2024年春季（1-18周）， F207 周一8:00-9:40

（1-9周）F207周三8：00-9：40

复变函数

朱炬波 13973168169
zhujubo@mail.sysu.edu.cn



第二章 解析函数

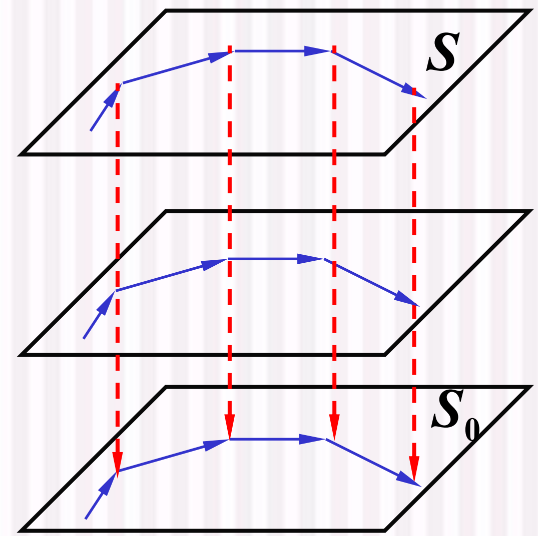
*第四节 平面场的复势

- 一、用复变函数表示平面向量场
- 二、平面流速场的复势
- 三、静电场的复势
- 四、小结与思考

一、用复变函数表示平面向量场

平面定常向量场:

向量场中的向量都平行于某一个平面S, 而且在垂直于S的任何一条直线上的所有点处的向量都是相等的; 场中的向量也都与时间无关.

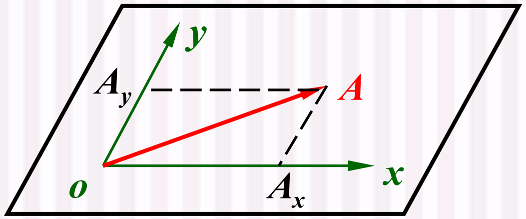


显然, 向量场在所有平行于S的平面内的分布情况是完全相同的, 可以用S_0平面内的场表示.

在平面S_0内取定一直角坐标系xoy,

向量$\vec{A}=A_x\vec{i}+A_y\vec{j}$可表示

为复数$A=A_x+iA_y$.



由于场中的点可用复数$z=x+iy$表示,

所以平面向量场$\vec{A}=A_x(x,y)\vec{i}+A_y(x,y)\vec{j}$可表示为复变函数$A=A(z)=A_x(x,y)+iA_y(x,y)$.

反之,已知一个复变函数$w=u(x,y)+iv(x,y)$,也可作出对应的平面向量场$\vec{A}=u(x,y)\vec{i}+v(x,y)\vec{j}$.

例如, 一个平面定常流速场(如河水的表面)

$$\vec{v} = v_x(x,y)\vec{i} + v_y(x,y)\vec{j}$$

可以用复变函数 $v = v(z) = v_x(x,y) + iv_y(x,y)$ 表示,

平面电场强度向量为 $\vec{E} = E_x(x,y)\vec{i} + E_y(x,y)\vec{j}$

可以用复变函数 $E = E(z) = E_x(x,y) + iE_y(x,y)$

表示.

二、平面流速场的复势

1. 流函数:

设向量场 $\vec{v}$ 是不可压缩的定常的理想流体的流速场:

$$\vec{v} = v_x(x,y)\vec{i} + v_y(x,y)\vec{j},$$

其中速度分量 $v_x(x,y)$ 与 $v_y(x,y)$ 都有连续偏导数.

如果它在单连域 B 内是无源场(即管量场),

那末 $\operatorname{div} \vec{v} = \dfrac{\partial v_x}{\partial x} + \dfrac{\partial v_y}{\partial y} = 0,$ 即 $\dfrac{\partial v_x}{\partial x} = -\dfrac{\partial v_y}{\partial y},$

于是 $-v_y\mathrm{d}x+v_x\mathrm{d}y$ 为某个二元函数 $\psi(x,y)$ 的全微分, $\mathrm{d}\psi(x,y)=-v_y\mathrm{d}x+v_x\mathrm{d}y.$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=-v_y,\quad \frac{\partial\psi}{\partial y}=v_x.$$

因为 $\boxed{\text{等值线 } \psi(x,y)=c_1}$, $\longrightarrow$ 流线

$\mathrm{d}\psi(x,y)=-v_y\mathrm{d}x+v_x\mathrm{d}y=0$, 所以 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{v_y}{v_x}.$

场 $\vec{v}$ 在等值线 $\psi(x,y)=c_1$ 上每一点处的向量 $\vec{v}$ 都与等值线相切,

函数 $\psi(x,y)$ 称为场 $\vec{v}$ 的流函数.

