中国石油大学
CHINA UNIVERSITY OF PETROLEUM

数字信号分析与处理

Digital Signal Analysis & Processing（D S P）

厚积薄发　开物成务

数字信号分析与处理

Digital Signal Analysis & Processing

第三章 褶积和线性时不变系统

第三章 褶积和线性时不变系统

- 第一节 褶积
- 第二节 线性时不变系统
- 第三节 离散信号褶积

第一节 褶积

一、褶积的定义

$$x(t)*y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)y(t-\tau)d\tau \quad (-\infty<t<+\infty)$$

称其为信号$x(t)$与$y(t)$的**线性褶积**(Linear Convolution),简称**褶积**或**卷积**。

而且有

$$x(t)*\delta(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau=x(t)$$

➢ 任何连续信号等于其与单位脉冲信号的褶积，称此性质为**连续信号关于线性褶积的脉冲不变性**，简称线性褶积的脉冲不变性。

1、褶积表达式具有线性和时不变性质：

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

证明：1）设输入信号$x_1(t)$和$x_2(t)$，相应的输出信号分别为$y_1(t)$和$y_2(t)$，且有$y_1(t)=x_1(t)*h(t)$，$y_2(t)=x_2(t)*h(t)$

当输入信号为$x_3(t)=ax_1(t)+bx_2(t)$时，输出信号为

$$y_3(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x_3(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}[ax_1(\tau)+bx_2(\tau)]h(t-\tau)d\tau$$

$$y_3(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} a x_1(\tau) h(t-\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} b x_2(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

$$= a x_1(t) * h(t) + b x_2(t) * h(t) = a y_1(t) + b y_2(t)$$

则满足线性性质。

2）当输入信号为$x_4(t)=x(t-t_0)$时，则输出信号为

$$y_4(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_4(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x_4(t-\tau) h(\tau) d\tau$$

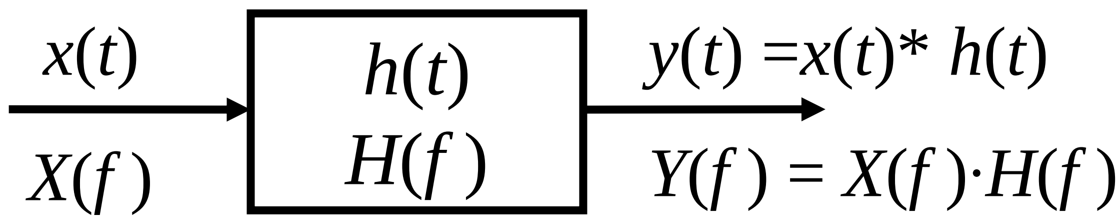
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t_0-\tau) h(\tau) d\tau = y(t-t_0)$$

则满足时不变性质。

线性时不变系统的褶积表达式：

时间域：

频率域：

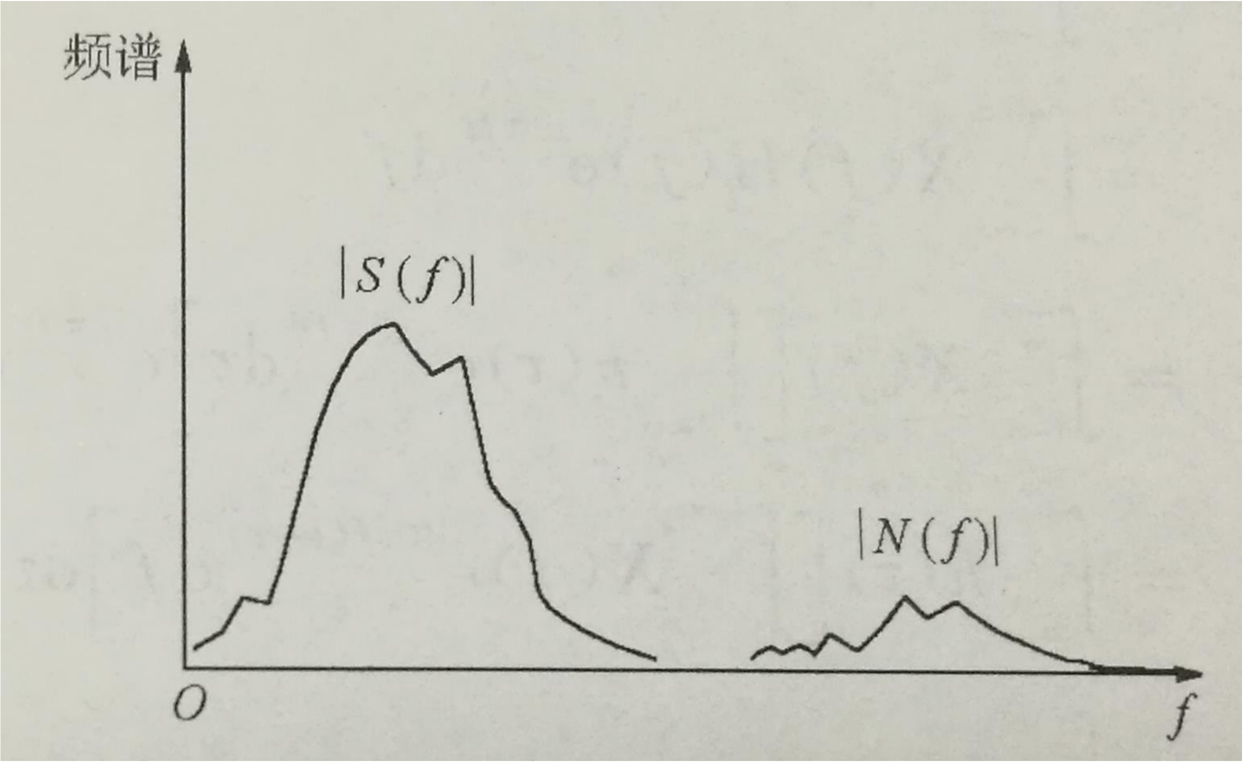


$$h(t) = \delta(t) * h(t)$$

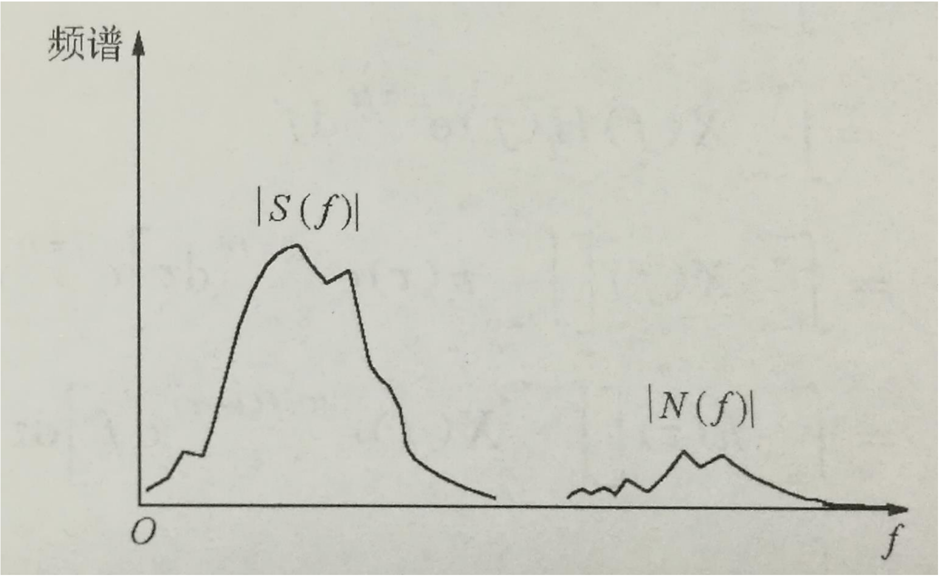
2、连续信号的滤波和褶积

信号通常是由有效信号与噪声构成。

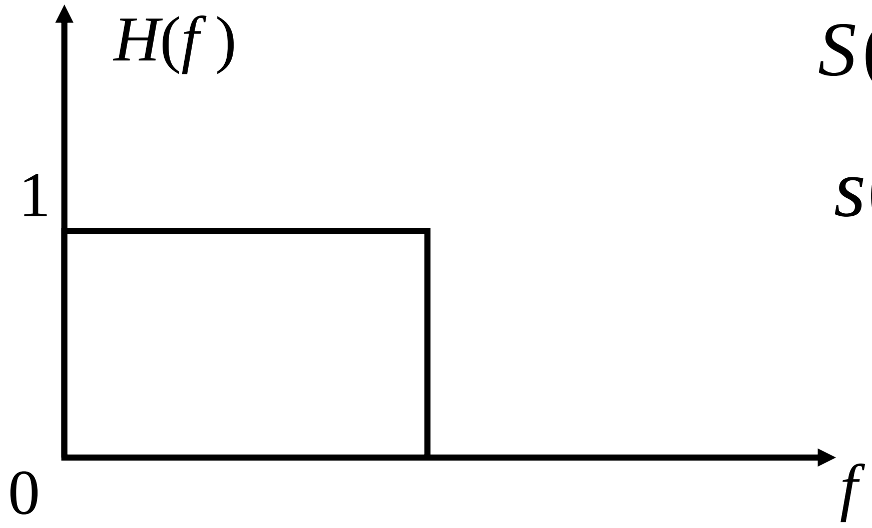
$$x(t) = s(t) + n(t)$$



第一节 褶积



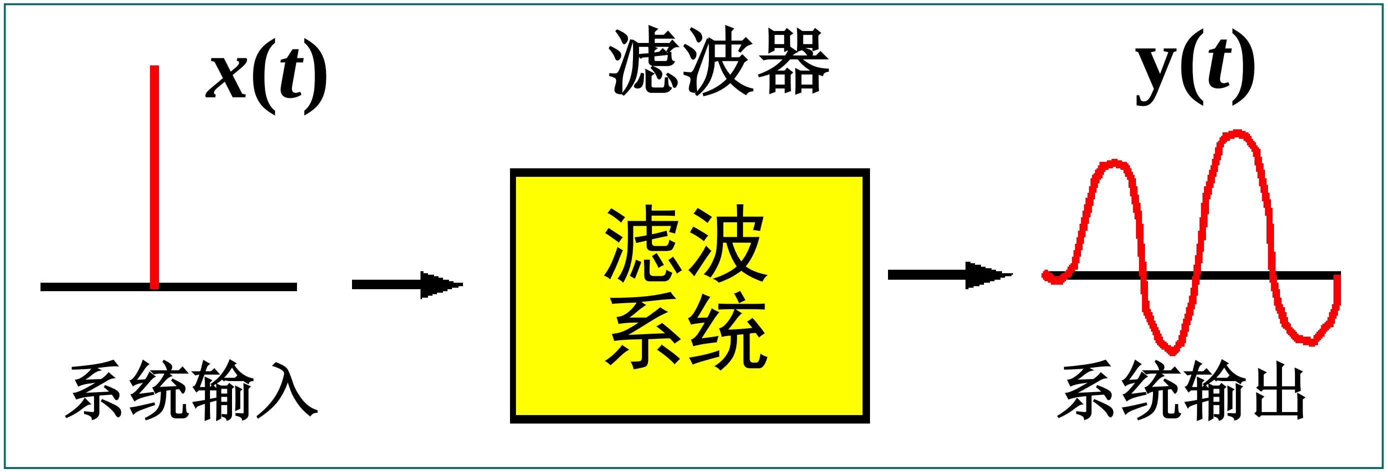
滤波



$$S(f) = X(f) \cdot H(f)$$

$$s(t) = x(t) * h(t)$$

2、连续信号的滤波和褶积



输入信号、输出信号及滤波器系统特征

$$y(t)=x(t)*h(t) \qquad Y(f)=X(f)\cdot H(f)$$

通常称$h(t)$为*滤波因子*（或滤波器时间函数，或脉冲响应函数）；$H(f)$为*滤波器频谱*（或频率响应函数）。

二、褶积的计算

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$x(t) \Rightarrow x(\tau), h(t) \Rightarrow h(\tau)$

