中国石油大学
CHINA UNIVERSITY OF PETROLEUM

数字信号分析与处理

Digital Signal Analysis & Processing（D S P）

厚积薄发　开物成务

数字信号分析与处理

Digital Signal Analysis & Processing

第六章 Z变换

第六章 Z变换

- 第一节 Z变换的定义
- 第二节 基本信号的Z变换
- 第三节 Z变换的基本性质
- 第四节 Z反变换
- 第五节 系统函数

第一节 Z变换的定义

一、Z变换的引入

离散时间信号$x(n)$的傅里叶变换DTFT为

$$\begin{cases} X_{\Delta}(f)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-\mathrm{j}2\pi n\Delta f} \\ x(n)=\int_{-\frac{1}{2\Delta}}^{\frac{1}{2\Delta}}X_{\Delta}(f)e^{\mathrm{j}2\pi n\Delta f}df \end{cases}$$

由于$X_{\Delta}(f)$是由一个无穷级数表达的，就存在收敛与不收敛的问题。

- 只有$x(n)$的级数或者$X_\Delta(f)$收敛，离散时间傅里叶变换DTFT才成立，即

$$\left|X_\Delta(f)\right| < \infty$$

而且 $$\left|X_\Delta(f)\right| = \left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j2\pi n\Delta f}\right|$$

$$\le \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x(n)\right|\left|e^{-j2\pi n\Delta f}\right| = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x(n)\right|$$

- 结论：离散时间傅里叶变换存在的条件是

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x(n)\right| < \infty$$

第一节 Z变换的定义

对于
$$\begin{cases} X_{\Delta}(f)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j2\pi n\Delta f} \\ x(n)=\int_{-\frac{1}{2\Delta}}^{\frac{1}{2\Delta}}X_{\Delta}(f)e^{j2\pi n\Delta f}df \end{cases}$$

- 由于DTFT要求的狄利赫里条件，使得部分序列不能直接用DTFT求取其频谱，如单位阶跃信号$u(t)$。
- 若将序列乘以一个适当的**衰减因子r^n**，使其满足绝对可和的条件，则可由DTFT求其频谱，即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x(n)r^{n}\right|<\infty$$

进而有

$$\mathscr{F}\left[x(t)r^{n}\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)r^{n}e^{-j2\pi n\Delta f}$$

此时 $$\mathscr{F}\left[x(t)r^{n}\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)r^{n}e^{-\mathrm{j}2\pi n\Delta f}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\left[re^{-\mathrm{j}2\pi\Delta f}\right]^{n}$$

令 $z=re^{-\mathrm{j}2\pi\Delta f}$

则 $$\mathscr{F}\left[x(t)r^{n}\right]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)(re^{-\mathrm{j}2\pi\Delta f})^{n}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)z^{n}\Big|_{z=re^{-\mathrm{j}2\pi\Delta f}}=X(z)$$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)z^{n}$$ ——离散信号$x(n)$的Z变换

➢离散信号的**Z变换**可看作是**DTFT**的**衰减形式**。

第一节 Z变换的定义

Z变换的唯一性：

$$x(n) \overset{Z}{\longleftrightarrow} X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{n}$$

一一对应

- 一个时间序列$x(n)$的Z变换只要将该序列在不同**时间**的**幅值上乘以**z的相应幂次，然后加起来即可。
- 这实际上是时间序列$x(n)$的**罗朗级数展开式**。

例如：$x(n)=\{-1,2,3,-4,5,\cdots\}$，$n \geq 0$的Z变换。

则有：$X(z)=-1+2z^{1}+3z^{2}-4z^{3}+5z^{4}+\cdots$

例1：求 $x(n)=(1/2)^n u(n)$ 的Z变换

解：

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)z^{n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(\frac{1}{2})^{n}u(n)z^{n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^{n}$$

例2：求 $x(n)=-(1/2)^n u(-n-1)$的Z变换

解：

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)z^{n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}-(\frac{1}{2})^{n}u(-n-1)z^{n}$$

$$=-\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{z}{2}\right)^{n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^{n}$$

第一节 Z变换的定义

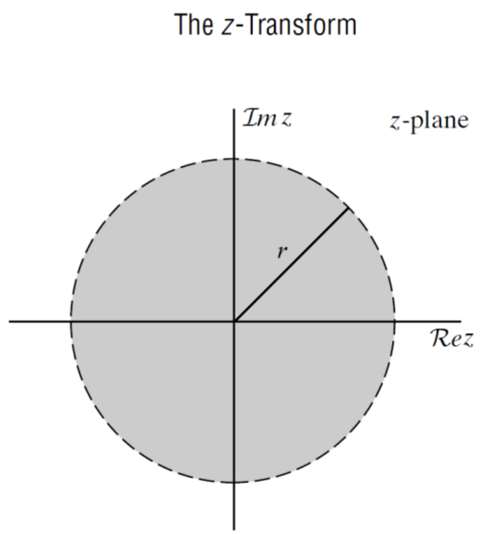
离散时间信号的Z变换:

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{n}\Big|_{z=re^{-j2\pi\Delta f}}$$

- **Z变换**中，z为一个复数，其构成是以实部为横坐标，虚部为纵坐标的复平面，称为**Z平面**。
- 用极坐标形式可以表示为$z=re^{j\theta}$ 。

进而，Z变换表示为

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)(re^{j\theta})^{n}$$



□ 离散时间傅里叶变换DTFT与Z变换：

$$x(n) \overset{\mathscr{F}}{\leftrightarrow} X_{\Delta}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j2\pi n\Delta f} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{n} \Big|_{z=e^{-j2\pi\Delta f}}$$

➢ 当$r=1$，即$z=e^{-j2\pi\Delta f}$时，离散信号$x(n)$的Z变换变为DTFT，因此**Z变换是离散时间傅里叶变换的推广**。

➢ Z变换在Z平面上，$z=e^{-j2\pi\Delta f}$**是一个单位圆**。

第一节　Z变换的定义

- 不是所有序列的离散时间傅里叶变换都是收敛的，即其无穷项幂级数之和不总是有限的。
- 同样，Z变换也不是对所有序列或全部z值都收敛。
- 根据罗朗级数求和理论，Z变换成立的条件是

$$X(z)=\sum^{\infty}\left|x(n)z^{n}\right|=M<\infty$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x(n)r^{n}e^{-\mathrm{j}2\pi\Delta f}\right|\leq\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x(n)\right|\left|r^{n}\right|<\infty$$

或者为

$$\sqrt[n]{\left|x(n)\right|}\left|r\right|<1$$

使级数$X(z)$收敛的所有z值的集合，称为Z的收敛域。

二、Z变换的收敛域ROC

- 离散时间信号$x(n)$的Z变换是建立一个$x(n)$与z的幂级数（称为罗朗*Laurent*级数）的函数关系$X(z)$，至于$X(z)$存在与否，要看级数是否收敛。

- 根据幂级数求和理论，Z变换收敛的**充分必要条件**是该级数绝对可和，即

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x(n)z^{n}\right|=M<\infty$$

使级数$X(z)$收敛的所有z值的集合，称为Z的收敛域。

- Z变换的收敛条件是

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x(n)||z^n| = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)||(re^{-j2\pi\Delta f})^n| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x(n)||r^n| < \infty$$

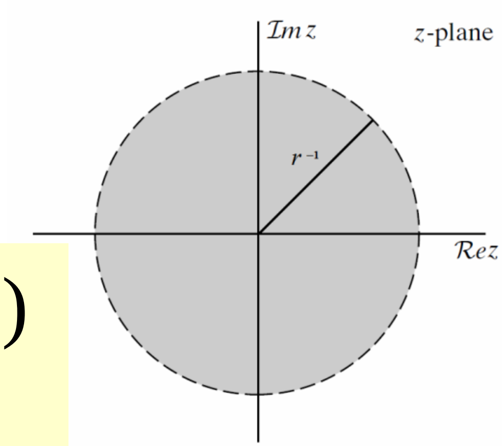
Z变换的**收敛域**取决于r，而r是z的模。

- Z变换收敛域的边界应是**一个圆**。

- Z**的收敛域**将是z平面上的**一个圆的内部或外部**。

- 在z平面上，$X(z)$收敛域将序列$x(n)$与其Z变换一一对应起来。

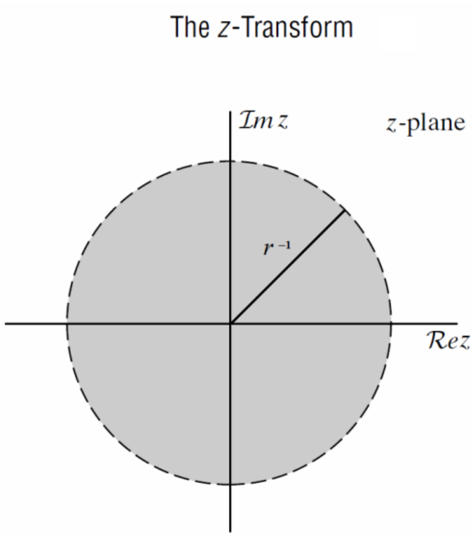
The z-Transform



第一节 Z变换的定义

$$x(n)\overset{\mathscr{F}}{\leftrightarrow} X_{\Delta}(f)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-\mathrm{j}2\pi n\Delta f}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)Z^{n}\Big|_{Z=e^{-\mathrm{j}2\pi\Delta f}}$$