2. 势函数: 如果 $\vec{v}$ 又是 B 内的无旋场 (即势量场),

那么 $\mathrm{rot}\ \vec{v} = 0$, 即 $\dfrac{\partial v_y}{\partial x} - \dfrac{\partial v_x}{\partial y} = 0.$

于是 $v_x \mathrm{d}x + v_y \mathrm{d}y$ 为某个二元函数 $\varphi(x, y)$

的全微分, $\mathrm{d}\varphi(x, y) = v_x \mathrm{d}x + v_y \mathrm{d}y,$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = v_x, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = v_y. \qquad \mathrm{grad}\varphi = \vec{v}.$$

函数 $\varphi(x, y)$ 称为场 $\vec{v}$ 的势函数(或位函数).

$\boxed{\text{等值线 } \varphi(x, y) = c_2}$ ⟶ **等势线(或等位线)**

3. 平面流速场的复势函数:

如果在单连域 B 内,向量场 $\vec{v}$ 既是无源场又是无旋场,

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}=-v_y,\ \frac{\partial \psi}{\partial y}=v_x \text{ 与 } \frac{\partial \varphi}{\partial x}=v_x,\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}=v_y \text{ 同时成立,}$$

比较后得 $\boxed{\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}=\dfrac{\partial \psi}{\partial y},\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}=-\dfrac{\partial \psi}{\partial x}}$, → 柯西–黎曼方程

在单连域内可以作一个解析函数

$\boxed{w=f(z)=\varphi(x,y)+i\psi(x,y)}$. 平面流速场的复势函数(复势)

因为 $v = v_x + iv_y = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - i\frac{\partial \psi}{\partial x} = \overline{f'(z)}$,

所以流速场 $\vec{v}$ 可以用复变函数 $v = \overline{f'(z)}$ 表示.

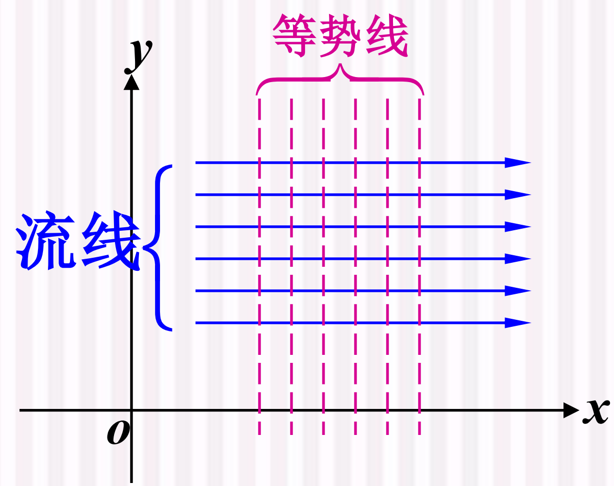
给定一个单连通域内的无源无旋平面流速场, 就可以构造一个解析函数——它的复势与之对应; 反之, 如果在某一区域(不管是否单连)内给定一个解析函数, 就有以它为复势的平面流速场对应, 并可以写出该场的流函数和势函数, 得到流线与等势线方程, 画出流线和等势线的图形, 即得描绘该场的流动图象.

例1 设一平面流速场的复势为 $f(z)=az\ (a>0$ 为实常数), 试求该场的速度、流函数和势函数.

解 因为 $f'(z)=a$,

所以场中任一点的速度 $v=\overline{f'(z)}=a>0$,

方向指向 x 轴正向.



流函数 $\psi(x,y)=ay$,

流线是直线族 $y=c_1$;

势函数 $\varphi(x,y)=ax$,

等势线是直线族 $x=c_2$.

