中国石油大学
CHINA UNIVERSITY OF PETROLEUM

数字信号分析与处理

Digital Signal Analysis & Processing（D S P）

厚积薄发 开物成务

数字信号分析与处理

Digital Signal Analysis & Processing

第二章 离散信号和抽样定理

第二章 离散信号和抽样定理

- **第一节 离散时间信号**
- 第二节 连续信号的离散化
- 第三节 抽样定理
- 第四节 假频现象

第一节 离散时间信号

一、离散时间信号 *discrete-time signal*

在物理上，定义为在离散时间上信号样本的集合。**在数学上**，可用**时间序列{*x*(*n*)}**来表示。

$x(n)$代表序列的第n个样点的数值，n代表时间的序号(为整数)。

- 样本集合可以是本来就存在的，也可以是由模拟信号通过采样得来的或者是用计算机产生的。

离散时间信号的时域表示

1）表示离散信号可用**公式表示:**

如 $x(n) = \sin 2\pi fn \quad -\infty < n < \infty$

$$x(n) = \begin{cases} a^{-n} & n \geq 0, |a| \geq 1 \\ b^{n} & n < 0, |b| \geq 1 \end{cases}$$

2）表示离散时间信号可采用**枚举的方式**。例如

$\{x(n)\} = \{\ldots, -1.5, -8.7, \underset{\uparrow}{2}.53, 0.0, 6, 7.2, \ldots\}$

箭头表示时间的零点位置，即$x[0]$

离散时间信号的时域表示

对于离散信号的枚举型表示，当没有箭头时，默认第一个值为$x[0]$。

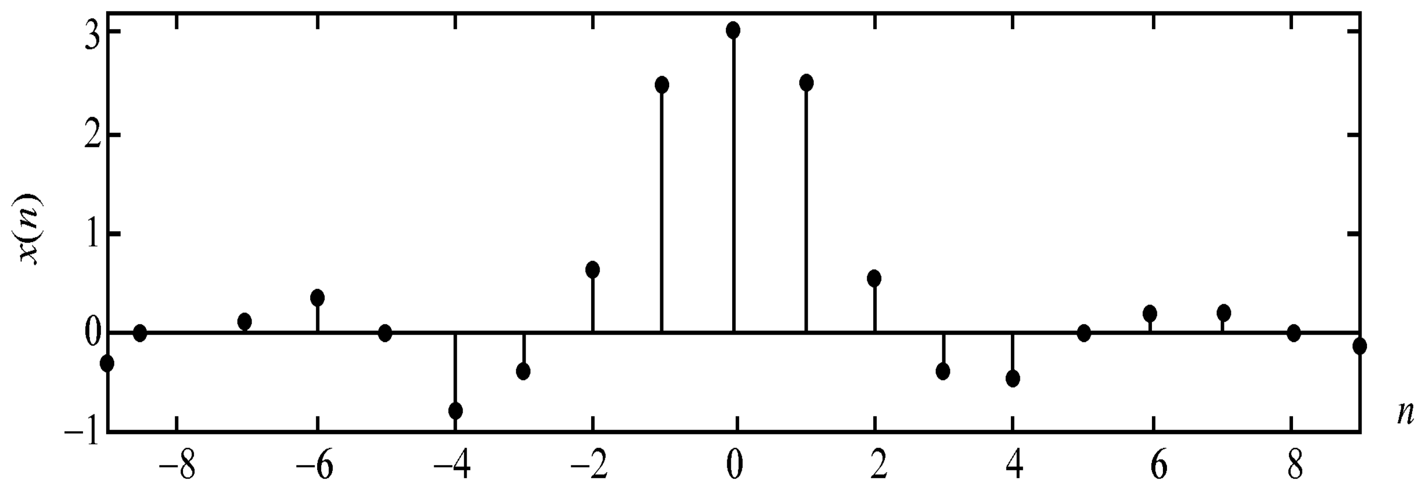
$\{x(n)\}=\{3，1，5，7，2，8，4，6\}$

$$\{x(n)\}=\{3，1，5，\underset{\uparrow}{7}，2，8，4，6\}$$

- 有限长离散时间信号还可采用**矩阵**或**向量方式**表示。例如

$$\{x(n)\}=\{3,1,5,7,2,8,4,6\}=\begin{bmatrix}3\\1\\\vdots\\4\\6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 1 & 5 & 7 & 2 & 8 & 4 & 6\end{bmatrix}^T$$

3）离散信号可用**图形的方式**表示



图中，横坐标n表示离散的时间坐标，且仅在**n为整数时**才有意义；**纵坐标代表**信号样点的幅值。

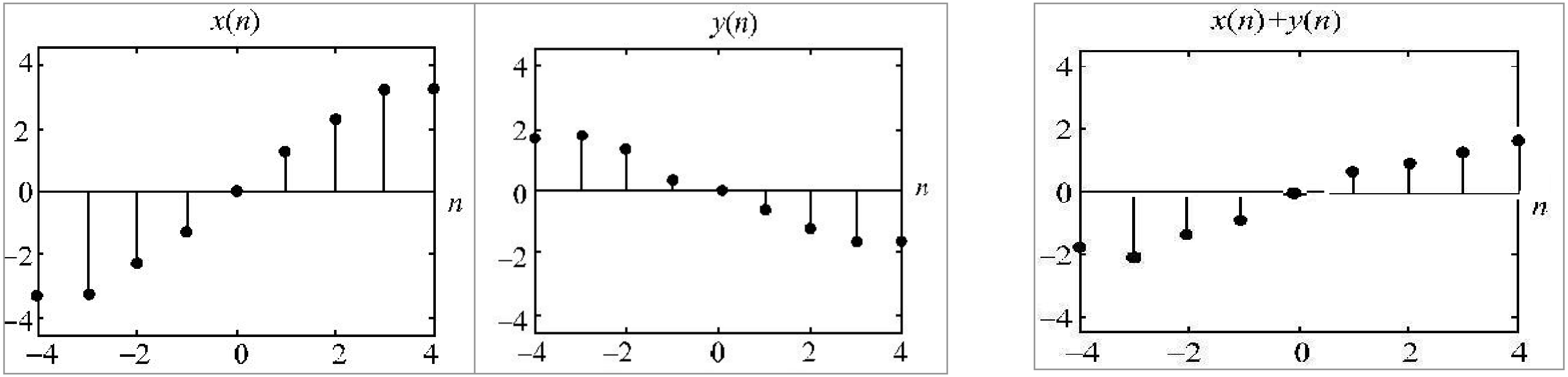
- 为了方便，一般直接用$x(n)$来代表序列全体$\{x(n)\}$。

二、 离散信号的基本运算

1、序列的加减

序列的加减指将两序列序号相同的数值相加减，即

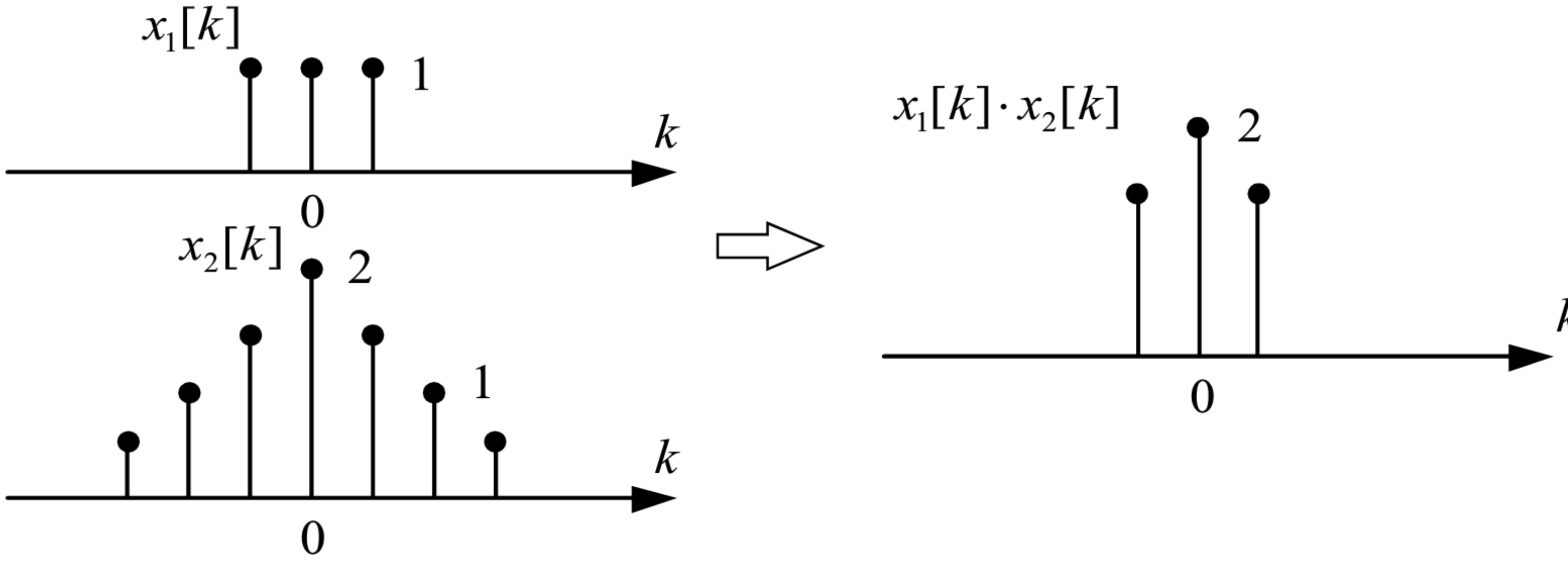
$$z(n) = x(n) \pm y(n)$$



2、序列的乘积

序列的乘积是指同序号的序列值对应相乘。即

$$z(n) = x(n) \cdot y(n)$$

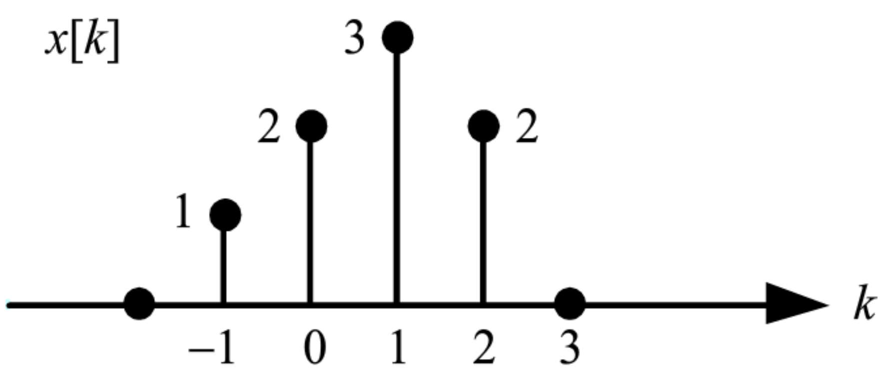


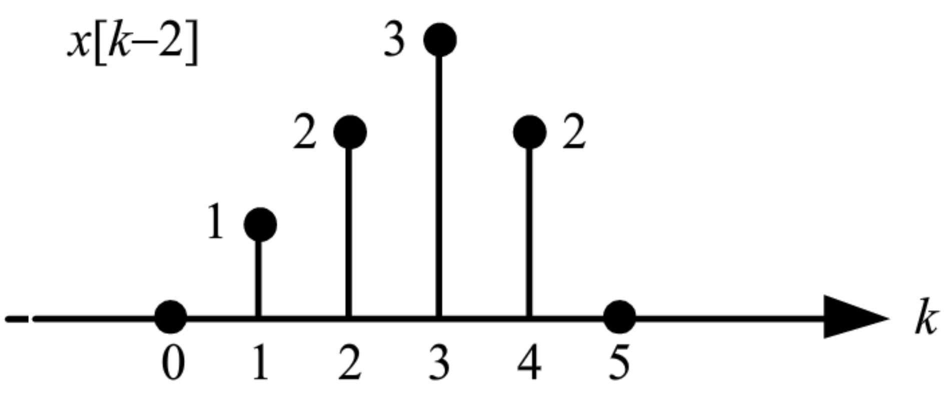
4、序列的延时（位移）

序列的延时是将序列全体在时间轴上移动。

$$y(n)=x(n-n_0)$$

$n_0<0$ **左移**，$n_0>0$ **右移**



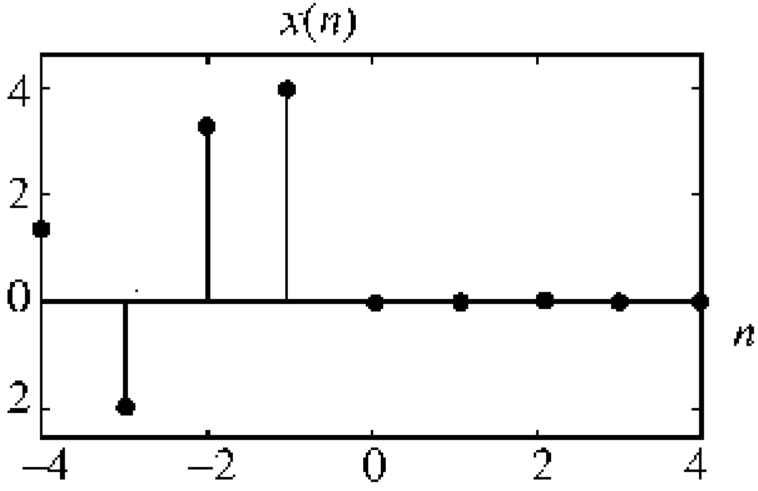


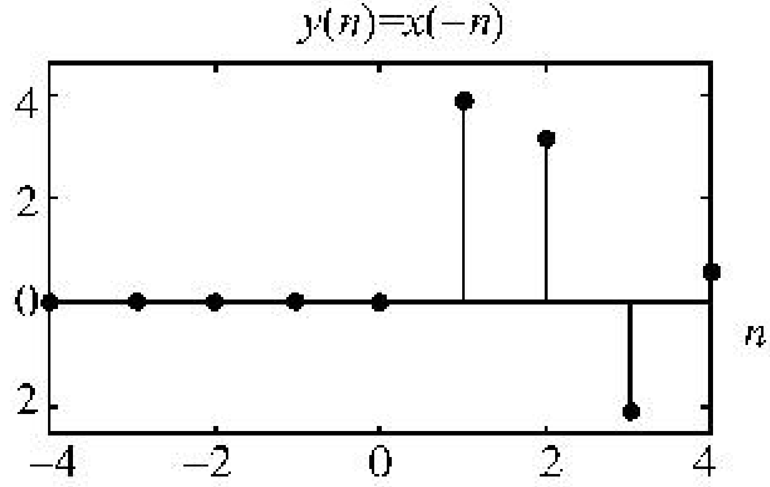
5、序列的翻转

序列的翻转指将序列以n=0为对称轴进行对褶。

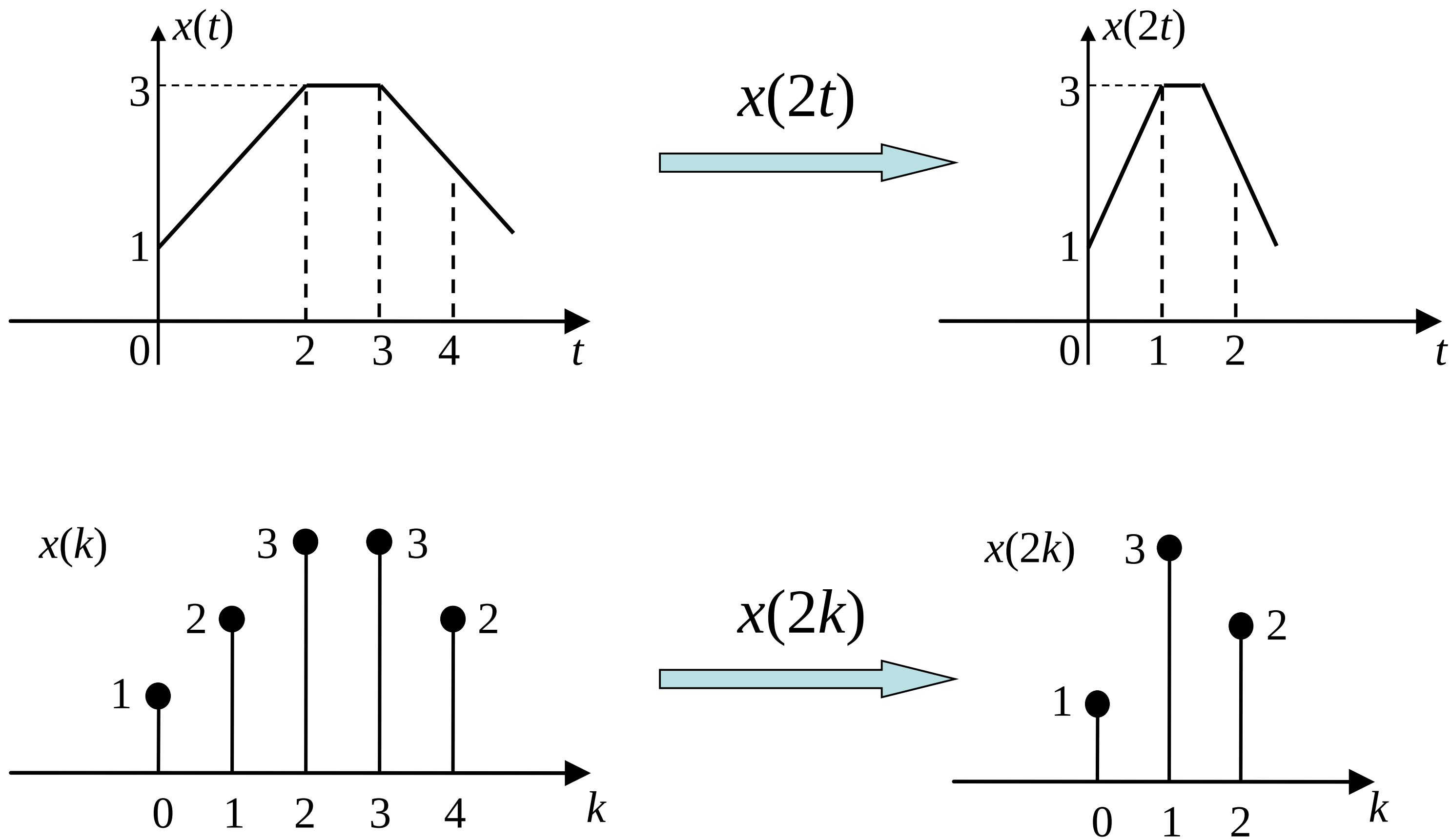
$$y(n)=x(-n)$$

如下图所示:





6、尺度变换



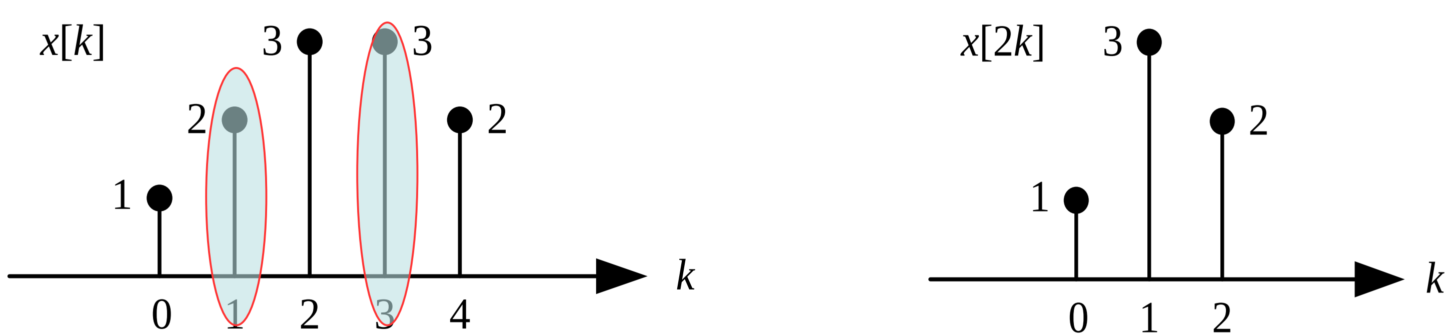
原则：1.“端点值不变”

2. k为整数

6、尺度变换

- **抽取(Decimation)** $\downarrow M$

$$x(k) \rightarrow x(Mk) \quad M > 1\text{的正整数}$$

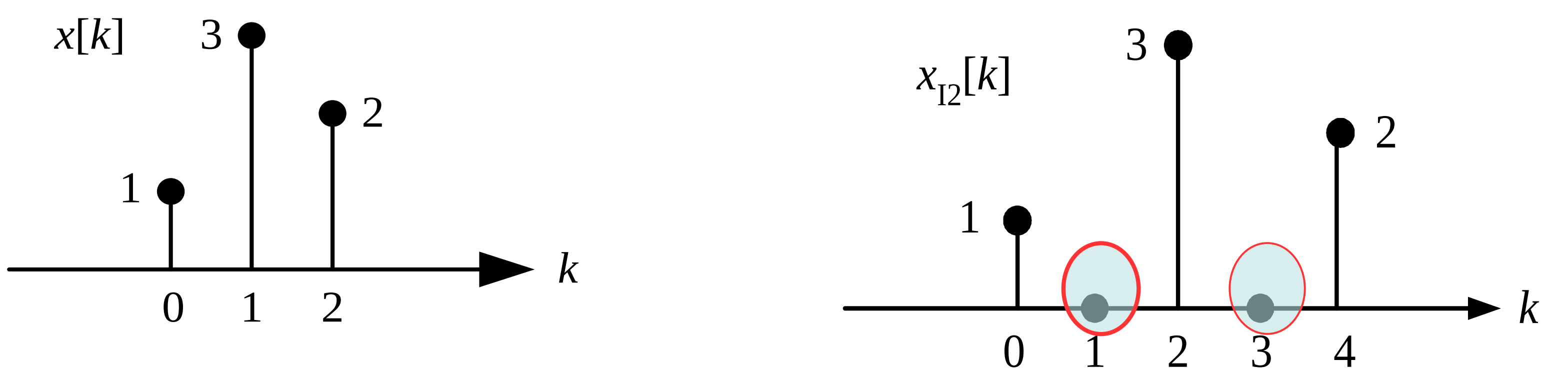


✓ 在原序列中**每隔(M-1)点抽取**一点

6、尺度变换

- 内插(Interpolation) $\uparrow L$ （零值插入）

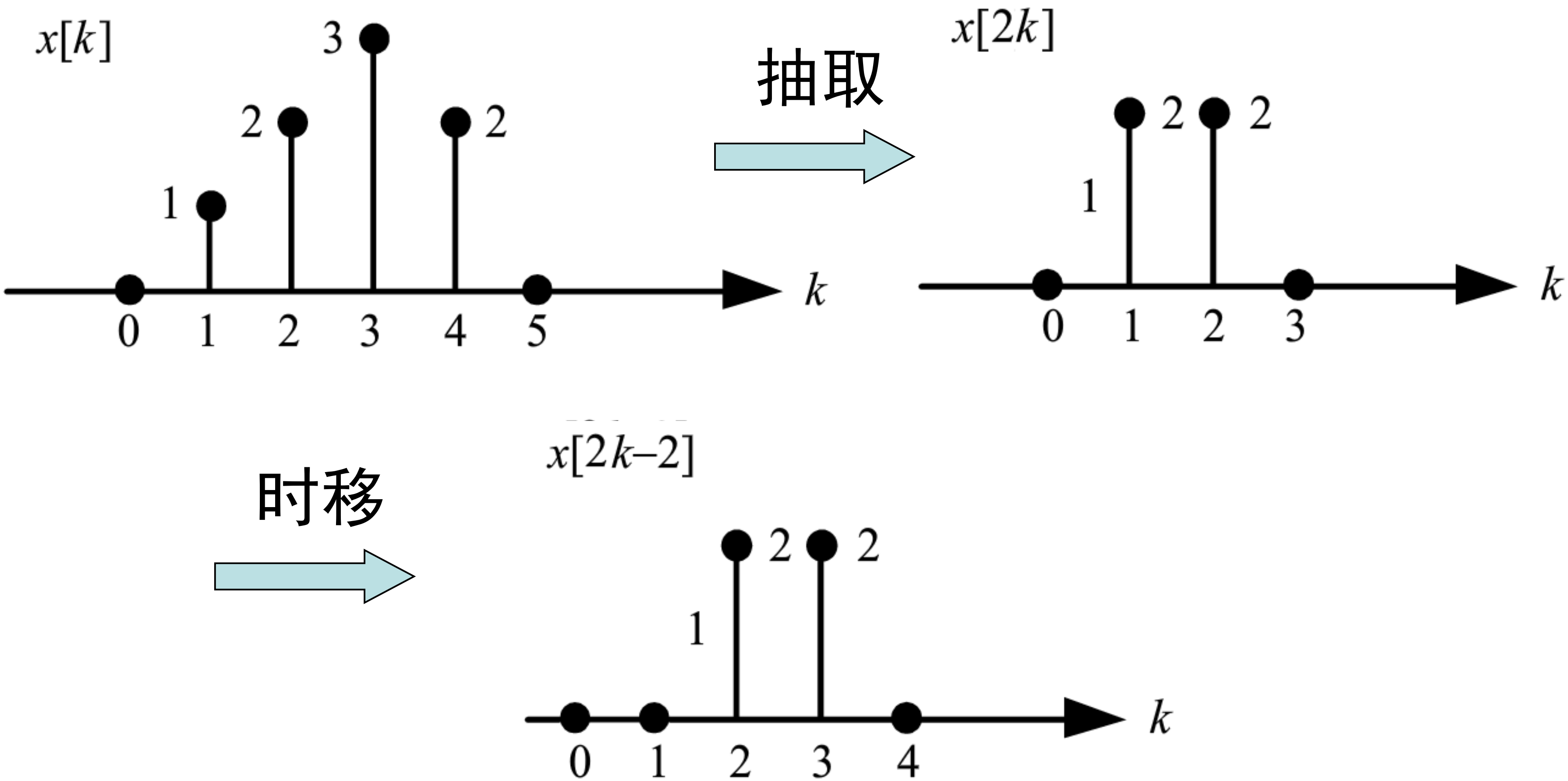
$$x_{\mathrm{IL}}(k)=\begin{cases}x(k/L), & k\text{是}L\text{的整数倍},L\text{为正整数}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$