$t > 0$时，$h(t-\tau)$是$h(-\tau)$在时间轴上右移t

$t < 0$时，$h(t-\tau)$是$h(-\tau)$在时间轴上左移t

在每一个t值，将$x(\tau)$和$h(t-\tau)$相乘后积分

归纳起来，**褶积的计算过程**有五步：

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

1、换元： $t\rightarrow\boldsymbol{\tau}$

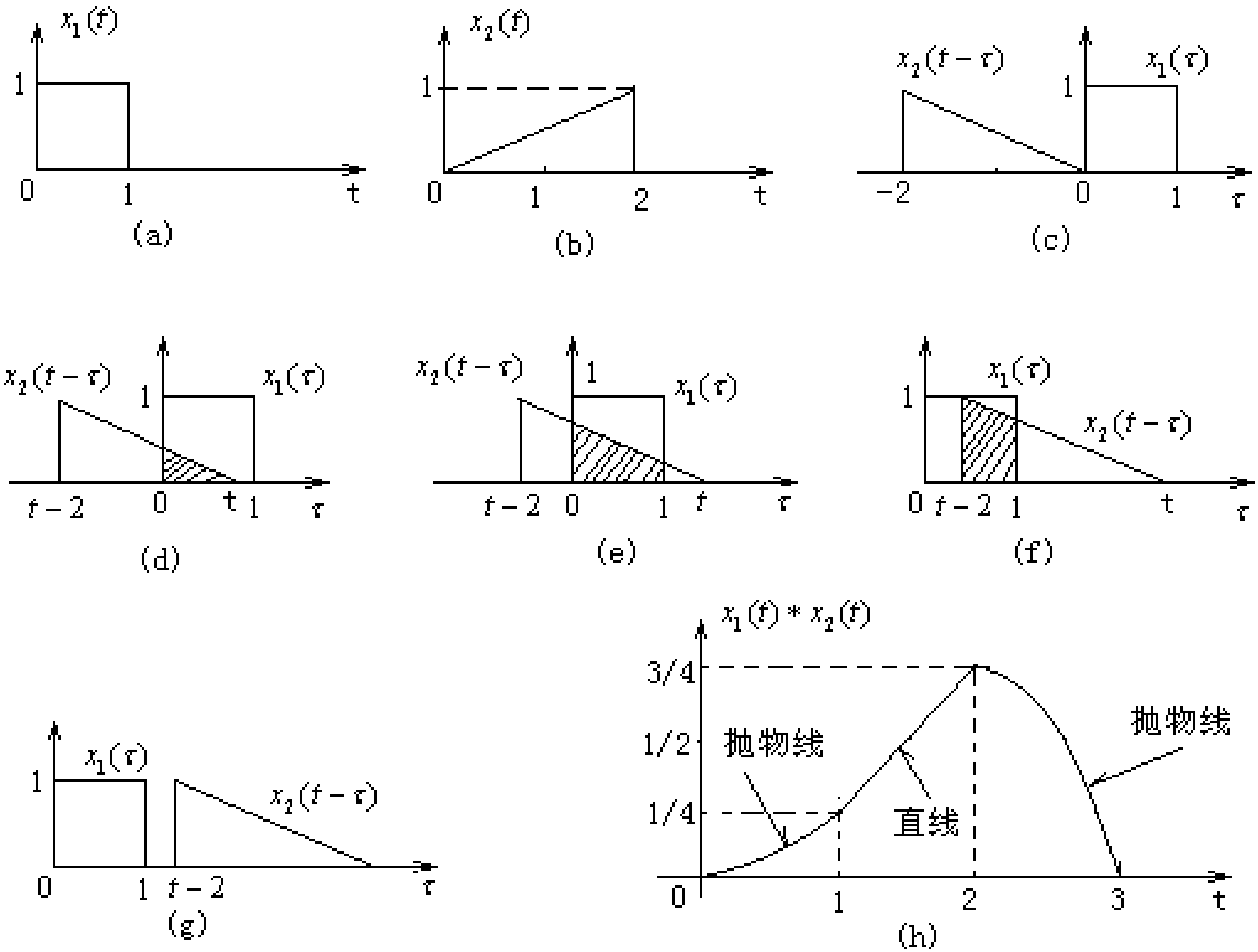
2、反转： $h(\boldsymbol{\tau})\rightarrow h(-\boldsymbol{\tau})$

3、时移： $h(t-\boldsymbol{\tau})$

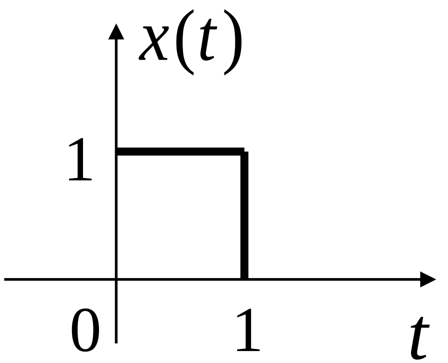
4、相乘： $x(\boldsymbol{\tau})h(t-\boldsymbol{\tau})$

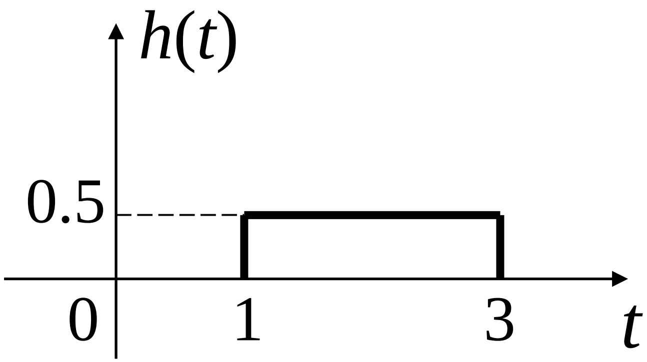
5、积分

第一节 褶积



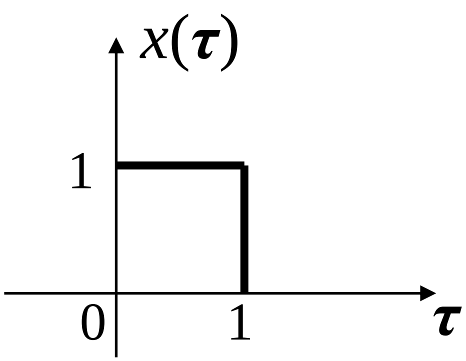
例：已知$x(t)$和$h(t)$波形如图，求$y(t)=x(t)*h(t)$

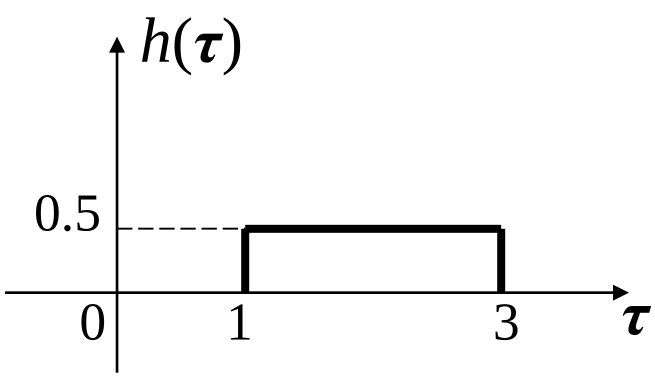




解：

1）换元： $t \rightarrow \tau$

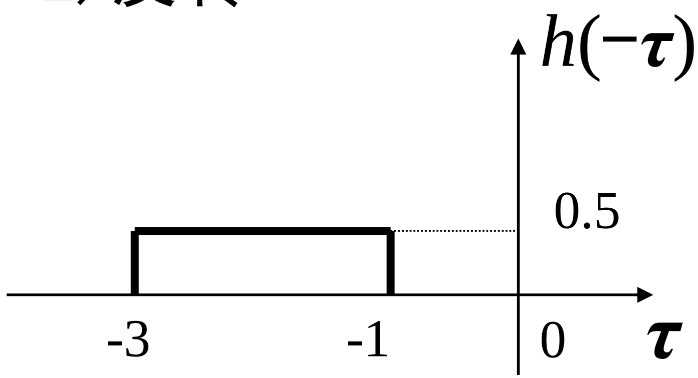




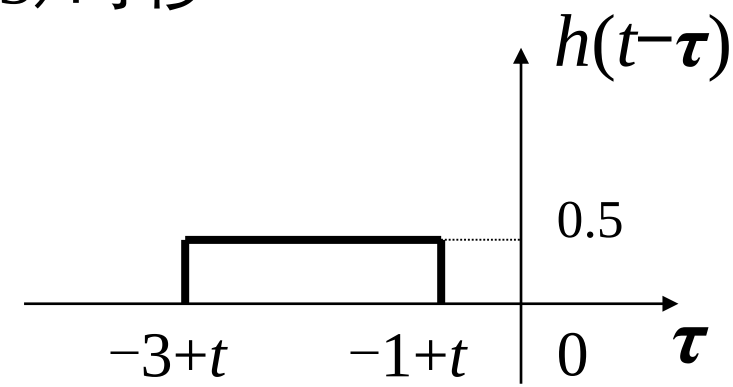
第一节 卷积

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

2) 反转

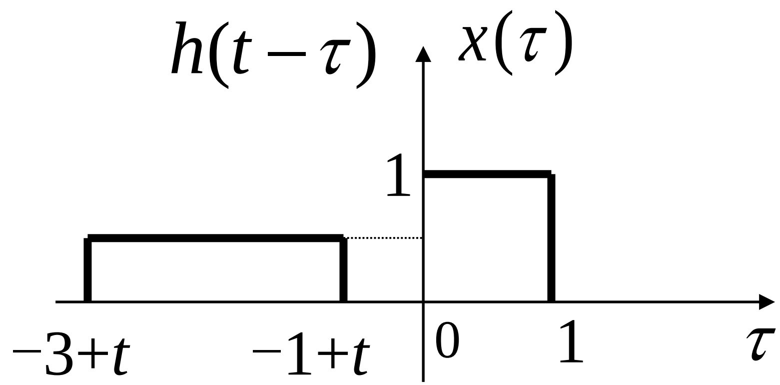


3) 时移



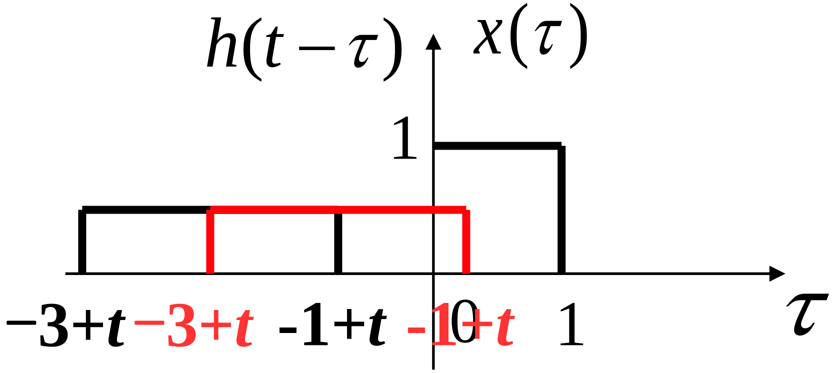
(1)当$-1+t<0$， 即$t<1$时

$y(t)=0$



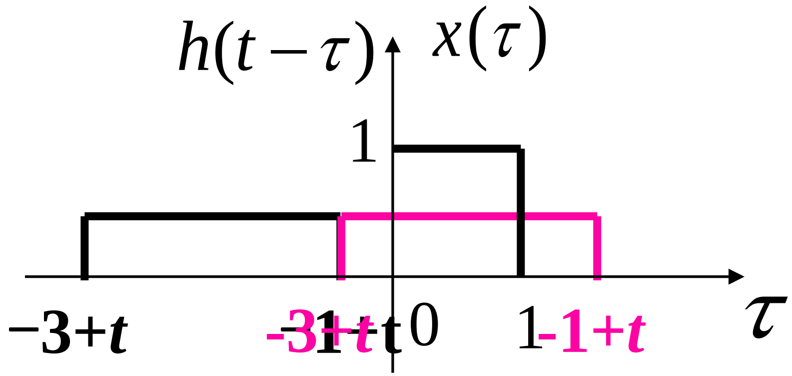
(2) 当$0 \le -1+t<1$，即$1 \le t<2$时

$$y(t)=\int_{0}^{-1+t} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$
$$=\int_{0}^{-1+t} 1\cdot 0.5 d\tau=0.5(t-1)$$



