^2 \ge 2ab \qquad (a,b>0)$$

习题 1.1-6

设 $a>1$，证明：$0<\sqrt[n]{a}-1<\frac{a-1}{n}$.

证明：记 $x=\sqrt[n]{a}$，则

$$x-1=\frac{x^n-1}{x^{n-1}+\cdots+x+1}<\frac{x^n-1}{n},$$

即 $\sqrt[n]{a}-1<\frac{a-1}{n}$.

推论：设 $a>0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

Bernoulli 不等式：设 $h>0$，则

$$(1+h)^n>1+nh.$$

这是因为，

$$\begin{aligned}(1+\alpha)^n-1 &= (1+\alpha-1)\left[1+(1+\alpha)+\cdots+(1+\alpha)^{n-1}\right]\\ &= \alpha\left[1+(1+\alpha)+\cdots+(1+\alpha)^{n-1}\right]\\ &> n\alpha\end{aligned}$$

以上不等式也可写成：$\left(1+\frac{h}{n}\right)^n>1+h$，

相当于 $\sqrt[n]{1+h}<1+\frac{h}{n}$；记 $a=1+h$，则

$$\sqrt[n]{a} < 1 + \frac{a-1}{n}.$$

这和习题1.1-6是一致的.

我们还会经常用到Newton二项式定理:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \cdots + x^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

习题: 设 $x > -1$, $x \neq 0$, 则成立

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$$

证明: 由中值定理,

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1+\theta x}, \quad 0 < \theta < 1.$$

当 $x > 0$ 时, $1 < 1+\theta x < 1+x$, 因此,

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

当 $-1 < x < 0$ 时, $1+x < 1+\theta x < 1$, 从而

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

特别地，取 $x=\frac{1}{n}$，则

推论： $\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$

以下习题是 Bernoulli 不等式的推广.

习题：设 $x>-1$，$0<\alpha<1$，则

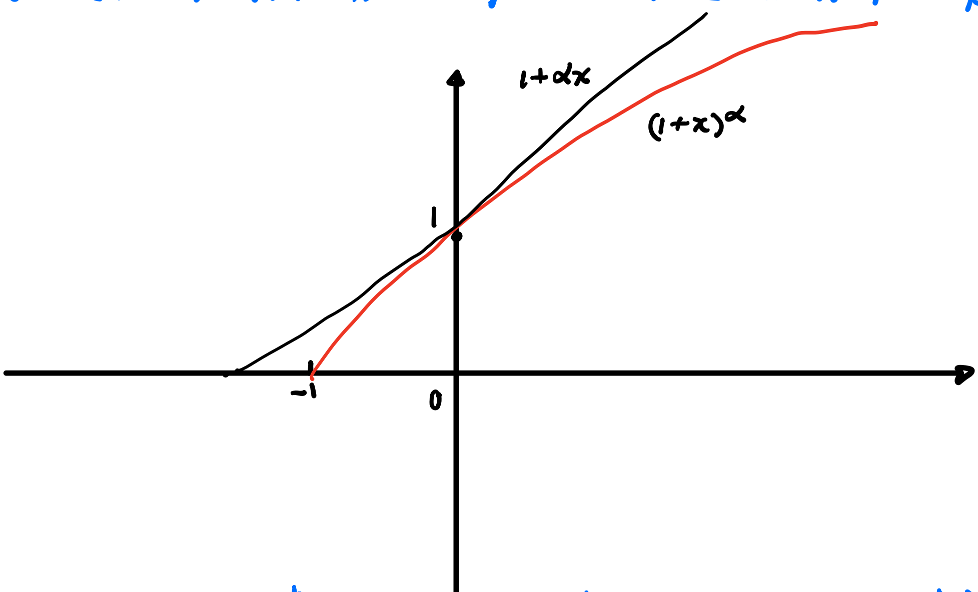
$$(1+x)^{\alpha}\leq 1+\alpha x,$$

"$=$" 成立当且仅当 $x=0$.

证明：令 $f(x)=(1+x)^{\alpha}$，则

$$f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1},\quad f''(x)=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}.$$

当 $0<\alpha<1$ 时，我们发现 $f''(x)<0$，这说明 $f(x)$ 是一个上凸函数.



注意到，$1+\alpha x$ 表示 $(x, f(x))$ 在 $(0,1)$ 处的切线方程，由下凸函数的性质，

$$f(x)\leq 1+\alpha x,$$

"$=$" 成立当且仅当 $x=0$.

Page 63，练习3.

求出满足 $\sqrt{1+x} < 1+\frac{1}{2}x$ 的全部 x.

首先，$x>-1$. 当 $x\neq 0$ 时，

$$1+x < \left(1+\frac{1}{2}x\right)^2 = 1+x+\frac{1}{4}x^2.$$

因此，以上不等式成立的条件是 $x>-1$，$x\neq 0$.

$\sqrt{1+x}$ 与 $1+\frac{1}{2}x$ 的误差：

$$1+\frac{1}{2}x-\sqrt{1+x} = \frac{\frac{1}{4}x^2}{1+\frac{1}{2}x+\sqrt{1+x}} \approx \frac{1}{4}x^2 \quad (x\to 0)$$

Page 216，练习2.

当 $x\geq 0$，$\sqrt{x+1}-\sqrt{x} = \dfrac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}$，其中 $0<\theta(x)<1$.

进一步，估计 $\theta(x)$ 的取值：

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}},$$

$$\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)^2 = 2x+1+2\sqrt{x(x+1)} = 4(x+\theta(x)),$$

$$\Rightarrow \quad 4\theta(x) = 2\sqrt{x(x+1)}+1-2x.$$

由于 $x < \sqrt{x(x+1)} < x+\frac{1}{2}$，故

$$1 < 4\theta(x) < 2(x+\frac{1}{2})+1-2x = 2,$$

即 $$\frac{1}{4} < \theta(x) < \frac{1}{2}.$$

当 $x\to 0$ 时，显然 $\theta(x)\to\frac{1}{4}$. 当 $x\to\infty$ 时，

$$\sqrt{x(x+1)}-x = \frac{x}{\sqrt{x(x+1)}+x} \to \frac{1}{2}.$$

所以，$\lim\limits_{x\to\infty}\theta(x) = \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x(x+1)}-x\right) = \frac{1}{2}.$