Оглавление

0.1 Случайный вектор

Определение. Пусть случайный опыт $G \sim \langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$. Случайным вектором $\vec{\xi}$ размерности n, наблюдаемым в опыте G, называется упорядоченный набор случайных величин, наблюдаемых в данном опыте.

Можно доказать эквивалентность следующего определения:

Определение. Пусть случайный опыт $G \sim \langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$. Случайным вектором $\vec{\xi}$ размерности n, наблюдаемым в опыте G, называется функция $\vec{\xi} : \Omega \to \mathbb{R}^n$, такая, что $\vec{\xi}$ $(\mathcal{F}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$-измерима, т. е. $\forall (B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})[\vec{\xi}^{-1}(B) \in \mathcal{F}]$.

Определение. Пусть случайный вектор $\vec{\xi}$ наблюдается в случайном опыте $G \sim \langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$. Распределением случайного вектора $\vec{\xi}$ называется функция $P_{\vec{\xi}} : \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \to [0; 1]$, определяемая равенством

$$P_{\vec{\xi}}(B) = P(\vec{\xi}^{-1}(B))$$

Можно доказать, что $P_{\vec{\xi}}$ — вероятностная мера на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$. Этот факт даёт возможность перейти к выборочному вероятностному пространству (аналогично тому, как это было сделано для случайной величины):

$$\langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle \xrightarrow{\vec{\xi}} \left\langle \mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}, P_{\vec{\xi}} \right\rangle$$

и рассматривать в нём непосредственно заданный случайный вектор $\vec{\eta}(\vec{x}) = \vec{x}$. Легко видеть, что в таком случае $\forall (B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}) \left[P_{\vec{\eta}}(B) = P_{\vec{\xi}}(B) \right]$.

0.2 Неравенство Маркова

Пусть $\xi \in L_1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и $P\{\xi \geqslant 0\} = 1$, $T > 0$. Тогда

$$P\{\xi \geqslant T\} \leqslant \frac{M\xi}{T} \tag{1}$$

Доказательство.

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_\xi(x) =$$

$$\text{(т. к. } \xi \text{ неотрицательна почти наверное)}$$

$$= \int_{\{x \geqslant T\}} x dF_\xi(x) + \int_{\{0 \leqslant x < T\}} x dF_\xi(x) \geqslant$$

$$\text{(т. к. } F_\xi \text{ - неубывающая)}$$

$$\geqslant \int_{\{x \geqslant T\}} x dF_\xi(x) \geqslant \int_{\{x \geqslant T\}} T dF_\xi(x) = T \int_{\{x \geqslant T\}} dF_\xi(x) =$$

$$= T \left(\lim_{x \to +\infty} F_\xi(x) - F_\xi(T-) \right) = TP\{\xi \geqslant T\}$$

Доказано.

0.3 Неравенство Чебышева

Пусть $\xi \in l_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\varepsilon > 0$. Тогда

$$P\{|\xi - M\xi| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{D\xi}{\varepsilon^2} \tag{2}$$

Доказательство.

$$P\{|\xi - M\xi| \geqslant \varepsilon\} = P\{|\xi - M\xi|^2 \geqslant \varepsilon^2\} =$$

$$\text{(положив в неравенстве Маркова (1) } T = \varepsilon^2\text{)}$$

$$= \frac{M\left((\xi - M\xi)^2\right)}{\varepsilon^2} = \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$$

Доказано.

0.4 Закон больших чисел

Идеология. Обычно случайная величина «размазана» по числовой оси. Если случайные величины складывать, то «размазанность» будет «расползаться». Но оказывается, что при определённых условиях среднее арифметическое величин «расползаться» не будет.

Теорема 0.4.1. Пусть $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность стохастически независимых интегрируемых с квадратом случайных величин, дисперсия которых ограничена в совокупности, т. е.

$$\forall(k \in \mathbb{N})\,[\xi_k \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)]$$

$$\exists(C > 0)\forall(k \in \mathbb{N})\,[D\xi_k \leqslant C]$$

Обозначим $\bar{\xi}_n := \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$, $\bar{\mu}_n := \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} M\xi_k$

Тогда

$$\forall(\varepsilon > 0)\left[P(|\bar{\xi}_n - \bar{\mu}_n| \geqslant \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\right]$$

Доказательство.

$$P\{|\bar{\xi}_n - \bar{\mu}_n| \geqslant \varepsilon\} =$$

(т. к. $\bar{\mu}_n = M\bar{\xi}_n$)

$$= P\{|\bar{\xi}_n - M\bar{\xi}_n| \geqslant \varepsilon\} \leqslant$$

(применяем неравенство Чебышева (2))

$$\leqslant \frac{D\bar{\xi}_n}{\varepsilon^2} = \frac{D\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k\right)}{\varepsilon^2} = \frac{\frac{1}{n^2}D\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k\right)}{\varepsilon^2} =$$

(в силу стохастической независимости дисперсия аддитивна)

$$= \frac{\frac{1}{n^2}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}D\xi_k\right)}{\varepsilon^2} \leqslant \frac{\frac{1}{n^2}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}C\right)}{\varepsilon^2} = \frac{nC}{n^2\varepsilon^2} = \frac{C}{n\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Доказано.