

Equações Diferenciais Ordinárias

INF1608 – Análise Numérica

Waldemar Celes
celes@inf.puc-rio.br

Departamento de Informática, PUC-Rio



Equação Diferencial Ordinária

Equação diferencial de primeira ordem

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

- Objetiva-se determinar $y(t)$



Equação Diferencial Ordinária

Equação diferencial de primeira ordem

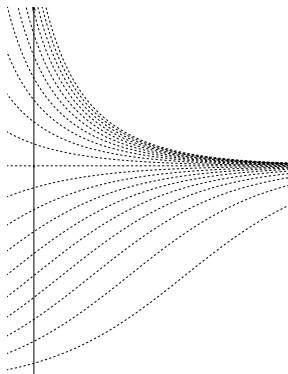
$$y'(t) = f(t, y(t))$$

- ▶ Objetiva-se determinar $y(t)$

Exemplo: crescimento populacional com saturação

$$y' = cy(1 - y)$$

- ▶ Define um campo direcional



Equação Diferencial Ordinária

Equação diferencial de primeira ordem

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

- ▶ Objetiva-se determinar $y(t)$

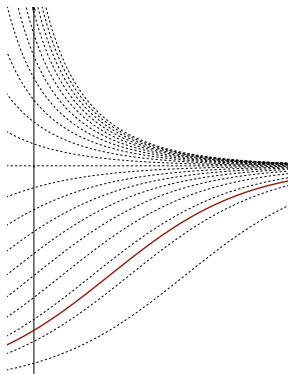
Exemplo: crescimento populacional com saturação

$$y' = cy(1 - y)$$

- ▶ Define um campo direcional

Problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(a) = y_a \\ t \in [a, b] \end{cases}$$



EDO: Métodos Numéricos

Método de Euler

- Série de Taylor

$$y(t+h) = y(t) + h y'(t) + \frac{h^2}{2} y''(t) + \frac{h^3}{3!} y'''(c), \quad c \in [t, t+h]$$

- Método de Euler usa apenas os 2 primeiros termos da série

$$y(t+h) = y(t) + h y'(t)$$

$$y(t+h) = y(t) + h f(t, y)$$



EDO: Métodos Numéricos

Método de Euler

- Série de Taylor

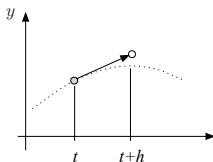
$$y(t+h) = y(t) + h y'(t) + \frac{h^2}{2} y''(t) + \frac{h^3}{3!} y'''(c), \quad c \in [t, t+h]$$

- Método de Euler usa apenas os 2 primeiros termos da série

$$y(t+h) = y(t) + h y'(t)$$

$$y(t+h) = y(t) + h f(t, y)$$

$$\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + \mathbf{h} \mathbf{f}(\mathbf{t}_i, \mathbf{y}_i)$$



EDO: Métodos Numéricos

Método de Euler

► Série de Taylor

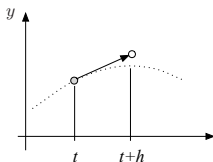
$$y(t+h) = y(t) + h y'(t) + \frac{h^2}{2} y''(t) + \frac{h^3}{3!} y'''(c), \quad c \in [t, t+h]$$

► Método de Euler usa apenas os 2 primeiros termos da série

$$y(t+h) = y(t) + h y'(t)$$

$$y(t+h) = y(t) + h f(t, y)$$

$$\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + \mathbf{h} \mathbf{f}(\mathbf{t}_i, \mathbf{y}_i)$$



► Características

- Assimétrico: usa apenas derivada do início do intervalo
- Impreciso: exige h muito pequeno
 - Erro = $O(h^2)$
- Instável: pode divergir



Método de Euler

Problema de valor inicial

- ▶ Dados:
 - ▶ $y' = f(t, y)$
 - ▶ $y_a = f(t_a)$
- ▶ Determinar y_b , onde $t_b > t_a$, com n passos de integração