➢只有当$z=e^{-j2\pi\Delta f}$或$r=1$，即$x(n)$的**z变换收敛域包括单位圆**时，$x(n)$才**存在离散时间傅立叶变换DTFT**，否则$x(n)$的DTFT是不存在的。



根据罗朗级数收敛的阿贝尔定理:

设一正项级数为$\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}|a_n|$，令它的后项与前项

比值的极限为ρ, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_{n+1}/a_n|=\rho$;

或者 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$

当$\rho<$ 1 时，级数收敛;

当$\rho=$ 1 时，级数可能收敛 也可能发散;

当$\rho>$ 1 时,级数发散。

- 序列$x(n)$的Z变换的**收敛域ROC**为: $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}|x(n)||z^n|<\infty$

即

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x(n+1)z^{n+1}}{x(n)z^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{|x(n+1)||z|}{|x(n)|}=\rho<1$$

第一节 Z变换的定义

例1： $x(n) = (1/2)^n u(n)$ 的z变换 $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n$

无穷等比级数求和公式：

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \quad (|q| < 1)$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \frac{2}{2-z}$$

其Z变换的收敛域是： $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$ 即 $|z| < 2$

收敛域包含有单位圆，则其傅氏变换存在。

第一节　Z变换的定义

例2：　$x(n) = -(1/2)^n u(-n-1)$ 的z变换

解：$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)z^n=-\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n z^n=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n$$

$$=-\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n-1\right]=1-\frac{1}{1-2z^{-1}}=\frac{2}{2-z}$$

其Z变换的收敛域是_　$\left|\frac{2}{z}\right|<1$　即　$|z|>2$

收敛域不包含有单位圆，则$x(n)$的傅氏变换不存在。

□ x(n)的Z变换收敛域(ROC)判断：

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}x(n)z^{n}+\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{n}=\sum_{n=1}^{\infty}x(-n)z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{n}$$

➢ 对于幂级数 $\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{n}$，设其收敛半径为$R$，则级数$\varphi(z)$在$|z|<R$ 内绝对收敛。

➢ 对于幂级数 $\varphi(z)=\sum_{n=1}^{\infty}x(-n)z^{-n}$，设其收敛半径为$\rho$，则级数$\varphi(z)$在 $\frac{1}{|z|}<\rho$ 或 $|z|>r=\frac{1}{\rho}$ 内绝对收敛。

➢ 由此可知，若罗朗级数$X(z)$有收敛域，则其收敛域为圆环D：$r<|z|<R$，即级数在D内绝对收敛。

第一节　Z变换的定义

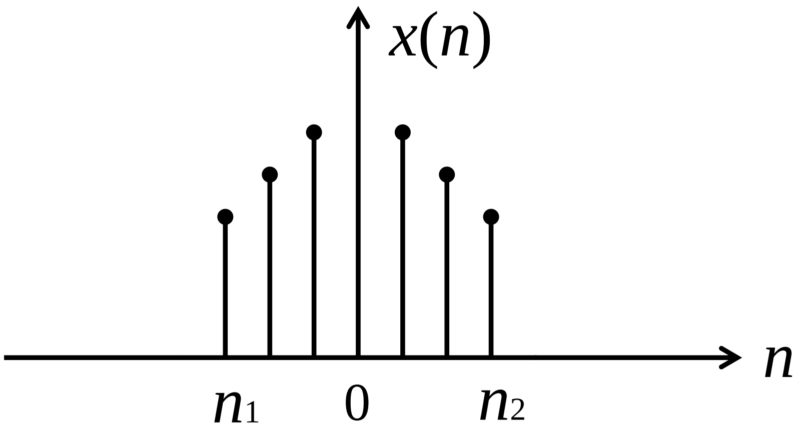
✓ Z变换的唯一性要求一个信号的Z变换必须伴随其相应的收敛域。

✓ 相同的Z变换表达式可能有不同的收敛域，从而对应着不同的信号。

三、几种典型序列Z变换的收敛域

1. 有限长序列

序列$x(n)$只在有限长度n_1~n_2内有值，其余为零。



$$x(n)=\begin{cases} x(n), & n_1\le n\le n_2 \\ 0, & \text{其他}n \end{cases}$$

其Z变换为 $$X(z)=\sum_{n=n_1}^{n_2}x(n)z^{n}$$

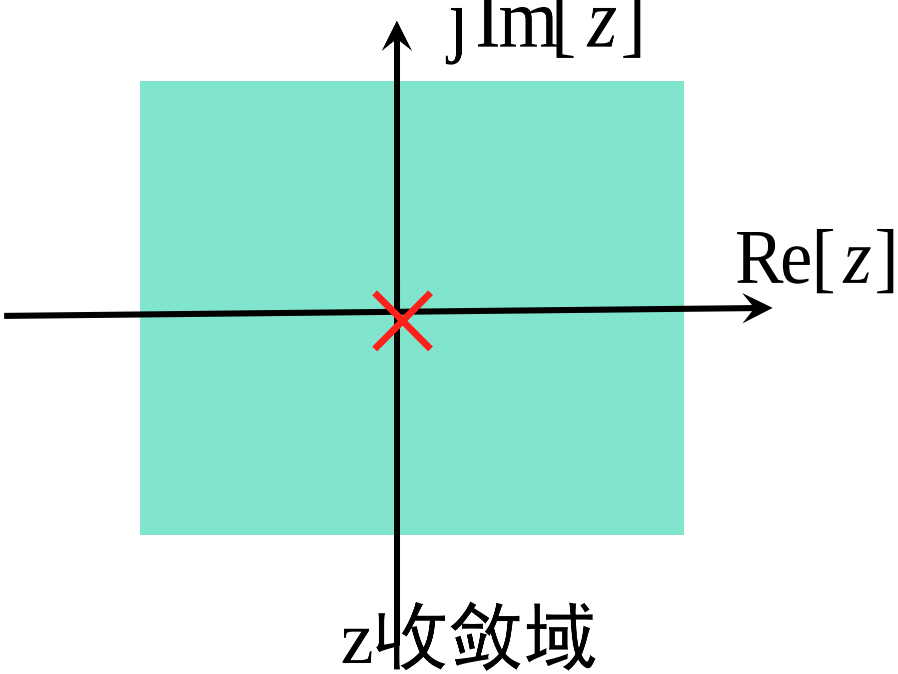
这里，$X(z)$是有限项的级数和，只要级数每一项$x(n)z^n$有界，则有限项和也有界。考虑到$x(n)$有界，所以有限长序列Z变换的收敛域取决于$|z|^n<\infty$，$n_1\le n\le n_2$。

三、几种典型序列Z变换的收敛域

显然，$|z|$在整个开域（0，∞）都能满足以上条件，因此，有限长序列的收敛域是除 0 及∞，即$0<|z|<\infty$，**此时的z平面**称为“**有限z平面**”。

如果对n_1、n_2加以一定的限制，如$n_1\geq 0$或$n_2\leq 0$，则根据条件$|z|^n<\infty$（$n_1\leq n\leq n_2$），收敛域可进一步扩大为包括0点或∞点的半开域：

$$\begin{cases} n_2 \leq 0, & 0<|z|\leq\infty \\ n_1<0\text{和}\, n_2>0, & 0<|z|<\infty \\ n_1\geq 0, & 0\leq|z|<\infty \end{cases}$$



