

# Raízes de Equações

## INF1608 – Análise Numérica

Waldemar Celes  
celes@inf.puc-rio.br

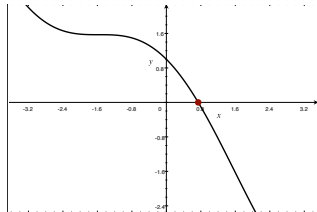
Departamento de Informática, PUC-Rio



# Raízes de Equações

## Problema

- Dada  $f(x)$ , determinar  $r$  tal que  $f(r) = 0$ , isto é,  $r$  seja raiz da equação  $f(x) = 0$



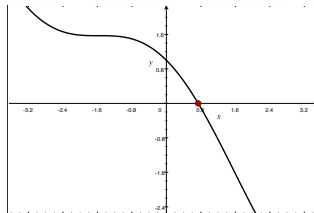
# Raízes de Equações

## Problema

- ▶ Dada  $f(x)$ , determinar  $r$  tal que  $f(r) = 0$ , isto é,  $r$  seja raiz da equação  $f(x) = 0$

## Métodos

- ▶ Bisseção
- ▶ Iteração de ponto fixo
- ▶ Newton-Raphson
- ▶ Secante
- ▶ Falsa posição
- ▶ Muller
- ▶ Interpolação quadrática inversa
- ▶ Brent



# Método da Bisseção

Método fechado:

- ▶ Deve-se ter um intervalo  $[a, b]$  que contenha a raiz



# Método da Bisseção

Método fechado:

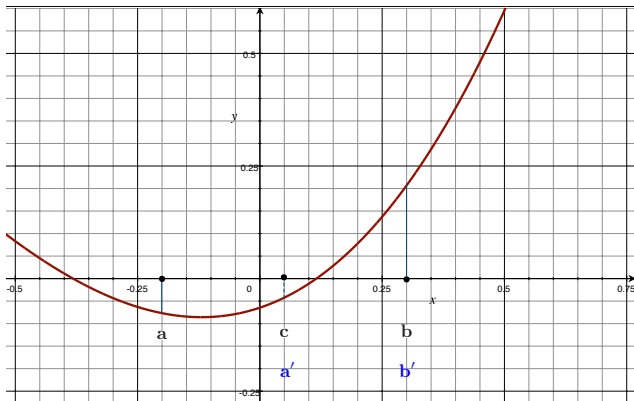
- ▶ Deve-se ter um intervalo  $[a, b]$  que contenha a raiz
  - ▶ Se  $f(x)$  é contínua e  $f(a)f(b) < 0$ , isto é,  $f(x)$  tem seu sinal invertido, então  $\exists r \in [a, b]$



# Método da Bisseção

Método fechado:

- ▶ Deve-se ter um intervalo  $[a, b]$  que contenha a raiz
  - ▶ Se  $f(x)$  é contínua e  $f(a)f(b) < 0$ , isto é,  $f(x)$  tem seu sinal invertido, então  $\exists r \in [a, b]$



# Método da Bisseção

## Método iterativo

- ▶ Dados  $f(x)$  e o intervalo  $[a, b]$
- ▶ Estima raiz:  $c = \frac{a+b}{2}$
- ▶ Ajusta intervalo:
  - ▶ Se  $f(a)f(c) < 0$  então:  $[a, b] \rightarrow [a, c]$
  - ▶ Senão:  $[a, b] \rightarrow [c, b]$
- ▶ Até que alguma precisão seja alcançada



# Método da Bisseção

## Método iterativo

- ▶ Dados  $f(x)$  e o intervalo  $[a, b]$
- ▶ Estima raiz:  $c = \frac{a+b}{2}$
- ▶ Ajusta intervalo:
  - ▶ Se  $f(a)f(c) < 0$  então:  $[a, b] \rightarrow [a, c]$
  - ▶ Senão:  $[a, b] \rightarrow [c, b]$
- ▶ Até que alguma precisão seja alcançada
- ▶ **Método retorna o meio do intervalo como solução**





# Método da Bisseção

Quando terminar a iteração? Como avaliar o erro?



# Método da Bisseção

Quando terminar a iteração? Como avaliar o erro?

Possíveis formas de **avaliação do erro**:

- ▶ Avaliação regressiva (*backward evaluation*)
  - ▶ Erro avaliado pela definição do problema (entrada)
  
- ▶ Avaliação progressiva (*forward evaluation*)
  - ▶ Erro avaliado pela solução do problema (saída)



# Método da Bisseção

Quando terminar a iteração? Como avaliar o erro?

Possíveis formas de **avaliação do erro**:

- ▶ Avaliação regressiva (*backward evaluation*)
  - ▶ Erro avaliado pela definição do problema (entrada)

$$|f(c)| \approx 0$$

- ▶ Avaliação progressiva (*forward evaluation*)
  - ▶ Erro avaliado pela solução do problema (saída)



# Método da Bisseção

Quando terminar a iteração? Como avaliar o erro?