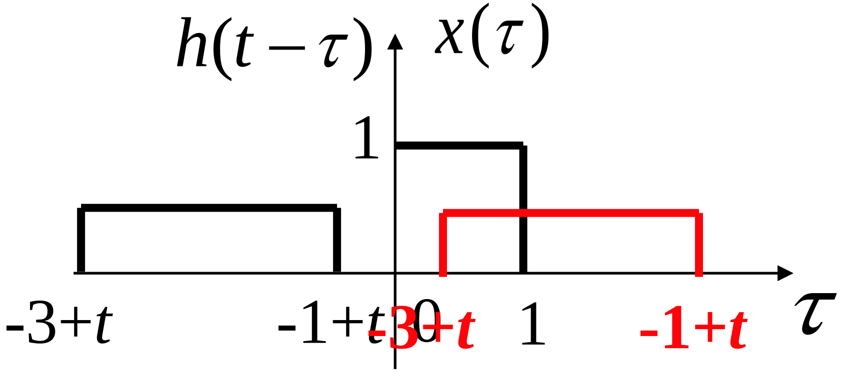
(3) 当$-1+t \ge 1$且$-3+t<0$，即$2 \le t<3$时

$$y(t)=\int_{0}^{1} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$
$$=\int_{0}^{1} 1\cdot 0.5 d\tau=0.5$$



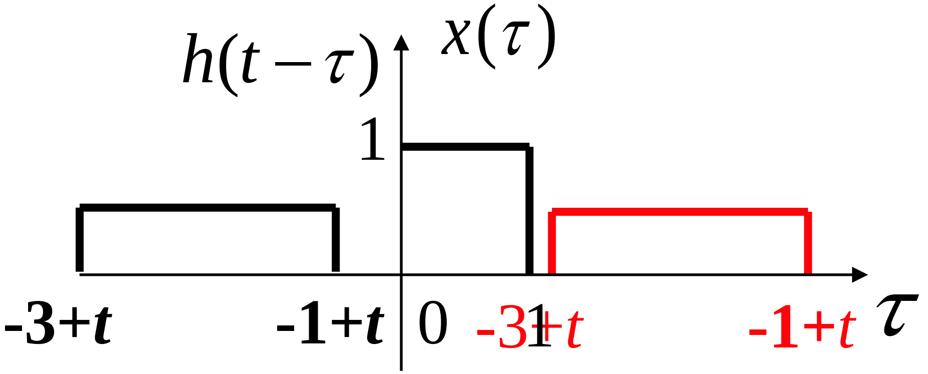
(4) 当$0\le -3+t<1$，即$3\le t<4$时

$$y(t)=\int_{-3+t}^{1} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$
$$=\int_{-3+t}^{1} 1\cdot 0.5 d\tau = 0.5(4-t)$$



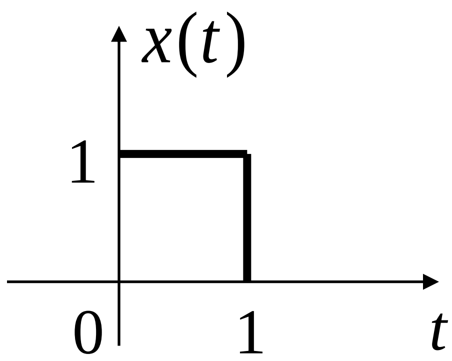
(5) 当$-3+t\ge 1$，即$t\ge 4$时

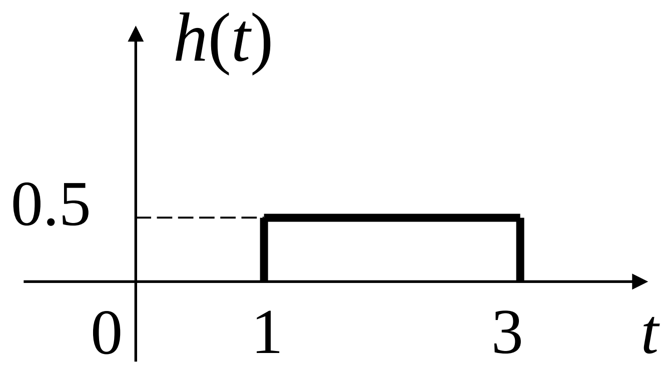
$$y(t)=0$$



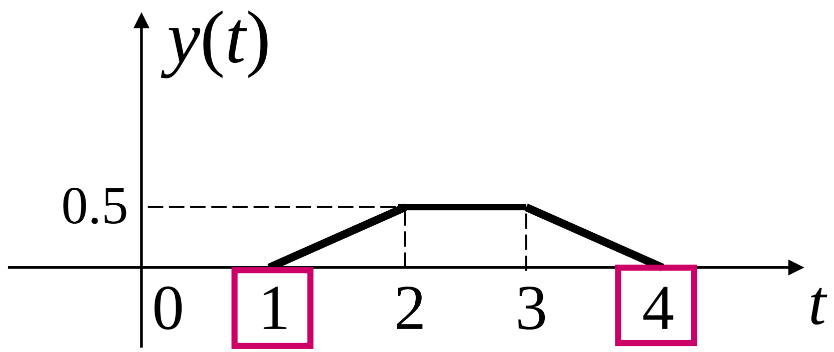
将上述结果整理得：

$$y(t)=\begin{cases}0 & t<1\\ 0.5(t-1) & 1\le t<2\\ 0.5 & 2\le t<3\\ 0.5(4-t) & 3\le t<4\\ 0 & t\ge 4\end{cases}$$





