2024年春季（1-18周）， F207 周一8:00-9:40

（1-9周）F207周三8：00-9：40

复变函数

朱炬波 13973168169
zhujubo@mail.sysu.edu.cn

中山大學 人工智能学院

课时安排

- 54学时
- 授课时间：1-18周

授课教师

- 朱炬波、谷德峰

授课教材

- 《复变函数（第四版）》，西安交通大学高等数学教研室编，高等教育出版社，2018年03月
- 《复变函数（第4版）学习辅导与习题选解》，王绵森，高等教育出版社，2018年01月

预修课程

高等数学

学时安排	第1章 复数与复变函数	8学时
	第2章 解析函数	10学时
	第3章 复变函数积分	12学时
	第4章 级数	8学时
	第5章 留数及其应用	8学时
	第6章 保形映照	8学时

作业与考核

- 作业每周一上午交

中大教务〔2019〕190 号

中山大学关于印发
《中山大学本科生学籍管理规定》的通知

第十三条 未获学校批准免修的课程，学生旷课、请假的课时数累计达到或者超过该门课程教学总学时三分之一及以上的，不能参加该门课程的考试，该门课程应当重修。学生平时欠交作业（包括习题和实验报告）、缺做实验的次数达到或者超过总次数的三分之一，或者作业、实习实验报告等不及格，应当补做、重做，成绩合格后，才能参加该门课程的考试。

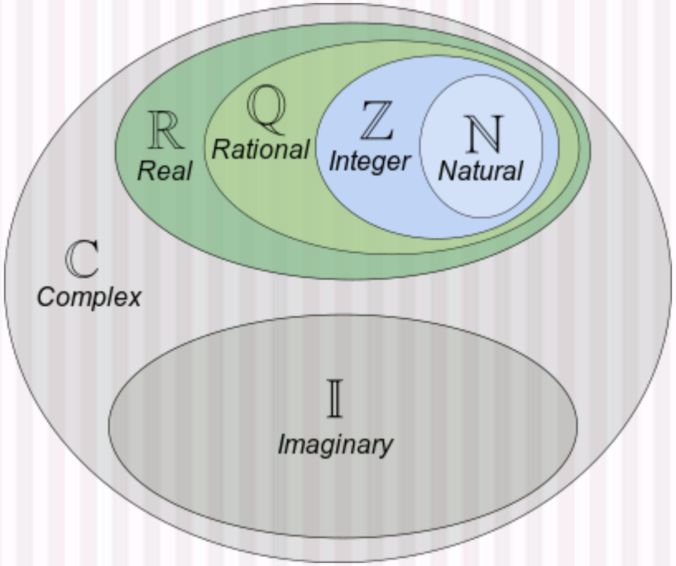
学生应当遵守学术诚信，独立完成课程作业（含实验报告等），有抄袭行为者应当具结检讨并重做；情节严重的，取消该门课程的考试资格，重修该门课程，并按学生处分管理规定给予纪律处分。任课教师和各学院（直属系）有关领导应在课

补交作业：延迟一周补交有效，累计两次补交记为一次缺交

- 课程成绩 ＝ 平时作业（到课、作业和期中、 40%）＋ 期末考试（闭卷、60%）

第0章 引言

一、复数的由来



$$N \longrightarrow Z \longrightarrow Q \longrightarrow R \longrightarrow C$$

16世纪解代数方程时，为对负数开偶次方引入虚数

$\longrightarrow$ 复数理论

18世纪认识了复数的意义

二、复变函数的研究内容

复变函数实际上是实变函数在复数领域的推广和发展，包括复数、复变函数的连续性、可微性、积分、级数、留数、映射等等内容。

- ✓ 以Cauchy为代表的积分理论；
- ✓ 以Weistrass为代表的级数理论；
- ✓ 以Riemann为代表的映射理论；

三、复变函数的应用价值

复变函数的理论和方法在数学、自然科学和工程技术中有着广泛的应用，是解决诸如电磁学、流体力学、热学、弹性理论中的平面问题的有力工具。

三、复变函数的应用价值（续）

在信号与系统分析中，信号一般都是以复数形式表示的，具有幅度和相位。

其中涉及三类变换：

- Fourier变换

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t$$

三、复变函数的应用价值（续）

- **Laplace变换**

$$F(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t,\quad s=\sigma+i\omega$$

- **Z变换**

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n},\quad z=e^{\sigma+i\Omega}$$

三、复变函数的应用价值（续）

这些变换广泛地涉及到了复变函数的积分、留数、复级数的收敛性等内容，在进一步利用到复变函数的零点、极点概念后，还可以给出对系统性态的进一步分析。

第一章　复数与复变函数

第一节　复数及其代数运算

- 一、复数的概念
- 二、复数的代数运算
- 三、小结

一、复数的概念

1. 虚数单位:

实例：方程 $x^2=-1$ 在实数集中无解.

为了解方程的需要，引入一个新数 i，称为虚数单位.

对虚数单位的规定：

(1) $i^2=-1$;

(2) i 可以与实数在一起按同样的法则进行四则运算.

