中国石油大学
CHINA UNIVERSITY OF PETROLEUM

数字信号分析与处理

Digital Signal Analysis & Processing（D S P）

厚积薄发 开物成务

数字信号分析与处理

Digital Signal Analysis & Processing

第四章 相关分析

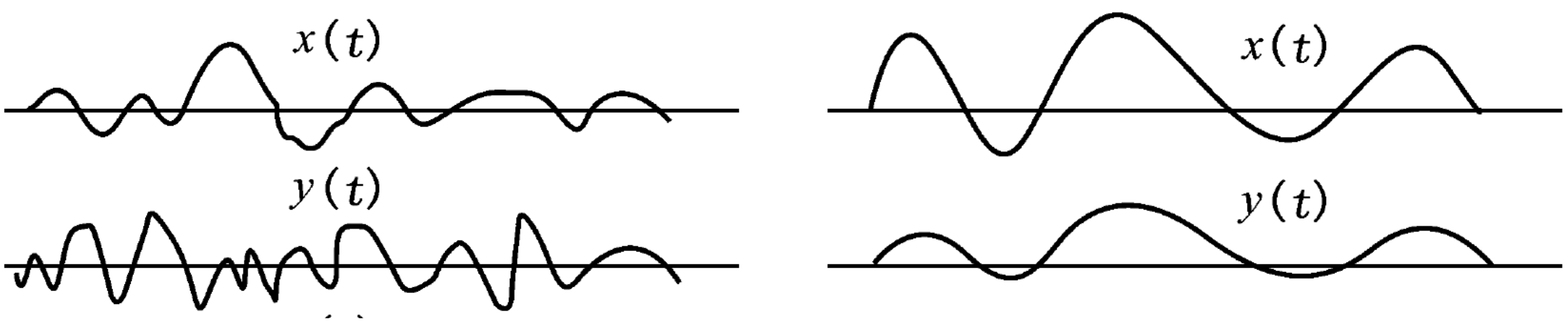
第四章 相关分析

- **第一节 相关系数与相关函数**
- 第二节 相关函数的性质
- 第三节 离散信号的相关

第一节 相关系数与相关函数

在信号分析与处理中，相关（correlation）是一个非常重要的概念，不仅它本身有着重要的物理和几何意义，而且在滤波等处理中也有着重要作用。

相关分析是定量研究两个函数之间的线性相似程度的一种数学方法。



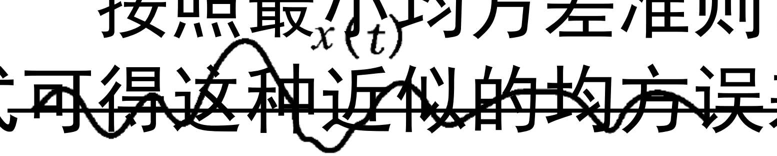
一、相关系数

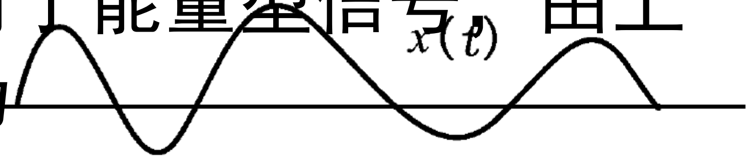
如何定量地衡量两个波形的相似性呢？参照信号正交分解的原理，当用一个信号y(t)去近似另一个信号$x(t)$时，$x(t)$可表示为：

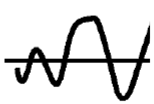
$$x(t)=a_{xy}y(t)+x_e(t)$$

式中，a_{xy}为实系数，$x_e(t)$为近似误差。

按照最小均方差准则，对于能量型信号，由上式可得这种近似的均方误差为







$$\varepsilon=\overline{x_e^2(t)}=\int_{-\infty}^{+\infty}x_e^2(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}[x(t)-a_{xy}y(t)]^2dt —$$

为求得使均方差最小的a_{xy}值，必须使

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial a_{xy}} = \frac{\partial}{\partial a_{xy}}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}[x(t)-a_{xy}y(t)]^2 dt\right\} = 0$$

整理得到

$$a_{xy} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t)dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} y^2(t)dt}$$

将其代入均方误差，得到这种近似的最小均方误差为

$$\varepsilon_{\min} = \overline{x_e^2(t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt - \frac{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t)dt\right]^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} y^2(t)dt}$$

一、相关系数

上式中右边第一项$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt$表示了原信号**x(t)**的能量。

➢若将上式用原信号能量归一化为相对误差，则有

$$\overline{\varepsilon_{\min}} = \frac{\overline{x_e^2(t)}}{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt} = 1 - \frac{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t)dt\right]^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt \int_{-\infty}^{\infty} y^2(t)dt}$$

若令

$$\rho_{xy} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t)dt}{\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt}\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} y^2(t)dt}}$$

则**相对误差**可表示为

$$\overline{\varepsilon_{\min}} = 1 - \rho_{xy}^2$$

一、相关系数

$$\rho_{xy}=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)y(t)dt}{\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty}x^2(t)dt}\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty}y^2(t)dt}} \qquad \overline{\varepsilon_{\min}}=1-\rho_{xy}^2$$

- 通常将$\boldsymbol{\rho_{xy}}$称为信号$x(t)$与$y(t)$的**相关系数**。

在$x(t)$和$y(t)$都是实函数的情况下，$\boldsymbol{\rho_{xy}}$为一实数。

根据积分的施瓦兹（Schwartz）不等式：

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)y(t)dt\right|^2\le\int_{-\infty}^{+\infty}x^2(t)dt\int_{-\infty}^{+\infty}y^2(t)dt$$

可知：$|\boldsymbol{\rho_{xy}}|\leqslant\mathbf{1}$ ，且有 $\overline{\varepsilon_{\min}}=1-\rho_{xy}^2\ge 0$

- 相关系数ρ_{xy}可以用来描述信号间波形的相似程度。

讨论相关系数ρ_{xy}

$$\begin{cases} x(t) = x(t) = a_{xy}y(t) + \overline{\varepsilon_{\min}} \\ \overline{\varepsilon_{\min}} = 1 - \rho_{xy}^2 \end{cases}$$

- 已知$1 \geq |\rho_{xy}| \geq 0$，若$|\rho_{xy}|=1$，则

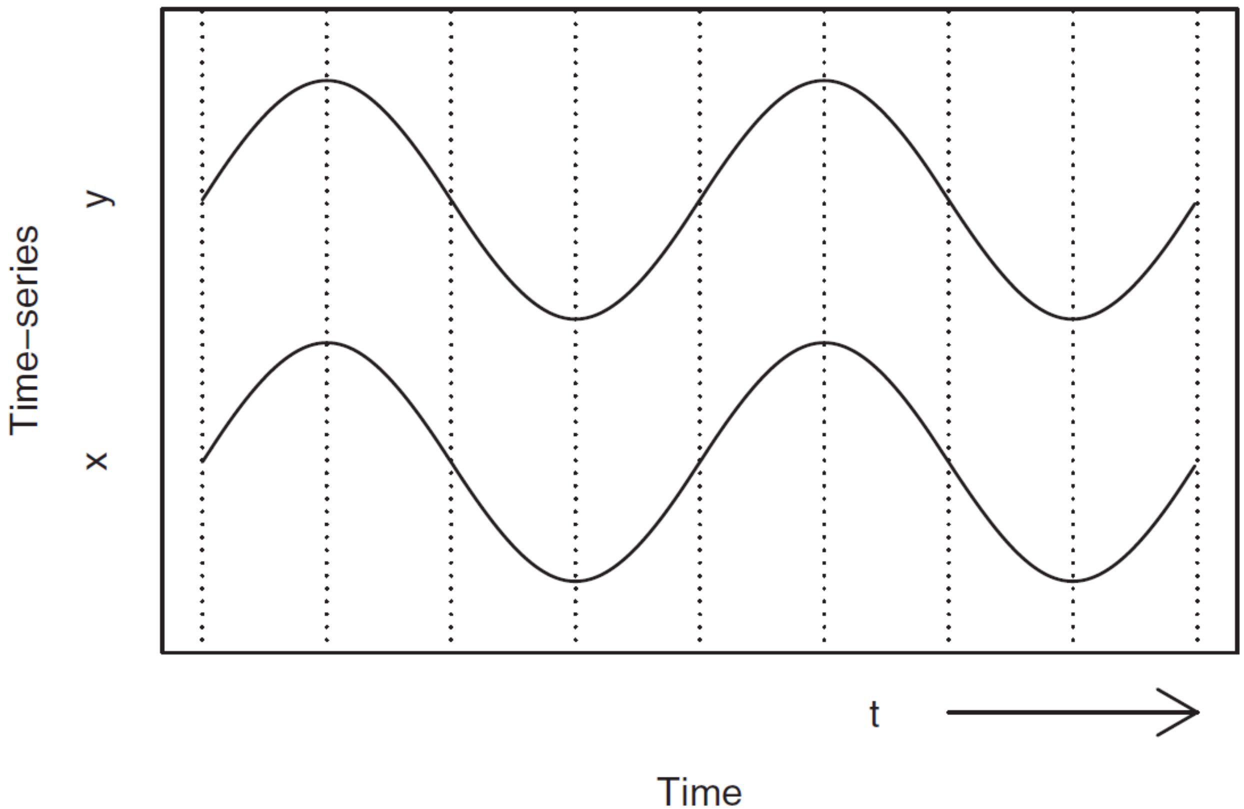
1）**当$\rho_{xy}=1$**时，则$x(t)=a_{xy}y(t)$，**且$a_{xy}>0$**，表示信号$x(t)$和$y(t)$的波形相同，仅幅度上可能有放大或缩小。

2）**当$\rho_{xy}=-1$**时，则$x(t)=a_{xy}y(t)$，**且$a_{xy}<0$**，表示信号$x(t)$和$y(t)$的波形相同，**但**极性相反，**幅度上可能有放大或缩小**。

✓ $|\rho_{xy}|=1$表明两个信号的波形是相同的，相对误差为0，两个信号间的关系可认为是**完全线性相关**的。

一、相关系数

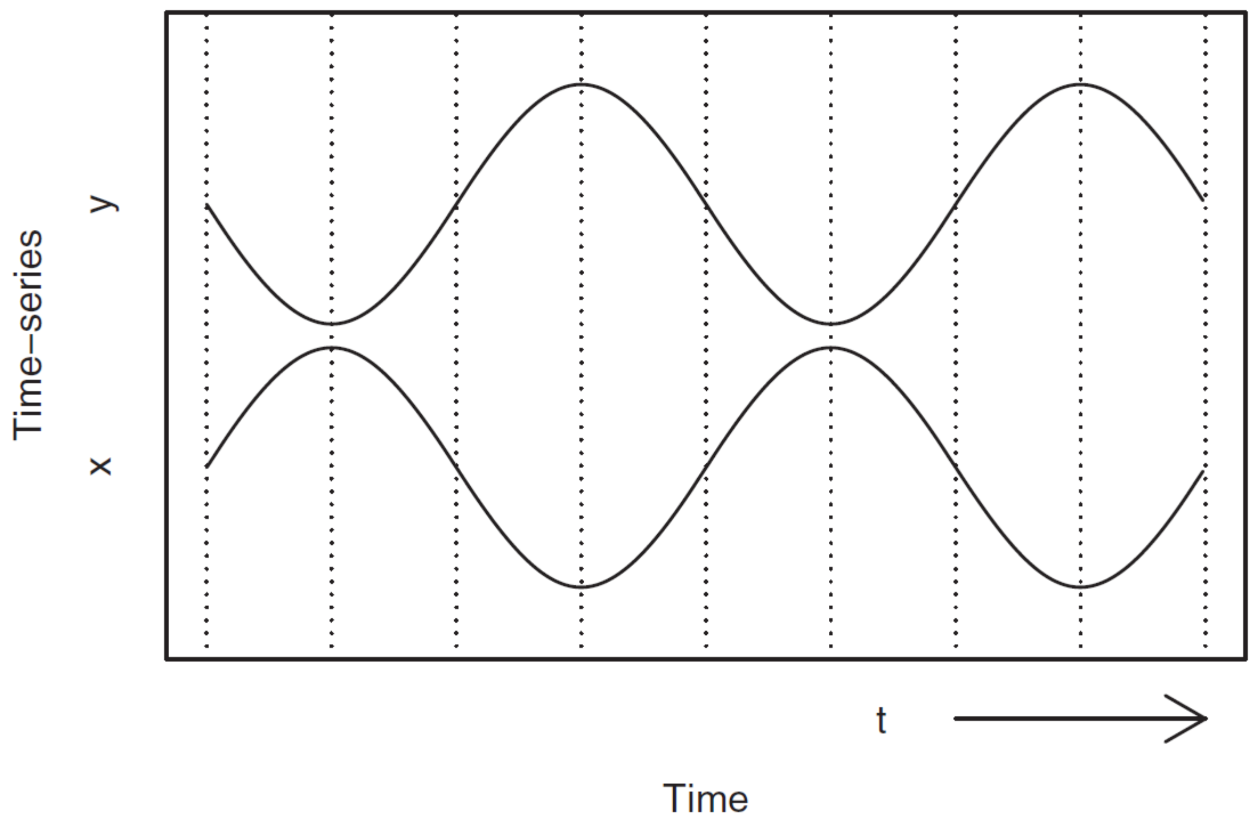
讨论相关系数ρ_{xy}



$\rho_{xy}=1$

一、相关系数

讨论相关系数ρ_{xy}



ρ_{xy}=-1

3）若相关系数ρ_{xy}=0，它等价于的分子项$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t)dt = 0$