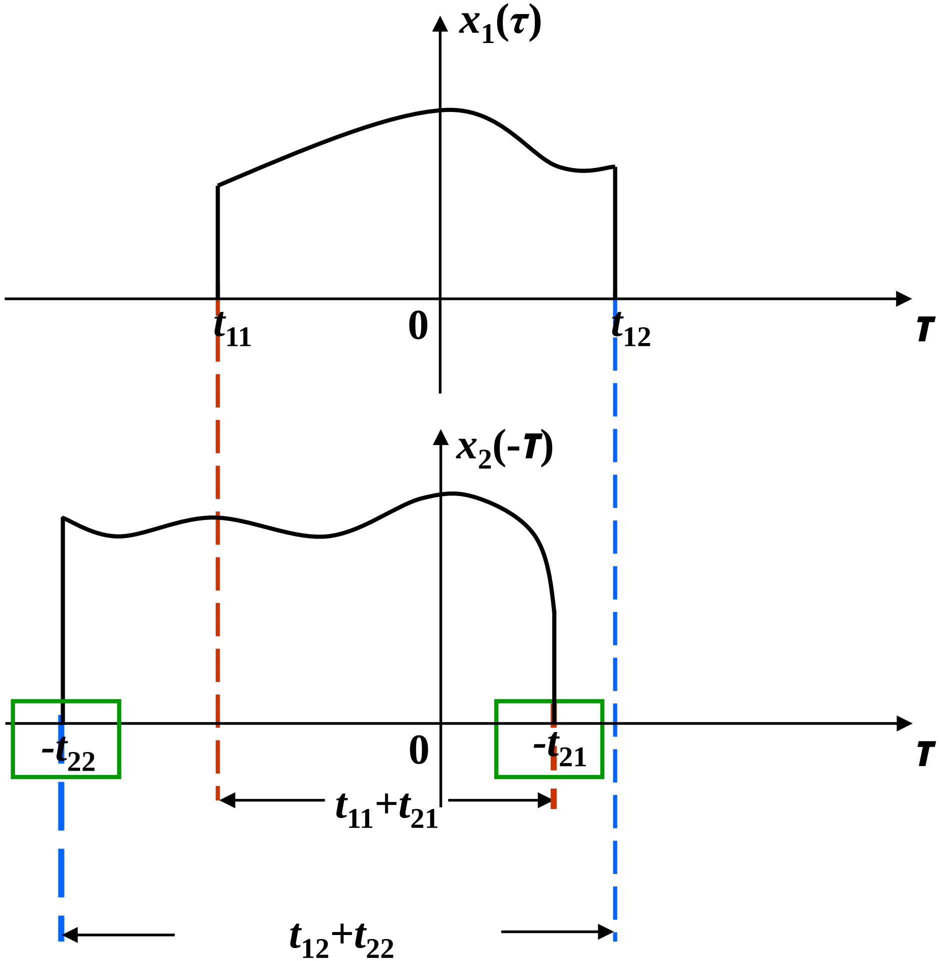
$$y(t) = x(t) * h(t)$$

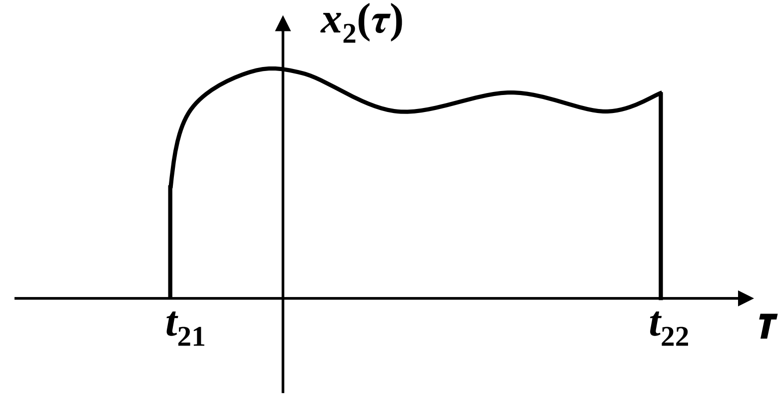


0+1　　1+3

第一节 褶积

$$x(t)=x_1(t)*x_2(t)$$

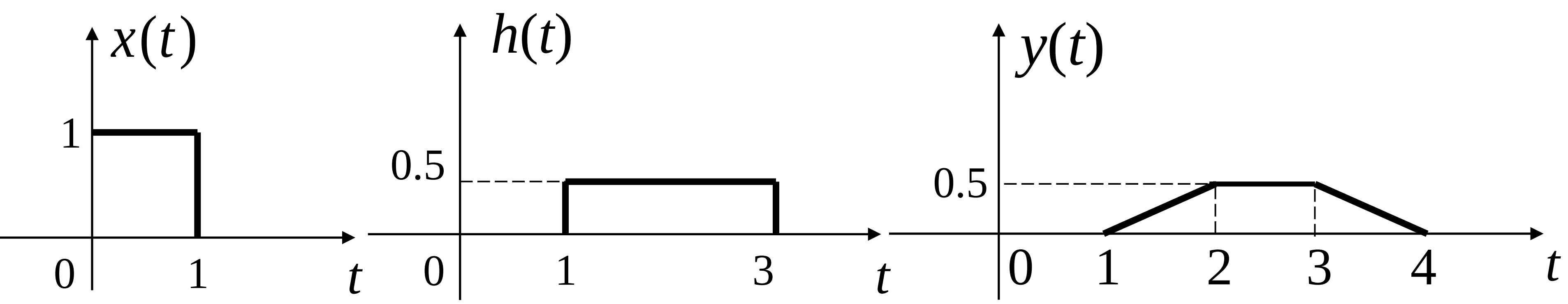




- 反转 $x_2(-\tau)$
- 时移 $x_2(t-\tau)$
  - ✓左移 $t<0$
  - ✓右移 $t>0$

➢ 对于两个有限区间分别为$[t_{11},t_{12}]$和$[t_{21},t_{22}]$的信号进行**褶积运算**，所得**褶积结果的区间**为

$$[t_{11}+t_{21},\ t_{12}+t_{22}]$$



三、 褶积的性质

1、 褶积代数

(1) 交换律 $x(t)*h(t)=h(t)*x(t)$

(2) 分配律

$$x(t)*[h_1(t)+h_2(t)]=x(t)*h_1(t)+x(t)*h_2(t)$$

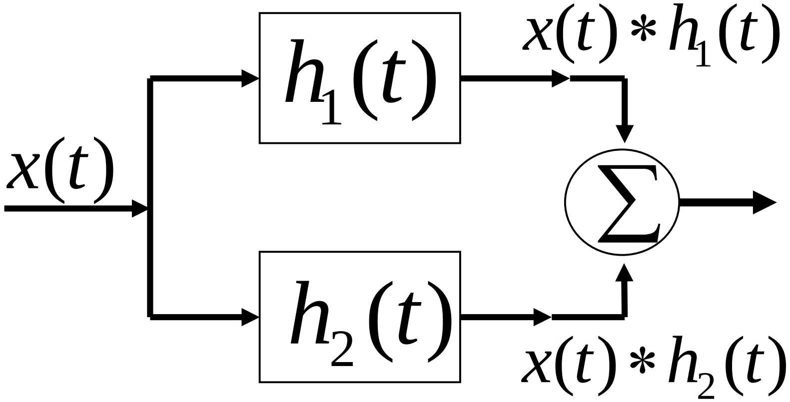
证明：

$$x(t)*[h_1(t)+h_2(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)[h_1(t-\tau)+h_2(t-\tau)]d\tau$$

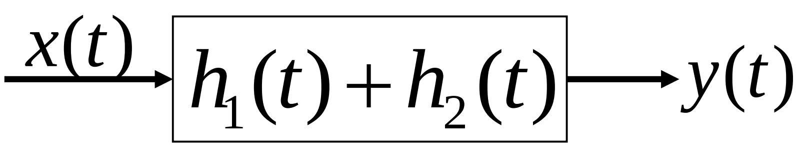
$$=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h_1(t-\tau)d\tau+\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h_2(t-\tau)d\tau$$

$$=x(t)*h_1(t)+x(t)*h_2(t)$$

两个子系统并联



$$y(t) = x(t) * [h_1(t) + h_2(t)]$$



(3) 结合律

$$[x(t)*h_1(t)]*h_2(t)=x(t)*[h_1(t)*h_2(t)]$$

证明： $x(t)*[h_1(t)*h_2(t)]$

$$=x(t)*[\int_{-\infty}^{+\infty}h_1(\tau)h_2(t-\tau)d\tau]=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\lambda)[\int_{-\infty}^{+\infty}h_1(\tau)h_2(t-\lambda-\tau)d\tau]d\lambda$$

对方括号内的积分变量作变量代换 ***u*=*t*−*λ*−*τ***，得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}h_1(\tau)h_2(t-\lambda-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}h_1(t-\lambda-u)h_2(u)du$$

变换积分次序可得

$$x(t)*[h_1(t)*h_2(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}h_2(u)\left[\int_{-\infty}^{+\infty}x(\lambda)h_1(t-u-\lambda)d\lambda\right]du$$

$$=[x(t)*h_1(t)]*h_2(t)$$

第一节 卷积

两个子系统级联

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h_1(t)} \longrightarrow \boxed{h_2(t)} \longrightarrow y(t)=[x(t)*h_1(t)]*h_2(t)$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h_1(t)*h_2(t)} \longrightarrow y(t)$$

2、含有冲激函数的卷积

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = x(t)*\delta(t)$$

证明：$$x(t)*\delta(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}x(t-\tau)\delta(\tau)d\tau$$

$$= x(t-\tau)\Big|_{\tau=0} = x(t)$$

并且有 $$x(t)*\delta(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\delta(\tau-t)d\tau=x(t)$$

3、褶积的时不变性

若 $y(t)=x(t)*h(t)$，则有

$$x(t)*h(t-t_0)=x(t-t_0)*h(t)=y(t-t_0)$$ t_0为实常数

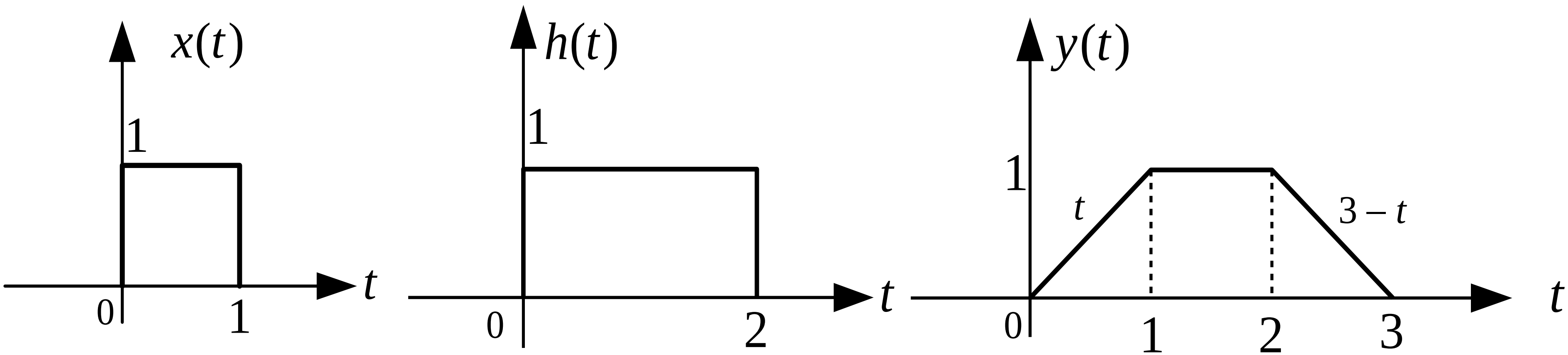
➢**时不变性表明：**如果褶积的信号中有一个信号在时间轴上平移了一定距离，则褶积结果也将在同样的方向上平移同样的一段距离。（**平移特性**）

进而有 $$x(t)*\delta(t-t_1)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\delta(t-t_1-\tau)d\tau=x(t-t_1)$$

推广后，有 $$x(t-t_1)*h(t-t_2)=y(t-t_1-t_2)$$

［例］ 利用**时不变特性**及 $u(t) * u(t) = r(t)$，计算 $y(t) = x(t) * h(t)$。

解:

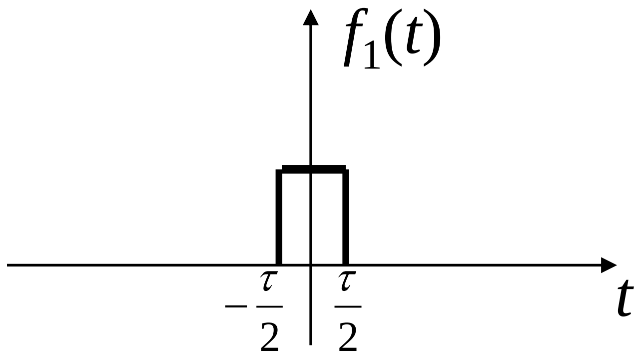


$$y(t) = x(t) * h(t) = [\ u(t) - u(t-1)\ ] * [\ u(t) - u(t-2)\ ]$$

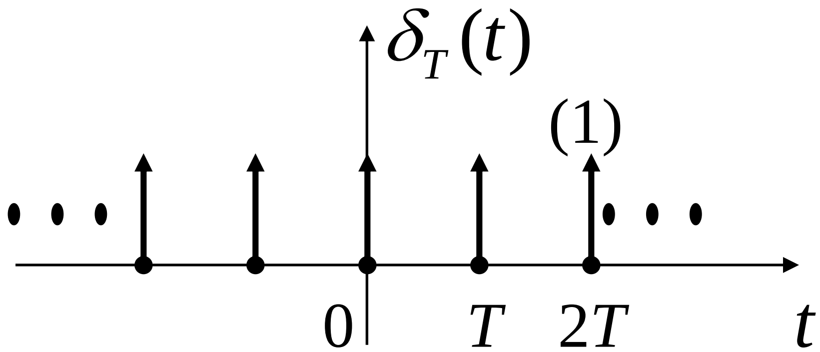
$$= u(t)*u(t) - u(t-1)*u(t) - u(t)*u(t-2) + u(t-1)*u(t-2)$$

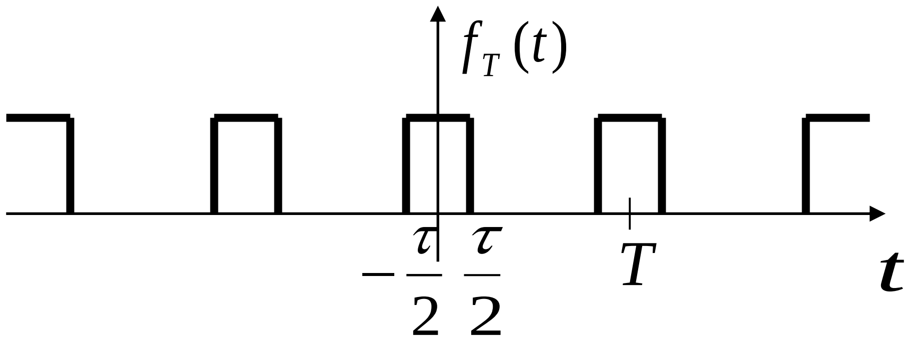
$$= r(t) - r(t-1) - r(t-2) + r(t-3)$$

对于信号的重现，可以通过**褶积运算产生周期信号**。



$*$





$$f_T(t) = f_1(t) * \delta_T(t) = f_1(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [f_1(t) * \delta(t - nT)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_1(t - nT)$$

4、展缩特性

已知 $x_1(t) * x_2(t) = y(t)$

则 $x_1(at) * x_2(at) = \dfrac{1}{|a|} y(at)$

证明:

$$x_1(at) * x_2(at) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(a\tau) \cdot x_2[a(t-\tau)] \mathrm{d}\tau$$

$$\overset{a\tau=\lambda}{=} \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\lambda) \cdot x_2(at-\lambda) \mathrm{d}\lambda = \frac{1}{|a|} y(at)$$

5、褶积的微分性质

$$\frac{d^n}{dt^n}[x(t)*h(t)]=[\frac{d^n}{dt^n}x(t)]*h(t)=x(t)*[\frac{d^n}{dt^n}h(t)]$$

证明：用一阶微分来证明（n阶微分的证明用$d^{(n)}(t)$较方便）

$$\frac{d}{dt}[x(t)*h(t)]=\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\frac{d}{dt}h(t-\tau)d\tau=x(t)*\frac{d}{dt}h(t)$$

