最优化方法作业11　2021210929　方言

2、 1) $f(x)=\frac{1}{2}x^TAx+b^Tx+c$.

则 $\nabla f(x)=Ax+b$

由于 $\bar{x}$ 为极小点，则 $\nabla f(\bar{x})=A\bar{x}+b=0$.

又 p 是 A 关于特征值 λ 的特征向量. 则 $Ap=\lambda p$

故 $\nabla f(x^{(1)})=A(\bar{x}+\mu p)+b=\mu\cdot Ap=\mu\cdot\lambda p$

2) 用最速下降法进行一维搜索. 则求 γ 使得:

$$\min_{\gamma\geq 0} f(x^{(1)}+\gamma\cdot(-\mu\lambda p))$$
$$=\min_{\gamma\geq 0} f(\bar{x}+(1-\gamma\lambda)\mu p)$$

由于 A 是对称正定矩阵. 则 $\lambda>0$. 故 γ 取 $\frac{1}{\lambda}$ 时. 取到 $f(\bar{x})$ 为极小值.

因此 $x^{(2)}=\bar{x}+(1-\gamma\lambda)\mu p=\bar{x}$. 一步到达极小点.

3. 由于 $p^{(i)}$, $i=1,2,\dots n$ 为特征向量. 故设对应特征值为 λ_i

则 $Ap^{(i)}=\lambda_i p^{(i)}$　　$i=1,2,\dots,n$

又由于 $p^{(i)}$ 互相正交. 即 $p^{(i)T}\cdot p^{(j)}=0$.　$i,j=1,2,\dots,n,\ i\neq j$

此时. $p^{(i)T}Ap^{(j)}=p^{(i)T}\lambda_j p^{(j)}=0$.　$i,j=1,2,\dots n,\ i\neq j$

故 $p^{(1)},p^{(2)},\dots,p^{(n)}$ 关于 A 共轭

4. 1) 由于 $p^{(i)}$ 关于 A 共轭, 且 $p^{(i)}$ 非零. 故 $p^{(1)},p^{(2)},\dots p^{(n)}$ 线性无关.

将其作为一组基向量. 则对 $\forall x\in R^n$.　$x=\alpha_1 p^{(1)}+\alpha_2 p^{(2)}+\cdots+\alpha_n p^{(n)}$

左乘 $p^{(i)T}A$ 可得: $p^{(i)T}Ax=\alpha_1 p^{(i)T}Ap^{(1)}+\cdots+\alpha_n p^{(i)T}Ap^{(n)}$

由于 $p^{(i)T}Ap^{(j)}=0$, $i\neq j$　故 $p^{(i)T}Ax=\alpha_i p^{(i)T}Ap^{(i)}$

即可得 $\alpha_i=\frac{p^{(i)T}Ax}{p^{(i)T}Ap^{(i)}}$

故 $x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i p^{(i)}$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{p^{(i)T}Ax}{p^{(i)T}Ap^{(i)}}\cdot p^{(i)}$$

2) 令 $A^{-1}=(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)$

由1)中结论. $\beta_i=\sum_{j=1}^{n}\frac{p^{(j)T}A\beta_i}{p^{(j)T}Ap^{(j)}}\cdot p^{(j)}$

则 $(\beta_1,\beta_2,\dots\beta_n)=\sum_{j=1}^{n}\frac{p^{(j)}p^{(j)T}A}{p^{(j)T}Ap^{(j)}}(\beta_1,\beta_2,\dots\beta_n)$

即 $(\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{p^{(i)} p^{(i)T}}{p^{(i)T} A p^{(i)}} \cdot A \cdot A^{-1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{p^{(i)} p^{(i)T}}{p^{(i)T} A p^{(i)}}$

5. 由于该问题为凸规划，且 $\bar{x}$ 是最优解，故 $\bar{x}$ 满足 KKT 条件，

即 $\begin{cases} A\bar{x} - w = 0 \\ w^T(\bar{x} - b) = 0 \\ w \geq 0 \end{cases} \Rightarrow w = A\bar{x}$

则 $w^T(\bar{x} - b) = 0 \Rightarrow \bar{x}^T A^T (\bar{x} - b) = 0$

由于 A 对称，故 $A^T = A$. 即 $\bar{x}^T A (\bar{x} - b) = 0$

即 $\bar{x}$ 与 $\bar{x} - b$ 关于 A 共轭