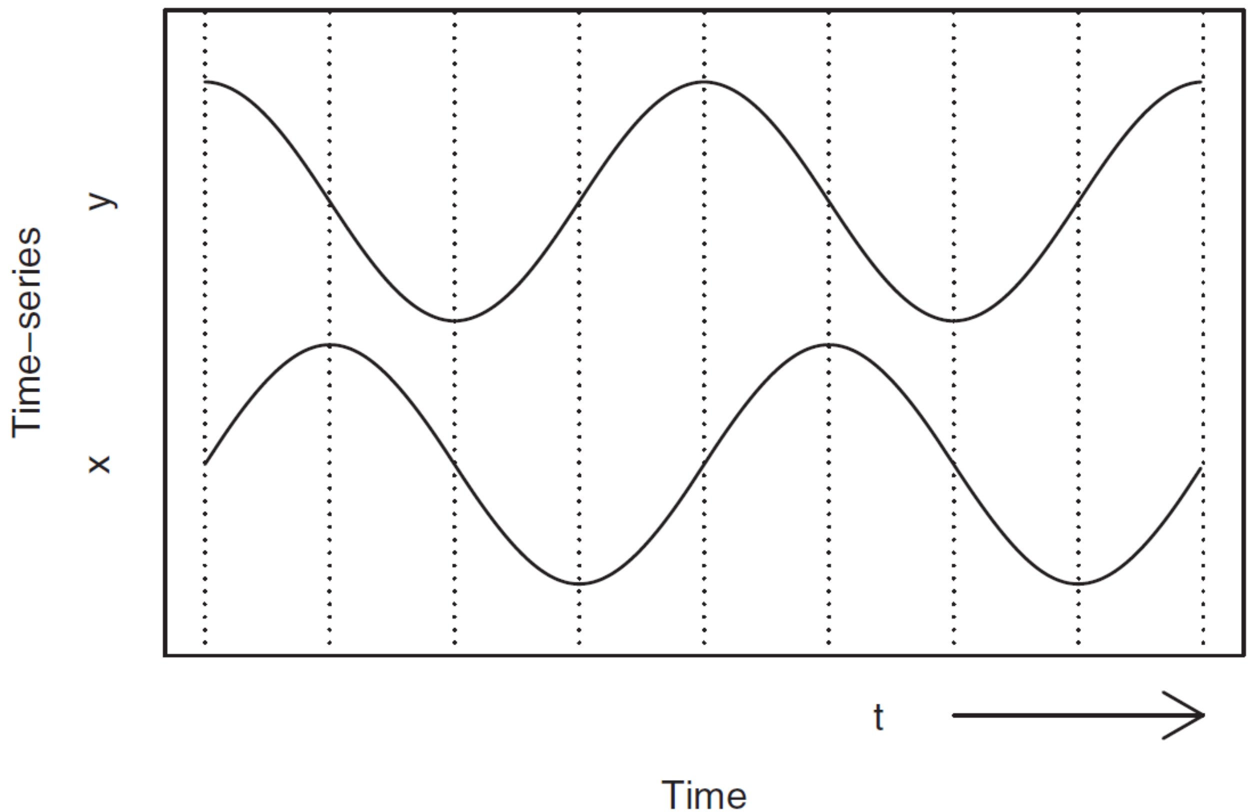
信号$x(t)$和$y(t)$之间的相对误差为最大，两个信号的波形毫无相似之处，或者说两个信号是**相互正交**的，无法用一个信号去近似表示另一个信号，也可以说两个信号是**线性无关**的。

4）通常，**$0<|\rho_{xy}|<1$**，这时既不能用一个信号精确地表示另一个信号，也不相互正交，而可用一个信号近似地表示另一信号，其近似程度就用$|\rho_{xy}|$来描述。

✓ $|\rho_{xy}|$越接近于1，表示近似程度越高，近似误差越小；反之，$|\rho_{xy}|$越接近于0，表示近似程度越小。

一、相关系数

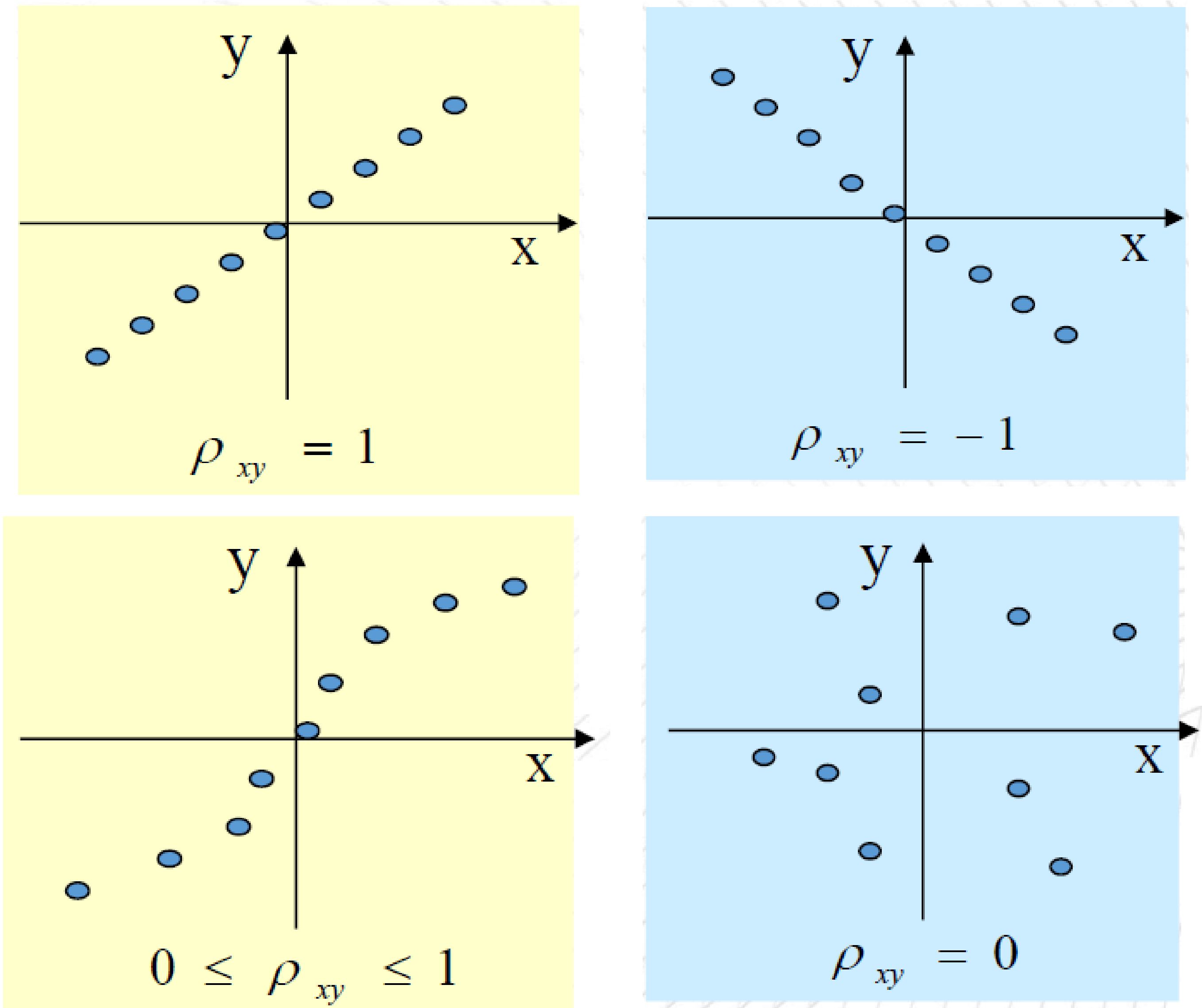
讨论相关系数ρ_{xy}



$$0 < |\rho_{xy}| < 1$$

一、相关系数

讨论相关系数ρ_{xy}



一、相关系数

注意： 以上对相关系数的描述是**针对能量型信号**的。

对于**功率型信号**，相关系数定义为

$$\rho_{xy}=\frac{\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t)y(t)dt}{\sqrt{\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x^{2}(t)dt}\sqrt{\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}y^{2}(t)dt}}$$

两个实信号的相关系数及其特性可以**推广到一般的复信号**，此时a_{xy}和ρ_{xy}应为复数，$|\rho_{xy}|\le 1$意味着相关系数的模小于等于1。

相似系数

由于信号$x(t)$和$y(t)$的能量往往是确定的，因此ρ_{xy}的大小就由分子确定。

这里，定义

$$r_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t)dt$$

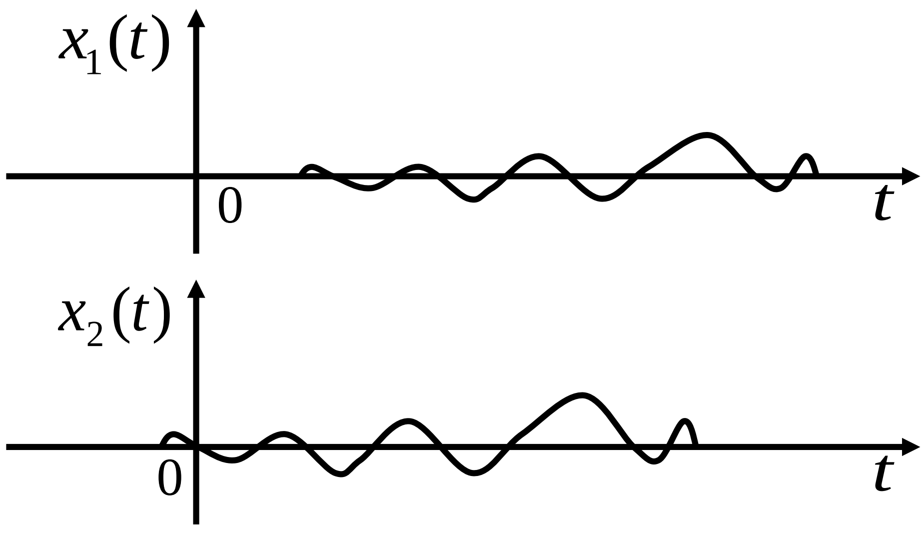
为$x(t)$与$y(t)$的**未归一化的相关系数**，也常简称相关系数，r_{xy}也是衡量两个波形$x(t)$与$y(t)$之间相似性或线性相关性的一种度量。

