



中国石油大学
CHINA UNIVERSITY OF PETROLEUM



数字信号分析与处理

Digital Signal Analysis & Processing (DSP)

厚积薄发 开物成务



数字信号分析与处理

Digital Signal Analysis & Processing (DSP)

第八章 有限长脉冲响应滤波器 和窗函数



第八章 有限长脉冲响应滤波器和窗函数

- 第一节 理想滤波器
- 第二节 FIR数字滤波器的设计

第一节 理想滤波器

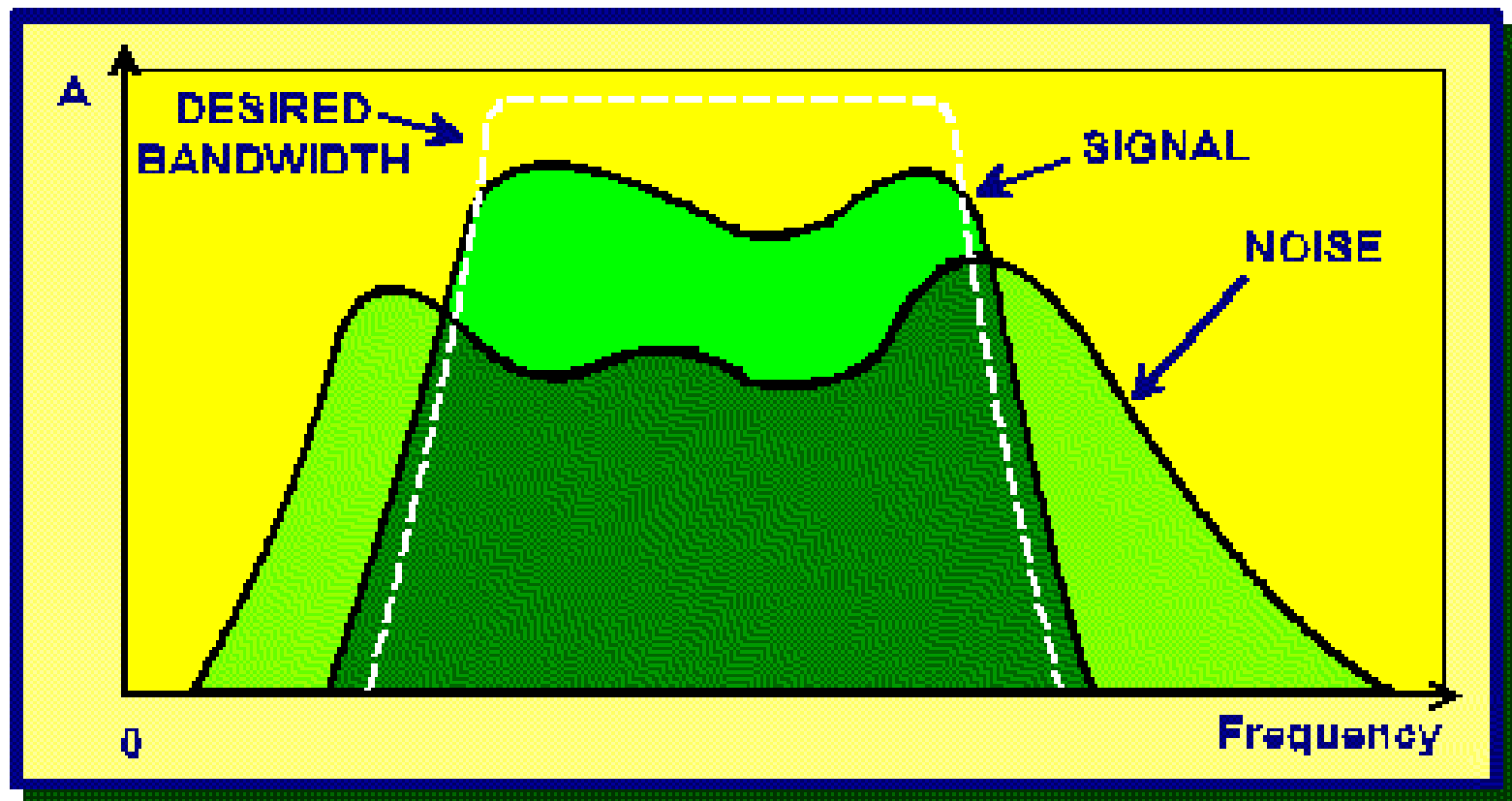
从含有噪声的信号中获取有效信号、抑制噪声的处理过程称为滤波，实现滤波功能的系统称为滤波器。

1、滤波的目的

- 为了压制输入信号的某些频率成分，从而改变信号频谱中各频率分量的相对比例。
- 广义滤波包括对信号的检测与参量的估计。
 - 信号的检测：确定在干扰背景中信号是否存在；
 - 信号参量的估计：为识别信号而确定信号的某一个或某几个参量的估值。

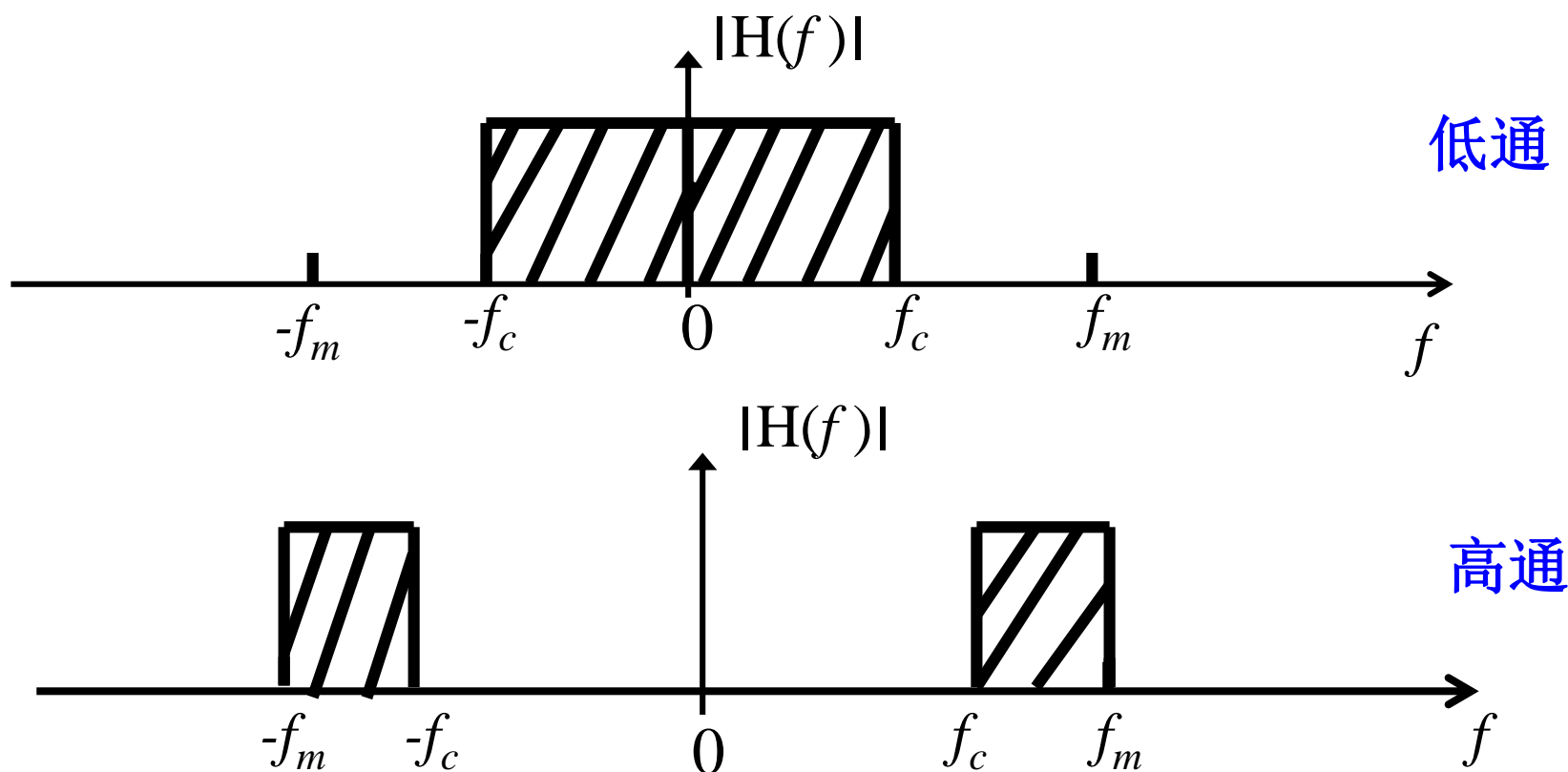
第一节 理想滤波器

地震记录频谱

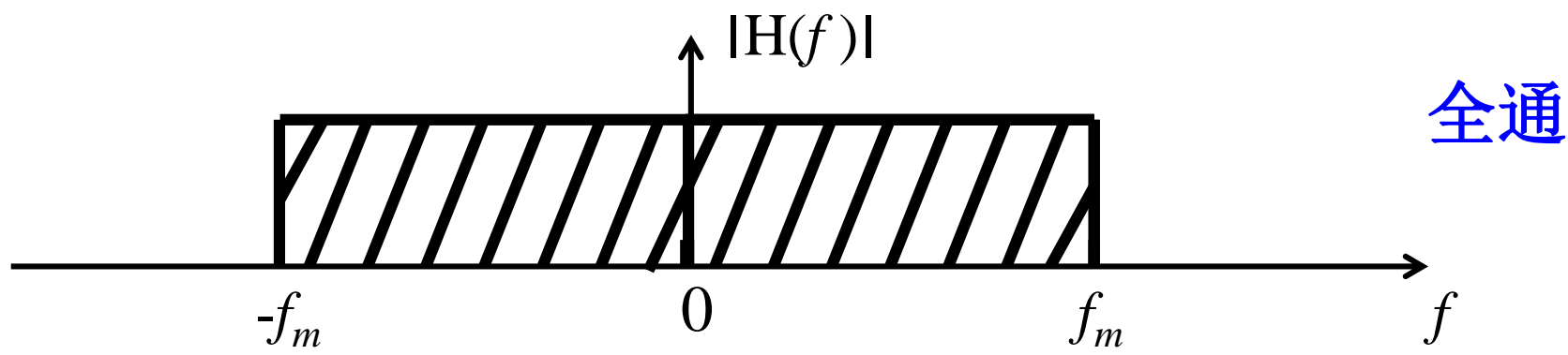
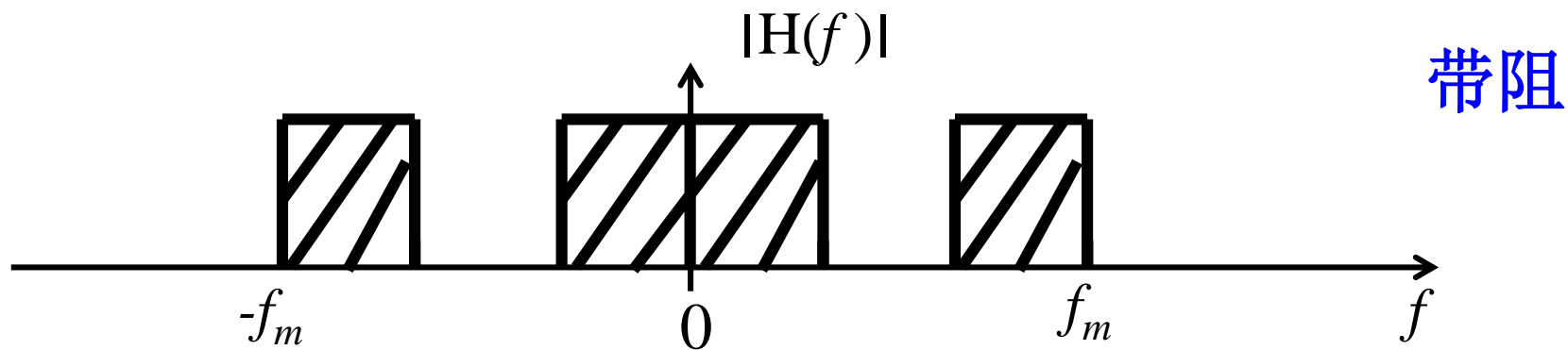
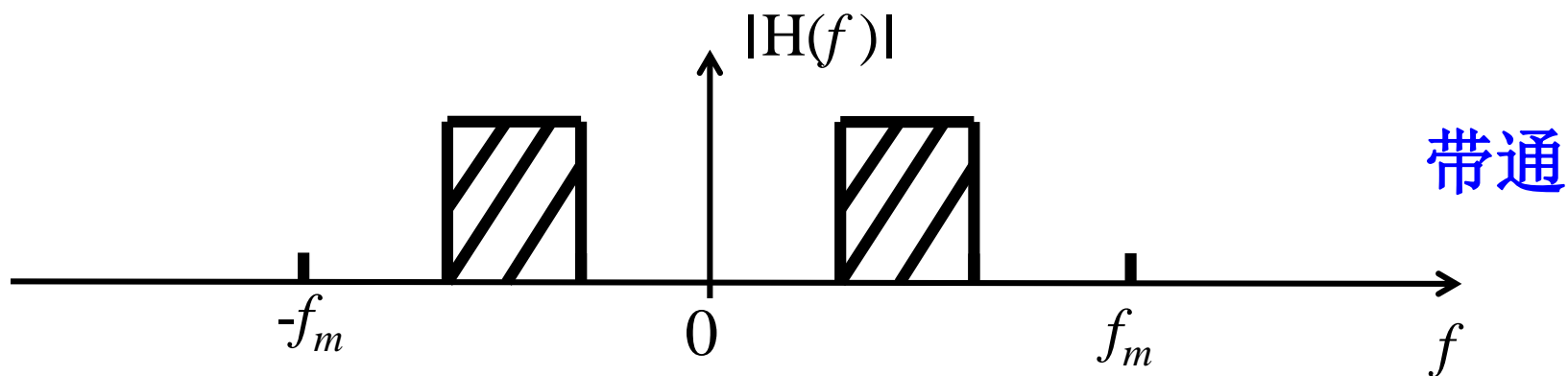


