



2024年春季 (1-18周) , F207 周一8:00-9:40

(1-9周) F207周三8:00-9:40

# 复变函数

朱炬波 13973168169  
zhujubo@mail.sysu.edu.cn

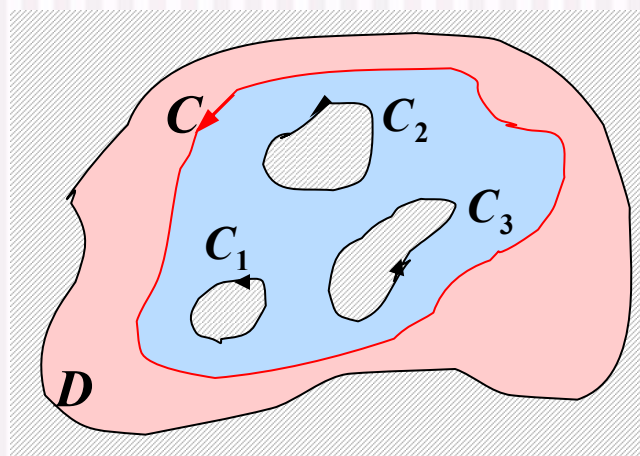


## 复习：复合闭路定理

设  $C$  为多连通域  $D$  内的一条简单闭曲线,  $C_1, C_2, \dots, C_n$  是在  $C$  内部的简单闭曲线, 它们互不包含也互不相交, 并且以  $C, C_1, C_2, \dots, C_n$  为边界的区域全含于  $D$ , 如果  $f(z)$  在  $D$  内解析, 那末

$$(1) \oint_C f(z) dz = \sum_{k=1}^n \oint_{C_k} f(z) dz,$$

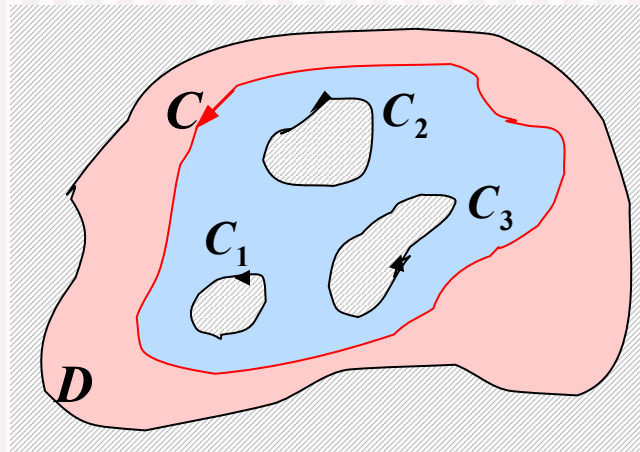
其中  $C$  及  $C_k$  均取正方向;



## 复习：复合闭路定理

$$(2) \oint_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

这里  $\Gamma$  为由  $C, C_1, C_2, \dots, C_n$  组成的复合闭路  
(其方向是： $C$  按逆时针进行,  $C_1, C_2, \dots, C_n$  按  
顺时针进行).



## 复习：复合闭路定理

常用结论：

$$\oint_{\Gamma} \frac{1}{(z-a)^{n+1}} dz = \begin{cases} 2\pi i, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

使用复合闭路定理时, 要注意曲线的方向.



## 复习：原函数与不定积分

称  $f(z)$  的原函数的一般表达式  $F(z) + c$  ( $c$  为任意常数) 为  $f(z)$  的不定积分, 记作

$$\int f(z)dz = F(z) + c.$$

### 定理三 (类似于牛顿-莱布尼兹公式)

如果函数  $f(z)$  在单连通域  $B$  内处处解析,  $G(z)$  为  $f(z)$  的一个原函数, 那末

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = G(z_1) - G(z_0)$$

这里  $z_0, z_1$  为域  $B$  内的两点.





# 第五节 柯西积分公式

- 一、问题的提出
- 二、柯西积分公式
- 三、典型例题
- 四、小结与思考



# 一、问题的提出

设  $B$  为一单连通域,  $z_0$  为  $B$  中一点.