第四章 相关分析

- **第一节 相关系数与相关函数**
- 第二节 相关函数的性质
- 第三节 离散信号的相关

二、相关函数

在讨论相关系数时，考虑的是**相对固定**波形的相似性。当考虑两个信号在**时移过程**中相关系数，也就是本节要讨论的相关函数。



$$r_{xy}=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)y(t)dt$$

重要公式

➢ 相关函数定义：

1、如果$x_1(t)$与$x_2(t)$是**能量有限信号**，且为实函数，$x_1(t)$与$x_2(t)$的相关函数定义为

$$r_{12}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}x_1(t)x_2(t-\tau)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}x_1(t+\tau)x_2(t)dt$$

显然，相关函数 $r(\boldsymbol{\tau})$是两信号之间时差为$\boldsymbol{\tau}$ 的函数。

2、信号$x_2(t)$与$x_1(t)$ 的相关函数定义为

$$r_{21}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}x_1(t-\tau)x_2(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}x_1(t)x_2(t+\tau)dt$$

一般情况下

$$r_{12}(\tau) \neq r_{21}(\tau)$$

- 这说明了信号的相关运算**不具有可交换性质**。

比较两式有：

$$r_{12}(\tau) = r_{21}(-\tau)$$

- 若$x_1(t)$与$x_2(t)$是同一信号，即$x_1(t) = x_2(t) = x(t)$，此时相关函数称为**自相关函数**r_{xx}。

$$r_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t-\tau)dt$$

➢自相关函数$r_{xx}(\tau)$有如下特性：

$$r_{xx}(\tau) = r_{xx}(-\tau)$$

证明：

$$r_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t-\tau)dt$$

$$r_{xx}(-\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t+\tau)dt$$

令 $u=t-\tau$，则 $t = u+\tau$

$$r_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u+\tau)x(u)du = r_{xx}(-\tau)$$

二、相关函数

- 相关函数$r(\tau)$存在的条件是：

信号$x_1(t)$和$x_2(t)$是绝对可积函数。

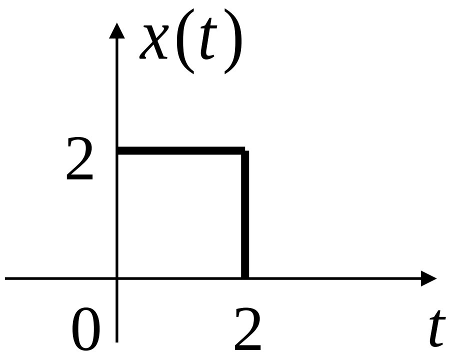
即：$\int_{-\infty}^{+\infty} x_1^2(t)dt < \infty,\quad \int_{-\infty}^{+\infty} x_2^2(t)dt < \infty$

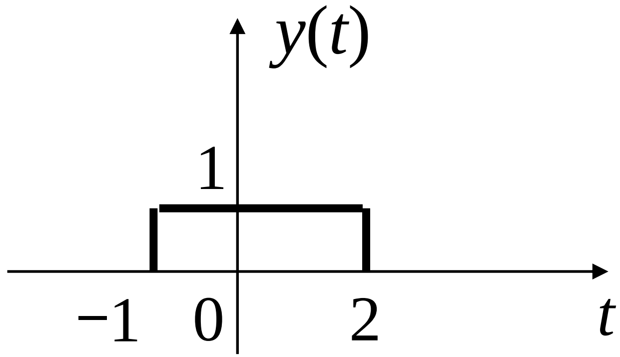
或 $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt < \infty$

- 与自相关函数相对应，如果参与相关的两个信号是不同的信号，则其相关函数称为**互相关函数**。

二、相关函数

例：已知信号$x(t), y(t)$波形如图，求$r_{xy}(\tau)$





解：

$$r_{xy}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)y(t-\tau)dt$$

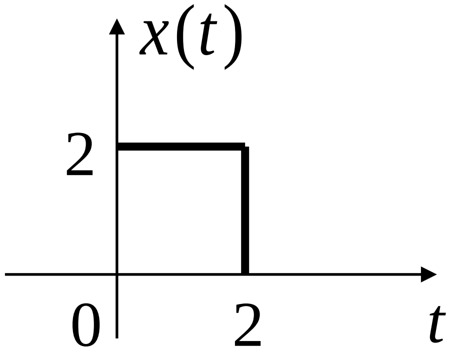
1、时移： $y(t-\boldsymbol{\tau})$

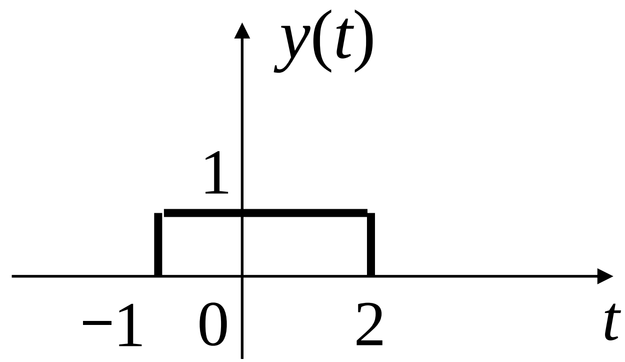
2、相乘： $x(t)y(t-\boldsymbol{\tau})$

3、积分

二、相关函数

$$r_{xy}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)y(t-\tau)dt$$





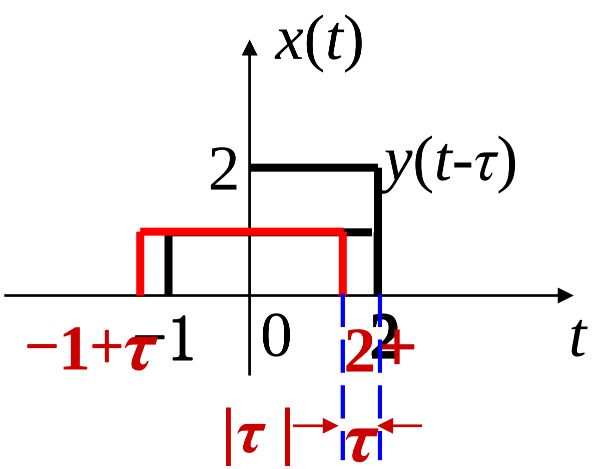
固定$x(t)$，时移$y(t)$为$y(t-\boldsymbol{\tau})$，分左移和右移讨论。

(1) 左移$y(t)$， 当$0\le 2+\boldsymbol{\tau}<2$，

即$-2\le\boldsymbol{\tau}<0$时

$$r_{xy}(\tau)=\int_{0}^{2+\tau}x(t)y(t-\tau)dt$$

$$=\int_{0}^{2+\tau}2dt=4+2\tau$$

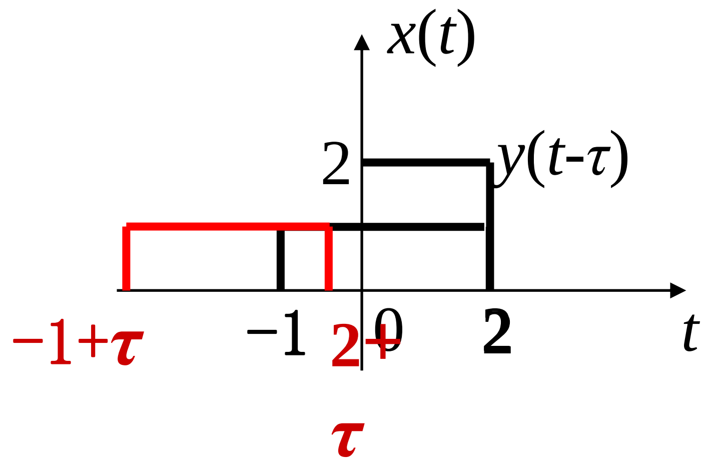


二、相关函数

左移$y(t)$

(2) 当$2+\boldsymbol{\tau}<0$，即$\boldsymbol{\tau}<-2$时

$$r_{xy}(\tau)=0$$

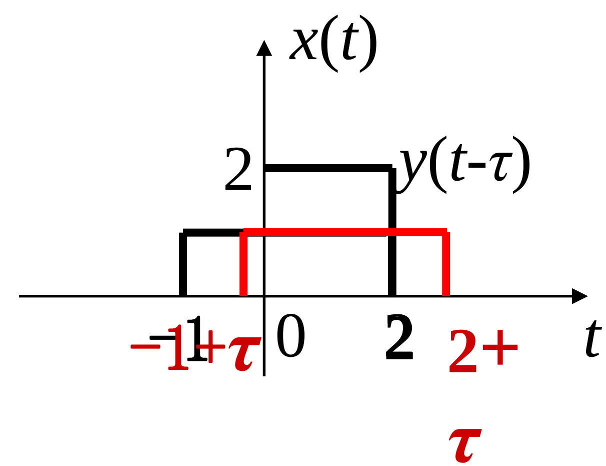


- 右移$y(t)$

(3) 当$-1+\boldsymbol{\tau}<0$，且$2+\boldsymbol{\tau}>2$，即 $0<\boldsymbol{\tau}<1$时

$$r_{xy}(\tau)=\int_0^2 x(t)y(t-\tau)dt$$

$$=\int_0^2 2dt=4$$

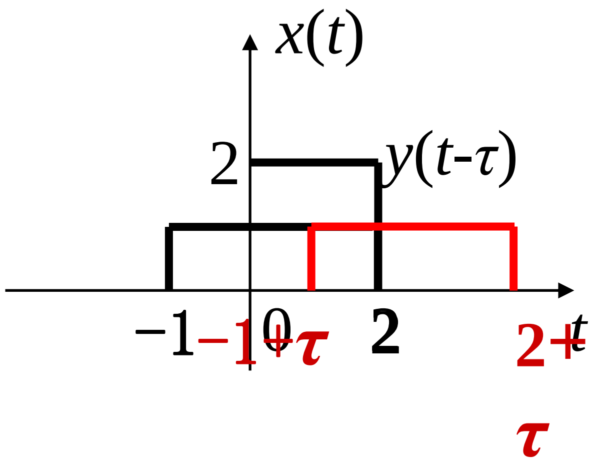


右移$y(t)$

(4) 当$0\le -1+\tau<2$，即$1\le\tau<3$时

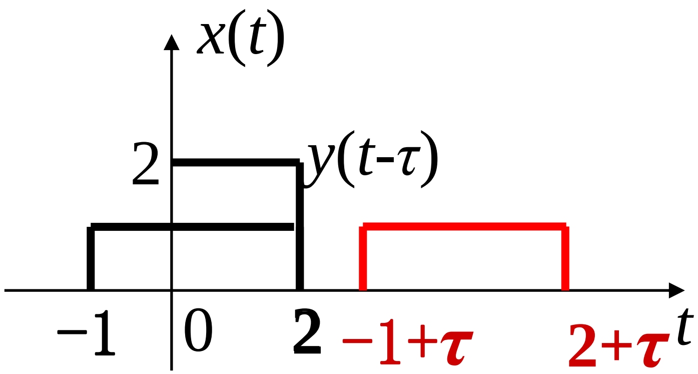
$$r_{xy}(\tau)=\int_{-1+\tau}^{2}x(t)y(t-\tau)dt$$

$$=\int_{-1+\tau}^{2}2dt=6-2\tau$$



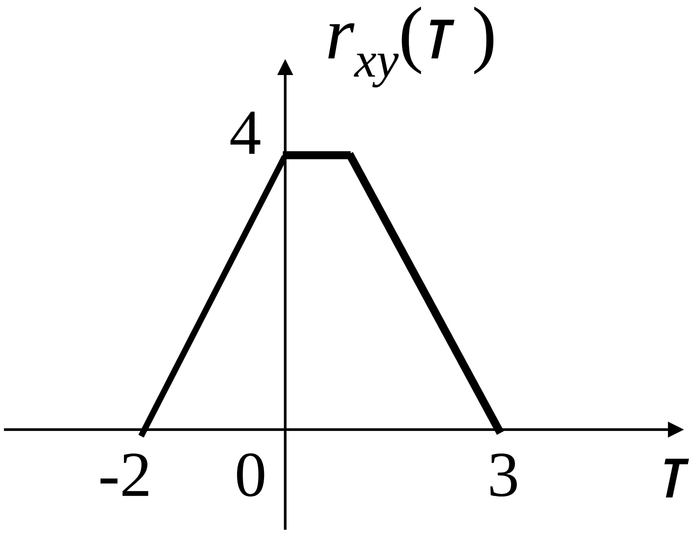
(5) 当$-1+\tau>2$，即$\tau>3$时

$$r_{xy}(\tau)=0$$



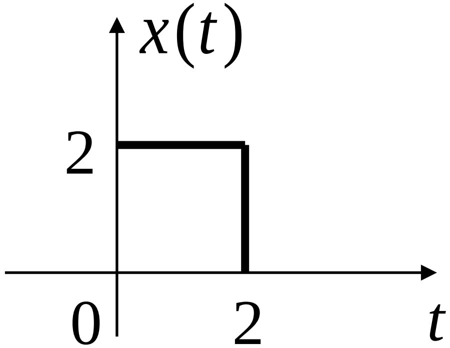
将上述结果整理得：

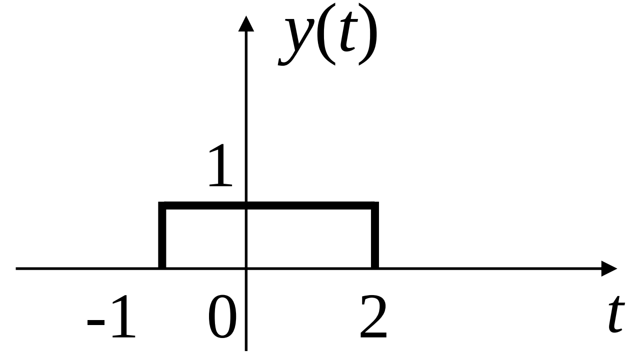
$$r_{xy}(\tau)=\begin{cases}0, & \tau<-2\\ 4+2\tau, & -2\le\tau<0\\ 4, & 0\le\tau<1\\ 6-2\tau, & 1\le\tau<3\\ 0, & \tau\ge 3\end{cases}$$