1) 滤波器按频率特性分类

可分为低通(LP)、高通(HP)、带通(BP)、带阻(BS)和全通(AP)滤波器。



第一节 理想滤波器



2) 按单位脉冲响应长度可分类为:

无限冲激响应(IIR)滤波器和有限冲激响应(FIR)滤波器

3) 按处理信号是模拟信号还是数字信号, 可将滤波器分为:

模拟滤波器 (AF) 和 数字滤波器 (DF)

2、滤波技术包括:

- 滤波器设计: 根据给定滤波器的频率特性, 求得满足该特性的传输函数;
- 滤波过程的实现: 获得传输函数后, 以何种方式达到对输入信号的进行滤波的目的。

3、几种常用的理想滤波器

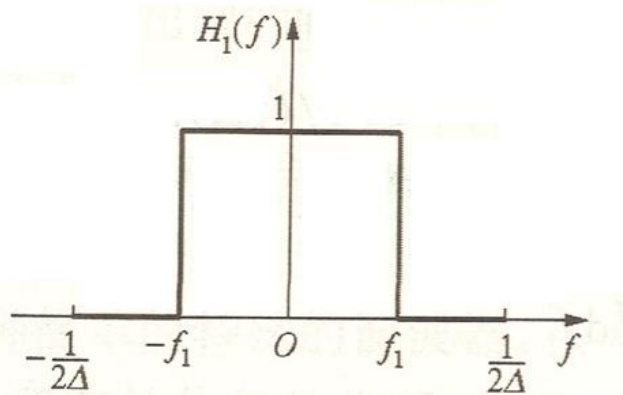
1) 理想低通滤波器

➤ 频率响应:

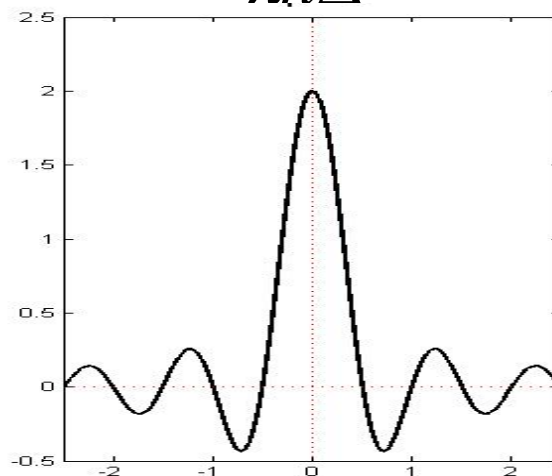
$$H_{LP}(f) = \begin{cases} 1 & |f| \leq f_1 \\ 0 & f_1 < |f| \leq \frac{1}{2\Delta} \end{cases}$$

➤ 单位脉冲响应:

$$h_{LP}(n) = \frac{\sin 2\pi n \Delta f_1}{\pi n \Delta} \quad -\infty < n < +\infty$$



(a) 理想低通滤波器

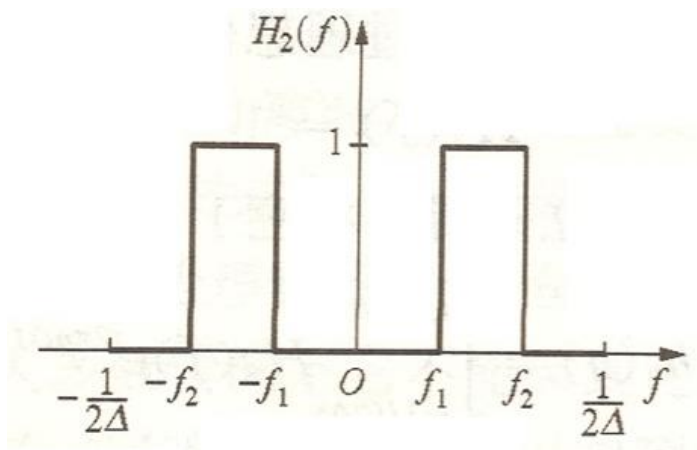


2) 理想带通滤波器

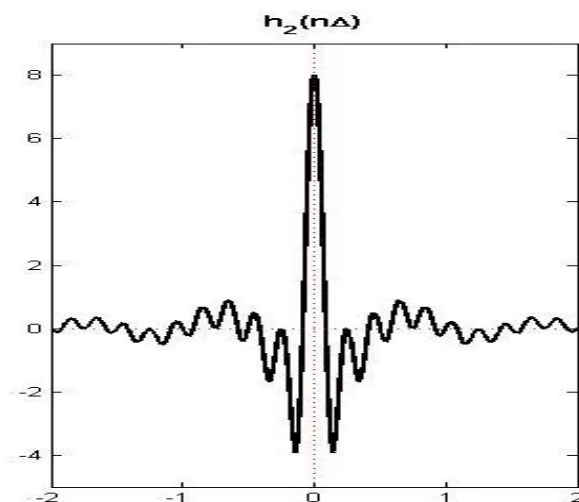
➤ 频率响应：
$$H_{BP}(f) = \begin{cases} 1 & f_1 \leq |f| \leq f_2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (|f| \leq \frac{1}{2\Delta})$$

➤ 单位脉冲响应：

$$h_{BP}(n) = \frac{\sin[\pi(f_2 - f_1)n\Delta] \cos[\pi(f_2 + f_1)n\Delta]}{\pi n\Delta}$$



(b) 理想带通滤波器



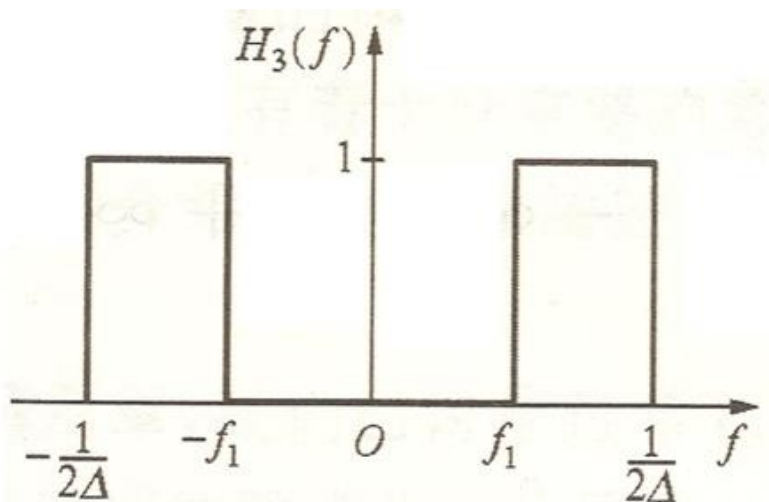
3) 理想高通滤波器

➤ 频率响应:

$$H_{HP}(f) = \begin{cases} 0 & |f| \leq f_1 \\ 1 & f_1 < |f| \leq \frac{1}{2\Delta} \end{cases}$$

➤ 单位脉冲响应:

$$h_{HP}(n) = \frac{1}{\Delta} \delta(n) - \frac{\sin 2\pi n \Delta f_1}{\pi n \Delta}$$



(c) 理想高通滤波器

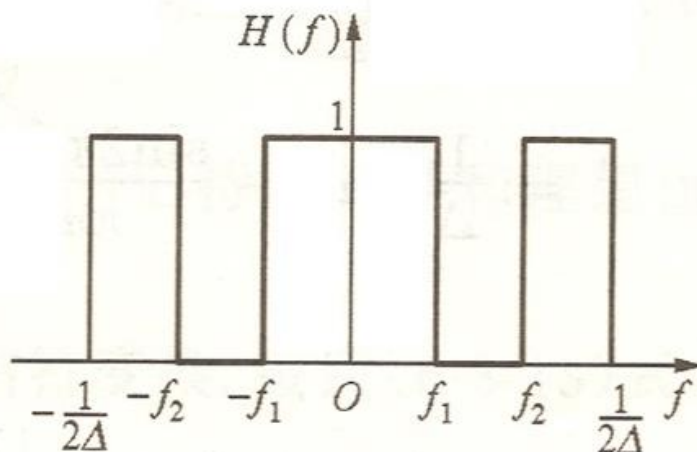
$$H_{HP}(f) = 1 - H_{LP}(f) \quad (|f| \leq \frac{1}{2\Delta})$$

4) 理想带阻滤波器

➤ 频率响应: $H_{BNP}(f) = \begin{cases} 0 & f_1 \leq |f| \leq f_2 \\ 1 & \text{其它} \end{cases} \quad (|f| \leq \frac{1}{2\Delta})$

➤ 单位脉冲响应:

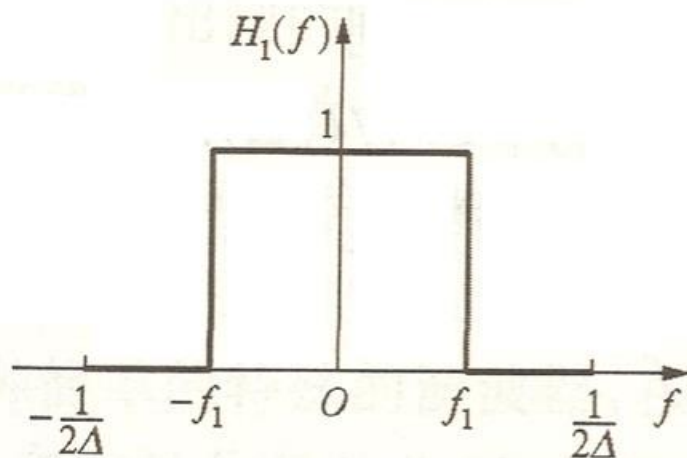
$$h_{BNP}(n) = \frac{1}{\Delta} \delta(n) - \frac{\sin[\pi(f_2 - f_1)n\Delta] \cos[\pi(f_2 + f_1)n\Delta]}{\pi n\Delta}$$



