第三章　复变函数的积分

- 一、重点与难点
- 二、内容提要
- 三、典型例题

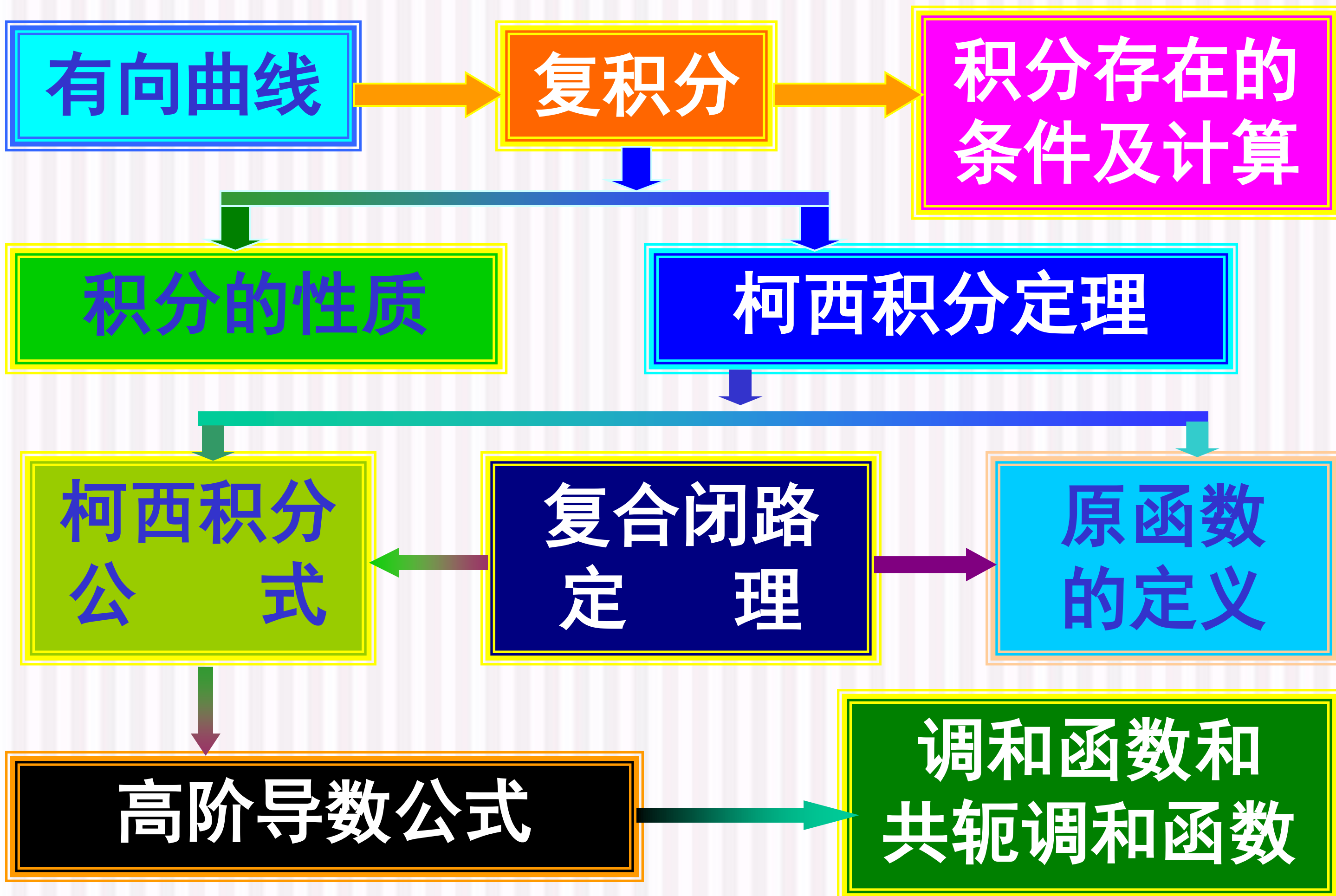
一、重点与难点

重点： 1. 复积分的基本定理；

2. 柯西积分公式与高阶导数公式

难点： 复合闭路定理与复积分的计算

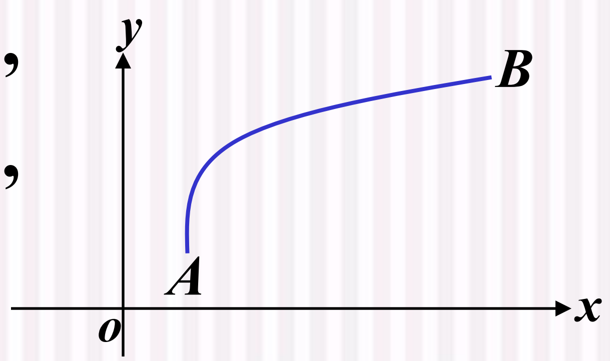
二、内容提要


有向曲线
复积分
积分存在的条件及计算
积分的性质
柯西积分定理
柯西积分公式
复合闭路定理
原函数的定义
高阶导数公式
调和函数和共轭调和函数

1. 有向曲线

设C为平面上给定的一条光滑(或按段光滑)曲线，如果选定C的两个可能方向中的一个作为正方向(或正向)，那末我们就把C理解为带有方向的曲线，称为**有向曲线**.

如果A到B作为曲线C的正向，那么B到A就是曲线C的负向，记为C^-.



2. 积分的定义

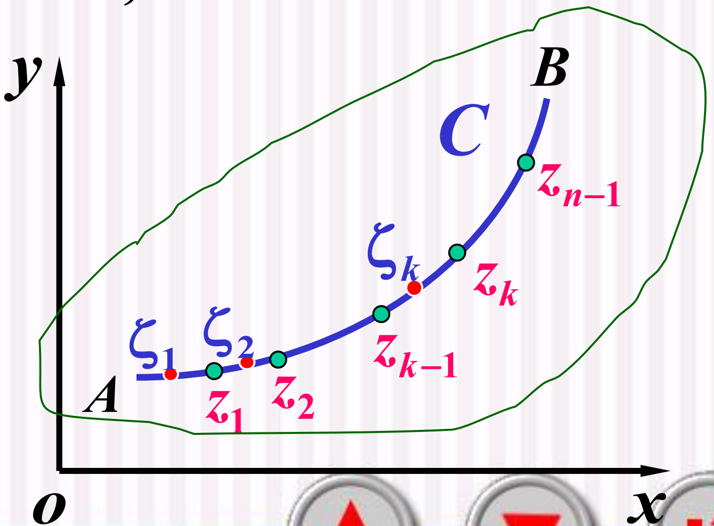