Possíveis formas de **avaliação do erro**:

- ▶ Avaliação regressiva (*backward evaluation*)
  - ▶ Erro avaliado pela definição do problema (entrada)

$$|f(c)| \approx 0$$

- ▶ Sempre possível, nem sempre preciso
- ▶ Avaliação progressiva (*forward evaluation*)
  - ▶ Erro avaliado pela solução do problema (saída)



# Método da Bisseção

Quando terminar a iteração? Como avaliar o erro?

Possíveis formas de **avaliação do erro**:

- ▶ Avaliação regressiva (*backward evaluation*)
  - ▶ Erro avaliado pela definição do problema (entrada)

$$|f(c)| \approx 0$$

- ▶ Sempre possível, nem sempre preciso
- ▶ Avaliação progressiva (*forward evaluation*)
  - ▶ Erro avaliado pela solução do problema (saída)

$$|r - c| \approx 0$$



# Método da Bisseção

Quando terminar a iteração? Como avaliar o erro?

Possíveis formas de **avaliação do erro**:

- ▶ Avaliação regressiva (*backward evaluation*)
  - ▶ Erro avaliado pela definição do problema (entrada)

$$|f(c)| \approx 0$$

- ▶ Sempre possível, nem sempre preciso

- ▶ Avaliação progressiva (*forward evaluation*)
  - ▶ Erro avaliado pela solução do problema (saída)

$$|r - c| \approx 0$$

- ▶ Sempre preciso, quase nunca possível



# Método da Bisseção

A avaliação de erro progressiva reger o conhecimento da solução.

Como avaliar  $|r - c|$ ?



# Método da Bisseção

A avaliação de erro progressiva reger o conhecimento da solução.

Como avaliar  $|r - c|$ ?

- ▶ No caso do Método da Bisseção, podemos avaliar um limite superior:

$$\frac{b - a}{2} > |r - c|$$

- ▶ Esta é uma vantagem do Método da Bisseção, não encontrada na maioria dos métodos numéricos





# Método da Bisseção

A avaliação de erro progressiva reger o conhecimento da solução.

Como avaliar  $|r - c|$ ?

- ▶ No caso do Método da Bisseção, podemos avaliar um limite superior:

$$\frac{b - a}{2} > |r - c|$$

- ▶ Esta é uma vantagem do Método da Bisseção, não encontrada na maioria dos métodos numéricos

Avaliação de erro relativo na bisseção (e maioria dos métodos):

$$\frac{|c^{k-1} - c^k|}{|c^k|}$$



# Método da Bisseção

Algoritmo (com controle de erro progressivo):

- Dados  $[a, b]$  tal que  $f(a)f(b) < 0$ :

```
while  $\frac{b - a}{2} > \epsilon$   
     $c = \frac{a + b}{2}$   
  
    if  $f(a)f(c) < 0$   
         $b = c$   
    else  
         $a = c$   
return  $\frac{a + b}{2}$ 
```



# Método da Bisseção

Algoritmo:

- Dados  $[a, b]$  tal que  $f(a)f(b) < 0$ :

```
while  $\frac{b - a}{2} > \epsilon$   
     $c = \frac{a + b}{2}$   
    if  $f(c) \approx 0$   
        break  
    if  $f(a)f(c) < 0$   
         $b = c$   
    else  
         $a = c$   
return  $\frac{a + b}{2}$ 
```



# Método da Bisseção

Algoritmo:

- ▶ Dados  $[a, b]$  tal que  $f(a)f(b) < 0$ :

```
while  $\frac{b - a}{2} > \epsilon$   
     $c = \frac{a + b}{2}$   
    if  $f(c) \approx 0$   
        break  
    if  $f(a)f(c) < 0$   
         $b = c$   
    else  
         $a = c$   
return  $\frac{a + b}{2}$ 
```

- ▶ **Convergência garantida**

- ▶ Uma das raízes existentes em  $[a, b]$  será capturada



# Método da Bisseção

## Precisão e desempenho

- ▶ Desempenho medido pelo número de avaliações de  $f(x)$ 
  - ▶ Avaliação de  $f(x)$  pode ser computacionalmente custoso



# Método da Bisseção

Precisão e desempenho

- ▶ Desempenho medido pelo número de avaliações de  $f(x)$ 
  - ▶ Avaliação de  $f(x)$  pode ser computacionalmente custoso

Quantas avaliações de  $f(x)$  são necessárias por iteração?



# Método da Bisseção

Precisão e desempenho

- ▶ Desempenho medido pelo número de avaliações de  $f(x)$ 
  - ▶ Avaliação de  $f(x)$  pode ser computacionalmente custoso

Quantas avaliações de  $f(x)$  são necessárias por iteração?

