

LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT  
MÜNCHEN

FORTGESCHRITTENENPRAKTIKUM II  
WINTERSEMESTER 22/23

# Gaußsche Strahlenoptik

*Guido Osterwinter und Jan-Philipp Christ*

München, den 11. November 2022

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Zielsetzung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Versuchsdurchführung</b>	<b>3</b>
<b>2.1</b>	<b>Untersuchung eines Gaußschen Laserstrahls . . . . .</b>	<b>3</b>
2.1.1	Präparation eines Laserstrahls mit einem bestimmten Waist . . . .	3
<b>2.2</b>	<b>Optischer Resonator . . . . .</b>	<b>4</b>
2.2.1	Aufbau des Resonators . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Ergebnisse und Diskussion</b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>6</b>
<b>A</b>	<b>Python-Skripte zur Auswertung</b>	<b>7</b>

## 1. Zielsetzung

Die geometrische Optik liefert nur eine unzureichende Beschreibung von Laserstrahlen, da im Rahmen dieser der Wellencharakter des Lichtes gänzlich vernachlässigt wird. Deutlich wird dies insbesondere bei konvergenten Strahlen, die nach der geometrischen Optik in einen einzelnen Punkt zusammenlaufen würden, obwohl dies durch Beugungseffekte nicht zulässig ist.

Berücksichtigt man nun den Wellencharakter des Lichtes und das typischerweise gaußförmige Intensitätsprofil eines Laserstrahls, führt dies zur Gaußschen Strahlenoptik.

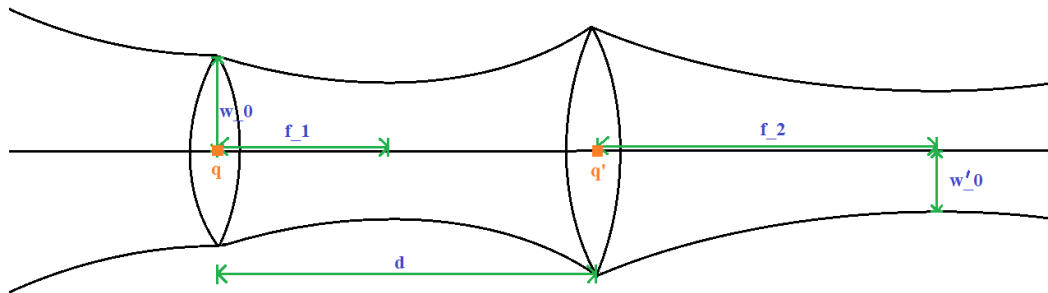
Im ersten Teil des hier vorgestellten Versuchs soll es um das experimentelle Untersuchen charakteristischer Größen eines solchen Laserstrahls gehen. So wird die Strahltaille (waist) senkrecht zur Ausbreitungsrichtung sowie der Strahlradius als Funktion der zur Ausbreitungsrichtung parallelen Koordinate untersucht.

Im zweiten Versuchsteil wird das Verhalten Gaußscher Strahlen in einem aus zwei gekrümmten halbdurchlässigen Spiegel bestehenden Resonators untersucht. Insbesondere wird auf die Transmissionsfunktion als Funktion des Spiegelabstandes eingegangen und beispielhaft die Finesse eines konfokalen Resonators bestimmt.

## 2. Versuchsdurchführung

### 2.1. Untersuchung eines Gaußschen Laserstrahls

#### 2.1.1. Präparation eines Laserstrahls mit einem bestimmten Waist



**Abbildung 1** Fokussierung eines Gaußstrahls auf bestimmten Waist  $w'_0$

Vorgegeben sind die Werte  $w_0 = 1 \text{ mm}$ ,  $\lambda = 632.8 \text{ nm}$ ,  $w'_0 = 5 \mu\text{m}$ ,  $f_1 = 50 \text{ mm}$ ,  $f_2 = 100 \text{ mm}$ . Um hieraus  $d$  zu bestimmen, betrachte man die Transfermatrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_1} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{d}{f_1} & d \\ \frac{d - f_1 - f_2}{f_1 f_2} & 1 - \frac{d}{f_2} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (1)$$

Für die Umgebung, in der sich die Gaußstrahlen ausbreiten, sei in guter Näherung ein Brechungsindex von  $n = 1$  angenommen. Der Wert von  $q$  in Abbildung 1 ist dann