设函数 $w=f(z)$ 定义在区域 D 内, C 为区域 D 内起点为 A 终点为 B 的一条光滑的有向曲线, 把曲线 C 任意分成 n 个弧段, 设分点为

$$A=z_0, z_1, \cdots, z_{k-1}, z_k, \cdots, z_n=B,$$

在每个弧段 $\overset{\frown}{z_{k-1}z_k}$

$(k=1,2,\cdots,n)$

上任意取一点 ζ_k,



作和式 $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\cdot(z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\cdot\Delta z_k$,

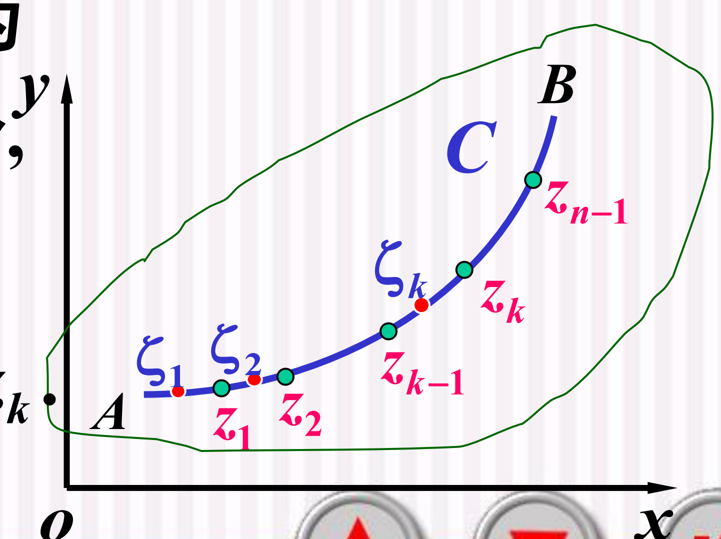
这里 $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$, $\Delta s_k = \overset{\frown}{z_{k-1}z_k}$的长度,