→ 1

(e implementação não pode avaliar mais)



# Método da Bisseção

Precisão e desempenho

- ▶ Desempenho medido pelo número de avaliações de  $f(x)$ 
  - ▶ Avaliação de  $f(x)$  pode ser computacionalmente custoso

Quantas avaliações de  $f(x)$  são necessárias por iteração?

→ 1

(e implementação não pode avaliar mais)

Número total de avaliações de  $f(x)$ :  $n + 2$





# Método da Bisseção

Precisão da Solução

- Considerando  $n$  iterações

$$Erro = |c - r| < \frac{b - a}{2^{n+1}}$$



# Método da Bisseção

## Precisão da Solução

- ▶ Considerando  $n$  iterações

$$Erro = |c - r| < \frac{b - a}{2^{n+1}}$$

- ▶ Note:

$n$	$Erro$
0	$ c - r  < \frac{b-a}{2}$
1	$ c - r  < \frac{b-a}{4}$
2	$ c - r  < \frac{b-a}{8}$
...	...

Logo, a cada iteração:

- ▶ Faz-se 1 avaliação de  $f(x)$
- ▶ Reduz-se o erro à metade

$$\longrightarrow \textbf{Convergência linear} \longrightarrow \frac{e_{i+1}}{e_i} = \frac{1}{2} = k < 1$$



# Método da Bisseção

Como prever o número de iterações necessárias?

- ▶ Exemplo: determinar  $r \in [0, 1]$  com precisão de 6 casas



# Método da Bisseção

Como prever o número de iterações necessárias?

- Exemplo: determinar  $r \in [0, 1]$  com precisão de 6 casas

$$\text{erro} < \frac{b - a}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}}$$

Então:

$$\frac{1}{2^{n+1}} < 0.5 \times 10^{-6}$$

$$n \approx 19.93$$

Logo, precisamos de **20 iterações**



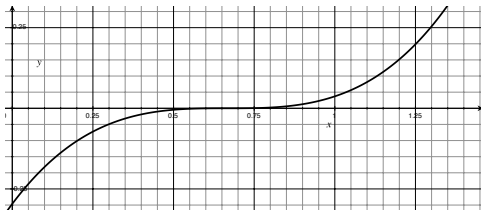
# Método da Bisseção

Erros regressivo vs progressivo

- ▶ Em alguns casos, a falta de precisão para avaliar o erro regressivo impede a obtenção da solução dentro da precisão desejada

Exemplo:

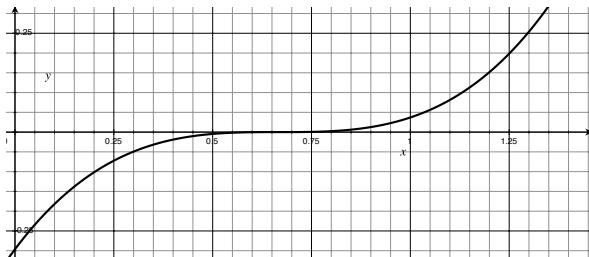
$$f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{27}$$



# Método da Bisseção

Exemplo:

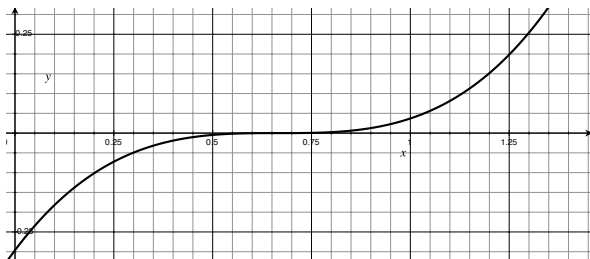
$$f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{27}, \quad \text{com solução } r = \frac{2}{3}$$



# Método da Bisseção

Exemplo:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{27}, \quad \text{com solução } r = \frac{2}{3}$$



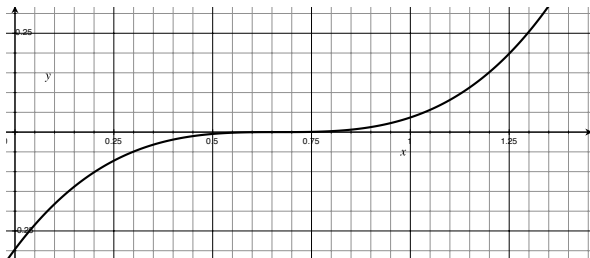
Solução do Método da Bisseção é limitada a  $10^{-5}$  de precisão

- Pois  $f(0.6666641) = 0$  na precisão *double*

# Método da Bisseção

Exemplo:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{27}, \quad \text{com solução } r = \frac{2}{3}$$



Solução do Método da Bisseção é limitada a  $10^{-5}$  de precisão

- Pois  $f(0.6666641) = 0$  na precisão *double*

Obs:

- No caso, a raiz tem multiplicidade 3, situação que perdemos precisão, mas isso também pode ocorrer com multiplicidade 1.





