Série de Taylor

INF1608 – Análise Numérica

Waldemar Celes
celes@inf.puc-rio.br

Departamento de Informática, PUC-Rio

Problema

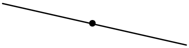
Avaliar uma função $f(x)$ conhecendo-se apenas informações discretas (pontuais) da mesma

- Ponto: $f(x_0)$

Problema

Avaliar uma função $f(x)$ conhecendo-se apenas informações discretas (pontuais) da mesma

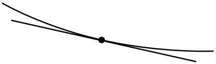
- Ponto: $f(x_0)$
- Derivada: $f'(x_0)$



Problema

Avaliar uma função $f(x)$ conhecendo-se apenas informações discretas (pontuais) da mesma

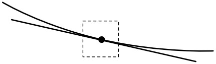
- Ponto: $f(x_0)$
- Derivada: $f'(x_0)$
- Curvatura: $f''(x_0)$



Problema

Avaliar uma função $f(x)$ conhecendo-se apenas informações discretas (pontuais) da mesma

- Ponto: $f(x_0)$
- Derivada: $f'(x_0)$
- Curvatura: $f''(x_0)$

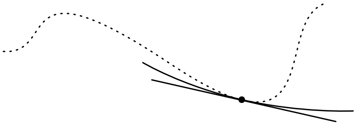


- Podemos aproximar localmente a função

Problema

Avaliar uma função $f(x)$ conhecendo-se apenas informações discretas (pontuais) da mesma

- Ponto: $f(x_0)$
- Derivada: $f'(x_0)$
- Curvatura: $f''(x_0)$



- Podemos aproximar localmente a função
- Qual é o erro da aproximação?

Série de Taylor

Considere $f(x)$ uma função contínua e diferenciável. Se conhecemos o valor de f no ponto x_0, $f(x_0)$, e as derivadas da função em x_0, $f^{[k]}(x_0)$, podemos aproximar o valor de $f(x)$, para x próximo a x_0, usando a Série de Taylor

Série de Taylor

Considere $f(x)$ uma função contínua e diferenciável. Se conhecemos o valor de f no ponto x_0, $f(x_0)$, e as derivadas da função em x_0, $f^{[k]}(x_0)$, podemos aproximar o valor de $f(x)$, para x próximo a x_0, usando a Série de Taylor

- Ordem 0: Aproximação por uma constante

$$f(x) \approx f(x_0)$$

Série de Taylor

Considere $f(x)$ uma função contínua e diferenciável. Se conhecemos o valor de f no ponto x_0, $f(x_0)$, e as derivadas da função em x_0, $f^{[k]}(x_0)$, podemos aproximar o valor de $f(x)$, para x próximo a x_0, usando a Série de Taylor

- Ordem 0: Aproximação por uma constante

$$f(x) \approx f(x_0)$$

- Ordem 1: Aproximação por uma reta

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Série de Taylor

Considere $f(x)$ uma função contínua e diferenciável. Se conhecemos o valor de f no ponto x_0, $f(x_0)$, e as derivadas da função em x_0, $f^{[k]}(x_0)$, podemos aproximar o valor de $f(x)$, para x próximo a x_0, usando a Série de Taylor

- Ordem 0: Aproximação por uma constante

$$f(x) \approx f(x_0)$$

- Ordem 1: Aproximação por uma reta

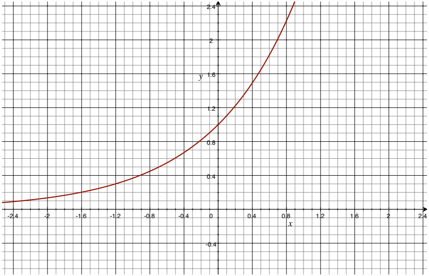
$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

- Ordem 2: Aproximação por uma parábola

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$$

Série de Taylor

Exemplo: função $f(x) = e^x$ em torno de $x_0 = 0$

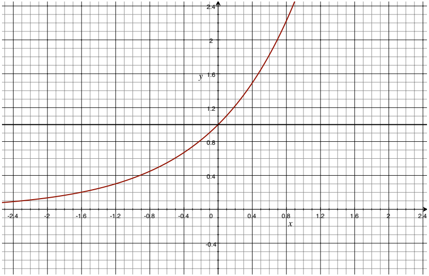


Série de Taylor

Exemplo: função $f(x) = e^x$ em torno de $x_0 = 0$

- Ordem 0:

$$f(x) = e^0 = 1$$



Série de Taylor

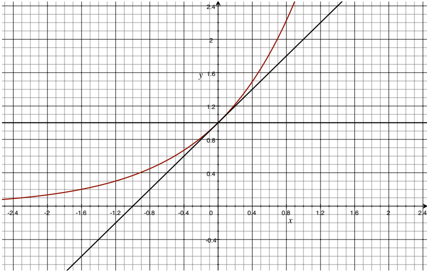
Exemplo: função $f(x) = e^x$ em torno de $x_0 = 0$

