组合数学 Homework 3. 学号：2021210929 姓名：方言

3.4. 1) 从 n 个元素中选出 k 个，其中一定包含 m 个元素

方案数为 $\binom{n-m}{k-m} = \binom{n-m}{n-k}$

不妨设这 m 个元素为 $a_1, a_2 \cdots a_m$，令 A_i 表示不包含 a_i 的组合方法的集合

则 $|A_i| = \binom{n-1}{k}$，$\left|\bigcap_{t=1}^{l} A_{i_t}\right| = \binom{n-l}{k}$。

又由容斥原理：所求的即为 $\left|\bigcap_{i=1}^{m} \overline{A_i}\right| = \sum_{l=0}^{m} (-1)^l \cdot \sum^{P_l} \left|\bigcap_{t=1}^{l} A_{i_t}\right|$

$$= \sum_{l=0}^{m} (-1)^l \cdot P_l \cdot \binom{n-l}{k}$$

其中 P_l 表示从 m 个元素里选出的 l 个元素的方案数：即 $P_l = \binom{m}{l}$

故：$$\binom{n-m}{n-k} = \left|\bigcap_{i=1}^{m} \overline{A_i}\right| = \sum_{l=0}^{m} (-1)^l \cdot \binom{m}{l}\binom{n-l}{k}$$

2) 把 l 个球放到 n 个不同盒子中，指定 m 个盒子为空，则可不考虑这 m 个盒子，只考虑把 l 个球放到 $n-m$ 个盒子中，且每个盒子不空，方案数为：$\binom{l-1}{n-m-1}$

不妨设 A_i 表示第 i 个盒子为空的方案集合

则任意 j 个 A_i 的交集，即 j 个盒子为空：$\left|\bigcap_{k=1}^{j} A_{i_k}\right| = \binom{l+n-m-j-1}{n-m-j-1}$

$$= \binom{l+n-m-j-1}{l}$$

所求方案数为：$\left|\bigcap_{i=1}^{n-m} \overline{A_i}\right| = \sum_{j=0}^{n-m} \cdot (-1)^j \cdot \sum^{P_j} \left|\bigcap_{t=1}^{j} A_{i_t}\right| = \sum_{j=0}^{n-m} (-1)^j \cdot P_j \cdot \binom{l+n-m-j-1}{l}$

其中：P_j 表示从 $n-m$ 个元素中选出 j 个的方案数，即 $P_j = \binom{n-m}{j}$

则：$$\binom{l-1}{n-m-1} = \sum_{j=0}^{n-m} (-1)^j \binom{n-m}{j}\binom{l+n-m-j-1}{l}$$

3) 令 $m+l=N$.

从 N 个元素中取 k 个. 方案数为 $\binom{N}{k}$ ①

从 N 个元素中取 k 个, 且包含一个特定元素. 方案数为 $\binom{N-1}{k-1}$

而①方案数可以分为包含这个特定元素, 和不包含特定元素两种

即 $$\binom{N}{k}=\binom{N-1}{k-1}+\binom{N-1}{k}$$

$$\Rightarrow \binom{N-1}{k-1}=\binom{N}{k}-\binom{N-1}{k}$$

又由于从 N 个元素中取 k 个不包含特定元素, 与从 N 个元素中取 k+1 个, 包含特定元素, 二者方案数一一对应:

即 $$\binom{N-1}{k}=\binom{N-1}{(k+1)-1}=\binom{N}{k+1}-\binom{N-1}{k+1}$$

故: $$\binom{N-1}{k-1}=\binom{N}{k}-\left[\binom{N}{k+1}-\binom{N-1}{k+1}\right]=\binom{N}{k}-\binom{N}{k+1}+\binom{N-1}{k+1}$$

$$=\binom{N}{k}-\binom{N}{k+1}+\left[\binom{N}{k+2}-\binom{N-1}{k+2}\right]$$

$$=\binom{N}{k}-\binom{N}{k+1}+\binom{N}{k+2}-\cdots\cdots$$

$$=\binom{N}{k}-\binom{N}{k+1}+\cdots+(-1)^{l}\binom{N}{k+l}$$

代入 $N=m+l$, $k=m$

$$\Rightarrow \binom{m+l-1}{m-1}=\binom{m+l}{m}-\binom{m+l}{m+1}+\cdots\cdots+(-1)^{l}\binom{m+l}{m+l}$$

3.9. 考虑分为 A, B, C, D, E 五组，由于 $5\times65=325<326$.