✓ 在原序列的相邻2点之间插入$(L\text{-}1)$个零值点

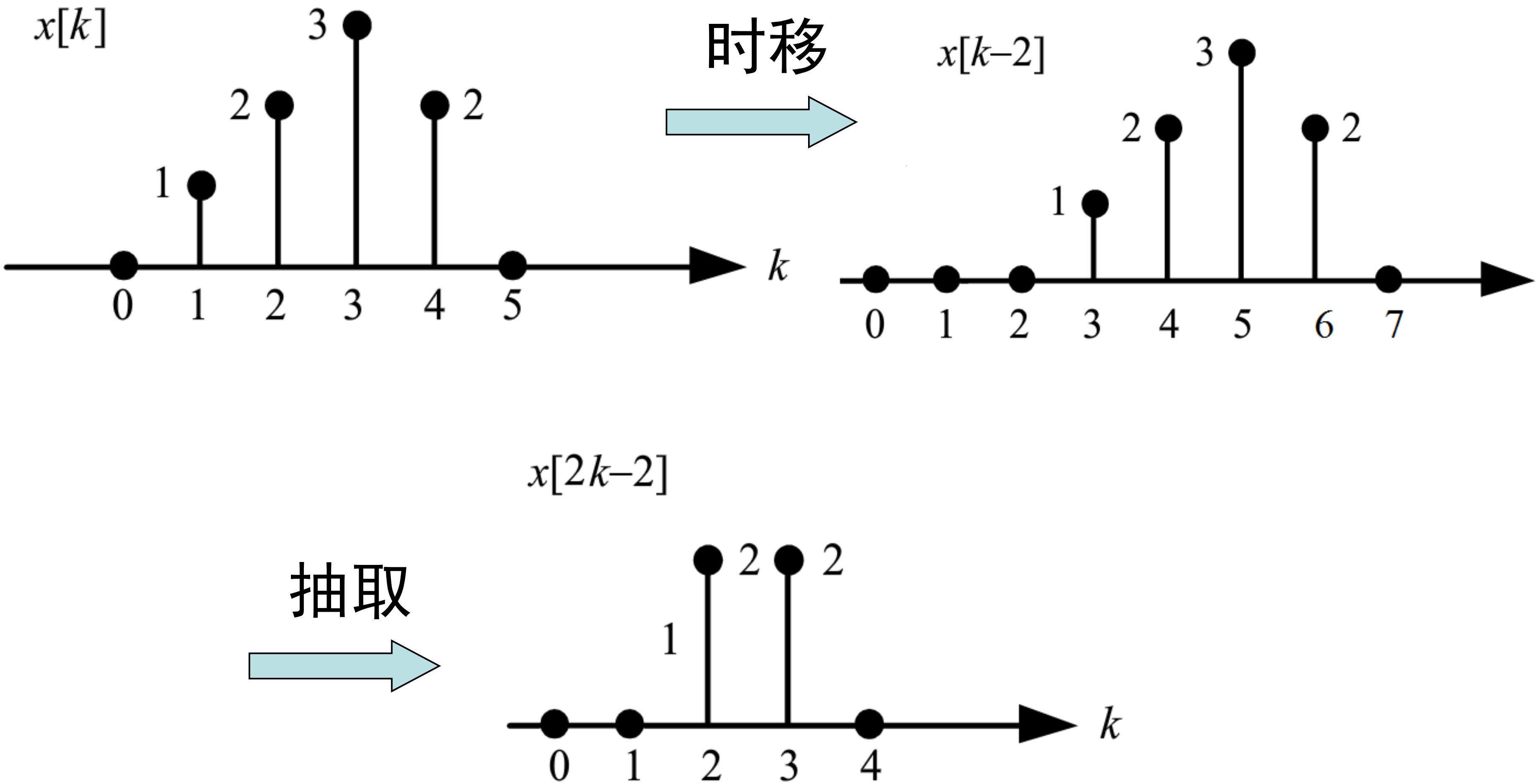
第一节 离散时间信号

已知序列$x(k)$，求 $x(2k-2)$。



第一节 离散时间信号

已知序列$x(k)$，求 $x(2k-2)$。



第一节 离散时间信号

➢ 序列的差分运算

一阶后向差分： $\nabla x(n) = x(n) - x(n-1)$

二阶后向差分： $\nabla^2 x(n) = \nabla[\nabla x(n)]$

$$= \nabla[\, x(n) - x(n-1)] = x(n) - 2x(n-1) + x(n-2)$$

n阶后向差分： $\nabla^n x(n) = \nabla[\nabla^{n-1} x(n)]$

一阶前向差分： $\Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$

➢ 序列的求和运算

$$y(n) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)$$

7、离散序列的分解

- 直流分量和交流分量
- 偶分量和奇分量
- 实部分量和虚部分量

$$x[k] = x_{\mathrm{r}}[k] + \mathrm{j} \cdot x_{\mathrm{i}}[k]$$

实部分量　　虚部分量

$$x_{\mathrm{r}}[k] = \frac{1}{2}\{x[k] + x^*[k]\} \qquad x_{\mathrm{i}}[k] = \frac{1}{2\mathrm{j}}\{x[k] - x^*[k]\}$$

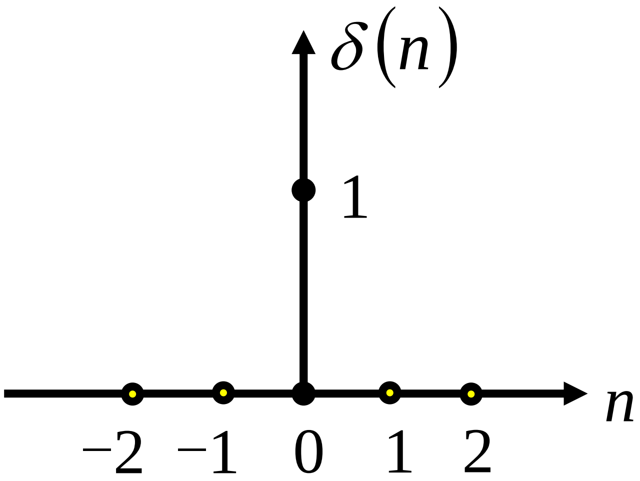
$$x^*[k] = x_{\mathrm{r}}[k] - \mathrm{j} \cdot x_{\mathrm{i}}[k]$$

第一节 离散时间信号

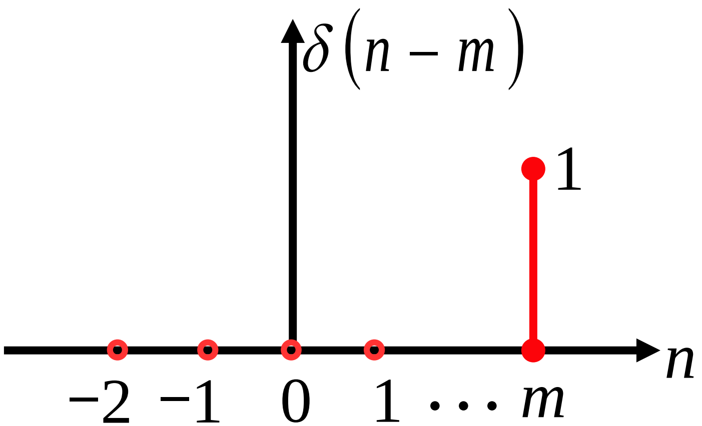
三、常用序列

1、单位冲激序列$\delta(n)$

$$\delta(n)=\begin{cases}1, & n=0\\ 0, & n\neq 0\end{cases}$$

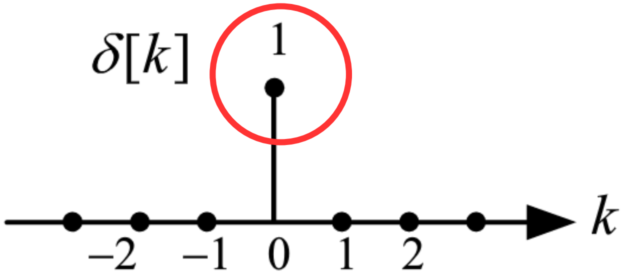


$$\delta(n-m)=\begin{cases}1, & n=m\\ 0, & n\neq m\end{cases}$$



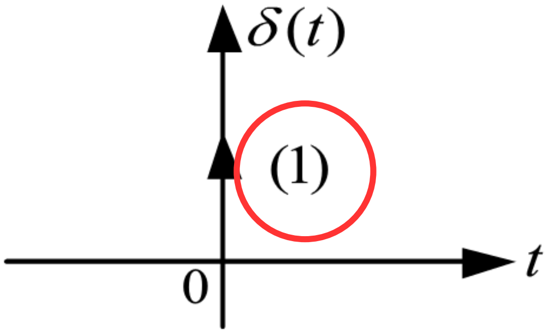
➢ $\delta(k)$和$\delta(t)$的区别

$$\delta[k]=\begin{cases}0 & k\neq 0\\ 1 & k=0\end{cases}$$



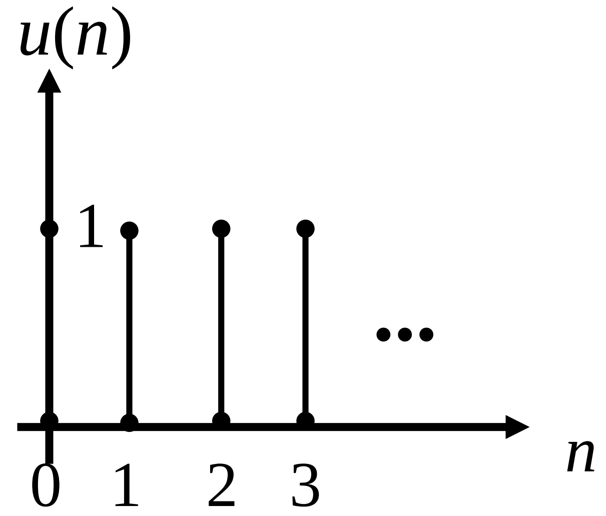
$$\delta(t)=0\,,\quad t\neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\ \mathrm{d}t=1$$



2、单位阶跃序列 $u(n)$

$$u(n)=\begin{cases}1, & n\geq 0\\ 0, & n<0\end{cases}$$



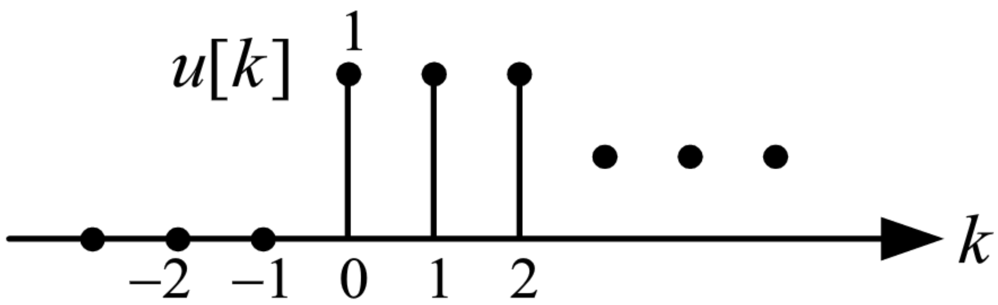
$\delta(n)$与 $u(n)$ 的关系：

$$\delta(n)=\nabla u(n)=u(n)-u(n-1)$$

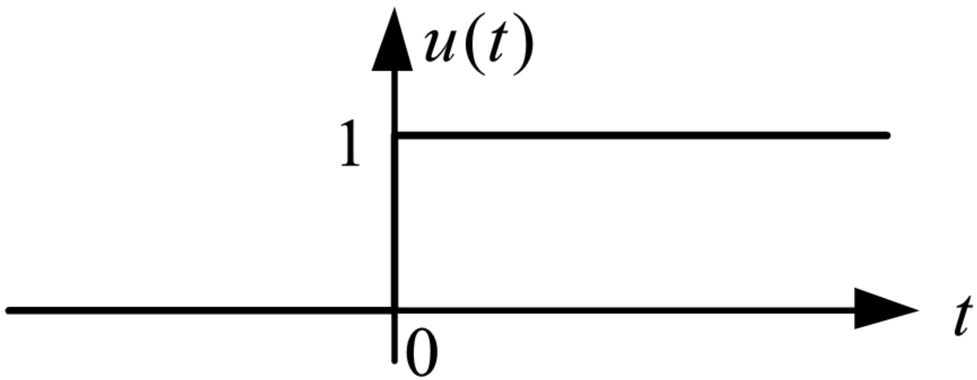
$$u(n)=\sum_{m=0}^{\infty}\delta(n-m)=\delta(n)+\delta(n-1)+\delta(n-2)+\cdots$$

➢ $u(k)$和$u(t)$的区别

$$u[k]=\begin{cases}1 & k\ge 0\\ 0 & k<0\end{cases}$$

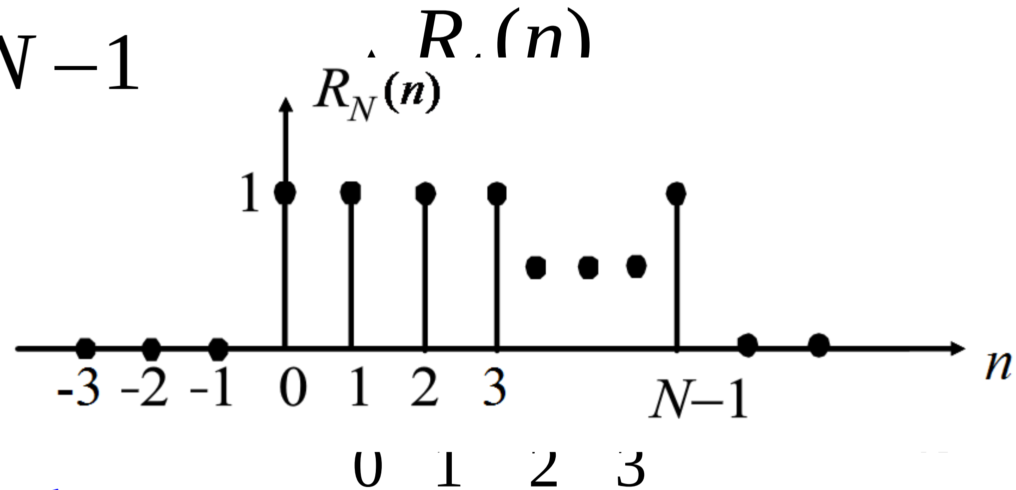


$$u(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$$



3、矩形序列 $R_N(n)$

$$R_N(n)=\begin{cases}1, & 0\le n\le N-1\\ 0, & 其他n\end{cases}$$



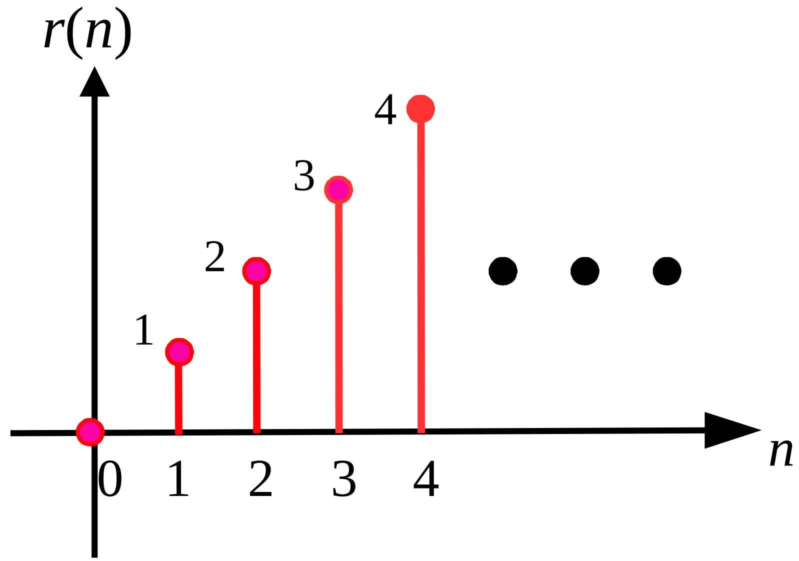
➢ $R_N(n)$ 与 $u(n)$ 的关系：

$$R_N(n)=u(n)-u(n-N)=\sum_{k=0}^{N-1}\delta(n-k)$$

4、 斜坡序列 $r(n)$

$$r(n) = n \cdot u(n)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k\delta(n-k)$$



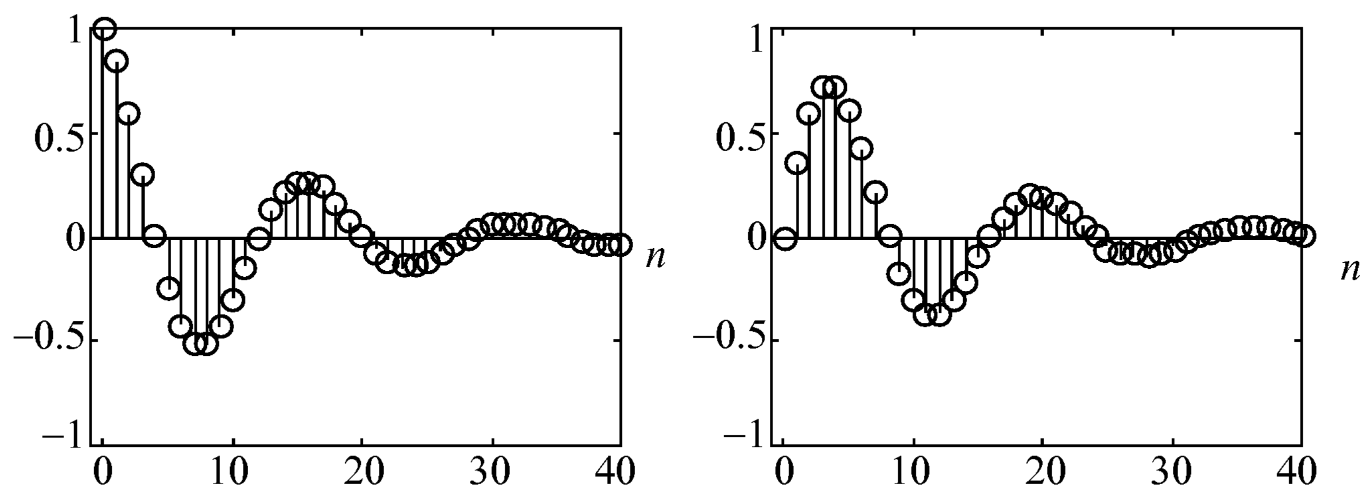
5、复指数序列

$$x(n)=e^{(\alpha+\mathrm{j}2\pi f_0)n}$$ 式中，f_0为频率

将复指数表示成实部与虚部

$$x(n)=e^{\alpha\cdot n}\cos 2\pi f_0 n+\mathrm{j}e^{\alpha\cdot n}\sin 2\pi f_0 n$$

其示意图如下：



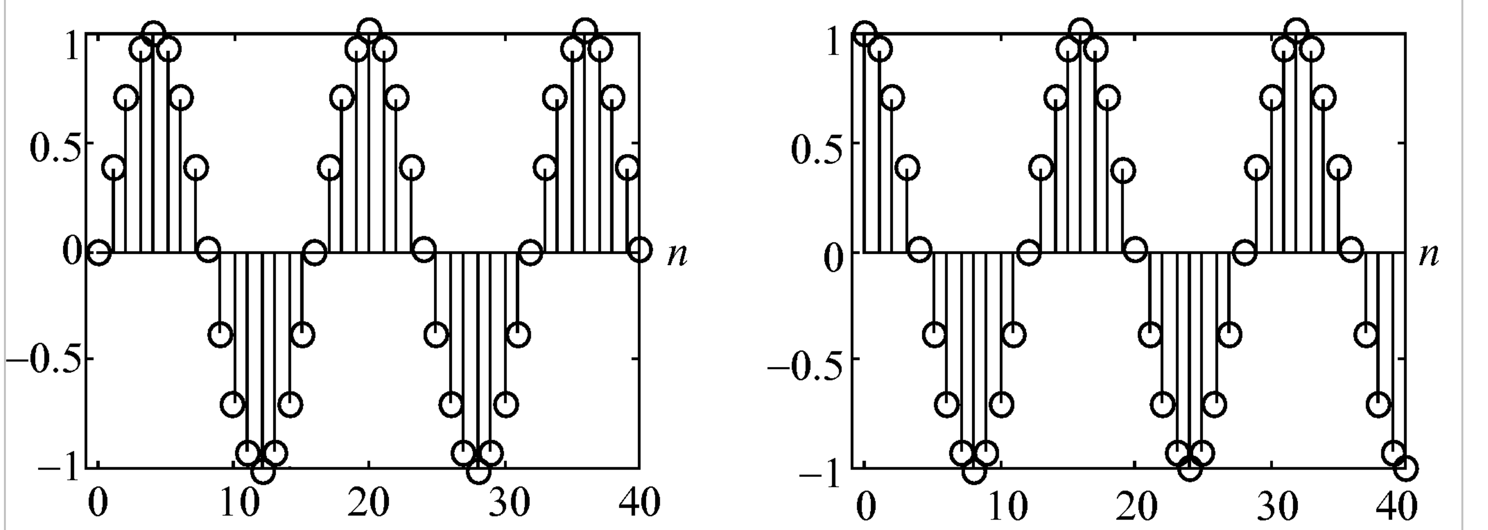
(a) 复指数序列的实部　(b) 复指数序列的虚部

当$\alpha = 0$，则有

$$x(n) = e^{\mathrm{j}2\pi f_0 n} = \cos 2\pi f_0 n + \mathrm{j}\sin 2\pi f_0 n$$ ——虚指数序列

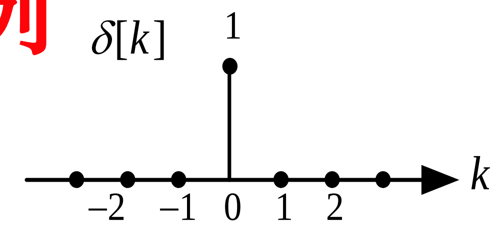
其实部与虚部分别为余弦与正弦序列。

余弦与正弦序列示意图如下：



(a) 正弦序列　　(b) 余弦序列

6、用单位冲激序列表示任意序列



➢ $\delta(n)$具有筛选性（或抽样性）

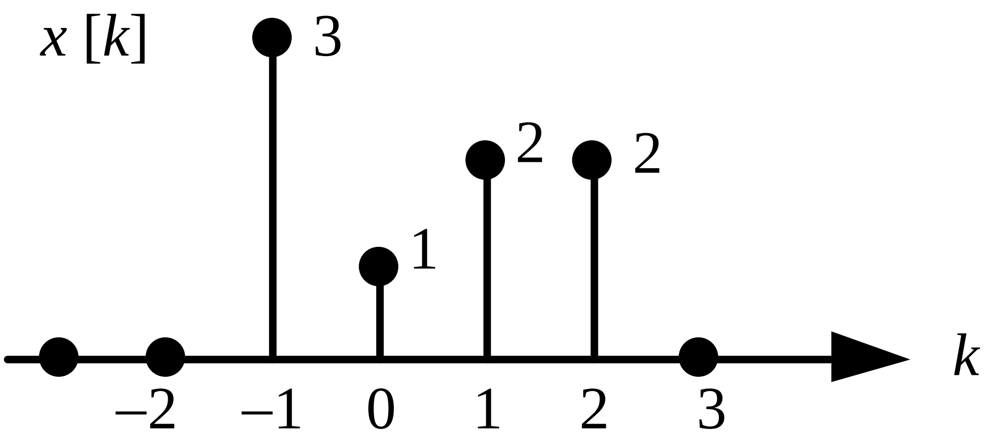
——$\delta(n)$与任意序列相乘，则可以将$x(n)$在n=0处的样本值筛选出来，即

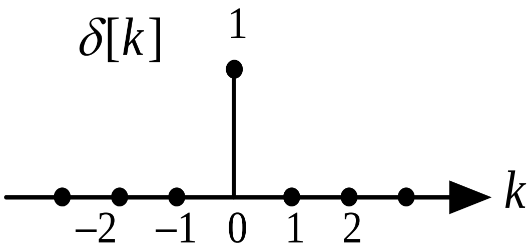
$$x(n)\delta(n)=x(0)\delta(n)=\begin{cases}x(0), & n=0\\ 0, & n\neq 0\end{cases}$$

同理：

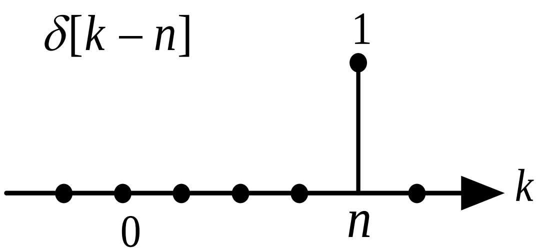
$$x(n)\delta(n-m)=x(m)\delta(n-m)=\begin{cases}x(n), & m=n\\ 0, & m\neq n\end{cases}$$