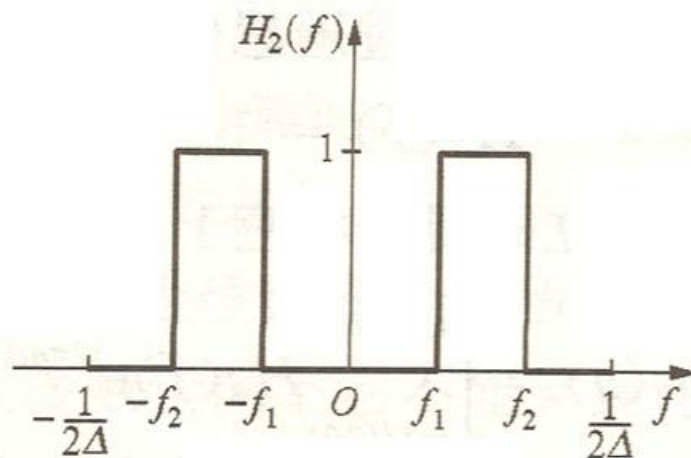
(d) 理想带阻滤波器

$$H_{BNP}(f) = 1 - H_{BP}(f) \quad (|f| \leq \frac{1}{2\Delta})$$

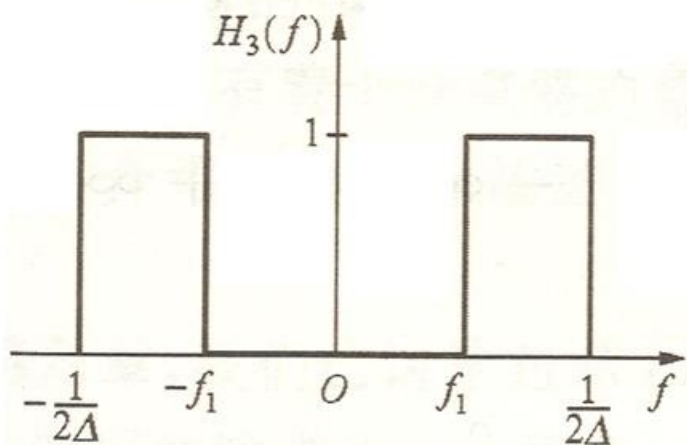
第一节 理想滤波器



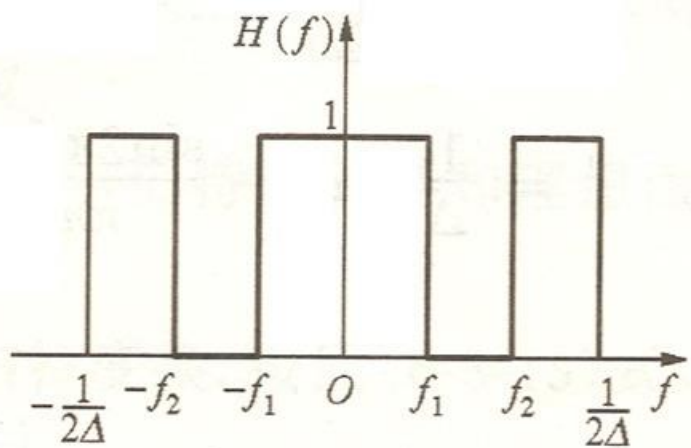
(a) 理想低通滤波器



(b) 理想带通滤波器



(c) 理想高通滤波器



(d) 理想带阻滤波器

理想滤波器的频谱

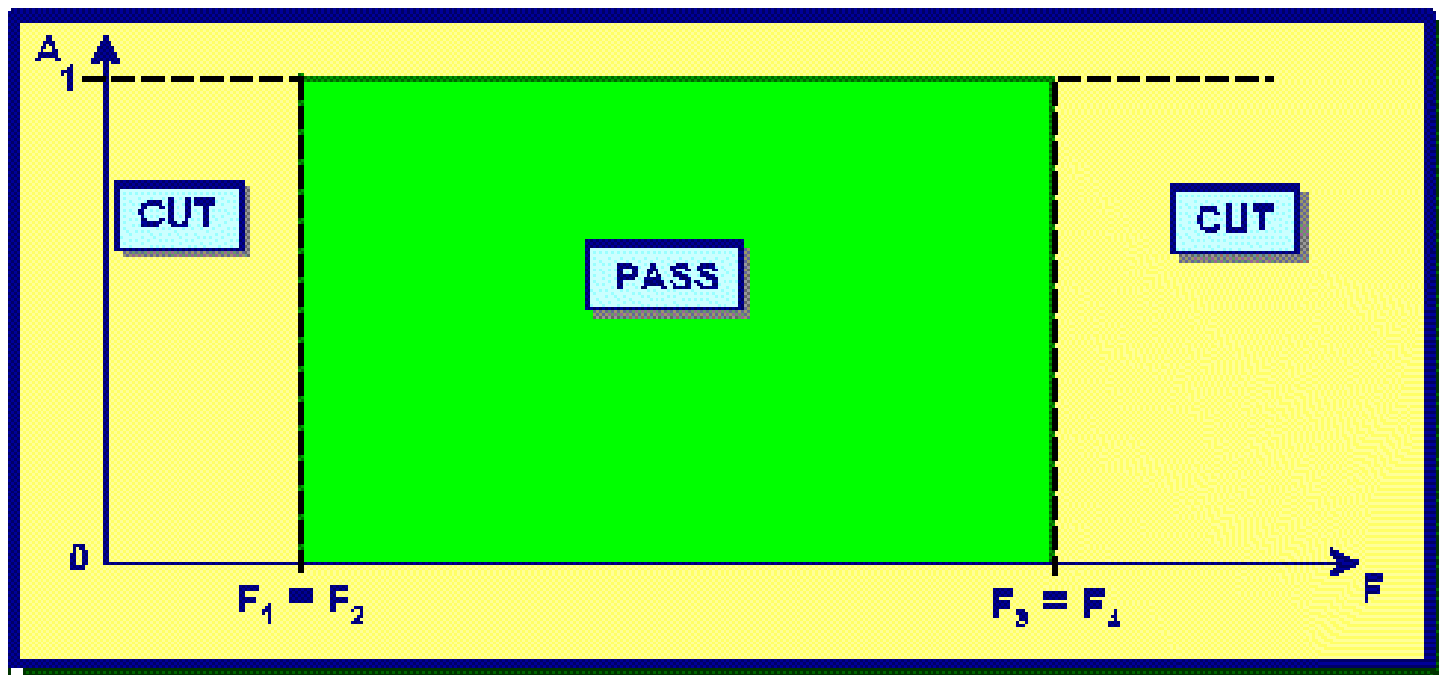
第八章 有限长脉冲响应滤波器和窗函数

- 第一节 理想滤波器
- 第二节 FIR数字滤波器的设计

第二节 FIR数字滤波器的设计

一、理想滤波存在的问题

➤ 频率域滤波



第二节 FIR数字滤波器的设计



1、FIR滤波器的设计问题

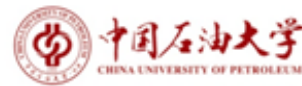
在于寻求一系统函数 $H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^n$ ，使其频率响应 $H(f) = H(z)|_{z=e^{-j2\pi f}}$ 逼近滤波器要求的理想频率响应 $H_d(f)$ 。

设理想滤波器的单位脉冲响应为 $h_d(n)$ ，则有

$$H_d(e^{j2\pi f}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d(n)e^{-j2\pi n\Delta f}$$
$$h_d(n) = \int_{-\frac{1}{2\Delta}}^{\frac{1}{2\Delta}} H_d(f)e^{j2\pi n\Delta f} df$$

所求得的 $h_d(n)$ 一般是无限长的，且是非因果的。

第二节 FIR数字滤波器的设计



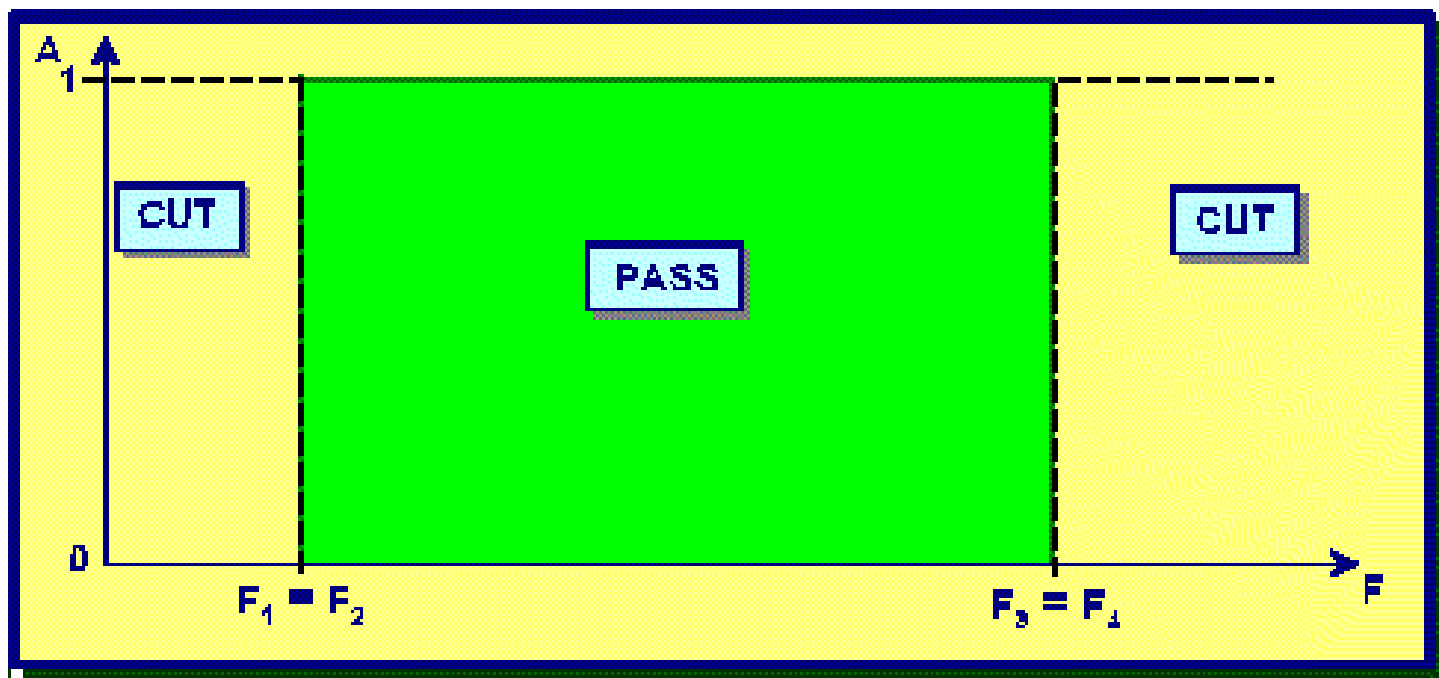
在实际的滤波中，通常只能得到一个有限长的滤波器 $h(n)$ ，因此，就要截断 $h_d(n)$ ，或者说用一个窗口函数 $w(n)$ 对 $h_d(n)$ 进行加窗处理，即

$$h(n) = h_d(n)w(n)$$

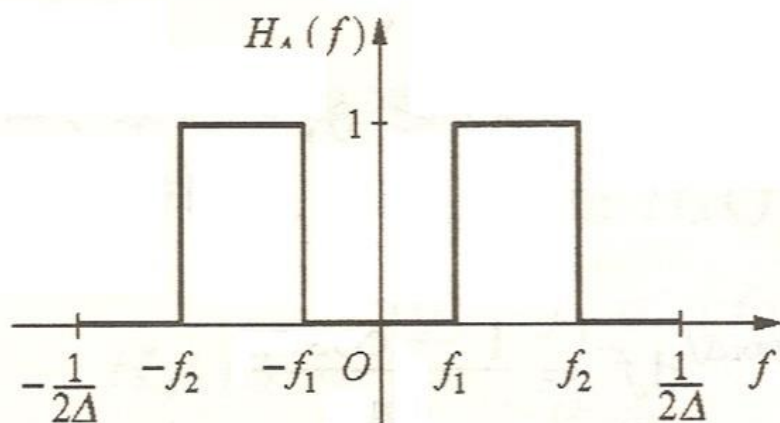
- 选择窗口函数的形状和长度是设计FIR滤波器的关键。
- 一般，最简单的得到有限长 $h(n)$ 的方法是用一长为 N 的矩形窗 $w(n)=R_N(n)$ 截断 $h_d(n)$ 。

第二节 FIR数字滤波器的设计

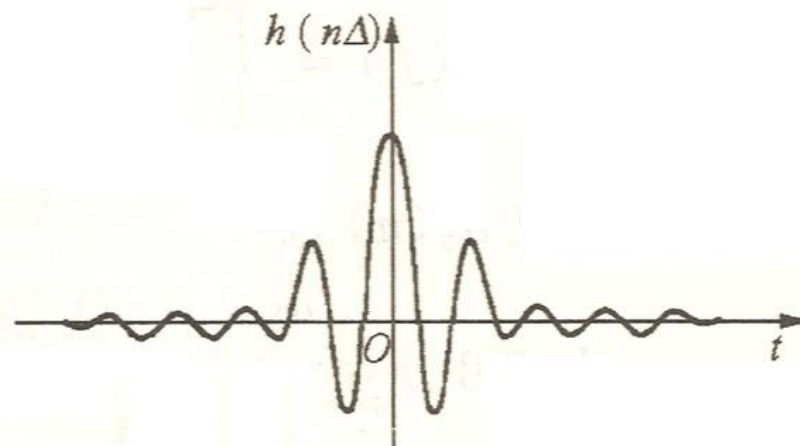
➤ **思考：**如图对一个理想带通滤波器进行有限长截断，截断前后会发生什么变化？



