# 不确定规划课程作业 7

方言
2021210929

2022 年 5 月 26 日

## 1 Exercise 1

令 $B$ 是一个实数域上的布尔集:
1. 当 $B \subset A$ 时，有:

$$\mathcal{M}\{B \subset \xi\} = \mathcal{M}\{\gamma | B \subset \xi(\gamma)\} = \mathcal{M}\{\gamma_2\} = 0.6 = \inf_{x \in B} \mu(x)$$

当 $B \not\subset A$ 时，有:

$$\mathcal{M}\{B \subset \xi\} = \mathcal{M}\{\emptyset\} = 0 = \inf_{x \in B} \mu(x)$$

此时，符合第一测度反演公式
2. 当 $A \subset B$ 时，有:

$$\mathcal{M}\{\xi \subset B\} = \mathcal{M}\{\Gamma\} = 1 = 1 - \sup_{x \in B^C} \mu(x)$$

当 $A \not\subset B$ 时，有:

$$\mathcal{M}\{\xi \subset B\} = \mathcal{M}\{\gamma_1\} = 0.4 = 1 - \sup_{x \in B^C} \mu(x)$$

此时，符合第二测度反演公式
因此，$\mu(x)$ 是 $\xi(\gamma)$ 的隶属函数

## 2 Exercise 2

### 2.1

令 $B$ 是一个实数域上的布尔集:
当 $\sup_{x \in B} |x| \geq 1$ 时，有:

$$\mathcal{M}\{B \subset \xi\} = \mathcal{M}\{\gamma | B \subset [-\gamma, \gamma]\} = \mathcal{M}\{\emptyset\} = 0 = \inf_{x \in B} \mu(x)$$

当 $\sup_{x \in B} |x| < 1$ 时，有:

$$\mathcal{M}\{B \subset \xi\} = \mathcal{M}\{\gamma | B \subset [-\gamma, \gamma]\} \leq \mathcal{M}\{[\sup_{x \in B} |x|, 1)\} = 1 - \sup_{x \in B} |x|$$

$$\mathcal{M}\{B \subset \xi\} = \mathcal{M}\{\gamma | B \subset [-\gamma, \gamma]\} \geq \mathcal{M}\{(\sup_{x \in B} |x|, 1)\} = 1 - \sup_{x \in B} |x|$$

因此:

$$\mathcal{M}\{B \subset \xi\} = 1 - \sup_{x \in B} |x| = \inf_{x \in B} (1 - |x|) = \inf_{x \in B} \mu(x)$$

此时，符合第一测度反演公式

当 $\inf_{x\in B^C}|x|\geq 1$ 时，有:

$$\mathcal{M}\{\xi\subset B\}=\mathcal{M}\{\gamma|[-\gamma,\gamma]\subset B\}=\mathcal{M}\{\Gamma\}=1=1-\sup_{x\in B^C}\mu(x)$$

当 $\inf_{x\in B^C}|x|<1$ 时，有:

$$\mathcal{M}\{\xi\subset B\}=\mathcal{M}\{\gamma|[-\gamma,\gamma]\subset B\}\leq\mathcal{M}\{(0,\inf_{x\in B^C}|x|]\}=\inf_{x\in B^C}|x|$$

$$\mathcal{M}\{\xi\subset B\}=\mathcal{M}\{\gamma|[-\gamma,\gamma]\subset B\}\geq\mathcal{M}\{(0,\inf_{x\in B^C}|x|)\}=\inf_{x\in B^C}|x|$$

因此:

$$\mathcal{M}\{\xi\subset B\}=\inf_{x\in B^C}|x|=1-\sup_{x\in B^C}(1-|x|)=1-\sup_{x\in B^C}\mu(x)$$

此时，符合第二测度反演公式
因此，$\mu(x)$ 是 $\xi(\gamma)$ 的隶属函数

### 2.2

令 $B$ 是一个实数域上的布尔集:
当 $\sup_{x\in B}|x|\geq 1$ 时，有:

$$\mathcal{M}\{B\subset\xi\}=\mathcal{M}\{\gamma|B\subset[\gamma-1,1-\gamma]\}=\mathcal{M}\{\emptyset\}=0$$