- 用单位冲激序列表示任意离散时间序列





单位脉冲序列



有位移的单位脉冲序列

$$x(k)=3\delta(k+1)+\delta(k)+2\delta(k-1)+2\delta(k-2)$$

6、用单位冲激序列表示任意序列

任意序列$x(n)$都可用单位冲激序列$\delta(n)$表示成加权和的形式，即

$$x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m)$$

如:
$$x(n)=\begin{cases}a^n & -10\le n\le 10\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

可表示为

$$x(n)=\sum_{m=-10}^{10}a^m\delta(n-m)$$

7、序列的能量与功率

有界信号 $x(n)$（$|x(n)| \le b < \infty$）的能量 E 定义为：

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2$$

当 $0 < E < \infty$ 时，称信号为能量有限信号

- 若序列的长度为有限长，且幅值为有限值，则信号的能量就是有限的。
- 但当信号的长度为无限长时，即使信号有界，其能量也不一定是有限的。

第一节 离散时间信号

对非周期序列$x(n)$，若序列为无限长，其平均功率定义为

$$P=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2K+1}\sum_{n=-K}^{K}|x(n)|^2=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2K+1}E$$

对周期为N的周期序列$x_N(n)$，其平均功率定义为

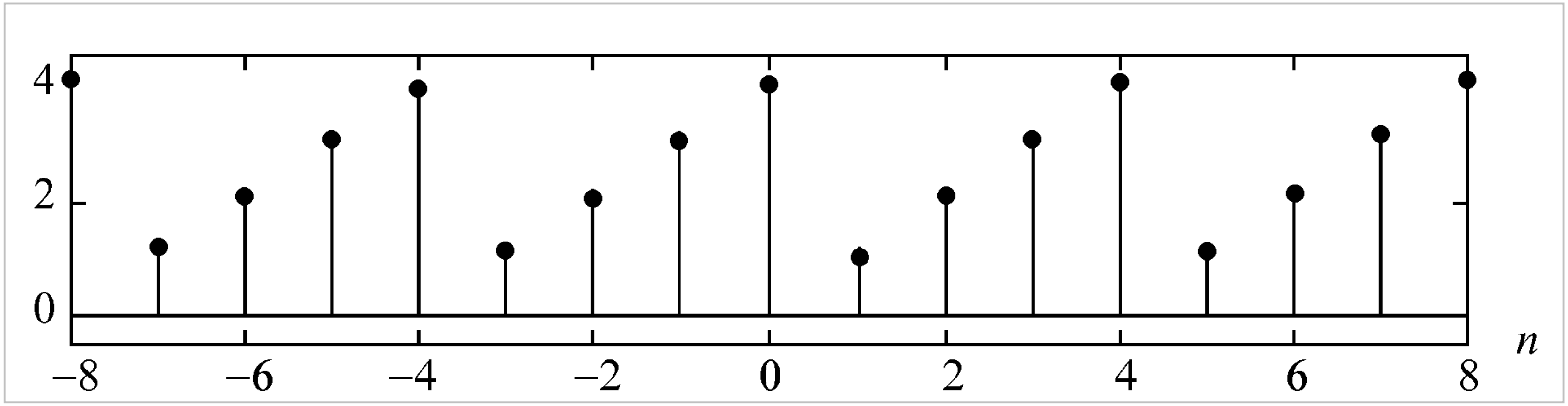
$$P=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}|x_N(n)|^2$$

- 能量为无限值，平均功率为非零有限值的信号**称为功率信号**。
- 能量为非零有限值，平均功率等于0的信号**称为能量信号**。

离散序列的周期性

若序列$x(n)$ 满足 $x(n)=x(n+N)\ (-\infty<n<+\infty)$，且$N$是使其成立的最小正整数，则称序列$x(n)$为以$N$为周期的**周期序列**。

下图为周期序列示意图



第二章 离散信号和抽样定理

- 第一节 离散时间信号
- **第二节 连续信号的离散化**
- 第三节 抽样定理
- 第四节 假频现象

第二节 连续信号的离散化

利用数字技术处理模拟信号

离散信号与系统的主要优点：

(1) 信号稳定性好：数据用二进制表示，受外界影响小。

(2) 信号可靠性高：存储无损耗，传输抗干扰。

(3) 信号处理简便：信号压缩、信号编码、信号加密等。

(4) 系统精度高：可通过增加字长提高系统的精度。

(5) 系统灵活性强：改变系统的系数使系统完成不同功能。

第二节 连续信号的离散化

对信号进行时间上的离散化，这是对信号作数字化处理的第一个环节。

研究内容:

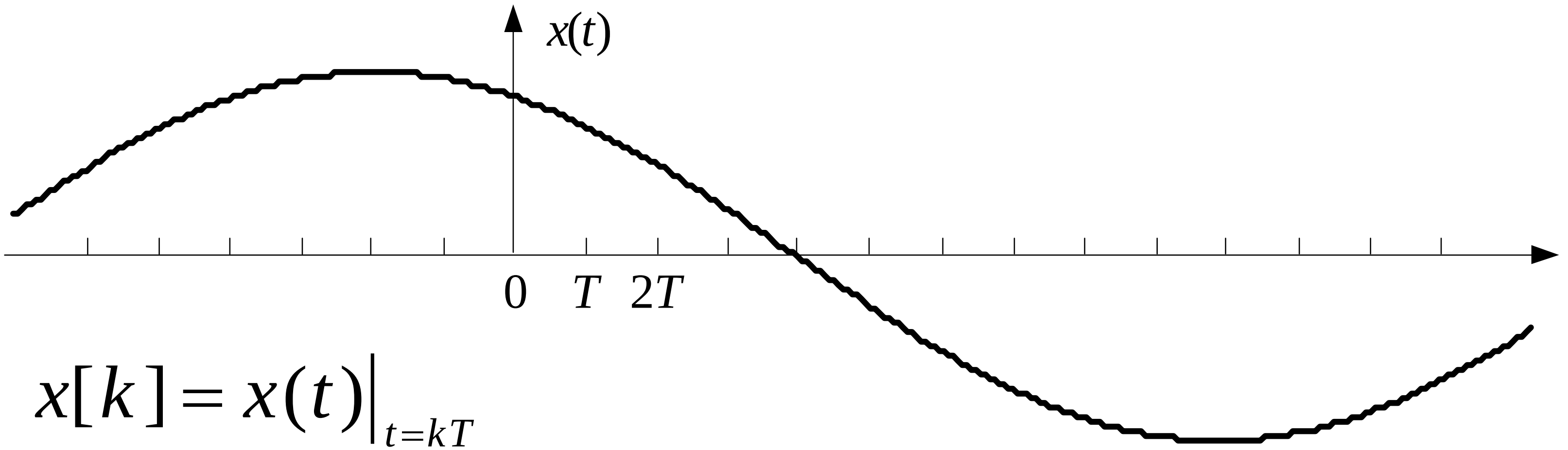
- 信号经采样后发生的变化（如频谱的变化）；
- 在什么条件下，一个连续信号可以用它的离散样本代替，而不丢失原有信号的内容；

抽样定理

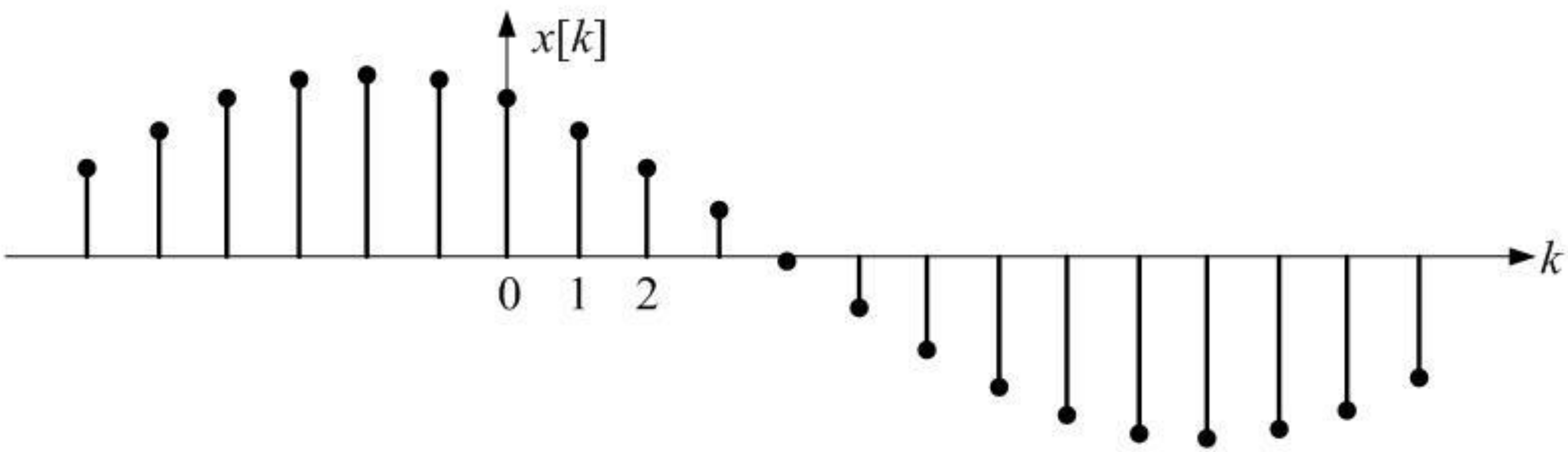
- 如何从连续信号的离散样本中不失真地恢复成原来的连续信号。

信号恢复

第二节 连续信号的离散化



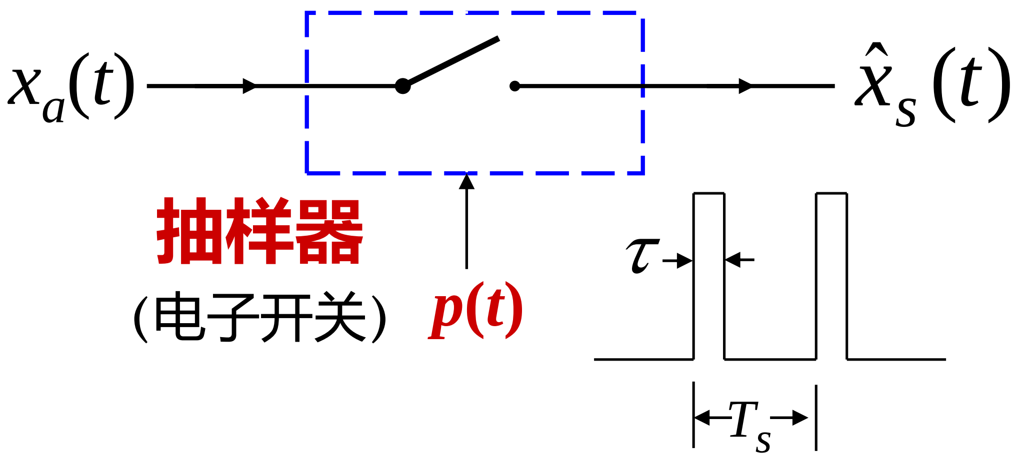
$$x[k] = x(t)\big|_{t=kT}$$



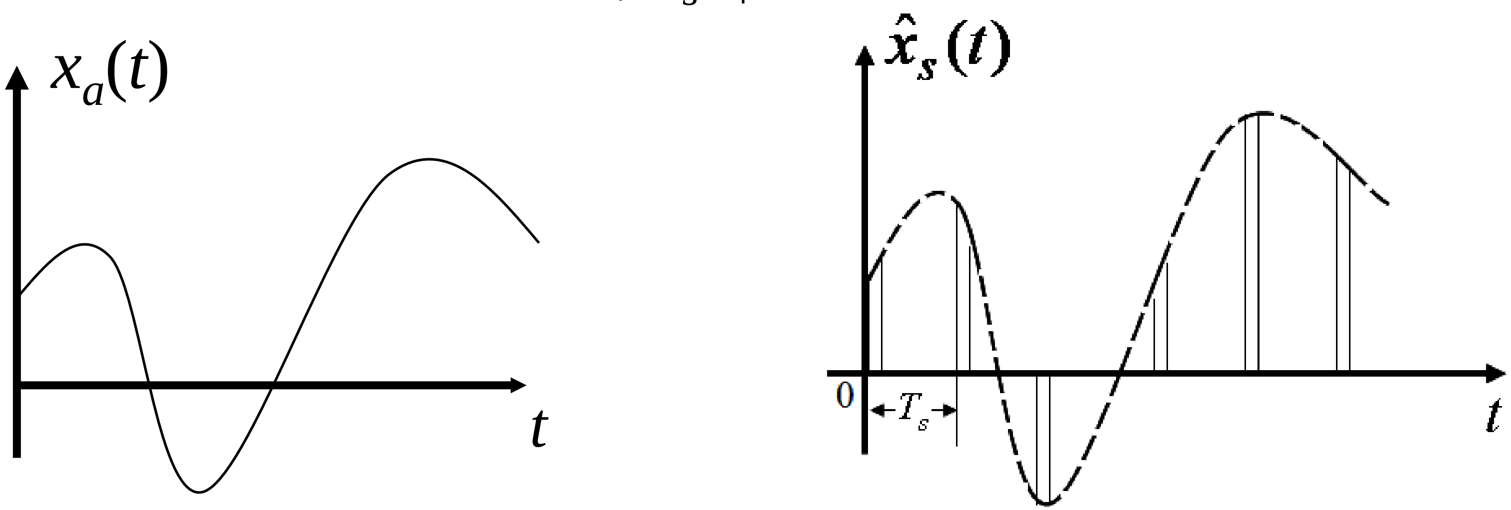
如何选取抽样间隔T?

第二节 连续信号的离散化

对连续信号$x(t)$按照一定的时间间隔T_s抽取相应的瞬时值，这个过程称为**抽样**（通常所说的离散化）或**采样**。



$$f_s = \frac{1}{T_s}$$ 为抽样频率



第二节 连续信号的离散化

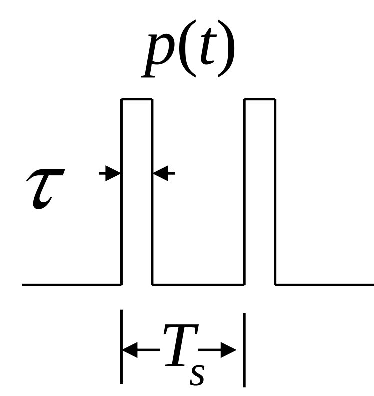
➢**抽样过程：**均匀抽样可以看作为一个脉冲调制过程，数学表示为 $\boxed{\hat{x}_s(t) = x_a(t)\,p(t)}$。

其中，$x_a(t)$为调制信号即输入的模拟信号； $p(t)$为一个周期为T_s，脉宽为τ的脉冲方波；调制后输出的信号就是抽样信号$\hat{x}_s(t)$。

$p(t)$实际上就是周期矩形(方波)函数，可表示为：

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_\tau(t - nT_s)$$

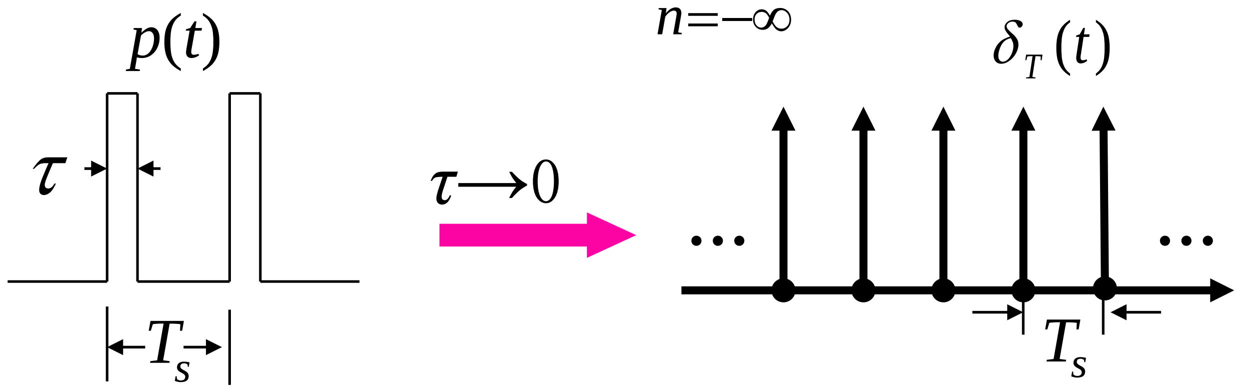
其中：
$$g_\tau(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \dfrac{\tau}{2} \\ 0, & |t| > \dfrac{\tau}{2} \end{cases}$$



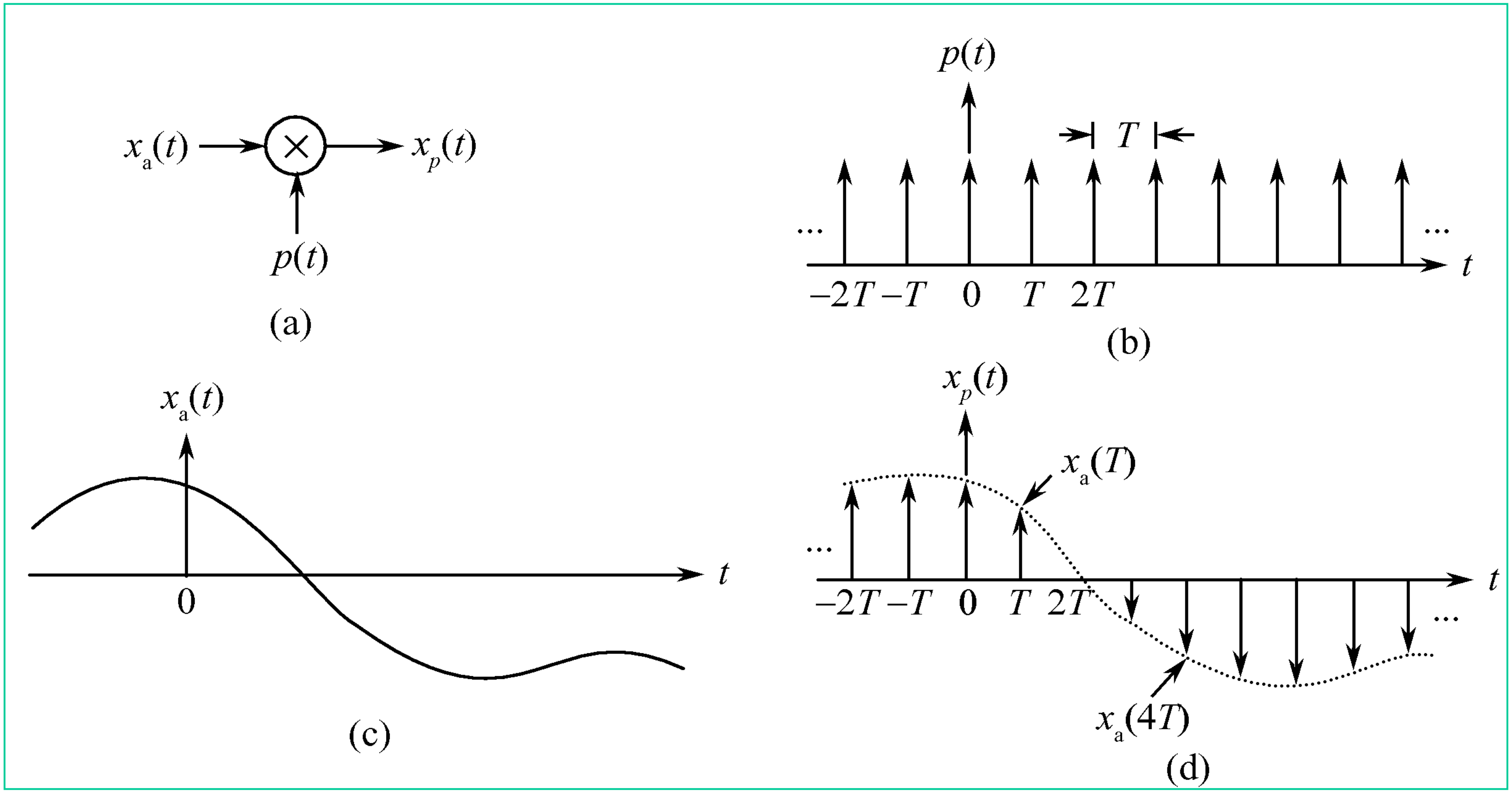
➢**理想抽样**：当 τ 趋于零的极限情况时，抽样脉冲方波 $p(t)$ 变成了周期单位冲激函数 $\delta_T(t)$，这些单位冲激函数的强度准确地为抽样瞬间的 $x_a(t)$ 幅值，这样的抽样称为**理想抽样**。

$$p(t)=\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_s)$$

$$\hat{x}_s(t)=x_a(t)p(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_a(t)\delta(t-nT_s)$$

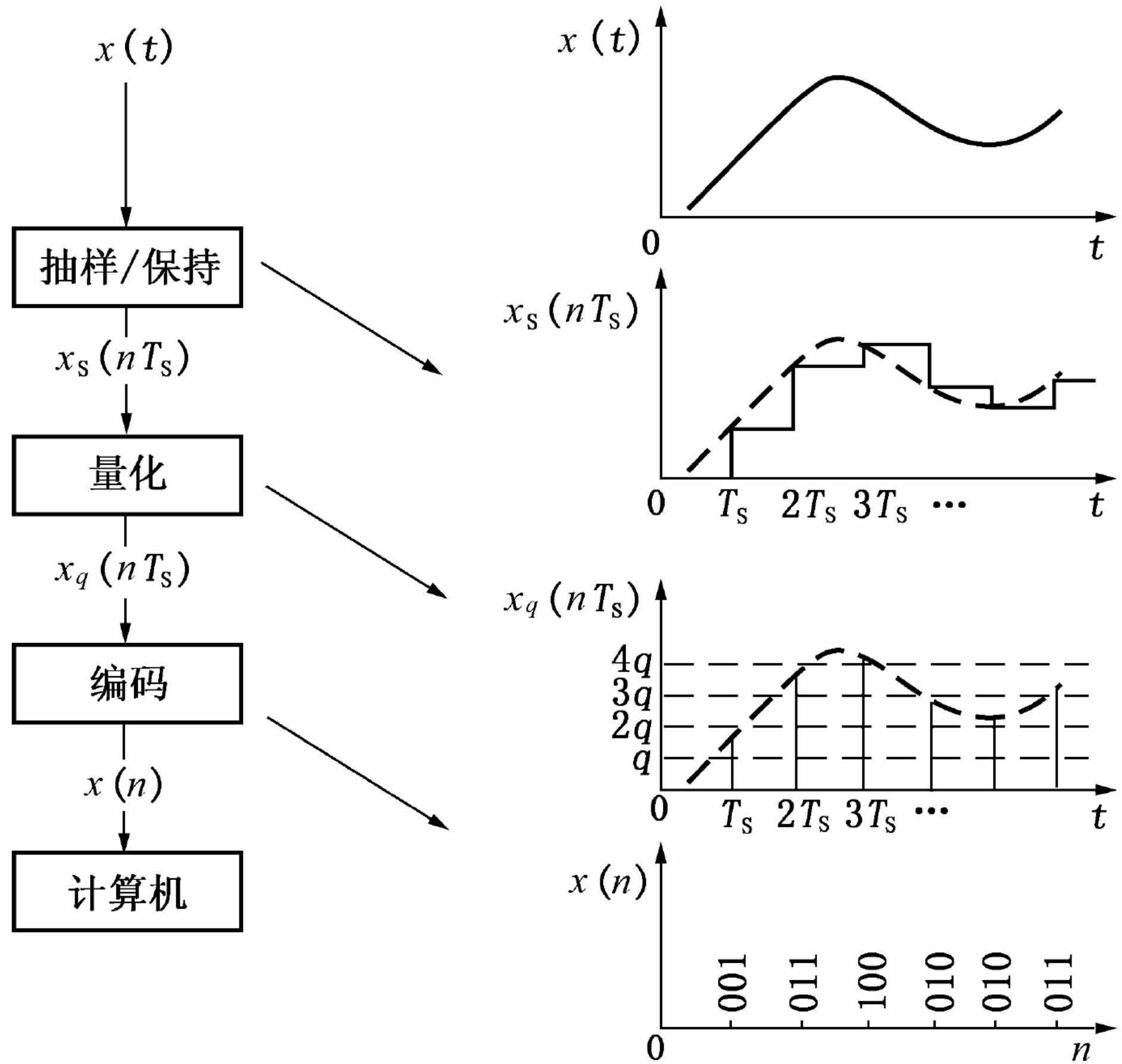


第二节 连续信号的离散化



$$\hat{x}_p(t) = x_a(t)p(t) = x_a(t)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_a(nT_s)\delta(t-nT_s)$$

第二节 连续信号的离散化

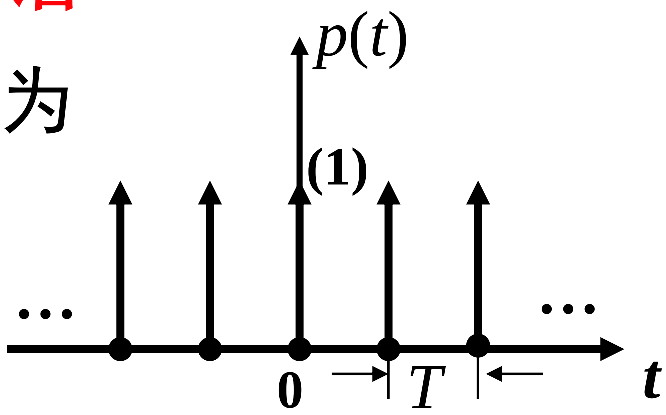


模拟信号的数字化过程

一、$p(t)=\delta_T(t)$周期冲激信号的频谱

设$p(t)$是周期为T的单位冲激串序列为

$$p(t)=\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)$$



可表示成傅里叶级数，即

$$p(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}P_k e^{j2\pi k f_0 t} \qquad f_0=\frac{1}{T}$$

