

# Оглавление

0.1	Случайный вектор . . . . .	2
0.2	Неравенство Маркова . . . . .	2
0.3	Неравенство Чебышева . . . . .	3
0.4	Закон больших чисел . . . . .	3
0.5	Центральная предельная теорема . . . . .	5
0.6	Теорема Муавра-Лапласа . . . . .	7
0.7	Применение теоремы Муавра-Лапласа . . . . .	7
<b>1</b>	<b>Типовые распределения</b>	<b>8</b>
1.1	Распределение Парето . . . . .	8
1.1.1	Определение . . . . .	8
1.1.2	Плотность . . . . .	8
1.1.3	Математическое ожидание . . . . .	8
1.1.4	Прочие моменты . . . . .	9
1.1.5	Дисперсия . . . . .	10
1.2	Геометрическое распределение . . . . .	10
1.2.1	Определение . . . . .	10
1.2.2	Математическое ожидание . . . . .	10
1.2.3	Дисперсия . . . . .	11
1.3	Гипергеометрическое распределение . . . . .	11
1.3.1	Определение . . . . .	11
1.3.2	Математическое ожидание . . . . .	11
1.3.3	Дисперсия . . . . .	12
1.4	Гамма-распределение . . . . .	14
1.4.1	Определение . . . . .	14
1.4.2	Матожидание . . . . .	15
1.4.3	Дисперсия . . . . .	16
1.5	распределение . . . . .	17
1.5.1	Определение . . . . .	17
1.5.2	Матожидание . . . . .	17
1.5.3	Дисперсия . . . . .	17
1.6	распределение . . . . .	17
1.6.1	Определение . . . . .	17
1.6.2	Матожидание . . . . .	17
1.6.3	Дисперсия . . . . .	17
1.7	распределение . . . . .	17
1.7.1	Определение . . . . .	17
1.7.2	Матожидание . . . . .	17
1.7.3	Дисперсия . . . . .	17
1.8	распределение . . . . .	17
1.8.1	Определение . . . . .	17
1.8.2	Матожидание . . . . .	17
1.8.3	Дисперсия . . . . .	17
1.9	распределение . . . . .	17
1.9.1	Определение . . . . .	17
1.9.2	Матожидание . . . . .	17
1.9.3	Дисперсия . . . . .	17

## 0.1 Случайный вектор

**Определение.** Пусть случайный опыт  $G \sim \langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$ . Случайным вектором  $\vec{\xi}$  размерности  $n$ , наблюдаемым в опыте  $G$ , называется упорядоченный набор случайных величин, наблюдаемых в данном опыте.

Можно доказать эквивалентность следующего определения:

**Определение.** Пусть случайный опыт  $G \sim \langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$ . Случайным вектором  $\vec{\xi}$  размерности  $n$ , наблюдаемым в опыте  $G$ , называется функция  $\vec{\xi} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ , такая, что  $\vec{\xi}(\mathcal{F}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$ -измерима, т. е.  $\forall (B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}) [\vec{\xi}^{-1}(B) \in \mathcal{F}]$ .

**Определение.** Пусть случайный вектор  $\vec{\xi}$  наблюдается в случайном опыте  $G \sim \langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$ . Распределением случайного вектора  $\vec{\xi}$  называется функция  $P_{\vec{\xi}} : \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \rightarrow [0; 1]$ , определяемая равенством

$$P_{\vec{\xi}}(B) = P(\vec{\xi}^{-1}(B))$$

Можно доказать, что  $P_{\vec{\xi}}$  — вероятностная мера на  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$ . Этот факт даёт возможность перейти к выборочному вероятностному пространству (аналогично тому, как это было сделано для случайной величины):

$$\langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle \xrightarrow{\vec{\xi}} \langle \mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}, P_{\vec{\xi}} \rangle$$

и рассматривать в нём непосредственно заданный случайный вектор  $\vec{\eta}(\vec{x}) = \vec{x}$ . Легко видеть, что в таком случае  $\forall (B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}) [P_{\vec{\eta}}(B) = P_{\vec{\xi}}(B)]$ .

