数 学 作 业 纸

（科目：　　　）

班级：　　姓名：方言　　编号：2021210929　第　页

1. $\forall x_1, x_2 \in S$，则有 $\begin{cases} x_1 = Ay_1, & y_1 \geq 0 \\ x_2 = Ay_2, & y_2 \geq 0 \end{cases}$

对 $\forall t \in [0,1]$，$x = (1-t)x_1 + tx_2$

$$= A[(1-t)y_1 + ty_2]$$

由于 $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$，则 $(1-t)y_1 + ty_2 \geq 0$.

令 $y = (1-t)y_1 + ty_2$，则有 $x = (1-t)x_1 + tx_2 = Ay \in S$.

由凸集定义，S是凸集

2. 数学归纳法：

1° 当 $k=2$ 时，由凸集定义显然成立.

2° 假设当 $k=m$ 时成立，考虑当 $k=m+1$ 时.

令 $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^{(i)} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x^{(i)} + \lambda_{m+1} x^{(m+1)}$

考虑前 m 项，令 $\hat{\lambda}_i = \frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i}$，则有 $\sum_{i=1}^{m} \hat{\lambda}_i = 1$

则 $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x^{(i)} = \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i\right) \cdot \sum_{i=1}^{m} \hat{\lambda}_i \cdot x^{(i)}$

由假设，令 $\hat{x} = \sum_{i=1}^{m} \hat{\lambda}_i \cdot x^{(i)}$，则有 $\hat{x} \in S$.

故 $x = \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i\right) \cdot \hat{x} + \lambda_{m+1} \cdot x^{(m+1)}$

$= (1-\lambda_{m+1})\hat{x} + \lambda_{m+1} x^{(m+1)} \in S$，即 $k=m+1$ 成立

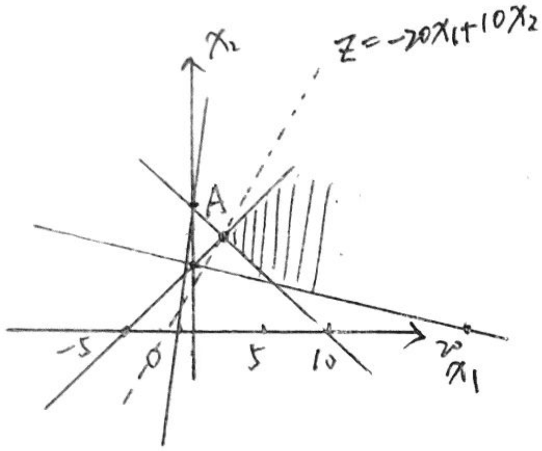
因此：对 $\forall k \geq 2$，$k \in N$，都成立.

数 学 作 业 纸

（科目：　　　）

班级：　　姓名：方言　　编号：2021210929　　第　　页

3. 4)



阴影部分为可行域

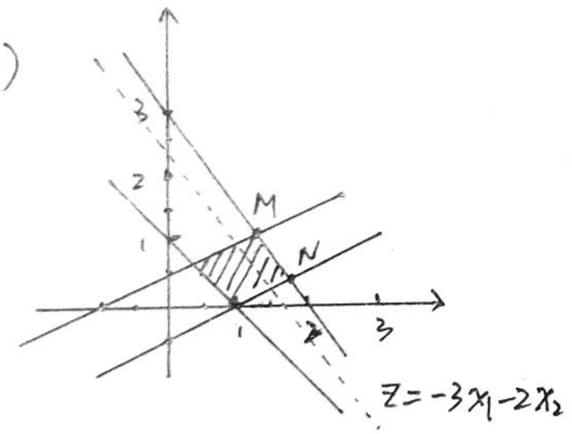
max $-20x_1+10x_2$.

由图可知，A点处取到最优解

$$\begin{cases} x_1+x_2=10 \\ -5x_1+5x_2=25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=5/2 \\ x_2=15/2 \end{cases}$$

此时 $-20x_1+10x_2=25$

5)



阴影部分为可行域

由图可知，在MN上可取到最优解

即：$3x_1+2x_2=6$.

此时：$Z_{min}=-3x_1-2x_2=-6$.