其频谱为：

$$P_k=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}p(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)e^{-j2\pi k f_0 t}dt$$

$$=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\delta(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt=\frac{1}{T}$$

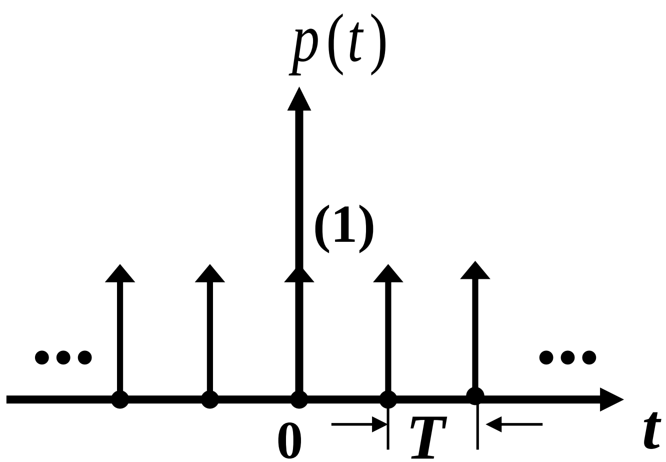
第二节 连续信号的离散化

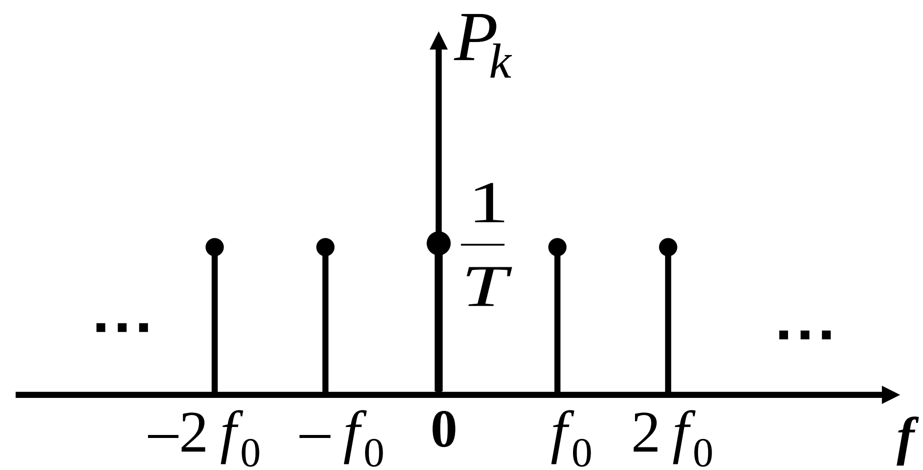
由傅式级数有

$$p(t)=\delta_T(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}P_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi k f_0 t}=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi k f_0 t}$$

其中，$\boxed{P_k=\dfrac{1}{T}}$

➢ 上式表明，单位冲激串序列的傅里叶级数也是周期序列，只包含位于$f=0, \pm f_0, \pm 2f_0, \cdots, \pm kf_0, \cdots$ 处的频率分量，每个频率分量的大小相等且都等于**1/*T***。





二、抽样间隔为T_s的离散信号$x_s(t)=x(t)\cdot\delta_{Ts}(t)$的频谱

$$X_s(f)=\mathscr{F}\left[x_s(t)\right]=\mathscr{F}\left[x(t)\cdot\delta_{T_s}(t)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\cdot\delta_{T_s}(t)e^{-j2\pi ft}\mathrm{d}t$$

已知 $\delta_{T_S}(t)=\dfrac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{j2\pi kf_s t}$ 代入上式，则有

$$\boxed{X_s(f)=\frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j2\pi(f-kf_s)t}\mathrm{d}t}$$

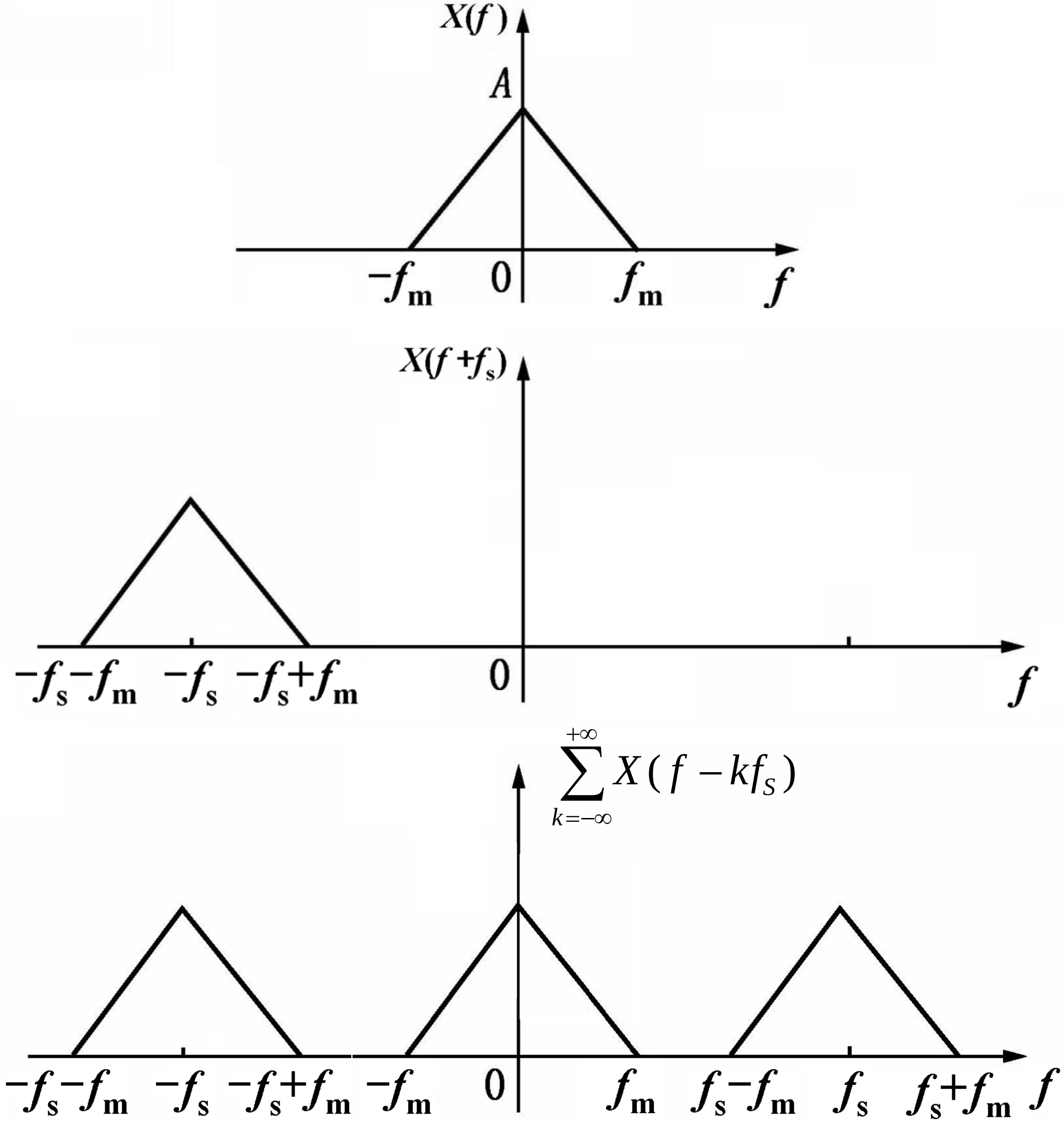
其中，T_s为采样间隔，$f_s=1/T_s$为采样频率

原连续信号$x(t)$的频谱为 $X(f)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j2\pi ft}\mathrm{d}t$

比较两式，则有

$$X_s(f)=\frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X(f-kf_S)$$

第二节 连续信号的离散化



抽样信号$x_s(t)=x(t)\cdot\boldsymbol{\delta}_{Ts}(t)$的频谱为

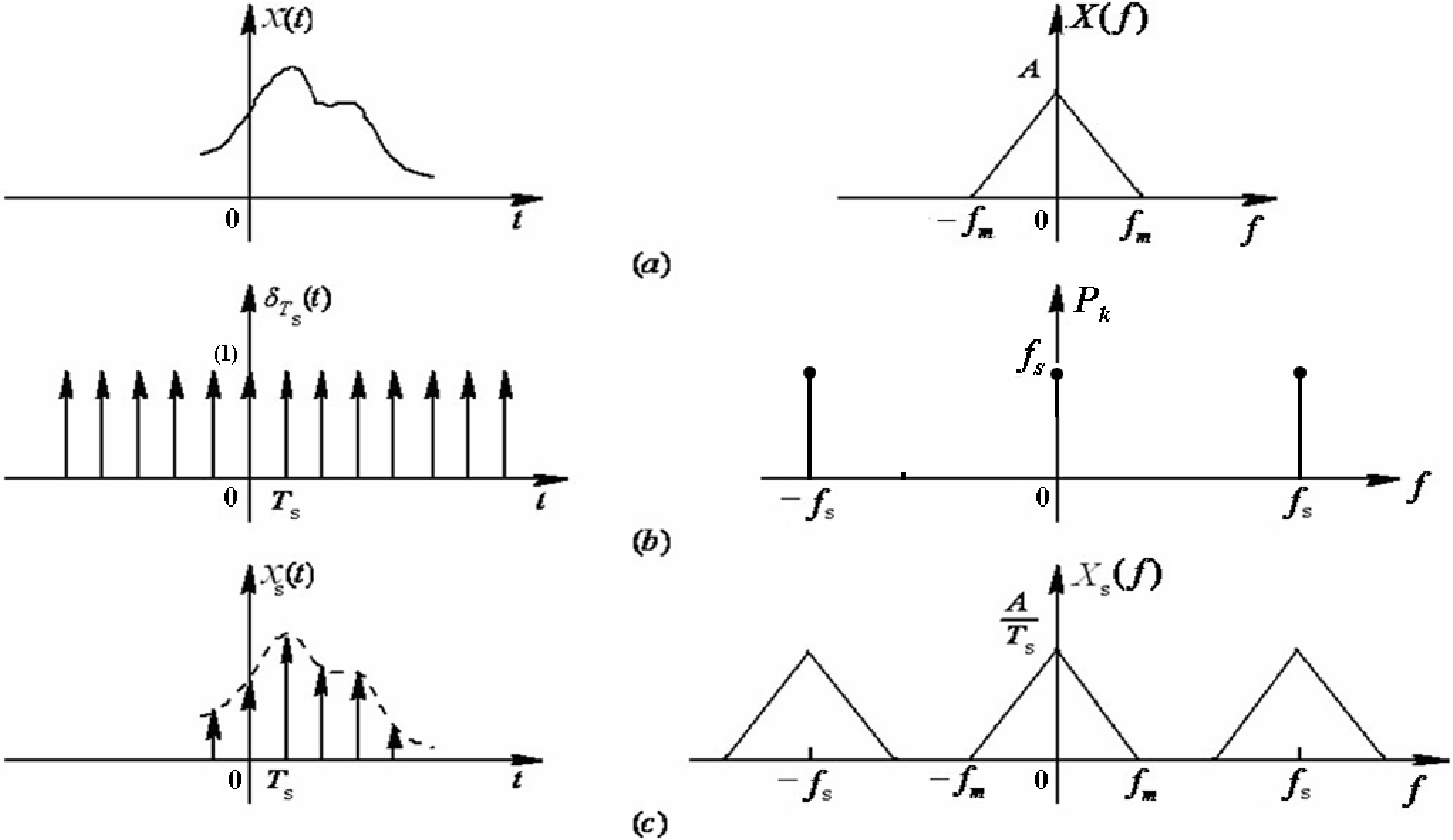
$$X_s(f)=\frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X(f-kf_S)$$

其中，T_s为采样间隔，$f_s=1/T_s$为采样频率

- **上式表明，抽样信号**$x_s(t)$的**频谱**$X_s(f)$是原连续信号的频谱$X(f)$**以抽样频率**f_s为周期进行**周期延拓**，且**幅值乘以**f_s的结果。

第二节 连续信号的离散化

抽样信号$x_s(t)=x(t)\cdot\delta_{Ts}(t)$及其频谱



第二章 离散信号和抽样定理

- 第一节 离散时间信号
- 第二节 连续信号的离散化
- **第三节 抽样定理**
- 第四节 假频现象

第三节 抽样定理

一、时域抽样定理

若连续信号$x(t)$的频谱$X(f)$满足下式：

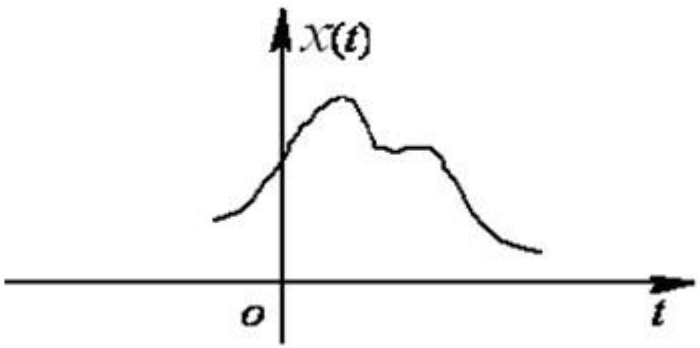
$$X(f)=\begin{cases}0, & f<-f_m \\ X(f), & -f_m\le f\le f_m \\ 0, & f_m<f\end{cases}$$

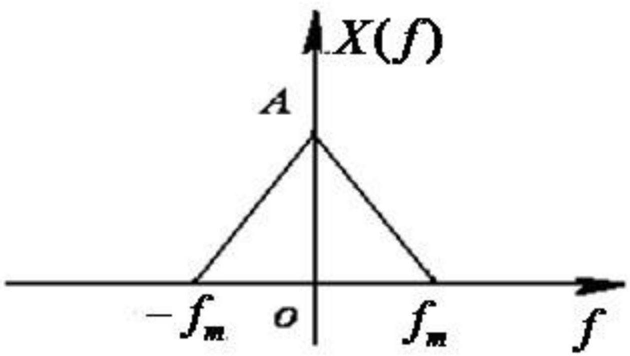
其中：f_m为实数，且$f_m>0$

则称信号$x(t)$是一个**带限信号**（或说是频域有限的），f_m为最高截止频率，简称截频。

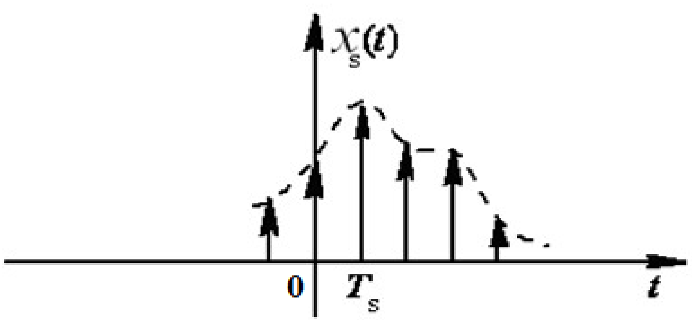
第三节 抽样定理

设信号$x(t)$为带限信号，其最高截止频率为f_m（截频）；则其频谱$X(f)$在$(-f_m, f_m)$有值，其它为零。

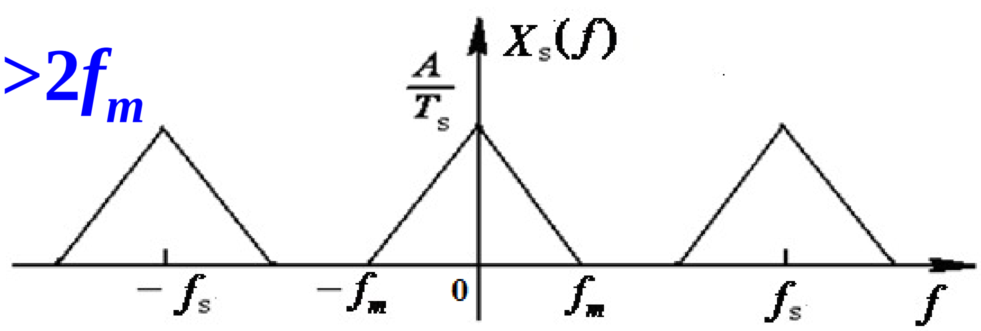




□当$f_s>2f_m$对带限信号$x(t)$进行抽样，抽样信号$x_s(t)$的频谱$X_s(f)$就是周期性地重复$X(f)$，而**不会发生重叠**。

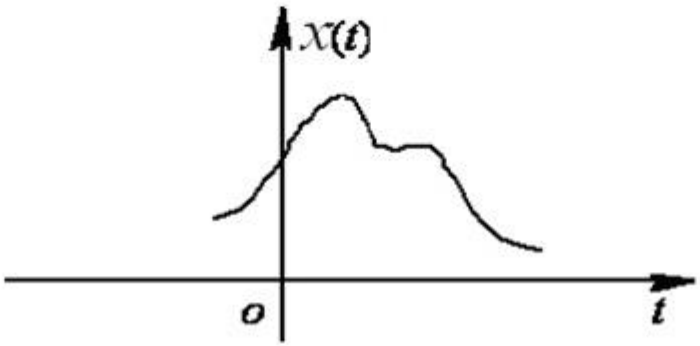


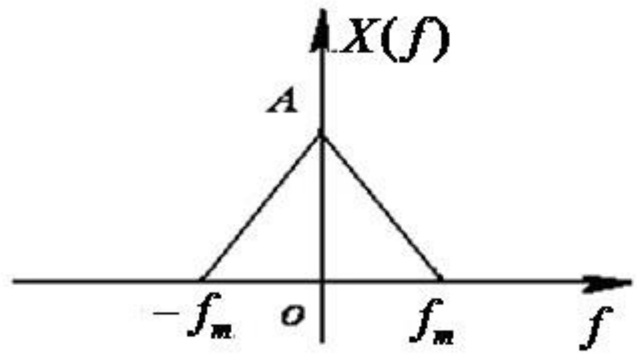
$f_s>2f_m$



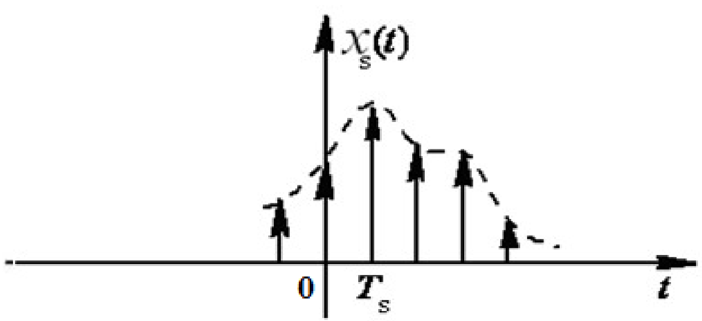
第三节 抽样定理

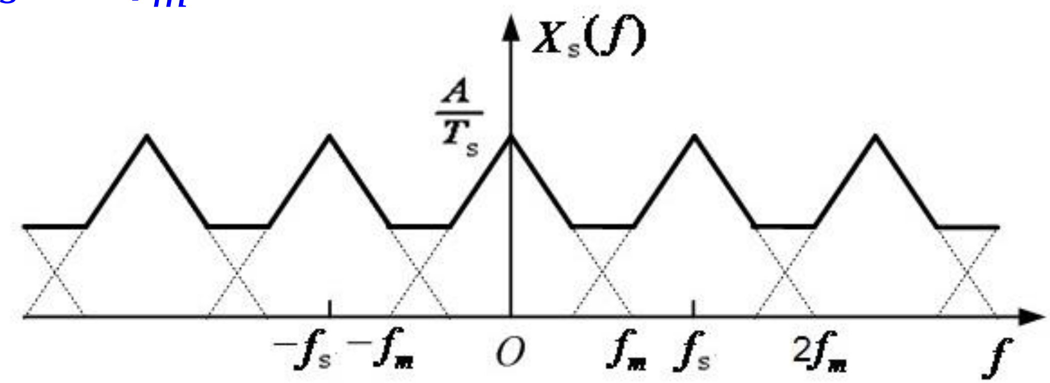
□当$f_s<2f_m$，抽样信号$x_s(t)$的频谱$X_s(f)$就会**发生混叠**。这种情况下无法用滤波器无失真地恢复出原信号$x(t)$。





$f_s<2f_m$





第三节 抽样定理

连续信号的时域抽样定理：

一个频谱在$(-f_m, f_m)$以外为零的带限信号$x(t)$，只要抽样频率$f_s>2f_m$ (其中$\omega_m=2\pi f_m$，或者说只要抽样间隔$T_S < \dfrac{\pi}{\omega_m} = \dfrac{1}{2f_m}$)，信号$x(t)$就可唯一地由其在均匀间隔T_s上的样点值$x_s(t)= x_s(nT_s)$确定。

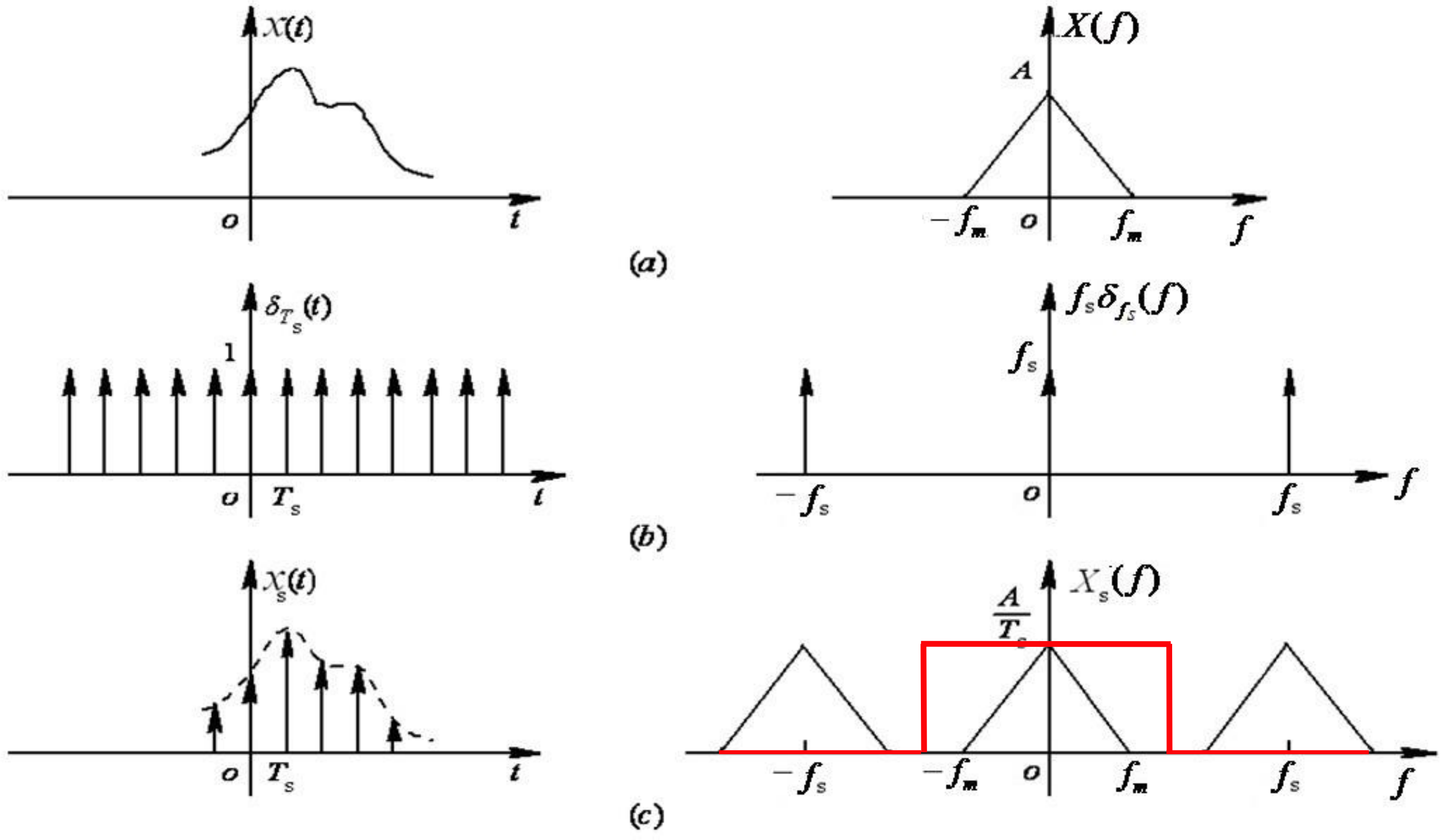
两个条件：

1）信号$x(t)$必须为带限信号；

2）采样频率不能过低，必须满足$f_s>2f_m$，否则将在频率域发生混叠现象。

第三节 抽样定理

- 要想从采样信号$x_s(t)$恢复出原来的连续信号$x(t)$
- 利用一个截止频率为$f_s/2$、增益为T_s的理想低通滤波器$H(f)$对$X_s(f)$进行滤波即可



