Suemy Inagaki
1811208

INF1608 – Análise Numérica: Prova 1 – 07/10/2021

Prof. Waldemar Celes
Departamento de Informática, PUC-Rio

A prova é ***individual****. As* ***justificativas*** *das resposta são essenciais. Respostas sem justificativas adequadas não serão consideradas na correção.*

As respostas devem ser escritas em **caligrafia própria**, digitalizadas e enviadas, em formato **pdf**, via EAD. Não esqueça de indicar *nome* e *número de matrícula* nas respostas.

O prazo para submissão **expira às 23:59h**.

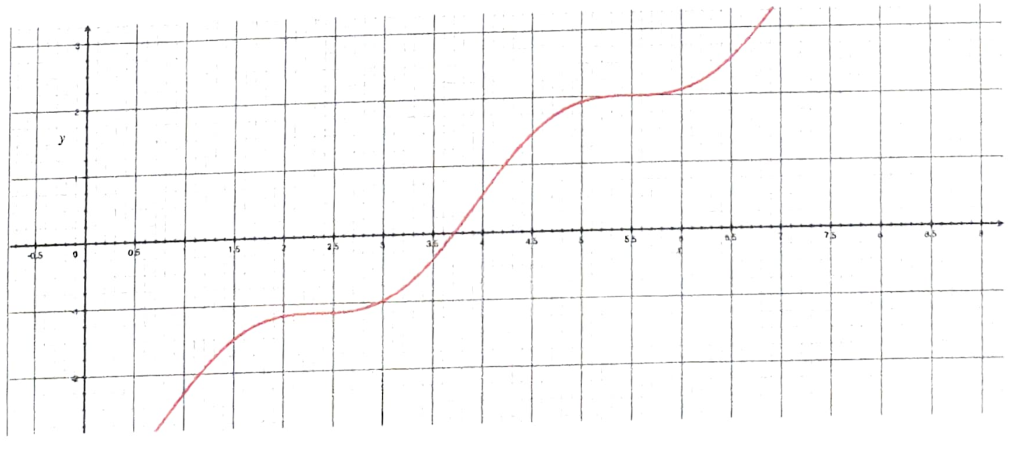
---

1. Se $fl(x)$ indica a representação do número x em precisão *double* nos computadores modernos, podemos afirmar que $fl(0.9)$ é maior que 0.9?

2. Considerando o Teorema de Taylor, deduza um polinômio $p(x)$, de grau 4, que aproxima a função $f(x) = sin(x)$ em torno de $x_0 = \pi/2$. Em seguida, escreva o código de uma função eficiente, usando a linguagem C, que avalia esse polinômio, com o protótipo:

```
double p (double x);
```

3. Analisando o gráfico da função $f(x) = \sin^2 x + x - 4$ mostrado abaixo, qual o valor retornado por uma *eficiente* implementação do Método da Bisseção após um total de 6 avaliações da função $f(x)$, assumindo um intervalo de busca $[a, b] = [0, 8]$? Indique o erro regressivo (avaliado na entrada) dessa solução e um limite superior do erro progressivo (avaliado na saída).



4. Assuma que um computador, usando uma implementação eficiente, resolve um sistema linear do tipo $U\mathbf{x} = \mathbf{b}$, onde U é uma matriz triangular superior de dimensão 500×500, em t unidades de tempo. Considerando uma implementação eficiente do método de fatoração $A = LU$, indique uma estimativa do número k de problemas do tipo:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1, \cdots, A\mathbf{x} = \mathbf{b}_k$$

onde A é uma matriz cheia de dimensão 500×500, que este mesmo computador é capaz de resolver em $1000\,t$ unidades de tempo. Assuma que o tempo gasto é proporcional à ordem de complexidade dos procedimentos.

5. Considere o Método dos Mínimos Quadrados, via obtenção de um sistema de equações normais, para resolução de sistemas inconsistentes do tipo $A_{m\times n}\mathbf{x}_n = \mathbf{b}_m$. Indique o sistema de equações normais, $A'_{n\times n}\bar{\mathbf{x}}_n = \mathbf{b}'_n$, que melhor ajusta uma parábola $p(x) = ax^2 + bx + c$, ao seguinte conjunto de pontos (x, y):

$$(0,0), (1,3), (2,3), (5,6)$$

Não é necessário resolver o sistema, apenas mostre os valores que compõem o sistema normal $n \times n$.