- Ordem 0:

$$f(x) = e^0 = 1$$

- Ordem 1:

$$f(x) = e^0 + e^0(x - 0) = 1 + x$$



Série de Taylor

Exemplo: função $f(x) = e^x$ em torno de $x_0 = 0$

- Ordem 0:

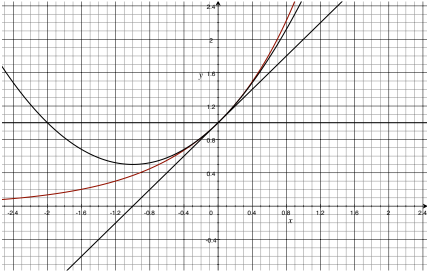
$$f(x) = e^0 = 1$$

- Ordem 1:

$$f(x) = e^0 + e^0(x-0) = 1 + x$$

- Ordem 2:

$$f(x) = e^0 + e^0(x-0) + \frac{e^0}{2}(x-0)^2$$
$$= 1 + x + \frac{x^2}{2}$$



Série de Taylor

Teorema de Taylor

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \\ + \ldots + \frac{f^{[k]}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \underbrace{\frac{f^{[k+1]}(c)}{(k+1)!}(x - x_0)^{k+1}}_{\text{Resíduo da Série de Taylor}}$$

onde:

$$c \in [x_0, x]$$

Série de Taylor

Teorema de Taylor

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \\ + \ldots + \frac{f^{[k]}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \underbrace{\frac{f^{[k+1]}(c)}{(k+1)!}(x - x_0)^{k+1}}_{\text{Resíduo da Série de Taylor}}$$

onde:

$$c \in [x_0, x]$$

- Se o resíduo for pequeno, tem-se uma boa aproximação

Série de Taylor

Exemplo: Aproximação do valor de e

- Função: $f(x) = e^x$, em torno de $x_0 = 0$
- Avaliar o valor aproximado de $f(1)$
  - Sabe-se: $f(0) = e^0 = 1 \quad \text{e} \quad f'(x) = f(x)$

Série de Taylor

Exemplo: Aproximação do valor de e

- Função: $f(x) = e^x$, em torno de $x_0 = 0$
- Avaliar o valor aproximado de $f(1)$
  - Sabe-se: $f(0) = e^0 = 1 \quad \text{e} \quad f'(x) = f(x)$
- Ordem 1: $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 1 + x$
  - Valor aproximado: $f(1) = 2$

Série de Taylor

Exemplo: Aproximação do valor de e

- Função: $f(x) = e^x$, em torno de $x_0 = 0$
- Avaliar o valor aproximado de $f(1)$
  - Sabe-se: $f(0) = e^0 = 1 \quad \text{e} \quad f'(x) = f(x)$
- Ordem 1: $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 1 + x$
  - Valor aproximado: $f(1) = 2$
- Ordem 2:
  $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 = 1 + x + \frac{x^2}{2}$
  - Valor aproximado: $f(1) = 2.5$

Série de Taylor

Exemplo: Aproximação do valor de e

- Função: $f(x) = e^x$, em torno de $x_0 = 0$
- Avaliar o valor aproximado de $f(1)$
  - Sabe-se: $f(0) = e^0 = 1 \quad \text{e} \quad f'(x) = f(x)$
- Ordem 1: $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 1 + x$
  - Valor aproximado: $f(1) = 2$
- Ordem 2:
  $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 = 1 + x + \frac{x^2}{2}$
  - Valor aproximado: $f(1) = 2.5$
- Ordem 3: $f(x) \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$
  - Valor aproximado: $f(1) = 2.66667$

Série de Taylor

Exemplo: Aproximação do valor de e

- Função: $f(x) = e^x$, em torno de $x_0 = 0$
- Avaliar o valor aproximado de $f(1)$
  - Sabe-se: $f(0) = e^0 = 1$ e $f'(x) = f(x)$
- Ordem 1: $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 1 + x$
  - Valor aproximado: $f(1) = 2$
- Ordem 2:
  $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 = 1 + x + \frac{x^2}{2}$
  - Valor aproximado: $f(1) = 2.5$
- Ordem 3: $f(x) \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$
  - Valor aproximado: $f(1) = 2.66667$
- Ordem 4: $f(x) \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$
  - Valor aproximado: $f(1) = 2.70833$