第三节 抽样定理

- 理想低通滤波器$H(f)$的频率响应

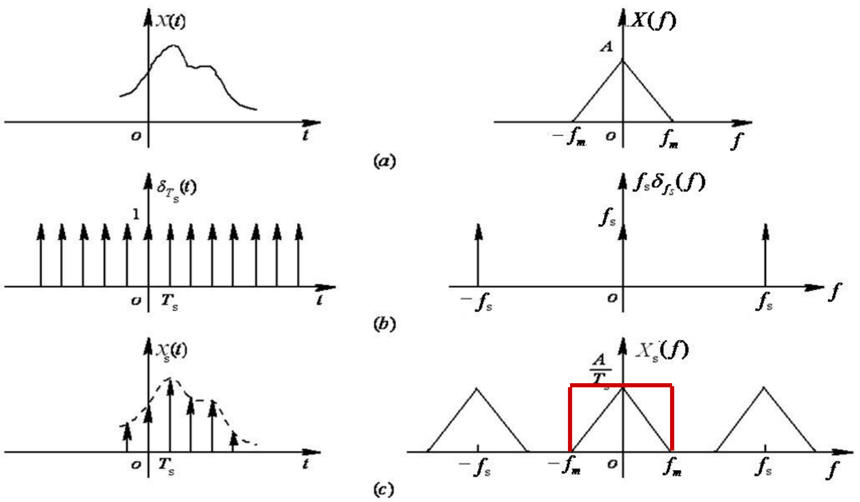
$$H(f)=\begin{cases} T_s, & |f|<\dfrac{f_s}{2} \\ 0, & |f|>\dfrac{f_s}{2} \end{cases}$$

- 低通滤波器的输出为

$$Y(f)=X_s(f)H(f)$$

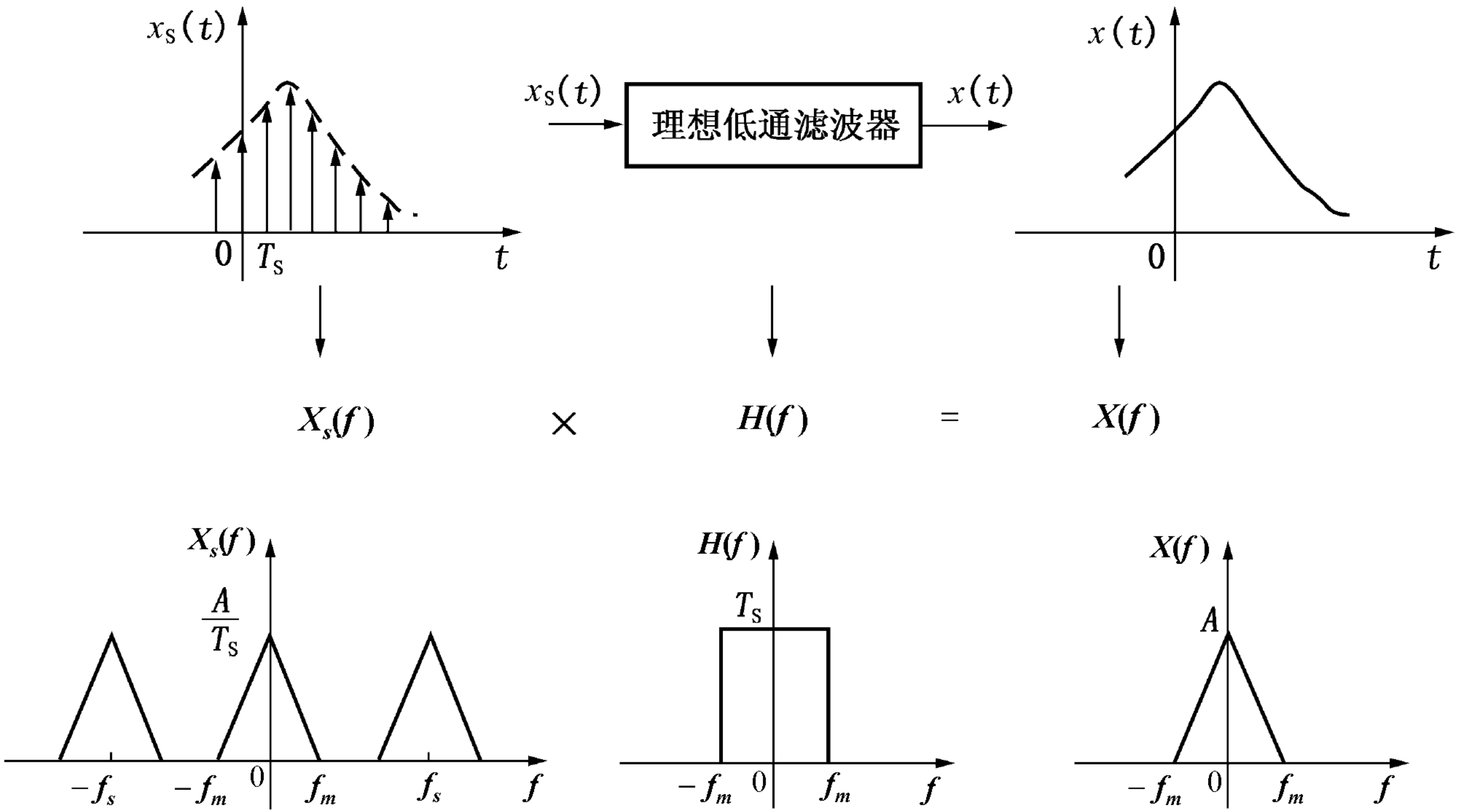
- 显然 $Y(f)=X(f)$
- 恢复出信号为

$$x(t)=x_s(t)*h(t)$$



第三节 抽样定理

✓ 从满足抽样定理的抽样信号中恢复出原信号是简单的。



通常，将最低允许采样频率的一半f_m，称为**奈奎斯特(Nyquist)频率** f_N。

由抽样定理 $f_s > 2f_m$，即 $\frac{1}{T_S} > 2f_m$，可得：

$$T_S < \frac{1}{2f_m} \Rightarrow f_s > 2f_m = 2f_N$$

表明： 对于带限信号$x(t)$，只要以大于2倍奈奎斯特频率f_N对信号$x(t)$进行均匀抽样，那么采样信号$x_s(t)$的频谱$X_s(f)$就是原带限信号$x(t)$频谱$X(f)$无混叠的周期性延拓，因而采样信号$x_s(t)$就包含了的原信号$x(t)$全部信息。

第三节 抽样定理

不同抽样频率的语音信号效果比较

抽样频率f_s=44,100 Hz

抽样频率f_s=5,512 Hz

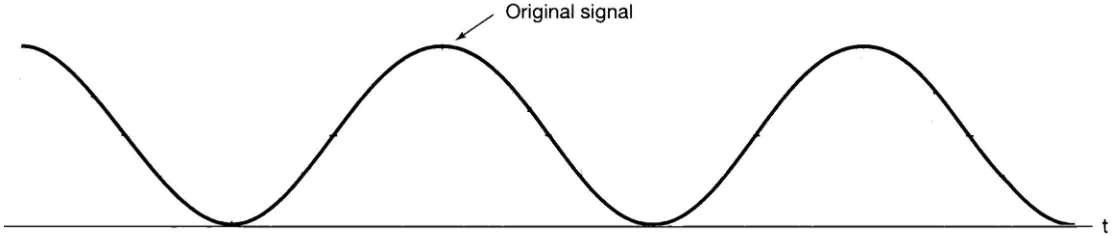
重要结论

带限信号抽样定理:

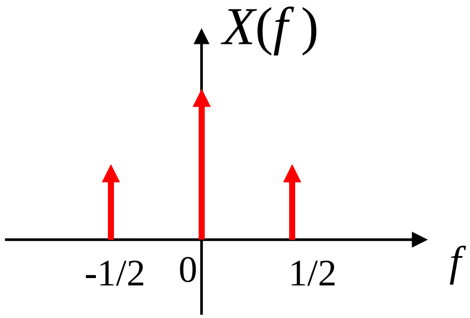
要想连续信号抽样后能够不失真的还原出原信号，则抽样频率必须大于两倍原信号频谱的最高频率($2f_m < f_s$)，这就是奈奎斯特(香农)抽样定理。

✓ **注意：** Nyquist抽样定理是信号精确恢复的**充分条件**，但不是必要条件。

第三节 抽样定理

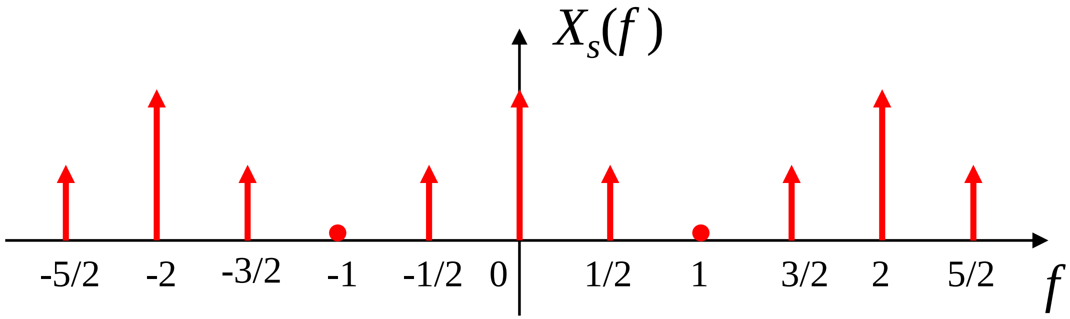


$x(t)=1+\cos(\pi t)$ $\quad f_0=\frac{1}{2}$



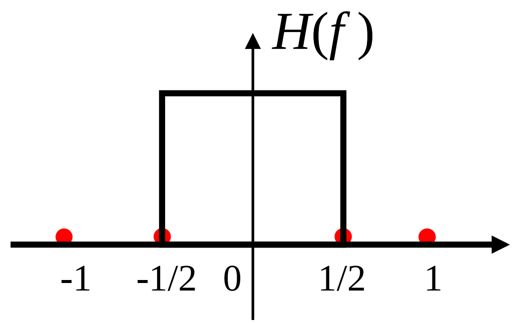
- 1) $T_s=1/2$，$f_s=2=4f_0$

$$X_s(f)=\frac{1}{T_S}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}X(f-nf_S)$$



➢这种情况下每个周期内有4个抽样点，满足抽样定理，抽样信号频谱没有混叠。

➢此时经低通滤波器后就可以从抽样信号中完全恢复出原信号。



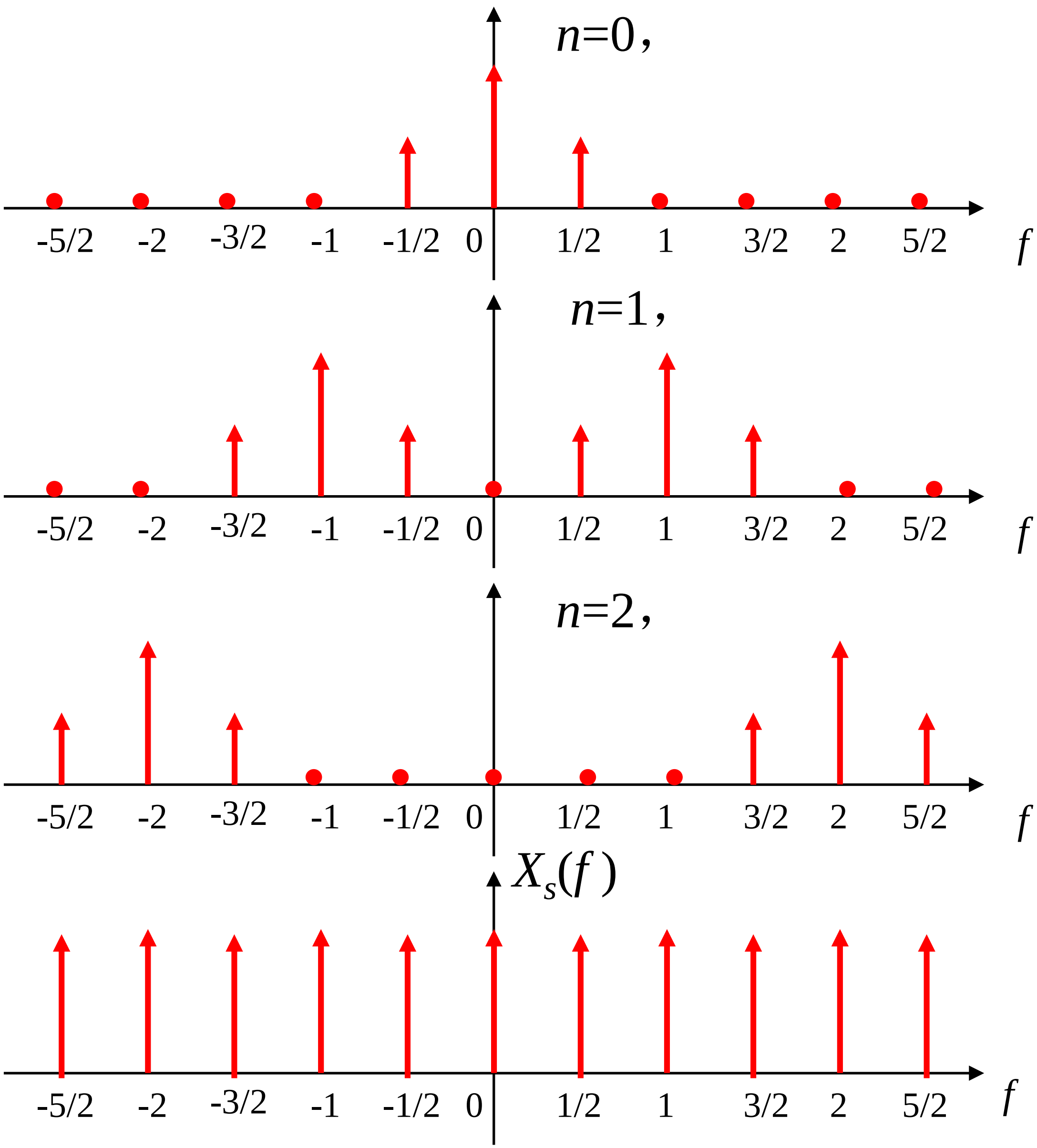
- 2) $T_s=1$，$f_s=1=2f_0$

$$X_s(f)=\frac{1}{T_S}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}X(f-nf_S)$$

➢在这种临界情况下，相邻n值的频谱刚刚开始发生混叠。这种混叠将产生一种不确定性，无论从抽样信号还是从抽样信号的频谱都无法唯一确定原来的信号是什么样的。

例如： $x(t)=1+\cos(\pi t)$

$x(t)=1+e^{j\pi t}$



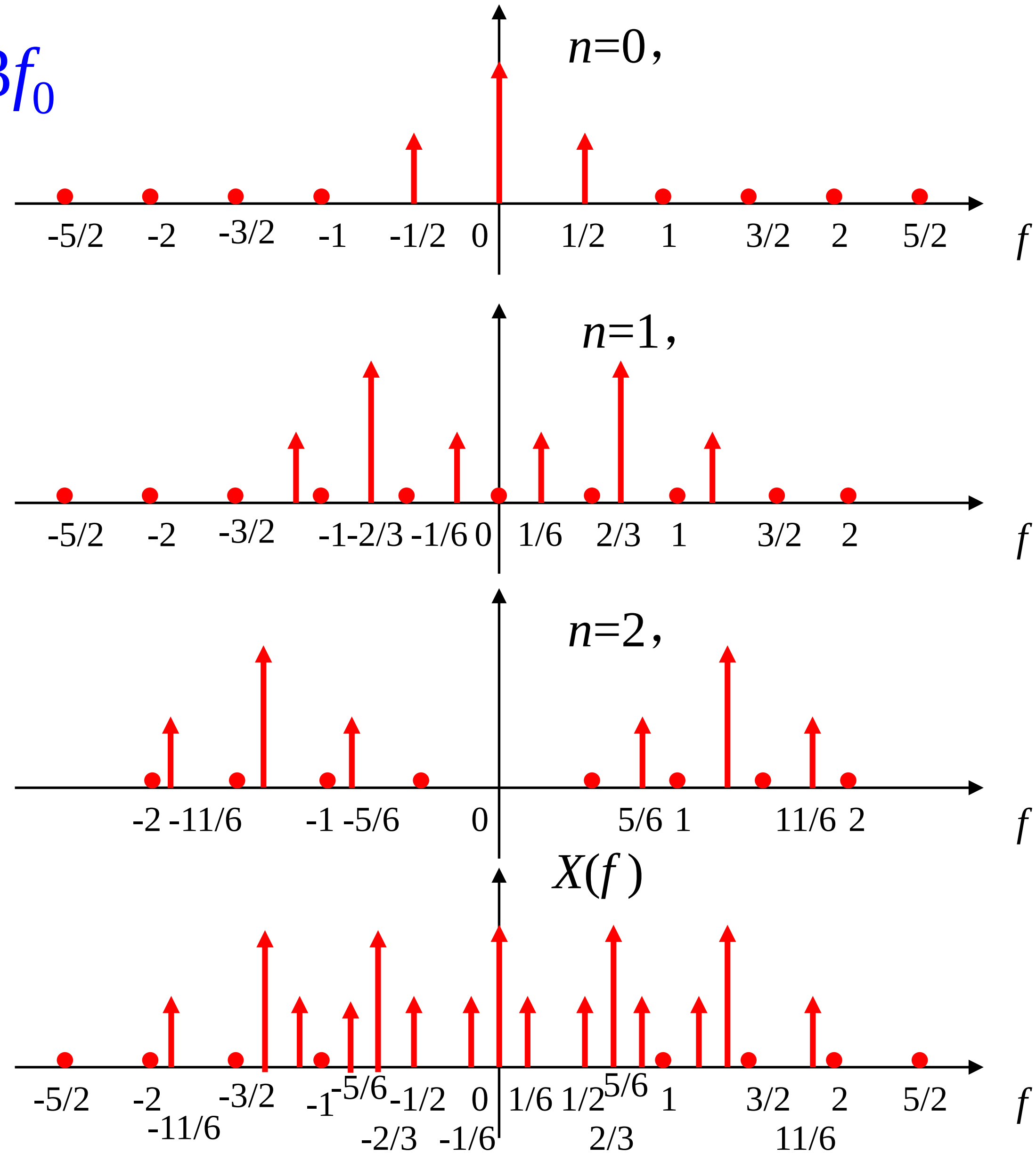
- 3) $T_s=3/2$，$f_s=2/3=4/3f_0$

$$X_s(f)=\frac{1}{T_S}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}X(f-nf_S)$$

➢这种情况不满足抽样定理，每两个周期内有3个采样点，抽样信号的频谱出现了混叠，无法从抽样信号中恢复出原信号。

➢经低通滤波后得到一个较低频率的信号。

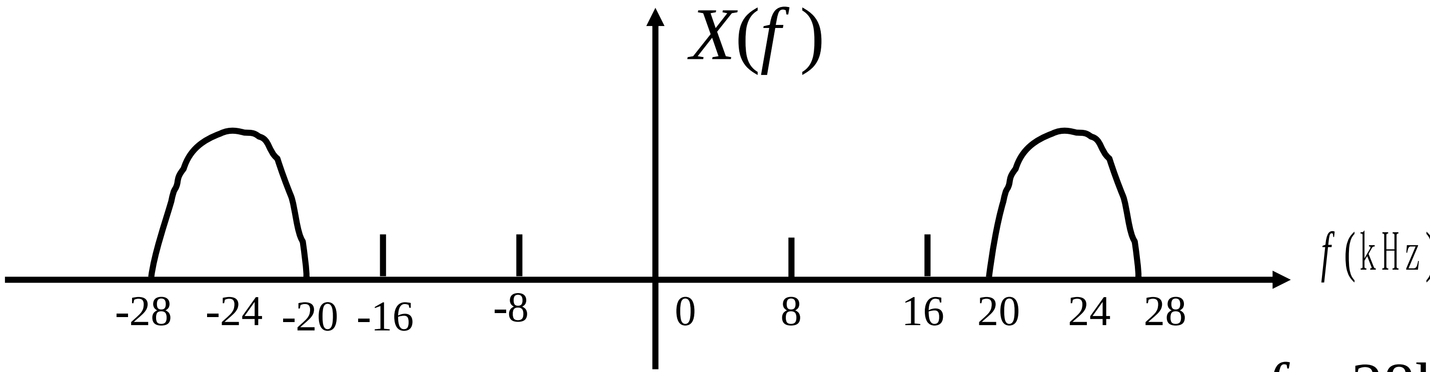
$$x(t)=1+\cos(\pi t/3)$$



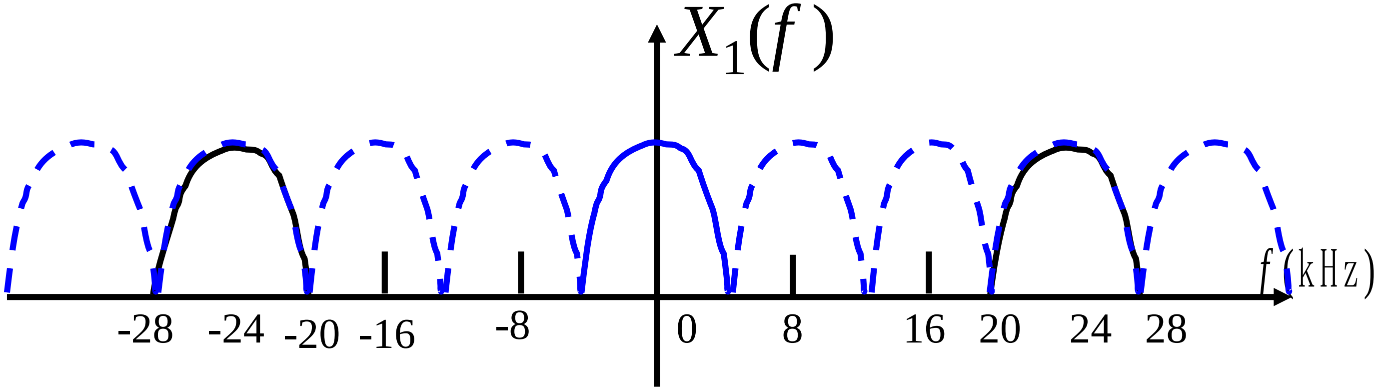
信号抽样理论分析

中国石油大学 CHINA UNIVERSITY OF PETROLEUM

窄带高频信号的抽样



f_m=28kHz



f_{sam}=8kHz

二、如何从抽样信号恢复出带限信号x(t)

设信号$x(t)$为带限信号，

$$X(f)=\begin{cases}0, & f<f_0\\ X_0(f), & f_0\le f\le f_0+L\\ 0, & f_0+L<f\end{cases}$$

其中：f_0、L均为实数且$L>0$，

其傅里叶积分为：

$$\begin{cases}x(t)=\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}}X(f)e^{\mathrm{j}2\pi ft}df=\int_{f_0}^{f_0+L}X_0(f)e^{\mathrm{j}2\pi ft}df\\ X(f)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-\mathrm{j}2\pi ft}dt \quad \underline{(f_0\le f<f_0+L)}\end{cases}$$

➢ 由于信号$x(t)$的频谱$X(f)$为有限长，**切记：**根据傅里叶级数定理，有限范围内分布的任何函数均可表示成傅里叶级数的形式！（当然也适用于带限信号）

对带限信号$x(t)$的频谱$X(f)$在有限区间$[f_0, f_0+L]$上进行傅里叶级数展开可以得到：

$$\begin{cases} X_0(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n e^{-j2\pi \frac{n}{L} f}, & (f \in [f_0, f_0+L]) \\ d_n = \frac{1}{L} \int_{f_0}^{f_0+L} X_0(f) e^{j2\pi \frac{n}{L} f} df, & (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \end{cases}$$

对比傅里叶积分和傅里叶级数中信号$x(t)$和d_n的表达式：

$$\begin{cases} x(t) = \int_{f_0}^{f_0+L} X_0(f) e^{j2\pi ft} df & (-\infty < t < \infty) \\ d_n = \frac{1}{L} \int_{f_0}^{f_0+L} X_0(f) e^{j2\pi \frac{n}{L} f} df & (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \end{cases}$$

可以得到：

$$d_n = \frac{1}{L} x(\frac{n}{L})$$

令 $\Delta = \frac{1}{L}$ 则 $d_n = \Delta x(n\Delta)$

$$X_0(f)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n e^{-j2\pi\frac{n}{L}f}=\Delta\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n\Delta)e^{-j2\pi n\Delta f}$$

离散信号的频谱公式

由于 $x(t)=\int_{f_0}^{f_0+L} X_0(f)e^{j2\pi ft}df$ ，将上式代入

则有：

$$x(t)=\int_{f_0}^{f_0+L}\left[\Delta\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n\Delta)e^{-j2\pi n\Delta f}\right]e^{j2\pi ft}df$$

$$=\Delta\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n\Delta)\int_{f_0}^{f_0+L} e^{j2\pi f(t-n\Delta)}df$$

$$=\Delta\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n\Delta)\frac{e^{j2\pi(t-n\Delta)f_0}\left[e^{j2\pi(t-n\Delta)L}-1\right]}{j2\pi(t-n\Delta)}$$

二、实信号$x(t)$的抽样定理

对于带限实信号$x(t)$，其频谱$X(f)$为：

$$X(f)=\begin{cases}0, & f<-f_m \\ X_0(f), & -f_m\le f\le f_m \\ 0, & f_m<f\end{cases}$$