Suemy Inagaki - 1811208 - P1 de Análise Numérica.

Q1 Representação binária do $(0{,}9)_{10}$:

$0{,}9 \times 2 = 0{,}8 + 1$
$0{,}8 \times 2 = 0{,}6 + 1$
$0{,}6 \times 2 = 0{,}2 + 1$
$0{,}2 \times 2 = 0{,}4 + 0$
$0{,}4 \times 2 = 0{,}8 + 0$
$0{,}8 \times 2 = 0{,}6 + 1$
$0{,}6 \times 2 = 0{,}2 + 1$
$0{,}2 \times 2 = 0{,}4 + 0$
$\vdots$

$\Rightarrow (0{,}1\overline{1100})_2$

Notação científica:

$(1.\overline{1100} \times 2^{-1})_2$

Em double, temos 52 bits para a mantissa e 11 bits para o expoente.

Assim:

$\underbrace{}_{\text{sinal 1 bit}} \; \underbrace{1100 \cdots 1100}_{\text{52 bits mantissa}} \; \underbrace{}_{\text{11 bits expoente}}$

O bit 53 é 0, portanto, descartamos os bits 53 em diante.

Logo, no computador, o valor $(0{,}9)_{10}$ com precisão double é:

$$fl(0{,}9) = (0{,}1\underbrace{\overline{1100}}_{52 \text{bits} = 13 \text{ vezes}})_2$$

Assim, comparando o valor real de $(0{,}9)_{10}$ e o valor representado no computador:

Real:

$0{,}1\overbrace{1100 \cdots 1100}^{52 \text{ bits}}1100\ldots$

No computador:

$0{,}1\overbrace{1100 \cdots 1100}^{52 \text{bits}}$

$\Rightarrow fl(0{,}9) < 0{,}9$

Logo, A resposta da Pergunta é NÃO.

O arredondamento é para baixo.

Questão 2

Grau 4 , $x_0 = \pi/2$, $f(x) = \text{sen}(x)$.

Teorema de Taylor:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \dots + \frac{f^{k+1}(\xi)(x-x_0)^{k+1}}{(k+1)!}$$

As derivadas de $f(x)$ são:

$$f(x) = \text{sen}(x), \quad \text{sen}(\pi/2) = 1$$
$$f'(x) = \cos(x), \quad \cos(\pi/2) = 0$$
$$f''(x) = -\text{sen}(x), \quad -\text{sen}(\pi/2) = -1$$
$$f'''(x) = -\cos(x), \quad -\cos(\pi/2) = 0$$
$$f^{IV}(x) = \text{sen}(x), \quad \text{sen}(\pi/2) = 1$$
$$\vdots$$

Assim, para obtermos um polinômio do 4º grau, vamos precisar usar até o termo da quarta derivada:

$$f(x) = 1 + 0 + \left(\frac{-1}{2!}(x - \pi/2)^2\right) + 0 + \frac{1}{4!}(x - \pi/2)^4$$

$$f(x) = 1 - \frac{(x-\pi/2)^2}{2} + \frac{1}{24}(x-\pi/2)^4$$

$$f(x) = 1 + (x-\pi/2)^2\left(\frac{(x-\pi/2)^2}{24} - \frac{1}{2}\right)$$

$$\boxed{f(x) = 1 + \frac{(x-\pi/2)^2}{2}\left(\frac{(x-\pi/2)^2}{12} - 1\right)}$$

Função que avalia o polinômio:

```
#define PI 3.14159265358979323 84

double p (double x) {
    double aux = x - PI/2;
    aux = aux * aux;
    return (1 + (aux/2) * (aux/12 - 1));
}
```

Questão 3

$f(x) = \text{sen}^2(x) + x - 4$, $a = 0$, $b = 8$ 6 avaliações de $f(x)$.