记 $\delta = \max\limits_{1\le k\le n}\{\Delta s_k\}$, 当 n 无限增加且 $\delta \to 0$ 时,

如果不论对 C 的分法及 ζ_k 的取法如何, S_n 有唯一极限, 那么称这极限值为函数 $f(z)$ 沿曲线 C 的积分,

记为

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\cdot\Delta z_k.$$



3. 积分存在的条件及计算

（1）化成线积分

设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 沿逐段光滑的曲线 C 连续,则积分 $\int_C f(z)\mathrm{d}z$ 存在,且

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_C u(x,y)\mathrm{d}x-v(x,y)\mathrm{d}y+i\int_C v(x,y)\mathrm{d}x+u(x,y)\mathrm{d}y.$$

（2）用参数方程将积分化成定积分

设简单光滑曲线 C 的参数方程是

$$z=z(t)=x(t)+iy(t)\qquad (a\le t\le b)$$

则 $\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_a^b f[z(t)]\cdot z'(t)\mathrm{d}t.$

4. 积分的性质

设 $f(z),g(z)$沿曲线C连续.

(1) $\int_C f(z)\mathrm{d}z = -\int_{C^-} f(z)\mathrm{d}z;$

(2) $\int_C kf(z)\mathrm{d}z = k\int_C f(z)\mathrm{d}z;$ (k为常数)

(3) $\int_C [f(z) \pm g(z)]\mathrm{d}z = \int_C f(z)\mathrm{d}z \pm \int_C g(z)\mathrm{d}z;$

(4) 设C由C_1,C_2连结而成,则

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z;$$

(5) 设曲线C的长度为L,函数$f(z)$在C上满足

$$|f(z)| \le M,\text{那末}\ \left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \le \int_C |f(z)|\mathrm{d}s \le ML.$$

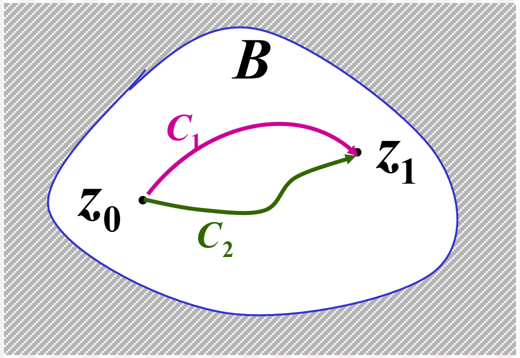
5. 柯西—古萨基本定理(柯西积分定理)

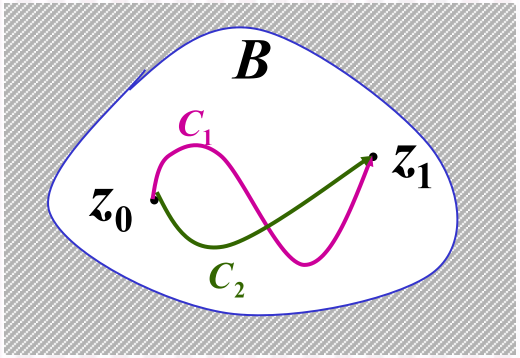
如果函数 $f(z)$ 在单连通域 B 内处处解析，那末函数 $f(z)$ 沿 B 内的任何一条封闭曲线 C 的积分为零：$\oint_c f(z)\mathrm{d}z = 0.$

定理1　如果函数 $f(z)$ 在单连通域 B 内处处解析，那末积分 $\int_C f(z)\mathrm{d}z$ 与连结起点及终点的路线 C 无关.

