2024年春季（1-18周），F207 周一8:00-9:40

（1-9周）F207周三8：00-9：40

复变函数

朱炬波 13973168169

zhujubo@mail.sysu.edu.cn

第一章　复数与复变函数

第六节 复变函数的极限和连续性

- 一、函数的极限
- 二、函数的连续性
- 三、小结与思考

一、函数的极限

1.函数极限的定义:

设函数 $w = f(z)$ 定义在 z_0 的去心邻域 $0 < |z - z_0| < \rho$ 内,如果有一确定的数 A 存在,对于任意给定的 $\varepsilon > 0$,相应地必有一正数 $\delta(\varepsilon)$ 使得当 $0 < |z - z_0| < \delta (0 < \delta \le \rho)$ 时,有 $|f(z) - A| < \varepsilon$ 那末称 A 为 $f(z)$ 当 z 趋向于 z_0 时的极限.

记作 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$.(或 $f(z) \xrightarrow{z \to z_0} A$)

注意: 定义中 $z \to z_0$ 的方式是任意的.

2. 极限计算的定理

定理一

设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, $A=u_0+iv_0$,

$z_0=x_0+iy_0$, 那末 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$ 的充要条件是

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=u_0, \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=v_0.$$

证 (1) 必要性. 如果 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$,

根据极限的定义 当 $0<\left|(x+iy)-(x_0+iy_0)\right|<\delta$ 时,

$$\left|(u+iv)-(u_0+iv_0)\right|<\varepsilon,$$

或当 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时,

$$|(u-u_0)+i(v-v_0)|<\varepsilon, \Rightarrow |u-u_0|<\varepsilon,\ |v-v_0|<\varepsilon,$$

故 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=u_0,\quad \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=v_0.$

(2) 充分性. 若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=u_0,\quad \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=v_0,$

那么当 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时,

有 $|u-u_0|<\dfrac{\varepsilon}{2},\quad |v-v_0|<\dfrac{\varepsilon}{2},$

$$|f(z)-A|=|(u-u_0)+i(v-v_0)|$$

$$\le |u-u_0|+|v-v_0|$$

故当 $0<|z-z_0|<\delta$ 时, $|f(z)-A|<\varepsilon$,

所以 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A.$ [证毕]

说明

该定理将求复变函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 的极限问题,转化为求两个二元实变函数 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 的极限问题.

定理二

设 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A,\ \lim\limits_{z\to z_0} g(z)=B,$ 那末

(1) $\lim\limits_{z\to z_0}[f(z)\pm g(z)]=A\pm B;$

(2) $\lim\limits_{z\to z_0}[f(z)g(z)]=AB;$

(3) $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)}=\dfrac{A}{B}\quad (B\neq 0).$

与实变函数的极限运算法则类似.

例1 证明函数 $f(z)=\dfrac{\mathrm{Re}(z)}{|z|}$ 当 $z\to 0$ 时的极限不存在.

证 (一) 令 $z=x+iy$, 则 $f(z)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

$$u(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad v(x,y)=0,$$

当 z 沿直线 $y=kx$ 趋于零时,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} u(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x^2+(kx)^2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x^2(1+k^2)}}=\pm\frac{1}{\sqrt{1+k^2}},$$

随 k 值的变化而变化,

所以 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)$ 不存在, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=0,$

根据定理一可知, $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ 不存在.

证 (二) 令 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta),$

则 $f(z)=\dfrac{r\cos\theta}{r}=\cos\theta,$

当 z 沿不同的射线 $\arg z=\theta$ 趋于零时，

$f(z)$ 趋于不同的值.

例如 z 沿正实轴 $\arg z=0$ 趋于零时，$f(z)\to 1$,

沿 $\arg z=\dfrac{\pi}{2}$ 趋于零时，$f(z)\to 0$,

故 $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ 不存在.

例2 证明函数 $f(z)=\frac{z}{\bar{z}}\ (z\neq 0)$ 当 $z\to 0$ 时的极限不存在.

证 令 $z=x+iy,\quad f(z)=u+iv,$

则 $u(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},\quad v(x,y)=\frac{2xy}{x^2+y^2},$

当 z 沿直线 $y=kx$ 趋于零时,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} v(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\frac{2xy}{x^2+y^2}=\frac{2k}{1+k^2},$$

随 k 值的变化而变化,

所以 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y)$ 不存在,

根据定理一可知, $\lim\limits_{z \to 0} f(z)$ 不存在.

二、函数的连续性

1. 连续的定义:

如果 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$, 那末我们就说 $f(z)$ 在 z_0 处连续. 如果 $f(z)$ 在区域 D 内处处连续, 我们说 $f(z)$ 在 D 内连续.

函数 $f(z)$ 在曲线 C 上 z_0 处连续的意义是

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0), \quad z \in C.$$

定理三

函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在$z_0=x_0+iy_0$ 连续的充要条件是: $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

例如, $f(z)=\ln(x^2+y^2)+i(x^2-y^2)$,

$u(x,y)=\ln(x^2+y^2)$ 在复平面内除原点外处处连续, $v(x,y)=x^2-y^2$ 在复平面内处处连续,

故 $f(x,y)$ 在复平面内除原点外处处连续.

定理四

(1) 在 z_0 连续的两个函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 的和、差、积、商 (分母在 z_0 不为零) 在 z_0 处仍连续.

(2) 如果函数 $h=g(z)$ 在 z_0 连续, 函数 $w=f(h)$ 在 $h_0=g(z_0)$ 连续, 那末复合函数 $w=f[g(z)]$ 在 z_0 处连续.

特殊的:

(1) 有理整函数(多项式)

$$w = P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n,$$

对复平面内的所有点 z 都是连续的;

(2) 有理分式函数

$$w = \frac{P(z)}{Q(z)},$$ 其中 $P(z)$ 和 $Q(z)$ 都是多项式,

在复平面内使分母不为零的点也是连续的.

例3 证明:如果 $f(z)$ 在 z_0 连续,那末 $\overline{f(z)}$ 在 z_0 也连续.

证 设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$,

则 $\overline{f(z)}=u(x,y)-iv(x,y)$,

由 $f(z)$ 在 z_0 连续,

知 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 (x_0,y_0)处都连续,

于是 $u(x,y)$ 和 $-v(x,y)$ 也在 (x_0,y_0)处连续,

故 $\overline{f(z)}$ 在 z_0 连续.

三、小结与思考

通过本课的学习, 熟悉复变函数的极限、连续性的运算法则与性质.

注意:复变函数极限的定义与一元实变函数极限的定义虽然在形式上相同, 但在实质上有很大的差异, 它较之后者的要求苛刻得多.

思考题

设复变函数 $f(z)$ 当 $z \to z_0$ 时的极限存在，此极限值与 z 趋于 z_0 所采取的方式(选取的路径)有无关系?

思考题答案

没有关系.

z 以任何方式趋于 z_0，极限值都是相同的.

作业

P31，24、26、31