如果  $f(z)$  在  $B$  内解析, 那末  $\frac{f(z)}{z - z_0}$  在  $z_0$  不解析.

所以  $\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$  一般不为零,

$C$  为  $B$  内围绕  $z_0$  的闭曲线.

根据闭路变形原理知,

该积分值不随闭曲线  $C$  的变化而改变, 求这个值.



积分曲线  $C$  取作以  $z_0$  为中心, 半径为很小的  $\delta$  的正向圆周  $|z - z_0| = \delta$ ,

由  $f(z)$  的连续性,

在  $C$  上函数  $f(z)$  的值将随着  $\delta$  的缩小而逐渐接近于它在圆心  $z_0$  处的值,

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz \text{ 将接近于 } \oint_C \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz. \quad (\delta \text{ 缩小})$$

$$\oint_C \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz = f(z_0) \oint_C \frac{1}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0).$$





## 二、柯西积分公式

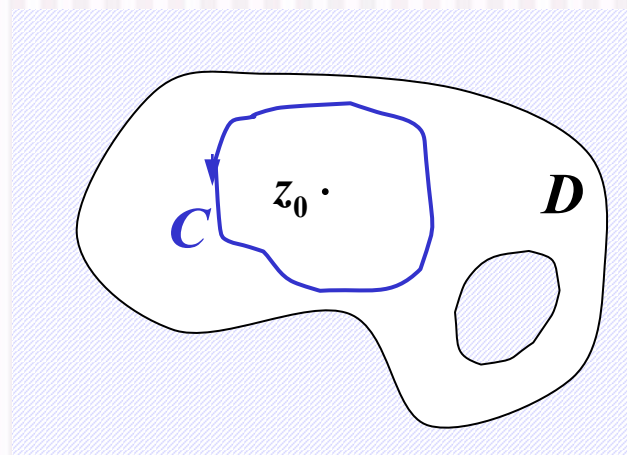
### 定理

如果函数  $f(z)$  在区域  $D$  内处处解析,  $C$  为  $D$  内的任何一条正向简单闭曲线, 它的内部完全含于  $D$ ,  $z_0$  为  $C$  内任一点, 那末

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

证 因为  $f(z)$  在  $z_0$  连续,

则  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0,$

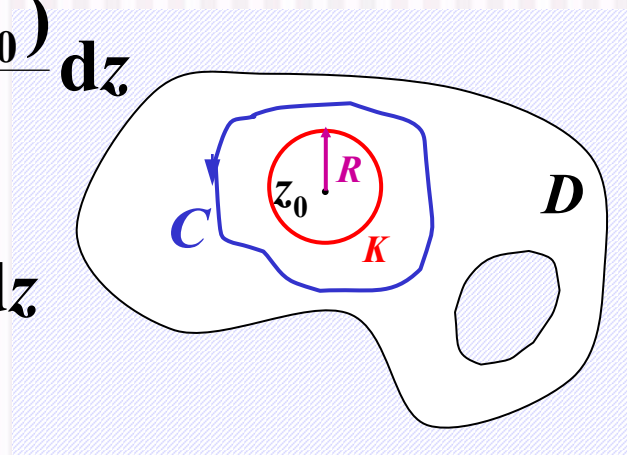


当  $|z - z_0| < \delta$  时,  $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ .

设以  $z_0$  为中心, 半径为  $R$  ( $R < \delta$ ) 的正向圆周  $K$ :

$|z - z_0| = R$  全在  $C$  的内部,

$$\begin{aligned} \text{则 } \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz &= \oint_K \frac{f(z)}{z - z_0} dz \\ &= \oint_K \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz + \oint_K \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \\ &= 2\pi i f(z_0) + \oint_K \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \end{aligned}$$



$$\left| \oint_K \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| \leq \oint_K \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} ds$$

$$< \frac{\varepsilon}{R} \oint_K ds = 2\pi \varepsilon.$$

上不等式表明, 只要  $R$  足够小, 左端积分的模就可以任意小,

根据闭路变形原理知, 左端积分的值与  $R$  无关, 所以只有在对所有的  $R$  积分值为零时才有可能.