$$q = 0 + i\frac{\pi}{\lambda}w_0^2 \quad (2)$$

Gemäß dem 'ABCD'-Gesetz für Gaußstrahlen gilt damit für  $q'$  in Abbildung 1

$$q' = \frac{Aq + B}{Cq + D} \quad (3)$$

Für  $q'$  soll aber auch

$$q' = -f_2 + i\frac{\pi}{\lambda}w_0'^2 \quad (4)$$

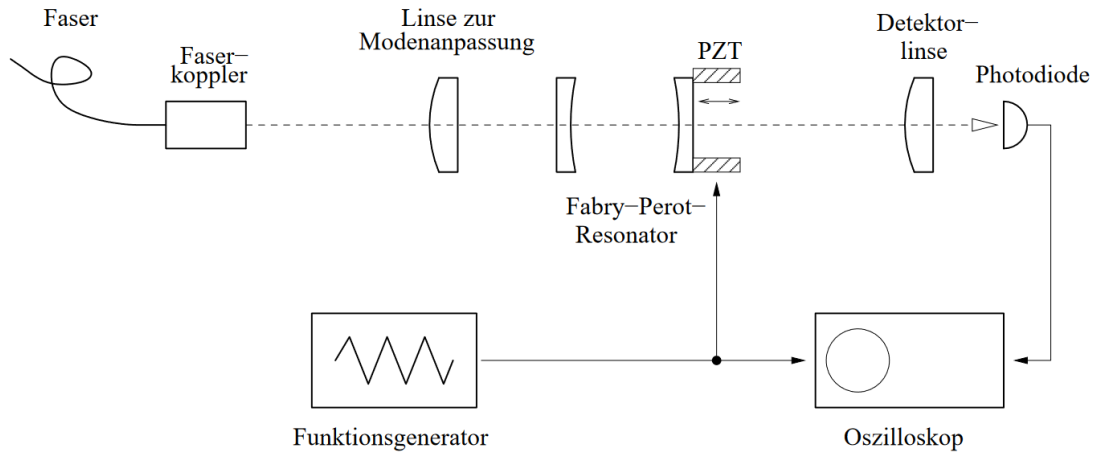
gelten. Löst man die Gleichungen 3 und 4 nach  $d$  auf, erhält man

$$\left(f_1 f_2 \frac{w_0}{w_0'}\right)^2 = (f_1 f_2 - d f_1)^2 + (d - f_1 - f_2)^2 \cdot \left(\frac{\pi w_0^2}{\lambda}\right)^2 \quad (5)$$

$$\Rightarrow d = 35.15 \text{ cm} \quad (6)$$

## 2.2. Optischer Resonator

### 2.2.1. Aufbau des Resonators



**Abbildung 2** Aufbau zum optischen Resonator (aus [1])

Damit sich im Fabry-Perot-Resonator aus sphärischen Spiegeln eine stehende Welle bilden kann, soll die Waist des Gauß-Strahls mittig zwischen den beiden Spiegeln liegen. Betrachtet man den halbdurchlässigen Spiegel  $\mathfrak{S}$ , durch den der Gaußstrahl in

den Resonator einfällt, als Linse der Dicke  $b = 6.35$  mm und mit Krümmungsradien  $R_1 = \infty, R_2 \equiv R = 50$  mm, so kann unter Zuhilfenahme der Brechungsmatrix

$$B_R \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1 - n_2}{n_2 \cdot R} & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix} \quad (7)$$

an einer gekrümmten Ebene zwischen zwei Medien mit Brechungsindizes  $n_1$  und  $n_2$  nach [2] die Transfermatrix von  $\mathfrak{S}$  bestimmt werden:

$$T \equiv \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-n}{n \cdot \infty} & \frac{1}{n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n-1}{1 \cdot (-R)} & \frac{n}{1} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{b(1-n)}{R} + 1 & bn \\ \frac{1-n}{nR} & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Im Resonator geben die Randbedingungen vor, dass  $w'_0 = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{d}{2} \left( R - \frac{d}{2} \right)}}$  gilt, wodurch insbesondere  $q' \equiv z' + iz'_R$  festgelegt wird. Damit lässt sich auf  $q = z + iz_R$  außerhalb des Resonators, also vor dem Einkoppeln des Strahls in den Resonator, schließen:

$$q' = \frac{Aq + B}{Cq + D} \iff q = \frac{Dq' - B}{A - Cq'} \quad (10)$$

$$\Rightarrow z_R = \text{Im}q = \text{Im} \frac{D \cdot (z' + iz'_R) - B}{A - C \cdot (z' + iz'_R)} \quad (11)$$

$$= \text{Im} \frac{D \cdot ((z' + iz'_R) - B)(A - C \cdot (z' - iz'_R))}{(A - Cz')^2 + C^2 z_R'^2} \quad (12)$$

$$= \frac{ADz'_R - BCDz'_R}{(A - Cz')^2 + C^2 z_R'^2} \quad (13)$$

Analog folgt

$$z = \frac{ADz' + BCDz' - ABD - CDz'^2 - CDz_R'^2}{(A - Cz')^2 + C^2 z_R'^2} \quad (14)$$

Da beide Spiegel denselben Krümmungsradius haben, müssen resonante Strahlen ihren Waist in der Mitte der beiden Spiegel haben.  $z'$  ist also gerade der halbe Abstand  $d = 45$  mm der beiden Spiegel. Die Wellenlänge  $\lambda = 632.8$  nm ist die Wellenlänge des verwendeten HeNe-Lasers.

Einsetzen liefert zunächst

$$w'_0 = 70.08 \text{ } \mu\text{m} \Rightarrow z'_R = \frac{\pi w_0'^2}{\lambda} = 2.49 \text{ cm} \quad (15)$$

$z'$  ist der negative halbe Abstand der beiden halbdurchlässigen Spiegel, da mittig zwischen diesen der waist des Strahls liegt.

Damit ergibt sich für die Strahlparameter außerhalb des Resonators (d.h. vor dem Einkoppeln des Strahls in den Resonator) durch Einsetzen

$$z_R = 3.39 \text{ cm}, \quad z = -3.27 \text{ cm} \quad (16)$$

Der Fokus ist also scheinbar um  $\Delta z \equiv z - z' = 1.02$  cm verschoben.

3. Ergebnisse und Diskussion

4. Zusammenfassung

## **Literatur**

- [1] C. Kurtziefer und W. Rosenfeld, “Versuch zu Gaußscher Strahlenoptik,” 2011. [Online; Stand 11. November 2022].
- [2] Wikipedia, “Matrizenoptik,” 2022. [Online; Stand 10. November 2022].

## **A. Python-Skripte zur Auswertung**