2024年春季（1-18周），F207 周一8:00-9:40

（1-9周）F207周三8：00-9：40

复变函数

朱炬波 13973168169
zhujubo@mail.sysu.edu.cn



第二节 柯西—古萨基本定理

- 一、问题的提出
- 二、基本定理
- 三、典型例题
- 四、小结与思考

一、问题的提出

观察上节例1,

被积函数 $f(z)=z$ 在复平面内处处解析,

此时积分与路线无关.

观察上节例4, 被积函数当 $n=0$ 时为 $\dfrac{1}{z-z_0}$,

它在以 z_0 为中心的圆周 C 的内部不是处处解析的,

此时 $\oint_c \dfrac{1}{z-z_0}\mathrm{d}z = 2\pi i \neq 0.$

虽然在除去 z_0 的 C 的内部函数处处解析，
但此区域已不是单连通域.

观察上节例2, 被积函数 $f(z)=\mathrm{Re}(z)=x$,

由于不满足柯西一黎曼方程，故而在复平面内处处不解析.此时积分值与路径有关。

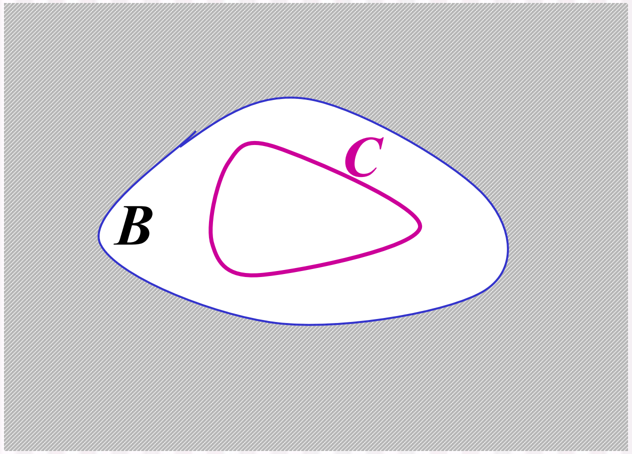
由以上讨论可知, 积分是否与路线有关, 可能决定于被积函数的解析性及区域的连通性.

二、基本定理

柯西—古萨基本定理

如果函数 $f(z)$ 在单连通域 B 内处处解析，那么函数 $f(z)$ 沿 B 内的任何一条封闭曲线 C 的积分为零：

$$\oint_c f(z)\mathrm{d}z = 0.$$



定理中的 C 可以不是简单曲线.

此定理也称为**柯西积分定理**.

关于定理的说明:

(1) 如果曲线 C 是区域 B 的边界, 函数 $f(z)$ 在 B 内与 C 上解析, 即在闭区域 $\overline{B}=B+C$ 上解析, 那末

$$\oint_c f(z)\mathrm{d}z=0.$$

(2) 如果曲线 C 是区域 B 的边界, 函数 $f(z)$ 在 B 内解析, 在闭区域 $\overline{B}=B+C$ 上连续, 那末定理仍成立.

三、典型例题

例1 计算积分 $\oint_{|z|=1} \dfrac{1}{2z-3}\mathrm{d}z.$

解 函数 $\dfrac{1}{2z-3}$ 在 $|z|\le 1$ 内解析,

根据柯西－古萨定理, 有

$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{2z-3}\mathrm{d}z = 0.$$

例2 证明 $\oint_{c}(z-\alpha)^{n}\mathrm{d}z=0 \quad (n\neq -1)$, 其中 C 是任意闭曲线.

证 (1)当 n 为正整数时, $(z-\alpha)^{n}$ 在 z 平面上解析,

由柯西－古萨定理, $\oint_{c}(z-\alpha)^{n}\mathrm{d}z=0.$

(2)当 n 为负整数但不等于 -1 时,

$(z-\alpha)^{n}$ 在除点 α 的整个 z 平面上解析,

情况一： 若 C 不包围 α 点,

$(z-\alpha)^n$ 在 C 围成的区域内解析,

由柯西一古萨定理, $\oint_c (z-\alpha)^n \mathrm{d}z = 0;$

情况二： 若 C 包围 α 点,

由上节例4可知, $\oint_c (z-\alpha)^n \mathrm{d}z = 0.$

例3 计算积分 $\displaystyle\oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z(z^2+1)}\mathrm{d}z.$

解 $\displaystyle\frac{1}{z(z^2+1)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+i} + \frac{1}{z-i}\right),$

因为 $\dfrac{1}{z}$ 和 $\dfrac{1}{z+i}$ 都在 $|z-i| \le \dfrac{1}{2}$ 上解析,

根据柯西一古萨定理得

$$\oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z(z^2+1)}\mathrm{d}z = \oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{2}\frac{1}{z+i} - \frac{1}{2}\frac{1}{z-i}\right)\mathrm{d}z$$

$$= \boxed{\oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z}\mathrm{d}z - \frac{1}{2}\oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z+i}\mathrm{d}z} - \frac{1}{2}\oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z-i}\mathrm{d}z$$

$$= 0$$

$$= -\frac{1}{2}\oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z-i}\mathrm{d}z = -\frac{1}{2}\cdot 2\pi i = -\pi i.$$

四、小结与思考

通过本课学习，重点掌握柯西－古萨基本定理:

如果函数 $f(z)$ 在单连通域 B 内处处解析，那末函数 $f(z)$ 沿 B 内的任何一条封闭曲线 C 的积分为零：$\oint_c f(z)\mathrm{d}z = 0.$

并注意定理成立的条件.

思考题

应用柯西–古萨定理应注意什么?

思考题答案

(1) 注意定理的条件“单连通域”.

反例：$f(z)=\dfrac{1}{z}$ 在圆环域 $\dfrac{1}{2}<|z|<\dfrac{3}{2}$ 内;

(2) 注意定理的不能反过来用.

即不能由 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z=0$, 而说 $f(z)$ 在 C 内处处解析.

反例：$f(z)=\dfrac{1}{z^2}$ 在 $|z|=1$ 内.

作业

P99，1、3、5、6