Série de Taylor

Exemplo: Aproximação do valor de e

- Ordem 4: $f(x) \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$
  - Valor aproximado: $f(1) = 2.70833$

Série de Taylor

Exemplo: Aproximação do valor de e

- Ordem 4: $f(x) \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$
  - Valor aproximado: $f(1) = 2.70833$
- Resíduo:

$$r(x) = f^{[5]}(c)\frac{(x - x_0)^5}{5!} = e^c \frac{x^5}{120}, \text{ com } c \in [0, 1]$$

Série de Taylor

Exemplo: Aproximação do valor de e

- Ordem 4: $f(x) \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$
  - Valor aproximado: $f(1) = 2.70833$
- Resíduo:

$$r(x) = f^{[5]}(c)\frac{(x - x_0)^5}{5!} = e^c\frac{x^5}{120}, \text{ com } c \in [0, 1]$$

  - Resíduo máximo: e^c tem valor máximo quando $c = 1$:

$$r_{max} = e\frac{1}{120} \approx \frac{2.71828}{120} = 0.02265$$

Série de Taylor

Exemplo: Aproximação do valor de e

- Ordem 4: $f(x) \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$
  - Valor aproximado: $f(1) = 2.70833$
- Resíduo:

$$r(x) = f^{[5]}(c)\frac{(x - x_0)^5}{5!} = e^c \frac{x^5}{120}, \text{ com } c \in [0, 1]$$

  - Resíduo máximo: e^c tem valor máximo quando $c = 1$:

$$r_{max} = e\frac{1}{120} \approx \frac{2.71828}{120} = 0.02265$$

  - Verificando:

$$erro = 2.71828 - 2.70833 = 0.00995 < 0.02265$$

Série de Taylor

Podemos usar a Série de Taylor para avaliar uma função, de forma aproximada, de forma mais eficiente

Série de Taylor

Podemos usar a Série de Taylor para avaliar uma função, de forma aproximada, de forma mais eficiente

---

Exemplo

- Aproximar o valor de $\sin x$ usando os primeiros 5 termos da série em torno do ponto $x_0 = 0$

Série de Taylor

Podemos usar a Série de Taylor para avaliar uma função, de forma aproximada, de forma mais eficiente

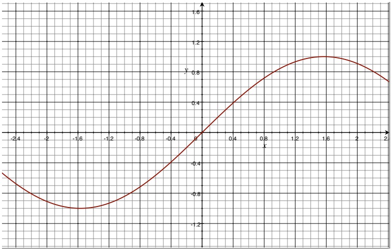
---

Exemplo

- Aproximar o valor de $\sin x$ usando os primeiros 5 termos da série em torno do ponto $x_0 = 0$

Sabe-se:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sin x & \Rightarrow \quad f(0) &= 0 \\
f'(x) &= \cos x & \Rightarrow \quad f'(0) &= 1 \\
f''(x) &= -\sin x & \Rightarrow \quad f''(0) &= 0 \\
f'''(x) &= -\cos x & \Rightarrow \quad f'''(0) &= -1 \\
f^{[4]}(x) &= \sin x & \Rightarrow \quad f^{[4]}(0) &= 0
\end{aligned}
$$



Série de Taylor

- Aproximação da função $\sin x$ em torno de $x_0 = 0$

$$f(x) \approx 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{-1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4$$
$$f(x) \approx x - \frac{x^3}{6}$$

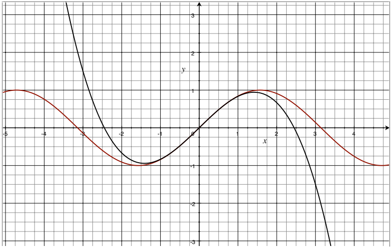
Série de Taylor

- Aproximação da função $\sin x$ em torno de $x_0 = 0$

$$f(x) \approx 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{-1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4$$
$$f(x) \approx x - \frac{x^3}{6}$$

- Termo residual:

$$r(x) = \frac{f^{[5]}(c)}{5!}x^5$$
$$r(x) = \frac{x^5}{120}\cos c$$
$$r(x)_{max} = \frac{x^5}{120}$$



Exercício proposto

Usando a Série de Taylor, escreva um polinômio que aproxime a função $f(x) = \sin x - \cos x$, em torno de $x = 0$, com $x \in [-\pi/2, \pi/2]$. Garanta que o erro máximo seja menor que 0.3.