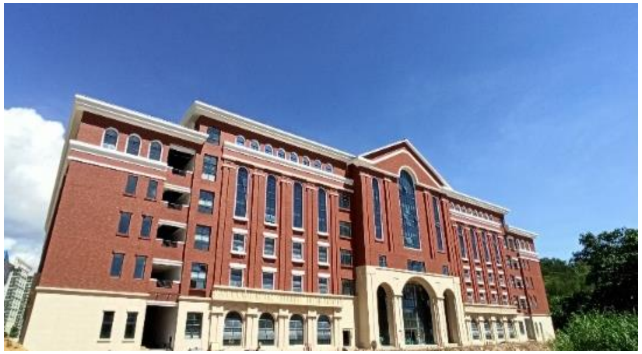
2024年春季（1-18周），F207 周一8:00-9:40

（1-9周）F207周三8：00-9：40

# 复变函数


朱炬波 13973168169
zhujubo@mail.sysu.edu.cn

# 第二章　解析函数

## 第二节　函数解析的充要条件

- 一、主要定理
- 二、典型例题
- 三、小结

# 一、主要定理

**定理一**

设函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 定义在区域 $D$ 内，则 $f(z)$ 在 $D$ 内一点 $z=x+yi$ 可导的充要条件是：$u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在点 $(x,y)$ 可微，并且在该点满足柯西一黎曼方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

**证** (1) 必要性.

设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 定义在区域 $D$ 内,

且 $f(z)$ 在 $D$ 内一点 $z=x+yi$ 可导,

则对于充分小的 $|\Delta z|=|\Delta x+i\Delta y|>0$,

有 $f(z+\Delta z)-f(z)=f'(z)\Delta z+\rho(\Delta z)\Delta z$,

其中 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\rho(\Delta z)=0$,

令 $f(z+\Delta z)-f(z)=\Delta u+i\Delta v$,

$f'(z)=a+ib$, $\rho(\Delta z)=\rho_1+i\rho_2$,

所以 $\Delta u + i\Delta v =$

$$(a+ib)\cdot(\Delta x + i\Delta y) + (\rho_1 + i\rho_2)\cdot(\Delta x + i\Delta y)$$

$$= (a\Delta x - b\Delta y + \rho_1\Delta x - \rho_2\Delta y)$$

$$+ i(b\Delta x + a\Delta y + \rho_2\Delta x + \rho_1\Delta y)$$

于是 $\Delta u = a\Delta x - b\Delta y + \rho_1\Delta x - \rho_2\Delta y,$

$$\Delta v = b\Delta x + a\Delta y + \rho_2\Delta x + \rho_1\Delta y.$$

因为 $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \rho(\Delta z) = 0,$ 所以 $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \rho_1 = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \rho_2 = 0,$

由此可知 $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在点 $(x,y)$ 可微,

且满足方程 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}.$

(2) 充分性. 由于

$$f(z+\Delta z)-f(z)=u(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-u(x,y)$$
$$+i[v(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-v(x,y)]$$
$$=\Delta u+i\Delta v,$$

又因为 $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在点 $(x,y)$ 可微,

于是 $\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y,$

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_3 \Delta x + \varepsilon_4 \Delta y,$$

其中 $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \varepsilon_k = 0, \quad (k = 1,2,3,4)$

因此 $f(z + \Delta z) - f(z) =$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\Delta y + (\varepsilon_1 + i\varepsilon_3)\Delta x + (\varepsilon_2 + i\varepsilon_4)\Delta y.$$

由柯西一黎曼方程 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}, \quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}=i^2\dfrac{\partial v}{\partial x},$

$f(z+\Delta z)-f(z)=$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)(\Delta x+i\Delta y)+(\varepsilon_1+i\varepsilon_3)\Delta x+(\varepsilon_2+i\varepsilon_4)\Delta y.$$

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}+(\varepsilon_1+i\varepsilon_3)\frac{\Delta x}{\Delta z}+(\varepsilon_2+i\varepsilon_4)\frac{\Delta y}{\Delta z}.$$

因为 $\left|\dfrac{\Delta x}{\Delta z}\right| \le 1, \quad \left|\dfrac{\Delta y}{\Delta z}\right| \le 1,$

$$\lim_{\Delta z \to 0}\left[(\varepsilon_1 + i\varepsilon_3)\frac{\Delta x}{\Delta z} + (\varepsilon_2 + i\varepsilon_4)\frac{\Delta y}{\Delta z}\right] = 0,$$

所以 $f'(z) = \lim\limits_{\Delta z \to 0}\dfrac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x}.$

即函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在点 $z = x + yi$ 可导.

[证毕]

根据定理一, 可得函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在点 $z=x+yi$ 处的导数公式：

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}.$$

函数在区域 $D$ 内解析的充要条件

**定理二** 函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在其定义域 $D$ 内解析的充要条件是： $u(x,y)$与 $v(x,y)$ 在 $D$ 内可微, 并且满足柯西—黎曼方程.

## 解析函数的判定方法:

(1) 如果能用求导公式与求导法则证实复变函数 $f(z)$ 的导数在区域 $D$ 内处处存在,则可根据解析函数的定义断定 $f(z)$ 在 $D$ 内是解析的.