[证毕]

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

柯西积分公式

柯西介绍



## 关于柯西积分公式的说明:

(1) 把函数在  $C$  内部任一点的值用它在边界上的值表示. (这是解析函数的又一特征)

(2) 公式不但提供了计算某些复变函数沿闭路积分的一种方法, 而且给出了解析函数的一个积分表达式. (这是研究解析函数的有力工具)

(3) 一个解析函数在圆心处的值等于它在圆周上的平均值. 如果  $C$  是圆周  $z = z_0 + R \cdot e^{i\theta}$ ,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + R \cdot e^{i\theta}) d\theta.$$



### 三、典型例题

例1 求下列积分

$$(1) \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=4} \frac{\sin z}{z} dz; \quad (2) \oint_{|z|=4} \left( \frac{1}{z+1} + \frac{2}{z-3} \right) dz.$$

解 (1)  $\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=4} \frac{\sin z}{z} dz$

因为  $f(z) = \sin z$  在复平面内解析,

$z=0$  位于  $|z|<4$  内,





由柯西积分公式

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=4} \frac{\sin z}{z} dz = \frac{1}{2\pi i} \cdot 2\pi i \cdot \sin z \Big|_{z=0} = 0;$$

$$(2) \oint_{|z|=4} \left( \frac{1}{z+1} + \frac{2}{z-3} \right) dz.$$

$$= \oint_{|z|=4} \frac{1}{z+1} dz + \oint_{|z|=4} \frac{2}{z-3} dz = 2\pi i \cdot 1 + 2\pi i \cdot 2$$

$$= 6\pi i.$$



例2 计算积分  $\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z-1} dz$ .

解 因为  $f(z) = e^z$  在复平面内解析,

$z=1$  位于  $|z| < 2$  内,

由柯西积分公式

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z-1} dz = 2\pi i \cdot e^z \Big|_{z=1} = 2e\pi i.$$



例3 计算积分  $\oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z(z^2+1)} dz.$

解  $\frac{1}{z(z^2+1)} = \frac{1}{z(z+i)(z-i)} = \frac{\boxed{\frac{1}{z(z+i)}}}{z-i} = f(z) \quad z_0 = i,$

因为  $f(z)$  在  $|z-i| \leq \frac{1}{2}$  内解析, 由柯西积分公式

$$\begin{aligned} \oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z(z^2+1)} dz &= \oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{z(z+i)}}{z-i} dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{z(z+i)} \Big|_{z=i} \\ &= 2\pi i \cdot \frac{1}{2i^2} = -\pi i. \end{aligned}$$



例4 设  $C$  表示正向圆周  $x^2 + y^2 = 3$ ,

$$f(z) = \int_C \frac{3\xi^2 + 7\xi + 1}{\xi - z} d\xi, \text{ 求 } f'(1+i).$$

解 根据柯西积分公式知, 当  $z$  在  $C$  内时,

$$f(z) = 2\pi i \cdot (3\xi^2 + 7\xi + 1) \Big|_{\xi=z} = 2\pi i(3z^2 + 7z + 1),$$

故  $f'(z) = 2\pi i(6z + 7)$ , 而  $1+i$  在  $C$  内,

所以  $f'(1+i) = 2\pi(-6 + 13i)$ .