根据交换律，用类似的方法可以证明

$$\frac{d}{dt}[x(t)*h(t)]=\frac{d}{dt}x(t)*h(t)$$

- 两个信号褶积后的微分等于一个信号的微分与另一个信号的褶积。

6、褶积的积分性质

$$\int_{-\infty}^{t}[x(\lambda)*h(\lambda)]d\lambda=[\int_{-\infty}^{t}x(\lambda)d\lambda]*h(t)=x(t)*[\int_{-\infty}^{t}h(\lambda)d\lambda]$$

证明：
$$\int_{-\infty}^{t}[x(\lambda)*h(\lambda)]d\lambda=\int_{-\infty}^{t}[\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(\lambda-\tau)d\tau]d\lambda$$

(交换积分次序）
$$=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)[\int_{-\infty}^{t}h(\lambda-\tau)d\lambda]d\tau$$

$$=x(t)*[\int_{-\infty}^{t}h(\lambda)d\lambda]$$

根据交换律，同样可证 明

$$\int_{-\infty}^{t}[x(\lambda)*h(\lambda)]d\lambda=[\int_{-\infty}^{t}x(\lambda)d\lambda]*h(t)$$

➢ 两个信号褶积后的积分等于对其中一个信号的积分与另一个信号的褶积。

7、褶积的微积分性质

$$y(t)=x(t)*h(t)$$
$$=\frac{dx(t)}{dt}*[\int_{-\infty}^{t}h(\lambda)d\lambda]=[\int_{-\infty}^{t}x(\lambda)d\lambda]*\frac{dh(t)}{dt}$$

上式可以写成如下形式

$$y(t)=x^{(1)}(t)*h^{(-1)}(t)=x^{(-1)}(t)*h^{(1)}(t)$$

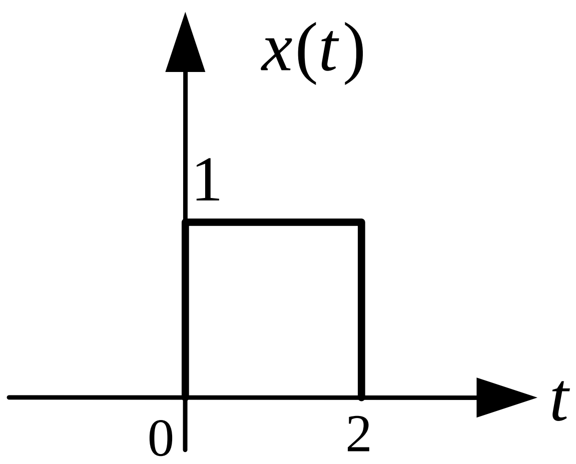
进一步推广，其一般形式为

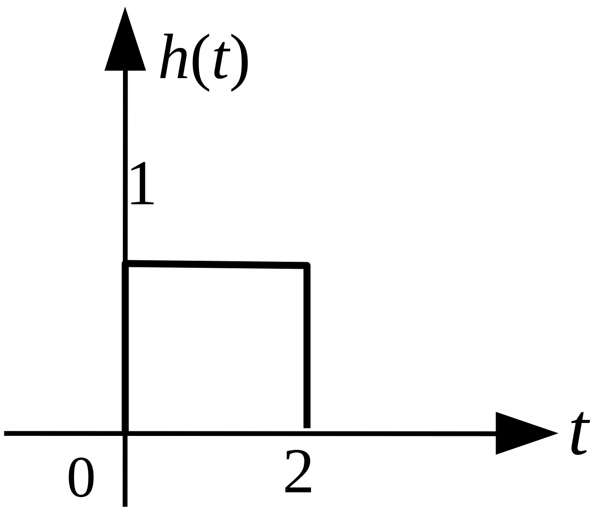
$$y^{(i+j)}(t)=x^{(i)}(t)*h^{(j)}(t)$$

式中，i，j或$(i+j)$为正整数时,表示导数的阶数；为负整数时,表示重积分的次数。

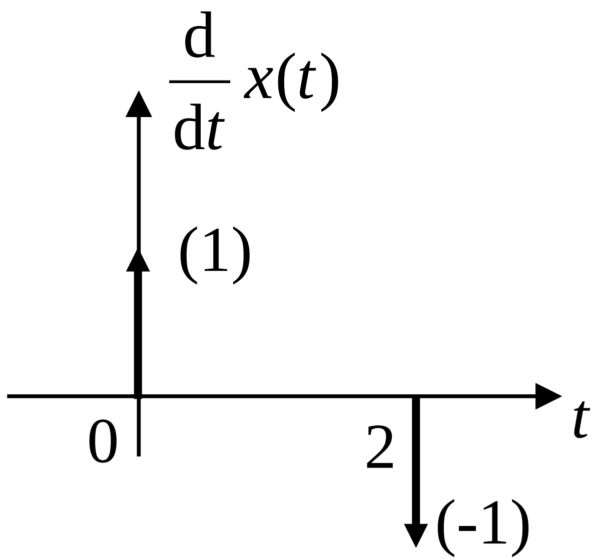
如 $y(t)=x(t)*h(t)=x^{(2)}(t)*h^{(-2)}(t)$ 也称为等效性质

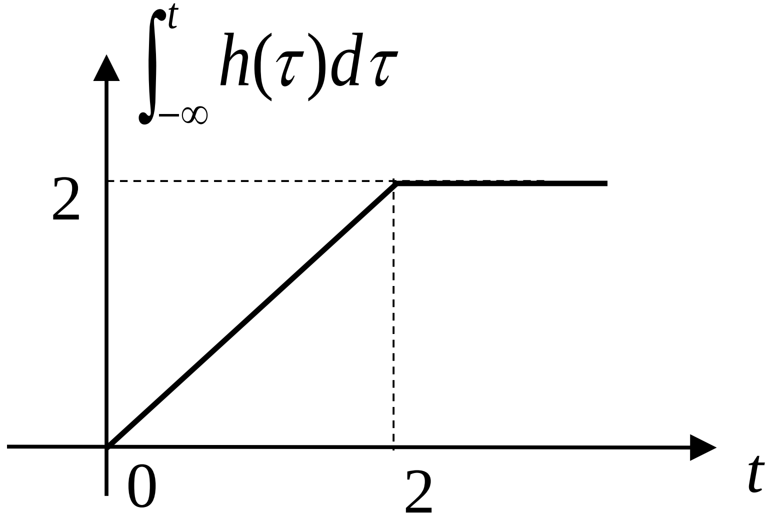
例：计算 $y(t) = x(t) * h(t)$





解： $y(t)=x(t)*h(t)=\dfrac{d}{dt}x(t)*\int_{-\infty}^{t}h_1(\tau)d\tau$





$$y(t)=x(t)*h(t)=\frac{d}{dt}x(t)*\int_{-\infty}^{t}h_1(\tau)d\tau$$

$$=[\delta(t)-\delta(t-2)]*[tu(t)-(t-2)u(t-2)]$$

$$=tu(t)-2(t-2)u(t-2)+(t-4)u(t-4)$$

8、褶积定理

若 $x(t) \overset{\mathscr{F}}{\leftrightarrow} X(f)$, $g(t) \overset{\mathscr{F}}{\leftrightarrow} G(f)$

则 $y(t) = x(t) * g(t) \overset{\mathscr{F}}{\leftrightarrow} Y(f) = X(f)G(f)$

➢**这表明：**两个连续信号的褶积，其频谱就是两个对应信号频谱的乘积；反过来讲，两个频谱乘积，其信号就是相应的两个连续信号的褶积。

而且有：

$$x(t)g(t) \xleftrightarrow{\ \mathscr{F}\ } X(f) * G(f)$$

第四章 褶积和线性时不变系统

- 第一节 褶积
- **第二节 线性时不变系统**
- 第三节 离散信号褶积

第二节 线性时不变系统

一、 离散时间系统

在信号处理中，系统**通常是指信号的软、硬件处理全过程**，包含输入、信号处理、输出等。

从数学角度看，**系统**可以看作是一种信号到另一种信号的变换。当输入和输出为离散时间信号时，系统称为离散时间系统。作用于输入信号的系统可以用一个算子***T***来表示，即将系统处理输入信号的全过程可表示为

$$x(n) \longrightarrow \boxed{T[\ ]} \longrightarrow y(n)$$

则有

$$y(n)=T[x(n)]$$

二、线性时不变系统

1、对于任意两个输入信号 $x_1(n)$、$x_2(n)$ 及常数 α 和 β，若

$$T[x_1(n)] = y_1(n)$$

$$T[x_2(n)] = y_2(n)$$

系统是线性，则有

$$T[\alpha x_1(n) + \beta x_2(n)] = \alpha y_1(n) + \beta y_2(n)$$

2、如果系统的输入在时间上有一个延迟，系统的输出也有同样的一个延迟，则称该系统是时不变的。

对于时不变系统 $y(n) = T[x(n)]$

则有 $$y(n-m) = T[x(n-m)]$$

三、LTI系统的因果性与稳定性

1）线性时不变系统是因果的充要条件为

$$h(n)=h(n)u(n)$$

线性时不变因果系统也称为物理可实现系统。

2）线性时不变系统是稳定的充要条件为

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|h(n)\right|<\infty$$

稳定的因果系统：既满足稳定性又满足因果性的系统。这种系统的单位脉冲响应既是单边的，又是绝对可积的，即

$$\begin{cases} h(n)=\begin{cases} h(n), & n\ge 0 \\ 0, & n<0 \end{cases} \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|<\infty \end{cases}$$

这种稳定因果系统既是物理可实现的又是稳定工作的，这种系统是最主要的系统。

第四章 褶积和线性时不变系统

- 第一节 褶积
- 第二节 线性时不变系统
- **第三节 离散信号褶积**

第三节 离散信号的褶积

若已知LTI系统的时间响应$h(n)$，对于任意的输入$x(n)$，利用线性时不变特性可求得其输出$y(n)$为

$$x(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(n)$$

$$\begin{aligned}
y(n) &= T[x(n)] = T[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m)] \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)T[\delta(n-m)] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) \\
&= x(n) * h(n)
\end{aligned}$$

➢此式为$x(n)$与$h(n)$的**线性褶积**，它说明**线性时不变系统的响应**等于输入序列与单位脉冲响应序列的褶积。

第三节 离散信号的卷积

一、卷积和的定义

设$x_1(k)$和$x_2(k)$是两个离散时间序列，$k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$，定义一个新的序列为

$$x(k) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x_1(i) x_2(k-i)$$

则$x(k)$是序列$x_1(k)$和$x_2(k)$的**卷积和运算**，简称卷积和(convolution sum)，**通常记作**

$$x(k) = x_1(k) * x_2(k) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x_1(i) x_2(k-i) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x_1(k-i) x_2(i)$$