2. 右边序列

$x(n)$在$n \geq n_1$时，序列值不全为零，在$n<n_1$时序列值全为零，有

$$x(n)=\begin{cases} x(n), & n \geq n_1 \\ 0, & n<n_1 \end{cases}$$

$$X(z)=\sum_{n=n_1}^{\infty} x(n) z^{n}=\boxed{\sum_{n=n_1}^{-1} x(n) z^{n}}+\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{n}}$$

*第一项为有限长序列，其收敛域为$0<|z|\leq\infty$；

*第二项为z的正幂次级数，根据阿贝尔定理，其收敛域为$0\leq|z|<R_{x+}$，R_{x+}为最大收敛半径。

➢ 两者的**收敛域**为 $0<|z|<R_{x+}$。

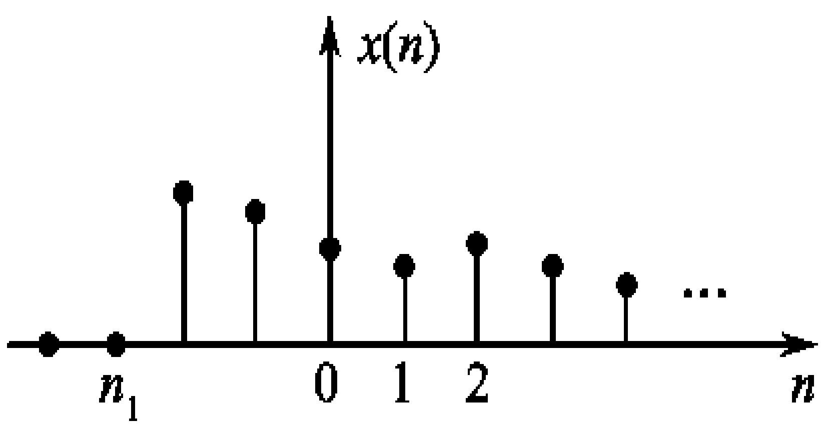
三、几种典型序列Z变换的收敛域

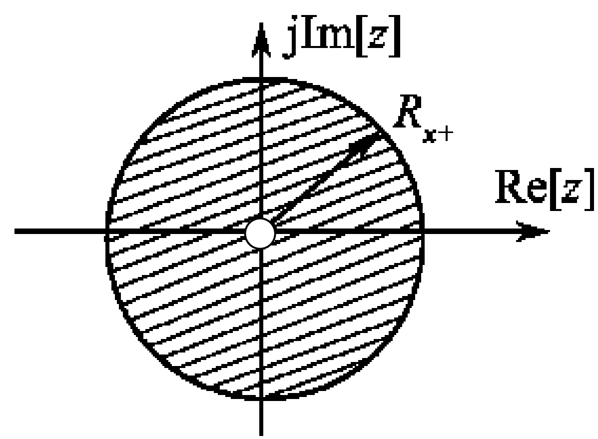
右边序列中最重要的一种序列是“**因果序列**”，即$n_1 \geq 0$的右边序列，因果序列只在$n \geq 0$有值，$n<0$时，$x(n) \equiv 0$，其Z变换为：

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{n}$$

收敛域为： $0 \leq |z| < R_{x+}$

- **Z变换的收敛域包括 0 点是因果序列的特征。**





三、几种典型序列Z变换的收敛域

中国石油大学 CHINA UNIVERSITY OF PETROLEUM

3. 左边序列

$x(n)$在$n>n_2$以外序列值全为零，仅在$n\le n_2$时有非零值，$x(n)$的表达式为：

$$x(n)=\begin{cases} x(n), & n\le n_2 \\ 0, & n>n_2 \end{cases}$$

其Z变换为

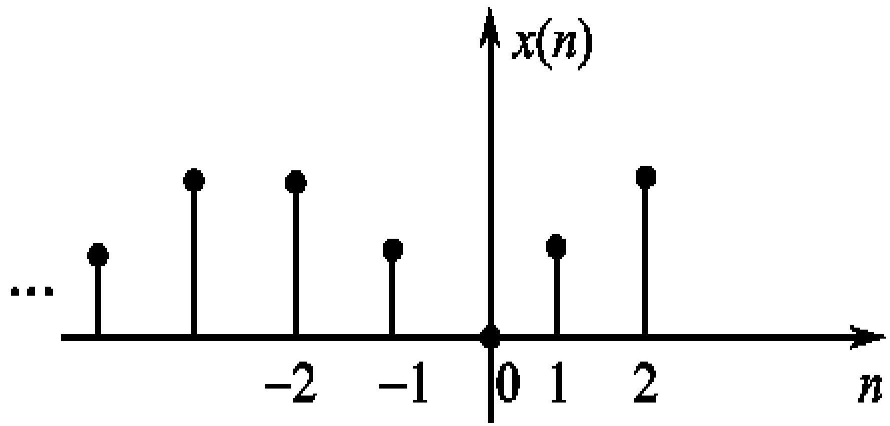
$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{n_2} x(n)z^n=\boxed{\sum_{n=-\infty}^{-1} x(n)z^n}+\boxed{\sum_{n=0}^{n_2} x(n)z^n}$$

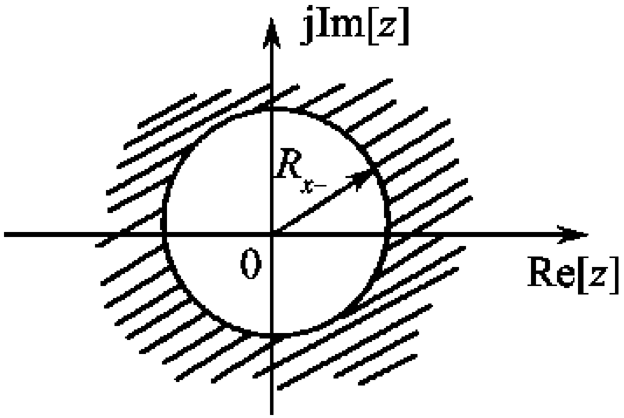
* 第一项为z的负幂次级数，由阿贝尔定理可知，其收敛域为 $R_{x-}<|z|\le\infty$，R_{x-}为最小收敛半径。

* 第二项为有限长序列,其收敛域$0\le|z|<\infty$。

➢ **故**收敛域为 $R_{x-}<|z|<\infty$ 。

三、几种典型序列Z变换的收敛域





4. 双边序列

双边序列的序列值n可取任何整数值，$x(n)$皆有值，即左边序列和右边序列**之和**。

其Z变换为

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}x(n)z^{n}+\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{n}$$

三、几种典型序列Z变换的收敛域

第一项为左边序列，其收敛域为： $R_{x-}<|z|\le\infty$；

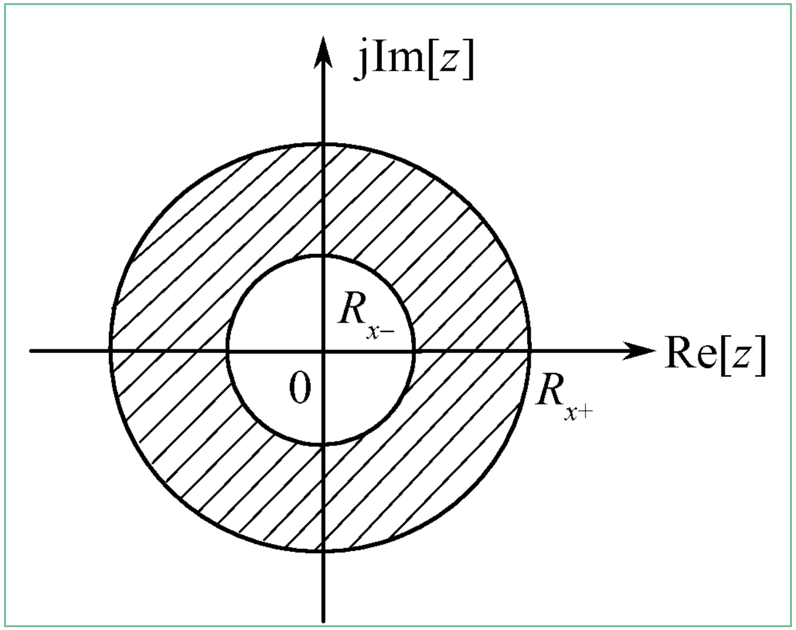
第二项为右边序列(因果)其收敛域为： $0\le|z|<R_{x+}$.