当 $\sup_{x\in B}|x|<1$ 时，有:

$$\mathcal{M}\{B\subset\xi\}=\mathcal{M}\{\gamma|B\subset[\gamma-1,1-\gamma]\}=\mathcal{M}\{(0,1-\sup_{x\in B}|x|)\}=1-\sup_{x\in B}|x|=\inf_{x\in B}(1-|x|)$$

当 $\inf_{x\in B^C}|x|\geq 1$ 时，有:

$$\mathcal{M}\{\xi\subset B\}=\mathcal{M}\{\gamma|[\gamma-1,1-\gamma]\subset B\}=\mathcal{M}\{\Gamma\}=1$$

当 $\inf_{x\in B^C}|x|<1$ 时，有:

$$\mathcal{M}\{\xi\subset B\}=\mathcal{M}\{\gamma|[\gamma-1,1-\gamma]\subset B\}=\inf_{x\in B^C}|x|=1-\sup_{x\in B^C}(1-|x|)$$

综上可知，$\xi(\gamma)$ 的隶属函数为:

$$\mu(x)=\begin{cases}1-|x|, & x\in[-1,1]\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

### 2.3

不同的不确定集可能有相同的隶属函数，当 $\xi(\gamma)$ 关于 y 轴对称时，其隶属函数都是上述形式。

## 3 Exercise 3

假设 $\xi(\gamma)$ 有隶属函数 $\mu(x)$，则 $\mu(x)=\mathcal{M}\{x\in\xi\}$:
当 $x\in[1,2]$ 时:

$$\mu(x)=\mathcal{M}\{x\in\xi\}=\mathcal{M}\{\gamma_1\}=0.4$$

当 $x\in[2,3]$ 时:

$$\mu(x)=\mathcal{M}\{x\in\xi\}=\mathcal{M}\{\gamma_1,\gamma_2\}=\mathcal{M}\{\Gamma\}=1$$

当 $x \in [3,4]$ 时:

$$\mu(x) = \mathcal{M}\{x \in \xi\} = \mathcal{M}\{\gamma_2\} = 0.6$$

其他情况下:

$$\mu(x) = \mathcal{M}\{x \in \xi\} = \mathcal{M}\{\emptyset\} = 0$$

因此:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0.4, & x \in [1,2] \\ 1, & x \in [2,3] \\ 0.6, & x \in [3,4] \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

此时，令 $B$ 是一个实数域上的布尔集，当 $B \subset [1,4]$ 时:

$$\mathcal{M}\{B \subset \xi\} = \mathcal{M}\{\gamma_1, \gamma_2\} = \mathcal{M}\{\Gamma\} = 1$$

而 $\inf_{x\in B} \mu(x) = 0.4 \neq \mathcal{M}\{B \subset \xi\}$，因此不满足第一测度反演公式。故 $\xi$ 不存在隶属函数。

# 4 Exercise 4

假设 $\xi(\gamma)$ 有隶属函数 $\mu(x)$，则 $\mu(x) = \mathcal{M}\{x \in \xi\}$:
当 $x < 0$ 或 $x > 2$ 时:

$$\mu(x) = \mathcal{M}\{x \in \xi\} = \mathcal{M}\{\emptyset\} = 0$$

当 $0 \leq x \leq 1$ 时:

$$\mu(x) = \mathcal{M}\{x \in \xi\} = \mathcal{M}\{0 < \gamma < x\} = x$$

当 $1 < x \leq 2$ 时:

$$\mu(x) = \mathcal{M}\{x \in \xi\} = \mathcal{M}\{x - 1 < \gamma < 1\} = 2 - x$$

因此:

$$\mu(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x, & 1 < x \leq 2 \\ 0, & x < 0 \text{ or } x > 2 \end{cases}$$

此时，令 $B$ 是一个实数域上的布尔集，当 $B \subset [0,2]$ 时:

$$\mathcal{M}\{B \subset \xi\} = \mathcal{M}\{\Gamma\} = 1$$

而 $\inf_{x\in B} \mu(x) = 0 \neq \mathcal{M}\{B \subset \xi\}$，因此不满足第一测度反演公式。故 $\xi$ 不存在隶属函数。