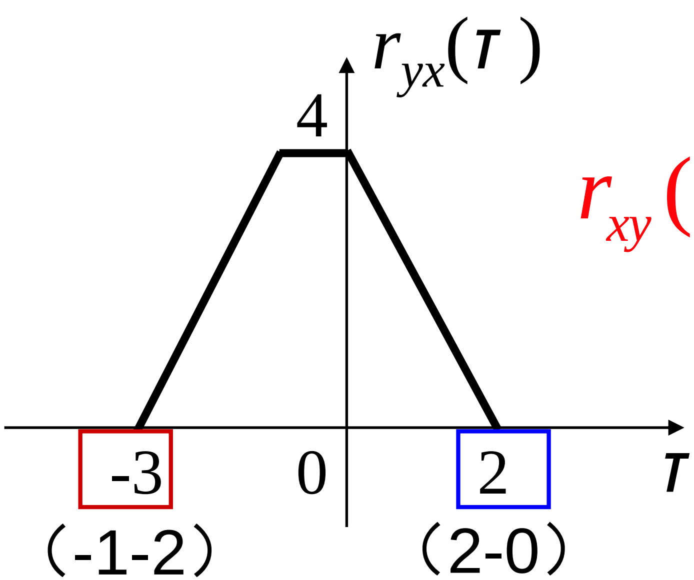


二、相关函数

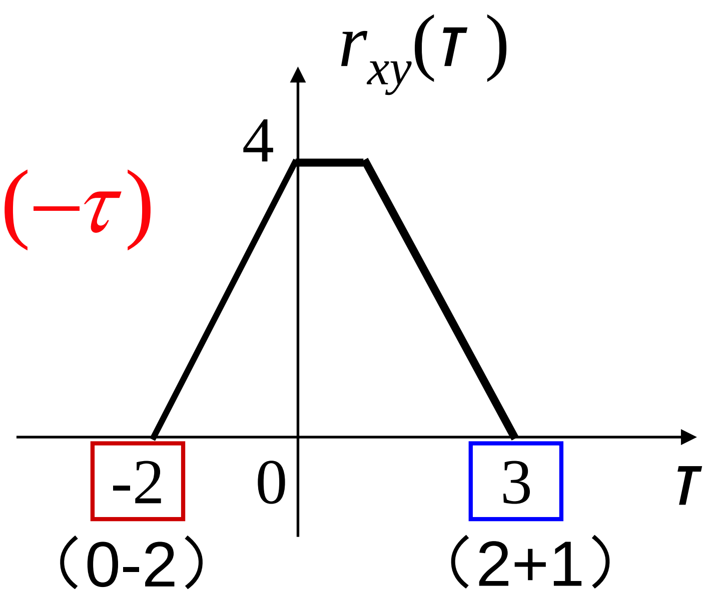
同理：$$r_{yx}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t-\tau)y(t)dt$$