例2 在《场论》中将散度 $\operatorname{div}\vec{v} \neq 0$ 的点统称为源点(有时称使 $\operatorname{div}\vec{v} > 0$ 的点为源点, 而使 $\operatorname{div}\vec{v} < 0$ 的点为洞). 试求由单个源点所形成的定常流速场的复势, 并画出流动图象.

解 不妨设流速场 $\vec{v}$ 内只有一个位于坐标原点的源点, 而其他各点无源无旋, 在无穷远处保持静止状态.

由对称性, $z \neq 0$ 处的流速 $\vec{v} = g(r)\overline{r^0}$,

其中 $r=|z|$ 是 z 到原点的距离,

$\overline{r^0}$ 是指向点 z 的向径上的单位向量, $\overline{r^0}=\dfrac{z}{|z|}$,

$g(r)$ 是一待定函数.

因为流体不可压缩,

流体在任一以原点为中心的圆环域 $r_1<|z|<r_2$ 内不可能积蓄,

所以流过圆周 $|z|=r_1$ 与 $|z|=r_2$ 的流量相等,

流过圆周的流量为

$$N = \int_{|z|=r} \vec{v} \cdot \overrightarrow{r^0} \mathrm{d}s = \int_{|z|=r} g(r)\overrightarrow{r^0} \cdot \overrightarrow{r^0} \mathrm{d}s = 2\pi|z|g(|z|).$$

N **称为源点的强度.** 是与 r 无关的常数.

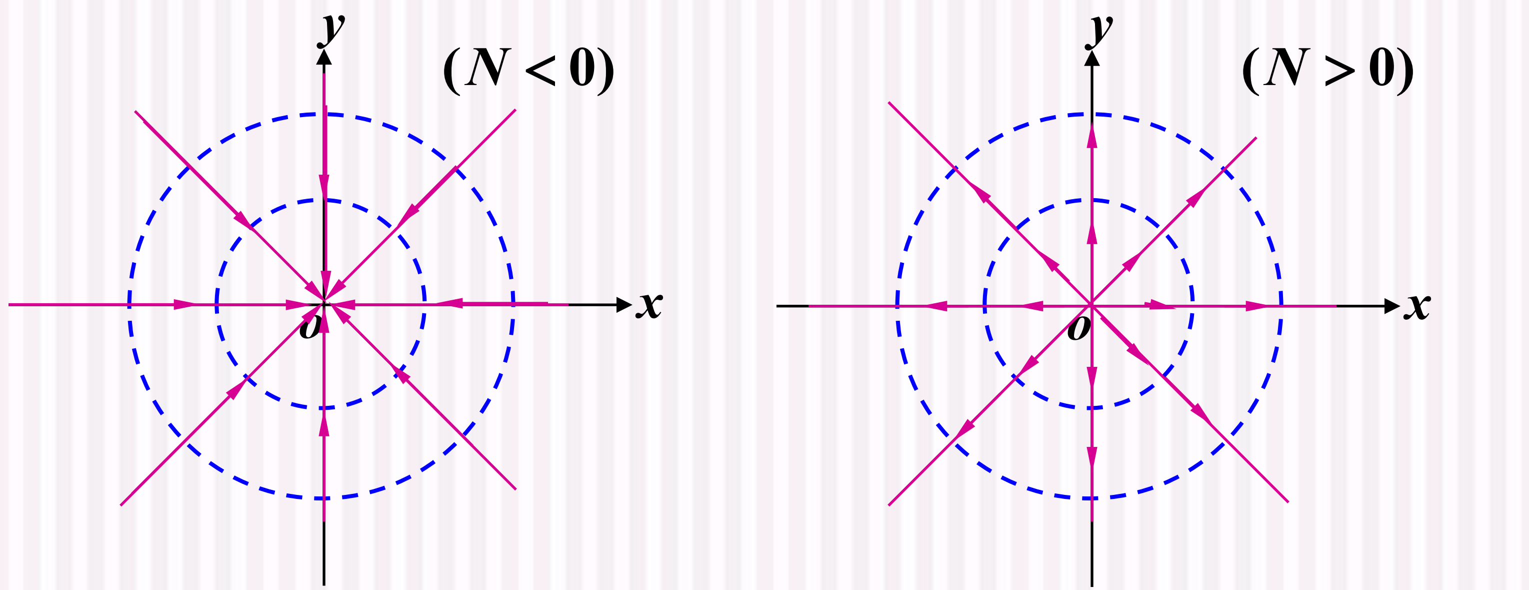
故 $g(|z|) = \dfrac{N}{2\pi|z|}$. 流速 $v = \dfrac{N}{2\pi|z|} \cdot \dfrac{z}{|z|} = \dfrac{N}{2\pi} \cdot \dfrac{1}{\bar{z}}$.