# Método da Bisseção

Método intervalar:  $r \in [a, b]$

- ▶ Vantagem: convergência garantida
- ▶ Desvantagem: necessidade de conhecer  $[a, b]$



# Método da Bisseção

Método intervalar:  $r \in [a, b]$

- ▶ Vantagem: convergência garantida
- ▶ Desvantagem: necessidade de conhecer  $[a, b]$

Determinação de intervalos iniciais

- ▶ Busca incremental:  $\delta$

$$x_{i+1} = x_i + \delta$$

- ▶ até encontrar  $f(x_i)f(x_{i+1}) < 0$



# Método da Bisseção

Método intervalar:  $r \in [a, b]$

- ▶ Vantagem: convergência garantida
- ▶ Desvantagem: necessidade de conhecer  $[a, b]$

Determinação de intervalos iniciais

- ▶ Busca incremental:  $\delta$

$$x_{i+1} = x_i + \delta$$

- ▶ até encontrar  $f(x_i)f(x_{i+1}) < 0$
- ▶ Qual  $\delta$  usar?
  - ▶ Questão em aberto: eficiência vs eficácia



# Método da Bisseção

Método intervalar:  $r \in [a, b]$

- ▶ Vantagem: convergência garantida
- ▶ Desvantagem: necessidade de conhecer  $[a, b]$

Determinação de intervalos iniciais

- ▶ Busca incremental:  $\delta$

$$x_{i+1} = x_i + \delta$$

- ▶ até encontrar  $f(x_i)f(x_{i+1}) < 0$
- ▶ Qual  $\delta$  usar?
  - ▶ Questão em aberto: eficiência vs eficácia
- ▶ Se possível, usar  $f'(a)$  e  $f'(b)$ :
  - ▶ Troca de sinal indica mínimo ou máximo da função
  - ▶ Intervalo deve ser melhor inspecionado



# Métodos Abertos

## Métodos abertos

- ▶ Não exigem  $r \in [a, b]$
- ▶ Partem de uma **estimativa inicial**
  - ▶ Quanto mais perto de  $r$ , melhor
  - ▶ Menos restritivo que intervalar
- ▶ Podem não convergir



# Iteração de Ponto Fixo

Exemplo

- ▶ Avaliação contínua de  $\cos x$



# Iteração de Ponto Fixo

## Exemplo

- Avaliação contínua de  $\cos x$

Resultado:  $\approx 0.739$

$x_0 = 1$   
0.54030230586814  
0.85755321584639  
0.65428979049778  
0.79348035874257  
0.70136877362276  
0.76395968290065  
0.72210242502671  
0.75041776176376  
0.73140404242251  
0.74423735490056  
0.73560474043635  
0.74142508661011  
0.73750689051324  
0.74014733556788  
0.73836920412232  
0.73956720221226  
0.73876031987421



# Iteração de Ponto Fixo

## Exemplo

- Avaliação contínua de  $\cos x$

Resultado:  $\approx 0.739$

Logo,  $x = \cos x$  para  $x = 0.739...$

- Diz-se que  $0.739...$  é **ponto fixo** da função  $f(x) = \cos x$

$x_0 = 1$   
0.54030230586814  
0.85755321584639  
0.65428979049778  
0.79348035874257  
0.70136877362276  
0.76395968290065  
0.72210242502671  
0.75041776176376  
0.73140404242251  
0.74423735490056  
0.73560474043635  
0.74142508661011  
0.73750689051324  
0.74014733556788  
0.73836920412232  
0.73956720221226  
0.73876031987421