## 0.2 Неравенство Маркова

Пусть  $\xi \in L_1(\Omega, \mathcal{F}, P)$  и  $P\{\xi \geq 0\} = 1$ ,  $T > 0$ . Тогда

$$P\{\xi \geq T\} \leq \frac{M\xi}{T} \tag{1}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
 M\xi &= \int_{-\infty}^{\infty} x dF_{\xi}(x) = \\
 &\quad (\text{т. к. } \xi \text{ неотрицательна почти наверное}) \\
 &= \int_{\{x \geq T\}} x dF_{\xi}(x) + \int_{\{0 \leq x < T\}} x dF_{\xi}(x) \geq \\
 &\quad (\text{т. к. } F_{\xi} \text{ - неубывающая}) \\
 &\geq \int_{\{x \geq T\}} x dF_{\xi}(x) \geq \int_{\{x \geq T\}} T dF_{\xi}(x) = T \int_{\{x \geq T\}} dF_{\xi}(x) = \\
 &= T \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} F_{\xi}(x) - F_{\xi}(T-) \right) = TP\{\xi \geq T\}
 \end{aligned}$$

Доказано.

### 0.3 Неравенство Чебышева

Пусть  $\xi \in l_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ,  $\varepsilon > 0$ . Тогда

$$P\{|\xi - M\xi| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2} \quad (2)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
 P\{|\xi - M\xi| \geq \varepsilon\} &= P\{|\xi - M\xi|^2 \geq \varepsilon^2\} = \\
 &\quad (\text{положив в неравенстве Маркова (1) } T = \varepsilon^2) \\
 &= \frac{M((\xi - M\xi)^2)}{\varepsilon^2} = \frac{D\xi}{\varepsilon^2}
 \end{aligned}$$

Доказано.

### 0.4 Закон больших чисел

**Идеология.** Обычно случайная величина «размазана» по числовой оси. Если случайные величины складывать, то «размазанность» будет «расползаться». Но оказывается, что при определённых условиях среднее арифметическое величин «расползаться» не будет.

**Теорема 0.4.1.** Пусть  $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$  — последовательность стохастически независимых интегрируемых с квадратом случайных величин, дисперсия которых ограничена в совокупности, т. е.

$$\forall(k \in \mathbb{N}) [\xi_k \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)]$$

$$\exists(C > 0) \forall(k \in \mathbb{N}) [D\xi_k \leq C]$$

Обозначим  $\bar{\xi}_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k$ ,  $\bar{\mu}_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M\xi_k$

Тогда

$$\forall(\varepsilon > 0) \left[ P(|\bar{\xi}_n - \bar{\mu}_n| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \right]$$

**Доказательство.**

$$P\{|\bar{\xi}_n - \bar{\mu}_n| \geq \varepsilon\} =$$

$$(\text{т. к. } \bar{\mu}_n = M\bar{\xi}_n)$$

$$= P\{|\bar{\xi}_n - M\bar{\xi}_n| \geq \varepsilon\} \leq$$

(применяем неравенство Чебышева (2))

$$\leq \frac{D\bar{\xi}_n}{\varepsilon^2} = \frac{D\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k\right)}{\varepsilon^2} = \frac{\frac{1}{n^2} D\left(\sum_{k=1}^n \xi_k\right)}{\varepsilon^2} =$$

(в силу стохастической независимости дисперсия аддитивна)

$$= \frac{\frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=1}^n D\xi_k\right)}{\varepsilon^2} \leq \frac{\frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=1}^n C\right)}{\varepsilon^2} = \frac{nC}{n^2\varepsilon^2} = \frac{C}{n\varepsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

**Доказано.**

**Определение.** Пусть  $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$  — последовательность случайных величин, наблюдаемых в опыте  $G \sim \langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$ ,  $\xi$  — также случайная величина, наблюдаемая в этом опыте. Говорят, что  $\xi_k$  сходится по вероятности к  $\xi$  и пишут:

$$\xi_k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \xi$$

если

$$\forall(\varepsilon > 0) \left[ P\{|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \right]$$

Сформулируем теперь следствие из закона больших чисел — в случае, когда мы имеем дело с последовательностью одинаково распределённых случайных величин.