- **收敛域为左边序列与右边序列的重叠部分**。

- 当$R_{x-}<R_{x+}$时，其收敛域为

$$R_{x-}<|z|<R_{x+}$$

- 如果 $R_{x-}>R_{x+}$，级数没有公共收敛域，则Z变换不存在。



三、几种典型序列Z变换的收敛域

例如：$x(n)= -(1/2)^n u(-n-1)$ 的z变换为

$$X(z)=\frac{2}{2-z} \qquad |z|>2$$

$x(n)= (1/2)^n u(n)$ 的z变换为

$$X(z)=\frac{2}{2-z} \qquad |z|<2$$

- Z变换的唯一性要求一个信号的Z变换必须伴随其相应的收敛域。
- 相同的Z变换表达式可能有不同的收敛域，从而对应着不同的信号。

例1-3：求$x(n)=\{-7,3,\underset{\Uparrow}{1},4,-8,5\}$的$Z$变换和$ROC$。

解：$X(z)=-7z^{-2}+3z^{-1}+1z^{0}+4z^{1}-8z^{2}+5z^{3}$

因为$X(z)$中含有z^{n}和z^{-n}项，说明$x(n)$为双边序列，要使级数收敛，z不能为0和∞，所以ROC为$0<|z|<\infty$。

第六章 Z变换

- 第一节 Z变换的定义
- **第二节 基本信号的Z变换**
- 第三节 Z变换的基本性质
- 第四节 Z反变换
- 第五节 系统函数

第二节　基本信号的Z变换

1. 单位脉冲序列函数

$$\delta(n)=\begin{cases}1, & n=0\\ 0, & n\neq 0\end{cases}$$

Z变换为：

$$\mathscr{Z}[\delta(n)]=\sum_{n=0}^{\infty}\delta(k)z^{n}=z^{n}\Big|_{n=0}=1$$

2. 单位阶跃序列$u(n)$

$$u(n)=\begin{cases}1, & n\geq 0\\ 0, & n<0\end{cases}$$

Z变换为：

$$\mathscr{Z}[u(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}u(n)z^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}z^{n}=\frac{1}{1-z}$$

这是一个等比级数，当$|z|<1$时，该级数收敛。

3. 单边指数序列 $a^n u(n)$

Z变换为：

$$\mathscr{Z}[a^n u(n)] = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^n = \frac{1}{1-az} \qquad (|z| < \frac{1}{|a|})$$

4. 左边序列 $-a^n u(-n-1)$

Z变换为：

$$\mathscr{Z}[-a^n u(-n-1)] = -\sum_{n=-\infty}^{-1} (az)^n = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} (az)^{-n}$$

$$= 1 - \frac{1}{1-(az)^{-1}} = \frac{1}{1-az} \qquad (|z| > \frac{1}{|a|})$$

第六章 Z变换

- 第一节 Z变换的定义
- 第二节 基本信号的Z变换
- **第三节 Z变换的基本性质**
- 第四节 Z反变换
- 第五节 系统函数

1. 线性

Z变换是一种线性变换，满足叠加原理。**如果序列**x(n)和y(n)**的**Z**变换分别用**X(z)和Y(z)表示，即

$$\mathscr{Z}[x(n)] = X(z),\ R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

$$\mathscr{Z}[y(n)] = Y(z),\ R_{y-} < |z| < R_{y+}$$

则有
$$\mathscr{Z}[ax(n) + by(n)] = aX(z) + bY(z)$$

$$\max(R_{x-}, R_{y-}) < |z| < \min(R_{x+}, R_{y+})$$

* 即,满足比例性与叠加性；
* 收敛域为两者重叠部分。但某些情况下，收敛域可能会扩大。

2. 时移性质

如果 $\mathscr{Z}[x(n)] = X(z), R_{x-} < |z| < R_{x+}$ 则有：

$$\mathscr{Z}[x(n-m)] = z^m X(z) \;;\quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

证明：

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n-m) Z^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n-m) Z^{(n-m)+m}$$

$$\overset{k=n-m}{=} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) Z^{k+m}$$

$$= Z^m X(Z)$$

例3-1 求序列$x(n)=u(n)-u(n-3)$的z变换。

解：

$$\because \mathscr{Z}[u(n)]=\frac{1}{1-z},\quad |z|<1$$

$$\mathscr{Z}[u(n-3)]=z^3\frac{1}{1-z}=\frac{z^3}{1-z},\quad |z|<1$$

$$\therefore \mathscr{Z}[x(n)]=\frac{1}{1-z}-\frac{z^3}{1-z}=z^2+z+1,\quad |z|<\infty$$

例4 已知序列$x(n)$的z变换为$X(Z)$，求 $7X(z)+3zX(z)+8z^2X(z)+z^3X(z)+6z^5X(z)$所对应的信号

解： 根据时移性质，信号为：

$$7x(n)+3x(n-1)+8x(n-2)+x(n-3)+6x(n-5)$$

3. 序列乘指数序列（z域尺度变换)

如果 $\mathscr{Z}[x(n)] = X(z), R_{x-} < |z| < R_{x+}$ ，则

$$\mathscr{Z}[a^n x(n)] = X(az), \quad R_{x-} < |az| < R_{x+}$$

证明：

$$\mathscr{Z}[a^n x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n x(n) z^n$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(az)^n = X(az) \;;$$

$$R_{x-} < |az| < R_{x+}; \quad 即 \frac{R_{x-}}{|a|} < |z| < \frac{R_{x+}}{|a|}$$

第三节 Z变换的基本性质

P85

4. 序列乘*n*（z域微分)

如果 $\mathscr{Z}[x(n)] = X(z), R_{x-} < |z| < R_{x+}$，则

$$\mathscr{Z}[nx(n)] = z\frac{dX(z)}{dz}, \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

证明：$\mathscr{Z}[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{n}$

两边对z取微分：$\frac{dX(z)}{dz} = \sum_{k=0}^{\infty} nx(n) z^{(n-1)} = z^{-1}\sum_{k=0}^{\infty} nx(n) z^{n}$

即：

$$\mathscr{Z}[nx(n)] = z\frac{dX(z)}{dz}$$

同理：

$$\mathscr{Z}[n^2 x(n)] = z\frac{dX(z)}{dz} + z^2\frac{dX^2(z)}{dz^2}; \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

例3-2 求序列 $x(n)=n(\frac{1}{2})^n u(n)$ 的Z变换

解： 设 $g(n)=(1/2)^n u(n)$，其z变换为

$$G(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(n)z^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=\frac{2}{2-z} \qquad |z|<2$$

则有

$$\frac{\mathrm{d}G(z)}{\mathrm{d}z}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{2}{2-z}\right)=\frac{2}{(2-z)^2}$$

由Z域微分性质，可得$x(n)$的Z变换为

$$X(z)=z\frac{\mathrm{d}G(z)}{\mathrm{d}z}=\frac{2z}{(2-z)^2} \qquad |z|<2$$

5. 序列的反转

如果 $\mathscr{Z}[x(n)] = X(z), R_{x-} < |z| < R_{x+}$，则

$$\mathscr{Z}[x(-n)] = X(z^{-1}) \qquad \frac{1}{R_{x+}} < |z| < \frac{1}{R_{x-}}$$

证明：$$\mathscr{Z}[x(-n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-n)z^{n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(z^{-1})^{n} = X(\frac{1}{z}),\quad R_{x-} < |z^{-1}| < R_{x+},$$

即 $$\frac{1}{R_{x+}} < |z| < \frac{1}{R_{x-}}$$

6. 序列的共轭

如果 $\mathscr{Z}[x(n)] = X(z), R_{x-} < |z| < R_{x+}$，则

$$\mathscr{Z}[x^*(n)] = X^*(z^*)，\ R_{x-} < |z| < R_{x+}\ ;$$

证明：
$$\mathscr{Z}[x^*(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n) z^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x(n)(z^*)^n]^*$$

$$= [\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(z^*)^n]^* = X^*(z^*)，\ R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

7. 褶积定理

若 $X(z)=\mathscr{Z}[x(n)],\ R_{x-}<|z|<R_{x+}$，

$H(z)=\mathscr{Z}[h(n)],\ R_{h-}<|z|<R_{h+}$，

则 $y(n)=x(n)*h(n)$

$$\boxed{\mathscr{Z}[y(n)]=Y(z)=X(z)H(z) \qquad R_{y-}<|z|<R_{y+}}$$

其中， $R_{y-}=\max[R_{x-},R_{h-}]$, $R_{y+}=\min[R_{x+},R_{h+}]$

P77

8. 相关定理

已知实序列$x(n)$和y(n)的互相关序列为

$$r_{xy}(m)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)y(n-m)$$

则$r_{xy}(m)$的Z变换为

$$\boxed{R_{xy}(z)=X(z)Y(\frac{1}{z})}$$

若 y(n) = $x(n)$，则自相关序列$r_{xx}(m)$的Z变换为

$$\boxed{R_{xx}(z)=X(z)X(\frac{1}{z})}$$

例3-3 已知 $x(n)=a^n u(n), h(n)=b^n u(n)-ab^{n-1}u(n-1)$，

求 $y(n)=x(n)*h(n), |b|<|a|$.