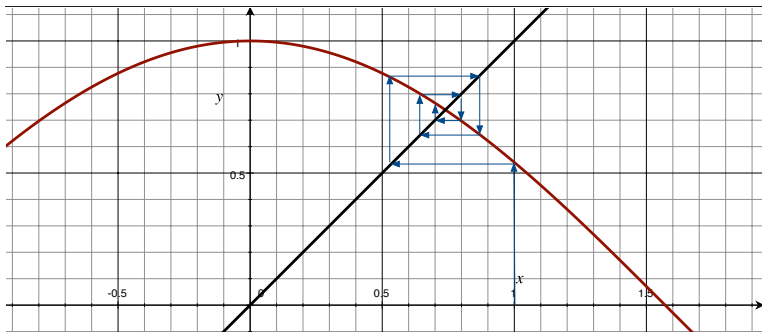




# Iteração de Ponto Fixo

Graficamente

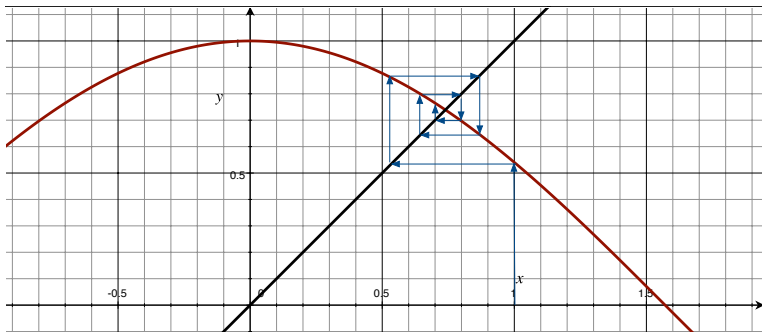
►  $f(x) = \cos(x)$



# Iteração de Ponto Fixo

Graficamente

►  $f(x) = \cos(x)$

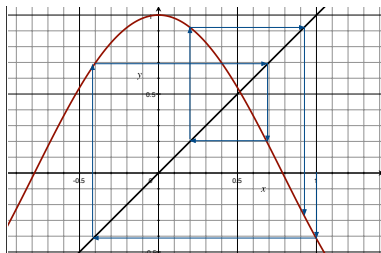


$$|f'(r)| < 1 \Rightarrow \text{há convergência}$$

# Iteração de Ponto Fixo

Graficamente

►  $f(x) = \cos(2x)$



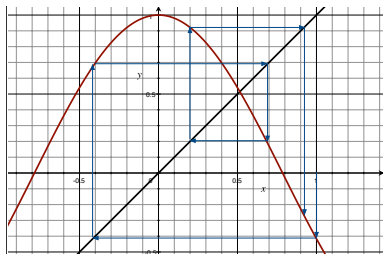
$$|f'(r)| > 1$$

$\Rightarrow$  não há convergência

# Iteração de Ponto Fixo

Graficamente

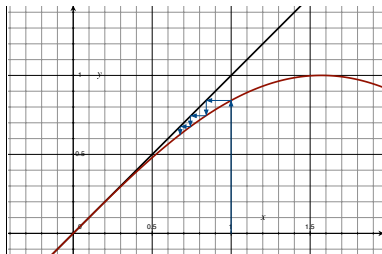
►  $f(x) = \cos(2x)$



$$|f'(r)| > 1$$

$\Rightarrow$  não há convergência

►  $f(x) = \sin(x)$



$$|f'(r)| = 1$$

$\Rightarrow$  limite da convergência

# Iteração de Ponto Fixo

Método por iteração de ponto fixo

- ▶ Quando há convergência, podemos usar para determinar raízes

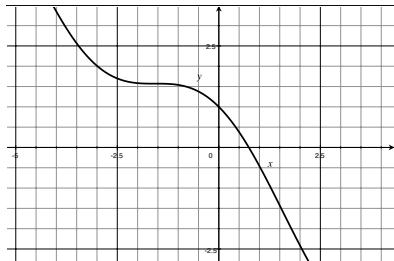


# Iteração de Ponto Fixo

Método por iteração de ponto fixo

- ▶ Quando há convergência, podemos usar para determinar raízes

Exemplo:  $f(x) = \cos(x) - x$

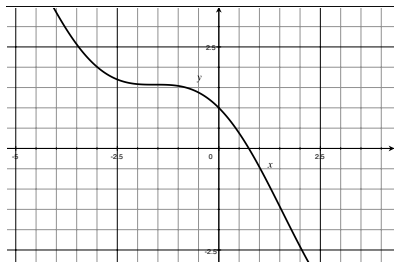


# Iteração de Ponto Fixo

Método por iteração de ponto fixo

- ▶ Quando há convergência, podemos usar para determinar raízes

Exemplo:  $f(x) = \cos(x) - x$



$$\begin{aligned}\cos(x) - x &= 0 \\ x &= \cos(x)\end{aligned}$$

- ▶ Logo:  $r = 0.739$

# Iteração de Ponto Fixo

Método por iteração de ponto fixo

- ▶ Transformação:  $f(x) \Rightarrow g(x) - x$ 
  - ▶ Achar ponto fixo de  $g(x)$





# Iteração de Ponto Fixo

Método por iteração de ponto fixo

- ▶ Transformação:  $f(x) \Rightarrow g(x) - x$ 
  - ▶ Achar ponto fixo de  $g(x)$
- ▶ Algoritmo
  - ▶ Dado  $x_0$