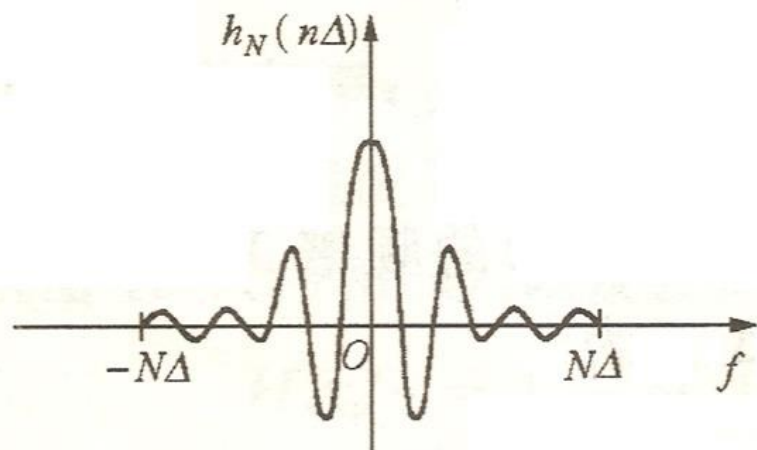
第二节 FIR数字滤波器的设计



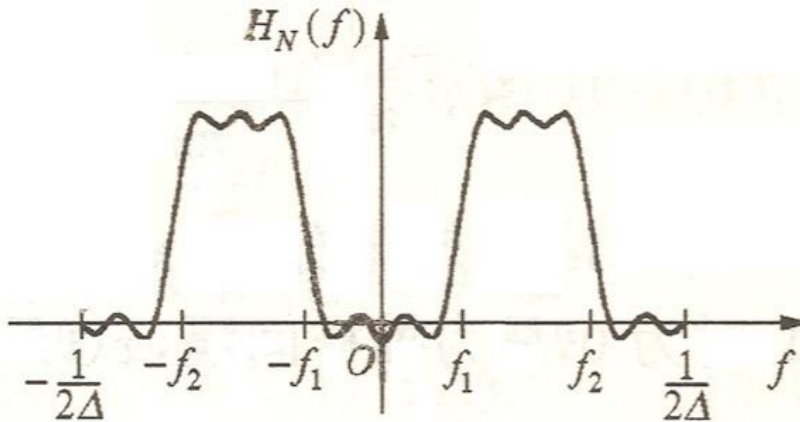
(a)



(b)



(c)



(d)

理想滤波器时间函数截尾的影响

2. 吉布斯（Gibbs）效应

由于系统频率响应是单位脉冲响应的傅里叶变换，故可求得矩形窗截取后滤波器的频率响应为

$$H(e^{j2\pi f}) = \sum_{n=0}^{N-1} h_d(n) e^{-j2\pi n\Delta f}$$

此式为**有限项**，因此 N 越大，误差就越小。

➤ 对于矩形窗截取还存在所谓吉布斯（Gibbs）效应，使得滤波器的特性很差，不能满足实际的需要。

二、矩形时窗

➤ 设理想低通滤波器的频率响应 $H_d(f)$ 为

$$H_d(f) = \begin{cases} 1 & |f| \leq f_0 \\ 0 & f_0 < |f| \leq f_c = \frac{1}{2\Delta} \end{cases}$$

式中, f_c 为滤波器的截止频率。

➤ 相应的单位脉冲响应为

$$h_d(n) = \frac{\sin 2\pi(n-a)\Delta f_0}{\pi(n-a)\Delta} \quad -\infty < n < +\infty$$

是一个偶对称的无限长的非因果序列。

第二节 FIR数字滤波器的设计



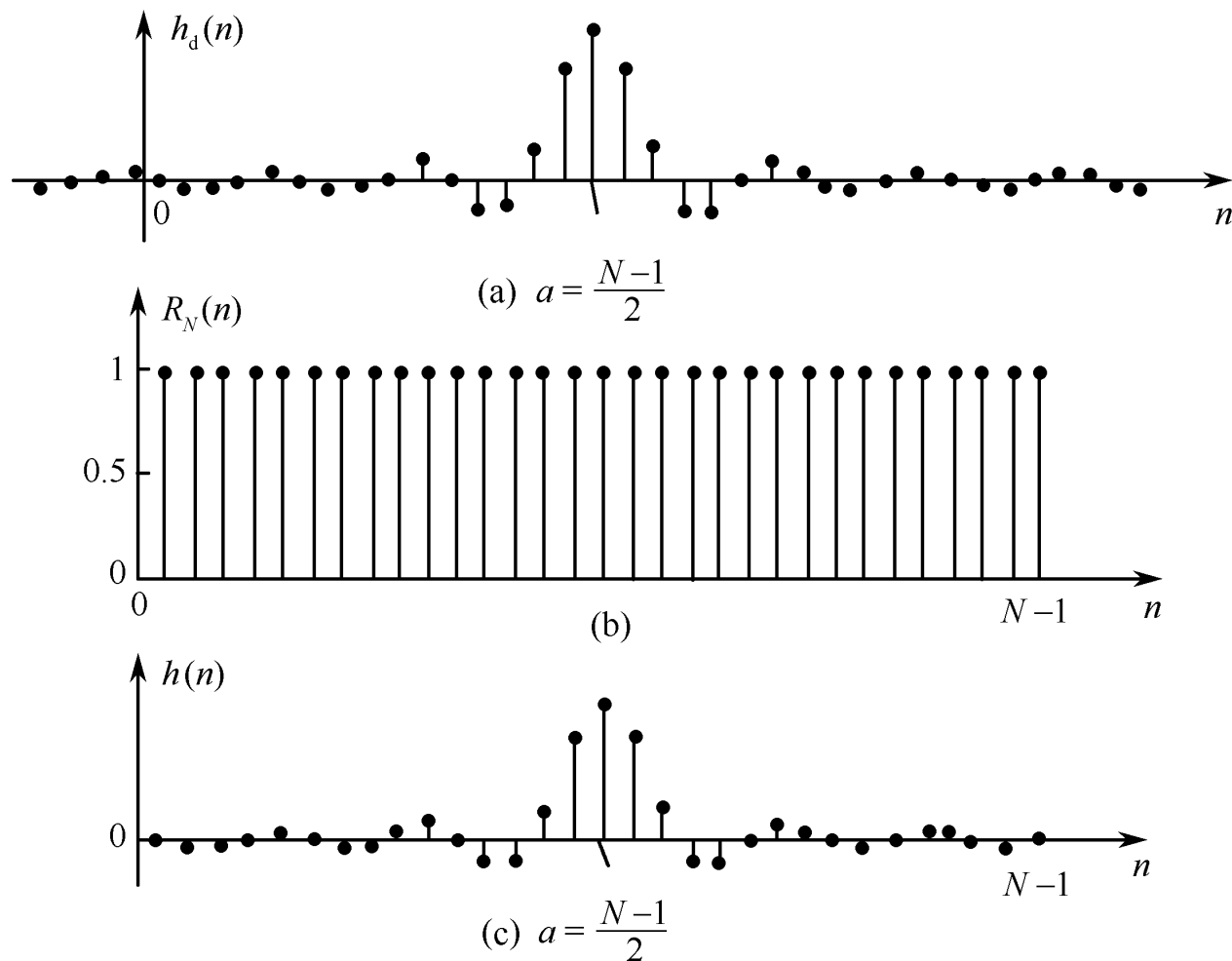
- 要得到因果和有限长的 $h(n)$ ，最简单的方法是用一个长度为 N 的矩形窗 $w(n)=R_N(n)$ 截断 $h_d(n)$ 。
- 按照线性相位滤波器的要求， $h(n)$ 必须是**偶对称的**。对称中心必须等于滤波器的延时常数，即 $a=(N-1)/2$ 。

故有

$$\begin{cases} h(n) = h_d(n)R_N(n) \\ a = (N-1)/2 \end{cases}$$

$$\text{其中, } R_N(n\Delta) = \begin{cases} 1 & (0 \leq n < N) \\ 0 & (\text{其它}) \end{cases}$$

第二节 FIR数字滤波器的设计



理想低通滤波器的单位脉冲响应及矩形窗截取

第二节 FIR数字滤波器的设计



➤ 下面从频域褶积的角度来分析由矩形窗所求得的滤波器的频率响应。

由 $h(n) = h_d(n)w(n)$

根据褶积定理有

$$H(f) = H_d(f) * W(f) = \int_{-\frac{1}{2\Delta}}^{\frac{1}{2\Delta}} H_d(\lambda) W(f - \lambda) d\lambda$$

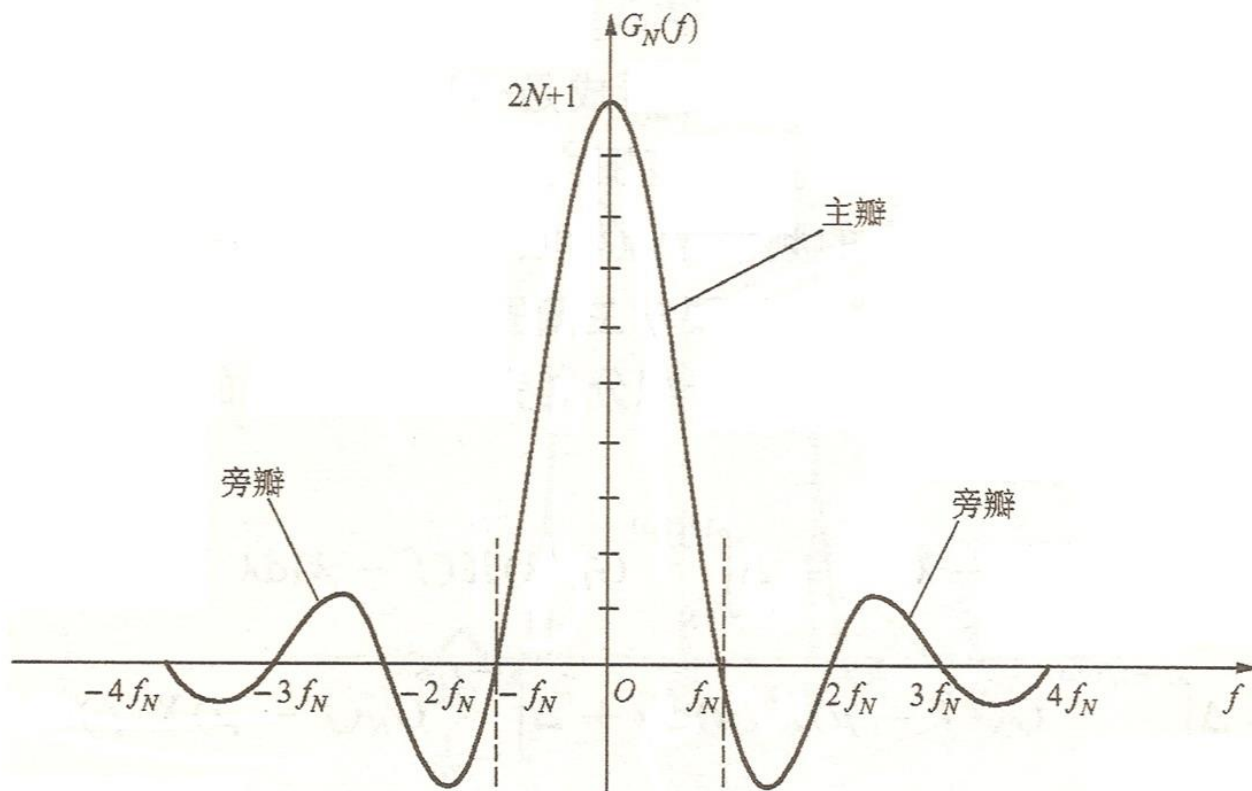
设矩形窗的频率响应为 $G_R(f)$

$$G_{2N}(f) = \sum_{n=-N}^N R_{2N}(n) e^{-j2\pi n\Delta f} = \frac{\sin 2\pi(N + \frac{1}{2})\Delta f}{\sin \pi\Delta f}$$

$$R_{2N}(n) = \begin{cases} 1 & (-N \leq n \leq N) \\ 0 & (\text{其它}) \end{cases}$$

第二节 FIR数字滤波器的设计

$$G_R(f) = \frac{\sin 2\pi(N + \frac{1}{2})\Delta f}{\sin \pi\Delta f} \quad \text{为矩形窗的幅度响应。}$$