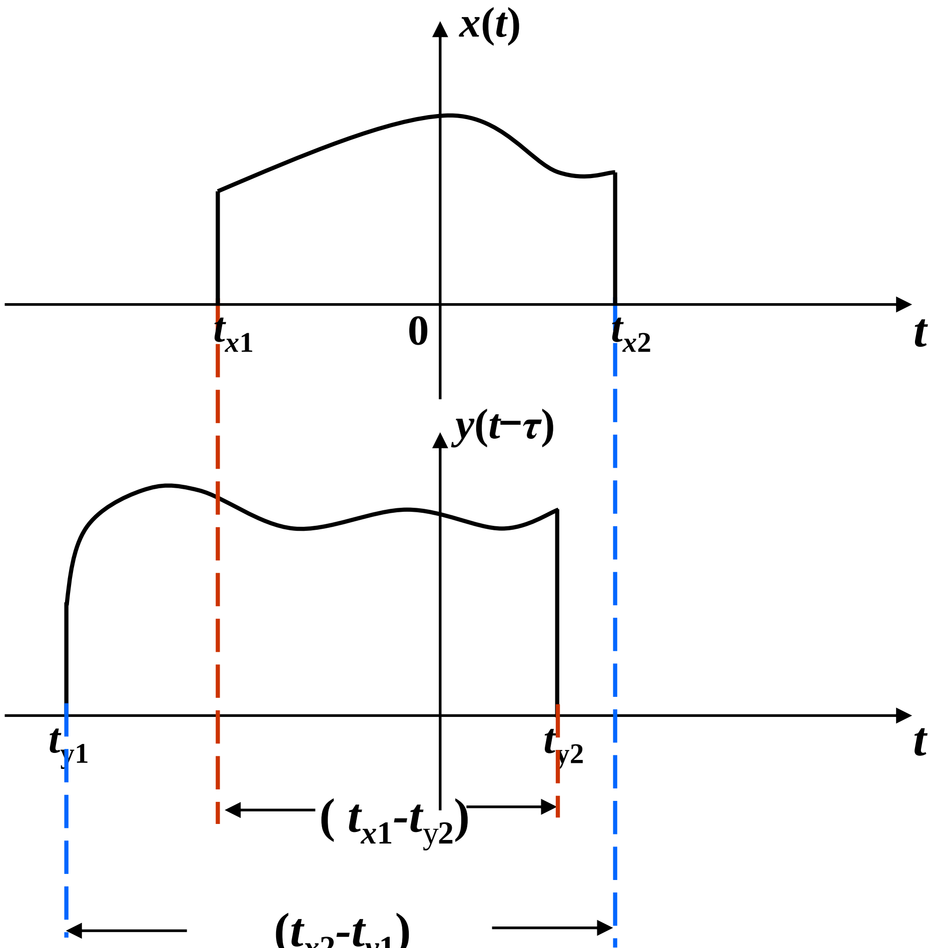


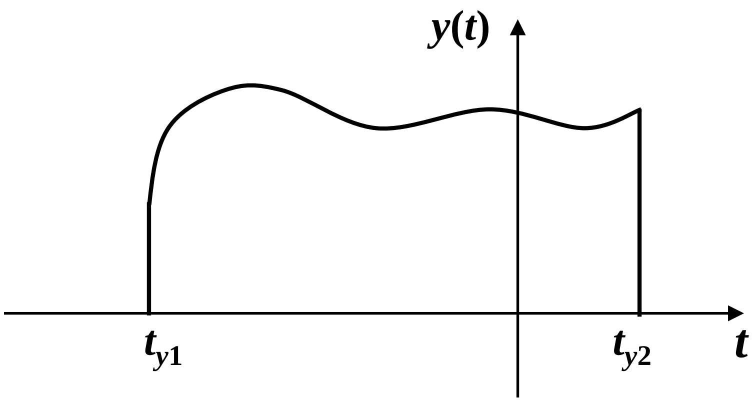
$$r_{xy}(\tau)=r_{yx}(-\tau)$$



二、相关函数

$$r_{xy}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)y(t-\tau)dt$$



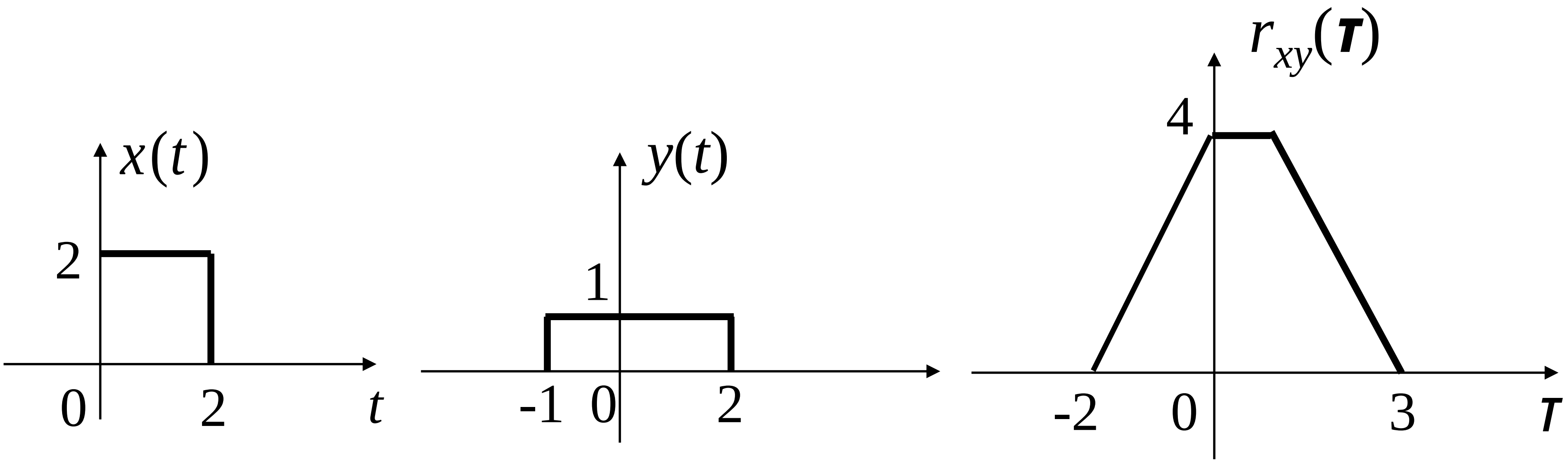


- 时移 $y(t-\tau)$
  - ✓ 左移 $\tau<0$
  - ✓ 右移 $\tau>0$

二、相关函数

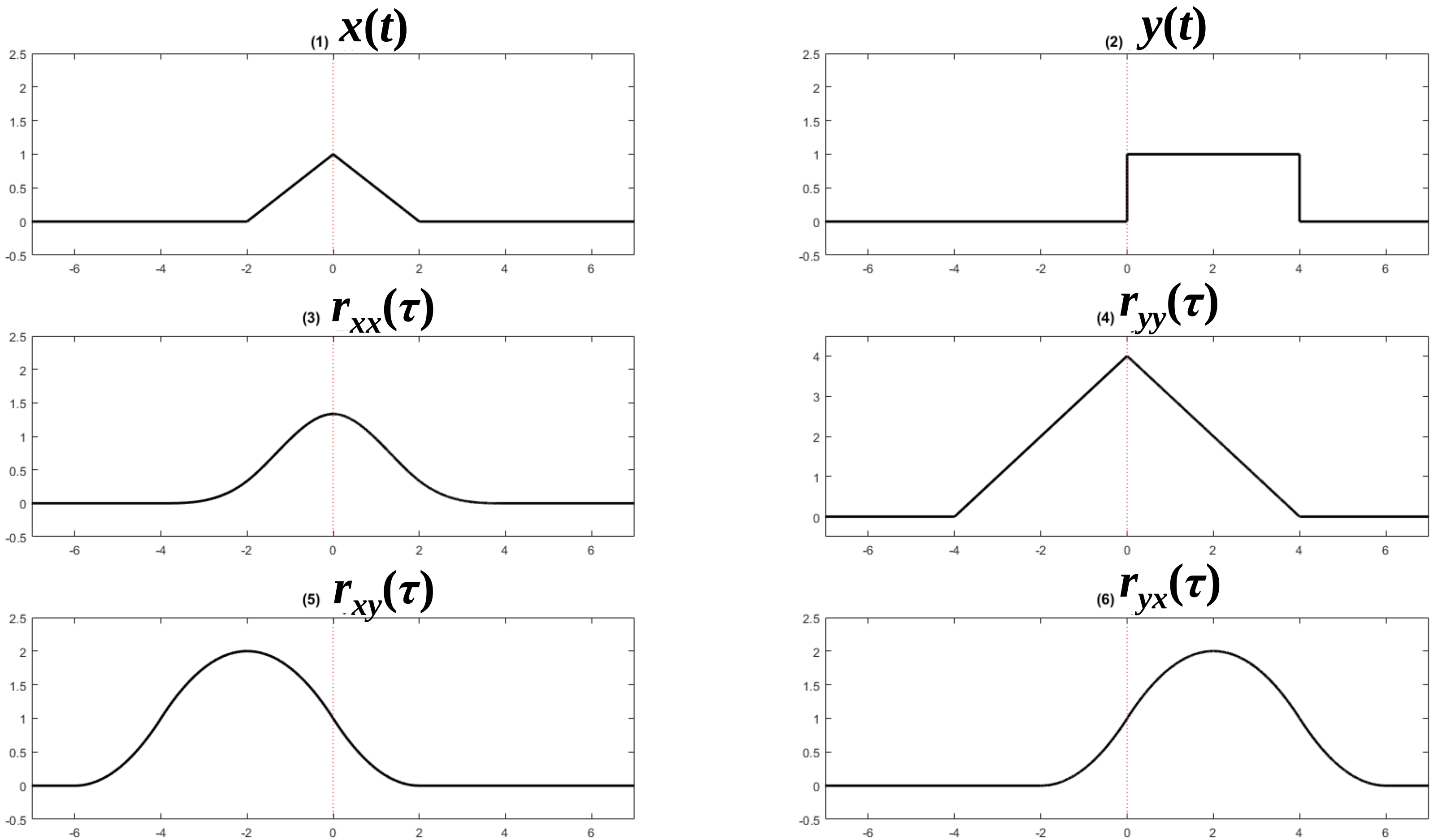
➢ 两个有限区间分别为$[t_{x1},t_{x2}]$和$[t_{y1},t_{y2}]$的信号进行**互相关运算$r_{xy}(\tau)$**，所得互相关的**区间**为

$$[(t_{x1}-t_{y2}),\ (t_{x2}-t_{y1})]$$



二、相关函数

$$x(t)=\begin{cases}1-\dfrac{|t|}{2}, & |t|\le 2\\ 0, & |t|\ge 2\end{cases}\qquad y(t)=\begin{cases}1, & 0<t<2\\ 0, & t>2\text{和}t<0\end{cases}$$



三、其他类型信号的相关函数

1、若$x_1(t)$与$x_2(t)$是**功率有限信号**，且为**实函数**，此时它们之间的**相关函数**定义为：

$$r_{12}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x_1(t)x_2(t-\tau)dt\right]$$

$$r_{21}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x_1(t-\tau)x_2(t)dt\right]$$

以及

$$r_{xx}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t)x(t-\tau)dt\right]$$

2、**若$x_1(t)$与$x_2(t)$是复函数**，且为**能量有限信号**，此时它们之间的相关函数定义为：

$$r_{12}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}x_1(t)x_2^*(t-\tau)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}x_1(t+\tau)x_2^*(t)dt$$

$$r_{21}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}x_1^*(t-\tau)x_2(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}x_1^*(t)x_2(t+\tau)dt$$

以及

$$r_{xx}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)x^*(t-\tau)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}x^*(t)x(t+\tau)dt$$

三、其他类型信号的相关函数

此时，**相关函数$r(\tau)$具有如下性质：**

$$r_{12}(\tau)=r_{21}^{*}(-\tau)$$

$$r_{11}(\tau)=r_{11}^{*}(-\tau)$$

3、**若**$x_1(t)$**与**$x_2(t)$**是复函数的功率有限信号**，相关函数定义为：

$$r_{12}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x_1(t)x_2^{*}(t-\tau)dt\right]$$

$$r_{21}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x_2(t)x_1^{*}(t-\tau)dt\right]$$

$$r_{xx}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t)x^{*}(t-\tau)dt\right]$$

4、若$x(t)$是为能量有限信号，它们的自相关函数为：

$$r_{xx}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)x^*(t-\tau)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}x^*(t)x(t+\tau)dt$$

显然，当τ=0时，有

$$r_{xx}(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)x^*(t)dt=\underline{\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2dt=E}$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\left[\int_{-\infty}^{+\infty}X(f)e^{j2\pi ft}df\right]^*dt$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}X^*(f)df\left[\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j2\pi ft}dt\right]$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}X^*(f)X(f)df$$

$$\boxed{=\int_{-\infty}^{+\infty}|X(f)|^2df}$$

—— 帕斯瓦尔等式

四、相关与褶积的关系

对于两个能量信号$x_1(t)$与$x_2(t)$，其**褶积**与**相关运算**非常相似为：

$$x_1(\tau) * x_2(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t) x_2(\tau - t) dt$$

$$r_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t) x_2^*(t - \tau) dt$$

- 两种运算都有一个**时移**、**相乘**、**积分**（求和）的过程，**差别仅在于**：褶积运算要先进行**反转**，相关运算先取**共轭**，所以有

$$r_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t) x_2^*[-(\tau - t)] dt \ = x_1(\tau) * x_2^*(-\tau)$$

四、相关与褶积的关系

对于两个实信号$x_1(t)$与$x_2(t)$的相关函数

$$r_{12}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}x_1(t)x_2^*(t-\tau)dt$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x_1(t)x_2(t-\tau)dt$$

$$=x_1(\tau)*x_2(-\tau)$$

➢ 对于两个实信号，可以通过实信号的褶积运算求取它们的相关函数，只要在褶积运算之前先对一个信号进行反转即可。

四、相关与褶积的关系

➢ 褶积与互相关____本质区别

$$x_1(\tau) * x_2(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t) x_2(\tau - t) dt$$

$$r_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t) x_2^*(t - \tau) dt$$

- 褶积运算是满足交换律的，而互相关运算并不满足交换律。

五、相关定理

由傅里叶变换的褶积定理建立了时域褶积和频域相乘的对应关系，那么相关函数在频域有没有类似的关系呢？

由相关函数定义，可知

$$r_{12}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}x_1(t)x_2^*(t-\tau)dt$$

对函数两边同时作傅里叶变换有：

$$\mathscr{F}\left[r_{12}(\tau)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}r_{12}(\tau)e^{-\mathrm{j}2\pi f\tau}d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}x_1(t)x_2^*(t-\tau)dt\right]e^{-\mathrm{j}2\pi f\tau}d\tau$$

五、相关定理

$$
\begin{aligned}
\mathscr{F}\left[r_{12}(\tau)\right] &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t)x_2^*(t-\tau)dt\right]e^{-j2\pi f\tau}d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t)\left[\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} x_2^*(t-\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau}\right]dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t)X_2^*(f)e^{-j2\pi ft}dt \\
&= X_2^*(f)\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t)e^{-j2\pi ft}dt \\
&= X_1(f)\cdot X_2^*(f)
\end{aligned}
$$

即得： $\mathscr{F}\left[r_{12}(\tau)\right]=X_1(f)\cdot X_2^*(f)$

同理可得： $\mathscr{F}\left[r_{21}(\tau)\right]=X_1^*(f)\cdot X_2(f)$

相关定理

- 两信号互相关函数的傅里叶变换等于第一个信号的傅氏变换乘以第二个信号傅氏变换的共轭。

$$\mathscr{F}\left[r_{12}(\tau)\right]=X_1(f)\cdot X_2^*(f)$$

- 若$x_2(t)$是**实偶函数**，它的傅里叶变换$X(f)$是**实函数**，此时，相关定理与褶积定理具有相同的结果。

- 对于**自相关函数**，其**傅里叶变换**等于**原信号的振幅谱的平方**。

$$\mathscr{F}\left[r_{xx}(\tau)\right]=X(f)\cdot X^*(f)=\left|X(f)\right|^2$$

第五章 相关分析

- 第一节 相关系数与相关函数
- **第二节 相关函数的性质**
- 第三节 离散信号的相关

一、自相关函数的性质

1、自相关函数$r_{xx}(\boldsymbol{\tau})$的极大值在$\boldsymbol{\tau}=0$处，是实数。

$$\left|r_{xx}(\tau)\right| \le r_{xx}(0)$$

证明：

$$\left|r_{xx}(\tau)\right| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t-\tau)dt\right|$$

$$\le \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty}\left|x(t)\right|^2 dt}\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty}\left|x^*(t-\tau)\right|^2 dt}$$

$$\le \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t)dt}\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} x(u)x^*(u)du} = r_{xx}(0)$$

2）信号$x(t)$自相关函数$r_{xx}(\tau)$是**共轭对称函数**。

$$r_{xx}(\tau) = r_{xx}^{*}(-\tau)$$

- 实函数$x(t)$自相关函数$r_{xx}(\tau)$是偶函数。

$$r_{xx}(\tau) = r_{xx}(-\tau)$$

3）当$|\tau|\to\infty$时，自相关函数$r_{xx}(\tau)=0$。

$$\lim_{|\tau|\to\infty} r_{xx}(\tau) = 0$$

4）信号$x(t)$的自相关函数$r_{xx}(\tau)$的频谱为

$$r_{xx}(\tau) \overset{\mathscr{F}}{\leftrightarrow} X(f) \cdot X^{*}(f) = \left|X(f)\right|^{2}$$

- 自相关函数$r_{xx}(\tau)$与信号的波形无关，只与信号所包含的频率成分的振幅谱$|X(f)|$有关，而与相位谱$\varphi(f)$ 无关。
- 具有**相同的振幅谱**或**功率谱**的信号，具有相同自相关函数。

一、自相关函数的性质

这是由于：

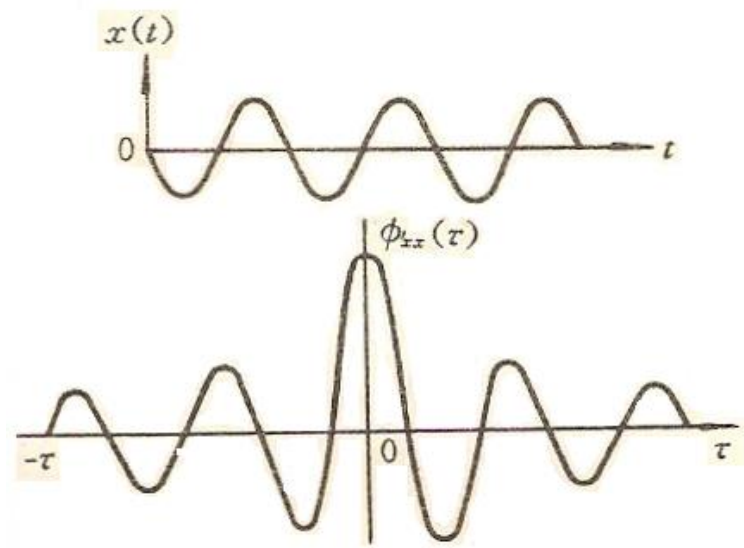
① $r_{xx}(\tau)$完全由它的能量谱或功率谱$P(f)$来决定；

② $\mathscr{F}[r_{xx}(\tau)] = P(f) = |X(f)|^2$

- 不同的信号可以具有相同的自相关函数。

➤ **具有相同的振幅谱、不同相位谱或相同自相关函数的信号**，称为“**同一家族**”的信号。

➤ 信号$x(t)$的自相关函数$r(\tau)$中包含着信号本身的频率成分，这是自相关函数重要的性质。



二、互相关函数的性质

1、两个信号$x_1(t)$与$x_2(t)$互相关函数$r_{12}(\tau)$的极大值不一定在$\tau=0$处，它的极大值为$\sqrt{r_{11}(0)r_{22}(0)}$即

$$\left|r_{12}(\tau)\right| \le \sqrt{r_{11}(0)r_{22}(0)}$$

证明：$\left|r_{12}(\tau)\right| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t)x_2^*(t-\tau)dt\right|$

$$\le \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty}\left|x_1(t)\right|^2 dt}\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty}\left|x_2^*(t-\tau)\right|^2 dt}$$

$$\le \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty}\left|x_1(t)\right|^2 dt}\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty}\left|x_2(u)\right|^2 du} = \sqrt{r_{11}(0)r_{22}(0)}$$