解：

$$X(z)=\mathscr{Z}[x(n)]=\frac{1}{1-az},\quad |z|<\frac{1}{|a|};$$

$$H(z)=\mathscr{Z}[h(n)]=\frac{1}{1-bz}-az\frac{1}{1-bz}$$

$$=\frac{1-az}{1-bz},\quad |z|<\frac{1}{|b|}$$

$$\therefore Y(z)=X(z)H(z)=\frac{1}{1-az}\frac{1-az}{1-bz}=\frac{1}{1-bz}\qquad |z|<\frac{1}{|b|}$$

$X(z)$的极点与$H(z)$的零点相消，$Y(z)$的收敛域变大

$$\therefore y(n)=x(n)*h(n)=\mathscr{Z}^{-1}[Y(z)]=b^n u(n)$$

第六章 Z变换

- 第一节 Z变换的定义
- 第二节 基本信号的Z变换
- 第三节 Z变换的基本性质
- **第四节 Z反变换**
- 第五节 系统函数

第四节 Z反变换

从给定的Z变换表达式$X(z)$以及其收敛域，求原序列$x(n)$的过程，称为**Z反变换**，**或逆Z变换**实质上是求$X(z)$的**幂级数展开式各项的系数**。

记作：$x(n) = \mathscr{Z}^{-1}[X(z)]$

1、围线积分法（留数法）

按复变函数中的留数定理，由围线积分给出Z的反变换，即

$$x(n) = \mathscr{Z}^{-1}[X(z)] = \frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z) z^{-n-1} dz$$

其中，围线c是包围$X(z)z^{-n-1}$所有极点的逆时针闭合积分路线，通常选择在z平面收敛域内以原点为中心的圆。

若$X(z)z^{-n-1}$**在积分围线**c**内的有限个极点集合为**$\{z_i\}$，则根据留数定理有

$$x(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z)z^{-n-1}dz=\sum_i \mathrm{Res}\left[X(z)z^{-n-1}\right]_{z=z_i}$$

式中，Res表示极点的留数，z_i表示$X(z)z^{-n-1}$的极点。

2、幂级数展开法（长除法）

- 按Z**变换**定义为z的幂级数，只要在给定的收敛域内将$X(z)$展开成幂级数形式，则级数中的系数就是原序列$x(n)$。

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{n}=\cdots+x(-2)z^{-2}+x(-1)z^{-1}+$$

$$x(0)z^{0}+x(1)z^{1}+x(2)z^{2}+\cdots$$

第四节　Z反变换

因此，**在具体进行长除法时**，要根据收敛域，先确定序列是左边序列还是右边序列；**对于左边序列**Z变换为z的**负幂级数**，多项式长除法的结果应按**降幂**排列展开；对于**右边序列**，Z变换为z的**正幂级数**，多项式长除法的结果应按**升幂**排列进行展开。

➢ 方法：

* 若给定一个z变换表达式，用其分母多项式直接去除分子多项式，恢复成z的幂级数形式，则幂级数前面的系数即是所求的序列。

例4-1　已知$x(n)$的Z变换为$X(z)=3z^{-2}+7+2z+8z^2+5z^4$，求$X(z)$逆变换$x(n)$。

解：　在 $X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^n$ 的幂级数展开式，z的n次方的系数即为$x(n)$相应的序列值。

则有

$$x(n)=\begin{cases}3, & n=-2\\ 7, & n=0\\ 2, & n=1\\ 8, & n=2\\ 5, & n=4\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

例4-2　已知$a(n)$的Z变换为$A(z)=\dfrac{1}{z-a}$，求Z逆变换$a(n)$

解：　要将$A(z)$展开成幂级数，一般要用等比级数公式，这里对公比分别讨论。

当$|a|>1$时，

$$A(z)=\frac{1}{z-a}=\frac{1}{-a}\frac{1}{1-\dfrac{1}{a}z}$$

按等比级数有

$$A(z)=-\frac{1}{a}(1+\frac{1}{a}z+\frac{1}{a^2}z^2+\cdots)$$

$$a(n)=\{-\frac{1}{a},-\frac{1}{a^2},-\frac{1}{a^3},\cdots,,-\frac{1}{a^{n+1}},\cdots)$$

当$|a|<1$时，

$$A(z)=\frac{1}{z-a}=\frac{1}{z}\frac{1}{1-az^{-1}}$$

按等比级数有

$$A(z)=\frac{1}{z}(1+az^{-1}+a^2z^{-2}+\cdots)$$

则$a(n)$为，

$$a(n)=\{\cdots,a^{-n+1},\cdots,a^3,a^2,a,\underset{\substack{\Uparrow\\ n=-1}}{1}\}$$

例4-3 用长除法求 $X(z)=(1-az)^{-1}$ $\quad |z|<|a|$ 的逆Z变换。

解：由收敛域知，这是一右边序列，用长除法将其展开成z的正幂级数，即将商的多项式按升幂排列

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1+az+a^2z^2+\cdots \\
\hline
1-az & 1 \\
 & \underline{1-az} \\
 & \quad az \\
 & \quad \underline{az-a^2z^2} \\
 & \qquad a^2z^2 \\
 & \qquad \cdots
\end{array}
$$

$$X(z)=1+az^1+a^2z^2+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}a^nz^n$$

所以 $\quad x(n)=a^nu(n)$

第四节 Z反变换

例4-3-2 用长除法求 $X(z)=(1-az)^{-1} \quad |z|>|a|$ 的逆Z变换。

解：由收敛域知，这是一左边序列，用长除法将其展开成z的负幂级数，即将商的多项式按降幂排列

$$
\begin{array}{r@{}l}
 & -a^{-1}z^{-1}-a^{-2}z^{-2}-\cdots \\
\cline{2-2}
1-az \big) & 1 \\
 & 1-a^{-1}z^{-1} \\
\cline{2-2}
 & a^{-1}z^{-1} \\
 & a^{-1}z^{-1}-a^{-2}z^{-2} \\
\cline{2-2}
 & a^{-2}z^{-2} \\
 & \cdots
\end{array}
$$

$$X(z)=-a^{-1}z^{-1}-a^{-2}z^{-2}-\cdots=-\sum_{n=-\infty}^{-1}a^{n}z^{n}$$

所以 $\quad x(n)=-a^{n}u(-n-1)$

第四节 Z反变换

例： 用长除法求 $X(z)=\dfrac{z}{(1-z)^2}$ $\quad |z|<1$ 的逆Z变换。

解：由收敛域知，这是一右边序列，按升幂排列

$$
\begin{array}{r|l}
 & z+2z^2+3z^3+\cdots \\
\hline
z^2-2z+1 & z \\
 & \underline{z-2z^2+z^3} \\
 & \quad 2z^2-z^3 \\
 & \quad \underline{2z^2-4z^3+2z^4} \\
 & \qquad 3z^3-2z^4 \\
 & \qquad \underline{3z^3-6z^4+3z^5} \\
 & \qquad\quad 4z^4-3z^5
\end{array}
$$

$$X(z)=z+2z^2+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty} nz^n \cdots \qquad x(n)=nu(n-1)=nu(n)$$

例：用长除法求 $X(z)=\dfrac{z}{(1-z)^2}\quad |z|<1$ 的逆Z变换。

解：已知单位阶跃信号$u(n)$的z变换为

$$U(z)=\frac{1}{1-z}\qquad |z|<1$$

则有

$$\frac{\mathrm{d}U(z)}{\mathrm{d}z}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{1}{1-z}\right)=\frac{1}{(1-z)^2}$$

由Z域微分性质，$nx(n)$的Z变换为 $z\dfrac{\mathrm{d}X(z)}{\mathrm{d}z}$

可得

$$nu(n)\overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow}\frac{z}{(1-z)^2}\qquad |z|<1$$