例5 计算积分  $\oint_C \frac{\sin \frac{\pi}{4} z}{z^2 - 1} dz$ , 其中  $C: (1) |z + 1| = \frac{1}{2}$ ;

解 (1) 
$$\oint_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{\sin \frac{\pi}{4} z}{z^2 - 1} dz = \oint_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{\frac{\sin \frac{\pi}{4} z}{z-1}}{z+1} dz$$

$$= 2\pi i \cdot \left. \frac{\sin \frac{\pi}{4} z}{z-1} \right|_{z=-1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi i;$$





例5 计算积分  $\oint_C \frac{\sin \frac{\pi}{4} z}{z^2 - 1} dz$ , 其中  $C: (2) |z - 1| = \frac{1}{2}$ ;

解 (2) 
$$\oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{\sin \frac{\pi}{4} z}{z^2 - 1} dz = \oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{\sin \frac{\pi}{4} z}{z+1} dz$$

$$= 2\pi i \cdot \left. \frac{\sin \frac{\pi}{4} z}{z+1} \right|_{z=1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi i;$$



例5 计算积分  $\oint_C \frac{\sin \frac{\pi}{4} z}{z^2 - 1} dz$ , 其中  $C: (3) |z| = 2$ .

解 (3)  $\oint_{|z|=2} \frac{\sin \frac{\pi}{4} z}{z^2 - 1} dz$  由闭路复合定理, 得

$$\begin{aligned} \oint_{|z|=2} \frac{\sin \frac{\pi}{4} z}{z^2 - 1} dz &= \oint_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{\sin \frac{\pi}{4} z}{z^2 - 1} dz + \oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{\sin \frac{\pi}{4} z}{z^2 - 1} dz \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \pi i + \frac{\sqrt{2}}{2} \pi i = \sqrt{2} \pi i. \end{aligned}$$



例6 求积分  $\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz$ , 并证明  $\int_0^\pi e^{\cos \theta} \cos(\sin \theta) d\theta = \pi$ .

解 根据柯西积分公式知,

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz = 2\pi i \cdot e^z \Big|_{z=0} = 2\pi i;$$

$$\text{令 } z = re^{i\theta}, \quad (-\pi \leq \theta \leq \pi) \quad |z| = r = 1,$$

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{re^{i\theta}}}{re^{i\theta}} \cdot ire^{i\theta} d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} ie^{e^{i\theta}} d\theta$$



$$= \int_{-\pi}^{\pi} i e^{e^{i\theta}} d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} i e^{\cos \theta + i \sin \theta} d\theta$$

$$= 2i \int_0^{\pi} e^{\cos \theta} \cos(\sin \theta) d\theta - \int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos \theta} \sin(\sin \theta) d\theta$$

因为  $\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz = 2\pi i,$

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz = 2i \int_0^{\pi} e^{\cos \theta} \cos(\sin \theta) d\theta - \int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos \theta} \sin(\sin \theta) d\theta$$

比较两式得  $\int_0^{\pi} e^{\cos \theta} \cos(\sin \theta) d\theta = \pi.$



课堂练习 计算积分  $\oint_{|z|=3} \frac{e^z}{z(z^2-1)} dz.$

答案 有三个奇点  $z=0, z=1, z=-1$

$$\oint_{|z|=3} \frac{e^z}{z(z^2-1)} dz = \pi i(e + e^{-1} - 2).$$





## 四、小结与思考

柯西积分公式是复积分计算中的重要公式, 它的证明基于柯西-古萨基本定理, 它的重要性在于: 一个解析函数在区域内部的值可以用它在边界上的值通过积分表示, 所以它是研究解析函数的重要工具.

柯西积分公式: 
$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$



## 思考题

柯西积分公式是对有界区域而言的, 能否推广到无界区域中?



## 思考题答案

可以. 但对函数  $f(z)$  要做一些限制,

设  $f(z)$  在  $G$  及边界  $C$  上解析,

并且当  $z \rightarrow \infty$  时,  $f(z)$  一致趋于零

(即  $\forall \varepsilon > 0, \exists R > 0$ , 使当  $|z| > R$  时,  $|f(z)| < \varepsilon$ )

则对  $G$  内任意一点  $\beta$ , 有 
$$f(\beta) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C^-} \frac{f(z)}{z - \beta} dz,$$

其中积分方向应是顺时针方向.



# 作业

**P100, 7 (1、 2、 3、 6、 7) , 9**

