2024年春季（1-18周）， F207 周一8:00-9:40

（1-9周）F207周三8：00-9：40

中山大學 SUN YAT-SEN UNIVERSITY

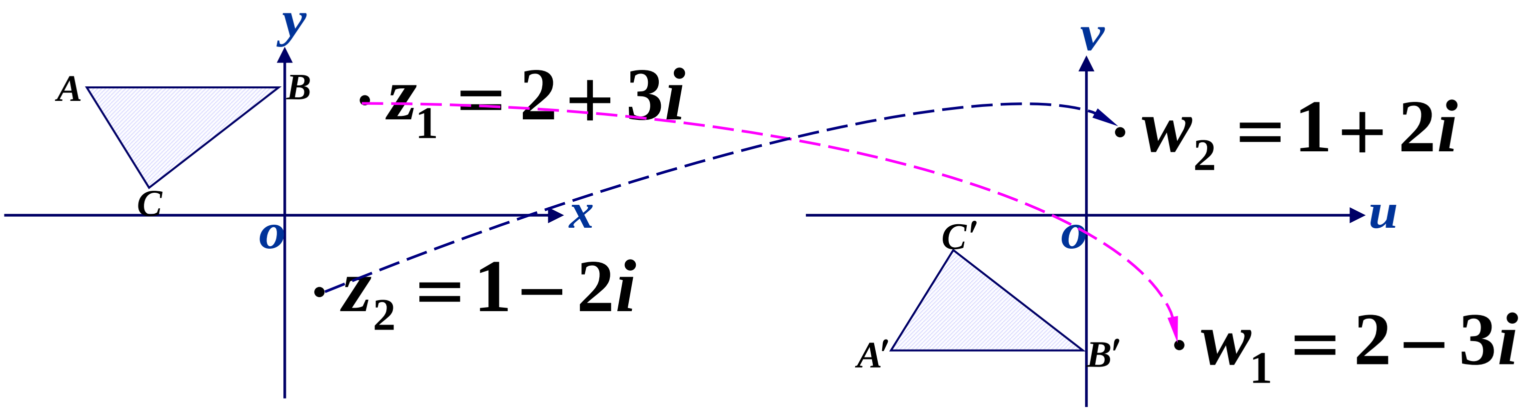
复变函数

朱炬波 13973168169
zhujubo@mail.sysu.edu.cn

第一章介绍了两个特殊的映射:

(1) 函数 $w=\bar{z}$ 构成的映射.

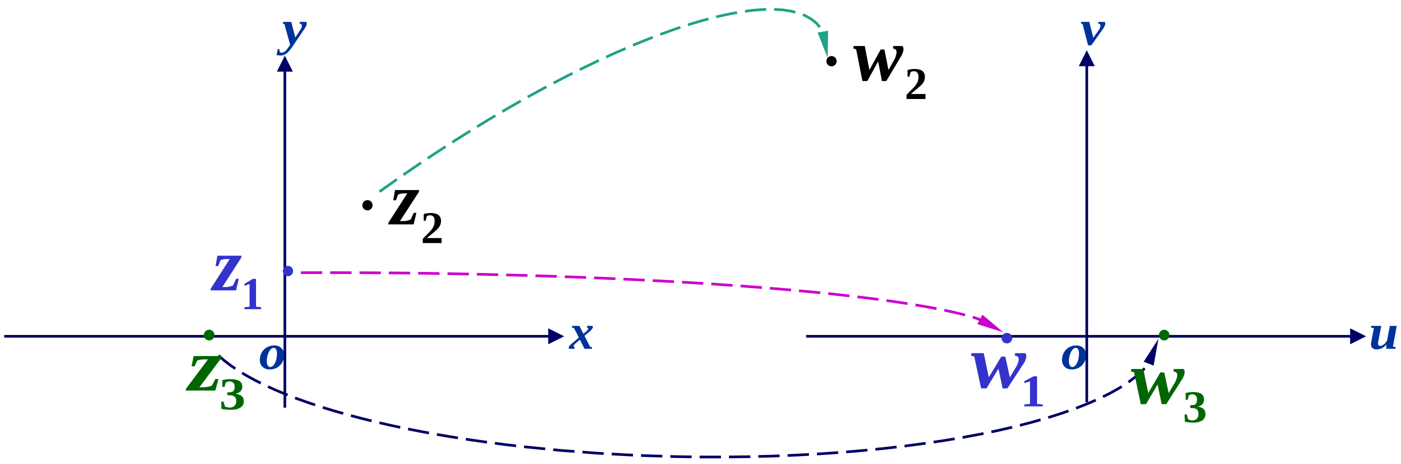
将 z 平面上的点 $z=a+ib$ 映射成 w 平面上的点 $w=a-ib$.