则有：

$$L=2f_m \qquad \Delta=\frac{1}{L}=\frac{1}{2f_m}$$

$$x(t)=\Delta\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n\Delta)\frac{e^{-j2\pi(t-n\Delta)f_m}\left(e^{j4\pi(t-n\Delta)f_m}-1\right)}{j2\pi\left(t-n\Delta\right)}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n\Delta)\frac{\sin\left[(t-n\Delta)\frac{\pi}{\Delta}\right]}{(t-n\Delta)\frac{\pi}{\Delta}}$$

整理有：

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n\Delta)\mathrm{Sa}[(t-n\Delta)\frac{\pi}{\Delta}]$$

➢带限信号的抽样定理1：

对于带限信号$x(t)$，当其频谱$X(f)$满足：

$X(f)=0$，$|f|\geqslant f_c$，f_c为截频

若以Δ为时间间隔对$x(t)$进行离散抽样，并且抽样间隔Δ满足于：$1/\Delta>2f_c$ 或 $\Delta<1/2f_c$；

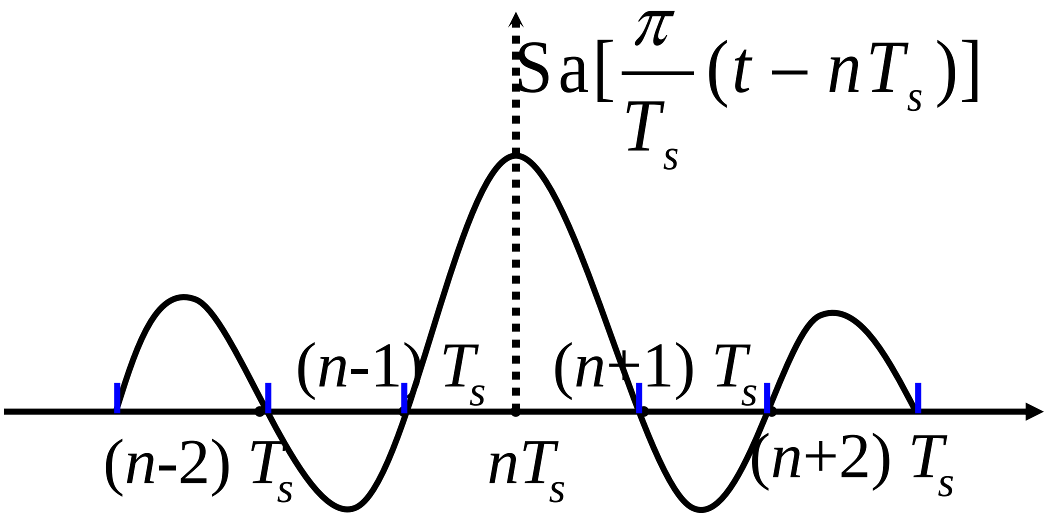
则由离散信号$x(n\Delta)$可以恢复出有限区间$[-f_c, f_c]$上的频谱$X(f)$，进而完全恢复出连续信号$x(t)$。

$$\begin{cases} X(f)=\Delta\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}x(n\Delta)e^{-j2\pi n\Delta f} & (f\in[-f_c, f_c]) \\ x(t)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}x(n\Delta)\mathrm{Sa}[\frac{\pi}{\Delta}(t-n\Delta)] & (-\infty<t<+\infty) \end{cases}$$

内插函数 $\mathrm{Sa}[\frac{\pi}{T_s}(t-nT_s)]$ 的**特性**：

$T_s=\Delta$ --为采样间隔。

在抽样点nT_s上，其值为1；其余抽样点上，其值为0。

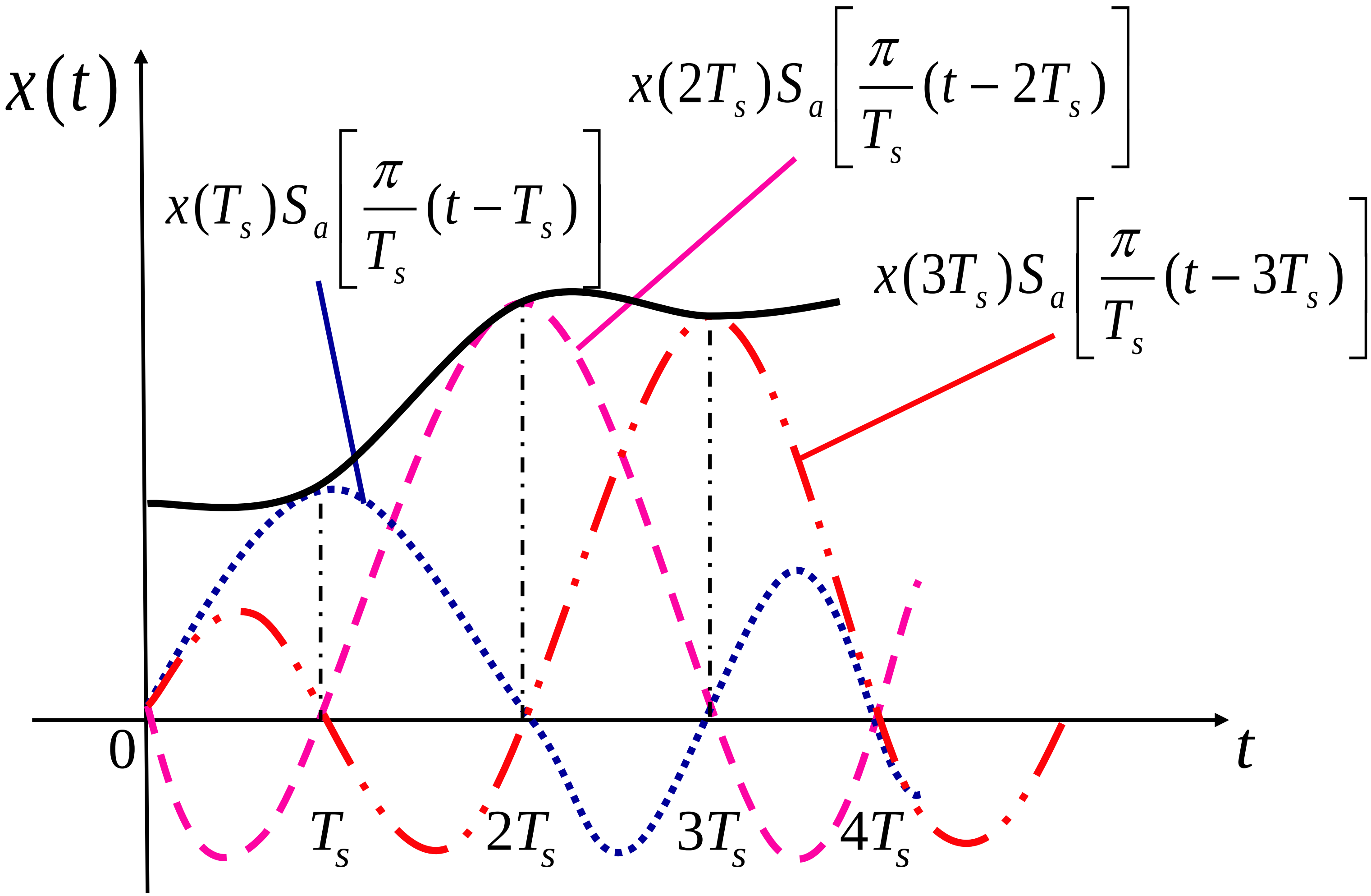


$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT_s)\mathrm{Sa}[\frac{\pi}{T_s}(t-nT_s)]$$的说明:

（1）在抽样点上，信号值不变；

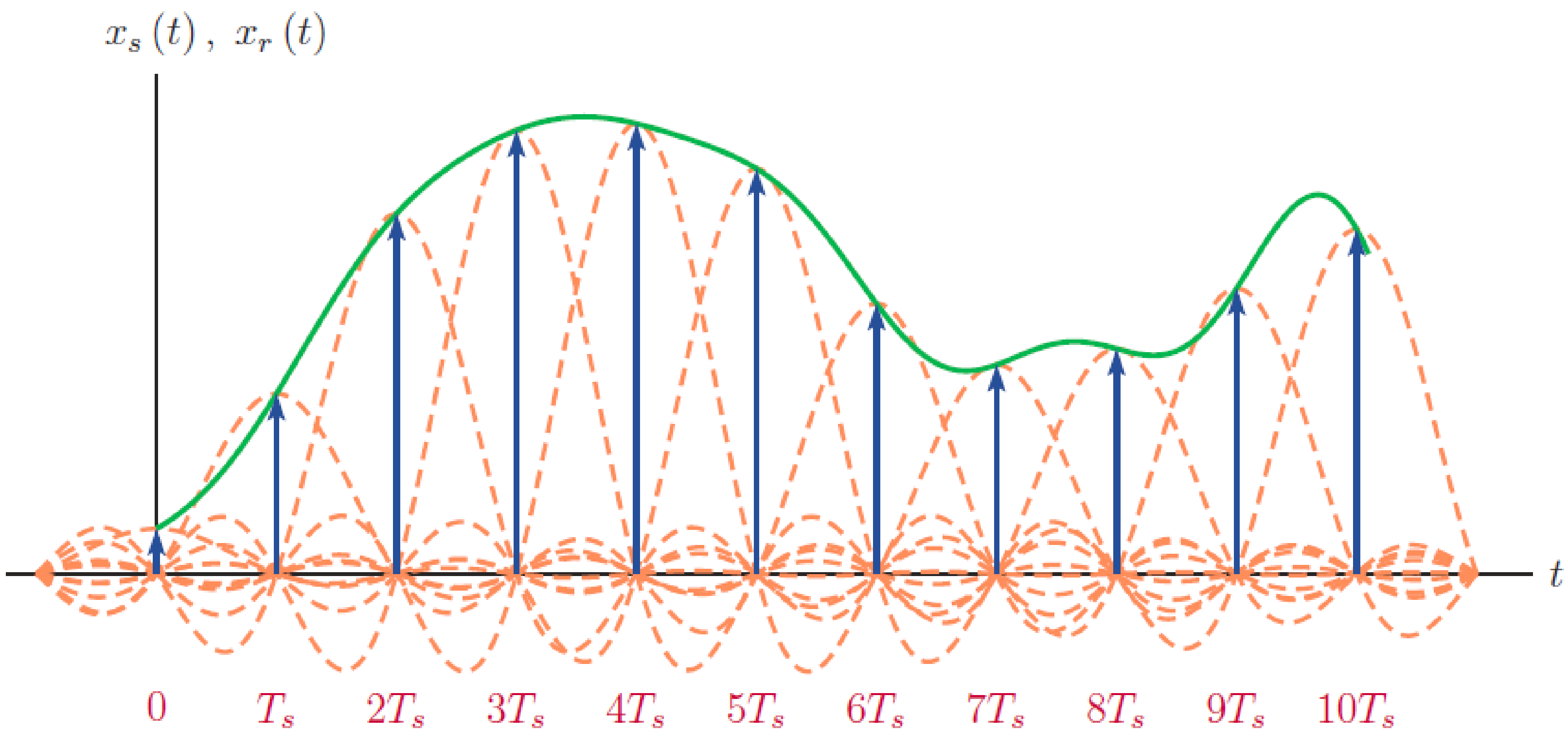
（2）抽样点之间的信号则由各抽样函数波形的延伸叠加而成。

第三节 抽样定理



连续时间信号$x(t)$可以由无数多个位于抽样点的**Sa**函数的叠加组成，其各个**Sa**函数的幅值为该点的抽样值$x(nT_s)$。

第三节 抽样定理



三、离散信号的频谱

$$\begin{cases} x(n\Delta)_\Delta = \int_{-\frac{1}{2\Delta}}^{\frac{1}{2\Delta}} X_\Delta(f) e^{\mathrm{j}2\pi n\Delta f} df & (n = 0, \pm1, \pm2, \cdots) \\ X_\Delta(f) = \Delta \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n\Delta) e^{-\mathrm{j}2\pi n\Delta f} & (f \in [\frac{-1}{2\Delta}, \frac{1}{2\Delta}]) \end{cases}$$

这就是无限离散序列的傅里叶积分变换（Sequence Fourier Transform；也可称其为Discrete Time Fourier Transform），或称序列傅里叶（积分）变换。

$$x(n\Delta)_\Delta \leftrightarrow X_\Delta(f)$$

时域：离散、非周期 ⟷ **频域：**连续、周期

四、抽样定理2

离散信号$x(n\Delta)$与其连续频谱 $X_\Delta(f)$是一一对应的。

而离散信号$x(n\Delta)$由连续信号$x(t)$确定，因此连续信号$x(t)$的频谱 $X(f)$也可完全确定离散信号$x(n\Delta)$的频谱 $X_\Delta(f)$。

➢讨论：除了这些离散数值$x(n\Delta)$外，原始信号与离散信号的频谱存在什么联系?

假设采样之前的连续信号（也称原始信号）为

$$x(t) \qquad (-\infty < t < +\infty)$$

并有

$$\begin{cases} x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \\ X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \end{cases}$$

抽样信号为： $x(n\Delta)_{\Delta} = x(n\Delta) \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

则有：

$$x(n\Delta)_{\Delta} = x(n\Delta) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi n\Delta f} df$$

对于 $$x(n\Delta)=\int_{-\infty}^{\infty}X(f)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi n\Delta f}\mathrm{d}f$$

将无限积分分解成无数个小区间 [m/Δ−1/2Δ, m/Δ+1/2Δ] (m=0, ±1, ±2, …)之和，则有

$$x(n\Delta)_{\Delta}=x(n\Delta)=\int_{-\infty}^{\infty}X(f)e^{\mathrm{j}2\pi n\Delta f}df=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\int_{\frac{2m-1}{2\Delta}}^{\frac{2m+1}{2\Delta}}X(f)e^{\mathrm{j}2\pi n\Delta f}df$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\int_{-\frac{1}{2\Delta}}^{\frac{1}{2\Delta}}X(f+\frac{m}{\Delta})e^{\mathrm{j}2\pi n\Delta(f+\frac{m}{\Delta})}df$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\int_{-\frac{1}{2\Delta}}^{\frac{1}{2\Delta}}X(f+\frac{m}{\Delta})e^{\mathrm{j}2\pi n\Delta f}df$$

整理得:

$$x(n\Delta)_{\Delta} = x(n\Delta) = \int_{-\frac{1}{2\Delta}}^{\frac{1}{2\Delta}} \left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} X(f + \frac{m}{\Delta}) \right) e^{j2\pi n\Delta f} df$$

由已知离散频谱有:

$$x(n\Delta)_{\Delta} = \int_{-\frac{1}{2\Delta}}^{\frac{1}{2\Delta}} X_{\Delta}(f) e^{j2\pi n\Delta f} df$$

因此有:

$$X_{\Delta}(f) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} X(f + \frac{m}{\Delta}) \quad (f \in [\frac{-1}{2\Delta}, \frac{1}{2\Delta}])$$

这是**抽样定理2**！它建立了无限离散序列的频谱与连续信号频谱之间的关系！

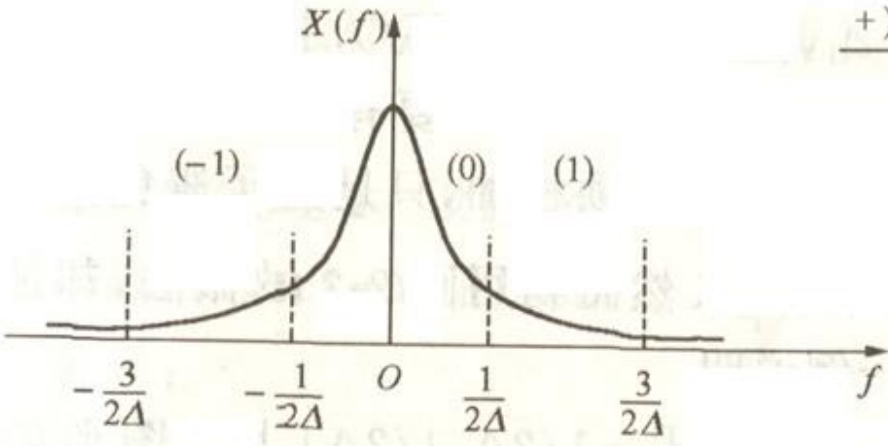
抽样定理2___物理意义：

设连续信号$x(t)$的频谱为$X(f)$，离散信号$x(n\Delta)$的频谱为$X_\Delta(f)$，则$X_\Delta(f)$和$X(f)$的关系式为：

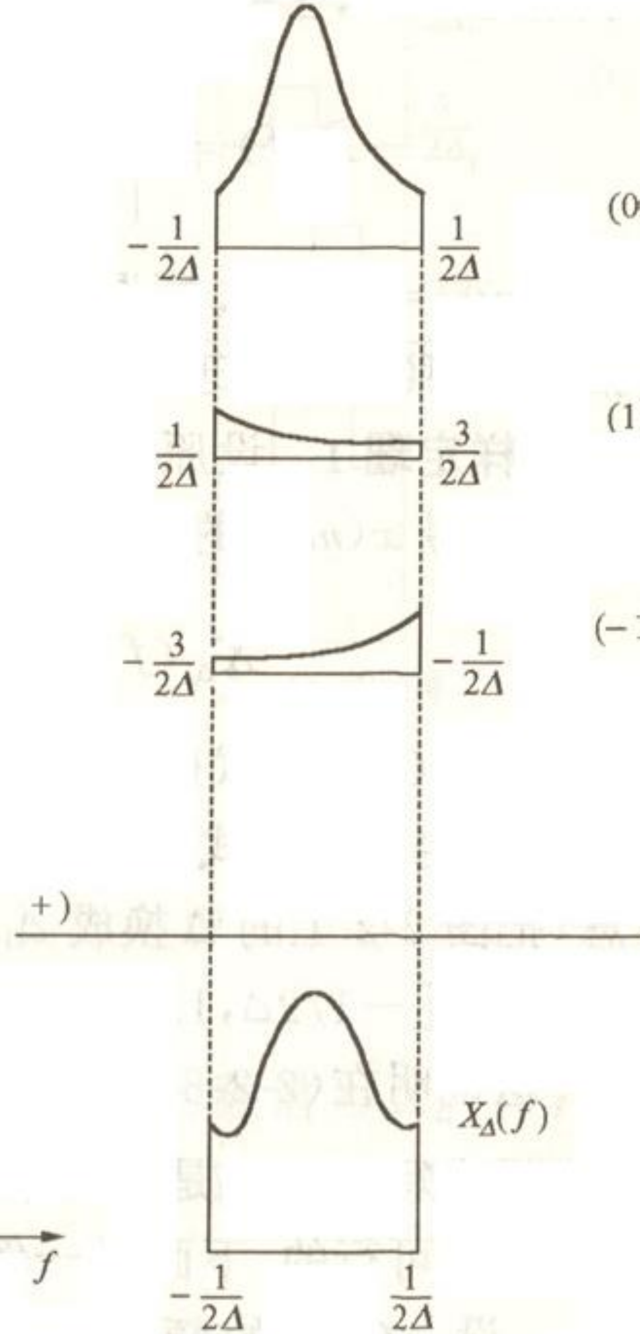
$$X_\Delta(f)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}X(f+\frac{m}{\Delta})\quad (f\in[\frac{-1}{2\Delta},\frac{1}{2\Delta}])$$

显然，折叠频率 $f_N=\dfrac{1}{2\Delta}$ 作为一个门坎值，它在连续信号的离散过程中起到了非常重要的作用：

原始信号中所有包含**大于它的频谱成分均被折叠到信号的低频部分。**

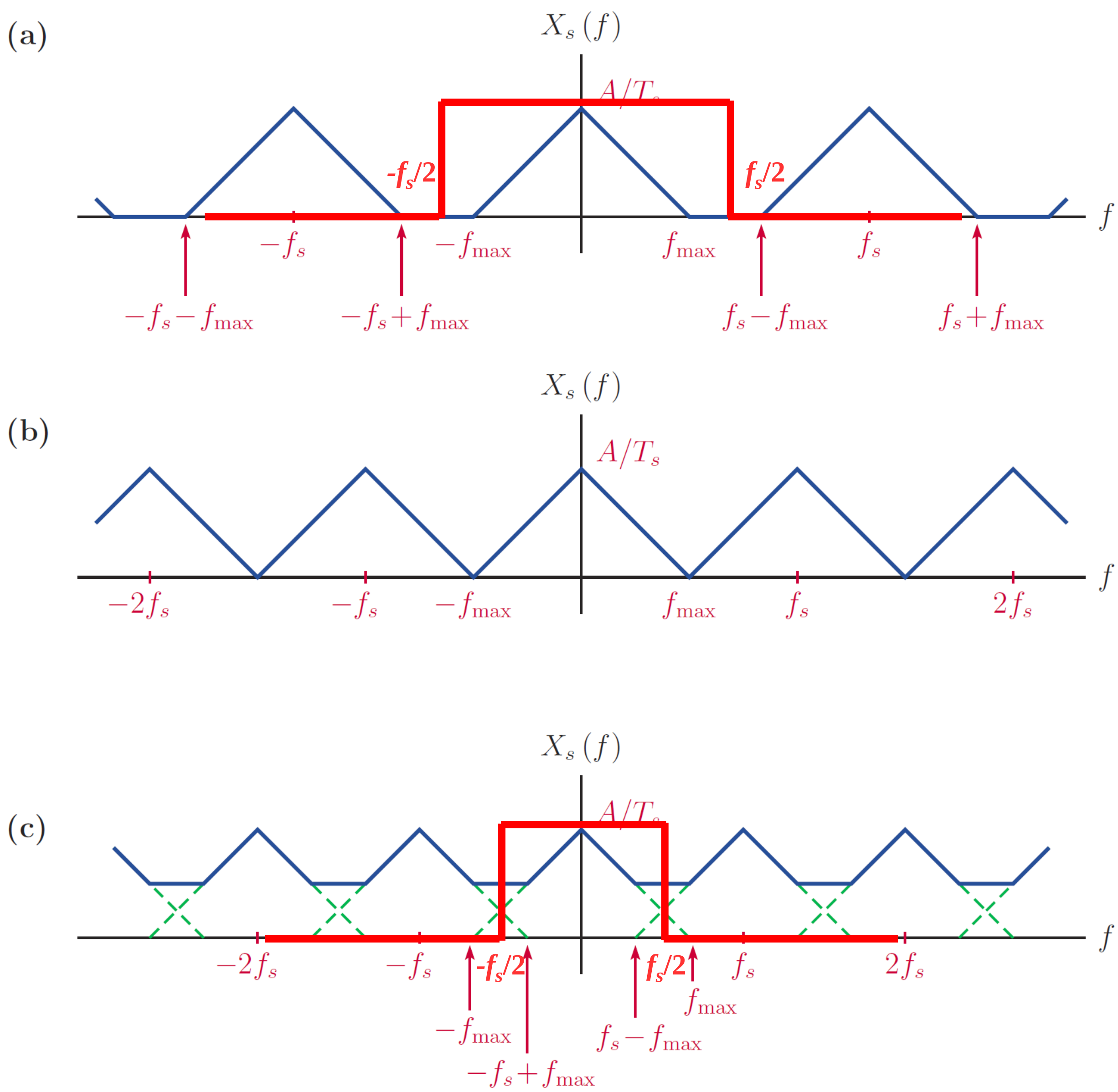


(a) 分成长度为 $1/\Delta$ 的小段



(b) 各段叠加得 $X_{\Delta}(f)$

第三节 抽样定理



(a)
$X_s(f)$
A/T_s
$-f_s/2$
$f_s/2$
f
$-f_s$
$-f_{max}$
f_{max}
f_s
$-f_s-f_{max}$
$-f_s+f_{max}$
f_s-f_{max}
f_s+f_{max}
(b)
$X_s(f)$
A/T_s
f
$-2f_s$
$-f_s$
$-f_{max}$
f_{max}
f_s
$2f_s$
(c)
$X_s(f)$
A/T_s
f
$-2f_s$
$-f_s$
$-f_s/2$
$f_s/2$
f_s
$2f_s$
f_{max}
$-f_{max}$
f_s-f_{max}
$-f_s+f_{max}$

根据**抽样定理2**，若连续信号$x(t)$的频谱$X(f)$中包含有频率$|f|\geq f_N$的成分，若以Δ为时间间隔抽样后得到的离散序列$x(n\Delta)$ (n=0, ±1, ±2, …)所对应的频谱$X_\Delta(f)$是频谱$X(f)$中大于折叠频率的频谱成分就被折叠到低频成分之上，其结果是原始频谱被彻底改造，则