$x = x_0$

**while**  $|g(x) - x| > \epsilon$

$x = g(x)$

**return**  $x$



# Iteração de Ponto Fixo

Exemplo:  $x^3 + x = 1$

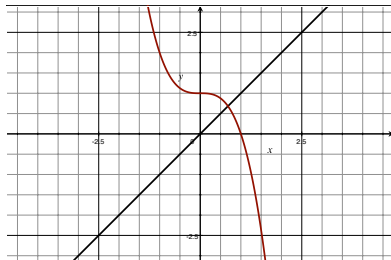


# Iteração de Ponto Fixo

Exemplo:  $x^3 + x = 1$

1.  $x = 1 - x^3$

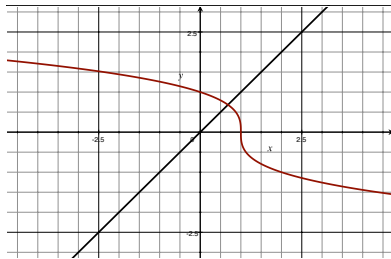
► Não converge



# Iteração de Ponto Fixo

Exemplo:  $x^3 + x = 1$

1.  $x = 1 - x^3$ 
  - ▶ Não converge
2.  $x = \sqrt[3]{1 - x}$ 
  - ▶ Converge lentamente



# Iteração de Ponto Fixo

Exemplo:  $x^3 + x = 1$

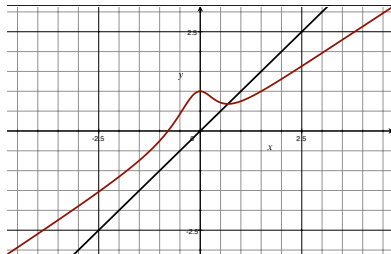
1.  $x = 1 - x^3$ 
  - ▶ Não converge
2.  $x = \sqrt[3]{1 - x}$ 
  - ▶ Converge lentamente
3. Somando  $2x^3$  nos dois lados:

$$3x^3 + x = 2x^3 + 1$$

$$(3x^2 + 1)x = 2x^3 + 1$$

$$x = \frac{2x^3 + 1}{3x^2 + 1}$$

- ▶ Converge rapidamente

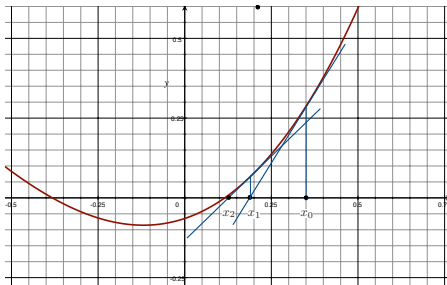


# Método de Newton-Raphson

Isaac Newton & Joseph Raphson

Método aberto

- ▶ Estimativa inicial  $x_0$
- ▶ Assume ser possível avaliação de  $f'(x)$



Equação da reta tangente:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

# Método de Newton-Raphson

Equação da reta tangente:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Ponto de interseção da reta com eixo  $x$ :

$$y = 0 \therefore f'(x_0)(x - x_0) = -f(x_0)$$

$$x - x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$



# Método de Newton-Raphson

Equação da reta tangente:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Ponto de interseção da reta com eixo  $x$ :

$$y = 0 \therefore f'(x_0)(x - x_0) = -f(x_0)$$

$$x - x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

**Método de Newton-Raphson:**

$x_0$  = estimativa inicial

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$





# Análise de Convergência

Convergência linear:

$$\frac{e_{i+1}}{e_i} = k, \text{ onde: } k < 1$$



# Análise de Convergência

Convergência linear:

$$\frac{e_{i+1}}{e_i} = k, \text{ onde: } k < 1$$

- Método da bisseção

$$k = \frac{1}{2}$$



# Análise de Convergência

Convergência linear:

$$\frac{e_{i+1}}{e_i} = k, \text{ onde: } k < 1$$

- ▶ Método da bisseção

$$k = \frac{1}{2}$$

- ▶ Método por iteração de ponto fixo

$$k = |g'(r)|$$



# Análise de Convergência

Convergência linear:

$$\frac{e_{i+1}}{e_i} = k, \text{ onde: } k < 1$$

- ▶ Método da bisseção

$$k = \frac{1}{2}$$

- ▶ Método por iteração de ponto fixo

$$k = |g'(r)|$$

Convergência quadrática:

$$M = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{e_{i+1}}{e_i^2} < \infty$$



# Método de Newton-Raphson

## Análise do erro

- O método de NR pode ser deduzido considerando 2 termos da série de Taylor

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i)$$



# Método de Newton-Raphson

## Análise do erro

- O método de NR pode ser deduzido considerando 2 termos da série de Taylor

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i)$$

- Na interseção com o eixo  $x$ ,  $f(x_{i+1}) = 0$ . Então:

$$0 = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i)$$

$$\therefore x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$



# Método de Newton-Raphson

Análise do erro

- ▶ Se a série inteira fosse usada,  $x_{i+1}$  seria  $r$ :

$$0 = f(x_i) + f'(x_i)(r - x_i) + \frac{f''(c)}{2}(r - x_i)^2, \quad c \in [x_i, r]$$



# Método de Newton-Raphson

## Análise do erro

- ▶ Se a série inteira fosse usada,  $x_{i+1}$  seria  $r$ :

$$0 = f(x_i) + f'(x_i)(r - x_i) + \frac{f''(c)}{2}(r - x_i)^2, \quad c \in [x_i, r]$$