Método de Euler

Problema de valor inicial

- ▶ Dados:
 - ▶ $y' = f(t, y)$
 - ▶ $y_a = f(t_a)$
- ▶ Determinar y_b , onde $t_b > t_a$, com n passos de integração

```
Euler( $t_a, t_b, f, y_a, n$ )  
   $h = (t_b - t_a)/n$   
   $t = t_a$   
   $y = y_a$   
  for  $i = 1, n$   
     $y = y + h f(t, y)$   
     $t = t + h$   
  return  $y$ 
```



Método de Euler

Problema de valor inicial

- ▶ Dados:
 - ▶ $y' = f(t, y)$
 - ▶ $y_a = f(t_a)$
- ▶ Determinar y_b , onde $t_b > t_a$, com n passos de integração

```
Euler( $t_a, t_b, f, y_a, n$ )  
   $h = (t_b - t_a)/n$   
   $t = t_a$   
   $y = y_a$   
  for  $i = 1, n$   
     $y = y + h f(t, y)$   
     $t = t + h$   
  return  $y$ 
```

- ▶ Quanto menor h , menor o erro



Avaliação do Erro

Erro de truncamento **local** e **global**

- ▶ Podemos garantir erro abaixo de um limite usando h menores?



Avaliação do Erro

Erro de truncamento **local** e **global**

- Podemos garantir erro abaixo de um limite usando h menores?

Erro global:

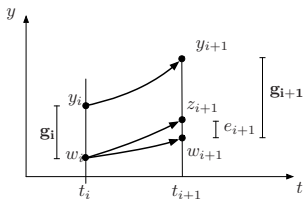
$$g_i = |w_i - y_i|$$

- y_i : valor esperado
- w_i : valor após sucessivas avaliações do método

Erro local:

$$e_{i+1} = |w_{i+1} - z_{i+1}|$$

- z_{i+1} : valor esperado a partir de w_i
- w_{i+1} : valor após uma avaliação do método



Erro local

Série de Taylor:

$$y(t+h) = y(t) + h y'(t) + \frac{h^2}{2} y''(c), \text{ com } c \in [t, t+h]$$

Método de Euler:

$$w_{i+1} = w_i + h f(t_i, w_i) + \frac{h^2}{2} f'(c, w(c)), \text{ com } c \in [t_i, t_{i+1}]$$

Logo, erro local:

$$e_i \leq \frac{Mh^2}{2}, \text{ onde } M \text{ é o limite superior de } f' \text{ no intervalo}$$



Erro global

$$g_0 = 0$$



Erro global

$$g_0 = 0$$

$$g_1 = e_1$$



Erro global

$$g_0 = 0$$

$$g_1 = e_1$$

$$g_2 = ?$$

$$|z_2 - y_2| = ? \quad e_2 = |w_2 - z_2|$$



Erro global

$$g_0 = 0$$

$$g_1 = e_1$$

$$g_2 = ?$$

$$|z_2 - y_2| = ? \quad e_2 = |w_2 - z_2|$$

Teorema: ampliação do erro

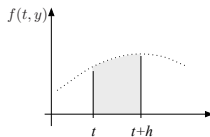
$$g_{i+1} \leq g_i e^{Lh}, \text{ onde } L \text{ é a constante de Lipschitz}$$

- ▶ Diminuir o passo, diminui o erro
- ▶ Pode existir um crescimento exponencial do erro em relação ao número de passos



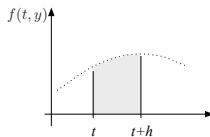
Método via formulação da integral

$$y(t+h) = y(t) + \int_t^{t+h} f(t, y(t)) dt$$



Método via formulação da integral

$$y(t+h) = y(t) + \int_t^{t+h} f(t, y(t)) dt$$

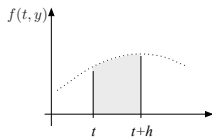


- Aproximação por retângulo (Euler):

$$y_{i+1} = y_i + h f(t_i, y_i)$$

Método via formulação da integral

$$y(t+h) = y(t) + \int_t^{t+h} f(t, y(t)) dt$$



- Aproximação por retângulo (Euler):

$$y_{i+1} = y_i + h f(t_i, y_i)$$

- Aproximação por trapézio:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, y_{i+1})]$$

Problema: Como avaliar se precisamos de y_{i+1} ?