（1）原始频谱中的低频成分由于折叠作用而发生了畸变（与原来的频谱不一致）；

（2）高频成分被填充为零（原始信号的高频成分不一定为零）。

五、重抽样

根据抽样定理，使用小的采样间隔Δ可以有效防止频率混叠现象，但这样做是以增加计算量为代价的。

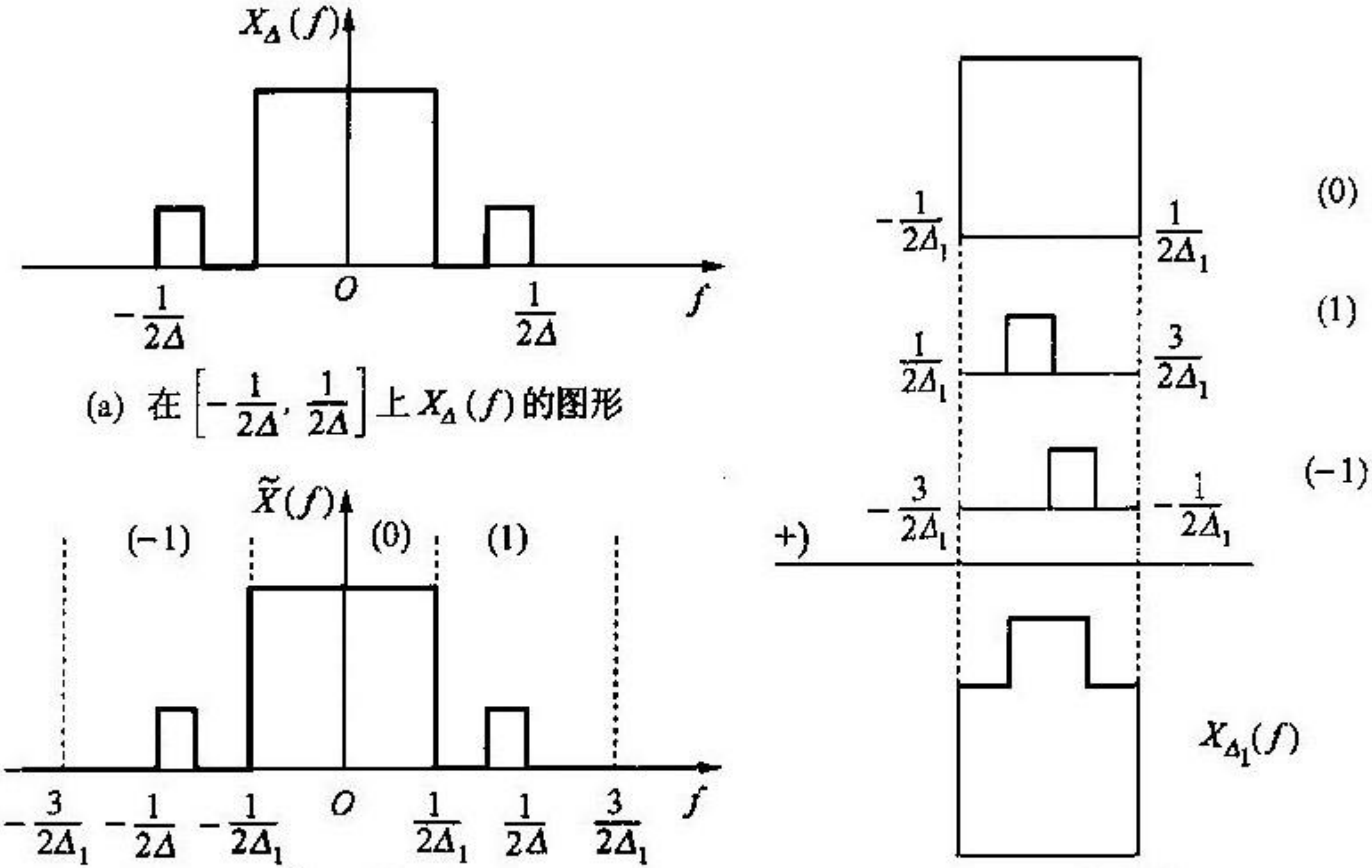
有时我们会觉得抽样间隔Δ太小，以至$x(n\Delta)$数据量太大，这就需要重新抽样，取抽样间隔$\Delta_1=m\Delta$，m为正整数。

重抽样定理：

设原始离散信号$x(n\Delta)$的频谱为$X_\Delta(f)$，若以Δ_1重抽样后的离散信号$x(n\Delta_1)$的频谱为$X_{\Delta 1}(f)$，则$X_\Delta(f)$和$X_{\Delta 1}(f)$的关系式为：

$$X_{\Delta 1}(f)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}X_\Delta(f+\frac{m}{\Delta_1})\quad (f\in[\frac{-1}{2\Delta_1},\frac{1}{2\Delta_1}])$$

第三节 抽样定理



(a) 在 $\left[-\frac{1}{2\Delta}, \frac{1}{2\Delta}\right]$ 上 $X_\Delta(f)$ 的图形

(b) $\tilde{X}(f)$ 的图形

(c) $X_{\Delta_1}(f)$ 的获得

重抽样后的频谱 $X_{\Delta_1}(f)$

第二章 离散信号和抽样定理

- 第一节 离散时间信号
- 第二节 连续信号的离散化
- 第三节 抽样定理
- **第四节 假频现象**

第四节 假频现象

中国石油大学
CHINA UNIVERSITY OF PETROLEUM

对于理想抽样信号只要满足抽样定理的要求，所得到的样值信号$x_s(t)$就包含了被抽样信号$x(t)$的全部信息，再通过低通滤波等办法可由$x_s(t)$恢复出$x(t)$。那么如果不满足抽样定理的抽样，将使频谱发生混叠，产生假频现象。

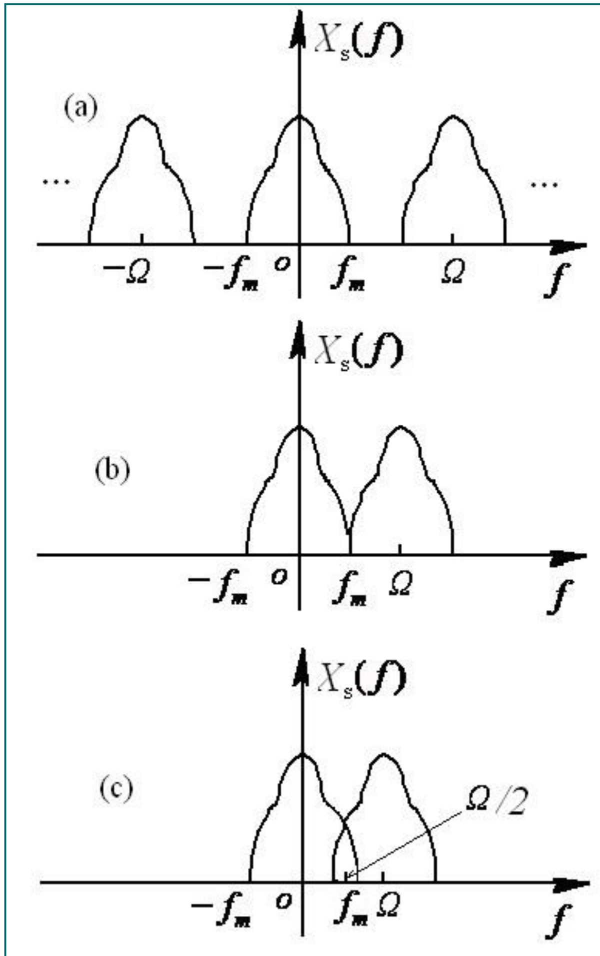
- **理想抽样信号的频谱在两种情况下将产生频谱混叠现象：**

1）连续信号虽然是带限信号，但抽样频率过低，不满足抽样定理；

2）连续信号频谱为无限带宽，不可能满足抽样定理，频谱混叠不可避免。

第四节 假频现象

➤1、当$\Omega>2f_m$时，周期延拓后频谱的高频分量是相互分离的，不产生频谱混叠，各分量都保留了原信号的频域信息，这种情况通常称为“过抽样”。



➤2、当$\Omega=2f_m$时，周期延拓后频谱的高频分量理论上仍是相互分离的，不产生频谱混叠，但这是不产生混叠的极限(或临界)情况，称为“临界抽样”。

➤3、当$\Omega<2f_m$时，周期延拓后的各频谱间不再是分离的，而是产生了相互的交叠，通常称为“欠抽样”，即所谓“**频谱混叠现象**”。

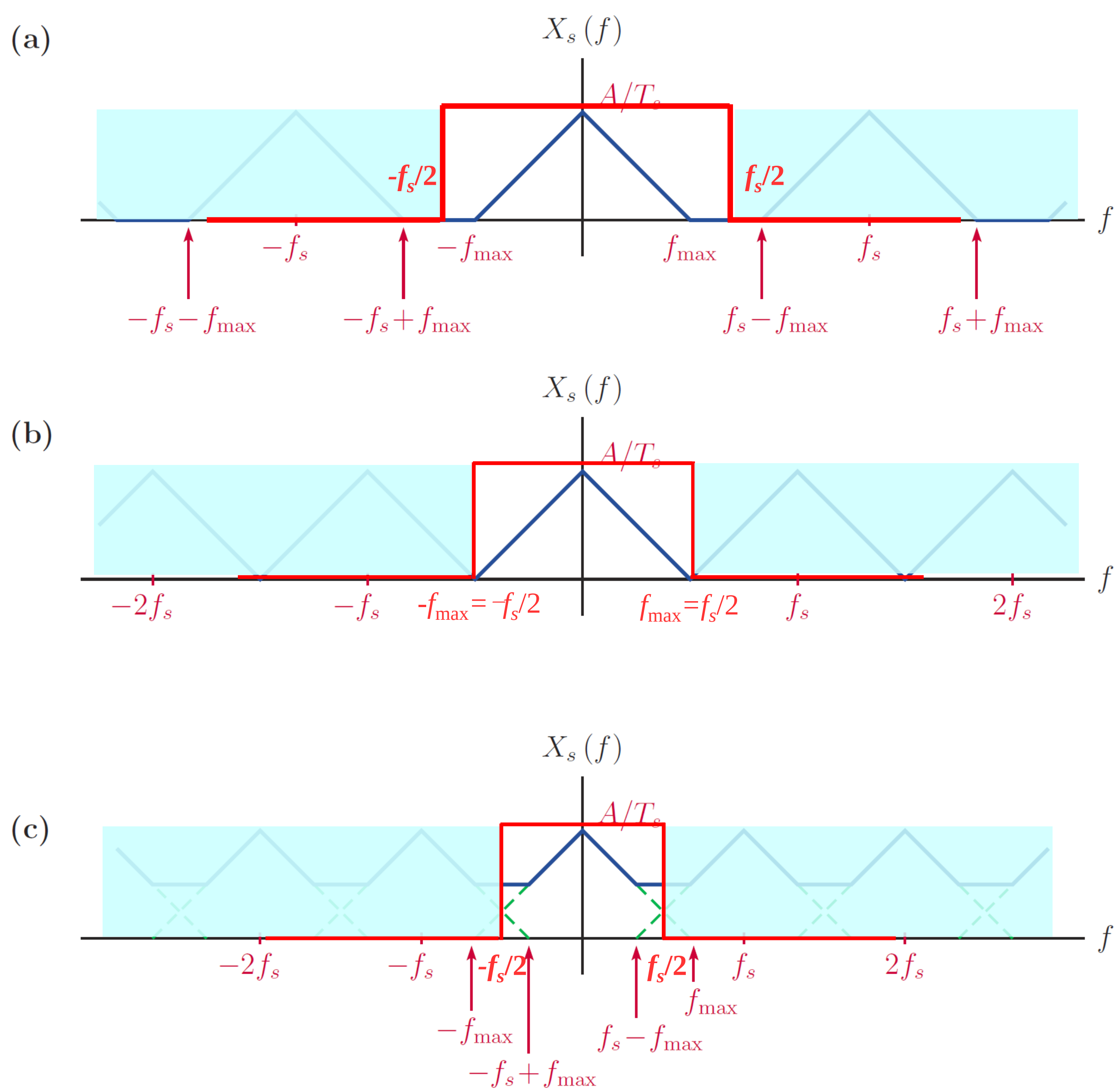
第四节 假频现象

➢当“**欠抽样**”时，抽样信号的频谱犹如在Ω/2处发生折叠一样。把抽样频率的一半Ω/2（或f_s /2）称为“**折叠频率f_N**”，即 $f_N = f_s/2$ 。

➢数字化信号可恢复的最高信号频率为**折叠频率**。

➢ 由于频谱发生折叠，折叠过去的频率成分在信号恢复时相当于在原信号上叠加了一部分低频成分（原信号对应的高频成分已经丢失），称这部分低频成分为“**假频 f_a**”（ alias frequency）。

第三节 抽样定理


(a)
$X_s(f)$
A/T_s
$-f_s/2$
$f_s/2$
f
$-f_s$
$-f_{max}$
f_{max}
f_s
$-f_s-f_{max}$
$-f_s+f_{max}$
f_s-f_{max}
f_s+f_{max}
(b)
$X_s(f)$
A/T_s
f
$-2f_s$
$-f_s$
$-f_{max}=-f_s/2$
$f_{max}=f_s/2$
f_s
$2f_s$
(c)
$X_s(f)$
A/T_s
f
$-2f_s$
$-f_s$
$-f_s/2$
$f_s/2$
f_s
$2f_s$
f_{max}
$-f_{max}$
f_s-f_{max}
$-f_s+f_{max}$

第四节 假频现象

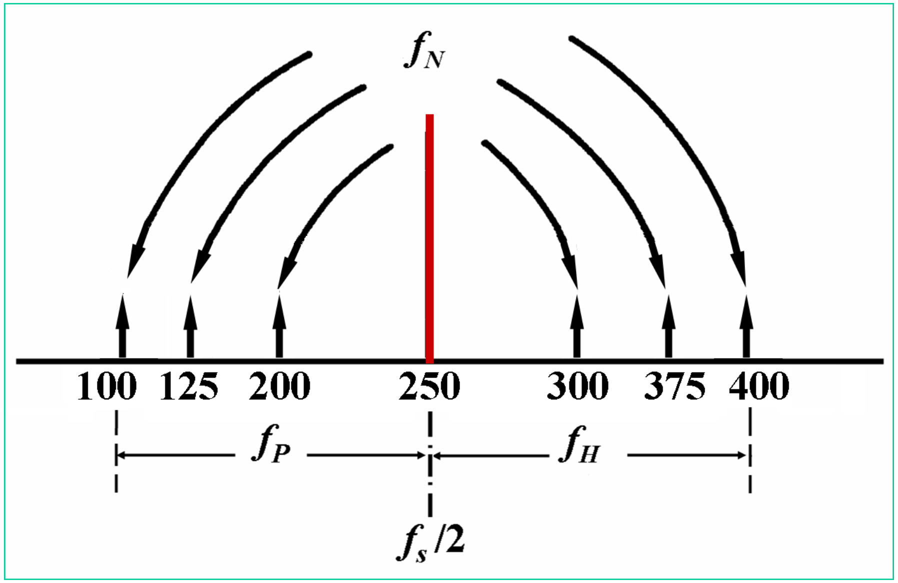
设信号频率为f，抽样频率f_s，折叠频率为f_N，假频为f_a，则其相应的关系为：

$$f_a = \left|2mf_N - f\right|$$

式中：m为整数，使$f_a < f_N$。通常取$m=1$，即

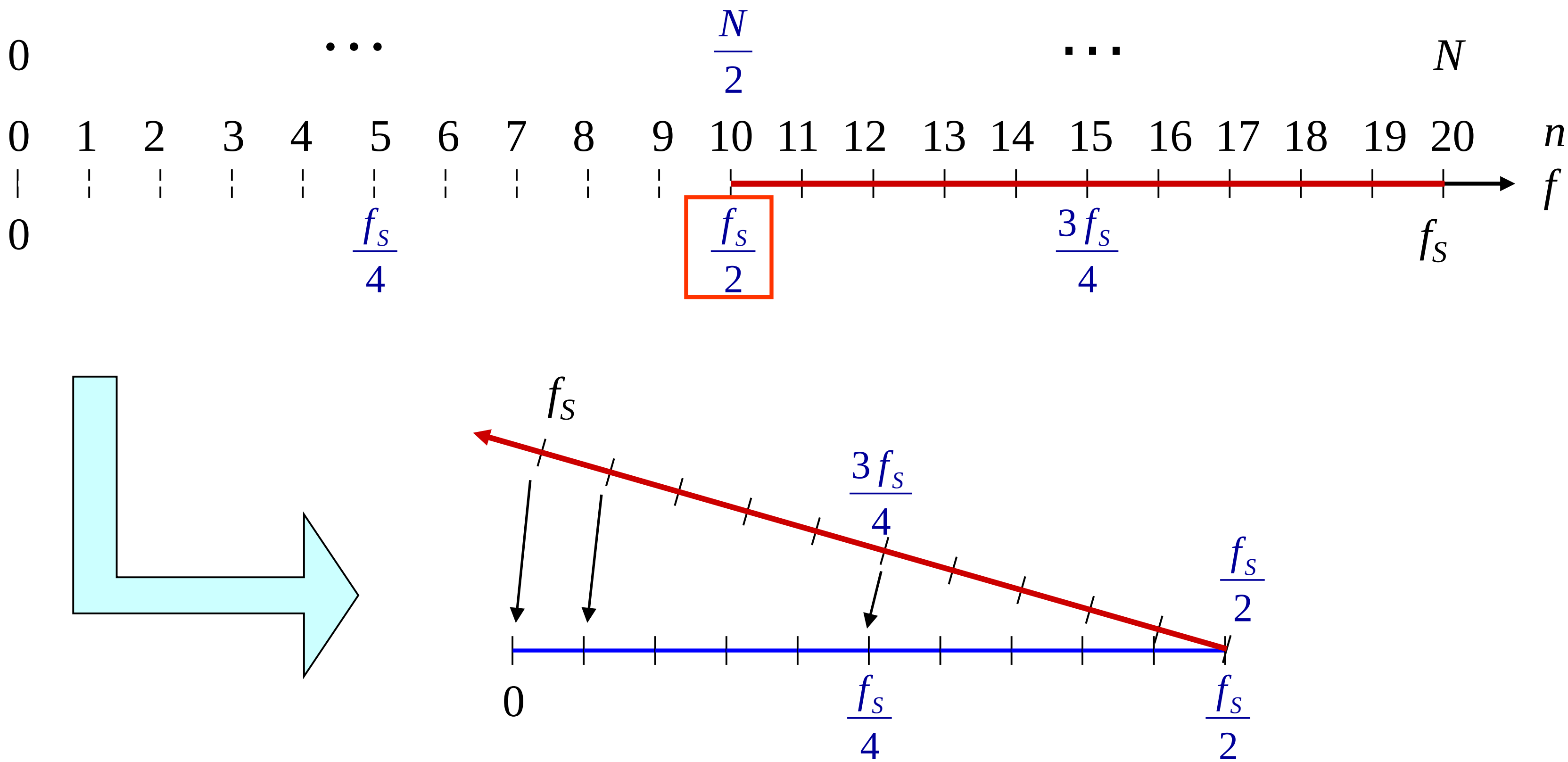
$$f_a = f_s - f$$

➢可知：**假频信号f_a**和**原连续信号**中频率高于折叠频率f_N的f_H是关于f_N对称的。



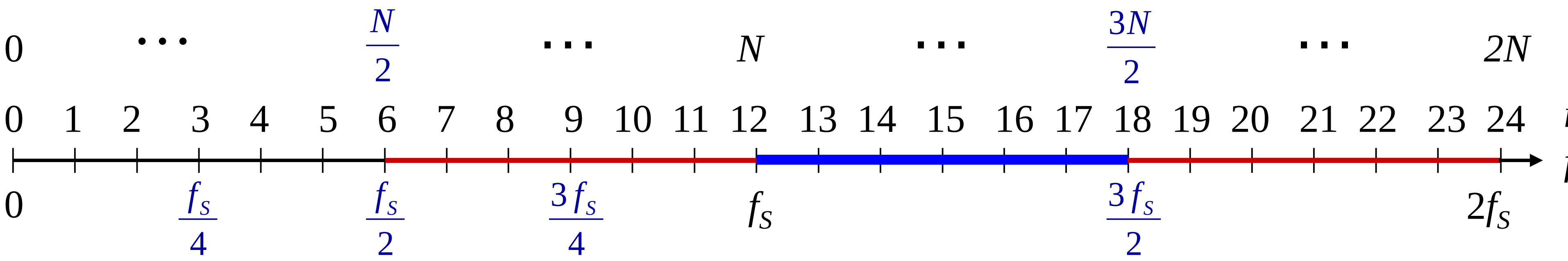
第四节 假频现象

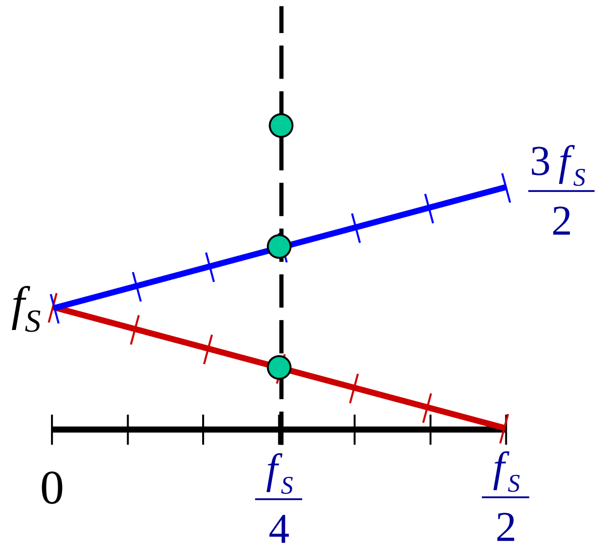
$$f_a = \left| 2mf_N - f \right|$$



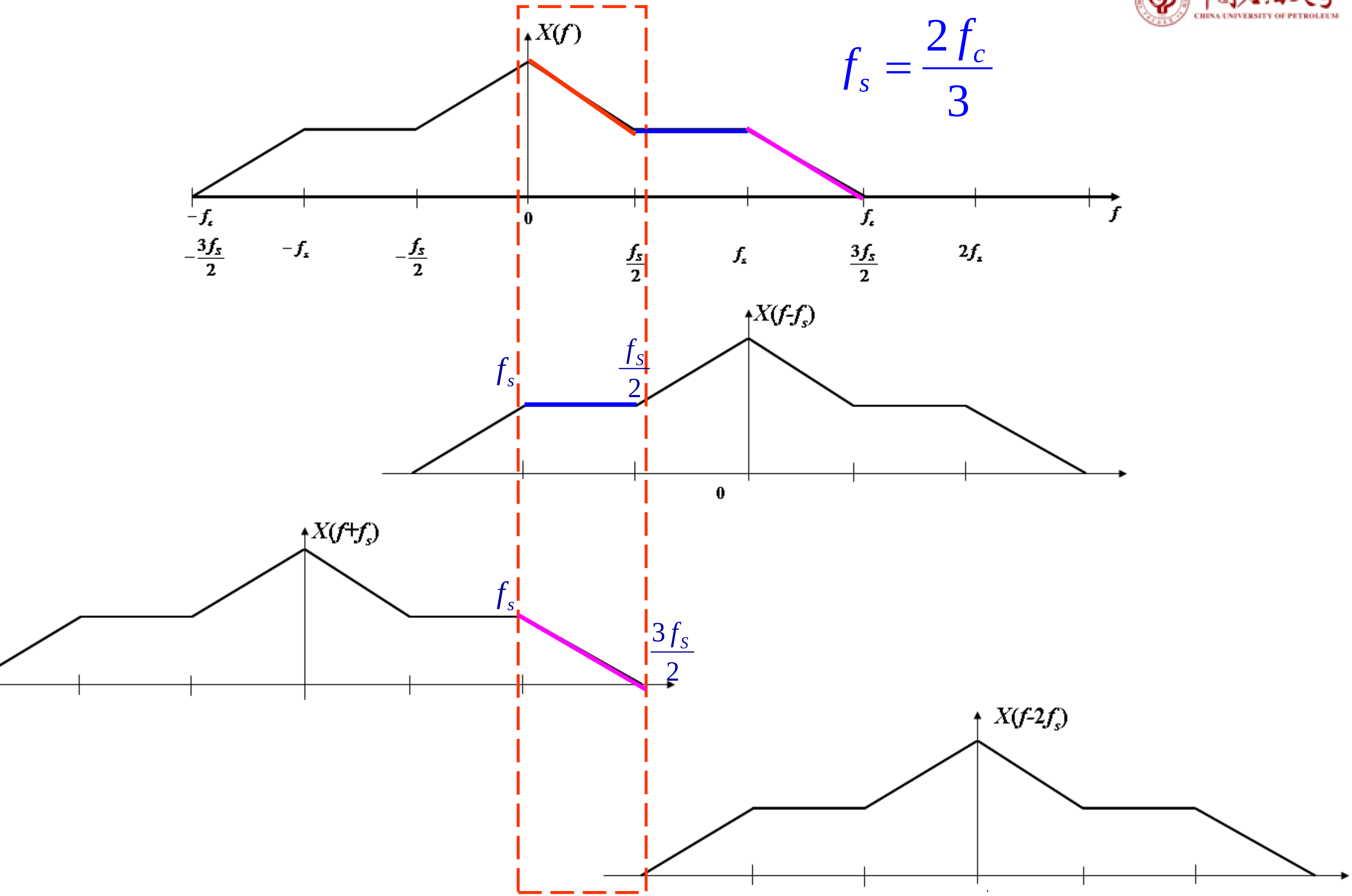
第四节 假频现象

$$f_a = \left|2mf_N - f\right|$$





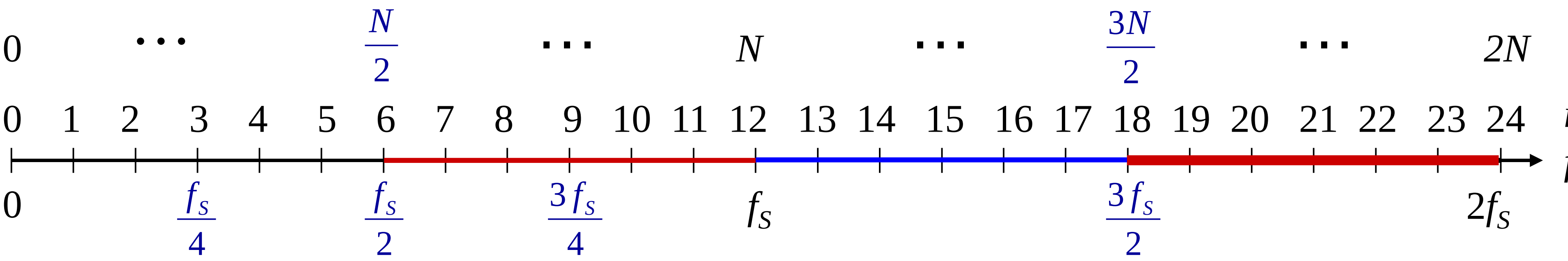
$$f_s = \frac{2f_c}{3}$$

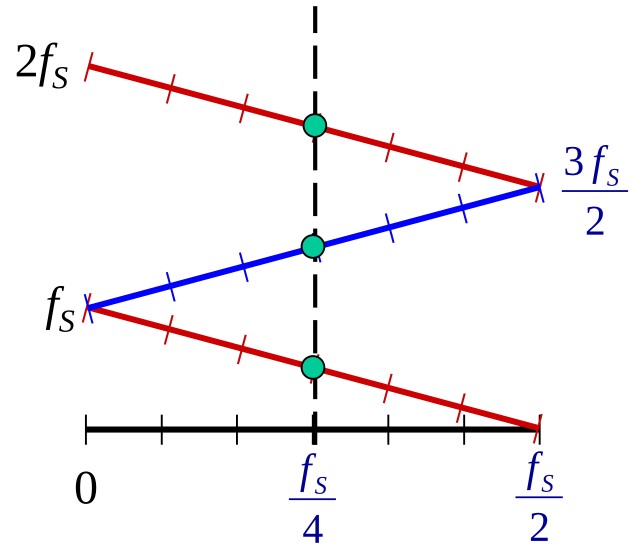


X(f)
−f_c
0
f_c
f
−3f_s/2
−f_s
−f_s/2
f_s/2
f_s
3f_s/2
2f_s
X(f-f_s)
f_s
f_s/2
0
X(f+f_s)
f_s
3f_s/2
X(f-2f_s)