第四节 Z反变换

例： 用长除法求 $X(z)=\dfrac{z}{(1-z)^2}$ $\quad |z|>1$ 的逆Z变换。

解：由收敛域知，这是一左边序列，按降幂排列

$$
\begin{array}{r|l}
 & z^{-1}+2z^{-2}+3z^{-3}+\cdots \\
\hline
z^2-2z+1 & z \\
 & \underline{z-2+z^{-1}} \\
 & 2-z^{-1} \\
 & \underline{2-4z^{-1}+2z^{-2}} \\
 & 3z^{-1}\text{-}2z^{-2} \\
 & \underline{3z^{-1}-6z^{-2}+3z^{-3}} \\
 & 4z^{-2}\text{-}3z^{-3}
\end{array}
$$

$$X(z)=z^{-1}+2z^{-2}+\cdots=\sum_{n=-\infty}^{-1}-nz^{n} \qquad x(n)=-nu(-n-1)=$$

3、部分分式展开法

有理式：**数字和字符经有限次加、减、乘、除运算所得的式子。**

有理分式：**含字符的式子做分母的有理式**，或两个多**项式的商。分子的次数低于分母时称为真分式。**

部分分式：**把x的一个实系数的真分式分解成几个分式的和，使各分式具有** $\dfrac{a}{(x+A)^k}$ **或** $\dfrac{ax+b}{(x^2+Ax+B)^k}$ **的形式，其中x^2+Ax+B是实数范围内的不可约多项式，而且k是正整数。**这时，称各分式为**原分式的**“部分分式”。

通常，$X(z)$**可表成有理分式形式：**

$$X(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{\sum_{i=0}^{M} b_i z^i}{1+\sum_{i=1}^{N} a_i z^i}$$

因此，$X(z)$可以展成以下**部分分式形式**：

$$X(z)=\sum_{n=0}^{M-N} B_n z^n+\sum_{k=1}^{N-r}\frac{A_k}{1-z_k z}+\sum_{k=1}^{r}\frac{C_k}{(1-z_i z)^k}$$

其中，当$M\geq N$时，则才存在B_n；z_k为$X(z)$的各单极点，z_i为$X(z)$的一个r 阶极点。

例4-4 利用部分分式法，求 $X(z)=\dfrac{1}{(1-2z)(1-0.5z)}$， $|z|<2$ 的z反变换。

解：

$$X(z)=\frac{1}{(1-2z)(1-0.5z)}$$

$$=\frac{A_1}{1-2z}+\frac{A_2}{1-0.5z}$$

$$\begin{cases} A_1+A_2=1 \\ 0.5A_1+2A_2=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} A_1=\dfrac{4}{3} \\ A_2=-\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$$\therefore \quad X(z)=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{1-2z}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-0.5z}$$

$$x(n)=\begin{cases}\frac{4}{3}\cdot 2^{n}-\frac{1}{3}\cdot(0.5)^{n}, & n\geq 0\\ 0 & ,n<0\end{cases}$$

例4-5：求 $X(z)=\dfrac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$, $(1)\ 1<|z|<2$, $(2)\ 2<|z|<\infty$ 的z反变换。

解：

$$X(z)=\frac{1}{z-2}+\frac{2}{z^2+1}$$

(1) 当$1<|z|<2$

$$X_1(z)=\frac{1}{z-2}$$ 为右边序列

$$X_2(z)=\frac{2}{z^2+1}$$ 为左边序列

(2) 当$2<|z|<\infty$

$$X_1(z)=\frac{1}{z-2}$$ 和 $$X_2(z)=\frac{2}{z^2+1}$$ 均为左边序列

4、查表法

Z反变换的最直接的方法是查现成的Z变换表。

序列	Z变换	ROC
$\delta(n)$	1	全部z
$u(n)$	$\frac{z}{z-1}$	$\|z\|>1$
$a^n u(n)$	$\frac{z}{z-a}$	$\|z\|>\|a\|$
$-a^n u(-n-1)$	$\frac{z}{z-a}$	$\|z\|<\|a\|$
$nu(n)$	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$\|z\|>1$
$na^n u(n)$	$\frac{az}{(z-a)^2}$	$\|z\|>\|a\|$
$e^{j\omega_0 n}u(n)$	$\frac{z}{z-e^{j\omega_0}}$	$\|z\|>1$

第六章 Z变换

- 第一节 Z变换的定义
- 第二节 基本信号的Z变换
- 第三节 Z变换的基本性质
- 第四节 Z反变换
- 第五节 系统函数

第五节 系统函数

1. 系统函数与系统的频率响应

已知系统单位脉冲响应为$h(n)$，则线性时不变系统零状态响应的输入与输出关系为

$$x(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(n)$$

则

$$\boxed{y(n)=x(n)*h(n)}$$

两边取Z变换得 $Y(z)=X(z)H(z)$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}$$

称$H(z)$为线性时不变系统的**系统函数**，它是系统单位脉冲响应的Z变换。

第五节　系统函数

$$H(z)=\mathscr{Z}[h(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n)z^{n}$$

而系统函数$H(z)$在**单位圆上**的Z变换，即为**单位脉冲响应的离散时间傅里叶变换DTFT**。

$$H(e^{j2\pi f})=\mathscr{F}[h(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n)e^{-j2\pi n\Delta f}$$

其就是系统**的频率响应**，$H(e^{j2\pi f})$又称为系统**的传输函数**。

频率响应有明显的物理意义，考虑当给LTI系统输入单频率的复信号$x(n)=e^{\mathrm{j}2\pi n\Delta f_0}$，则系统的输出为

$$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(m)e^{-\mathrm{j}2\pi f_0(n-m)\Delta}$$

$$=e^{\mathrm{j}2\pi f_0 n\Delta}\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(m)e^{-\mathrm{j}2\pi f_0 m\Delta}=e^{\mathrm{j}2\pi f_0 n\Delta}H(e^{\mathrm{j}2\pi f_0})$$

- **表明：** 当输入为一个单频率的信号时，输出仍然是同一频率的信号，但它的幅度与相位都因为$H(e^{\mathrm{j}2\pi f})$ 的加权而发生了变化，且$|H(e^{\mathrm{j}2\pi f})|$的值是随频率的变化而变化的。

2、系统的因果性与稳定性的Z变换表示

1）因果系统

对于线性时不变系统，如果它是因果系统，则要求它的单位脉冲响应满足条件

$$h(n)=0, n<0$$

根据Z变换的性质，$h(n)$是否为因果信号，与$H(z)$**收敛域**的情况有直接的关系。

➢ **离散线性时不变系统是因果系统的充要条件**是：系统函数的收敛域ROC是某个圆内部的区域，且包括零点，即

$$\boxed{0\le|z|<R_{x+}}$$

2）稳定系统

由稳定系统的充要条件有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|<\infty$$

根据Z变换的定义

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)z^{n}|_{|z|=1}<\infty}$$

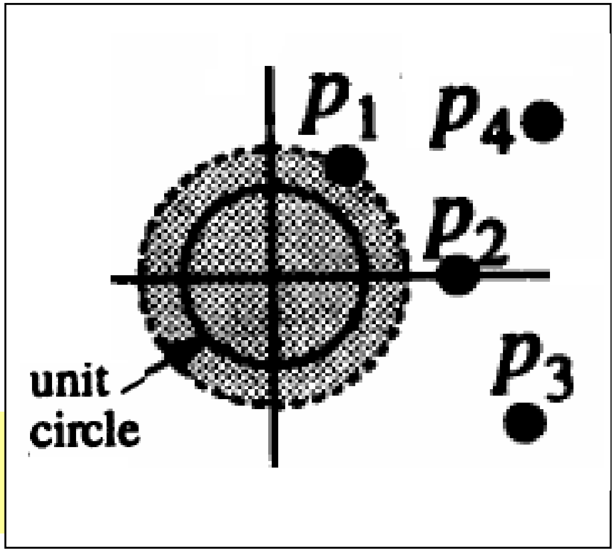
即：***H*(z)在|z|=1的单位圆上收敛**，这要求系统函数的**所有极点都必须不在单位圆上**。