- ▶ Logo:

$$-\frac{f(x_i)}{f'(x_i)} = r - x_i + \frac{(r - x_i)^2}{2} \frac{f''(c)}{f'(x_i)}$$

$$x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} - r = \frac{(r - x_i)^2}{2} \frac{f''(c)}{f'(x_i)}$$

- ▶ Tomando um passo de NR com  $e_i = x_i - r$ :

$$x_{i+1} - r = e_i^2 \frac{f''(c)}{2f'(x_i)}$$

$$e_{i+1} = e_i^2 \left| \frac{f''(c)}{2f'(x_i)} \right|$$

- ▶ Logo, NR pode ter convergência quadrática

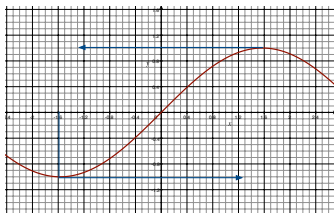
$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{e_{i+1}}{e_i^2} = \frac{f''(c)}{2f'(x_i)}$$





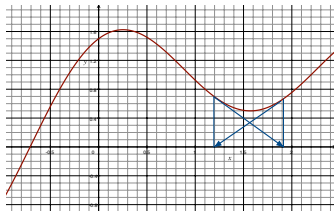
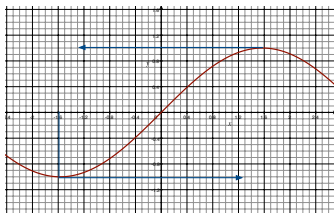
# Método de Newton-Raphson

Exemplos de não convergência



# Método de Newton-Raphson

## Exemplos de não convergência



# Método de Newton-Raphson

Exemplos de convergência linear

- Raiz de  $f(x) = x^2$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^2}{2x_i}$$

$$x_{i+1} = \frac{x_i}{2}$$

Logo:

$$e_{i+1} = \frac{e_i}{2}$$



# Método de Newton-Raphson

Exemplos de convergência linear

- ▶ Raiz de  $f(x) = x^2$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^2}{2x_i}$$

$$x_{i+1} = \frac{x_i}{2}$$

Logo:

$$e_{i+1} = \frac{e_i}{2}$$

## Importante

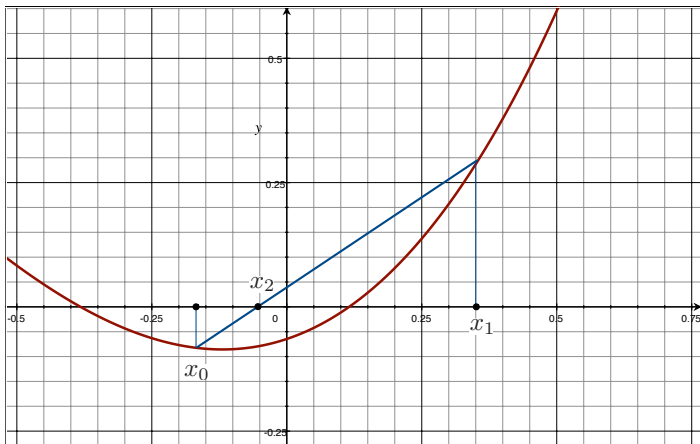
- ▶ Uma implementação de NR deve sempre limitar o número de iterações, pois pode não convergir



# Método da Secante

Usa a reta secante para aproximar  $f'(x)$

- ▶ Preserva características do Método de Newton-Raphson
- ▶ Usa 2 estimativas iniciais



# Método da Secante

Avalia  $f'(x)$  por diferenças finitas

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

Substituindo na fórmula de NR:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$
$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$

## Importante

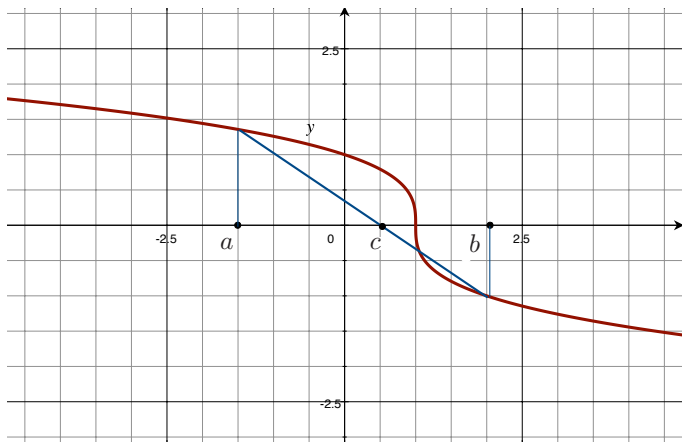
- ▶ Método **aberto**, pode não convergir