(2) 如果复变函数 $f(z)=u+iv$ 中 $u,v$ 在 $D$ 内的各一阶偏导数都存在、连续(因而 $u,v(x,y)$ 可微)并满足 $\mathrm{C-R}$ 方程,那么根据解析函数的充要条件可以断定 $f(z)$ 在 $D$ 内解析.

# 二、典型例题

**例1** 判定下列函数在何处可导, 在何处解析:

(1) $w=\bar{z}$;　　(2) $f(z)=e^{x}(\cos y+i\sin y)$;

(3) $w=z\,\mathrm{Re}(z)$.

**解** (1) $w=\bar{z}$,　　$u=x$,　$v=-y$,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-1.$$

不满足柯西一黎曼方程,

故 $w=\bar{z}$ 在复平面内处处不可导,处处不解析.

(2) $f(z)=\boxed{e^x(\cos y+i\sin y)}$ 指数函数

$$u=e^x\cos y,\quad v=e^x\sin y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-e^x\sin y,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=e^x\sin y,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=e^x\cos y,$$

四个偏导数均连续

即 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}.$

故 $f(z)$ 在复平面内处处可导,处处解析.

且 $f'(z)=e^x(\cos y+i\sin y)=f(z).$

(3) $w = z\,\mathrm{Re}(z) = x^2 + xyi, \qquad u = x^2, \quad v = xy,$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = x.$$

四个偏导数均连续

仅当 $x = y = 0$ 时, 满足柯西一黎曼方程,

故函数 $w = z\,\mathrm{Re}(z)$ 仅在 $z = 0$ 处可导,

在复平面内处处不解析.

**例2** 设 $f(z)=x^2+axy+by^2+i(cx^2+dxy+y^2)$, 问常数 $a,b,c,d$ 取何值时, $f(z)$ 在复平面内处处解析?

**解** $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x+ay,\qquad \dfrac{\partial u}{\partial y}=ax+2by,$

$\dfrac{\partial v}{\partial x}=2cx+dy,\qquad \dfrac{\partial v}{\partial y}=dx+2y,$

欲使 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x},$

$2x+ay=dx+2y,\quad -2cx-dy=ax+2by,$

所求 $a=2,\ b=-1,\ c=-1,\ d=2.$

**例3** 设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域 $D$ 内解析,并且 $v=u^2$,求 $f(z)$.

**解** $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=2u\dfrac{\partial u}{\partial y},$ (1)

$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}=-2u\dfrac{\partial u}{\partial x},$ (2)

将(2)代入(1)得 $\dfrac{\partial u}{\partial x}(4u^2+1)=0,$

由 $(4u^2+1)\neq 0 \Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial x}=0,$

由(2)得 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=0,$ 所以 $u=c$ (常数),

于是 $f(z)=c+ic^2$ (常数).

**例4** 如果 $f'(z)$ 在区域 $D$ 内处处为零,则 $f(z)$ 在区域 $D$ 内为一常数.

**证** $$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}\equiv 0,$$

故 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}\equiv 0,$$

所以 $u=$常数, $v=$常数,

因此 $f(z)$ 在区域 $D$ 内为一常数.

参照以上例题可进一步证明:

如果 $f(z)$ 在区域 $D$ 内解析,则以下条件彼此等价.

(1) $f(z)=$ 恒取常值;　　(2) $f'(z)=0$;

(3) $|f(z)|=$ 常数;　　(4) $\overline{f(z)}$ 解析;

(5) $\mathrm{Re}[f(z)]=$ 常数;　　(6) $\mathrm{Im}[f(z)]=$ 常数;

(7) $v=u^2$;　　(8) $\arg f(z)=$ 常数.

**例5** 设 $f(z)=u+iv$ 为一解析函数，且 $f'(z)\neq 0$，那末曲线族 $u(x,y)=c_1$ 与 $v(x,y)=c_2$ 必相互正交，其中 $c_1$，$c_2$ 为常数.

**证** 因为 $f'(z)=\dfrac{\partial v}{\partial y}-\dfrac{1}{i}\dfrac{\partial u}{\partial y}\neq 0$，

所以 $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ 与 $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ 不全为零，

如果在曲线的交点处 $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ 与 $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ 都不为零，

根据隐函数求导法则，

曲线族 $u(x,y)=c_1$ 与 $v(x,y)=c_2$ 中任一条曲线的斜率分别为 $k_1=-\dfrac{u_x}{u_y}$, $k_2=-\dfrac{v_x}{v_y}$,

根据柯西一黎曼方程得

$$k_1\cdot k_2=\left(-\frac{u_x}{u_y}\right)\cdot\left(-\frac{v_x}{v_y}\right)=\left(-\frac{v_y}{u_y}\right)\cdot\left(\frac{u_y}{v_y}\right)=-1,$$

故曲线族 $u(x,y)=c_1$ 与 $v(x,y)=c_2$ 相互正交.

如果 $u_y$ 和 $v_y$ 中有一个为零,则另一个必不为零,两族中的曲线在交点处的切线一条是水平的,另一条是铅直的,它们仍然相互正交.

# 三、小结

在本课中我们得到了一个重要结论—函数解析的充要条件:

$u(x,y)$与$v(x,y)$在$D$内可微,并且满足柯西-黎曼方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

掌握并能灵活应用柯西—黎曼方程.

# 作业

P66，2、7、8、9