虚数单位的特性:

$i^1 = i;$ $i^2 = -1;$ $i^3 = i \cdot i^2 = -i;$

$i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1;$ $i^5 = i^4 \cdot i^1 = i;$

$i^6 = i^4 \cdot i^2 = -1;$ $i^7 = i^4 \cdot i^3 = -i;$

$i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1;$ ……

一般地，如果n是正整数, 则

$$i^{4n} = 1, \quad i^{4n+1} = i, \quad i^{4n+2} = -1, \quad i^{4n+3} = -i.$$

2.复数:

对于任意两实数 x, y, 我们称 $z = x + yi$ 或 $z = x + iy$ 为复数.

其中 x, y 分别称为 z 的实部和虚部,

记作 $x = \mathrm{Re}(z), \quad y = \mathrm{Im}(z).$

当 $x = 0, \ y \neq 0$ 时, $z = iy$ 称为纯虚数;

当 $y = 0$ 时, $z = x + 0i$, 我们把它看作实数 x.

全体复数所成的集合称为复数集，记为C

例1 实数m取何值时,复数$(m^2-3m-4)+(m^2-5m-6)i$是(1)实数; (2)纯虚数.

解 令 $x=m^2-3m-4,\quad y=m^2-5m-6,$

(1) 如果复数是实数,则$y=0,$

由$m^2-5m-6=0$知$m=6$或$m=-1.$

(2) 如果复数是纯虚数,则$x=0$且$y\neq 0,$

由$m^2-3m-4=0$知$m=4$或$m=-1.$

但由$y\neq 0$知$m=-1$应舍去. 即只有$m=4.$

两复数相等当且仅当它们的实部和虚部分别相等.

复数 z 等于0当且仅当它的实部和虚部同时等于0.

说明 两个数如果都是实数,可以比较它们的大小, 如果不全是实数, 就不能比较大小, 也就是说, **复数不能比较大小**.

二、复数的代数运算

设两复数 $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$,

1. 两复数的和与差:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2).$$

2. 两复数的积:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_2 y_1 + x_1 y_2).$$

3. 两复数的商:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

4. 共轭复数:

实部相同而虚部绝对值相等符号相反的两个复数称为共轭复数. 与 z 共轭的复数记为 $\bar{z}$,

若 $z = x + iy$, 则 $\bar{z} = x - iy$.

例2 计算共轭复数 $x + yi$ 与 $x - yi$ 的积.

解 $(x - yi)(x + yi) = x^2 - (yi)^2 = x^2 + y^2$.

结论:

两个共轭复数 $z, \bar{z}$ 的积是一个实数.

5. 共轭复数的性质:

(1) $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$; $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$; $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$;

(2) $\bar{\bar{z}} = z$;

(3) $z \cdot \bar{z} = [\mathrm{Re}(z)]^2 + [\mathrm{Im}(z)]^2$;

(4) $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$, $z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$.

例3 设 $z_1 = 5-5i,\ z_2 = -3+4i$，求 $\dfrac{z_1}{z_2}$ 与 $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}$.

解 $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{5-5i}{-3+4i} = \dfrac{(5-5i)(-3-4i)}{(-3+4i)(-3-4i)}$

$$= \frac{(-15-20)+(15-20)i}{25} = -\frac{7}{5} - \frac{1}{5}i.$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = -\frac{7}{5} + \frac{1}{5}i.$$

例4 设 $z=-\frac{1}{i}-\frac{3i}{1-i}$，求 $\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z)$ 与 $z\cdot\bar{z}$.

解
$$z=-\frac{1}{i}-\frac{3i}{1-i}=-\frac{i}{i\cdot i}-\frac{3i(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i,$$

$$\operatorname{Re}(z)=\frac{3}{2},\ \operatorname{Im}(z)=-\frac{1}{2},$$

$$z\cdot\bar{z}=[\operatorname{Re}(z)]^2+[\operatorname{Im}(z)]^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{2}.$$

例5 设两复数 $z_1 = x_1 + iy_1,\quad z_2 = x_2 + iy_2,$

证明 $z_1 \cdot \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \cdot z_2 = 2\operatorname{Re}(z_1 \cdot \bar{z}_2).$

证 $z_1 \cdot \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \cdot z_2 =$

$$(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2) + (x_1 - iy_1)(x_2 + iy_2)$$

$$= (x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)$$

$$+ (x_1x_2 + y_1y_2) + i(-x_2y_1 + x_1y_2)$$

$$= 2(x_1x_2 + y_1y_2) = 2\operatorname{Re}(z_1 \cdot \bar{z}_2).$$

或 $z_1 \cdot \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \cdot z_2 = z_1 \cdot \bar{z}_2 + \overline{z_1 \cdot \bar{z}_2} = 2\operatorname{Re}(z_1 \cdot \bar{z}_2).$

三、小结

本课学习了复数的有关概念、性质及其运算. 重点掌握复数的运算, 它是本节课的重点.

四、思考题

为什么复数不能比较大小？