# Método da Falsa Posição

Combina Método da **Bisseção** com Método da **Secante**

- ▶ Método intervalar:  $f(a)f(b) < 0$
- ▶ Tende a convergir mais rápido que Bisseção



# Método da Falsa Posição

Bisseção:

$$c = \frac{a + b}{2}$$





# Método da Falsa Posição

Bisseção: 
$$c = \frac{a + b}{2}$$

## Falsa Posição:

- Por semelhança de triângulo

$$\frac{c - a}{b - a} = \frac{f(a)}{f(a) - f(b)}$$

$$c = a + \frac{f(a)(b - a)}{f(a) - f(b)}$$

$$c = \frac{af(a) - af(b) + bf(a) - af(a)}{f(a) - f(b)}$$



# Método da Falsa Posição

Bisseção: 
$$c = \frac{a + b}{2}$$

## Falsa Posição:

- Por semelhança de triângulo

$$\frac{c - a}{b - a} = \frac{f(a)}{f(a) - f(b)}$$

$$c = a + \frac{f(a)(b - a)}{f(a) - f(b)}$$

$$c = \frac{a f(a) - a f(b) + b f(a) - a f(a)}{f(a) - f(b)}$$

- Logo:

$$c = \frac{b f(a) - a f(b)}{f(a) - f(b)}, \text{ equivalente a secante}$$



# Método da Falsa Posição

Bisseção: 
$$c = \frac{a + b}{2}$$

## Falsa Posição:

- ▶ Por semelhança de triângulo

$$\frac{c - a}{b - a} = \frac{f(a)}{f(a) - f(b)}$$

$$c = a + \frac{f(a)(b - a)}{f(a) - f(b)}$$

$$c = \frac{a f(a) - a f(b) + b f(a) - a f(a)}{f(a) - f(b)}$$

- ▶ Logo:

$$c = \frac{b f(a) - a f(b)}{f(a) - f(b)}, \text{ equivalente a secante}$$

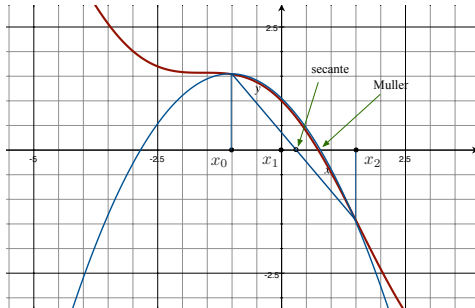
- ▶ Implementação igual a Bisseção



# Método de Muller

## Método aberto

- ▶ Parte de 3 estimativas iniciais:  $x_0, x_1, x_2$
- ▶ Determina parábola interpolante:  $p(x)$
- ▶ Raízes da parábola interceptam o eixo  $x$
- ▶ Adota como  $x_3$  a raiz mais próxima de  $x_2$
- ▶ Cicla as estimativas, descartando a mais antiga ( $x_0$ )



# Método da Interpolação Quadrática Inversa

## Método aberto

- ▶ Parte de 3 estimativas iniciais:  $x_0, x_1, x_2$
- ▶ Determina parábola interpolante inversa:  $p(y)$
- ▶ Adota interseção de  $y$  com eixo  $x$ :  $p(0) = c$
- ▶ Cicla as estimativas, descartando a mais antiga ( $x_0$ )



# Método de Brent

Método intervalar com convergência rápida

- ▶ Função `fzero` do MatLab usa uma versão desse método

Dados  $[a, b]$  tal que  $f(a)f(b) < 0$

- ▶ Estimativas iniciais:
  - ▶  $x_2 = \frac{a+b}{2}$
  - ▶ Defina  $x_0$  e  $x_1$ , usando critério de Bissecção
    - ▶ Se  $f(a)f(x_2) < 0$ :  $x_0 = b$  e  $x_1 = a$
    - ▶ Senão:  $x_0 = a$  e  $x_1 = b$
- ▶ Usa Bissecção com  $x_1$  e  $x_2$ , achando  $x_3$
- ▶ Aplica IQI com  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$ , achando  $x'_3$
- ▶ Substitui  $x_3$  por  $x'_3$  se:
  - ▶ Erro regressivo diminui:  $f(x'_3) < f(x_3)$
  - ▶ Se intervalo de busca diminui
- ▶ Senão, aplica mesma tentativa com Método da Secante



## Exercício Proposto

Considere a equação  $x^3 - 2x - 2 = 0$ .

Aplique duas iterações dos métodos:

- ▶ Bisseção com  $[a, b] = [1, 2]$
- ▶ Newton-Raphson com  $x_0 = 2$
- ▶ Secante com  $x_0 = 1$  e  $x_1 = 2$
- ▶ Falsa Posição com  $[a, b] = [1, 2]$
- ▶ Interpolação Quadrática Inversa com  $x_0 = 1$ ,  $x_1 = 2$  e  $x_2 = 0$