二、互相关函数的性质

2） 当｜τ｜→∞时，互相关函数$r_{12}(\tau)$=0。

$$\lim_{|\tau|\to\infty} r_{12}(\tau)=0$$

3） 互相关函数$r_{12}(\tau)$ 和 $r_{21}(\tau)$是对纵轴共轭反转。

$$r_{12}(\tau)=r_{21}^{*}(-\tau)$$

4） 互相关函数$r_{12}(\tau)$只包含信号$x_1(t)$与$x_2(t)$所共有的频率成分。

$$r_{12}(\tau)\overset{\mathscr{F}}{\leftrightarrow} X_1(f)\cdot X_2^{*}(f)$$

$$\left|\mathscr{F}[r_{12}(\tau)]\right|=\left|X_1(f)\right|\left|X_2(f)\right|$$

5）连续信号关于线性相关仍然具有脉冲不变性。

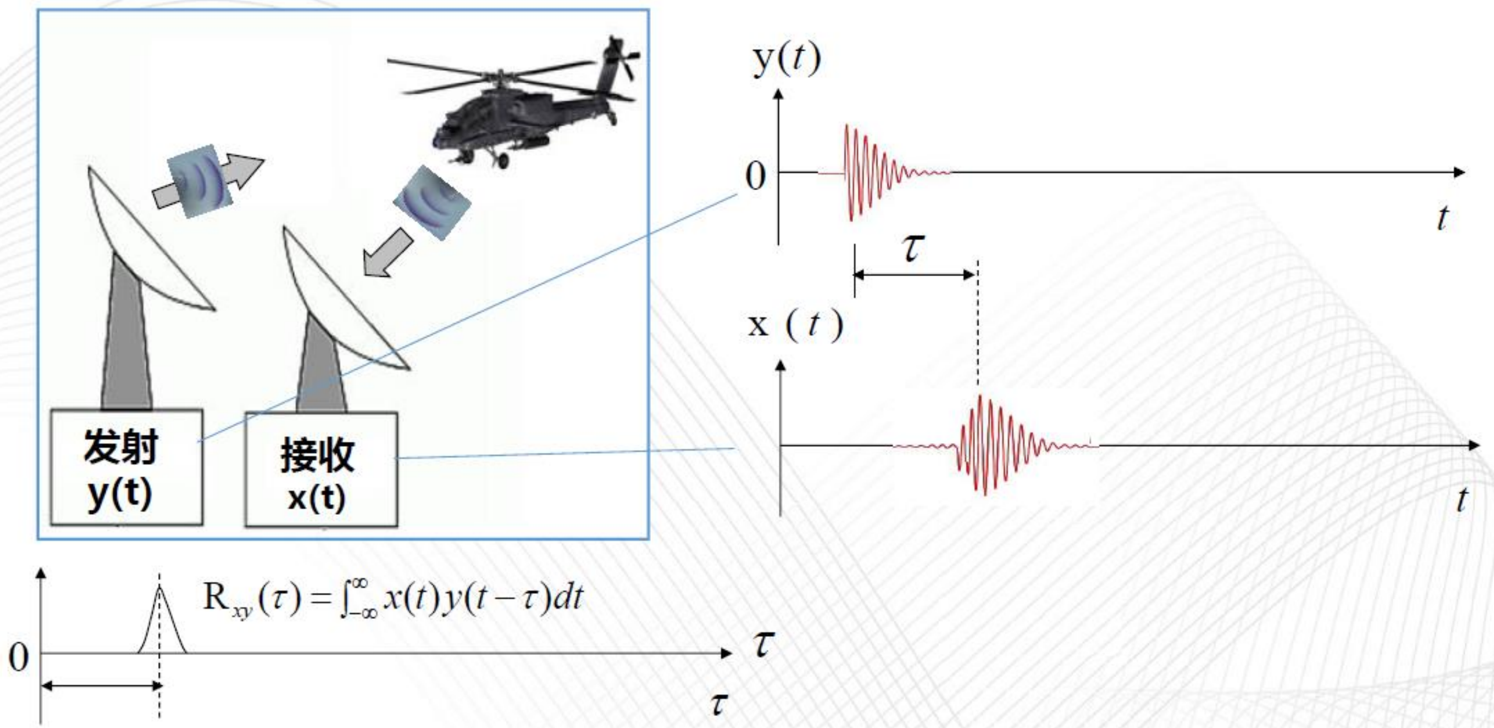
$$r_{x\delta}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\delta^{*}(\tau-t)d\tau=x(t)\quad(-\infty<t<+\infty)$$

$$r_{\delta x}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\tau)x^{*}(\tau-t)d\tau=x^{*}(-t)\quad(-\infty<t<+\infty)$$