→ em uma implementação eficiente

O número de avaliações é dado por $n+2$, onde n é o número de iterações. Assim:

$$6 = n + 2 \Rightarrow n = 4.$$

1ª iteração:

$a = 0$
$b = 8$
$c = 4$

A função em c é positiva e a função em a é negativa. Assim, $f(c) \cdot f(a) < 0$ e atualiza o valor de b.

2ª iteração

$a = 0$
$b = 4$
$c = 2$

$f(a)$ é negativo e $f(c)$ é negativo também. Então $f(a) \cdot f(c)$ é positiva e atualiza o valor de a.

3ª iteração

$a = 2$
$b = 4$
$c = 3$

$f(a)$ é negativa e $f(c)$ é negativa também. Então $f(a) \cdot f(c)$ é positivo e atualiza o valor de a.

4ª iteração

$a = 3$
$b = 4$
$c = 3{,}5$

$f(a)$ é negativo e $f(c)$ é negativo. $f(a) \cdot f(c) > 0$ e atualiza o valor de a

Fim do loop.

$a = 3{,}5$
$b = 4$
$c = 3{,}75$

Logo, a raiz encontrada é 3,75.

→ usei um programa em c para calcular.

O erro regressivo é dado por $|f(c)| = \boxed{0{,}07668\,23410\,824\,8662}$

O limite superior do erro progressivo é $\text{Erro} < \frac{b-a}{2^{n+1}}$, onde $n = 4$.

$$\text{Erro} < \frac{8-0}{2^5} \Rightarrow \frac{8}{2^5} \Rightarrow \frac{1}{4} = 0{,}25$$

Logo, o limite superior é $\boxed{0{,}25}$

Questão 4

Sistema linear $Ux = b$ (resolve, $\rightarrow 500 \times 500$) em t unidades de tempo

Fatoração $A = LU$, estimar o número K de problemas do tipo $Ax = b_1, \dots, Ax = b_K$ que este computador consegue resolver em $1000t$ unidades de tempo.

Para resolver o sistema linear do tipo $Ux = b$, onde U é uma matriz triangular superior de dimensão $n \times n$, precisamos fazer uma retrosubstituição e isso tem um custo computacional de $O(n^2)$.

Assim, como este computador resolve $Ux = b$ em t unidades de tempo:

$$O(n^2) \rightarrow t, \quad n = 500.$$

Sendo A a matriz que representa LU de forma eficiente, para resolver $Ax = b$, o custo é de $O(n^2)$, pois usa uma substituição progressiva e uma substituição regressiva.

Assim, para cada problema do tipo $Ax = b$, precisamos de t unidades de tempo. Como são K problemas desse tipo, o tempo total é dado por $K \cdot t$.

O enunciado diz que este computador é capaz de resolver os K problemas em 1000t unidades de tempo. Portanto:

$$1000t = kt \Rightarrow \boxed{k = 1000}$$

Questão 5

Parábola $p(x) = ax^2 + bx + c$

$(0,0)$, $(1,3)$, $(2,3)$, $(5,6)$

$$A'_{(n \times n)} = A^T_{(n \times m)} \cdot A_{(m \times n)}$$

$$b'_n = A^T_{(n \times m)} \cdot b_{(m \times 1)}$$

Montando o sistema inconsistente:

$$\begin{cases} a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 1 = 0 \\ a \cdot 1 + b \cdot 1 + c = 3 \\ a \cdot 4 + b \cdot 2 + c = 3 \\ a \cdot 25 + b \cdot 5 + c = 6 \end{cases}$$

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 25 & 5 & 1 \end{bmatrix}}_{(4 \times 3)} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}}_{x \,(3)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}}_{b \,(4)}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 25 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 25 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 642 & 134 & 30 \\ 134 & 30 & 8 \\ 30 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Continua.

$$A^T . b = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 25 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 165 \\ 39 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Assim, $A' \bar{x} = b'$ é dado por:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 642 & 134 & 30 \\ 134 & 30 & 8 \\ 30 & 8 & 4 \end{bmatrix}}_{A'} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}}_{\bar{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 165 \\ 39 \\ 12 \end{bmatrix}}_{b'}$$