由定理得

$$\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z = \int_{z_0}^{z_1} f(z)\mathrm{d}z$$





定理2 如果函数 $f(z)$ 在单连通域 B 内处处解析，那末函数 $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$ 必为 B 内的一个解析函数,并且 $F'(z)=f(z)$.

6. 原函数的定义

如果函数 $\varphi(z)$ 在区域 B 内的导数为 $f(z)$，即 $\varphi'(z)=f(z)$，那末称 $\varphi(z)$ 为 $f(z)$ 在区域 B 内的原函数.

因此 $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$ 是 $f(z)$ 的一个原函数.

$f(z)$ 的任何两个原函数相差一个常数.

定理　如果函数 $f(z)$ 在单连通域 B 内处处解析，$G(z)$ 为 $f(z)$ 的一个原函数，那末

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\mathrm{d}z = G(z_1)-G(z_0)$$

这里 z_0, z_1 为域 B 内的两点.(牛顿-莱布尼兹公式)

7. 闭路变形原理

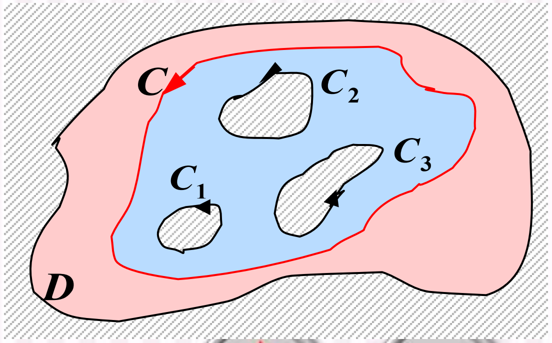
一个解析函数沿闭曲线的积分，不因闭曲线在区域内作连续变形而改变它的值.

复合闭路定理

设 C 为多连通域 D 内的一条简单闭曲线, $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 是在 C 内部的简单闭曲线, 它们互不包含也互不相交, 并且以 $C, C_1, C_2, \cdots, C_n$ 为边界的区域全含于 D,

如果 $f(z)$ 在 D 内解析,

那末



$$(1)\oint_C f(z)\mathrm{d}z=\sum_{k=1}^{n}\oint_{C_k} f(z)\mathrm{d}z,$$

$$(2)\oint_\Gamma f(z)\mathrm{d}z=0.$$

其中 C 及 C_k 均取正方向;

这里 Γ 为由 $C, C_1, C_2, \cdots, C_n$ 组成的复合闭路 (其方向是: C 按逆时针进行, $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 按顺时针进行).

8.柯西积分公式

如果函数 $f(z)$ 在区域 D 内处处解析，C 为 D 内的任何一条正向简单闭曲线，它的内部完全含于 D，z_0 为 C 内任一点，那末

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\mathrm{d}z.$$

如果 C 是圆周 $z = z_0 + R \cdot e^{i\theta}$，则有

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + R \cdot e^{i\theta})\mathrm{d}\theta.$$

一个解析函数在圆心处的值等于它在圆周上的平均值.

9. 高阶导数公式

解析函数 $f(z)$ 的导数仍为解析函数，它的 n 阶导数为：

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z \quad (n = 1,2,\cdots)$$

其中 C 为在函数 $f(z)$ 的解析区域 D 内围绕 z_0 的任何一条正向简单闭曲线，而且它的内部全含于 D.

10.调和函数和共轭调和函数

如果二元实变函数 $\varphi(x,y)$ 在区域 D 内具有二阶连续偏导数,并且满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0,$$

那末称 $\varphi(x,y)$ 为区域 D 内的调和函数.

任何在 D 内解析的函数,它的实部和虚部都是 D 内的调和函数.

