最优化方法作业7.　2021210929　方言

1. 该非线性规划为凸规划，只需要验证各点是否为KKT点.

1) $x^{(1)}=(\frac{3}{2},\frac{9}{4})^T$

$x^{(1)}$满足约束，是可行解，只有约束1. $-x_1^2+x_2\geq 0$起作用，则KKT条件为:

$$\begin{cases} 2(x_1-\frac{9}{4})+2w_1x_1=0 \\ 2(x_2-2)-w_1=0 \\ w_1,x_1,x_2\geq 0 \end{cases}$$

此时可解得 $w_1=\frac{1}{2}$. 因此 $x^{(1)}$是最优解. 此时最优值 $f_{min}=\frac{5}{8}$

2) $x^{(2)}=(\frac{9}{4},2)^T$

$x^{(2)}$不满足约束1. 不是可行解

3) $x^{(3)}=(0,2)^T$

$x^{(3)}$满足约束，是可行解，只有约束3起作用，则KKT条件为:

$$\begin{cases} 2(x_1-\frac{9}{4})-w_3=0 \\ 2(x_2-2)=0 \\ x_1,x_2,w_3\geq 0 \end{cases}$$

此方程组无解.

因此 $x^{(3)}$不是KKT点，则不是最优解.

2. 距离 $d=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$. 则可转化为:

$$\min \quad x_1^2+x_2^2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1+x_2\geq 4 \\ 2x_1+x_2\geq 5 \end{cases}$$

这是一个凸规划，则KKT条件为:

$$\begin{cases} 2x_1-w_1-2w_2=0 \\ 2x_2-w_1-w_2=0 \\ w_1(x_1+x_2-4)=0 \\ w_2(2x_1+x_2-5)=0 \\ x_1+x_2-4\geq 0 \\ 2x_1+x_2-5\geq 0 \\ x_1,x_2,w_1,w_2\geq 0 \end{cases}$$

解得: $\begin{cases} x_1=2 \\ x_2=2 \\ w_1=4 \\ w_2=0 \end{cases}$

KKT点为 $(2,2)^T$. 此时取最优值 $f_{min}=8$

故距离最小值为 $d_{min}=2\sqrt{2}$

3. 转化为：$\min\ -14x_1+x_1^2-6x_2+x_2^2-7$

$$\text{s.t.}\begin{cases}-x_1-x_2+2\geqslant 0\\ -x_1-2x_2+3\geqslant 0\end{cases}$$

目标函数梯度：$\nabla f(x)=(2x_1-14,\ 2x_2-6)^T$

约束函数梯度：$\nabla g_1(x)=(-1,-1)^T$. $\nabla g_2(x)=(-1,-2)^T$

最优解的一阶必要条件为：

$$\begin{cases}2x_1-14+w_1+w_2=0\\ 2x_2-6+w_1+2w_2=0\\ w_1(-x_1-x_2+2)=0\\ w_2(-x_1-2x_2+3)=0\\ -x_1-x_2+2\geqslant 0\\ -x_1-2x_2+3\geqslant 0\\ w_1,w_2\geqslant 0\end{cases}$$

解得：$\begin{cases}x_1=3\\ x_2=-1\\ w_1=8\\ w_2=0\end{cases}$

由于该问题为凸规划，因此KKT点 $(3,-1)^T$ 为最优解、此时最优值为 $f_{max}=33$