1° 故由鸽巢原理：至少有一组中至少有66个数，不妨设其为A组。

设A组中任取66个数为 $a_1, a_2 \cdots a_{66}$，由于其各不相同，可以排序得 $a_1<a_2\cdots<a_{66}$.

令 $b_i = a_{i+1}-a_1$，则 $b_0=0$，$b_1, \cdots b_{65}\in[1,325]$

① 假如存在某个 b_i 与A中某个元素相等，即 $b_i=a_k$

则 $a_{i+1}-a_1=a_k$，这与条件吻合，即A中存在一个数是某两个数之合（或两倍，此时 $a_k=a_1$）.

② 假如不存在这样的 b_i，则说明 $b_1\sim b_{65}$ 只能出现在 B, C, D, E 中.

2° 同理：由于 $16\times4=64<65$，故 B, C, D, E 中至少有一组含有17个 b_i

不妨设其为B组，再从B中取17个 b_i，将其排序得：

$b_1<b_2\cdots<b_{17}$，且 $1\le b_i\le325$

~~① 假~~

令 $c_i=b_{i+1}-b_1$，则 $c_0=0$，$c_1, c_2\cdots c_{16}\in[1,325]$

① 假如 c_i 与B中某个元素相等，同理符合题目条件

② 假如不存在这样的 c_i，则 c_i 只能出现在 C, D, E 中.

3° 同理：由于 $5\times3=15<16$，则 C, D, E 中至少有一组含有6个 c_i

4° 同理，由于 $2\times2=4<5$，则 D, E 中至少有一组含有3个 d_i

5° 同理：E中至少含有两个 e_i，不妨设 $e_1<e_2$.

令 $f=e_2-e_1\in[1,325]$ ① 若 f 在E中，则满足条件.

② 若 f 不在E中，假设 f 在D中，则 $f=e_2-e_1=(d_3-d_1)-(d_2-d_1)=d_3-d_2$

与4°②中矛盾，故可知 f 不在 A, B, C, D, E 中，产生矛盾.

因此 若将 326 个数分为 A.B.C.D.E 五组，则一定满足题目条件.

3.20 1) 设 A.B.C 分别表示出现 aaa, bbb, ccc 的排列方案.

则 $|A| = |B| = |C| = \frac{7!}{3!\cdot 3!} = \frac{7!}{36}$.

$|A\cap B| = |A\cap C| = |B\cap C| = \frac{5!}{3!} = \frac{5!}{6}$.

$|A\cap B\cap C| = 3!$

故所求排列数为：$|\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}| = N - |A\cup B\cup C|$

$= N - (|A|+|B|+|C|) + (|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|)$

$- |A\cap B\cap C|$

其中：$N = \frac{9!}{(3!)^3} = \frac{9!}{216}$

$\Rightarrow \quad |\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}| = \frac{9!}{216} - \frac{7!}{12} + \frac{5!}{2} - 6 = 1314$.

2) 设 A.B.C 分别表示出现 aa, bb, cc 的排列方案.

则 $|A| = |B| = |C| = \frac{8!}{(3!)^2} - \frac{7!}{(3!)^2} = \frac{8!-7!}{36}$.

$|A\cap B| = |A\cap C| = |B\cap C| = \frac{7!}{3!} - 2\cdot\frac{6!}{3!} + \frac{5!}{3!}$

$= \frac{7!-2\cdot 6!+5!}{6}$.