复势函数 $f(z)$ 的导数为 $f'(z) = \overline{v(z)} = \dfrac{N}{2\pi} \cdot \dfrac{1}{z}$.

复势函数为 $f(z) = \dfrac{N}{2\pi}\mathrm{Ln}z + c$, $(c = c_1 + ic_2$ 复常数$)$

于是势函数为 $\varphi(x,y)=\dfrac{N}{2\pi}\ln|z|+c_1$,

流函数为 $\psi(x,y)=\dfrac{N}{2\pi}\mathrm{Arg}z+c_2$.(流动图象如下)



蓝色为等势线, 红色为流线.

例3 平面流速场中 $\mathrm{rot}\vec{v} \neq 0$ 的点称为涡点. 设平面上仅在原点有单个涡点, 无穷远处保持静止状态, 试求该流速场的复势, 并画出流动图象.

解 与例2类似, 设场内某点 z 的流速 $\vec{v} = h(r)\overline{\tau^0}$,

$\overline{\tau^0}$ 是点 z 处与 $\overline{r^0}$ 垂直的单位向量, $\overline{\tau^0} = \dfrac{iz}{|z|}$,

$h(r)$ 是仅与 $r = |z|$ 有关的待定函数.

沿圆周的环流量为 $\Gamma = \displaystyle\int_{|z|=r} \vec{v} \cdot \overline{\tau^0} \mathrm{d}s$

$$=\oint_{|z|=r} h(|z|)\tau\cdot\tau\,\mathrm{d}s=2\pi|z|h(|z|).$$

Γ是与r无关的常量. $-i\Gamma$ 称为涡点的强度.

$$h(|z|)=\frac{\Gamma}{2\pi|z|}.\qquad \text{流速 } v=\frac{i\Gamma}{2\pi}\cdot\frac{1}{\bar{z}},$$

