Докажем, что функция $f(x) = x^a$ непрерывна на области определения. Доказательство проведём в две части: сначала докажем утверждение для неотрицательных x, затем - для рациональных a. Так как при отрицательных x и иррациональных a функция f не определена, то мы докажем требуемую непрерывность.

Часть 1.

Пусть $x > 0$. Тогда

$$x^a = \left(e^{\ln x}\right)^a = e^{a \ln x}$$

Суперпозиция непрерывных функций (в нашем случае - показательной и обратной к ней логарифмической, а также умножения на константу) непрерывна. Пусть теперь $x = 0$, тогда $x^a = 0$ и функция f определена только для $a > 0$. Докажем критерий непрерывности функции, пользуясь тем, что для непрерывной функции знак предела и знак функции можно менять местами:

$$\lim_{x \to 0} x^a = \lim_{x \to 0} e^{a \ln x} = 0 = 0^a$$

Таким образом, для $x > 0$ непрерывность $f(x) = x^a$ доказана.

Часть 2.

Пусть $a = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$, т. е. $a \in \mathbb{Q}$. Рассмотрим сначала $g(x) = x^q$. Она непрерывна на области определения, т. к. является произведением конечного числа тождественных функций $y(x) = x$. $h(x) = x^{-q} = \frac{1}{x^q}$ также непрерывна на области определения, т. к. является частным непрерывных функций. Значит, непрерывна и $\psi(x) = x^p$. $\phi(x) = x^{\frac{1}{q}}$ непрерывна, т. к. является (по определению) обратной к непрерывной функции $g(x)$. Однако $f(x) = \psi(\phi(x))$. Т. к. суперпозиция непрерывных функций является непрерывной функцией, то $f(x)$ непрерывна, ЧИТД.