三、相关函数的应用

➢ 测量距离

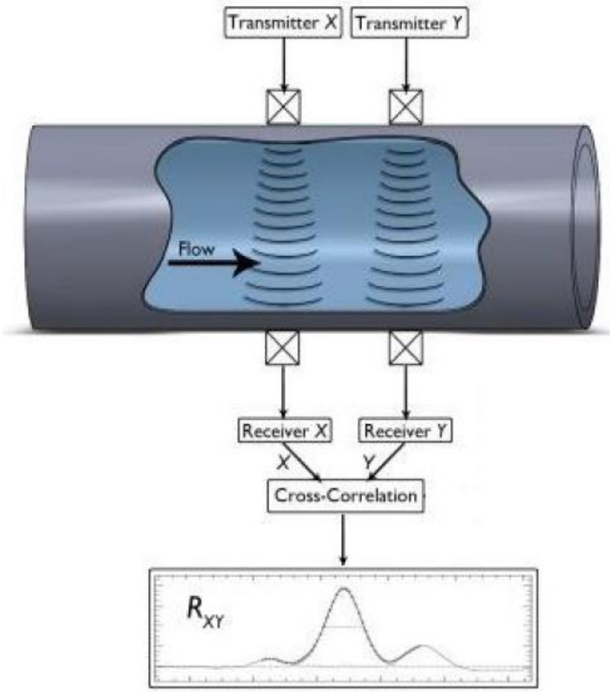
例：飞机雷达测距

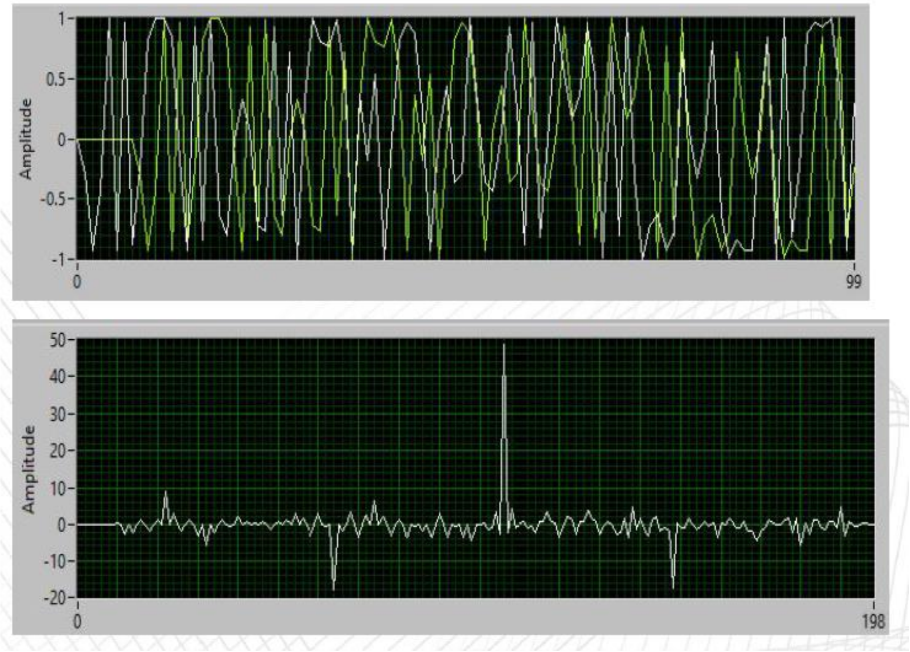


三、 相关函数的应用

测量速度

超声波流体速度测量

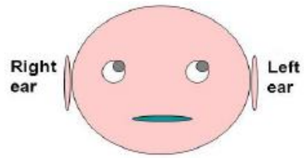


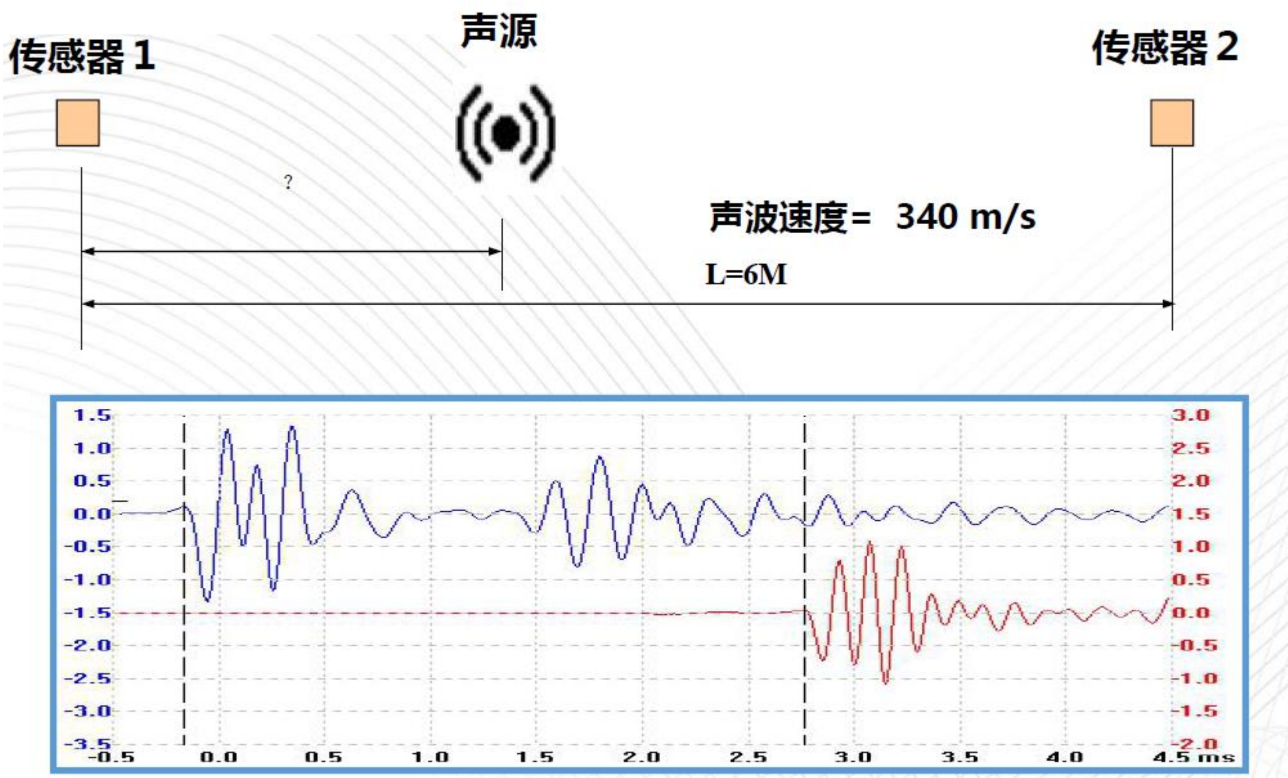


三、 相关函数的应用

➢ 定位

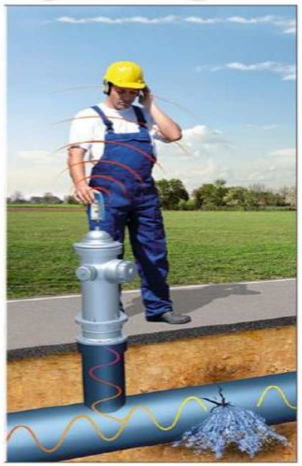
例：声源位置测量（传播速度已知）

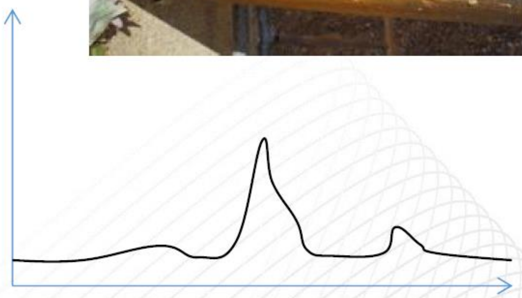


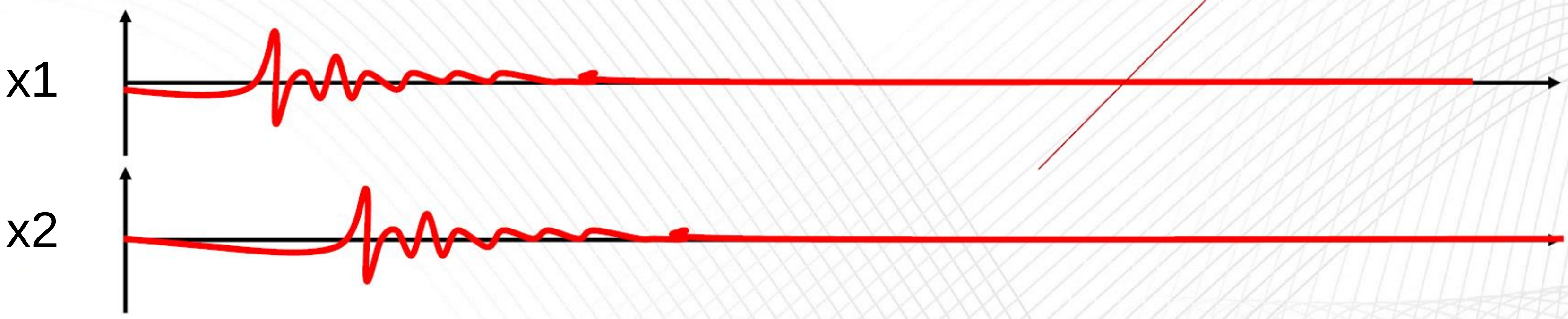


三、 相关函数的应用

例：地下输油管道漏损位置的探测（传播速度已知）







三、 相关函数的应用

第四章 相关分析

- 第一节 相关系数与相关函数
- 第二节 相关函数的性质
- **第三节 离散信号的相关**

第三节 离散信号的相关

一、离散信号的线性相关函数

1、定义：两个能量有限序列$x(n)$和$y(n)$的**线性互相关函数**$r_{xy}(m)$为

$$r_{xy}(m)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)y^*(n-m)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n+m)y^*(n)$$

其中，m为两个序列的相对位移量。

- 式中，$r_{xy}(m)$的下标顺序xy表示在上述互相关运算中，$x(n)$在时间上保持不变，而对$y(n)$的共轭进行相对移位。

一、离散信号的线性相关函数

中国石油大学 CHINA UNIVERSITY OF PETROLEUM

➢如果反过来，$y(n)$在时间上保持不变，而对$x(n)$进行相对移位，则$\boldsymbol{r_{yx}(m)}$为

$$r_{yx}(m)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}y(n)x^*(n-m)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}y(n+m)x^*(n)=r_{xy}^*(-m)$$

● 离散信号的相关运算**不具有可交换性**。

2、若$y(n)=x(n)$，则称为$x(n)$的**线性自相关**，即

$$r_{xx}(m)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)x^*(n-m)$$

当m=0时，有

$$r_{xx}(0)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|^2=E$$

3、若$x(t)$与$y(t)$是**功率有限信号**，则其**互相关函数**定义为：

$$r_{xy}(m)=\lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}x(n)y^{*}(n-m)\right]$$

$$r_{yx}(m)=\lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}x^{*}(n-m)y(n)\right]$$

以及**自相关函数**定义为：

$$r_{xx}(m)=\lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}x(n)x^{*}(n-m)\right]$$

4、褶积运算与相关运算的关系：

褶积为： $$x(n)*y(n)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)y(m-n)$$

相关为： $$r_{xy}(m)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)y^*(n-m)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)y^*[-(m-n)]$$

$$=x(m)*y^*(-m)$$

同理有：

$$r_{xy}(m)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}y^*(n)x(n+m)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}y^*(n)x[m-(-n)]=y^*(m)*x(-m)$$

- 序列$y(n)$相对参考序列$x(n)$的互相关运算，可以将$y^*(n)$通过具有单位脉冲响应为$x(-n)$的线性时不变系统得到。

二、离散相关的运算

$$r_{xy}(m)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)y^*(n-m)$$

相关的计算过程包括以下四个步骤：

共轭、移位、相乘、求和

- 1）共轭：先将$y(n)$取共轭成$y^*(n)$；
- 2）移位：将$y^*(n)$移位m，变成$y^*(n\text{-}m)$，m为正数，右移m位，m为负数，左移m位；
- 3）相乘：将$y^*(n\text{-}m)$与$x(n)$在相同的对应点相乘；
- 4）求和：将所有对应点乘积累加起来，就得到m时刻的相关值；对所有的m重复以上步骤，就可得到所有的相关值$r_{xy}(m)$。

二、离散相关的运算

若$x(k)$和$y(k)$为**有限长实序列**，长度分别$(N+1)$和$(M+1)$个样值，则其相关结果 $r_{xy}(m)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^{*}(n-m)$ 的长度为？

x_0	x_1	x_2	…	x_N
y_0	y_1	y_2	…	y_M

$m=0,\ r_0$

	x_0	x_1	x_2	…	x_N
y_0	y_1	y_2	…	y_M	

$m=-1,\ r_{-1}$

				x_0	x_1	x_2	…	x_N
y_0	y_1	y_2	…	y_M				

$m=-M,\ r_{-M}$

二、离散相关的运算

x_0	x_1	x_2	…	x_N

y_0	y_1	y_2	…	y_M

$m=N,\ r_N$

x_0	x_1	x_2	…	x_N

y_0	y_1	y_2	…	y_M

$m=2,\ r_2$

x_0	x_1	x_2	…	x_N

y_0	y_1	y_2	…	y_M

$m=1,\ r_1$

x_0	x_1	x_2	…	x_N

y_0	y_1	y_2	…	y_M

$m=0,\ r_0$

$$r_{xy}(m)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)y^*(n-m)$$

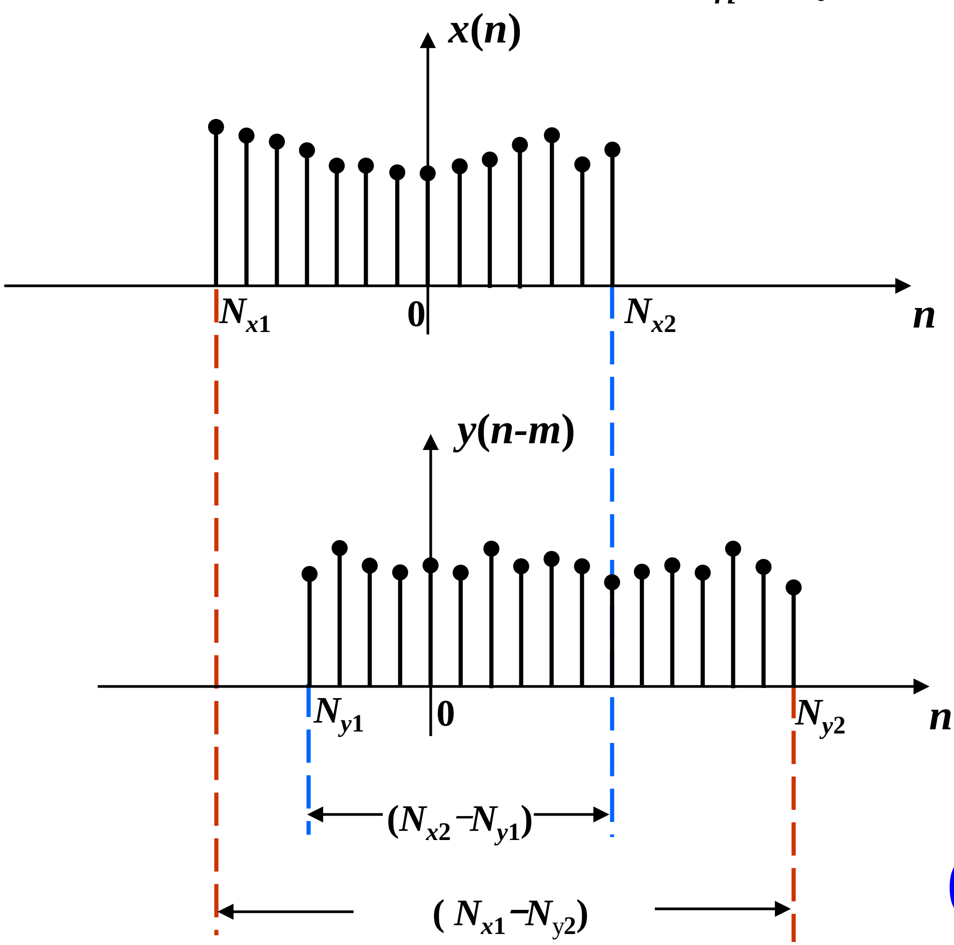
二、离散相关的运算

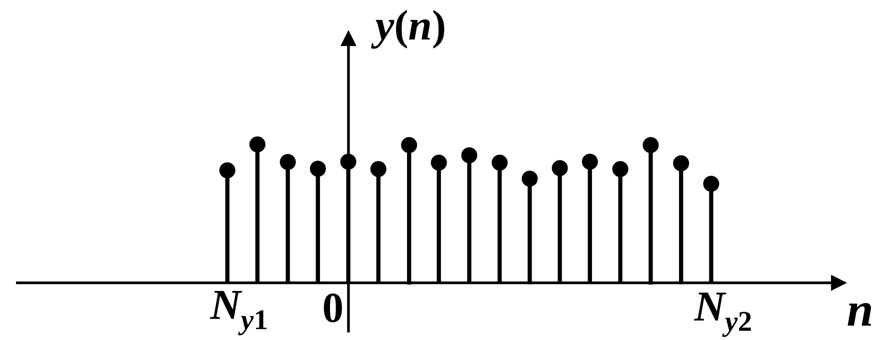
$$r_{xy}(m)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)y^*(n-m)$$

- 若$x(k)$和$y(k)$为两个有限长序列，长度分别$(N+1)$和$(M+1)$个样值，则其相关运算$r_{xy}(m)$的长度为 **$(N+M+1)$** 个样值。
- 上述相关函数$r_{xy}(m)$求取的方法为数字求和法。

二、离散相关的运算

$$r_{xy}(m)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)y^*(n-m)$$





- 时移 $y(n-m)$
  - ✓右移 $m>0$
  - ✓左移 $m<0$

$$(N_{x1}-N_{y2})\le m\le(N_{x2}-N_{y1})$$

二、离散相关的运算

$$r_{xy}(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) y^*(n-m)$$

- 有限长序列 $x(k)=(x_0, x_1, x_2,\ldots, x_N)$，$y(k)=(y_0, y_1, y_2,\ldots,y_M)$，可用**矩阵**或**向量**表示为