复势函数为 $f(z)=\dfrac{\Gamma}{2\pi i}\mathrm{Ln}z+c,\ (c=c_1+ic_2)$

于是势函数为 $\varphi(x,y)=\dfrac{\Gamma}{2\pi}\mathrm{Arg}z+c_1,$

流函数为 $\psi(x,y)=-\dfrac{\Gamma}{2\pi}\ln|z|+c_2.$

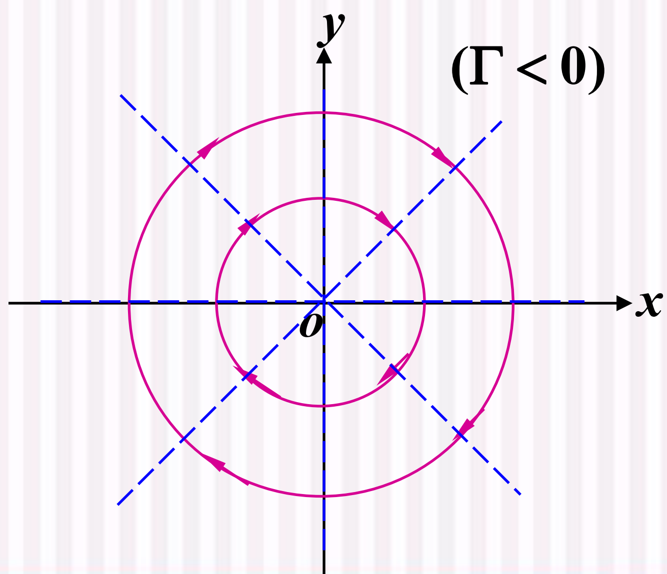
对比例1和例2的结果,

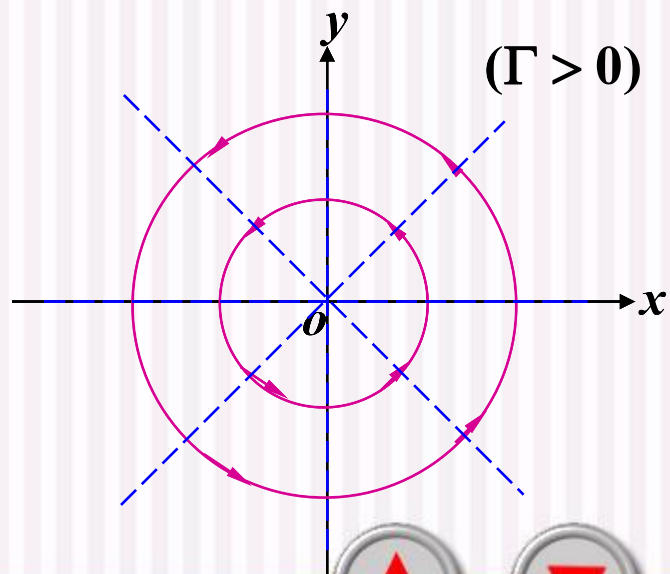
除了常数 N 换成 Γ 外, 两者仅差因子 $\dfrac{1}{i}$,

因此,只须将例2图中流线与等势线位置互换,

即可得涡点所形成的场的流动图象.

蓝色为流线, 红色为等势线.





三、静电场的复势

设平面静电场 $\vec{E}=E_x\vec{i}+E_y\vec{j}.$

当场内没有带电物体时, 静电场无源无旋.

那末根据 E 是无源场 $\operatorname{div}\vec{v}=\dfrac{\partial E_x}{\partial x}+\dfrac{\partial E_y}{\partial y}=0,$

于是 $-E_y\mathrm{d}x+E_x\mathrm{d}y$ 为某个二元函数 $u(x,y)$ 的全微分,

$$\mathrm{d}u(x,y)=-E_y\mathrm{d}x+E_x\mathrm{d}y.$$

与讨论流速场一样,

静电场 $\vec{E}$ 在等值线 $u(x,y)=c_1$ 上每一点处的向量 $\vec{E}$ 都与等值线相切,

就是说, 等值线就是向量线, 即场中电力线.

$u(x,y)$ 称为场 $\vec{E}$ 的力函数.

根据 E 是无旋场 $\quad \mathrm{rot}_{\mathrm{n}}\vec{v}=\dfrac{\partial E_y}{\partial x}-\dfrac{\partial E_x}{\partial y}=0,$

于是 $-E_x\mathrm{d}x-E_y\mathrm{d}y$ 为某个二元函数 $v(x,y)$ 的全微分, $\quad \mathrm{d}v(x,y)=-E_x\mathrm{d}x-E_y\mathrm{d}y.$

$$\operatorname{grad} \vec{v} = \frac{\partial v}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial v}{\partial y}\vec{j} = -E_x \vec{i} - E_y \vec{j} = -\vec{E}.$$

所以 $v(x, y)$ 是场 $\vec{E}$ 的势函数 (电势或电位).

等值线 $v(x, y) = c_2$ 就是等势线或等位线.

如果 $\vec{E}$ 是单连域 B 内的无源无旋场, 则 u 和 v 满足柯西 – 黎曼方程:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

在B内可决定一个解析函数 $\boxed{w = f(z) = u + iv,}$

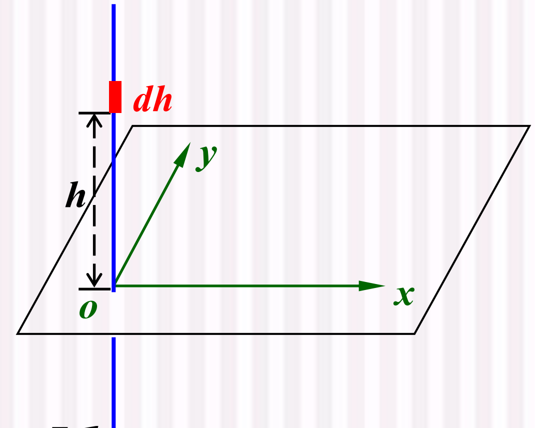
静电场的复势 (复电位)

场 $\vec{E}$ 可以用复势表示为 $E = -\dfrac{\partial v}{\partial x} - i\dfrac{\partial u}{\partial x} = -i\,\overline{f'(z)}.$

静电场的复势和流速场的复势相差因子 $-i.$

利用静电场的复势, 可以研究场的等势线和电力线的分布情况, 描绘出场的图象.