矩形时窗频谱 $G_N(f)$ 的图形，

其中 $f_N = 1/[(2N+1)\Delta]$

第二节 FIR数字滤波器的设计

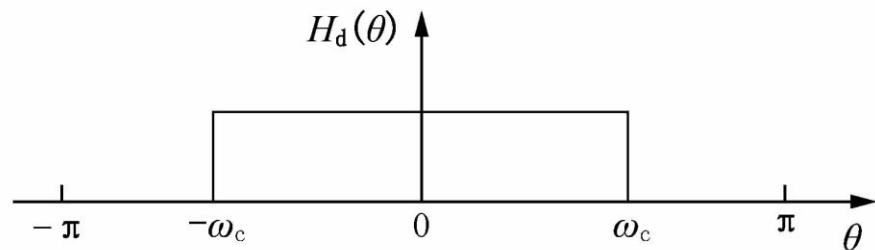


综合上述讨论，得

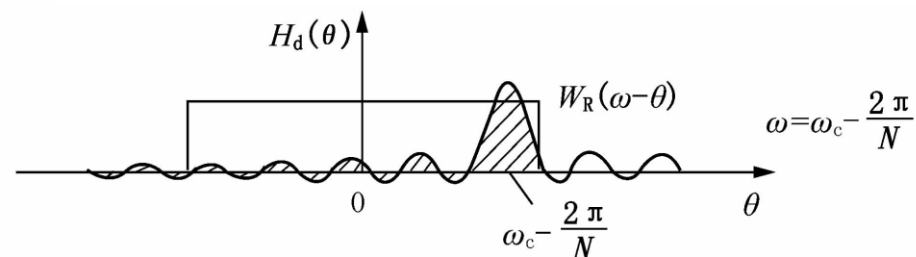
$$H(f) = H_d(f) * W(f) = \int_{-\frac{1}{2\Delta}}^{\frac{1}{2\Delta}} H_d(\lambda) W_R(f - \lambda) d\lambda$$

- 上式说明：设计的滤波器的频率响应是矩形窗函数的频率响应与理想低通滤波器的频率响应的褶积。

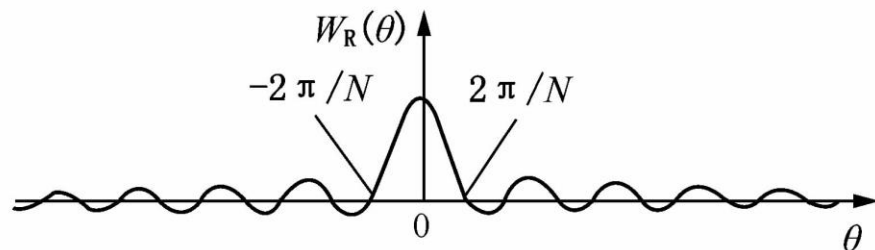
第二节 FIR数字滤波器的设计



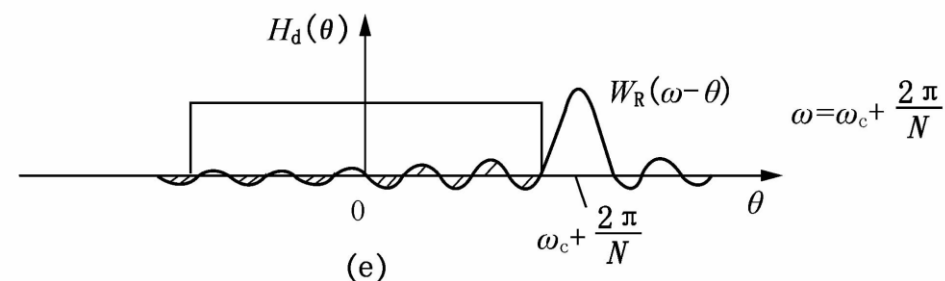
(a)



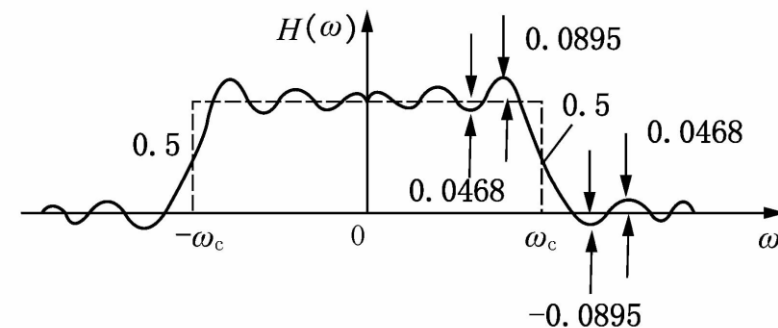
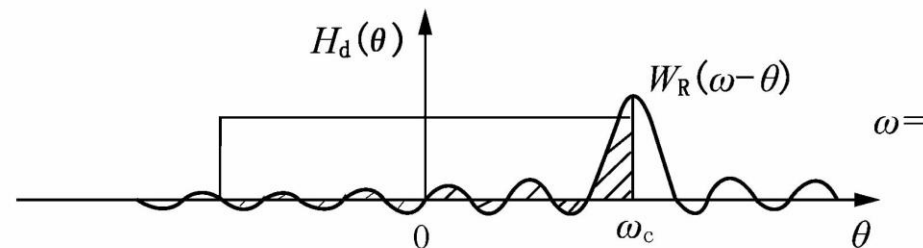
(d)



(b)



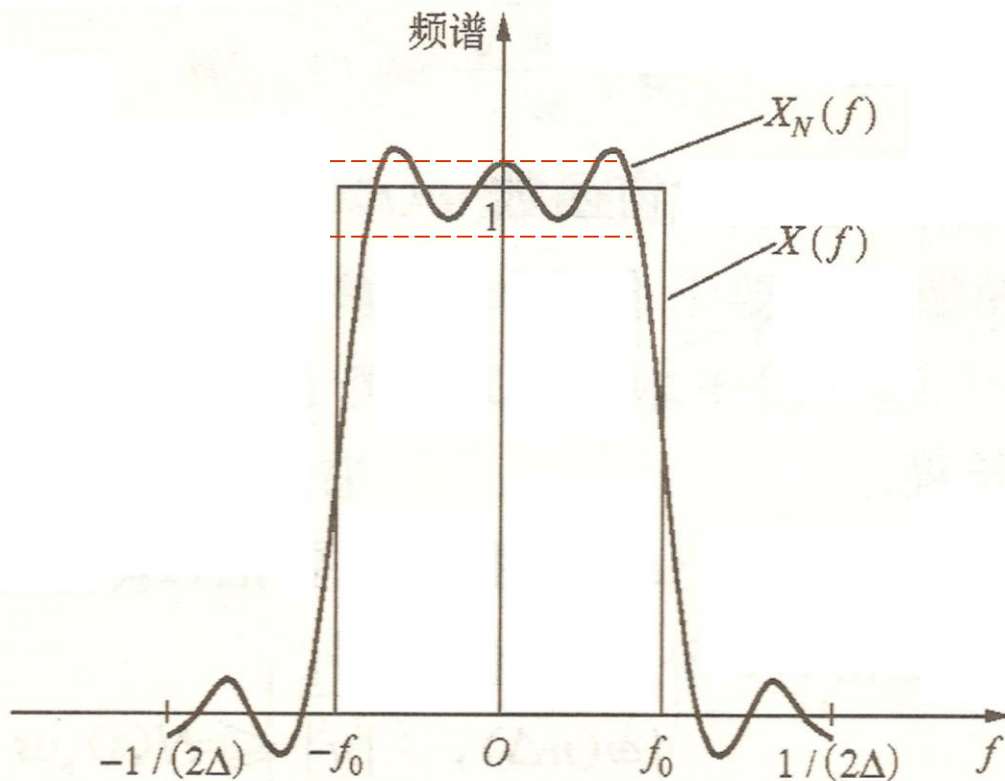
(e)



(f)

矩形窗的褶积过程

第二节 FIR数字滤波器的设计

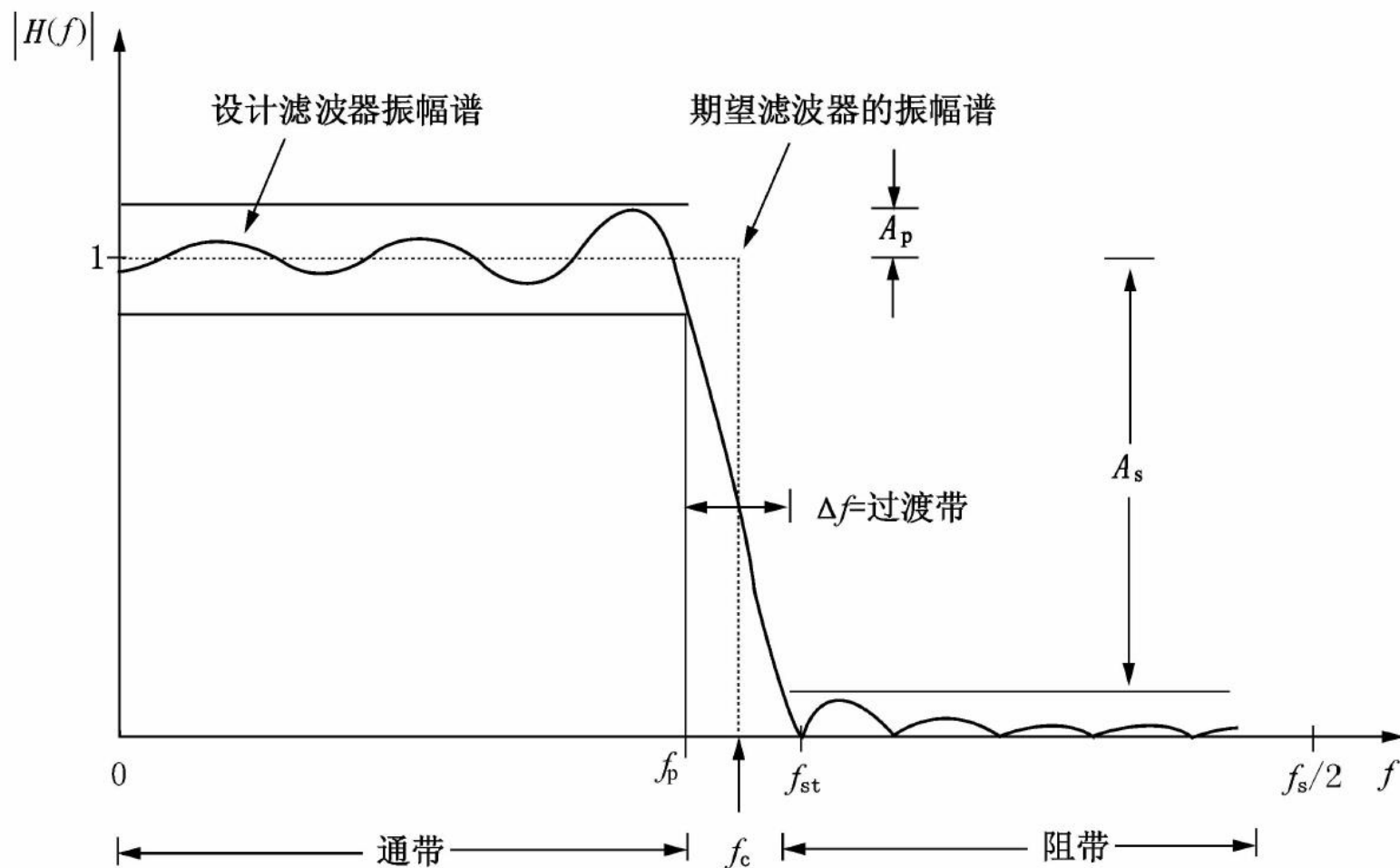


理想低通频谱 $X(f)$ 和截尾时间函数的频谱 $X_N(f)$

- 所设计数字滤波器的频谱函数在通带和阻带都呈现出振荡现象，且最大波纹大约为幅度跳变值的9%，这个现象称为吉布斯现象。

第二节 FIR数字滤波器的设计

滤波器的参数:



低通滤波器的幅频响应曲线

第二节 FIR数字滤波器的设计

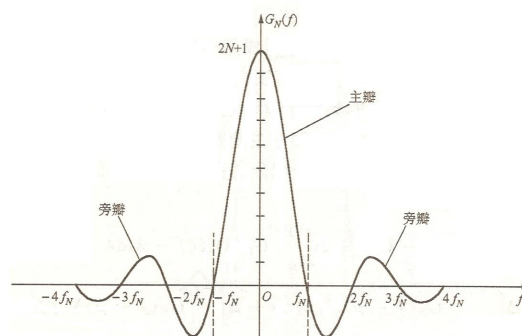


➤ 加矩形窗处理后，对理想频率响应产生了几点影响：

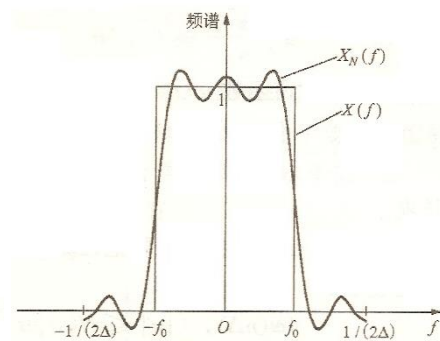
- 1) 理想频率特性在不连续点 $f=f_0$ 处，形成了一个过渡带，过渡带的宽度等于矩形窗的频率响应 $W_R(f)$ 的主瓣宽度 $\Delta f=4\pi/N$ ；
- 2) 在截止频率 f_0 的两边 $f=f_0 \pm 2\pi/N$ 处(即过渡带的两边)， $H(f)$ 出现最大的肩峰值，肩峰的两侧形成起伏振荡，其振荡幅度取决于旁瓣的相对幅度，而振荡的快慢，则取决于 $W_R(f)$ 波动的快慢。
- 3) 随着 N 加大，函数曲线波动的频率加快，主瓣幅度加高，旁瓣幅度也同样加高，主瓣与旁瓣的相对比例保持不变。

第二节 FIR数字滤波器的设计

- 由于旁瓣等的作用，原始频谱中的许多细节部分就会被平滑，从而导致有限离散信号的频谱与原始频谱之间存在较大的差异。通常将时窗频谱旁瓣对原始频谱这种具有破坏性的贡献称为时窗泄露。
- 为了减小这种时窗泄露，希望时窗频谱在旁瓣的最大相对幅度越小越好。
- 为了更好地保留原始频谱的信息，要求时窗频谱的主瓣范围尽量小，使其能量尽可能地集中于主瓣（数值尽可能的大一些）



矩形时窗频谱 $G_N(f)$ 的图形，
其中 $f_N = 1/[(2N+1)\Delta]$



理想低通频谱 $X(f)$ 和截尾时间函数的频谱 $X_N(f)$

第二节 FIR数字滤波器的设计



➤ 在矩形窗情况下，存在吉布斯(Gibbs)效应。实际中，矩形窗很少采用。

➤ 克服理想滤波器应用中所存在的Gibbs现象的两种主要途径：

1、频率域方法

避免理想滤波器频率响应中出现的突跳现象，将其改造为一条连续甚至光滑的频谱曲线(鑲边法)。

2、时间域方法

对理想滤波器所对应的时间域信号进行改造(时窗函数法)。

四、常用的窗函数

1、三角形窗(Bartlett Window)

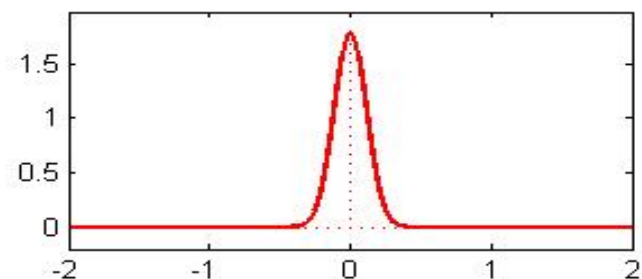
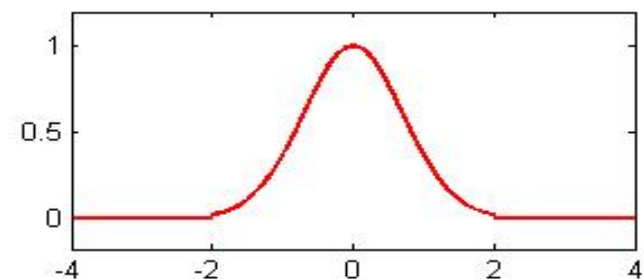
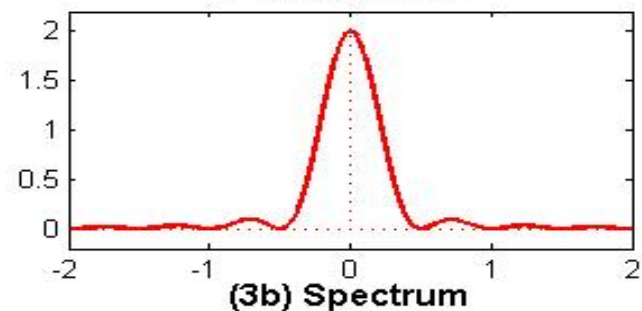
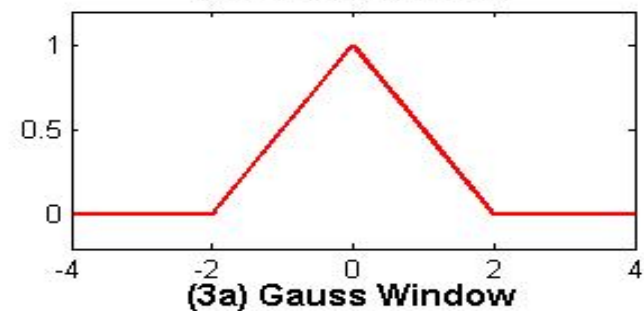
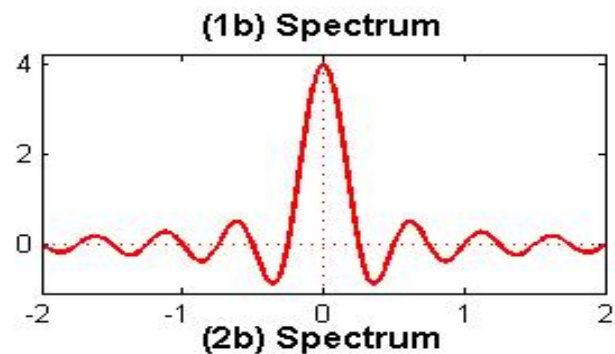
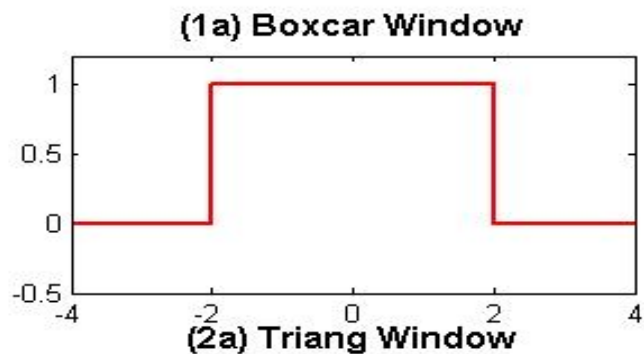
$$w(n) = \begin{cases} \frac{2n}{N-1}, & 0 \leq n \leq \frac{N-1}{2} \\ 2 - \frac{2n}{N-1}, & \frac{N-1}{2} < n \leq N-1 \end{cases}$$

其频率响应为

$$W(e^{j\omega}) = \frac{2}{N} \left[\frac{\sin(N\omega/4)}{\sin(\omega/4)} \right]$$

主瓣宽度为 $(8\pi/N)$ 。

第二节 FIR数字滤波器的设计



第二节 FIR数字滤波器的设计



2、汉宁(Hanning)窗，又称升余弦窗

$$\begin{aligned}w(n) &= \frac{1}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{2n\pi}{N-1}\right) \right] R_N(n) \\&= 0.5 R_N(n) - 0.25 \left(e^{j\frac{2\pi n}{N-1}} + e^{-j\frac{2\pi n}{N-1}} \right) R_N(n)\end{aligned}$$

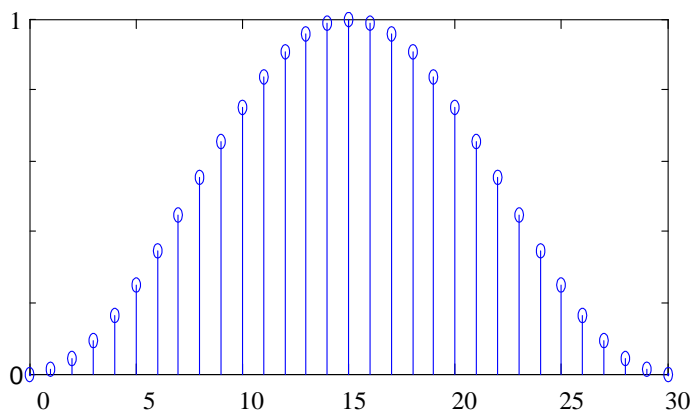
利用傅氏变换的移位特性，其频率响应 $W(e^{j\omega})$ 和幅度响应 $W(\omega)$ 分别为

$$\begin{aligned}W(e^{j\omega}) &= \left\{ 0.5 W_R(\omega) + 0.25 \left[W_R\left(\omega - \frac{2\pi}{N-1}\right) + W_R\left(\omega + \frac{2\pi}{N-1}\right) \right] \right\} e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega} \\&= W(\omega) e^{-j\omega a}\end{aligned}$$

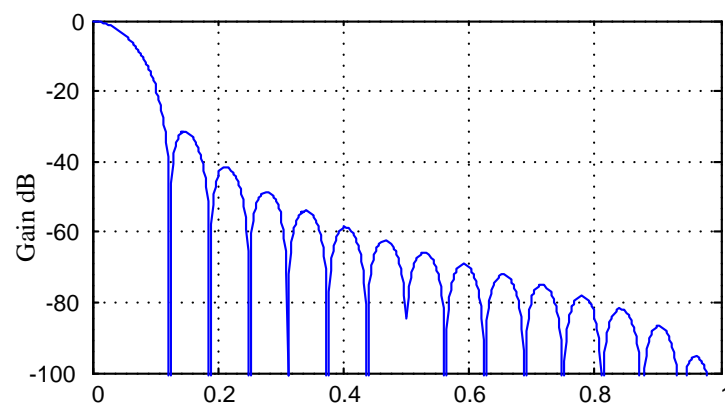
第二节 FIR数字滤波器的设计

$$W(\omega) = 0.5W_R(\omega) + 0.25[W_R(\omega - \frac{2\pi}{N-1}) + W_R(\omega + \frac{2\pi}{N-1})]$$

$W(\omega)$ 是三项矩形窗的幅度响应 $W_R(\omega)$ 的移位加权求和，使旁瓣相互抵消，能量更集中在主瓣，但主瓣宽度比矩形窗的主瓣加宽了一倍，为 $(8\pi/N)$ 。



(a)



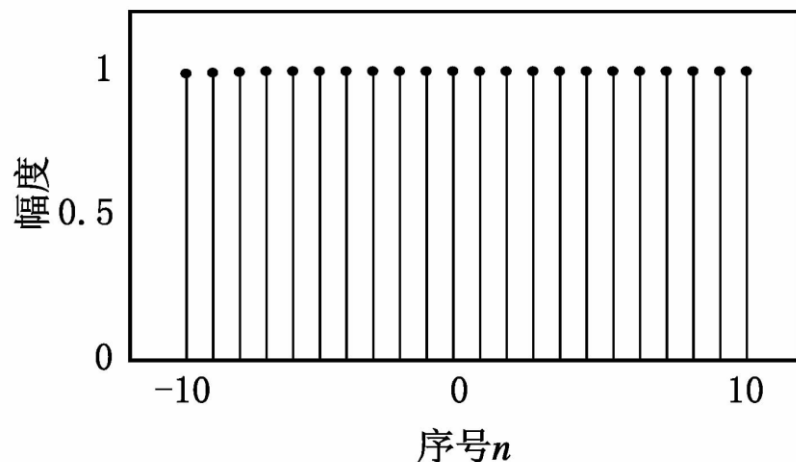
(b)