**Следствие 0.4.1.1.** Рассмотрим последовательность одинаково распределённых интегрируемых с квадратом случайных величин  $\{\xi_k\}_{k=1}^\infty$ , наблюдаемых в случайном опыте  $G \sim \langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$ . Обозначим  $M\xi_k = \mu$ ,  $D\xi_k = \sigma^2$ . Тогда  $\bar{\xi}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \mu$ .

Рассмотрим теперь схему Бернулли.

**Следствие 0.4.1.2.** (теорема Бернулли) Частота появления события при неограниченном увеличении количества независимых повторений одного и того же опыта по вероятности сходится к вероятности данного события. Переформулируем строго.

Пусть к  $G \sim \langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$  применена схема Бернулли с вероятностью успеха  $p$  и количеством повторений  $n$ . Обозначим через  $\nu_n$  количество успехов в  $n$  опытах. Тогда  $\frac{\nu_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} p$ .

**Доказательство.** Пусть случайная величина  $\xi_k$  равна 1, если в  $k$ -м опыте произошёл успех, и 0 в противном случае. Очевидно, что  $\xi_k$  стохастически независимы и распределены одинаково. Заметим, что  $\nu_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ . Более того,  $\bar{\xi}_n = \frac{\nu_n}{n}$ ,  $M\xi_k = p$ . Применив следствие 1 из закона больших чисел, получим требуемое. **Доказано.**

## 0.5 Центральная предельная теорема

Закон больших чисел и следствия из него позволяют судить о поведении среднего арифметического последовательности одинаково распределённых случайных величин, т. е. сумма величин (обратите внимание, «сдвинутых» на матожидание) делится на  $n$ , благодаря чему и стабилизируется. Возникает закономерный вопрос: а что будет, если делить не на первую степень  $n$ , а на небольшую положительную? Ответ для случая степени, равной  $\frac{1}{2}$ , и даёт центральная предельная теорема.

**Теорема 0.5.1.** Пусть  $\{\xi_k\}_{k=1}^\infty$  — последовательность одинаково распределённых интегрируемых с квадратом случайных величин, наблюдаемых

в опыте  $G \sim \langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$ . Пусть  $\xi \sim N(0, 1)$ . Обозначим  $\mu = M\xi_k$ ,  $\sigma^2 = D\xi_k$  ( $\sigma > 0$ ). Проведём теперь над каждой  $\xi_k$  манипуляцию, состоящую из уже знакомого нам сдвига на матожидание и новой операции - «нормирования» дисперсией:

$$\xi_k^0 = \frac{\xi_k - \mu}{\sigma}$$

(Рекомендуем, кстати, читателю убедиться, что  $\|\xi_k^0\|_{L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)} = 1$ .) Тогда

$$\bar{\xi}_n = \frac{\sum_{k=1}^n \xi_k^0}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{слабо}} \xi, \text{ т.е.}$$

$$P\{\bar{\xi}_n < x\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dx$$

**Доказательство.** В доказательстве будем использовать переход к характеристическим функциям и тот факт, что характеристическая функция суммы равна произведению характеристических функций.

Сначала заметим, что  $\dot{\varphi}_{\xi_k^0} = iM\xi_k^0 = 0$ ,  $\ddot{\varphi}_{\xi_k^0} = i^2 D\xi_k^0 = -1$ .

$$\begin{aligned} \varphi_{\bar{\xi}_n}(t) &= \varphi_{\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \xi_k^0}(t) = \varphi_{\sum_{k=1}^n \xi_k^0} \left( \frac{t}{\sqrt{n}} \right) = \\ &= \prod_{k=1}^n \varphi_{\xi_k^0} \left( \frac{t}{\sqrt{n}} \right) = \left( \varphi_{\xi_k^0} \left( \frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right)^n = \end{aligned}$$