$z_1\to w_1,\quad z_2\to w_2,\qquad \Delta ABC\to\Delta A'B'C'.$

(2) 函数 $w=z^2$ 构成的映射.

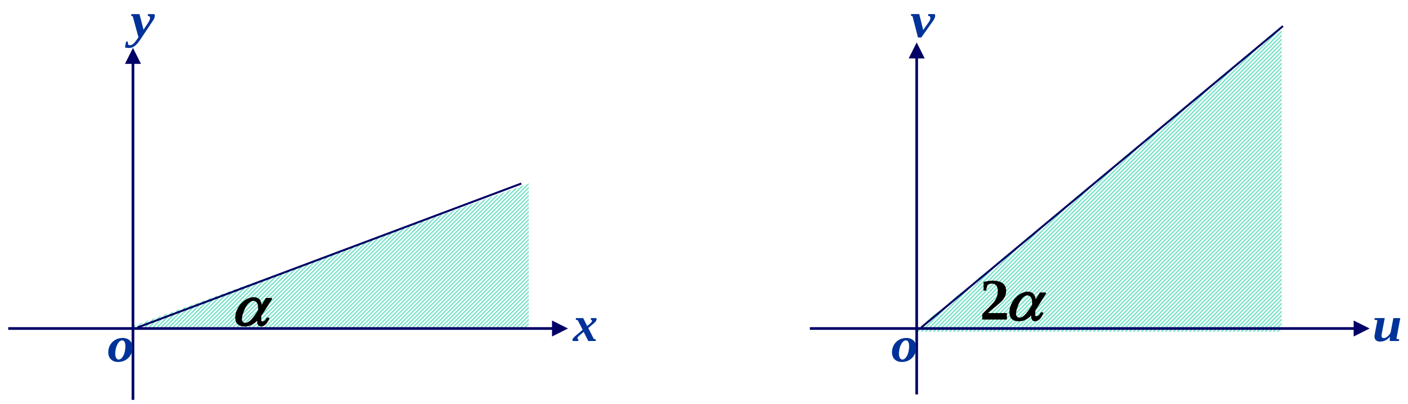
显然将 z 平面上的点 $z_1=i, z_2=1+2i, z_3=-1$ 映射成 w 平面上的点 $w_1=-1, w_2=-3+4i, w_3=1$.



(2) 函数 $w=z^2$ 构成的映射.

根据复数的乘法公式可知,

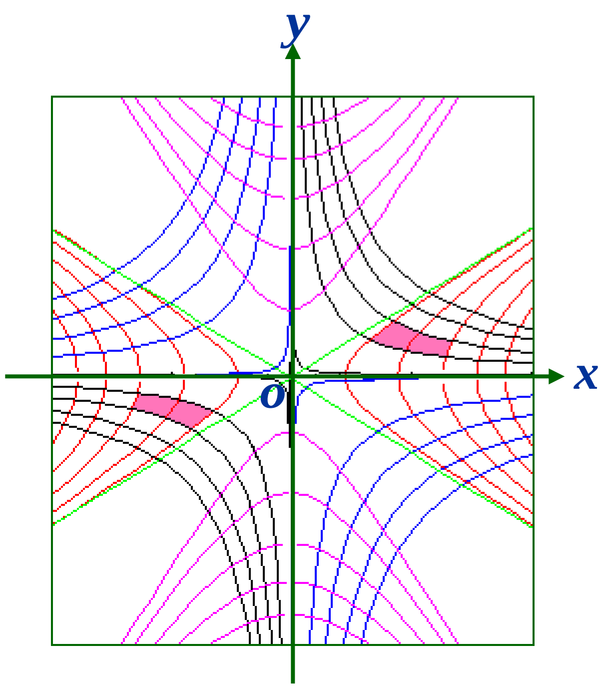
映射 $w=z^2$ 将 z 的辐角增大一倍.