$|A\cap B\cap C| = 6! - (5!+5!+5!) + (4!+4!+4!) - 3!$

故所求方案数为: $|\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}| = N - |A\cup B\cup C|$

$= N - (|A|+|B|+|C|) + (|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|) - |A\cap B\cap C|$

$= \frac{9!}{(3!)^3} - \frac{8!-7!}{12} + \frac{7!-2\cdot 6!+5!}{2} - (6!-3\cdot 5!+3\cdot 4!-3!)$

$= 1680 - 2940 + 1860 - 426$

$= 174$

3.23. 令 $y_1 = x_1-6$. $y_2 = x_2-5$. $y_3 = x_3-10$.

则 $y_1+y_2+y_3 = x_1+x_2+x_3-21 = 19$.

且 $0\le y_1\le 9$. $0\le y_2\le 15$, $0\le y_3\le 15$.

令 A 表示 $y_1\ge 10$ 的解. B 表示 $y_2\ge 16$ 的解. C 表示 $y_3\ge 16$ 的解.

则 $|A| = \binom{9+3-1}{3-1} = \binom{11}{2}$

$|B| = \binom{3+3-1}{3-1} = \binom{5}{2}$

$|C| = \binom{3+3-1}{3-1} = \binom{5}{2}$

$|A\cap B| = 0$ $|A\cap C| = 0$. $|B\cap C| = 0$. $|A\cap B\cap C| = 0$.

故所求即为 $|\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}| = N - (A\cup B\cup C)$

$= N - (|A|+|B|+|C|) + (|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|) - |A\cap B\cap C|$

$= N - 75$

其中 N 为不加约束的整数解个数: 即 $N = \binom{19+3-1}{3-1} = \binom{21}{2} = 210$

故所求整数解个数为: $210-75 = 135$

3.30. 考虑把 r 个球放入 n 个盒子中，且盒子不空的方案数 $\binom{r-1}{n-1}$.

设 A_t 为第 t 个盒子为空的方案集合.

则 $|A_t| = \binom{r+n-1-1}{n-1-1}$

$$\left|\bigcap_{k=1}^{i} A_{t_k}\right| = \binom{r+n-i-1}{n-i-1} = \binom{n+r-i-1}{r}.$$

由容斥原理：n 个盒子不空的方案数为：

$$\left|\bigcap_{t=1}^{n} \overline{A_t}\right| = N - \sum_{t=1}^{n}|A_t| + \sum_{i,j}\sum |A_{t_i}\cap A_{t_j}| - \sum_{i,j,k}\sum\sum |A_{t_i}\cap A_{t_j}\cap A_{t_k}| \cdots\cdots + (-1)^{m}\sum^{P_m}\left|\bigcap_{p_i=1}^{m} A_{t_{p_i}}\right|$$

P_m 表示从 n 个元素中选出 m 个的方案数，即 $P_m = \binom{n}{m}$

故 $\left|\bigcap_{t=1}^{n} \overline{A_t}\right| = N + \sum_{m=1}^{n} (-1)^m \cdot \binom{n}{m} \cdot \binom{n+r-m-1}{r}$

其中 $N = \binom{n+r-1}{r} = \binom{n+r-0-1}{r}$

故 $\left|\bigcap_{t=1}^{n} \overline{A_t}\right| = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i}\binom{n+r-i-1}{r}$.

$$= \binom{r-1}{n-1}$$

清華大學 Tsinghua University 数学作业纸

班级　　姓名　　编号　　科目　　第　　页

3.51 考虑任意实数 x. 令 $\theta = \arctan x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

则：令 $\theta_1 = \arctan x$. $\theta_2 = \arctan y$.

则 ~~$\arctan\theta_1$~~ $\tan(\theta_1 - \theta_2) = \dfrac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\cdot\tan\theta_2} = \dfrac{x-y}{1+xy}$.

假设. 任意 x, y 都不满足 $0 < \dfrac{x-y}{1+xy} \le 2-\sqrt{3}$.