Método de Euler modificado

Aproximação por trapézio

- Usa Euler para estimar y_{i+1}

$$\overline{y}_{i+1} = y_i + h f(t_i, y_i)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, \overline{y}_{i+1})]$$



Método de Euler modificado

Aproximação por trapézio

- ▶ Usa Euler para estimar y_{i+1}

$$\overline{y}_{i+1} = y_i + h f(t_i, y_i)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, \overline{y}_{i+1})]$$

Características:

- ▶ Exige duas avaliações de f
- ▶ Método de ordem 2
 - ▶ Erro = $O(h^3)$



Métodos explícitos

O Método de Euler e o Método de Euler Modificado são chamados de **métodos explícitos**

- ▶ Usam configuração em t para avaliar em $t + h$



Métodos explícitos

O Método de Euler e o Método de Euler Modificado são chamados de **métodos explícitos**

- ▶ Usam configuração em t para avaliar em $t + h$

Um método de ordem superior vale a pena?



Métodos explícitos

O Método de Euler e o Método de Euler Modificado são chamados de **métodos explícitos**

- ▶ Usam configuração em t para avaliar em $t + h$
-

Um método de ordem superior vale a pena?

- ▶ Em geral, sim!
 - ▶ Mais precisão
 - ▶ Mais avaliações de $f(t, y)$



Método do ponto médio

Usa o valor da derivada no ponto médio do intervalo

- ▶ Avalia passo de Euler: $\Delta y = h f(t_i, y_i)$
- ▶ Avalia f no ponto médio: $f_{med} = f(t_{i+1/2}, y_i + \Delta y/2)$
- ▶ Avança usando f_{med}

$$y_{i+1} = y_i + h f_{med}$$

Características iguais ao do Euler modificado:

- ▶ Exige duas avaliações de f
- ▶ Método de ordem 2
 - ▶ Erro = $O(h^3)$
- ▶ Também conhecido como Runge-Kutta de ordem 2



Runge-Kutta de ordem 3

$$k_0 = h f(t_i, y_i)$$

$$k_1 = h f(t_{i+1/2}, y_i + k_0/2)$$

$$k_2 = h f(t_{i+1}, y_i + 2k_1 - k_0)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_0 + 4k_1 + k_2)$$

Características:

- ▶ Exige três avaliações de f
- ▶ Erro = $O(h^4)$



Runge-Kutta de ordem 4

$$k_0 = h f(t_i, y_i)$$

$$k_1 = h f(t_{i+1/2}, y_i + k_0/2)$$

$$k_2 = h f(t_{i+1/2}, y_i + k_1/2)$$

$$k_3 = h f(t_{i+1}, y_i + k_2)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3)$$

Características:

- ▶ Exige quatro avaliações de f
- ▶ Erro = $O(h^5)$
- ▶ Método numérico mais popular
 - ▶ Precisão & desempenho



Passo Adaptativo

Objetivo: assegurar precisão numérica local

- ▶ Independente do método
- ▶ Usa maior passo possível
 - ▶ Respeitando erro local máximo tolerado



Passo Adaptativo

Objetivo: assegurar precisão numérica local

- ▶ Independente do método
- ▶ Usa maior passo possível
 - ▶ Respeitando erro local máximo tolerado

Passo adaptativo

Se erro = $O(h^n)$, então teoricamente:

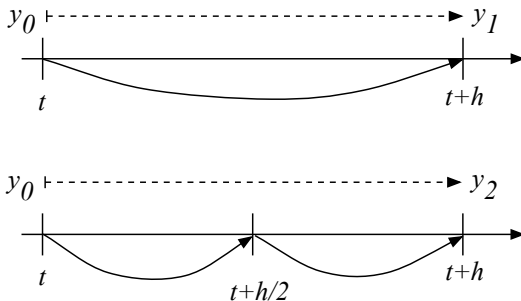
- ▶ Se passo h produz erro e
- ▶ Então passo $h/2$ produzirá erro $e/2^n$



Passo adaptativo

Avaliação do erro associado a h

- Estratégia de dobrar o passo



Euler com passo adaptativo

Estratégia de dobrar o passo

$$y = y_1 + h^2 \phi$$
$$y = y_2 + 2 \left(\frac{h}{2} \right)^2 \phi$$

$$\Delta = y_2 - y_1$$

Então:

$$y_1 + h^2 \phi = y_2 + \frac{h^2}{2} \phi$$

$$y_2 - y_1 = h^2 \phi - \frac{h^2}{2} \phi$$

$$\boxed{\Delta = \frac{h^2}{2} \phi} \text{ que representa o erro associado a } y_2$$



Como adaptar o passo

Exemplo:

- ▶ Erro máximo permitido: $e_{max} = 10^{-4}$



Como adaptar o passo

Exemplo:

- ▶ Erro máximo permitido: $e_{max} = 10^{-4}$

Se erro obtido for $|y_2 - y_1| = 10^{-5}$

- ▶ Valida-se o passo: $y = y_2$
- ▶ Aumenta-se o passo

$$h_{novo} = \left(\frac{e_{max}}{e} \right)^{1/2} h = 3.16 h$$



Como adaptar o passo

Exemplo:

- ▶ Erro máximo permitido: $e_{max} = 10^{-4}$

Se erro obtido for $|y_2 - y_1| = 10^{-5}$

- ▶ Valida-se o passo: $y = y_2$
- ▶ Aumenta-se o passo

$$h_{novo} = \left(\frac{e_{max}}{e} \right)^{1/2} h = 3.16 h$$

Se erro obtido for $|y_2 - y_1| = 10^{-3}$

- ▶ Invalida-se o passo
- ▶ Refaz o avanço, diminuindo-se o passo

$$h_{novo} = \left(\frac{e_{max}}{e} \right)^{1/2} h = 0.316 h$$



Euler com passo adaptativo

Note que:

$$y = y_2 + 2 \left(\frac{h}{2} \right)^2 \phi + O(h^3)$$

$$y = y_2 + \Delta + O(h^3)$$

Logo, pode-se pensar em avaliar a função com erro $O(h^3)$?

$$y = y_2 + \Delta$$

- ▶ Em geral, métodos de ordem superior são mais confiáveis
- ▶ Neste caso, no entanto, perderíamos o controle do erro



Euler com passo adaptativo

Note que:

$$y = y_2 + 2 \left(\frac{h}{2} \right)^2 \phi + O(h^3)$$

$$y = y_2 + \Delta + O(h^3)$$

Logo, pode-se pensar em avaliar a função com erro $O(h^3)$?

$$y = y_2 + \Delta$$

- ▶ Em geral, métodos de ordem superior são mais confiáveis
- ▶ Neste caso, no entanto, perderíamos o controle do erro

Passo adaptativo para outros métodos

- ▶ Erro: $O(h^n)$

$$h_{\text{novo}} = \left(\frac{e_{\text{max}}}{e} \right)^{1/n} h$$



Euler Adaptativo

Um passo de integração

- ▶ Calcular novo y , retornando também novos t e h
 - ▶ Erro local máximo tolerado: e_{max}