第五节　系统函数

- 离散线性时不变系统是稳定系统的充要条件是：

  系统函数的收敛域必须**包含单位圆**。

- 对右边Z变换，$H(z)$的所有极点在收敛域的圆以外，因而因果、稳定系统$H(z)$的所有极点必须位于单位圆外。



- **因果和稳定系统的收敛域为：**

$$0 \le |z| \le 1$$

P99

3、系统函数的组合

1）串联

$$x(n) \longrightarrow \boxed{h_1(n)} \longrightarrow \boxed{h_2(n)} \longrightarrow y(n)$$

$$y(n) = x(n) * h_1(n) * h_2(n) = x(n) * [h_1(n) * h_2(n)]$$

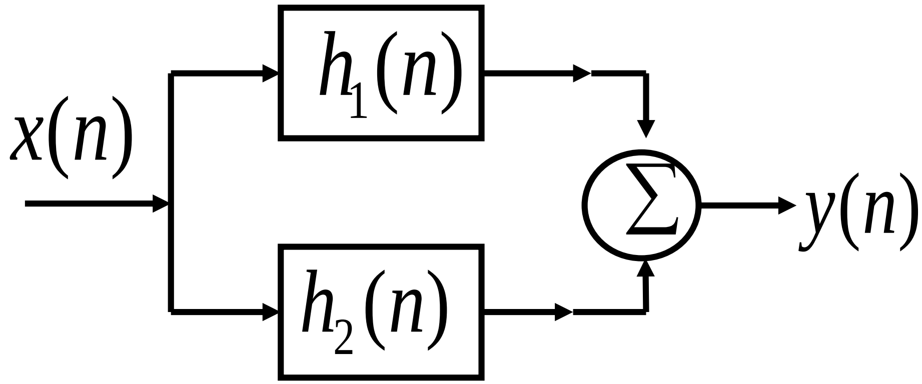
Z变换有：

$$Y(z) = X(z)H_1(z)H_2(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = H_1(z)H_2(z)$$

第五节 系统函数

2）并联



$$y(n)=x(n)*[h_1(n)+h_2(n)]$$

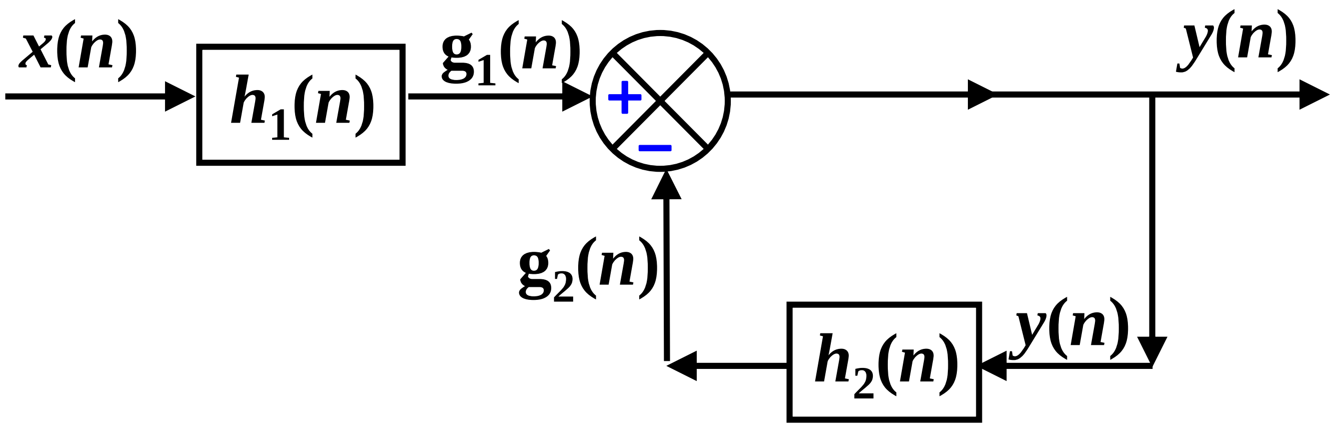
Z变换有：

$$Y(z)=X(z)[H_1(z)+H_2(z)]$$

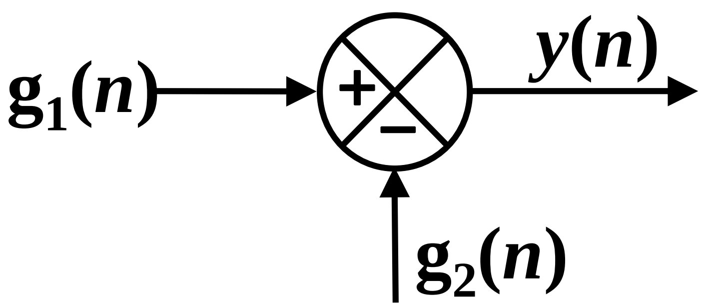
$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=H_1(z)+H_2(z)$$

3）反馈

➢ 滤波器的反馈，是指滤波器的输出信号在经过滤波后又加入到输入的信号上去。

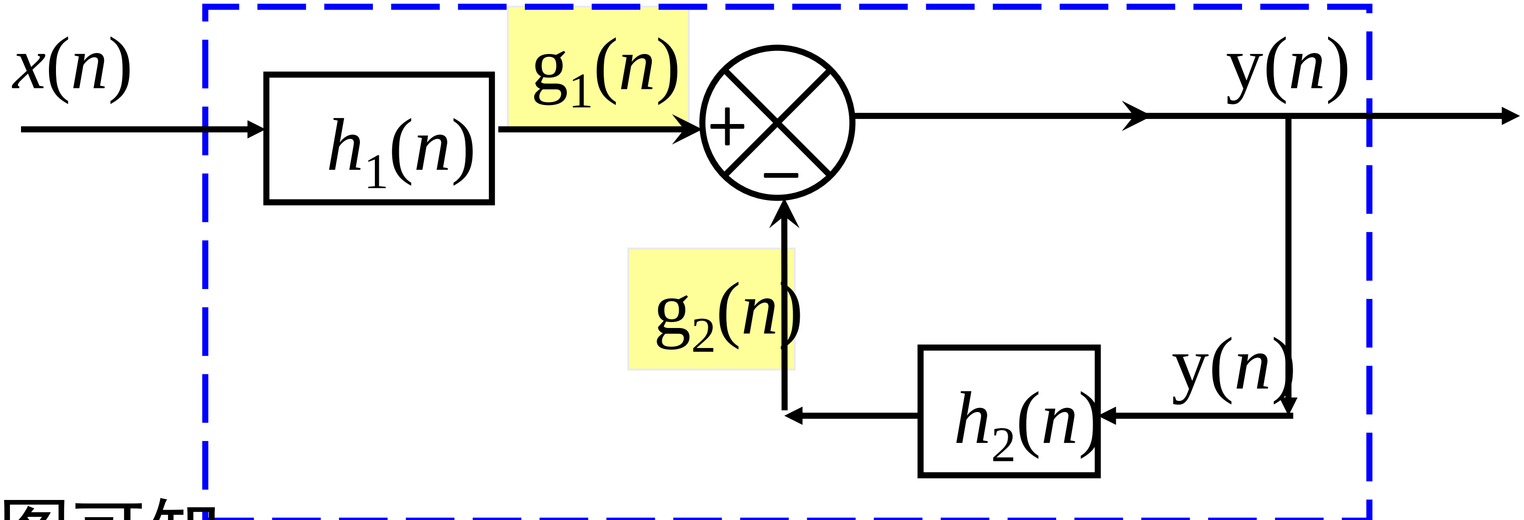


其中



表示：$y(n)=g_1(n)-g_2(n)$

第五节　系统函数



由图可知：

$$g_1(n)=x(n)*h_1(n) \quad g_2(n)=y(n)*h_2(n)$$

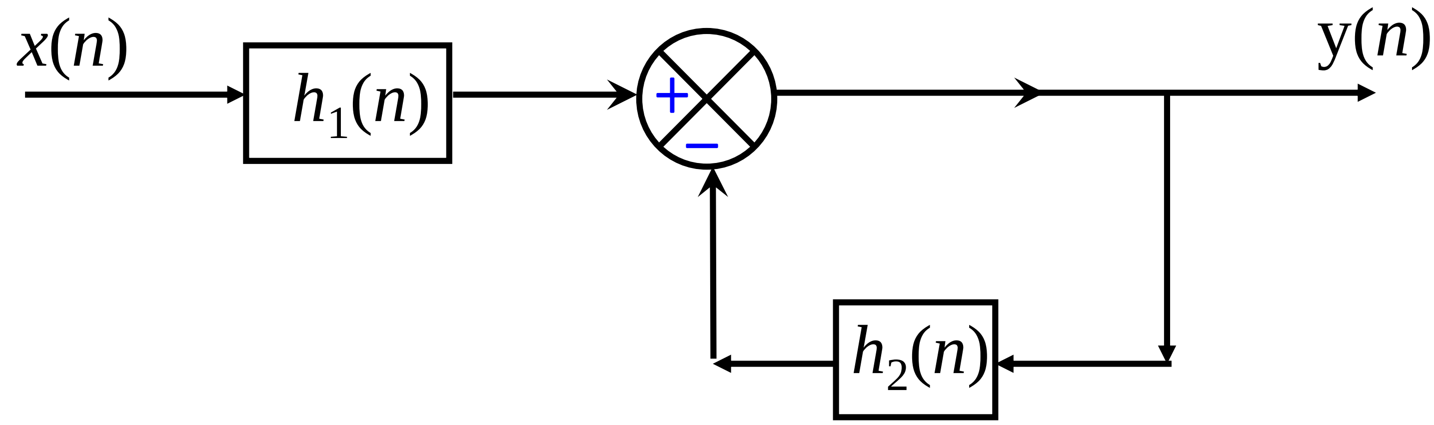
$$y(n)=g_1(n)-g_2(n)=x(n)*h_1(n)-y(n)*h_2(n)$$