第四节 假频现象

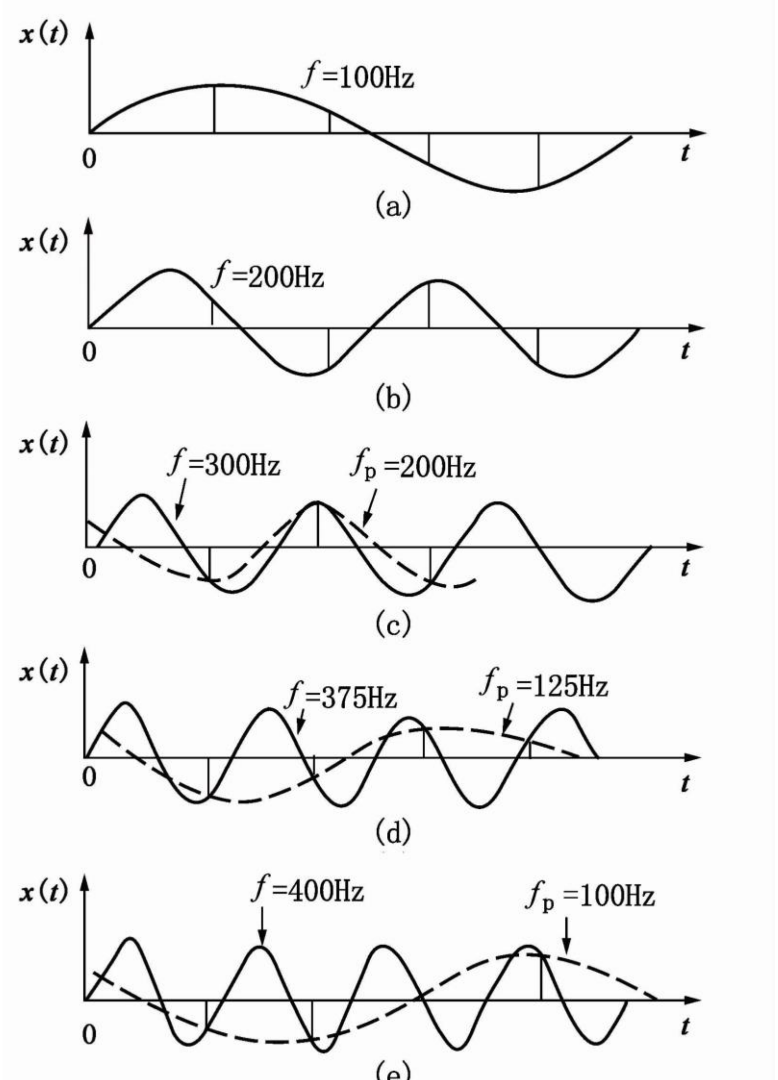
$$f_a = \left|2mf_N - f\right|$$





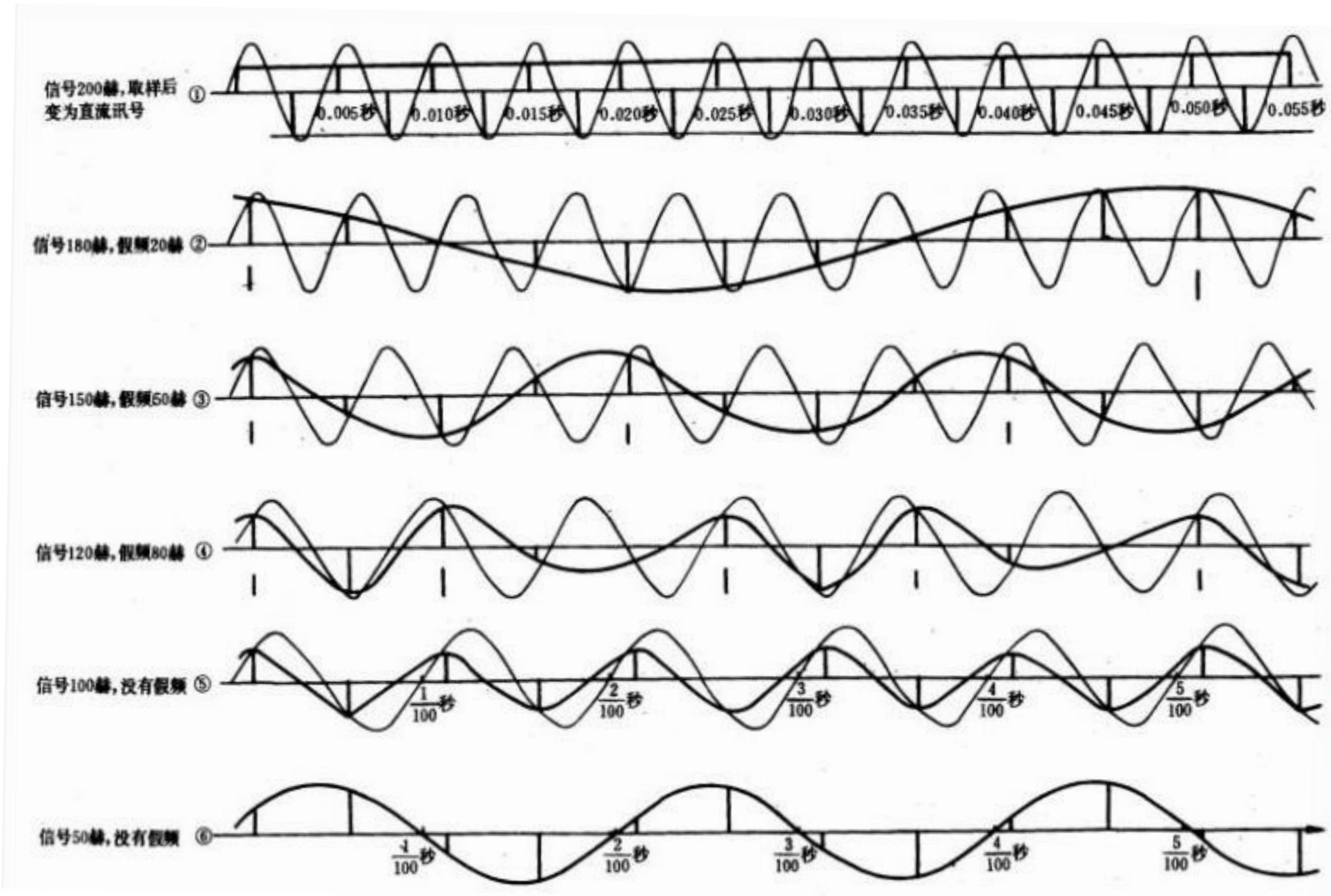
第四节 假频现象

下图是对正弦波抽样的一个例子。图中抽样频率为500Hz（即T_s=2ms），五个正弦波的频率分别为100Hz，200Hz，300Hz，375Hz和400Hz。



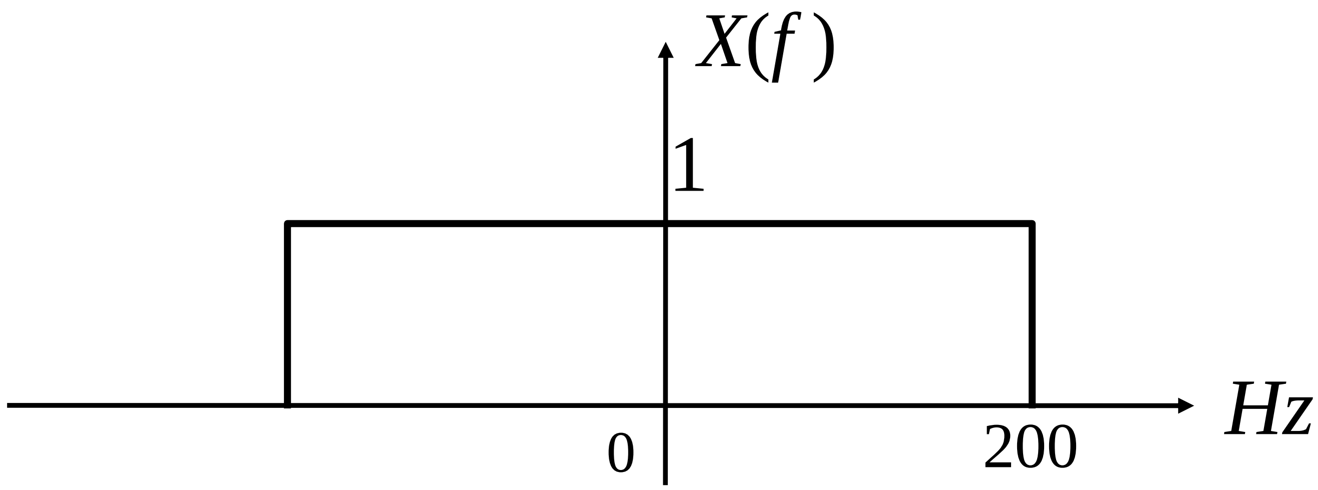
第四节 假频现象

例：以抽样频率为200Hz（即T_s=5ms）对正弦波抽样。



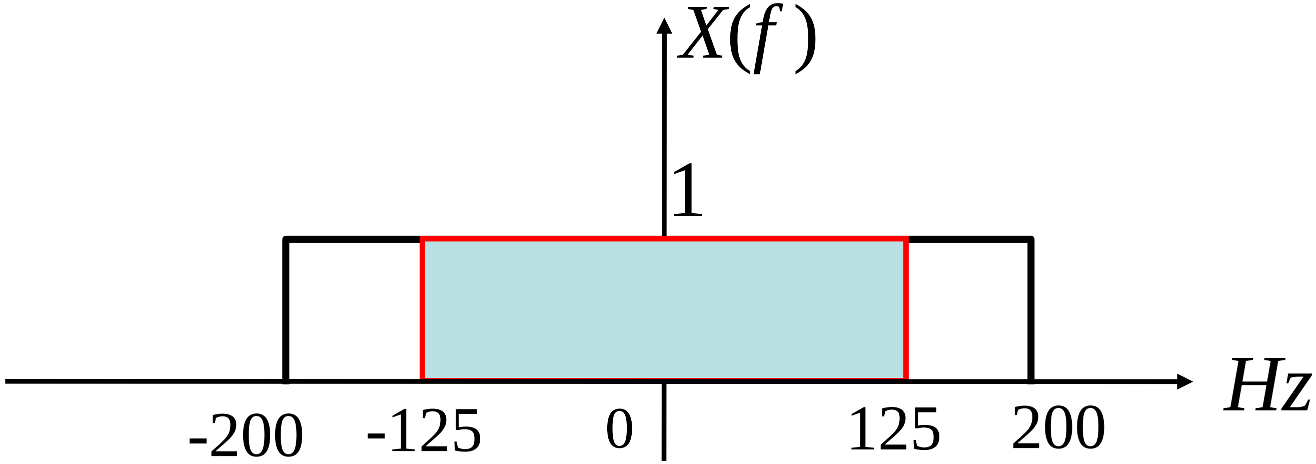
第四节 假频现象

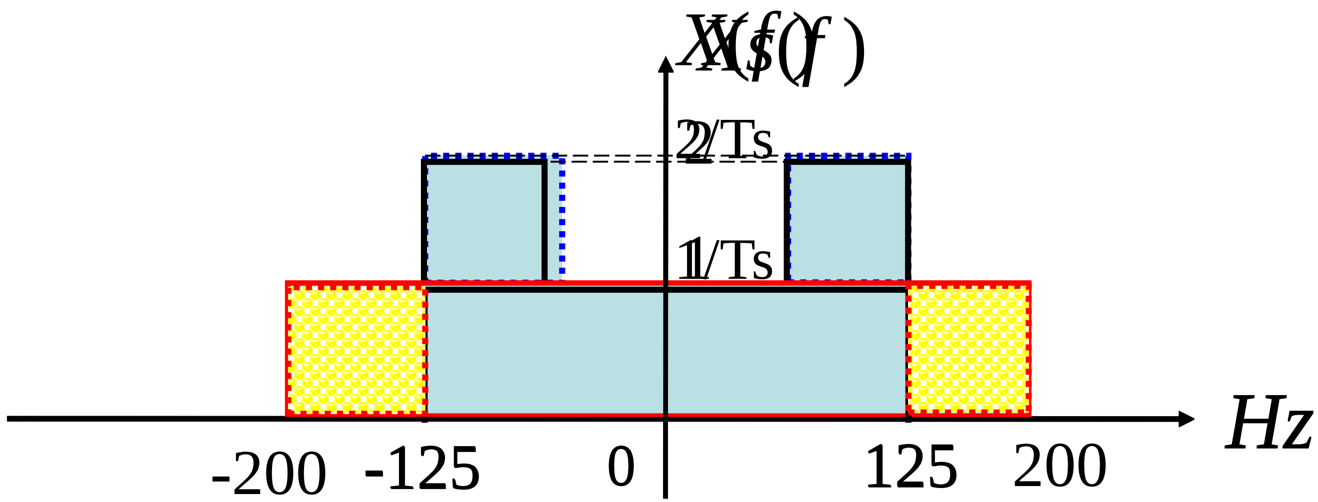
例：设连续信号的频谱如图所示，若采样间隔为**4ms**，求抽样信号的频谱？



第四节 假频现象

1）若采样间隔为4ms，则折叠频率为125Hz





第四节 假频现象

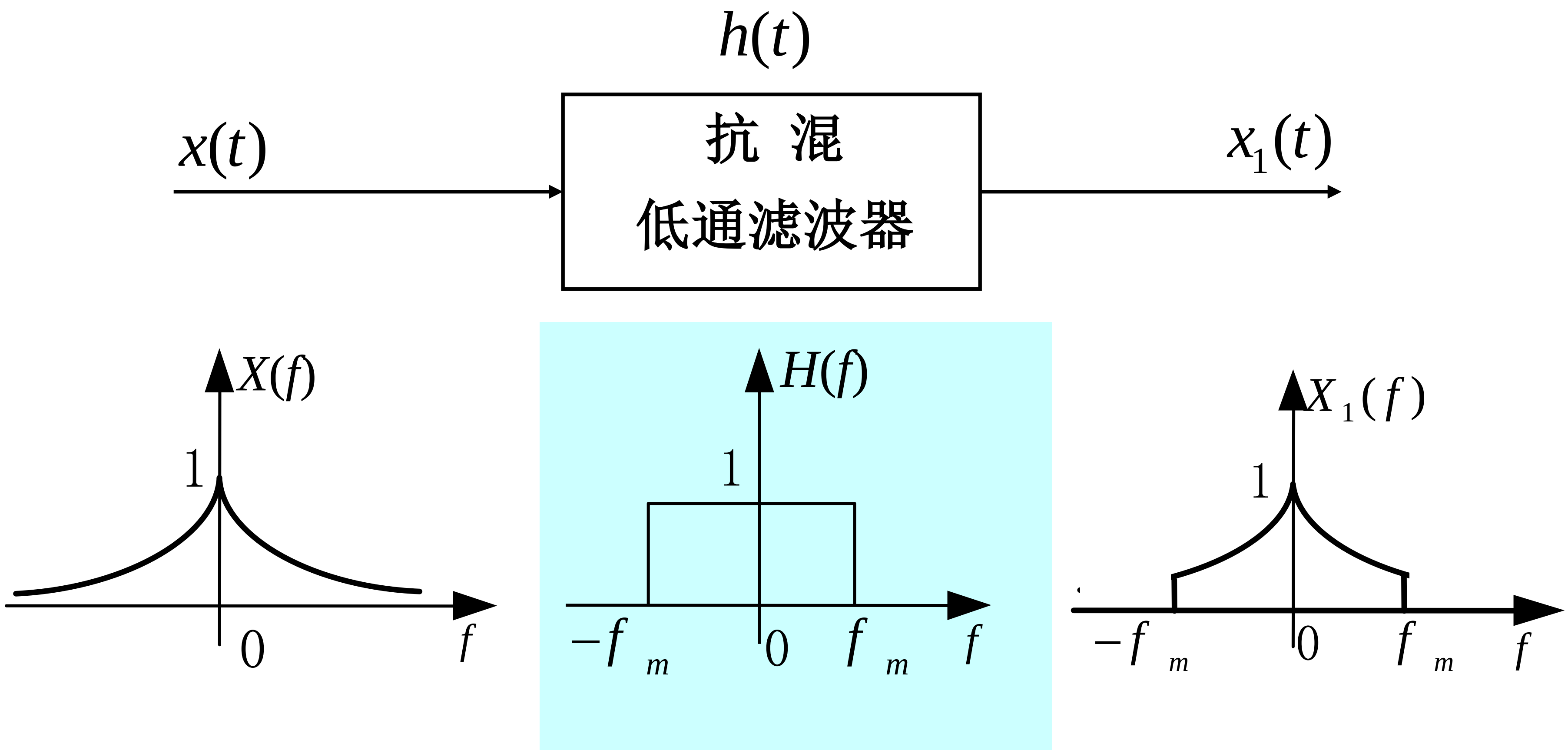
第四节 假频现象

对于无限带宽的连续信号，无论怎样提高抽样频率都无法满足抽样定理，不可避免地都要产生频谱混叠现象。由于实际处理的信号大都属于无限带宽的信号，所以通常在对信号进行模数（A/D）转换之前，一般都设有一个高截去假频滤波器，以滤除高于f_s /2的频率成分。

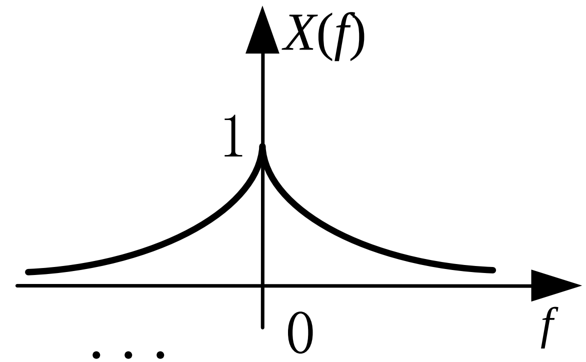
典型的去假频滤波器的高截频率是f_s 的3/4或一半。

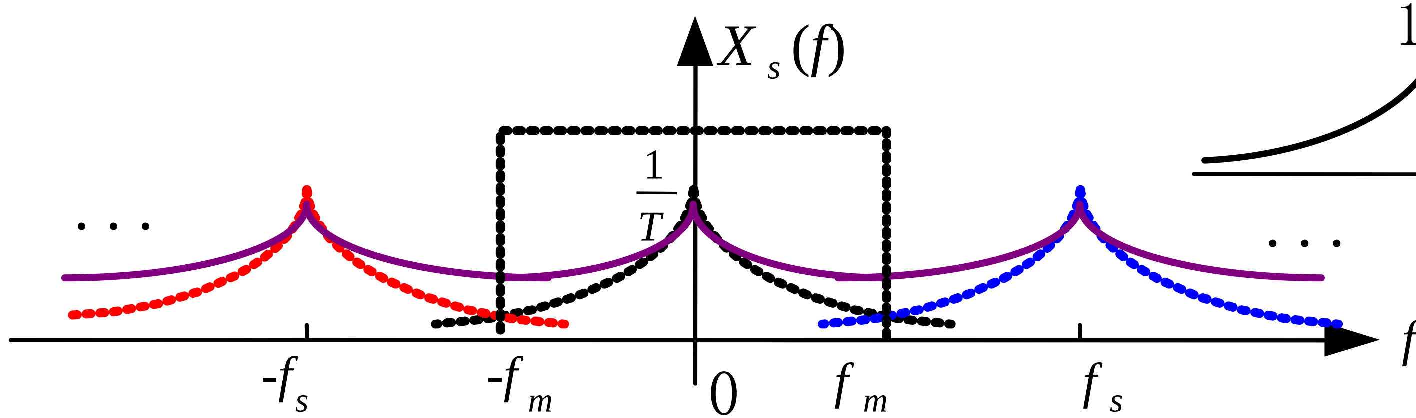
第四节 假频现象

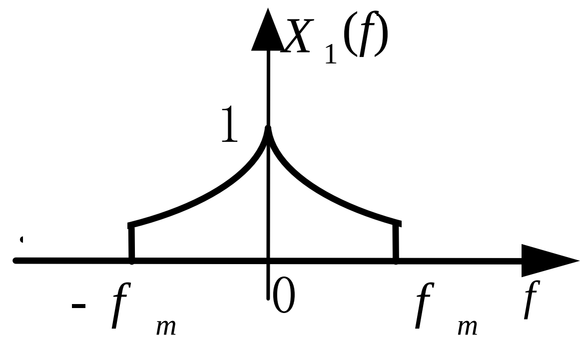
➢许多实际工程信号不满足带限条件

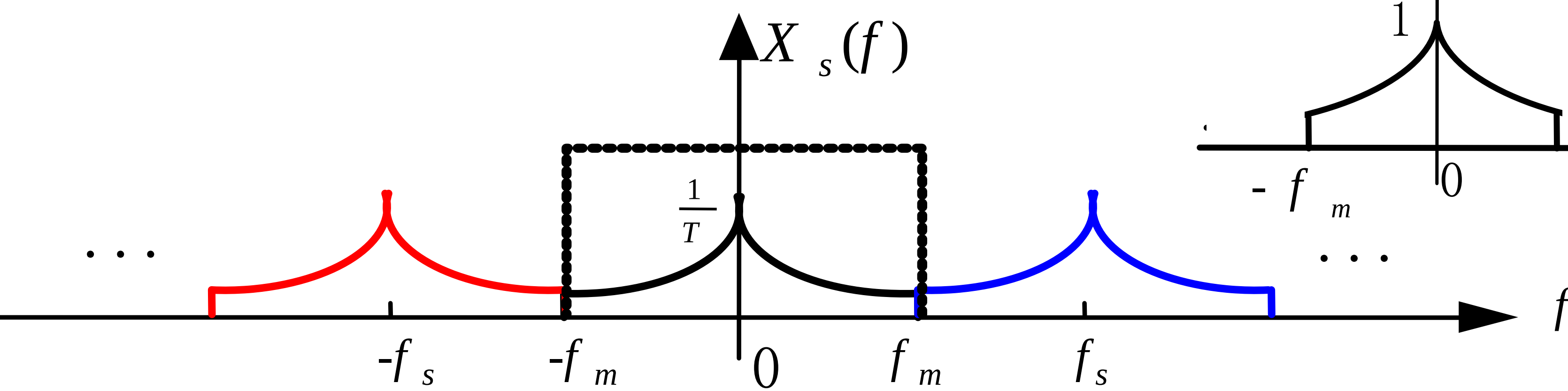


✓ **混叠误差**与**截断误差**比较









第四节 假频现象

不同抽样频率的语音信号效果比较

抽样频率f_s=44,100 Hz

抽样频率f_s=5,512 Hz

抽样频率f_s=5,512 Hz

抽样前对信号进行了抗混叠滤波

（抗混叠滤波器的最高频率一般为抽样频率的一半）

第四节 假频现象

在连续信号的离散信号过程中，应该怎样发现假频?

1、使用小的采样间隔Δ_1可以有效防止假频现象，但这样做是以增加计算量为代价的。

2、然后适当增大采样间隔（由Δ_1变成Δ_2），

(a) 如果这两组离散信号的频谱没有差别（以不影响分析结果为标准），可以再适当加大采样间隔（由Δ_2变成$\Delta_3>\Delta_2$）；

(b) 否则就缩小采样间隔（由Δ_2变成$\Delta_3<\Delta_2$）。

3、重复上述过程，直到找到一个合适的数值较大的采样间隔。

小 结

1、抽样定理。

2、区分采样频率和折叠频率，
理解折叠频率的重要性。

3、解释‘假频现象’及‘什么是假频’