共轭调和函数

设 $u(x,y)$ 为区域 D 内给定的调和函数，我们把使 $u+iv$ 在 D 内构成解析函数的调和函数 $v(x,y)$ 称为 $u(x,y)$ 的共轭调和函数.

即在 D 内满足方程 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$ 的两个调和函数中，v 称为 u 的共轭调和函数.

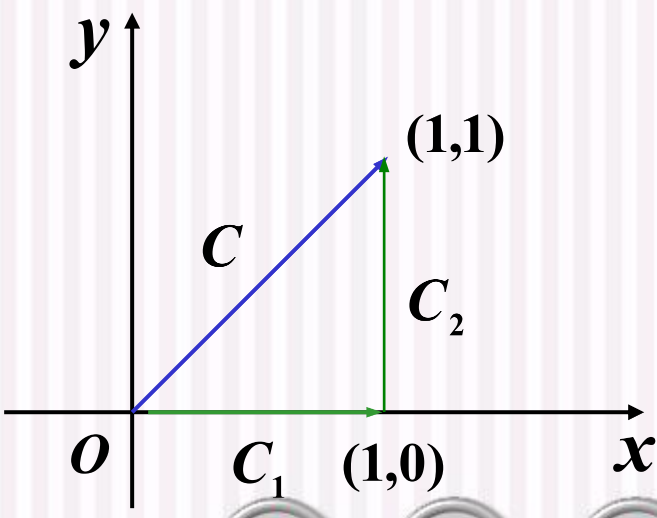
定理 区域D内的解析函数的虚部为实部的共轭调和函数.

三、典型例题

例1 计算 $\int_c \bar{z}\mathrm{d}z$ 的值，其中 C 为

1）沿从 $(0,0)$ 到 $(1,1)$ 的线段：$x=t, y=t, 0\le t\le 1$;

2）沿从 $(0,0)$ 到 $(1,0)$ 的线段：$C_1: x=t, y=0, 0\le t\le 1$,
与从 $(1,0)$ 到 $(1,1)$ 的线段 $C_2: x=1, y=t, 0\le t\le 1$
所接成的折线.



解 $$\int_c \bar{z}\mathrm{d}z = \int_0^1 (t-it)\mathrm{d}(t+it)$$

$$= \int_0^1 (t-it)(1+i)\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 2t\mathrm{d}t = 1;$$

$$2)\ \int_c \bar{z}\mathrm{d}z = \int_{c_1} \bar{z}\mathrm{d}z + \int_{c_2} \bar{z}\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^1 t\mathrm{d}t + \int_0^1 (1-it)i\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + i\right) = 1 + i.$$

说明 同一函数沿不同路径所得积分值不同.

例2 设C为圆周$|z-1|=2$证明下列不等式.

$$\left|\int_c \frac{z+1}{z-1}\mathrm{d}z\right| \le 8\pi.$$

证 因为 $|z-1|=2,$

所以 $\left|\dfrac{z+1}{z-1}\right| = \dfrac{|z-1+2|}{2} \le \dfrac{|z-1|+2}{2} = 2,$

因此 $\left|\displaystyle\int_c \frac{z+1}{z-1}\mathrm{d}z\right| \le \displaystyle\int_c \left|\frac{z+1}{z-1}\right| |\mathrm{d}z|$

$$\le 2\cdot 2\pi \cdot 2 = 8\pi.$$

例3 计算 $\oint_{|z|=1} \dfrac{\cos(z^{100}+z+1)}{z^2+2z+4}\mathrm{d}z.$

解 当 $|z| \le 1$ 时,

$$|z^2+2z+4| \ge 4-|2z|-|z|^2 \ge 4-2-1=1,$$

故由柯西积分定理得

$$\oint_{|z|=1} \frac{\cos(z^{100}+z+1)}{z^2+2z+4}\mathrm{d}z = 0.$$

例4 沿指定路径$C:|z-i|=\frac{3}{2}$计算以下积分

$$\oint_C \frac{1}{z(z^2+1)}dz;$$

解 $\frac{1}{z(z^2+1)}$在C内有两个奇点$z=0$及$z=i$分别以$z=0$及$z=i$为圆心,以$1/4$为半径作圆C_1及C_2,则由复合闭路定理有

$$\oint_C \frac{1}{z(z^2+1)}\mathrm{d}z=\oint_{C_1} \frac{1}{z(z^2+1)}\mathrm{d}z+\oint_{C_2} \frac{1}{z(z^2+1)}\mathrm{d}z$$