OneStep(t, y, h, f, e_{max})

$$y_1 = y + hf(t, y)$$

$$y_m = y + \frac{h}{2} f(t, y)$$

$$y_2 = y_m + \frac{h}{2} f(t + \frac{h}{2}, y_m)$$

$$\delta = y_2 - y_1; \quad \alpha = \sqrt{\frac{e_{max}}{|\delta|}}$$

if $\alpha < 1.0$

return *OneStep*($t, y, \alpha h, f, e_{max}$)

else

return $y_2, t + h, \alpha h$



Euler Adaptativo

Determinação de $y(t_1)$

- ▶ Dadas as condições iniciais
- ▶ Erro local máximo tolerado: e_{max}

```
EulerAdaptativo( $t, y, h, t_1, f, e_{max}$ )  
  while  $t < t_1$   
    if  $t + h > t_1$   
       $h = t_1 - t$   
     $y, t, h = \text{OneStep}(t, y, h, f, e_{max})$ 
```

Observações

- ▶ Em geral, limita-se o aumento do passo: $\alpha \leq 1.2$
- ▶ Pode-se não incrementar o passo logo após uma redução
- ▶ Na prática, faz-se *OneStep* retornar $y_2 + \delta$



Runge-Kutta com Passo Adaptativo

Estratégias

- ▶ Dobrar o passo
 - ▶ Similar ao que fizemos para Euler

$$y = y_1 + h^5 \Phi$$

$$y = y_2 + 2 \left(\frac{h}{2} \right)^5 \Phi = y_2 + \frac{h^5}{16} \Phi$$

- ▶ Logo:

$$\Delta = y_2 - y_1 = 15 \frac{h^5}{16} \Phi$$

- ▶ Então se $\frac{|\Delta|}{15} < e_{max}$, passo validado; caso contrário, passo deve ser refeito
 - ▶ Novo passo: $h_{novo} = 15 \left(\frac{e_{max}}{|\Delta|} \right)^{\frac{1}{n}}$



Runge-Kutta com Passo Adaptativo

Estratégias

- ▶ Dobrar o passo
 - ▶ Similar ao que fizemos para Euler

$$y = y_1 + h^5 \Phi$$

$$y = y_2 + 2 \left(\frac{h}{2} \right)^5 \Phi = y_2 + \frac{h^5}{16} \Phi$$

- ▶ Logo:

$$\Delta = y_2 - y_1 = 15 \frac{h^5}{16} \Phi$$

- ▶ Então se $\frac{|\Delta|}{15} < e_{max}$, passo validado; caso contrário, passo deve ser refeito
 - ▶ Novo passo: $h_{novo} = 15 \left(\frac{e_{max}}{|\Delta|} \right)^{\frac{1}{n}}$

Número de avaliações de $f(t, y)$?



Runge-Kutta com Passo Adaptativo

Estratégias

- ▶ Dobrar o passo
 - ▶ Similar ao que fizemos para Euler

$$y = y_1 + h^5 \Phi$$

$$y = y_2 + 2 \left(\frac{h}{2} \right)^5 \Phi = y_2 + \frac{h^5}{16} \Phi$$

- ▶ Logo:

$$\Delta = y_2 - y_1 = 15 \frac{h^5}{16} \Phi$$

- ▶ Então se $\frac{|\Delta|}{15} < e_{max}$, passo validado; caso contrário, passo deve ser refeito
 - ▶ Novo passo: $h_{novo} = 15 \left(\frac{e_{max}}{|\Delta|} \right)^{\frac{1}{n}}$

Número de avaliações de $f(t, y)$?