第三节 离散信号的褶积

由于积分运算与求和运算在本质上是一致的，因此离散时间序列的褶积和与连续时间信号的褶积运算并无实质上的差别。

1) 如果$x_1(k)$为因果序列，由于k<0时，$x_1(k)$=0，则

$$x(k) = x_1(k) * x_2(k) = \sum_{i=0}^{\infty} x_1(i) x_2(k-i)$$

2) 如果$x_1(k)$和$x_2(k)$均为因果序列，则

$$x(k) = x_1(k) * x_2(k) = \sum_{i=0}^{k} x_1(i) x_2(k-i)$$

第三节 离散信号的褶积

二、 离散褶积的性质

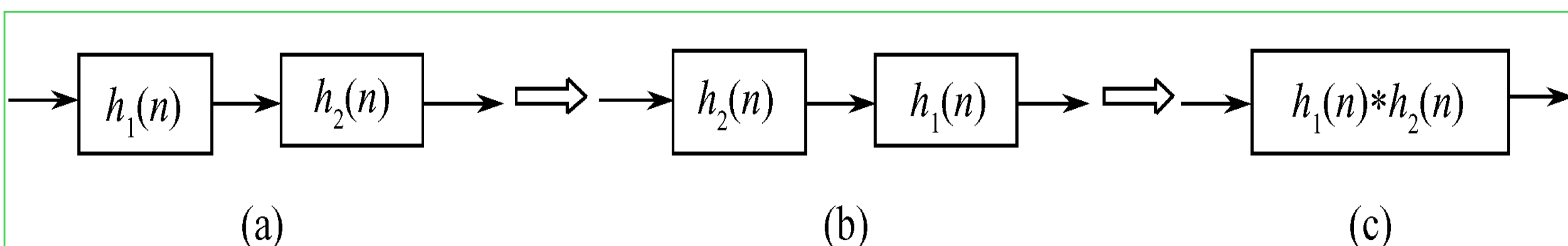
1、交换性

$$y(n)=x(n)*h(n)=h(n)*x(n)$$

2、结合性

$$\begin{aligned}y(n)&=\left[x(n)*h_1(n)\right]*h_2(n)\\&=\left[x(n)*h_2(n)\right]*h_1(n)=x(n)*\left[h_1(n)*h_2(n)\right]\\&=x(n)*h(n)\end{aligned}$$

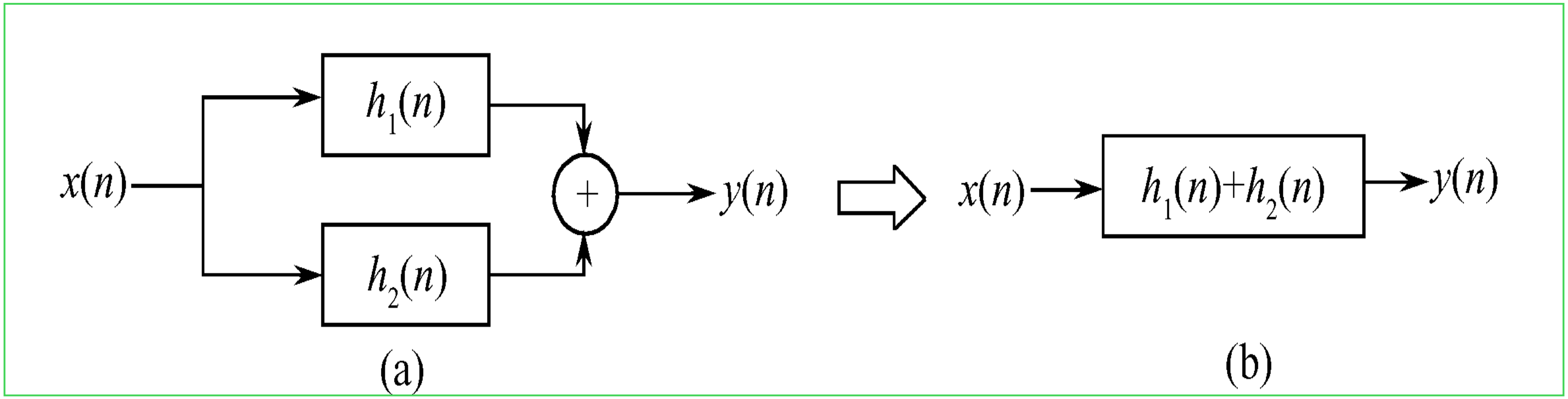
此性质表示两个级联系统$h_1(n)$和$h_2(n)$。



3、分配性

$$y(n)=x(n)*\left[h_1(n)+h_2(n)\right]$$
$$=x(n)*h_1(n)+x(n)*h_2(n)$$

此性质表示两个并联系统$h_1(n)$和$h_2(n)$。



4、比例性

$$[ax_1(k)]*x_2(k)=a[x_1(k)*x_2(k)]$$

其中，a为常数。

5、任一序列$x(k)$与单位冲激序列$\delta(k)$的褶积和等于序列本身$x(k)$，即

$$x(k)*\delta(k)=x(k)$$

证明：

$$x(k)*\delta(k)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(m)x(k-m)=x(k)$$

6、时不变性

若$y(n)= x(n)* h(n)$，则有

$$x(n)*h(n-k)=x(n-k)*h(n)$$
$$=y(n-k)$$

$$x(n-k_1)*h(n-k_2)=x(n-k_2)*h(n-k_1)$$
$$=y(n-k_1-k_2)$$

第三节 离散信号的褶积

三、离散褶积的运算 $y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)h(n-m)$

褶积的计算过程包括以下四个步骤：

反转、移位、相乘、求和

1) 反转：**先将**$x(n)$**和**$h(n)$**的变量** n **换成** m，**变成**$x(m)$**和**$h(m)$，**再将**$h(m)$**以** m=0**为轴反转成**$h(-m)$。

2) 移位：**将**$h(-m)$**移位**n，**变成** $h(n-m)$；**当**n**为正数，右移**n**位，**n**为负数，左移**n**位。**

3) 相乘：**将** $h(n-m)$**与**$x(m)$**在相同的对应点相乘。**

4) 求和：**将所有对应点乘积累加起来，就得到**n**时刻的褶积值，对所有的**n**重复以上步骤，就可得到所有的褶积值**$y(n)$。

例 4 设

$$x(n)=\begin{cases}\dfrac{n}{2} & 1\le n\le 3\\ 0 & \text{其他}n\end{cases}$$

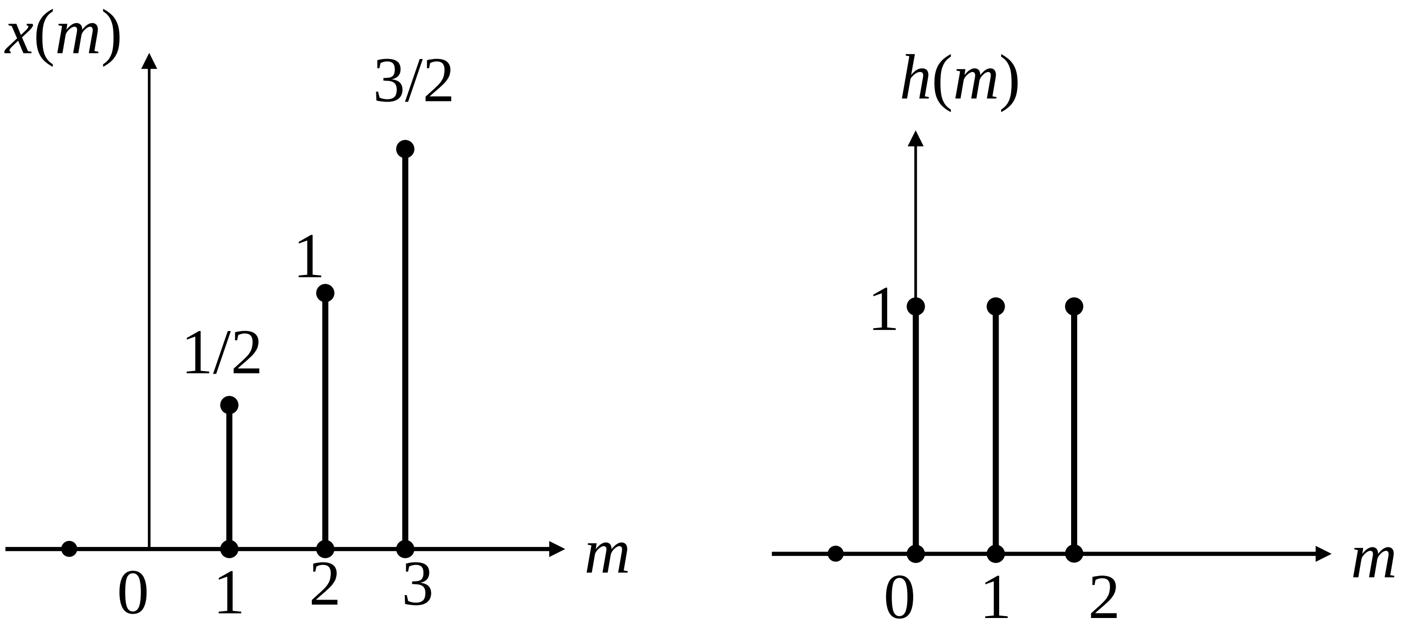
$$h(n)=\begin{cases}1 & 0\le n\le 2\\ 0 & \text{其他}n\end{cases}$$

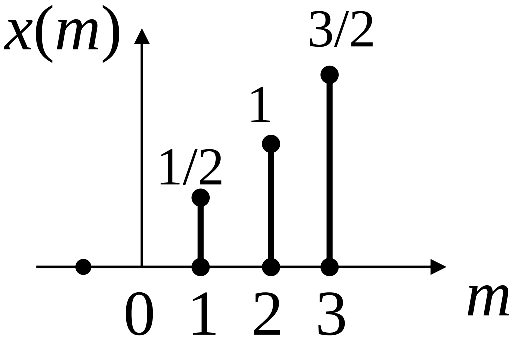
求：$y(n)=x(n)*h(n)$

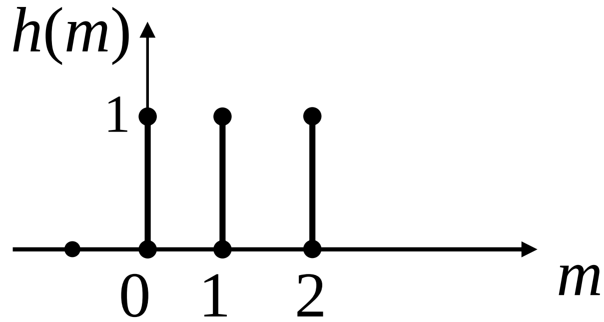
解：

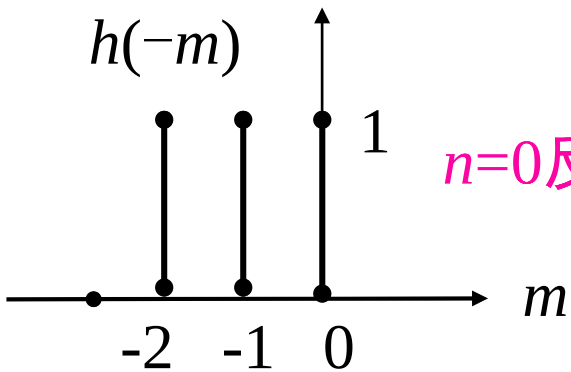
$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=1}^{3} x(m)h(n-m)$$