(применяем формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано)

$$\begin{aligned} &= \left( \varphi_{\xi_k^0}(0) + \dot{\varphi}_{\xi_k^0}(0) \frac{t}{\sqrt{n}} + \ddot{\varphi}_{\xi_k^0}(0) \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right)^n = \\ &= \left( 1 + 0 \cdot \frac{t}{\sqrt{n}} - 1 \cdot \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right)^n = \\ &= \left( 1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right)^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{второй замечательный предел}} e^{-\frac{t^2}{2}} = \varphi_{\xi}(t) \end{aligned}$$

Итак,  $\varphi_{\bar{\xi}_n}(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \varphi_{\xi}(t)$ , следовательно,

$$\bar{\xi}_n = \sum_{k=1}^n n \frac{\xi_k - \mu}{\sigma \sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \xi$$

**Доказано.**

## 0.6 Теорема Муавра-Лапласа

Особо рассмотрим частный случай центральной предельной теоремы для биномиального распределения.

**Теорема 0.6.1.** Пусть  $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$  — последовательность одинаково биномиально с параметрами  $(1, p)$  распределённых случайных величин, наблюдаемых в опыте  $G \sim \langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$ . Тогда

$$\frac{\sum_{k=1}^n \xi_k - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{слабо}} \xi \sim N(0, 1)$$

Для доказательства этой теоремы достаточно вспомнить числовые характеристики биномиального распределения.

## 0.7 Применение теоремы Муавра-Лапласа

Сначала заметим, что по теореме Муавра-Лапласа при достаточно большом  $n$  для  $\xi \sim Bi(n, p)$  имеет место приближенное равенство

$$P\{\xi < b\} \approx \Phi\left(\frac{b - p}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \quad (3)$$

Легко понять, что тогда

$$P\{a < \xi < b\} \approx \Phi\left(\frac{b - p}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{a - p}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \quad (4)$$

**Пример 0.7.1.** Пусть среди новорождённых частота появления мальчиков составляет 0,515 и мы хотим узнать, с какою вероятностью среди 10000 новорождённых мальчиков будет меньше, чем девочек. Рассмотрим количество мальчиков — случайную величину  $\xi \sim Bi(10000; 0,515)$ . Применяем теорему Муавра-Лапласа, а именно формулу (4):

$$\begin{aligned} P\{\xi \in [0; 10000]\} &\approx \\ &\approx \Phi\left(\frac{5000 - 5150}{\sqrt{10^4 \cdot 0,515 \cdot 0,485}}\right) - \Phi\left(\frac{-5150}{\sqrt{10^4 \cdot 0,515 \cdot 0,485}}\right) \approx \\ &\approx \Phi(-3) - \Phi(-103) \approx 0 \end{aligned}$$

# Глава 1

## Типовые распределения

### 1.1 Распределение Парето

#### 1.1.1 Определение

**Определение.** Говорят, что случайная величина  $\xi$  имеет распределение Парето с параметрами  $x_0 > 0$  и  $\alpha > 0$  и пишут  $\xi \sim Par(x_0, \alpha)$ , если

$$F_\xi(x) = P\{\xi < x\} = \left(1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^\alpha\right) \cdot \mathbb{I}_{[x_0; +\infty)}(x)$$

Легко видеть, что функция распределения непрерывна.