汉宁窗及其幅度特性

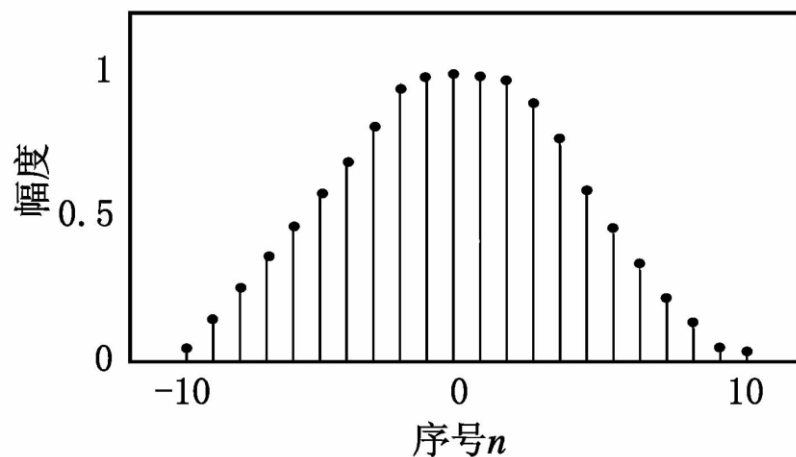
(a) 汉宁窗 (b) 幅度特性

第二节 FIR数字滤波器的设计

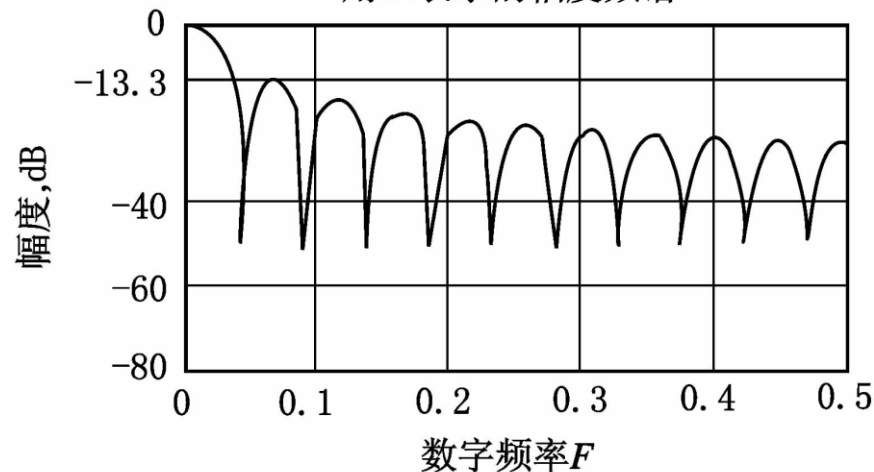
矩形窗: $N=21$



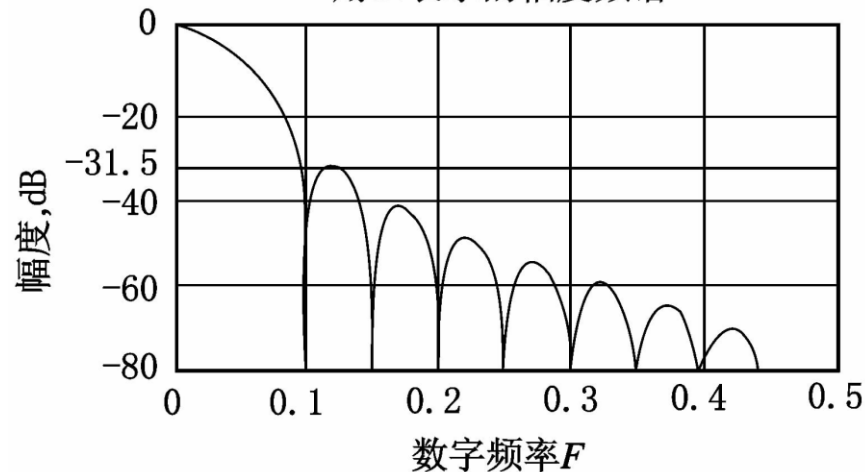
汉宁窗: $N=21$



用dB表示的幅度频谱



用dB表示的幅度频谱



常见DTFT窗口函数及其幅频特性

3、汉明(Hamming)窗，又称改进的升余弦窗

$$w(n) = [0.54 - 0.46 \cos(\frac{2n\pi}{N-1})]R_N(n)$$

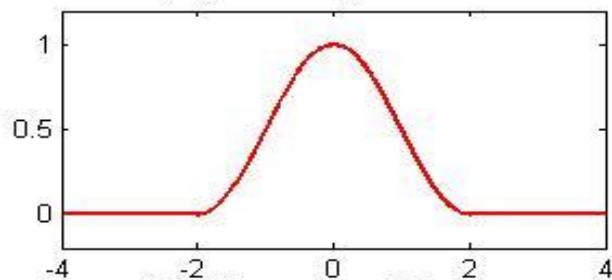
其幅度响应为

$$W(\omega) = 0.54W_R(\omega) + 0.23[W_R(\omega - \frac{2\pi}{N-1}) + W_R(\omega + \frac{2\pi}{N-1})]$$

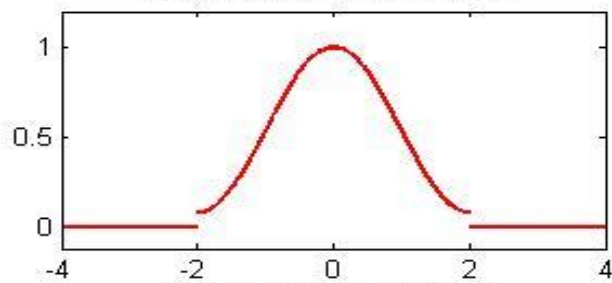
同汉宁窗的主瓣宽度 $8\pi/N$ 相同，但旁瓣幅度更小，旁瓣峰值小于主瓣峰值的1%。

第二节 FIR数字滤波器的设计

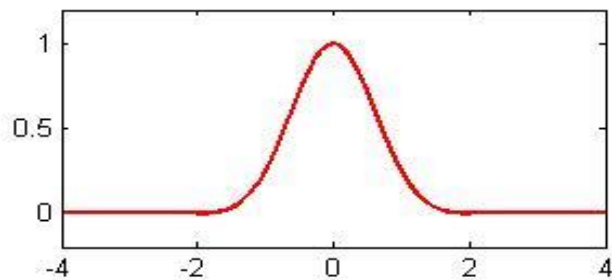
(4a) Hanning Window



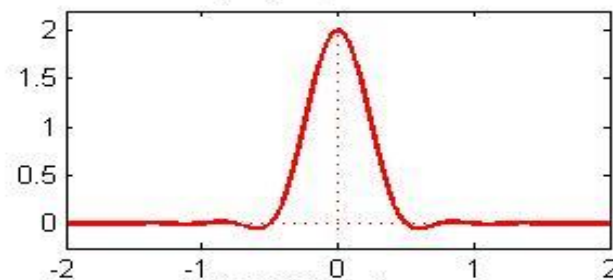
(5a) Hamming Window



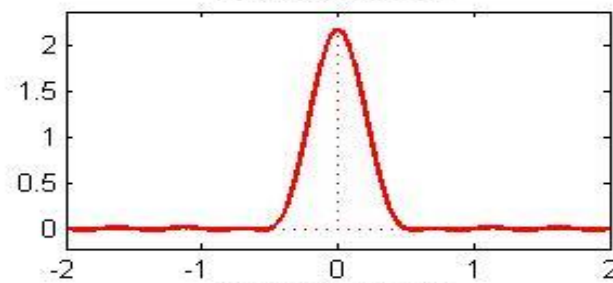
(6a) Parzen Window



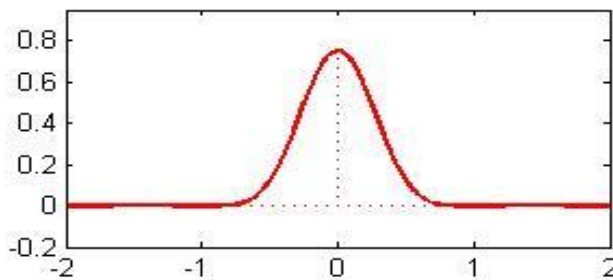
(4b) Spectrum



(5b) Spectrum



(6b) Spectrum



4、布莱克曼(Blankman)窗，又称二阶升余弦窗

其窗函数中包含有余弦的二次谐波分量

$$w(n) = [0.42 - 0.5 \cos(\frac{2n\pi}{N-1}) + 0.08 \cos(\frac{4n\pi}{N-1})] R_N(n)$$

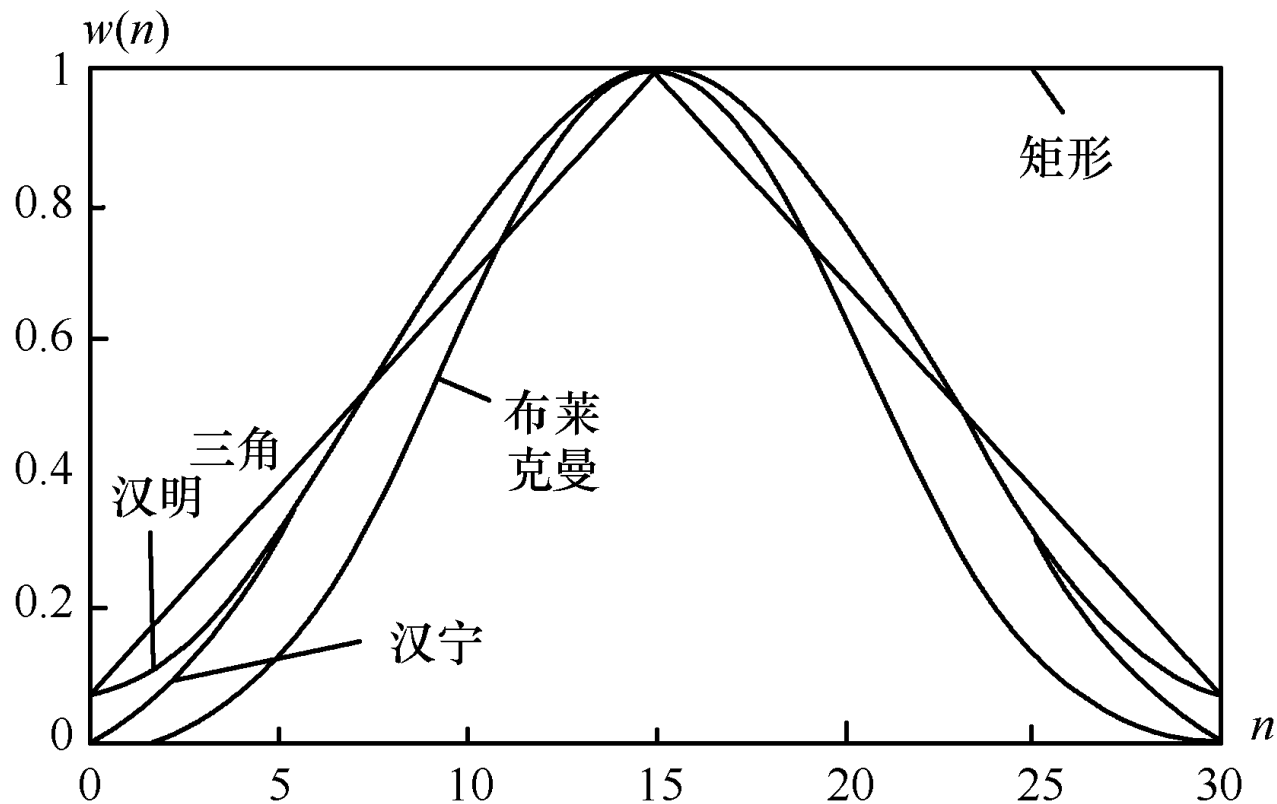
其幅度响应为

$$\begin{aligned} W(\omega) = & 0.42W_R(\omega) + 0.25[W_R(\omega - \frac{2\pi}{N-1}) + W_R(\omega + \frac{2\pi}{N-1})] \\ & + 0.04[W_R(\omega - \frac{4\pi}{N-1}) + W_R(\omega + \frac{4\pi}{N-1})] \end{aligned}$$