$\Longleftrightarrow \quad 0 < \arctan x - \arctan y \le \arctan(2-\sqrt{3}) = \frac{\pi}{12}$

设 13 个实数分别为 $x_1, x_2 \cdots x_{13}$.

记 $\theta_i = \arctan x_i \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. 不妨设 $\theta_1 \le \theta_2 \le \theta_3 \cdots \le \theta_{13}$.

由假设 $\theta_2 - \theta_1 > \frac{\pi}{12}$, $\theta_3 - \theta_2 > \frac{\pi}{12}$, $\cdots$ $\theta_{13} - \theta_{12} > \frac{\pi}{12}$

即
$$\begin{aligned}
\theta_{13} &= \theta_1 + (\theta_2 - \theta_1) + (\theta_3 - \theta_2) + \cdots + (\theta_{13} - \theta_{12}) \\
&> \theta_1 + \frac{\pi}{12}\cdot 12 \\
&= \theta_1 + \pi \\
&> -\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

与 $\theta_3 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 矛盾. 故假设不成立.

则一定存在 θ_i, θ_j 满足 $\theta_i - \theta_j \in (0, \frac{\pi}{12}]$

即对应 $0 < \dfrac{x-y}{1+xy} \le 2-\sqrt{3}$

3.53 设这9个点坐标为(x_i, y_i, z_i) $(1\le i\le 9)$

1° 在x轴上，由于$2\times 4=8<9$，由鸽巢原理，

一定存在5个x_i的奇偶性相同，不妨设为$x_1, x_2 \cdots x_5$

2° 在y轴上，由于$2\times 2=4<5$，由鸽巢原理，

这5个x_i对应的y_i中，一定存在3个y_i奇偶性相同，不妨设为y_1, y_2, y_3

3° 同理，y_1, y_2, y_3对应的$z_1\ z_2\ z_3$中，一定存在2个奇偶性相同，

不妨设为z_1, z_2

则：(x_1, y_1, z_1)与(x_2, y_2, z_2)的中点为$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$

又由于x_1, x_2奇偶性相同，则$\frac{x_1+x_2}{2}$为整数，

同理$\frac{y_1+y_2}{2}$，$\frac{z_1+z_2}{2}$为整数，即这个点为整数坐标点

3.63 考虑~~[illegible]~~一列的着色，一列有$m+1$个格子，用m种颜色

由鸽巢原理，一定存在2个格子同色，记它们分别是第i行和第j行，

又由于$1\le i, j\le m+1$，$i\ne j$，则这样的i, j有$\binom{m+1}{2}$种取法，

又由于一共有$m\cdot\binom{m+1}{2}+1$列，

由鸽巢原理，一定存在2列，它们都是第i, j行同色，且相同的颜色为同一种颜色，

故这样的四个格子都同色，这是一个矩形的4个角

3.67、考虑这7个数 $x_1, x_2 \cdots x_7$，记它们模10的余数为 $m_1, \cdots m_7$

① 假如存在某两个 m_i, m_j 相等，则 $x_i \equiv x_j \mid 10$

即 $x_i - x_j$ 能被10除尽

② 假如不存在这样的 m_i, m_j，则至多只有一个 $m_i = 0$，一个 $m_i = 5$

因此至少有5个 m_i 落在 $\{1,2,3,4,6,7,8,9\}$ 中。

将其分为4组：$\{1,9\}$，$\{2,8\}$，$\{3,7\}$，$\{4,6\}$。

由鸽巢原理，一定有2个 m_i 落在同一组中，不妨设为 $\{1,9\}$

则：$m_i \equiv 1 \mid 10$　$m_j \equiv 9 \mid 10$　即 $m_i + m_j \equiv 0 \mid 10$

因此 $x_i + x_j \equiv 0 \mid 10$，即 $x_i + x_j$ 能被10除尽

综上，一定能找到 x_i 与 x_j，使得其差或和能被10除尽。