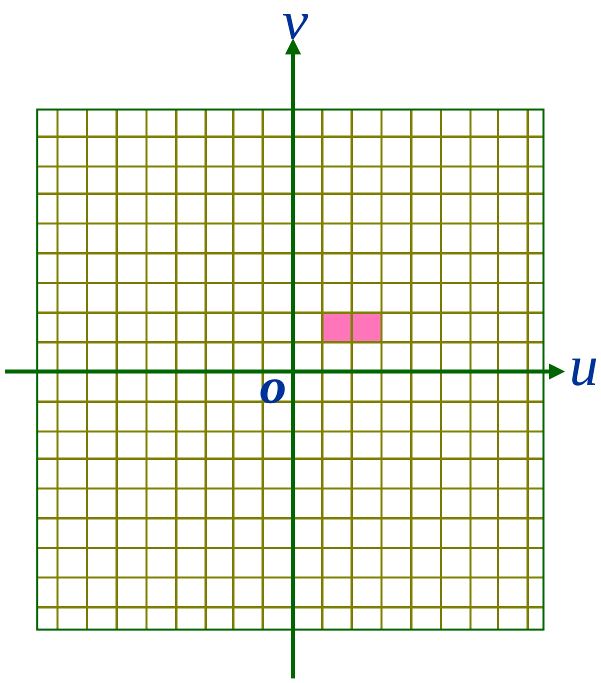


将 z 平面上与实轴交角为 α 的角形域映射成 w 平面上与实轴交角为 2α 的角形域.

(2) 函数 $w = z^2$ 构成的映射.

将第一图中两块阴影部分映射成第二图中同一个长方形.





(2) 函数 $w = z^2$ 构成的映射.

直线 $x = \lambda$ 的象的参数方程为:

$u = \lambda^2 - y^2, \quad v = 2\lambda y. \quad (y$ 为参数)

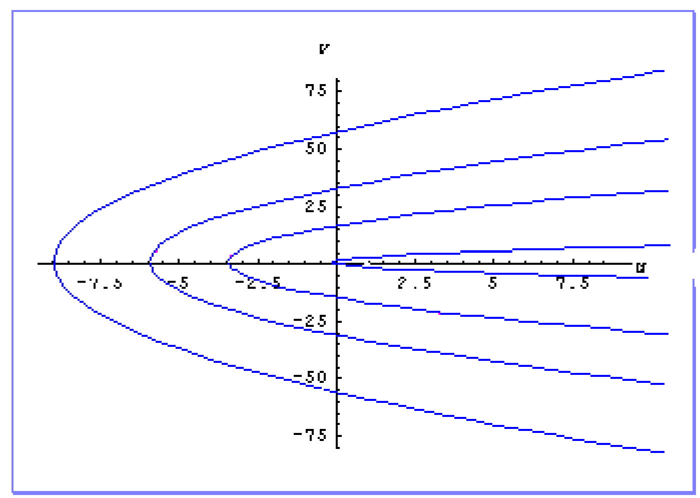
消去参数 y 得: $\quad v^2 = 4\lambda^2(\lambda^2 - u),$

以原点为焦点,开口向左的抛物线.(图中红色曲线)

同理直线 $y = \mu$ 的象为:

$$v^2 = 4\mu^2(\mu^2 + u),$$

以原点为焦点,开口相右的抛物线.(图中蓝色曲线)



第一节　共形映射的概念

- 一、两曲线的夹角
- 二、解析函数导数的几何意义
- 三、共形映射的概念
- 四、小结与思考

一、两曲线的夹角

z平面内的有向连续曲线 C 可表示为:

$$z = z(t),\ (\alpha \le t \le \beta)$$

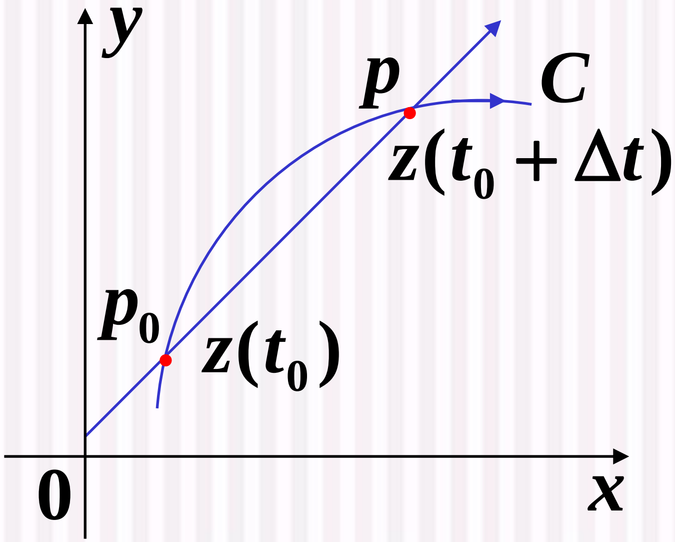
正向: t 增大时, 点 z 移动的方向.

