1. Покажите, что если система векторов $u_1, ..., u_k$ линейно независима, то система векторов $u_1, u_1+u_2, u_2+u_3, ..., u_{k-1}+u_k$ также линейно независима.

2. Докажите линейную независимость системы функций $\sin x, \cos x$.

3. Докажите линейную зависимость системы функций $1, \sin x, \cos x, \sin^2 x, \cos^2 x$.

4. Покажите, что пространство $M_n((\mathbb{R}))$ есть прямая сумма $M_n((\mathbb{R})) = R_1 \oplus R_2$ подпространства R_1 – симметрических и R_2 – кососимметрических матриц. Найдите проекции A_1 и A_2 матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

на R_1 параллельно R_2 и на R_2 параллельно R_1.

5. Докажите, что всякий линейный оператор любую линейно зависимую систему векторов переводит в линейно зависимую систему.

6. Докажите, что всякий линейный оператор $A : R^1 \to R^1$, действующий в одномерном пространстве, имеет вид $A = \lambda I$, т. е. является гомотетией с коэффициентом гомотетии λ.

7. Пусть $A : P_n \to P_n$ - оператор, определённый равенством $Af(t) = f(t+1)$ (оператор сдвига по аргументу). Покажите, что A - линейный оператор и найдите его матрицу в базисе $1, t, t^2, ..., t^n$.

8. Пусть оператор $A : P_n \to P_n$ задан формулой $Af(t) = \frac{f(t)-f(0)}{t}$. Покажите, что A - линейный оператор, найдите его ранг и дефект.

9. Оператор $A_h : P_n \to P_n$ задан формулой $A_h f(t) = \frac{f(t)-f(h)}{h}$. Покажите, что оператор A_h - линейный и найдите его ядро и образ.

10. Найдите общий вид матрицы линейного оператора $A : R^n \to R^n$, первые k векторов которого составляют:
а) базис ядра оператора A;
б) базис образа оператора A.

11. Докажите, что для всякого линейного оператора $A : R^n \to R^m$ существуют базисы e, f пространств R^n и R^m соответственно такие, что

$$A_{ef} = \left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right), r = \mathrm{rank} A$$

12. Покажите, что всякое подпространство линейного пространства R^n является образом некоторого линейного оператора $A : R^n \to R^n$.

13. Покажите, что всякое подпространство линейного пространства R^n является ядром некоторого линейного оператора $A : R^n \to R^n$.

14. Покажите, что оператор дифференцирования $D : P_n \to P_n$ является вырожденным.

15. Покажите, что линейный оператор $A : R^n \to R^n$ обратим тогда и только тогда, когда $0 \notin \mathrm{Spec} A$.

16. Найдите собственные векторы и собственные значения оператора дифференцирования $D : P_n \to P_n$.

17. Покажите, что все ненулевые векторы пространства являются собственными векторами линейного оператора A тогда и только тогда, когда A - оператор гомотетии, т. е. $A = \lambda I$.

18. Докажите, что геометрическая кратность собственного значения линейного оператора не превосходит его алгебраической кратности.

19. Оператор $A : P_n \to P_n$ зададим формулой $Af(t) = f(t+1) - f(t)$. Покажите линейность оператора A и найдите его спектр.

20. Докажите, что для любых линейных операторов $A, B : r^n \to R^n$ характеристические многочлены операторов AB и BA совпадают.

21. Докажите, что линейная оболочка любой системы собственных векторов линейного оператора инвариантна относительно этого оператора.

22. Пусть $A : R^n \to R^n$ – линейный оператор. Докажите, что любое подпространство $R_1 \subset R^n$, содержащее $\mathrm{Im}A$, инвариантно относительно оператора A.

23. Докажите, что сумма двух и пересечение любого числа инвариантных подпространств линейного оператора – инвариантные подпространства.

24. Покажите, что если линейные операторы $A, B : R^n \to R^n$ перестановочны, то всякое собственное подпространство оператора B инвариантно относительно оператора A.

25. Диагонализируем ли оператор дифференцирования $D : P_n \to P_n$?

26. Покажите, что если линейный оператор $A : R^n \to R^n$ итмеет n различных собственных значений, то любой оператор B, перестановочный с A, обладает базисом из собственных векторов.

27. Докажите, что равенство $|(x, y) = ||x|| \cdot ||y||$ имеет место тогда и только тогда, когда векторы x, y линейно независимы.

28. Пусть R_1, R_2 – подпространства евклидова пространства и $\mathrm{dim}R_1 < \mathrm{dim}R_2$. Покажите, что в R_2 найдётся ненулевой вектор, ортогональный подпространству R_1.

29. Докажите, что для любых подпространств R_1, R_2 евклидова или унитарного пространства справедиливо равенство $R_1 + R_2)^\perp = R_1^\perp \cap R_2^\perp$

30. Докажите, что определитель матрицы Грана любой конечной линейно независимой системы векторов евклидова пространства положителен.