数值分析中期报告

梁浩贤

汪泓宇

陈高明

2022 年 11 月 13 日

目录

1 计算最佳平方逼近多项式

1.1 1.1

1.2 1.2

2 误差收敛性估计

首先我们观察勒让德多项式逼近结果的误差与多项式空间的维数 n 的关系:

图 1: p1

从图中可看出，误差以较快的速度衰减到 0，因此我们考虑以下几种回归模型

2.1 以 n 的负数次幂收敛

即 $error \sim n^{-k}$，对变量求对数得 $ln(error) \sim -kln(n)$，对其进行线性回归得到 $\widehat{k} =$，如图所示:

图 2: p2

2.2 以指数速度收敛

即 $error \sim e^{-n}$，仅对 error 求对数得 $ln(error) \sim n$，

2.3 以指数的多项式速度衰减

即 $error \sim e^{n^k}$ 对 error 求两次对数得 $ln(ln(error)) \sim n$,

2.4 最终模型

易见，上述的几种模型都不能很好地拟合数据，当多项式空间维数足够高的时候会出现较大偏差，并且从图像的趋势可以看出实际收敛速度更快，因此，我们小组尝试采用先理论推导后数值验证的方法进行探索:

首先设函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续，因此 $\exists M > 0, s.t. |f(x)| \leqslant M$. 记勒让德多项式空间为 $span\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)\}$, $f(x)$ 的 n 阶勒让德多项式逼近函数为 $P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x)$, 其中

$$a_k = \frac{\int_{-1}^{1} f(x)\varphi_k(x)\,dx}{\int_{-1}^{1} \varphi_k^2(x)\,dx} = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x)\varphi_k(x)\,dx$$

记 $\varepsilon_n = \max\limits_{-1\leqslant x\leqslant 1}|f(x)-P_n(x)|$.

我们小组通过数值实验得出，在 $f(x)=e^x$ 时，ε_n 在边界上取得，即 $x=\pm 1$ 时误差取得最大值，而 $P_n(1)=\sum_{k=0}^{n} a_k$，$P_n(-1)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^n a_k$ 因此 $\varepsilon_n=|f(1)-P_n(1)|=|e-\sum_{k=0}^{n}a_k|$ 或 $\varepsilon_n=|f(-1)-P_n(-1)|=|e^{-1}-\sum_{k=0}^{n}(-1)^n a_k|$, 故 $|\varepsilon_n|\leqslant\sum_{k=0}^{n}|a_k|$, 因此 ε_n 的收敛性可以被 $\sum_{k=0}^{n}|a_k|$ 所控制.

下面我们给出 a_n 的估计:

引理 2.1 记 $g_n=(x^2-1)^n$，则对 $\forall 1\leqslant k\leqslant n-1$，$g_n^{(k)}(1)=g_n^{(k)}(-1)=0$.

Proof:

$\because g_n(x)=(x-1)^n(x+1)^n$，-1 和 1 是 n 重根，故在求 k 阶导数后为 $n-k$ 重根（$1\leqslant k\leqslant n-1$），因此 $g_n^{(k)}(1)=g_n^{(k)}(-1)=0$.

$$\because a_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)\varphi_n(x)\,dx=\frac{2n+1}{n!2^{n+1}}\int_{-1}^{1}e^x\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]\,dx$$

利用分部积分:

$$\int_{-1}^{1}e^x\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]dx=e^x\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}[(x^2-1)^n]|_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}e^x\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}[(x^2-1)^n]dx$$

由引理 2.1 知，右端第一项为零. 反复使用分部积分公式可得到:

$$a_k=(-1)^n\frac{2n+1}{n!2^{n+1}}\int_{-1}^{1}e^x(x^2-1)^n\,dx,$$

$$\because\quad \forall -1\leqslant x\leqslant 1,\quad |(x^2-1)^n|\leqslant 1,$$

$$\therefore |a_k|=\frac{2n+1}{n!2^{n+1}}\int_{-1}^{1}e^x(x^2-1)^n\,dx|\leqslant\frac{2n+1}{n!2^{n+1}}\int_{-1}^{1}e\,dx\leqslant\frac{e(2n+1)}{n!2^n}.$$

由 stirling 公式，$n!\sim\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$ 带入上式可得:

$$|a_n|\sim e\sqrt{\frac{2n+1}{2\pi n}}(\frac{e}{2n})^n\quad (n\to\infty)$$

$\therefore\sum_{k=0}^{\infty}a_k$ 绝对收敛，对于足够大的 n，其余项

$$R_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}|a_k|<\sum_{k=n+1}^{\infty}C_1(\frac{e}{2n})^k=C\frac{(\frac{e}{2n})^{n+1}}{1-\frac{e}{2n}}\sim C(\frac{e}{2n})^n.\quad (n\to\infty)$$

其中 C_1, C 为常数.
由上述论证知，ε_n 可由 $\sum_{k=0}^{n} a_k$ 的收敛性控制，后者的收敛性由余项 R_n 表征，而 R_n 以接近 $(\frac{e}{2n})^n$ 的速度趋于零，因此我们小组采用如下形式的回归：

$$ln(\varepsilon_n) \sim \beta_0 + \beta_1 n + \beta_2 n ln(n)$$

得到结果：

图 3: pn

$\beta_0 = -2.12416299, \beta_1 = 0.06358719, \beta_2 = -0.95127543$，且 t 检验和 F 检验高度显著，由上述的误差近似形式可知，其收敛速度主要受到 n^{-n} 的影响，而对于级数的一些放缩步骤也可能导致收敛速度的估计出现一些偏差，因此我们主要关注 β_2 的回归系数的显著性，经检验知，在 95% 置信度下不能拒绝 $\beta_2 = -1$ 的假设. 然而 β_1 和 $\frac{e}{2}$ 有稍微的偏差，说明在放缩过程中的确将收敛速度放慢了，然而该项并不是影响收敛速度的主要因素，因此 β_1 和预期值相差一个小常数属于可接受范围。综上所述，该回归结果与我们小组的理论推导基本吻合.

3 结论

1.L^∞ 范数意义下的收敛性：对于 $f(x) = e^x$，其 n 次勒让德逼近多项式 $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k(x)$ 在 L^∞ 范数意义下以 $C(\frac{e}{2n})^n$ 的速度收敛到 $f(x)$.
2.L^2 范数意义下的收敛性：由于各阶勒让德正交多项式在-1 或 1 处取得最大最小值 (1 或-1)，故对 $\forall x \in [-1,1], \quad |P_n(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |a_k||\varphi_k(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |a_k|$，而上面证明了级数 $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ 收敛，故函数列 $P_n(x)$ 收敛. 在 $L^2(\mathbb{R})$ 空间中，采用 $\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$ 作为内积，则 $P_n(x)$ 是 $f(x)$ 在有限维函数空间 $H_n = span\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)\}$ 中的投影，且 $H_n \subseteq H_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. 故随着 n 的增大，误差项 $Rn(x) = f(x) - P_n(x)$ 的模长单调递降。又由于 $[-1,1]$ 是紧集，且多项式函数空间 $P[-1,1]$ 在连续函数空间 $C[-1,1]$ 中按无穷范数诱导的度量稠密，故也按 L^2 度量稠密. 注意到 $P[-1,1] = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n = \lim_{n\to\infty} H_n$，因此 $f(x)$ 在 H_n 中的投影按 L^2 度量随 $n \to \infty$ 收敛到 $f(x)$.

4