如果规定:

割线 p_0p正向对应于 t

增大的方向, 那么 p_0p

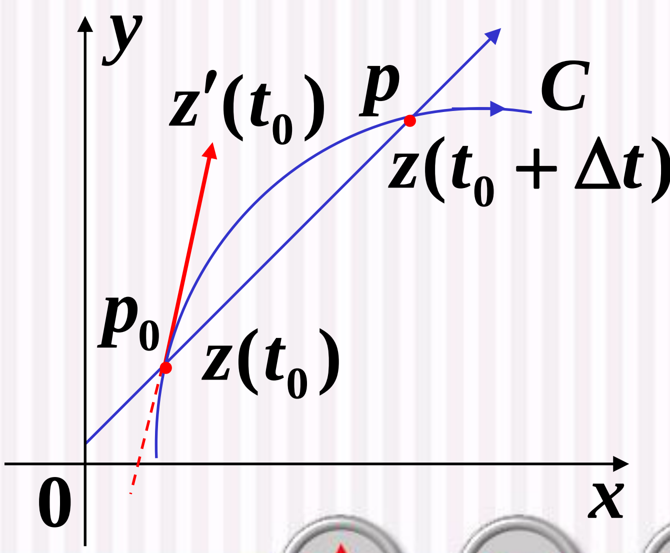
与 $\dfrac{z(t_0+\Delta t)-z(t_0)}{\Delta t}$同向.



当 $p \xrightarrow{\text{沿}C} p_0$ 时,

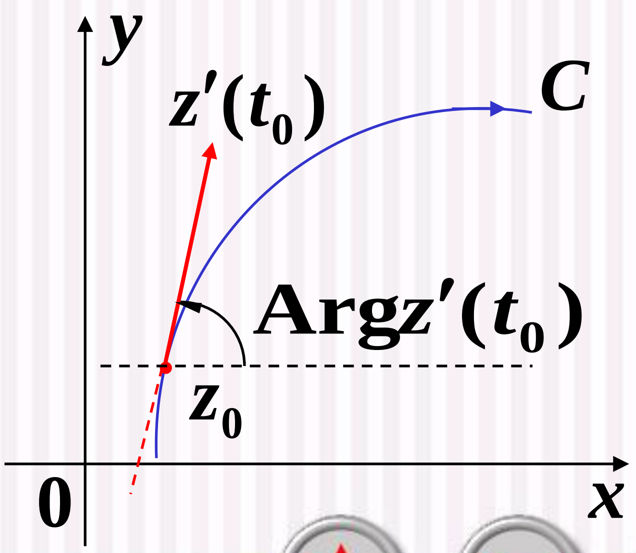
$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{z(t_0 + \Delta t) - z(t_0)}{\Delta t} = z'(t_0)$$ 方向与 C 一致.

$p_0 p \longrightarrow C$上 p_0 处切线

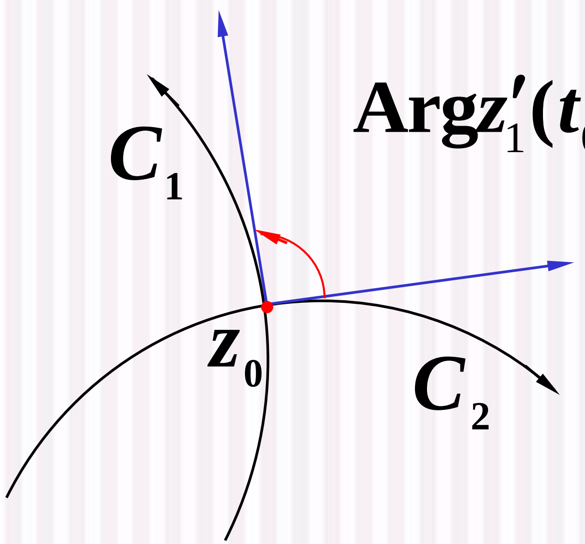


若规定$z'(t_0)$的方向(起点为z_0)为C上点z_0处切线的正向, 则有

1. $\text{Arg}z'(t_0)$就是C上点z_0处的切线的正向与x轴正向之间的夹角.