先给出$x(m)$和$h(m)$的图形



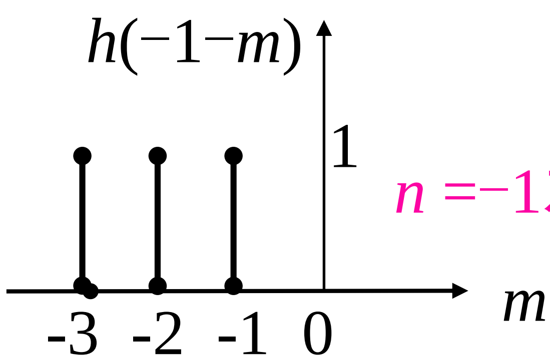






n=0反转

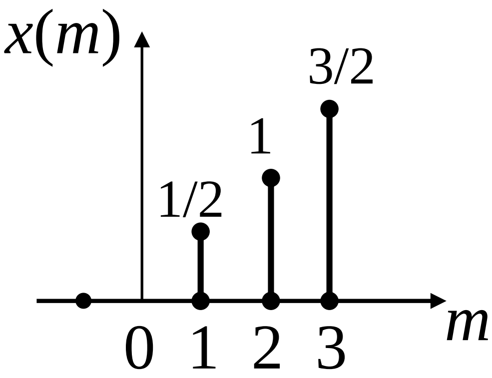
反转： 以m=0为对称轴，折叠$h(m)$ 得到$h(-m)$

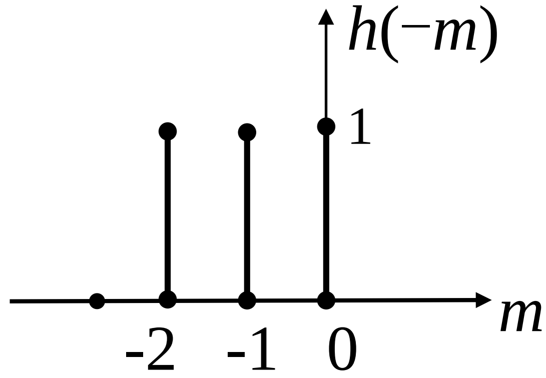


n =−1左移

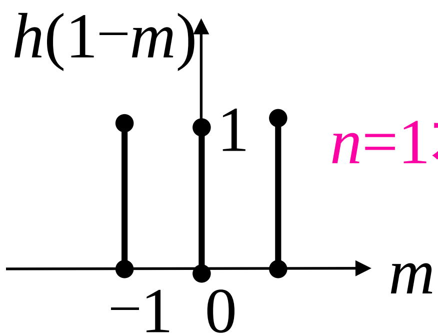
移位，先左移n<0

可见， 当$n\leq 0$时，$x(m)$与$h(n-m)$无交叠，相乘处处为零，即$y(n)=0$，$n<1$。



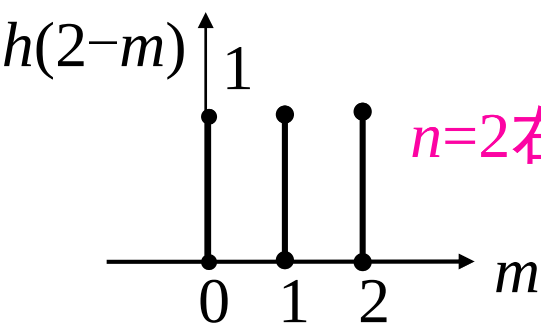


$h(-m)$再向右移位，$n>0$



$n=1$右移

可见，当$1 \le n \le 2$时，$x(m)$与$h(n-m)$ 有交叠，从$m=1$到$m=n$，即

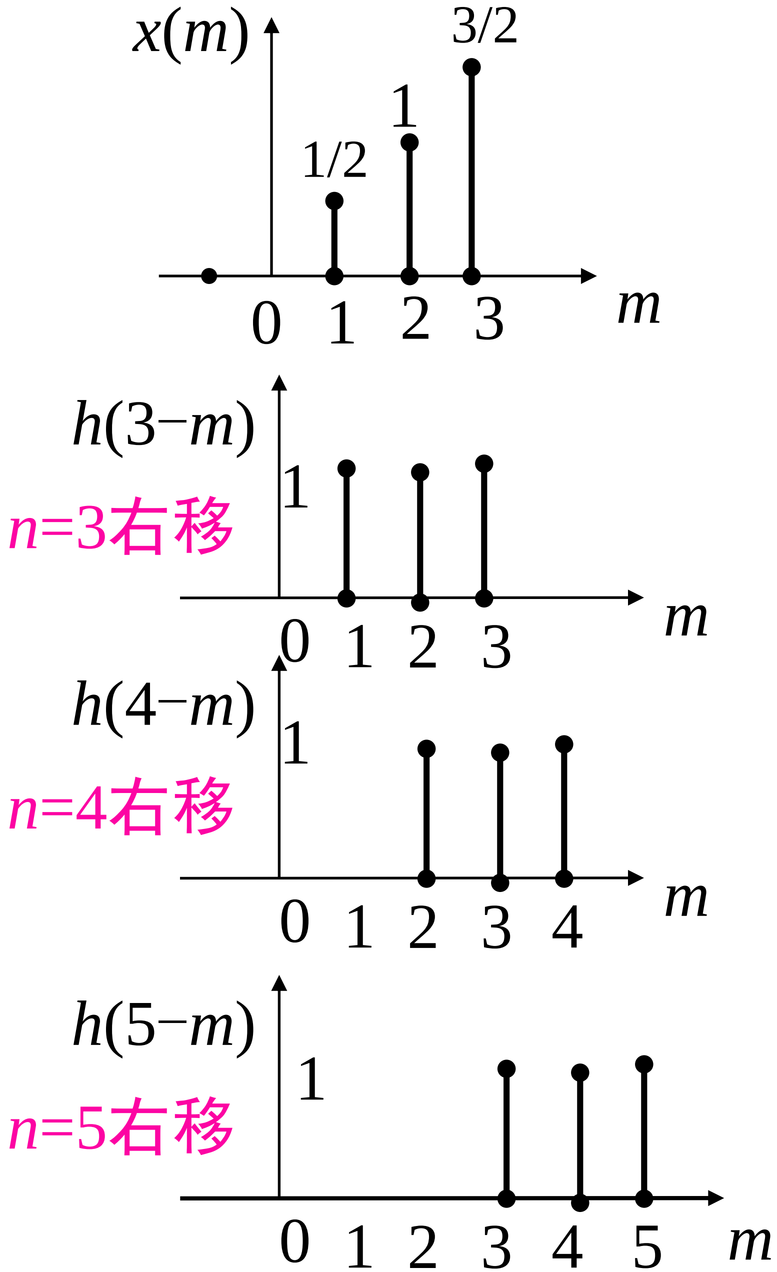


$n=2$右移

得

$$y(1)=\frac{1}{2}\times 1+0\times 1=\frac{1}{2}$$

$$y(2)=\frac{1}{2}\times 1+1\times 1=\frac{3}{2}$$



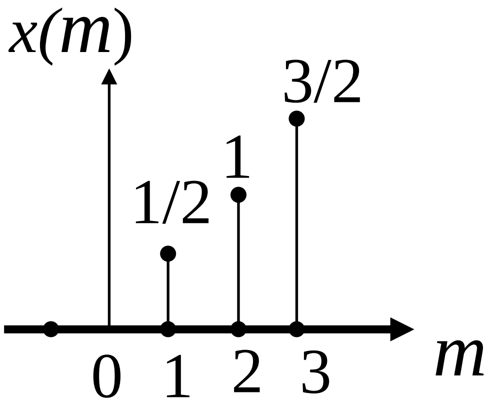
当$3 \le n \le 5$时，$x(m)$与$h(n-m)$有交叠，上限为3，下限为$n-2$，即

得

$$y(3)=\frac{1}{2}\times1+1\times1+\frac{3}{2}\times1=3$$

$$y(4)=\frac{1}{2}\times0+1\times1+\frac{3}{2}\times1+0\times1=\frac{5}{2}$$

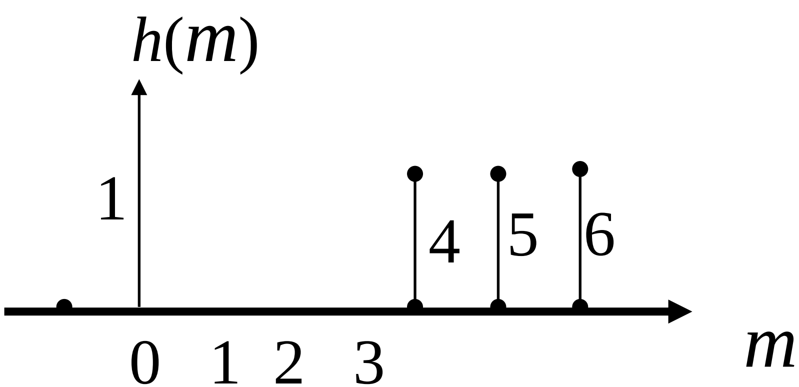
$$y(5)=\frac{3}{2}\times1=\frac{3}{2}$$



当$n>5$时，$x(m)$与$h(n-m)$无交叠，相乘处处为零，

即 $y(n)=0$，$n>5$

$n>5$右移



综上可得y(n)如下

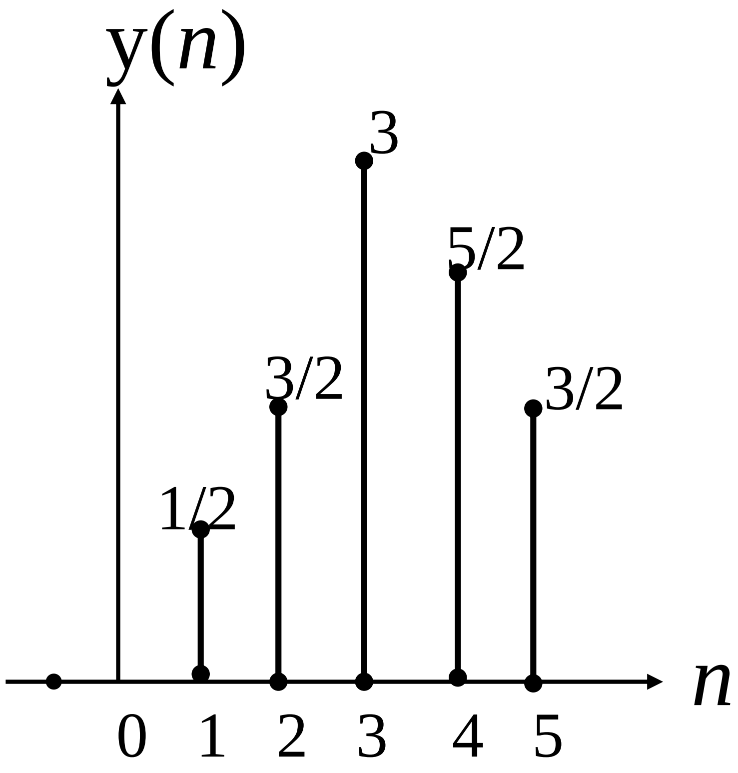
$$y(1)=\frac{1}{2}\times 1+0\times 1=\frac{1}{2}$$

$$y(2)=\frac{1}{2}\times 1+1\times 1=\frac{3}{2}$$

$$y(3)=\frac{1}{2}\times 1+1\times 1+\frac{3}{2}\times 1=3$$

$$y(4)=\frac{1}{2}\times 0+1\times 1+\frac{3}{2}\times 1+0\times 1=\frac{5}{2}$$

$$y(5)=\frac{3}{2}\times 1=\frac{3}{2}$$



$n<1$和$n>5$时，y(n)=0

四、 褶积和的几种算法

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)h(n-m)$$

褶积和的计算方法很多，且各有特点，应用时视具体条件而定。这里列举几种常见的计算方法。

➢1）数字求和法

设$x(k)=(x_0, x_1, x_2, x_3)$，$y(k)=(y_0, y_1, y_2)$，则$z(k)=x(k)*y(k)$ 的计算可按下述方法进行。

先将两序列其中之一按逆序排列，然后将数据起始点对齐相乘，并依次平移相乘进行操作。

第三节 离散信号的褶积

$$z(k)=x(k)*y(k)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x(m)y(k-m)$$

概括起来，**数字求和法**可分为四个步骤：

①反转：将$y(m)$按纵轴反转变为$y(-m)$；

②位移：将$y(-m)$沿横轴移动k，可得$y(k-m)$；

③相乘：将$y(k-m)$和$x(m)$对应相乘；

④求和：将相乘的序列值相加，即得褶积和$z(k)$。

第三节 离散信号的褶积

		x_0	x_1	x_2	x_3
y_2	y_1	y_0			

$x_0 y_0 = z_0$,上、下行起点对齐相乘

	x_0	x_1	x_2	x_3
y_2	y_1	y_0		

$x_0 y_1 + x_1 y_0 = z_1$,下行右移1格对齐相乘相加

x_0	x_1	x_2	x_3
y_2	y_1	y_0	

$x_0 y_2 + x_1 y_1 + x_2 y_0 = z_2$,下行右移2格对齐相乘相加

x_0	x_1	x_2	x_3
	y_2	y_1	y_0

$x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_3 y_0 = z_3$,下行右移3格对齐相乘相加

x_0	x_1	x_2	x_3	
		y_2	y_1	y_0

$x_2 y_2 + x_3 y_1 = z_4$,下行右移4格对齐相乘相加

x_0	x_1	x_2	x_3		
			y_2	y_1	y_0

$x_3 y_2 = z_5$,下行右移 5 格对齐相乘相加

例：已知$x(n)=\{1,2,3,4,2\}$，$h(n)=\{2,1,3,1\}$，求$x(n)*h(n)$.