#### 1.1.2 Плотность

$$f_\xi(x) = \alpha \frac{x_0^\alpha}{x^{\alpha+1}} \cdot \mathbb{I}_{[x_0; +\infty)}(x)$$

#### 1.1.3 Математическое ожидание

Математическое ожидание, а, следовательно, и другие моменты, могут существовать или не существовать в зависимости от значения  $\alpha$ . Попробуем найти матожидание:

$$\begin{aligned} M\xi &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \alpha \frac{x_0^\alpha}{x^{\alpha+1}} \cdot \mathbb{I}_{[x_0; +\infty)}(x) dx = \int_{x_0}^{+\infty} x \alpha \frac{x_0^\alpha}{x^{\alpha+1}} dx = \\ &= \int_{x_0}^{+\infty} \alpha \frac{x_0^\alpha}{x^\alpha} dx = \alpha x_0^\alpha \int_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx \quad (1.1) \end{aligned}$$



Последний интеграл, как мы знаем из курса математического анализа, сходится при  $\alpha > 1$ . Следовательно, при  $\alpha > 1$  из формулы (1.1) имеем

$$\begin{aligned}
 M\xi &= \alpha x_0^\alpha \int_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \alpha x_0^\alpha \left( \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{x^{\alpha-1}} \right) \Big|_{x=x_0}^{x=+\infty} dx = \\
 &= \alpha x_0^\alpha \left( 0 - \frac{1}{1-\alpha} \cdot \frac{1}{x_0^{\alpha-1}} \right) = \alpha x_0^\alpha \frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{x_0^{\alpha-1}} = \\
 &= \frac{\alpha x_0^\alpha}{(\alpha-1)x_0^{\alpha-1}} = \frac{\alpha x_0}{\alpha-1} \quad (1.2)
 \end{aligned}$$

#### 1.1.4 Прочие моменты

Как известно, начальный момент существует или не существует одновременно с центральным. Для начального момента порядка  $k$  рассуждениями, аналогичными (1.1), имеем

$$M(\xi^k) = \alpha x_0^\alpha \int_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha-k+1}} dx \quad (1.3)$$

А такой интеграл сходится при  $\alpha - k + 1 > 1$ , т.е. при  $\alpha > k$ . Следовательно, у распределения Парето с параметрами  $x_0$  и  $\alpha$  существуют  $k$ -ые центральный и начальный моменты тогда и только тогда, когда  $\alpha > k$ .

### 1.1.5 Дисперсия

Вооружившись формулами (1.2) и (1.3), посчитаем дисперсию этого распределения при  $\alpha > 2$ :

$$\begin{aligned}
 D\xi &= M(\xi^2) - (M\xi)^2 = \alpha x_0^\alpha \int_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha-1}} dx - \left( \frac{\alpha x_0}{\alpha - 1} \right)^2 = \\
 &= \alpha x_0^\alpha \frac{1}{\alpha - 2} \cdot \frac{1}{x_0^{\alpha-2}} - \frac{\alpha^2 x_0^2}{(\alpha - 1)^2} = \frac{\alpha x_0^2}{\alpha - 2} - \frac{\alpha^2 x_0^2}{(\alpha - 1)^2} = \\
 &= \alpha x_0^2 \left( \frac{1}{\alpha - 2} - \frac{\alpha}{(\alpha - 1)^2} \right) = \\
 &= \alpha x_0^2 \left( \frac{(\alpha - 1)^2}{(\alpha - 2)(\alpha - 1)^2} - \frac{\alpha^2 - 2\alpha}{(\alpha - 2)(\alpha - 1)^2} \right) = \\
 &= \alpha x_0^2 \left( \frac{\alpha^2 - 2\alpha + 1}{(\alpha - 2)(\alpha - 1)^2} - \frac{\alpha^2 - 2\alpha}{(\alpha - 2)(\alpha - 1)^2} \right) = \frac{\alpha x_0^2}{(\alpha - 2)(\alpha - 1)^2} \quad (1.4)
 \end{aligned}$$

## 1.2 Геометрическое распределение

### 1.2.1 Определение

$$P\{\xi = k\} = (1 - p)^{k-1} p, \quad k \in \mathbb{N}.$$

### 1.2.2 Математическое ожидание

$$\begin{aligned}
 M\xi &= \sum_{k=1}^{\infty} k(1 - p)^{k-1} p = p \sum_{k=1}^{\infty} k(1 - p)^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dp} (-(1 - p)^k) = \\
 &= p \frac{d}{dp} \sum_{k=1}^{\infty} (-(1 - p)^k) = -p \frac{d}{dp} \frac{1 - p}{1 - (1 - p)} = -p \frac{d}{dp} \frac{1 - p}{p} = \\
 &= -p \frac{d}{dp} \left( \frac{1}{p} - 1 \right) = -p \left( -\frac{1}{p^2} \right) = \frac{1}{p} \quad (1.5)
 \end{aligned}$$