2. 相交于一点的两条曲线 C_1 与 C_2 正向之间的夹角,就是 C_1 与 C_2 在交点处的两条切线正向之间的夹角. $C_1 : z = z_1(t)$, $C_2 : z = z_2(t)$;



$$\operatorname{Arg} z_1'(t_0) - \operatorname{Arg} z_2'(t_0)$$

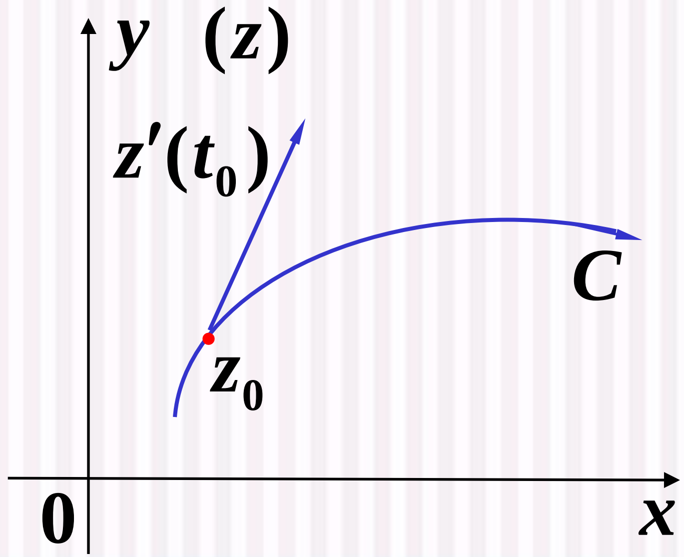
$$z_0 = z_1(t_0) = z_2(t_0).$$

二、解析函数导数的几何意义

设 $w = f(z)$ 在区域 D 内解析，$z_0 \in D$，且 $f'(z_0) \neq 0$.

1. $\mathrm{Arg} f'(z_0)$ 的几何意义

C : z 平面内过 z_0 的有向光滑曲线，参数方程：



$z = z(t),\ (\alpha \leq t \leq \beta)$;