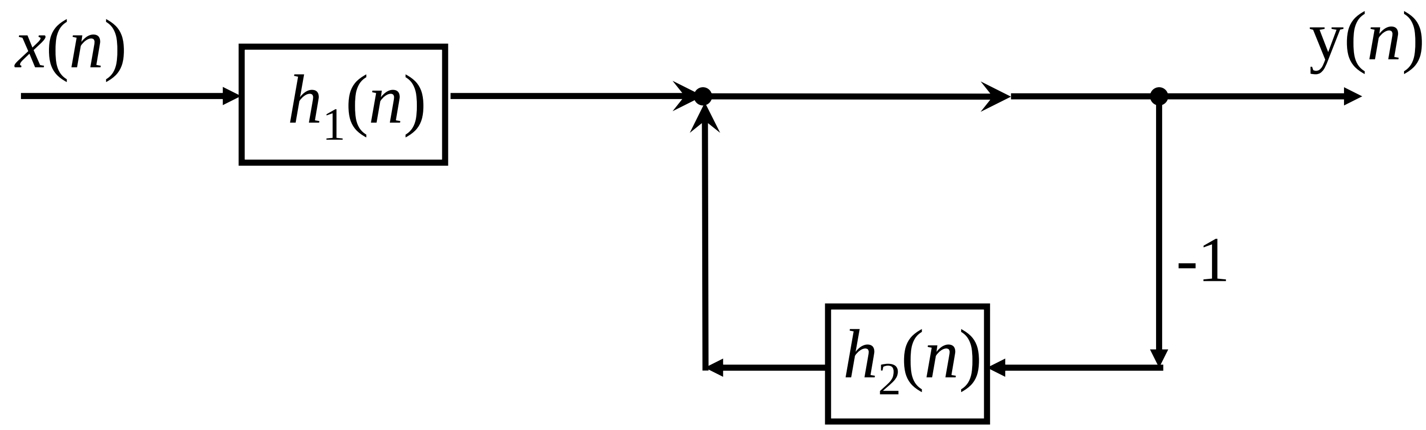
Z变换：

$$Y(Z)=X(Z)H_1(Z)-Y(Z)H_2(Z)$$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{H_1(z)}{1+H_2(z)}$$

第五节　系统函数





例5-1：已知 $y(n)=a_0x(n)+ a_1x(n-1)+ b_1y(n-1)$

求滤波器的Z变换$H(Z)$

解：

$$y(n)=a_0x(n)+a_1x(n-1)+b_1y(n-1)$$

Z变换得：

$$Y(z)(1-b_1z)=(a_0+a_1z)X(Z)$$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{a_0+a_1z}{1-b_1z}$$

进而可以求得$h(n)$。

中国石油大学 CHINA UNIVERSITY OF PETROLEUM

4、系统函数和差分方程的关系

在反馈系统中，系统函数为 $H(z)=\dfrac{H_1(z)}{1+H_2(z)}$

若令

$$H_1(z)=\sum_{k=0}^{N} b_k z^k \qquad H_2(z)=\sum_{k=0}^{M} a_k z^k$$

此时，反馈系统称为**有理系统**，或**递归系统**。

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{k=0}^{M} a_k z^k}{1-\sum_{k=1}^{N} b_k z^k}$$

对

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{k=0}^{M}a_k z^k}{1-\sum_{k=1}^{N}b_k z^k}$$

由$Y(z)=X(z)H(z)$可得

$$Y(z)-Y(z)\sum_{k=0}^{N}b_k z^k=X(z)\sum_{k=0}^{M}a_k z^k$$

由Z变换的时移性质可得

$$y(n)-\sum_{k=1}^{N}b_k y(n-k)=\sum_{k=0}^{M}a_k x(n-k)$$

——为线性时不变系统的常系数差分方程

第五节　系统函数

$$y(n)-\sum_{k=1}^{N} b_k y(n-k)=\sum_{k=0}^{M} a_k x(n-k)$$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum\limits_{k=0}^{M} a_k z^{k}}{1-\sum\limits_{k=1}^{N} b_k z^{k}}$$

由于常系数的差分方程中的系数a_k和b_k是已知的，按上式可求得$H(z)$，这样由Z变换的褶积定理，当$x(n)$给定时就可求得响应$y(n)$。

$$y(n)=\mathscr{Z}^{-1}[H(z)X(z)]$$

这就是差分方程的Z变换解法。

对$H(z)$因式分解，得到

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=K\frac{\prod_{m=1}^{M}(z-c_m)}{\prod_{k=1}^{N}(z-d_k)}$$

其中，c_m是$H(z)$在z平面上的零点，d_k是H(z)的极点。

➢整个**系统函数**可以由它的**全部零、极点**来**唯一的确定**。

➢ 对于**稳定的有理系统**，系统本身是能量有限的，则系统函数的**分母多项式在单位圆上无根**。

第五节 系统函数

➢**定理：** 系统函数$H(Z)$为有理分式时，**稳定和因果**的条件：

1）$h(n)$为**稳定**的或**能量有限**的**充分必要条件是：**

$H(Z)$的分母多项式在单位圆上无根。

2）$h(n)$是能量有限的，则$h(n)$为**因果**或**物理可实现**的**充分必要条件是：**

$H(Z)$的分母多项式的根全在单位圆外。

例5-2：　判断下列Z变换所对应的信号是否为能量有限的物理可实现信号：

$$H(z)=\frac{1}{2-3z+z^{2}}$$

$$H(z)=\frac{1}{1-z+\frac{z^{2}}{4}}$$

$$H(z)=\frac{1}{1-\frac{5z}{2}+z^{2}}$$

例5-3：已知某系统的差分方程 $y(n)+\frac{1}{2}y(n-1)=x(n)$

用z变换法求单位脉冲响应$h(n)$。

解： 两边取Z变换，得 $$Y(z)+\frac{1}{2}zY(z)=X(z)$$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)} \qquad H(z)=\frac{1}{1+\frac{z}{2}}$$

$$h(n)=(-\frac{1}{2})^{n}u(n)$$

第五节 系统函数

例5-4：系统的差分方程为

$$y(n)+0.4y(n-1)-0.32y(n-2)=x(n)+x(n-1)$$

求：1）系统函数H(z)；2）分析此系统H(z)的稳定因果性；3）求单位脉冲响应$h(n)$。

解：（1）对差分方程两边取Z变换，得

$$(1+0.4z-0.32z^{2})Y(z)=(1+z)X(z)$$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1+z}{1+0.4z-0.32z^{2}}=\frac{z+1}{(1-0.4z)(1+0.8z)}$$

2）***H*(z)**的两个极点都在单位圆外，系统是稳定因果。

（3）将$H(z)$展成部分分式，得

$$H(z)=\frac{\frac{7}{6}}{1-0.4z}-\frac{\frac{1}{6}}{1+0.8z}$$

取逆变换，得单位脉冲响应

$$h(n)=\left[\frac{7}{6}(0.4)^n-\frac{1}{6}(-0.8)^n\right]u(n)$$

小 结

一、Z变换（**掌握**）

表达式、收敛域

二、基本信号的Z变换

三、Z变换的性质

四、Z反变换（自学）

五、系统函数

因果性、稳定性、串联、并联、反馈