例4 求一条具有电荷线密度为 e 的均匀带电的无限长直导线 L 所产生的静电场的复势.

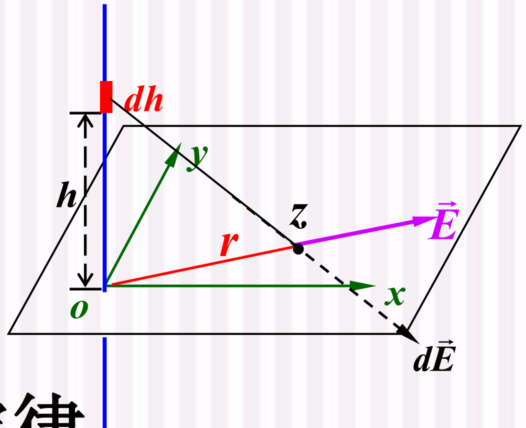


解 设导线 L 在原点 $z=0$ 处垂直于 z 平面,

在 L 上距原点为 h 处取微元段 $\mathrm{d}h$, 则其带电量为 $e\mathrm{d}h$.

因为导线为无限长, 因此垂直于 xoy 平面的任何直线上各点处的电场强度是相等的.

又因为导线上关于 z 平面对称的两带电微元段所产生的电场强度的垂直分量相互抵消, 只剩下与 xoy 平面平行的分量.



故所产生的静电场为平面场.

先求平面上任一点 z 的电场强度 $\vec{E}=E_x\vec{i}+E_y\vec{j}$. 由库仑定律,

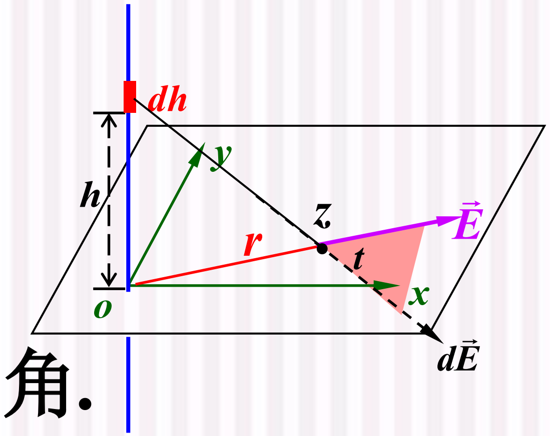
微元段 dh 在 z 处产生的场强大小为

$$\left|\mathrm{d}\vec{E}\right|=\frac{e\mathrm{d}h}{r^2+h^2},\quad \text{其中 } r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

因为所求的电场强度 $\vec{E}$ 在 z 平面内,

所以其大小为所有场强微元 $\mathrm{d}\vec{E}$ 在 z 平面上投影之和,

$$\left|\vec{E}\right| = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e\cos t}{r^2+h^2}\,\mathrm{d}h,$$



其中 t 为 $\mathrm{d}\vec{E}$ 与 xoy 平面的交角.

因为 $h = r\tan t$, 所以 $\mathrm{d}h = \dfrac{r\mathrm{d}t}{\cos^2 t}$,

$$\frac{1}{r^2+h^2} = \frac{\cos^2 t}{r^2}, \qquad \left|\vec{E}\right| = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e\cos t}{r}\,\mathrm{d}t = \frac{2e}{r}.$$

考虑到向量 $\vec{E}$ 的方向， $\vec{E}=\dfrac{2e}{r}\vec{r}^{0}$.

用复数表示为 $E=\dfrac{2e}{\bar{z}}$. $f'(z)=\overline{iE}=-\dfrac{2ei}{z}$.

复势为 $f(z)=2ei\mathrm{Ln}\dfrac{1}{z}+c, (c=c_1+ic_2)$

于是力函数为 $u(x,y)=2e\mathrm{Arg}z+c_1$,

势函数为 $v(x,y)=2e\ln\dfrac{1}{|z|}+c_2$.

如果导线竖立在 $z=z_0$，复势为 $f(z)=2ei\mathrm{Ln}\dfrac{1}{z-z_0}+c$.

四、小结与思考

了解复变函数可表示平面向量场, 对于某单连通域内给定的平面无源无旋场, 可以作出一解析函数(称为该场的复势), 统一研究该场的分布和变化情况.