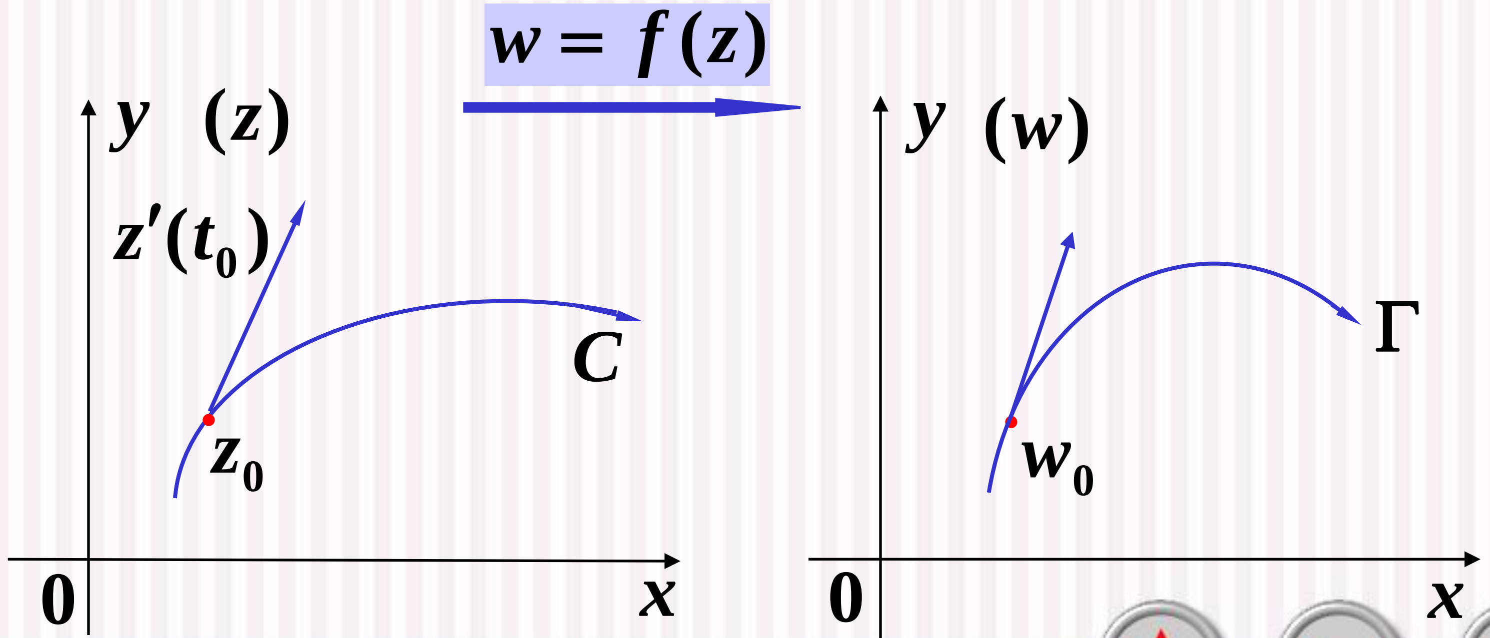
正向：t 增大的方向；

且 $z_0 = z(t_0)$,

$z'(t_0) \neq 0, \alpha < z < \beta$.

映射 $w = f(z)$ 将 C 映射成 w平面内过 $w_0 = f(z_0)$ 的有向光滑曲线 Γ, 其参数方程为

$w = f[z(t)], \alpha < z < \beta$, 正向: t 增大的方向.



因为 $w = f[z(t)] \quad (\alpha \le t \le \beta)$

所以 $w'(t_0) = w'(t)\big|_{t=t_0} = f'(z_0)z'(t_0) \neq 0,$

(即 Γ 上点 w_0 处切线存在)

$\longrightarrow \mathrm{Arg}w'(t_0) = \mathrm{Arg}f'(z_0) + \mathrm{Arg}z'(t_0)$

或 $\mathrm{Arg}f'(z_0) = \mathrm{Arg}w'(t_0) - \mathrm{Arg}z'(t_0)$

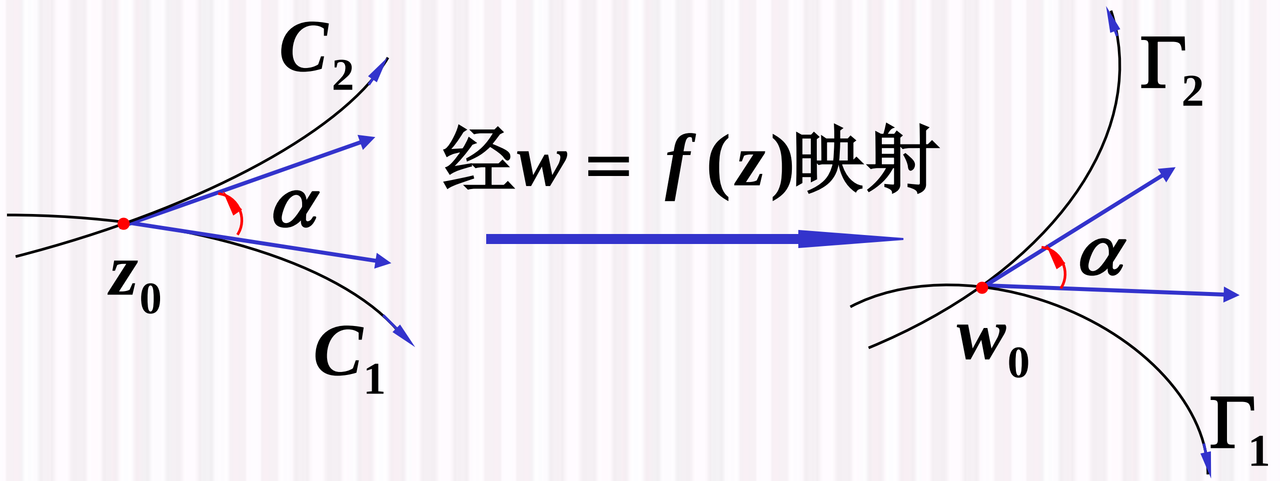
Γ在w_0处切线的倾角

C在z_0处切线的倾角

定义为:曲线C经$w = f(z)$映射后在z_0的转动角

说明: 转动角的大小与方向跟曲线 C 的形状无关.

映射 $w=f(z)$ 具有转动角的不变性.