解法一　利用柯西-古萨基本定理及重要公式

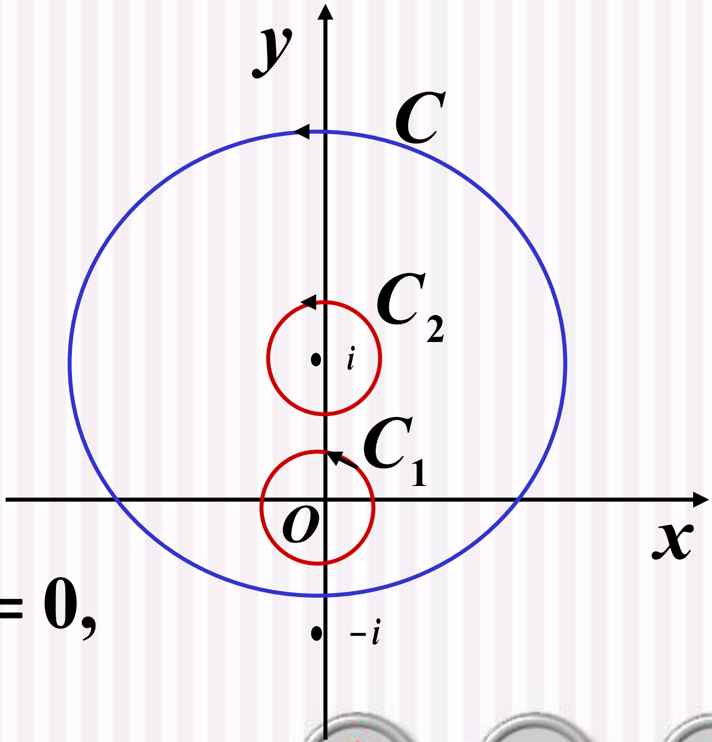
$$\frac{1}{z(z^2+1)}=\frac{1}{z}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-i}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z+i}$$

由柯西-古萨基本定理有

$$\oint_{C_1}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-i}\mathrm{d}z=0,$$

$$\oint_{C_1}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z+i}\mathrm{d}z=0,$$

$$\oint_{C_2}\frac{1}{z}\mathrm{d}z=0,\quad \oint_{C_2}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z+i}\mathrm{d}z=0,$$



$$\oint_C \frac{1}{z(z^2+1)}\mathrm{d}z = \oint_{C_1} \frac{1}{z}\mathrm{d}z - \oint_{C_2} \frac{1}{2(z-i)}\mathrm{d}z$$

$$= 2\pi i - \frac{1}{2}\cdot 2\pi i$$

$$= \pi i.$$

解法二　利用柯西积分公式

$f_1(z)=\dfrac{1}{z^2+1}$在C_1内解析，$f_2(z)=\dfrac{1}{z(z+i)}$在C_2内解析，

$$\oint_C \frac{1}{z(z^2+1)}\mathrm{d}z=\oint_{C_1}\frac{1}{z(z^2+1)}\mathrm{d}z+\oint_{C_2}\frac{1}{z(z^2+1)}\mathrm{d}z$$

$$=\oint_{C_1}\frac{1/(z^2+1)}{z}\mathrm{d}z+\oint_{C_2}\frac{1/[z(z+i)]}{z-i}\mathrm{d}z$$

$$=2\pi i\cdot f_1(0)+2\pi i f_2(i)$$

$$=2\pi i+2\pi i\left(-\frac{1}{2}\right)=\pi i.$$

例5 计算$\int_C \frac{e^z}{z(1-z)^3}\mathrm{d}z$,其中$C$是不经过0与1的闭光滑曲线.

