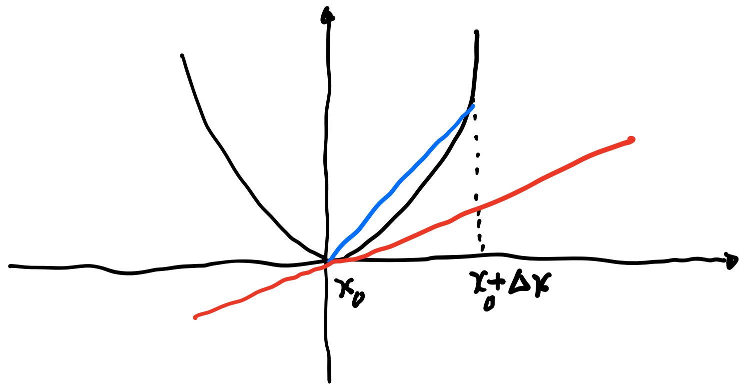
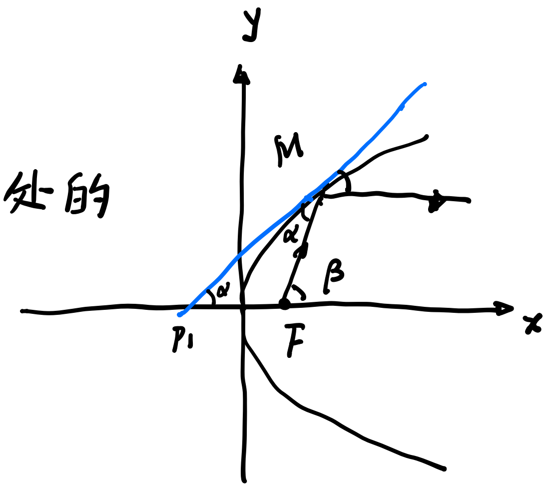
导数的几何意义:



过点 $(x_0, f(x_0))$ 的切线，斜率为 $f'(x_0)$，切线方程

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

习题 21-4



求抛物线 $y^2=2px$ 在一点处的切线斜率.

取 M 在实轴上方，则

$$y=f(x)=\sqrt{2px}.$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{p}{\sqrt{2px}}=\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{x}}$$

过点 $(x,\sqrt{2px})$ 的切线方程为:

$$(v-\sqrt{2px})=\sqrt{\frac{p}{2}}\frac{1}{\sqrt{x}}(u-x)$$

当 $v=0$ 时，$u=x-\dfrac{\sqrt{2px}}{\sqrt{\frac{p}{2}}\frac{1}{\sqrt{x}}}=-x.$

因此，切线和实轴的交点为 $P_1 = x - P$. 故

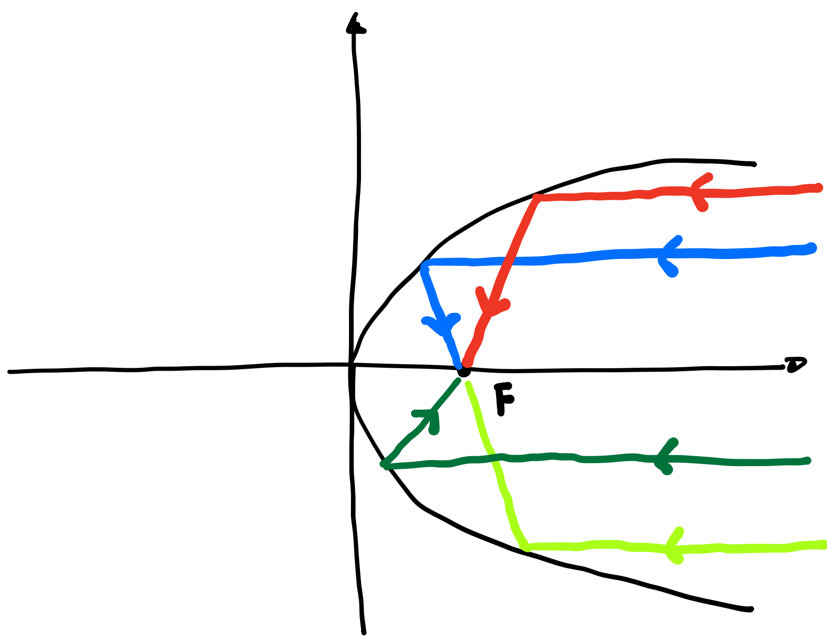
$$|P_1 - F| = \left|-x - \frac{p}{2}\right| = x + \frac{p}{2}$$

$$|F - M| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + 2px} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2}$$

$$= x + \frac{p}{2}.$$

这说明 $|P_1 - F| = |F - M|$, 所以 $\beta = 2\alpha$.

从焦点出发，向 M 点发射光线，其反射线与切线的夹角为 α，从而反射线与实轴平行.



若 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \omega(h)h,$$

其中

$$\lim_{h \to 0} \omega(h) = 0.$$

我们把余项 $\omega(h)h$ 记为 $o(h)$.

当 $f'(x_0)\neq 0$ 时,

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\left(f'(x_0)+\omega(h)\right)h$$
$$\approx f(x_0)+f'(x_0)h \quad (\text{对充分小的 } h).$$

对于可微函数,我们有更加精确的结论:

(微分中值定理) 存在 $\xi\in(x_0,x_0+h)$ s.t.

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(\xi)h.$$

这里的 ξ 依赖于 h. 若极限 $\lim_{h\to 0}f'(\xi)$ 存在, 则

$$\lim_{h\to 0}f'(\xi)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0).$$

参考 习题 4.1-11.

习题: 计算 $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$ 的导数 $(x>0)$

$$\ln f(x)=\frac{\ln x}{x}.$$

左式的导数为 $\frac{f'(x)}{f(x)}$, 右式的导数为 $\frac{1-\ln x}{x^2}$.

$\Rightarrow f'(x)=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x).$

设函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$，且 $f'(0)=1$.
则对任意 x，

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{f(x)\left(f(\Delta x)-f(0)\right)}{\Delta x}\to f(x),$$

因此，$f'(x)=f(x)$.

假设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有定义，则 $f(x)>0$. （为什么？）

从而 $\left(\log f(x)\right)'=1$,

$$\log f(x)=x+C,$$

$$\Rightarrow\quad f(x)=e^{C}\cdot e^{x}.$$