$C_1 \longrightarrow \Gamma_1 \quad \operatorname{Arg} f'(z_0) = \operatorname{Arg} w_1'(t_0) - \operatorname{Arg} z_1'(t_0)$

$C_2 \longrightarrow \Gamma_2 \quad \operatorname{Arg} f'(z_0) = \operatorname{Arg} w_2'(t_0) - \operatorname{Arg} z_2'(t_0)$

则有

$$\underbrace{\mathrm{Arg}w_1'(t_0)-\mathrm{Arg}z_1'(t_0)}_{\Gamma_1\text{与}\Gamma_2\text{在}w_0\text{的夹角}}=\underbrace{\mathrm{Arg}w_2'(t_0)-\mathrm{Arg}z_2'(t_0)}_{C_1\text{与}C_2\text{在}z_0\text{的夹角}}$$

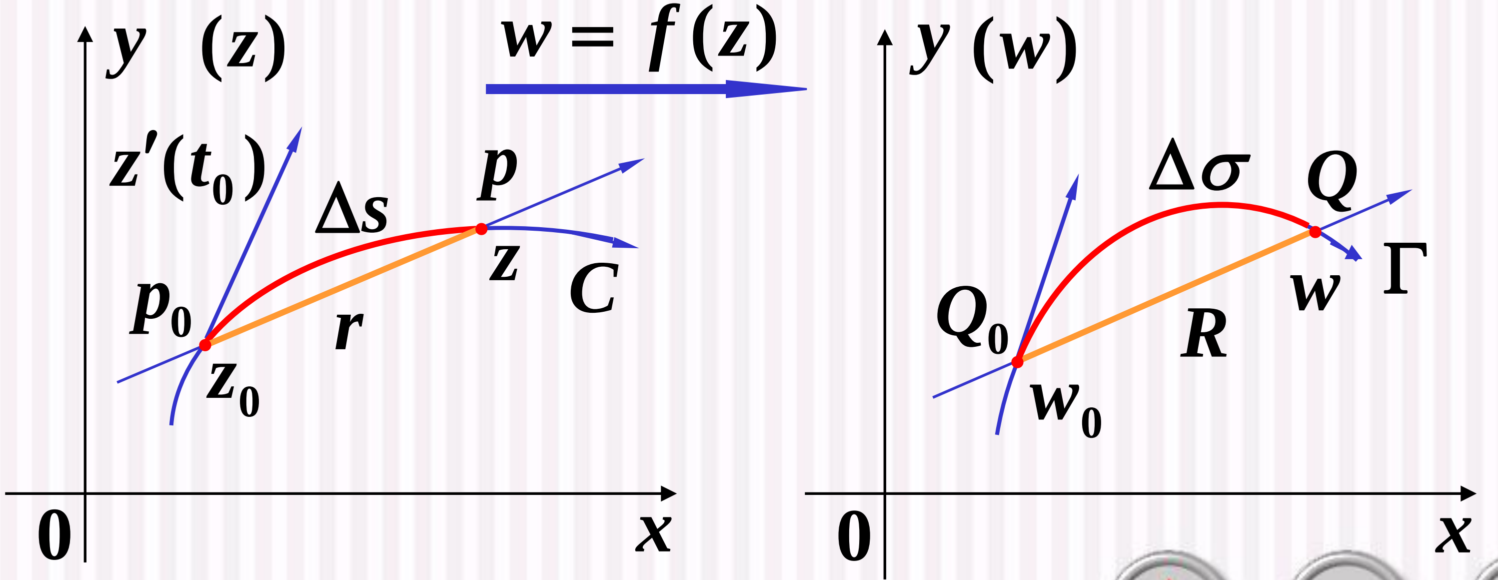
结论：相交于点 z_0 的任意两条曲线 C_1 与 C_2 之间的夹角在其大小和方向上都等同于经过 $w=f(z)$ 映射后跟 C_1 与 C_2 对应的曲线 Γ_1 与 Γ_2 之间的夹角.

映射 $w=f(z)$ 具有保持两曲线间夹角 的大小和方向不变的性质, 此性质称为**保角性**.