解 分以下四种情况讨论:

1)若封闭曲线C既不包含0也不包含1,则

$$f(z)=\frac{e^z}{z(1-z)^3}$$ 在C内解析,

由柯西–古萨基本定理得 $$\int_C \frac{e^z}{z(1-z)^3}\mathrm{d}z=0.$$

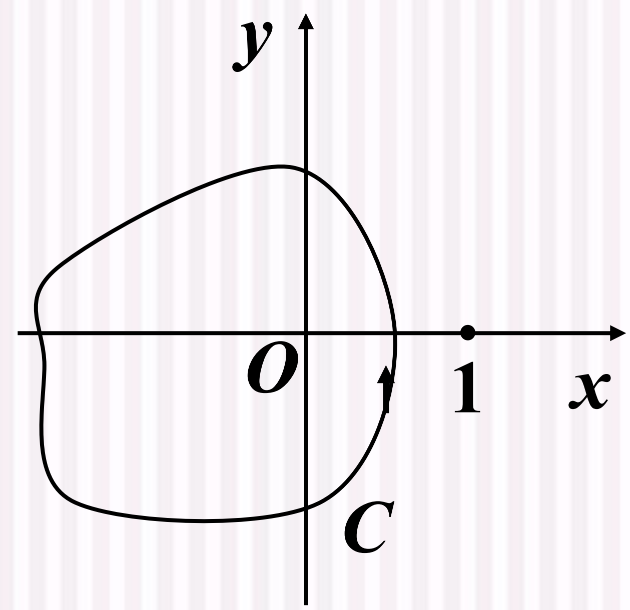
2)若封闭曲线C包含0而不包含1,则

$$f(z)=\frac{e^z}{(1-z)^3}$$ 在C内解析,由柯西积分公式得

$$\int_C \frac{e^z}{z(1-z)^3}\mathrm{d}z=\int_C \frac{e^z\big/(1-z)^3}{z}\mathrm{d}z$$

$$=2\pi i\cdot\left.\frac{e^z}{(1-z)^3}\right|_{z=0}$$

$$=2\pi i.$$



3)若封闭曲线C包含1而不包含0,则

$f(z)=\dfrac{e^z}{z}$在C内解析,　由高阶导数公式得

$$\int_C \frac{e^z}{z(1-z)^3}\mathrm{d}z=\int_C \frac{e^z/z}{(1-z)^3}\mathrm{d}z=\int_C \frac{-e^z/z}{(z-1)^3}\mathrm{d}z$$

$$=\frac{2\pi i}{2!}[-f''(1)]$$

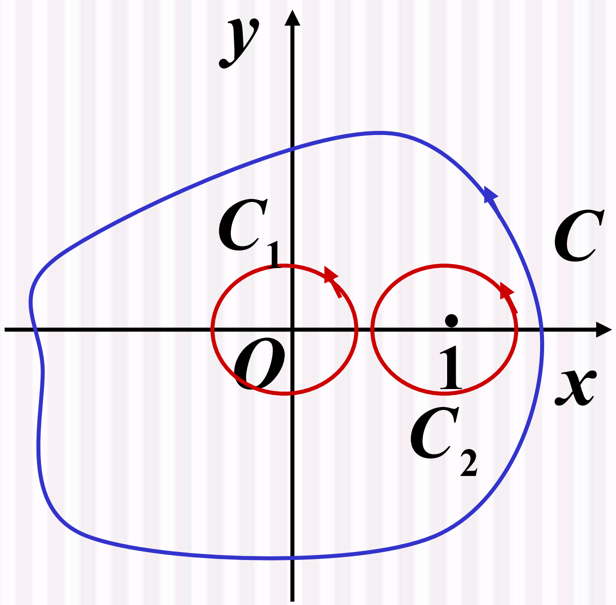
$$=\pi i\left.\frac{(z^2-2z+2)e^z}{-z^3}\right|_{z=1}=-e\pi i.$$