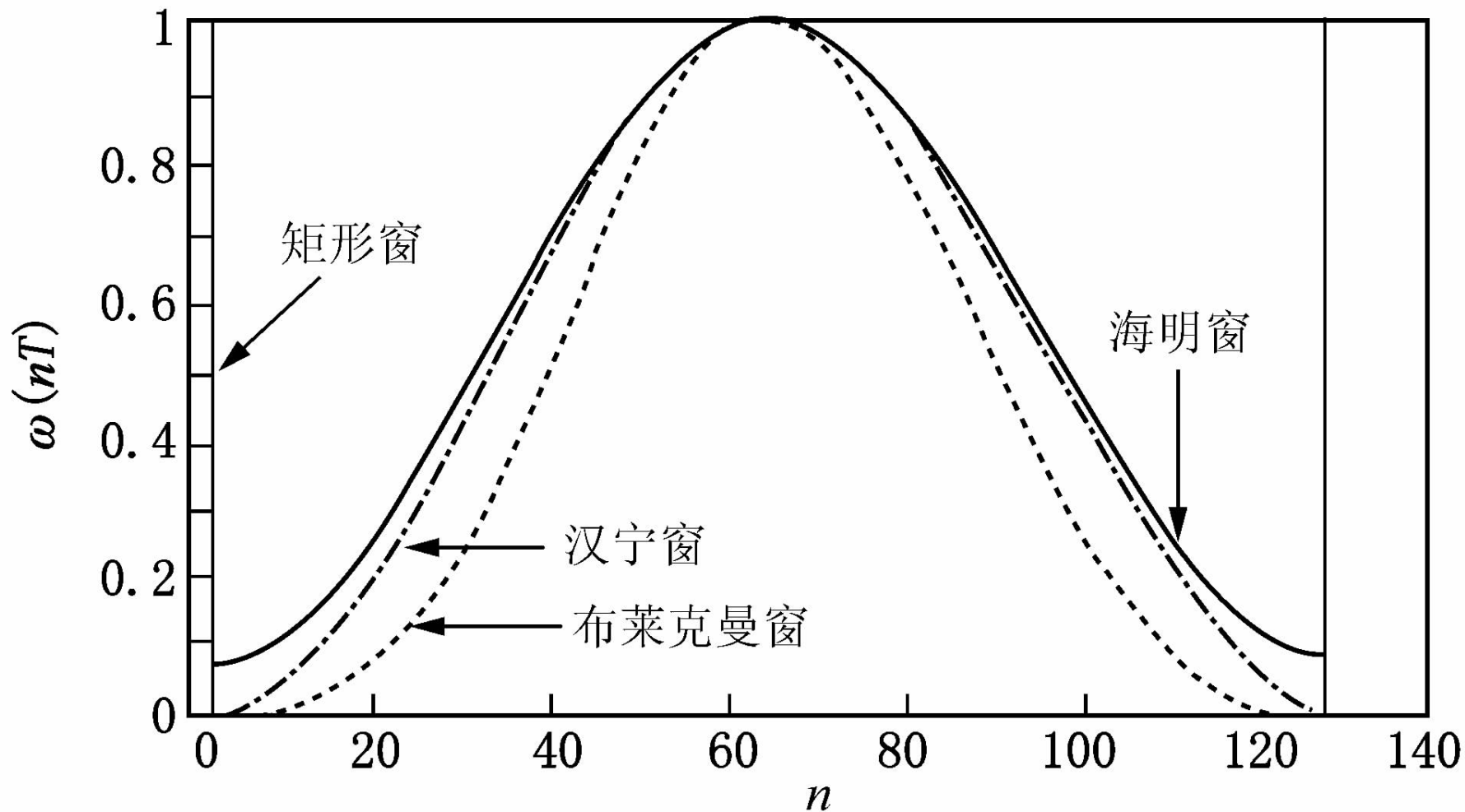
通过加入余弦的二次谐波分量，可进一步降低旁瓣，但其主瓣宽度变为 $12\pi/N$ 。

第二节 FIR数字滤波器的设计

下图是 $N=31$ 时矩形窗、三角窗、汉宁窗、汉明窗及布莱克曼这5种窗口函数的包络曲线



第二节 FIR数字滤波器的设计



常见窗口函数的时间特性 ($N=128$)

5、凯泽(Kaiser)窗

$$w(n) = \frac{I_0(\beta \sqrt{1 - [1 - 2n/(N-1)]^2})}{I_0(\beta)}, 0 \leq n \leq N-1$$

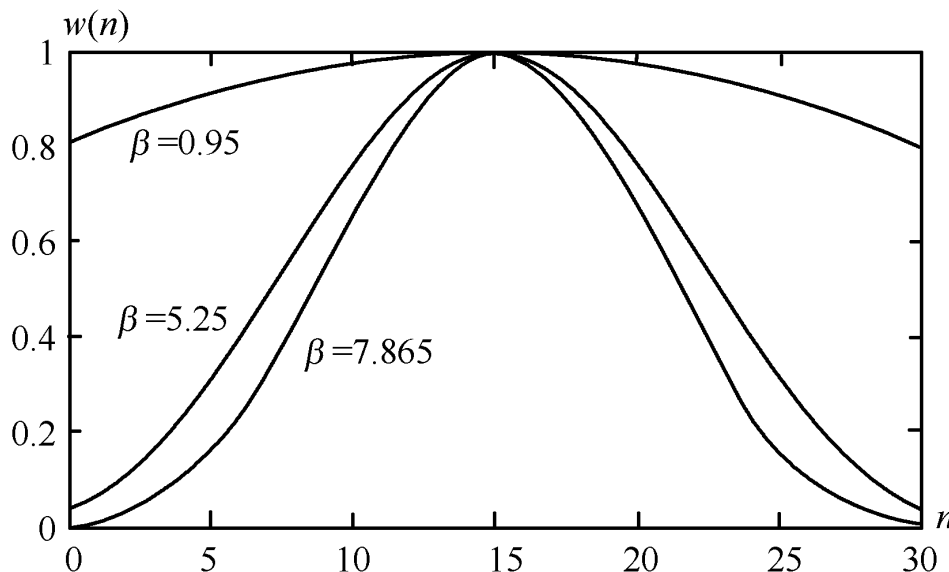
$I_0(\cdot)$ 是第一类修正零阶贝塞尔函数。

$$I_0(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{k!} \left(\frac{x}{2} \right)^k \right]^2$$

一般取15~25项就可满足精度要求。

β 是一个可选参数，用来选择主瓣宽度和旁瓣衰减之间的交换关系，一般说来， β 越大，过渡带越宽，阻带越小衰减也越大。

第二节 FIR数字滤波器的设计



若阻带最小衰减表示为 $A_s = -20\lg\delta_s$ ， β 的确定可采用下述经验公式

$$\beta = \begin{cases} 0 & A_s \leq 21 \\ 0.5842(A_s - 21)^{0.4} + 0.07886(A_s - 21) & 21 < A_s \leq 50 \\ 0.1102(A_s - 8.7) & A_s > 50 \end{cases}$$

第二节 FIR数字滤波器的设计



若滤波器通带和阻带波纹相等，即 $\delta_p=\delta_s$ 时，滤波器节数可通过下式确定

$$N = \frac{-20 \log_{10} \delta_p - 7.95}{14.36 \Delta F} + 1$$

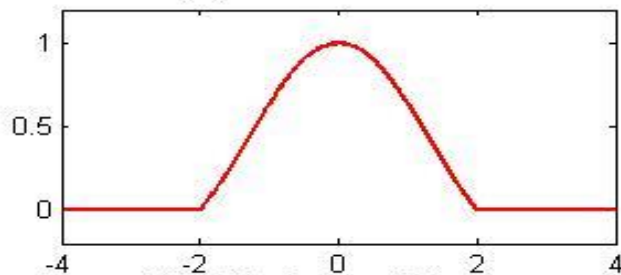
式中

$$\Delta F = \frac{\Delta \omega}{2\pi} = \frac{\omega_s - \omega_p}{2\pi}$$

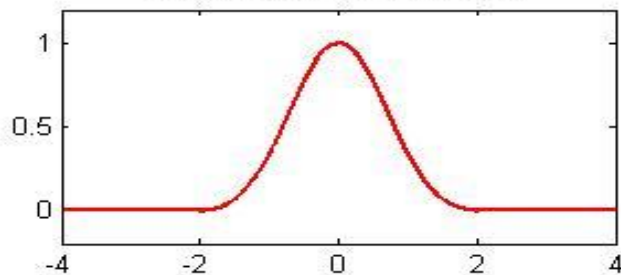
ω_p 、 ω_s ——分别为数字低通滤波器的通带边频与阻带边频。

第二节 FIR数字滤波器的设计

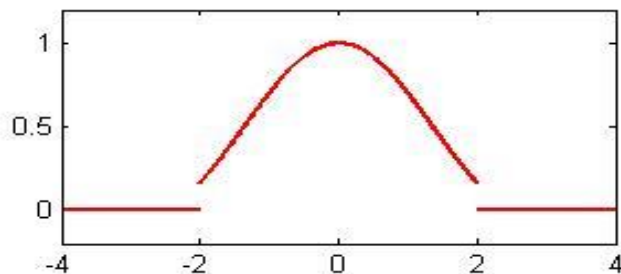
(7a) Daniell Window



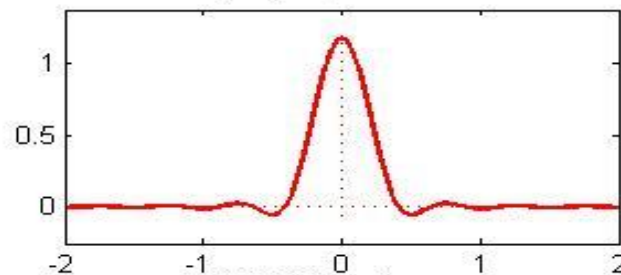
(8a) Blackman Window



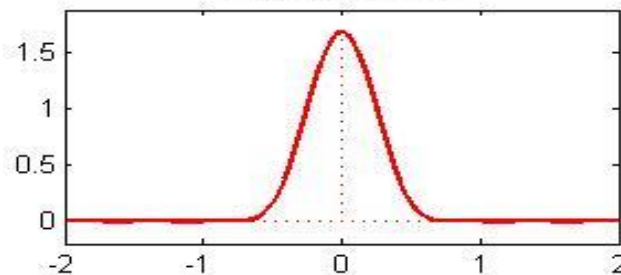
(9a) Kaiser Window



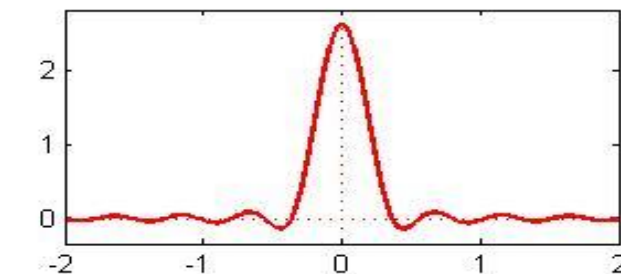
(7b) Spectrum



(8b) Spectrum



(9b) Spectrum



第二节 FIR数字滤波器的设计

表 8.4 窗函数的频谱特征

窗函数	主瓣峰值 增益 G_p	旁瓣峰值增益 主瓣峰值增益 G_s/G_p	旁瓣衰减 A_{sl}, dB	主瓣半 宽 W_m	达到 P_{SL} 时的 主瓣半宽 W_s	6dB 半宽 W_6	3dB 半宽 W_3	高频衰减 $D_s, \text{dB/dec}$
矩形(rectangular)窗	1	0.2172	13.3	1	0.81	0.6	0.44	20
余弦(Cosine)窗	0.6366	0.0708	23	1.5	1.35	0.81	0.59	40
黎曼(Riemann)窗	0.5895	0.0478	26.4	1.64	1.5	0.86	0.62	40
三角(Bartlet)窗	0.5	0.0472	26.5	2	1.62	0.88	0.63	40
汉宁(Hanning)窗	0.5	0.0267	31.5	2	1.87	1.0	0.72	60
海明(Hamming)窗	0.54	0.0073	42.7	2	1.91	0.9	0.65	20
布莱克曼 (Blackman)窗	0.42	0.0012	58.1	3	2.82	1.14	0.82	60
凯塞 (Kaiser)窗 ($\beta=2.6$)	0.4314	0.0010	60	2.98	2.72	1.11	0.80	20

第二节 FIR数字滤波器的设计



窗函数的选择标准:

- 1) 主瓣宽度要尽可能地窄, 以获取较陡的过渡带;
- 2) 最大旁瓣幅度要尽可能地小, 以使能量集中在主瓣, 使肩峰和波纹减小, 增大阻带衰减。

注意: 这两项要求不能同时满足的。

- 当选用主瓣宽度较窄时, 虽然得到较陡的过渡带, 但通带和阻带的波动增大;
- 当选用较小的旁瓣幅度时, 虽然能得到平坦的幅度响应和较小的阻带波纹, 但过渡带变宽, 使频率选择性能变差。

实际选择窗函数时, 是取两者的折中。

第八章 有限长脉冲响应滤波器和窗函数

1、滤波器

目的、分类

2、理想滤波器

低通、带通、高通、带阻

3、理想滤波存在的问题

4、常用的窗函数