2. $|f'(z_0)|$的几何意义

因为 $f'(z_0)=\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{w-w_0}{z-z_0}$,

令 $z-z_0=re^{i\theta}$, $\quad w-w_0=\rho e^{i\varphi}$.



$$\frac{w-w_0}{z-z_0}=\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\frac{\rho e^{i\varphi}}{re^{i\theta}}=\frac{\Delta\sigma}{\Delta s}\cdot\frac{\rho}{\Delta\sigma}\cdot\frac{\Delta s}{r}e^{i(\varphi-\theta)},$$

所以 $|f'(z_0)|=\lim\limits_{z\to z_0}\left|\frac{\Delta\sigma}{\Delta s}\cdot\frac{\rho}{\Delta\sigma}\cdot\frac{\Delta s}{r}e^{i(\varphi-\theta)}\right|=\lim\limits_{z\to z_0}\frac{\Delta\sigma}{\Delta s}.$

称为曲线 C 在 z_0 的伸缩率

结论: $|f'(z_0)|$是经过映射 $w=f(z)$ 后通过点 z_0 的的任何曲线 C在 z_0的伸缩率,它与曲线 C的形状及方向无关. 所以这种映射又具有伸缩率的不变性.

综上所述, 有

定理一

设函数 $w = f(z)$ 在区域 D 内解析, z_0 为 D 内一点,

且 $f'(z_0) \neq 0$, 那末映射 $w = f(z)$ 在 z_0 具有两个性

质: (1) 保角性; (2) 伸缩率不变性.

三、共形映射的概念

定义 设 $w = f(z)$ 在 z_0 的邻域内是一一的,在 z_0 具有保角性和伸缩率不变性，那末 $w = f(z)$ 在 z_0 是共形的，或称 $w = f(z)$ 在 z_0 是共形映射.

也称为**第一类共形映射**.

说明: 如果映射 $w = f(z)$ 具有伸缩率不变性，

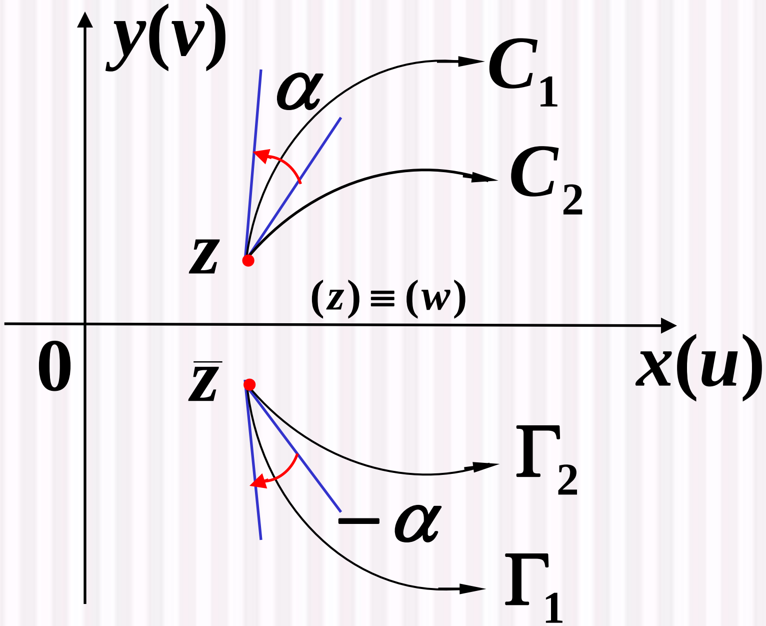
但仅保持夹角的绝对值不变而方向相反，

则称之为**第二类共形映射**.

问题:

关于实轴对称的映射 $w=\bar{z}$ 是第一类共形映射吗?

答案: 否.　　将 z 平面与 w 平面重合观察,



夹角的绝对值相同

而方向相反.

例 试求映射$w = f(z) = z^2 + 2z$在$z = -1 + 2i$处的转动角，并说明它将z平面的哪一部分放大？哪一部分缩小？

解 因 $f'(z) = 2z + 2,$ 故在$z = -1 + 2i$处,

转动角 $\arg f'(z)\big|_{z=-1+2i}$

$$= \arg(2z + 2)\big|_{z=-1+2i}$$

$$= \arg(4i) = \frac{\pi}{2},$$

伸缩率 $|f'(z)| = 2\sqrt{(x+1)^2+y^2}$,（$z = x + iy$）

当 $|f'(z)| < 1$, 即 $(x+1)^2 + y^2 < \frac{1}{4}$ 时, 缩小,

反之放大.

故在以 $z = -1$ 为中心,半径为 $\frac{1}{2}$ 的圆内缩小,

以 $z = -1$ 为中心,半径为 $\frac{1}{2}$ 的圆外放大.

四、小结与思考

熟悉解析函数导数的几何意义, 了解共形映射的概念及其重要性质.

作业：P245，4、5、8