最优化方法作业12　　2021210929　方言

1. $f(x)=x_1^2+x_1x_2+2x_2^2-6x_1-2x_2-12x_3$

则 $\nabla f(x)=(2x_1+x_2-6,\ x_1+4x_2-2,\ -12)^T$

$A_1=(0\ 0\ 1)$, $b_1=(0)$　　$A_2=\begin{pmatrix}1&-2&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$　$b_2=\begin{pmatrix}-3\\0\\0\end{pmatrix}$　　$E=(1\ 1\ 1)$　$e=(2)$

因此，在$\hat{x}$处，可行方向的充要条件是：$A_1d\geqslant 0$，$Ed=0$

在$\hat{x}$处，下降方向满足：$\nabla f(\hat{x})^Td<0$，$\nabla f(\hat{x})=(-3,3,-12)^T$

即 $\begin{cases}d_1+d_2+d_3=0\\-3d_1+3d_2-12d_3<0\\d_3\geqslant 0\end{cases}$　求出一个解为 $\begin{cases}d_1=0\\d_2=-1\\d_3=1\end{cases}$

此时求得一个下降可行方向：$d=(0,-1,1)^T$

2. $\hat{x}$是KKT点 $\Longleftrightarrow$ 存在乘子 $w_i\geqslant 0\ (i\in I)$，$v_j\ (j=1,2,\dots,l)$ 满足

$$\nabla f(\hat{x})-\sum_{i\in I}w_i\nabla g_i(\hat{x})-\sum_{j=1}^{l}v_j\nabla h_j(\hat{x})=0$$

即

$$-\sum_{i\in I}w_i\nabla g_i(\hat{x})-\sum_{j=1}^{l}v_j\nabla h_j(\hat{x})=-\nabla f(\hat{x})$$

令 $A=(\nabla g_{i_1}(\hat{x}),\nabla g_{i_2}(\hat{x}),\dots,\nabla g_{i_k}(\hat{x}))$　$(\{i_1,i_2,\dots i_k\}=I)$

$B=(\nabla h_1(\hat{x}),\nabla h_2(\hat{x}),\dots,\nabla h_l(\hat{x}))$

令 $W=(w_1,w_2,\dots w_k)^T$.　$V=(v_1,v_2,\dots v_l)^T$

设 $V=p-q$. 且 $p\geqslant 0$, $q\geqslant 0$.

则上式改写为：$-A\cdot W-B(p-q)=-\nabla f(\hat{x})$

即：$\begin{cases}(-A,-B,B)\begin{pmatrix}W\\p\\q\end{pmatrix}=-\nabla f(\hat{x})\\W,p,q\geqslant 0\end{cases}$　　$(*)$

由Farkas定理，$(*)$有解 $\Longleftrightarrow$ $\begin{pmatrix}-A^T\\-B^T\\B^T\end{pmatrix}d\leqslant 0$，$-\nabla f(\hat{x})^Td>0$ 无解

即 $\begin{cases}\nabla f(\hat{x})^Td<0\\A^Td\geqslant 0\\B^Td=0\end{cases}$　无解.

$$
\text{等价于}\quad \begin{aligned} &\min \ \nabla f(\hat{x})^T d \\ &\text{s.t.} \begin{cases} \nabla g_i(\hat{x})^T d \geqslant 0 & i \in I \\ \nabla h_j(\hat{x})^T d = 0 & j = 1, 2, \ldots, l \\ -1 \leq d_j \leq 1, & j = 1, 2, \ldots, n \end{cases} \end{aligned}
$$

最优值为 0.