4)若封闭曲线C既包含1又包含0,

则分别以0,1为圆心,以$\rho > 0$为半径作圆C_1, C_2,

使C_1和C_2也在C内,且C_1与C_2互不相交,互不包含,

据复合闭路定理有



$$\oint_C \frac{e^z}{z(1-z)^3}\mathrm{d}z$$

$$= \oint_{C_1} \frac{e^z}{z(1-z)^3}\mathrm{d}z + \oint_{C_2} \frac{e^z}{z(1-z)^3}\mathrm{d}z$$

而积分$\int_{C_1}\frac{e^z}{z(1-z)^3}\mathrm{d}z$即为2)的结果$2\pi i$,

而积分$\int_{C_2}\frac{e^z}{z(1-z)^3}\mathrm{d}z$ 即为3)的结果$-e\pi i$,

所以 $\int_C\frac{e^z}{z(1-z)^3}\mathrm{d}z=(2-e)\pi i.$

例6 已知调和函数 $u(x,y)=x^2-y^2+xy$.求其共轭调和函数 $v(x,y)$ 及解析函数

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y).$$

解法一 **偏积分法**. 利用柯西—黎曼方程,

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=-(-2y+x)=2y-x,$$

得 $v=\int(2y-x)\mathrm{d}x=2xy-\dfrac{x^2}{2}+g(y),$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=2x+g'(y).$$

又 $\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x+y.$

比较两式可得：$2x + g'(y) = 2x + y$, 故 $g'(y) = y$.

即 $$g(y) = \int y\mathrm{d}y = \frac{y^2}{2} + C.$$

因此 $$v = 2xy - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + C \quad (C\text{为任意常数})$$

因而得到解析函数

$$\begin{aligned} f(z) &= u(x,y) + i(x,y) \\ &= (x^2 - y^2 + xy) + i\left(2xy - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}\right) + iC \\ &= (x^2 + 2ixy - y^2) - \frac{i}{2}(x^2 + 2ixy - y^2) + iC \\ &= \frac{z^2}{2} \cdot (2 - i) + iC. \end{aligned}$$

解法二　全微分法

因为 $\mathrm{d}v=\dfrac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y=-\dfrac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y$

$$=(2y-x)\mathrm{d}x+(2x+y)\mathrm{d}y$$

$$=2(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)+(y\mathrm{d}y-x\mathrm{d}x)$$

$$=2\mathrm{d}(xy)+\mathrm{d}\left(\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{2}\right)=\mathrm{d}\left(2xy+\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{2}\right),$$

所以 $v(x,y)=2xy+\dfrac{y^2}{2}-\dfrac{x^2}{2}+C$　(C为任意常数)

代入 $f(z)=u+iv$ 得　$f(z)=\dfrac{z^2}{2}\cdot(2-i)+iC.$

例7 已知 $u(x,y)=x^3+6x^2y-3xy^2-2y^3$ 求解析函数 $f(z)=u+iv$,使符合条件 $f(0)=0$.

解 因为 $\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}=3x^2+12xy-3y^2$,

所以 $v(x,y)=\int(3x^2+12xy-3y^2)\mathrm{d}y$

$$=3x^2y+6xy^2-y^3+g(x),$$

因为 $\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}$,

所以 $6xy+6y^2+g'(x)=-(6x^2-6xy-6y^2)$

$g'(x)=-6x^2\Rightarrow g(x)=\int-6x^2\mathrm{d}x\Rightarrow -2x^3+C$,

且 $v(x,y)=3x^2y+6xy^2-y^3-2x^3+C$

$$f(z)=x^3+6x^2y-3xy^2-2y^3$$
$$+i(3x^2y+6xy^2-y^3-2x^3+C)$$

$$=(1-2i)z^3+iC$$

$$f(0)=0 \Rightarrow C=0,$$

故 $f(z)=(1-2i)z^3.$