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_N \end{bmatrix}^T$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} y_0 & y_1 & y_2 & \cdots & y_M \end{bmatrix}^T$$

- 同理，互相关运算$r_{xy}(m)$可用$N+M+1$阶矩阵表示

$$r_{xy}(k) = \begin{bmatrix} r_{-M} & \cdots & r_{-1} & r_0 & r_1 & r_2 & \cdots & r_N \end{bmatrix}^T$$

- 而相关运算的对应相乘后求和可利用矩阵求取

二、离散相关的运算

$$r_{xy}(m)=\sum_{n=-N}^{M}x(n)y^*(n-m)$$

$$\begin{bmatrix} y_0^* & y_1^* & \cdots & y_M^* & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & y_0^* & y_1^* & \cdots & y_M^* & 0 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & y_0^* & y_1^* & \cdots & y_N^* \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & y_0^* & y_1^* \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & y_0^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{-M} \\ \vdots \\ r_{-1} \\ r_0 \\ r_1 \\ \vdots \\ r_N \end{bmatrix}$$

主对角为y_0*的上三角阵

二、离散相关的运算

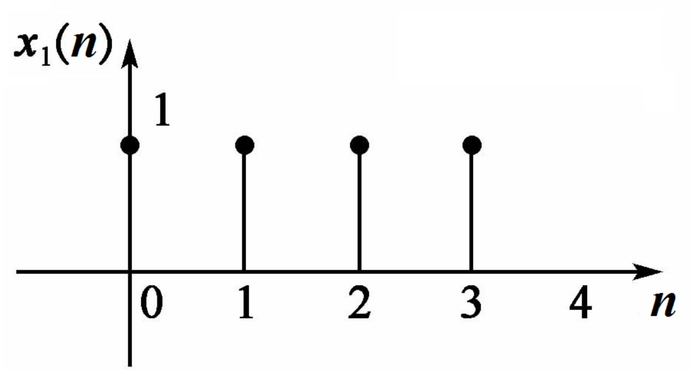
$$r_{xy}(m)=\sum_{n=-N}^{M}x(n)y^*(n-m)$$

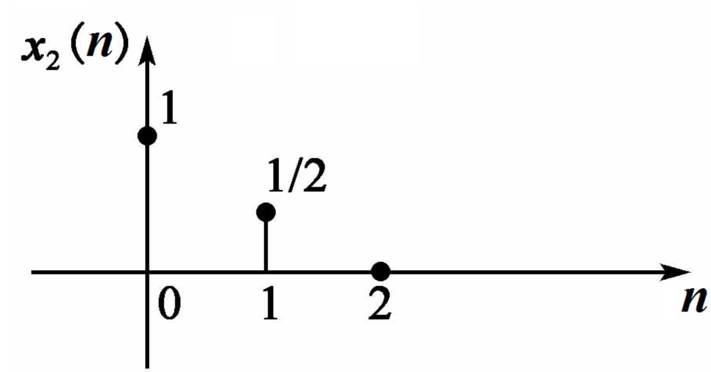
简化表示为

$$\begin{bmatrix} r_{-M} \\ r_{-M+1} \\ \vdots \\ r_0 \\ r_1 \\ \vdots \\ r_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_M^* & 0 & \cdots & 0 \\ y_{M-1}^* & y_M^* & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_0^* & y_1^* & \cdots & y_N^* \\ 0 & y_0^* & \cdots & y_{N-1}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & y_0^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}$$

二、离散相关的运算

例：已知$x_1(n)$、 $x_2(n)$，求互相关$r_{12}(k)$。





解：固定$x_1(n)$，平移 $x_2(n)$

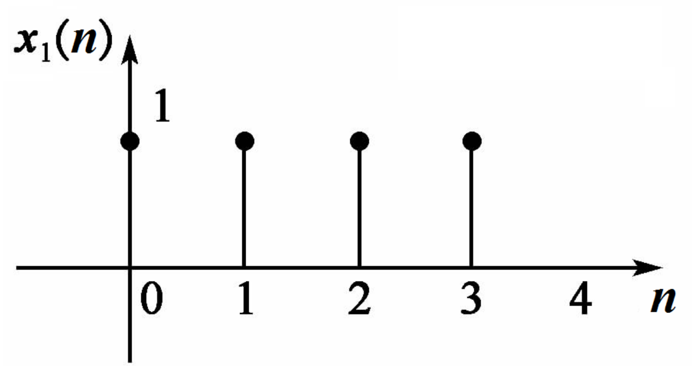
$$r_{12}(k)=\sum_{i=0}^{3}x(i)x_2(i-k)$$

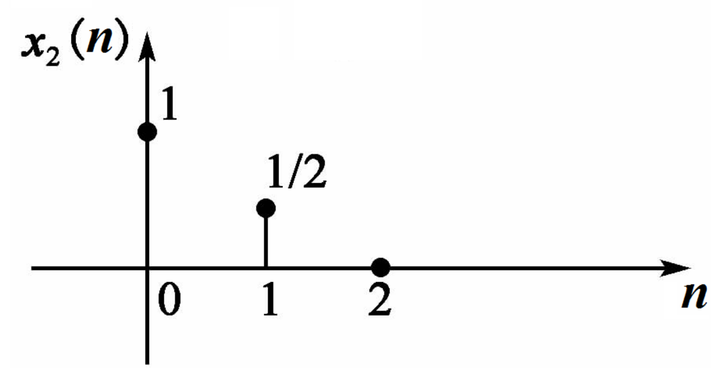
1）数字求和法

$x_1(n)$			1	1	1	1		
$x_2(n)$			1	0.5				$k=0$, $r_{12}(0)=1.5$
$x_2(n+1)$	1	0.5						$k=-1$, $r_{12}(-1)=0.5$
$x_2(n-1)$				1	0.5			$k=1$, $r_{12}(1)=1.5$
$x_2(n-2)$					1	0.5		$k=2$, $r_{12}(2)=1.5$
$x_2(n+1)$						1	0.5	$k=3$, $r_{12}(3)=1$

二、离散相关的运算

例：已知$x_1(n)$、$x_2(n)$，求互相关$r_{12}(k)$。





解：2）竖式不进位 $r_{12}(k)=\sum_{i=0}^{3} x(i)x_2(i-k)=x_1(k)*x_2(-k)$

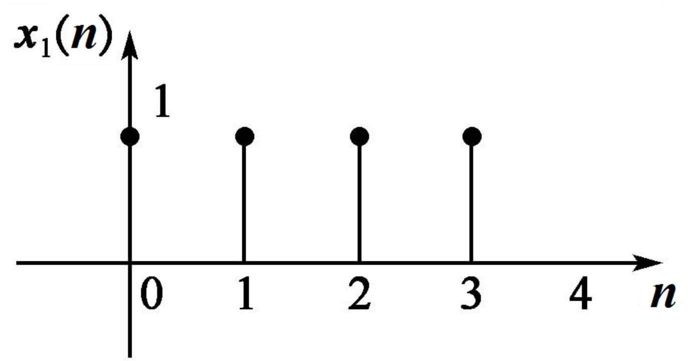
$$
\begin{array}{lccccc}
 & & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\times) & & & & 0.5 & 1 \\
\hline
 & & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & \\
\hline
 & 0.5 & 1.5 & 1.5 & 1.5 & 1
\end{array}
$$

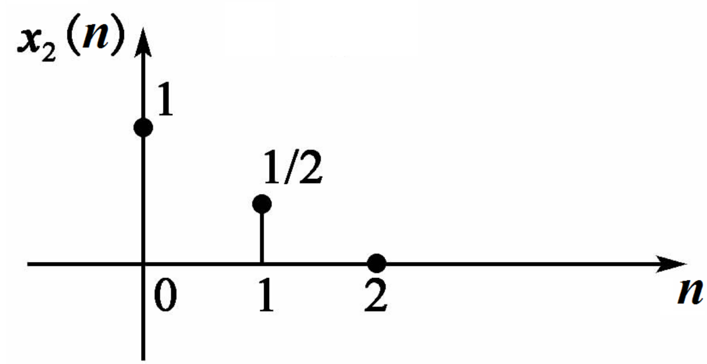
根据相互函数的起始点，则有

$$r_{12}(k)=\left\{0.5,\overset{\downarrow}{1}.5,1.5,1.5,1\right\}$$

二、离散相关的运算

例：已知$x_1(n)$、 $x_2(n)$，求互相关$r_{12}(k)$。



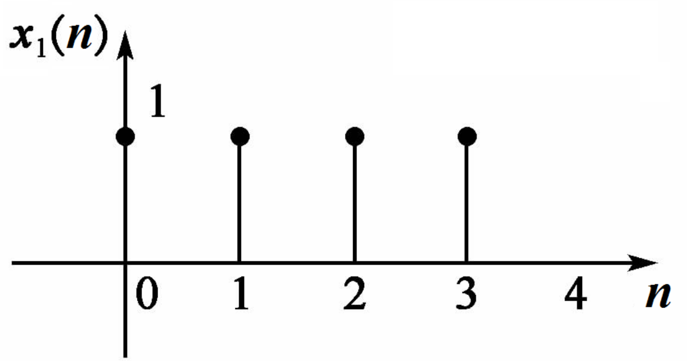


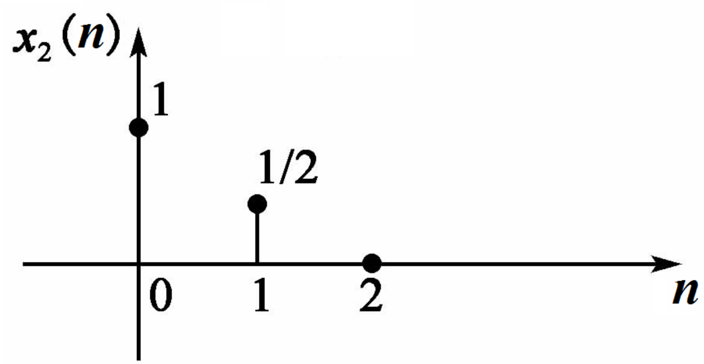
解：2) 竖式不进位 $r_{12}(k)=\sum_{i=0}^{3}x(i)x_2(i-k)=x_1(k)*x_2(-k)$

$$
\begin{array}{lccccc}
x_1(n) & 1 & 1 & 1 & 1 & \\
x_2(n)\ \times) & & & 1 & 0.5 & \\
\hline
 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & \\
 & & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
 & 0.5 & 1.5 & 1.5 & 1.5 & 1
\end{array}
$$

二、离散相关的运算

例：已知$x_1(n)$、 $x_2(n)$，求互相关$r_{12}(k)$。





解：3）矩阵法

$$r_{12}(k)=\begin{bmatrix}0.5 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0.5 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0.5 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0.5\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.5\\1.5\\1.5\\1.5\\1\end{bmatrix}$$

三、离散相关的性质

1、自相关函数$r(m)$的**极大值在$m=0$处**。

$$\left| r_{xx}(m) \right| \le r_{xx}(0)$$

2、自相关函数$r(m)$ 是共轭对称的。

证明：$r_{xx}(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x^*(n-m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n+m)x^*(n)$

$$= \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n-(-m)]x(n) \right\}^* = r_{xx}^*(-m)$$

➢ 进而，**实序列**$x(n)$的自相关函数$r(m)$是**偶函数**。

三、离散相关的性质

3、若序列$x(n)$是能量有限的，则有

$$\lim_{m \to \pm\infty} r_{xx}(m) = 0$$

4、序列$x(n)$自相关只与其振幅谱有关（**与相位谱无关**）。

5、线性相关不具有可交换性。

$$r_{yx}(m) = r_{xy}^*(-m)$$

6、两个无限离散序列$x(n)$与$y(n)$的相关，其频谱就是$x(n)$频谱乘以$y(n)$频谱的共轭。

$$\mathscr{F}\left[r_{xy}(m)\right] = X_\Delta(k) \cdot Y_\Delta^*(k)$$

第四章　相关分析

- 相似系数
- 相关函数
- 连续相关

  公式、性质、相关与褶积
- 离散相关的计算公式
- 离散相关的计算方法
- 离散相关的性质