### 1.2.3 Дисперсия

И снова будем применять почленное дифференцирование рядов.

$$\begin{aligned}
D\xi &= M(\xi^2) - (M\xi)^2 = M(\xi^2) - \frac{1}{p^2} = \sum_{k=1}^{\infty} k^2(1-p)^{k-1}p - \frac{1}{p^2} = \\
&= p \sum_{k=1}^{\infty} (k^2 + k - k)(1-p)^{k-1} - \frac{1}{p^2} = \\
&= p \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)(1-p)^{k-1} - p \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} - \frac{1}{p^2} = \\
&\quad (\text{значение второй суммы мы уже находили в (1.5)}) \\
&= p \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)(1-p)^{k-1} - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d^2}{dp^2} (1-p)^{k+1} - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \\
&= p \frac{d^2}{dp^2} \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k+1} - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = p \frac{d^2}{dp^2} \left( (1-p) \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^k \right) - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \\
&= p \frac{d^2}{dp^2} \left( (1-p) \frac{1-p}{p} \right) - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = p \frac{d^2}{dp^2} \left( \frac{1-2p+p^2}{p} \right) - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \\
&= p \frac{d^2}{dp^2} \left( \frac{1}{p} - 2 + p \right) - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = p \frac{2}{p^3} - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \\
&= \frac{2}{p^2} - \frac{p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2} \quad (1.6)
\end{aligned}$$

## 1.3 Гипергеометрическое распределение

### 1.3.1 Определение

$P\{\xi = k\} = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$ , где  $N$  - общее количество элементов,  $n$  - выбираемое без возвращения количество элементов,  $k$  - требуемое количество успешных элементов.

### 1.3.2 Математическое ожидание

Будем, как обычно, полагать, что при  $a > b$ , или  $a < 0$ , или  $b < 0$   $C_b^a = 0$ . Это позволит нам не следить за пределами суммирования.

Далее, подготовим плацдарм в виде нескольких формул. Во-первых, сумма вероятностей всех исходов равна 1:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} = 1 \quad (1.7)$$

Заменяя  $n$  на  $n-1$ ;  $k$  на  $k-1$ ;  $M$  на  $M-1$ ;  $N$  на  $N-1$ , имеем:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_{M-1}^{k-1} C_{N-M}^{n-k}}{C_{N-1}^{n-1}} = 1 \quad (1.8)$$

Заметим также, что

$$C_b^a = \frac{b!}{a!(a-b)!} = \frac{b(b-1)!}{a(a-1)!((a-1)-(b-1))!} = \frac{b}{a} C_{b-1}^{a-1} \quad (1.9)$$

Теперь приступаем непосредственно к штурму первого момента.

$$\begin{aligned} M\xi &= \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} \stackrel{(1.9)}{=} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\frac{M}{k} C_{M-1}^{k-1} C_{N-M}^{n-k}}{\frac{N}{n} C_{N-1}^{n-1}} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\frac{M}{k} C_{M-1}^{k-1} C_{(N-1)-(M-1)}^{(n-1)-(k-1)}}{\frac{N}{n} C_{N-1}^{n-1}} = \\ &\quad (\text{выносим за знак суммы некоторые множители, не зависящие от } k) \\ &= \frac{Mn}{N} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\frac{1}{k} C_{M-1}^{k-1} C_{(N-1)-(M-1)}^{(n-1)-(k-1)}}{C_{N-1}^{n-1}} = \\ &= \frac{Mn}{N} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_{M-1}^{k-1} C_{(N-1)-(M-1)}^{(n-1)-(k-1)}}{C_{N-1}^{n-1}} \stackrel{(1.8)}{=} \frac{Mn}{N} \quad (1.10) \end{aligned}$$

