最优化方法作业6　2021210929　方言

1. 假设系统1有解：$Bx=0$，故满足 $\begin{cases} Bx\le 0 \\ -Bx\le 0 \end{cases}$，则系统1等价于：$\begin{pmatrix} A \\ B \\ -B \end{pmatrix} x\le 0$，$c^Tx>0$。

由Farkas定理，$\begin{pmatrix} A \\ B \\ -B \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} y \\ s \\ t \end{pmatrix}=c$，$\begin{pmatrix} y \\ s \\ t \end{pmatrix}\ge 0$ 无解。即 $A^Ty+B^T(s-t)=c$，$y\ge 0$ 无解。

令 $z=s-t\in E^l$，即 $A^Ty+B^Tz=c$，$y\ge 0$ 无解，可得系统2无解。

同理，由于Farkas定理，若系统1无解，可推出系统2有解。

故两个系统恰有一个有解。

2. 假设系统1有解，$x\ge 0$，即满足 $-I\cdot x\le 0$，则系统1等价于 $\begin{pmatrix} A \\ -I \end{pmatrix} x\le 0$，$c^Tx>0$

由Farkas定理，$(A^T, -I)\begin{pmatrix} y \\ s \end{pmatrix}=c$，$\begin{pmatrix} y \\ s \end{pmatrix}\ge 0$ 无解，即 $A^Ty-s=c$，$y,s\ge 0$ 无解。

这等价于 $A^Ty\ge c$，$y\ge 0$，即系统2无解。

同理，若系统1无解，则存在一组 y,s 满足 $A^Ty-s=c$，$y\ge 0$，$s\ge 0$。

即 $A^Ty=c+s\ge c$，$y\ge 0$，即系统2有解

故两个系统恰有一个有解

3. $\nabla f(x)=\left(8x_1(x_2-x_1^2),\ -4(x_2-x_1^2)\right)^T$

$\nabla^2 f(x)=\begin{pmatrix} 8x_2-24x_1^2 & 8x_1 \\ 8x_1 & -4 \end{pmatrix}$

取 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\in S$，此时 $\nabla^2 f(x)=\begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ 显然不是半正定矩阵。

故 $f(x_1, x_2)$ 不是 S 上的凸函数。

4. 数学归纳法：1° 当 $k=1$ 时，$\lambda_1=1$，即 $f(\lambda_1 x)=\lambda_1 f(x)$ 成立。

2° 假设对 k 时成立，考虑 $k+1$ 时：

令 $\lambda=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i$，$\lambda_i^*=\frac{\lambda_i}{\lambda}$，则令 $x^*=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^* x^{(i)}\in E^n$，$\lambda_1^*+\lambda_2^*+\cdots+\lambda_k^*=1$

故：$f(\lambda_1 x^{(1)}+\cdots+\lambda_{k+1}x^{(k+1)})$

$=f(\lambda x^*+\lambda_{k+1}x^{(k+1)})$

由于 f 是凸函数. 故 $f(\lambda x^* + \lambda_{k+1} x^{(k+1)}) \leq \lambda f(x^*) + \lambda_{k+1} f(x^{(k+1)})$

又由于假设: $f(x^*) = f(\lambda_1^* x^{(1)} + \lambda_2^* x^{(2)} + \cdots + \lambda_k^* x^{(k)})$

$$\leq \lambda_1^* f(x^{(1)}) + \cdots + \lambda_k^* f(x^{(k)})$$

故 $f(\lambda x^* + \lambda_{k+1} x^{(k+1)}) \leq \lambda\left(\lambda_1^* f(x^{(1)}) + \cdots + \lambda_k^* f(x^{(k)})\right) + \lambda_{k+1} f(x^{(k+1)})$

$$= \lambda_1 f(x^{(1)}) + \lambda_2 f(x^{(2)}) + \cdots + \lambda_{k+1} f(x^{(k+1)})$$

即 对 $k+1$ 成立.

综上. 对 $\forall k \in N^+$ 均成立.