- ▶ $4 + 3 + 4 = 10$



Embedded Runge-Kutta

Métodos acoplados: método de ordem 5 que tem embutido a avaliação de erro do método de ordem 4

$$k_1 = h f(t_i, y_i)$$

$$k_2 = h f(t_i + a_2 h, y_i + b_{21} k_1)$$

$$\vdots$$

$$k_6 = h f(t_i + a_6 h, y_i + b_{61} k_1 + \cdots + b_{65} k_5)$$

$$y_{i+1} = y_i + \sum_{i=1}^6 c_i k_i + O(h^6)$$

$$y_{i+1}^* = y_i + \sum_{i=1}^6 c_i^* k_i + O(h^5)$$

$$\Delta = y_{i+1} - y_{i+1}^*$$

onde: a_i , b_{ij} , c_i , c_i^* são parâmetros da tabela *Cash-Karp*



Embedded Runge-Kutta

Tabela *Cash-Karp*

Cash-Karp Parameters for Embedded Runge-Kutta Method								
i	a_i	b_{ij}					c_i	c_i^*
1							$\frac{37}{378}$	$\frac{2825}{27648}$
2	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$					0	0
3	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{9}{40}$				$\frac{250}{621}$	$\frac{18575}{48384}$
4	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{9}{10}$	$\frac{6}{5}$			$\frac{125}{594}$	$\frac{13525}{55296}$
5	1	$-\frac{11}{54}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{70}{27}$	$\frac{35}{27}$			$\frac{277}{14336}$
6	$\frac{7}{8}$	$\frac{1631}{55296}$	$\frac{175}{512}$	$\frac{575}{13824}$	$\frac{44275}{110592}$	$\frac{253}{4096}$	$\frac{512}{1771}$	$\frac{1}{4}$
$j =$		1	2	3	4	5		



Tabela extraída de "Numerical Recipes", Vetterling et al., 1992



Embedded Runge-Kutta

Tabela *Cash-Karp*

Cash-Karp Parameters for Embedded Runge-Kutta Method								
i	a_i	b_{ij}					c_i	c_i^*
1							$\frac{37}{378}$	$\frac{2825}{27648}$
2	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$					0	0
3	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{9}{40}$				$\frac{250}{621}$	$\frac{18575}{48384}$
4	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{9}{10}$	$\frac{6}{5}$			$\frac{125}{594}$	$\frac{13525}{55296}$
5	1	$-\frac{11}{54}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{70}{27}$	$\frac{35}{27}$		0	$\frac{277}{14336}$
6	$\frac{7}{8}$	$\frac{1631}{55296}$	$\frac{175}{512}$	$\frac{575}{13824}$	$\frac{44275}{110592}$	$\frac{253}{4096}$	$\frac{512}{1771}$	$\frac{1}{4}$
$j =$		1	2	3	4	5		

Número de avaliações de $f(t, y)$?

Tabela extraída de "Numerical Recipes", Vetterling et al., 1992

Embedded Runge-Kutta

Tabela *Cash-Karp*

Cash-Karp Parameters for Embedded Runge-Kutta Method								
i	a_i	b_{ij}					c_i	c_i^*
1							$\frac{37}{378}$	$\frac{2825}{27648}$
2	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$					0	0
3	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{9}{40}$				$\frac{250}{621}$	$\frac{18575}{48384}$
4	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{9}{10}$	$\frac{6}{5}$			$\frac{125}{594}$	$\frac{13525}{55296}$
5	1	$-\frac{11}{54}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{70}{27}$	$\frac{35}{27}$		0	$\frac{277}{14336}$
6	$\frac{7}{8}$	$\frac{1631}{55296}$	$\frac{175}{512}$	$\frac{575}{13824}$	$\frac{44275}{110592}$	$\frac{253}{4096}$	$\frac{512}{1771}$	$\frac{1}{4}$
$j =$		1	2	3	4	5		

Número de avaliações de $f(t, y)$? 6

Tabela extraída de "Numerical Recipes", Vetterling et al., 1992

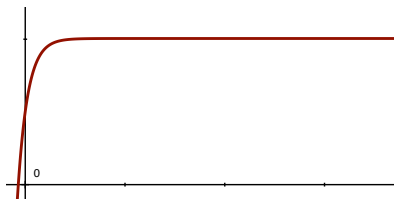
Métodos Implícitos e Sistemas Rígidos

Exemplo:

$$f(t, y) = 10(1 - y)$$

► Solução analítica

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-10t}}{2}$$



► Método de Euler:

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + h f(t_i, y_i) \\ &= y_i + 10h(1 - y_i) \\ &= y_i(1 - 10h) + 10h \end{aligned}$$



Métodos Implícitos e Sistemas Rígidos

Neste caso, Euler pode ser visto como Iteração de Ponto Fixo

- Solução converge para $y = 1$

$$g(x) = x(1 - 10h) + 10h$$

- Converge em $x = 1$ se $|g'(1)| = |1 - 10h| < 1$

$$\begin{aligned} 1 - 10h < 1 \quad \text{e} \quad 1 - 10h < -1 \\ \therefore h > 0 \quad \quad \quad \therefore h < \frac{2}{10} = 0.2 \end{aligned}$$

- Logo, converge se:

$$0 < h < 0.2$$



Métodos Implícitos e Sistemas Rígidos

De fato, considerando $y_0 = 0$:

$$y_{i+1} = y_i(1 - 10h) + 10h$$

► Para $h = 0.15$

0
1.5
0.75
1.125
0.9375
1.03125
0.984375
1.0078125
0.99609375
1.001953125
0.9990234375
1.00048828125
0.999755859375
1.0001220703125
0.99993896484375
1.0000305175781



Métodos Implícitos e Sistemas Rígidos

De fato, considerando $y_0 = 0$:

$$y_{i+1} = y_i(1 - 10h) + 10h$$

► Para $h = 0.15$

0
1.5
0.75
1.125
0.9375
1.03125
0.984375
1.0078125
0.99609375
1.001953125
0.9990234375
1.00048828125
0.999755859375
1.0001220703125
0.99993896484375
1.0000305175781

► Para $h = 0.25$

0
2.5
-1.25
4.375
-4.0625
8.59375
-10.390625
18.0859375
-24.62890625
39.443359375
-56.6650390625
87.49755859375
-128.74633789062
195.61950683594
-290.92926025391
438.89389038086



Método de Euler Implícito

$$y_{i+1} = y_i + h \underbrace{f(t_{i+1}, y_{i+1})}$$

avaliado no final do intervalo



Método de Euler Implícito

$$y_{i+1} = y_i + h \underbrace{f(t_{i+1}, y_{i+1})}$$

avaliado no final do intervalo

No exemplo:

$$y_{i+1} = y_i + 10h(1 - y_{i+1})$$

$$y_{i+1} = \frac{y_i + 10h}{1 + 10h}$$



Método de Euler Implícito

$$y_{i+1} = y_i + h \underbrace{f(t_{i+1}, y_{i+1})}$$

avaliado no final do intervalo

No exemplo:

$$y_{i+1} = y_i + 10h(1 - y_{i+1})$$

$$y_{i+1} = \frac{y_i + 10h}{1 + 10h}$$

► Para $h = 0.3$:

$$y_{i+1} = \frac{y_i + 3}{4}$$

► Vendo como Iteração de Ponto Fixo:

$$g(x) = \frac{x + 3}{4} \quad \therefore \quad g'(1) = \frac{1}{4} < 1 \Rightarrow \text{converge}$$



Método de Euler Implícito

Método implícito

- ▶ Sempre converge!



Método de Euler Implícito

Método implícito

- ▶ Sempre converge!

Problema:

- ▶ Em geral, não se consegue expressar a equação implícita original em uma solução explícita
 - ▶ Recai em sistemas lineares



Exercícios propostos

1. Considere o Método do Ponto Médio para resolução de Equações Diferenciais Ordinárias. Considere a equação $y' = 1 + y^2$, com $y_0 = 0$. Usando a estratégia de dobrar o passo, calcule o valor de $y(t)$ com passo $t = 0.1$. Qual o erro reportado pelo próprio método? Considerando uma tolerância igual a 10^{-2} para o erro local do método, qual seria o valor do passo h ideal para esse avanço?