解：数字求和法计算

			1	2	3	4	2					
1	3	1	2									$n=0$，$y(0)=2$
	1	3	1	2								$n=1$，$y(1)=5$
		1	3	1	2							$n=2$，$y(2)=11$
			1	3	1	2						$n=3$，$y(3)=18$
				1	3	1	2					$n=4$，$y(4)=19$
					1	3	1	2				$n=5$，$y(5)=17$
						1	3	1	2			$n=6$，$y(6)=10$
							1	3	1	2		$n=7$，$y(7)=2$

$y(n)=x(n)*h(n)=\{2,5,11,18,19,17,10,2\}$　　$L=5+4-1=8$

第三节 离散信号的褶积

例: 已知$x(n)=\{1,2,3,4,2\}$, $h(n)=\{2,1,3,1\}$,求$x(n)*h(n)$.

解: 用竖式不进位乘法

$$\begin{array}{rrrrrrrrr}
 & & & & 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\
\mathrm{x}) & & & & & 2 & 1 & 3 & 1 \\ \hline
 & & & & 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\
 & & & 3 & 6 & 9 & 12 & 6 & \\
 & & 1 & 2 & 3 & 4 & 2 & & \\
+) & 2 & 4 & 6 & 8 & 4 & & & \\ \hline
\end{array}$$

$\{2, 5, 11, 18, 19, 17, 10, 2\}_{-1}$, $L=5+4-1=8$

用MATLAB:

$x=[1,2,3,4,2];$

$h=[2,1,3,1];$

$c=conv(x,h)$

例： 计算 $x[k]=\{1,0,\overset{\downarrow}{2},4\}$ 与 $h[k]=\{1,\overset{\downarrow}{4},5,3\}$ 的褶积和。

解:

$$x(n)=\{1,0,2,4\} \qquad h(n)=\{1,4,5,3\}$$

$$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{m=0}^{3}x(m)h(n-m)$$

$$\cancel{=}\{1,4,7,15,26,26,12\}$$

利用**时移特性**

$$x[k]=x(n+2) \qquad h[k]=h(n+1)$$

$$x[k]*h[k]=x(n+2)*h(n+1)$$

$$=y(n+3)=\{1,4,7,\overset{\downarrow}{15},26,26,12\}$$

2）列表法

对于因果序列$x_1(k)$和$x_2(k)$，其褶积和为

$$x(k)=x_1(k)*x_2(k)=\sum_{i=0}^{k}\boxed{x_1(i)x_2(k-i)}$$

- 公式中$x_1(i)$的序号i与$x_2(k-i)$的序号$(k-i)$之和等于k。
- 如果将各$x_1(k)$ (k=1,2,…)的值排成一行，将各$x_2(k)$ (k=1,2,…)的值排成一列，在图中各行与列的交叉点处，记入相应的乘积。可以看出，沿斜线(图中虚线)上各$x_1(i)$ $x_2(j)$的序号之和也是常数，对照褶积和的定义式可知，沿斜线上各数值之和就是褶积和。

第三节 离散信号的褶积

$$x_1(n)*x_2(n)=\sum_{i=0}^{n}x_1(i)x_2(n-i)$$

$x_2(n)$ \ $x_1(n)$	$x_1(0)$	$x_1(1)$	$x_1(2)$	$x_1(3)$	…
$x_2(0)$	$x_1(0)x_2(0)$ **0**	$x_1(1)x_2(0)$ **1**	$x_1(2)x_2(0)$ **2**	$x_1(3)x_2(0)$ **3**	…
$x_2(1)$	$x_1(0)x_2(1)$ **1**	$x_1(1)x_2(1)$ **2**	$x_1(2)x_2(1)$ **3**	$x_1(3)x_2(1)$ **4**	…
$x_2(2)$	$x_1(0)x_2(2)$ **2**	$x_1(1)x_2(2)$ **3**	$x_1(2)x_2(2)$ **4**	$x_1(3)x_2(2)$ **5**	…
$x_2(3)$	$x_1(0)x_2(3)$ **3**	$x_1(1)x_2(3)$ **4**	$x_1(2)x_2(3)$ **5**	$x_1(3)x_2(3)$ **6**	…
…	…	…	…	…	…

例3：计算 $f[k]=\{1,2,\overset{\downarrow}{0},3,2\}$ 与 $h[k]=\{1,\overset{\downarrow}{4},2,3\}$的褶积和。

		$f[-2]$	$f[-1]$	$f[0]$	$f[1]$	$f[2]$
		1	2	0	3	2
$h[-1]$	1	1 **-3**	2 **-2**	0 **-1**	3 **0**	2 **1**
$h[0]$	4	4 **-2**	8 **-1**	0 **0**	12 **1**	8 **2**
$h[1]$	2	2 **-1**	4 **0**	0 **1**	6 **2**	4 **3**
$h[2]$	3	3 **0**	6 **1**	0 **2**	9 **3**	6 **4**

1、排成行列

2、行列相乘

3、下标求和

4、斜对角相加

$$y[k]=\{1,6,10,\overset{\downarrow}{10},20,14,13,6\}$$

（3）矩阵运算法

➢ 若$x(k)$和$y(k)$为两个有限长因果序列，长度分别为$(N+1)$和$(M+1)$个样值，则其褶积$z(k)=x(k)*y(k)$的长度为$(N+M+1)$个样值，即

$$z(k)=x(k)*y(k)=\sum_{i=0}^{N}x(i)y(k-i)=\sum_{i=0}^{M}y(i)x(k-i)$$

➢ 对于$z(k)=x(k)*y(k)$的运算，可以先表示成矩阵形式，再通过矩阵运算完成褶积和的运算。

设$x(k)=(x_0, x_1, x_2,\ldots, x_N)$，$y(k)=(y_0, y_1,\ldots,y_M)$，则$z(k)= x(k)*y(k)$可用$(N+M+1)$阶矩阵表示为

第三节 离散信号的褶积

$$z(k) = x(k) * y(k)$$

$$
= \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ M\text{个} \\ \\ \end{matrix}
\begin{bmatrix}
x_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
x_1 & x_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
x_2 & x_1 & x_0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
x_N & x_{N-1} & x_{N-2} & \cdots & x_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & x_N & x_{N-1} & \cdots & x_1 & x_0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & x_N & x_{N-1} & \cdots & x_1 & x_0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \\ N\text{个}\left\{\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}\right.
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_N \\ z_{N+1} \\ \vdots \\ z_{N+M}
\end{bmatrix}
$$

➢ 褶积用矩阵表示，有两种方法

✓ 第一种方法（类似数字求和法）

$$z(k)=x(k)*y(k)$$

$$=\begin{bmatrix} x_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x_1 & x_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x_2 & x_1 & x_0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_N & x_{N-1} & x_{N-2} & \cdots & x_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x_N & x_{N-1} & \cdots & x_1 & x_0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_N & x_{N-1} & \cdots & x_1 & x_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_N \\ z_{N+1} \\ \vdots \\ z_{N+M+1} \end{bmatrix}$$

➢ 褶积用矩阵表示，有两种方法

✓ 第一种方法（类似数字求和法）

- 将一个信号$y(k)$补零，长度变成$N+M+1$，表示为列矩阵；
- 将另外一个信号$x(k)$也通过补零，长度变成$N+M+1$，首先将信号$x(k)$线性翻转为$x(-k)$，将其与$y(k)$的$n=0$对齐后充填到$(N+M+1)\times(N+M+1)$阶矩阵的第一行；
- 然后，将$x(-k)$向右线性时移一位$x(1-k)$，将充填到$(N+M+1)\times(N+M+1)$阶矩阵的第二行中。
- 同理，将$x(-k)$向右线性时移两位$x(2-k)$，将充填到$(N+M+1)\times(N+M+1)$阶矩阵的第三行中。
- 按照数字求和方法的步骤，依次类推，将每一步骤的$x(n-k)$线性时移信号依次充填到$(N+M+1)\times(N+M+1)$阶矩阵的相应行中。
- 最后，利用矩阵运算，得到褶积结果。

➢ 褶积用矩阵表示，有两种方法

✓ 第二种方法

$$z(k)=x(k)*y(k)$$

$$=\begin{bmatrix} x_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x_1 & x_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x_2 & x_1 & x_0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_N & x_{N-1} & x_{N-2} & \cdots & x_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x_N & x_{N-1} & \cdots & x_1 & x_0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_N & x_{N-1} & \cdots & x_1 & x_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_N \\ z_{N+1} \\ \vdots \\ z_{N+M+1} \end{bmatrix}$$

➢第一列保持不变，其它列为相应的线性时移信号

➢ 褶积用矩阵表示，有两种方法

✓ 第二种方法

- 将一个信号补零，长度变成$N+M+1$，表示为列矩阵；
- 将另外一个信号也补零，长度变成$N+M+1$，将其与$y(k)$的$n=0$对齐后充填到$(N+M+1)\times(N+M+1)$阶矩阵的第一列；
- 然后，将$x(k)$向右线性时移一位$x(k-1)$，将充填到$(N+M+1)\times(N+M+1)$阶矩阵的第二列中。
- 同理，将$x(k)$向右线性时移两位$x(k-2)$，将充填到$(N+M+1)\times(N+M+1)$阶矩阵的第三列中。
- 依次类推，将$x(k)$的不同线性时移信号$x(k-n)$依次充填到$(N+M+1)\times(N+M+1)$阶矩阵的相应列中。
- 最后，利用矩阵运算，得到褶积结果。

例如：已知$x(n)=\{1,2,-1,3,-2\}$，$h(n)=\{0.2,0.6,0.2\}$

求$y(n)=x(n)*h(n)$。

解：矩阵方法

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.6 \\ 0.2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y(n)=\{0.2,1.0,1.2,0.4,1.2,-0.6,-0.4\}$$

第三节 离散信号的褶积

例如：已知$x(n)=\{1,2,-1,3,-2\}$，$h(n)=\{0.2,0.6,0.2\}$

求$y(n)=x(n)*h(n)$。

解：矩阵法

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.6 \\ 0.2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y(n)=\{0.2,1.0,1.2,0.4,1.2,-0.6,-0.4\}$$

➢ 若两个长度分别为N和M的有限长因果序列$x(n)$和$y(n)$，褶积的长度为$(L=N+M-1)$，矩阵表示为

$$\begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{M-1} \\ z_M \\ \vdots \\ z_{N+M-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ y_1 & y_0 & 0 & \cdots & 0 \\ y_2 & y_1 & y_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{M-1} & y_{M-2} & y_{M-3} & \cdots & y_{L-M} \\ 0 & y_{M-1} & y_{M-2} & \cdots & y_{L-M+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y_{M-1} \end{bmatrix}_{L\times N} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix}$$

N-1个

- **线性褶积**

  公式、计算、性质

- **离散褶积**

  公式、性质

- **离散褶积的计算方法**
- **离散信号系统**

  线性、时不变、因果、稳定