### 1.3.3 Дисперсия

Здесь мы снова применим приём, знакомый по формуле (1.6), а именно — разбитие суммы с квадратом на две. Считаем второй начальный

МОМЕНТ:

$$\begin{aligned}
M(\xi^k) &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} + \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} = \\
&\quad (\text{вторую сумму мы считали парой строк выше, чем и воспользуемся}) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} + \frac{Mn}{N} \stackrel{(1.9)}{=} \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) \frac{\frac{M}{k} C_{M-1}^{k-1} C_{N-M}^{n-k}}{\frac{N}{n} C_{N-1}^{n-1}} + \frac{Mn}{N} \stackrel{(1.9)}{=} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) \frac{\frac{M}{k} \cdot \frac{M-1}{k-1} C_{M-2}^{k-2} C_{N-M}^{n-k}}{\frac{N}{n} \cdot \frac{N-1}{n-1} C_{N-2}^{n-2}} + \frac{Mn}{N} = \\
&\quad (\text{сокращаем множители } k(k-1)) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M(M-1) C_{M-2}^{k-2} C_{N-M}^{n-k}}{\frac{N}{n} \cdot \frac{N-1}{n-1} C_{N-2}^{n-2}} + \frac{Mn}{N} = \\
&\quad (\text{выносим за скобки некоторые множители, не содержащие } k) \\
&= \frac{M(M-1)n(n-1)}{N(N-1)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_{M-2}^{k-2} C_{N-M}^{n-k}}{C_{N-2}^{n-2}} + \frac{Mn}{N} \stackrel{1.8}{=} \\
&= \frac{M(M-1)n(n-1)}{N(N-1)} + \frac{Mn}{N} \quad (1.11)
\end{aligned}$$

Теперь считаем дисперсию — исключительно алгебраическое время-

провождение:

$$\begin{aligned}
D\xi &= M(\xi^2) - (M\xi)^2 = \frac{M(M-1)n(n-1)}{N(N-1)} + \frac{Mn}{N} - \frac{M^2n^2}{N^2} = \\
&= \frac{Mn}{N} \left( \frac{(M-1)(n-1)}{N-1} + 1 - \frac{Mn}{N} \right) = \\
&= \frac{Mn}{N} \left( \frac{Mn - M - n + 1}{N-1} + 1 - \frac{Mn}{N} \right) = \\
&= \frac{Mn}{N} \left( \frac{MnN - MN - nN + N}{N(N-1)} + 1 - \frac{MnN - Mn}{N(N-1)} \right) = \\
&= \frac{Mn}{N} \left( \frac{MnN - MN - nN + N - MnN + Mn}{N(N-1)} + 1 \right) = \\
&= \frac{Mn}{N} \left( \frac{-MN - nN + N + Mn}{N(N-1)} + 1 \right) = \\
&= \frac{Mn}{N} \left( \frac{-MN - nN + N + Mn + N^2 - N}{N(N-1)} \right) = \\
&= \frac{Mn}{N} \left( \frac{-MN - nN + Mn + N^2}{N(N-1)} \right) = \\
&= \frac{Mn}{N} \left( \frac{n(M-N) - N(M-N)}{N(N-1)} \right) = \\
&= \frac{Mn}{N} \left( \frac{(n-N)(M-N)}{N(N-1)} \right) = \frac{Mn(n-N)(M-N)}{N^2(N-1)} \quad (1.12)
\end{aligned}$$

## 1.4 Гамма-распределение

### 1.4.1 Определение

Говорят, что  $\xi \sim \Gamma(\lambda, \nu)$ , если

$$f_\xi(x) = \frac{\lambda^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\lambda x} x^{\nu-1} \cdot \mathbb{I}_{[0;+\infty)}(x) \quad (1.13)$$

### 1.4.2 Матожидание

$$\begin{aligned}
 M\xi &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\xi}(x) dx = \int_0^{+\infty} x \frac{\lambda^{\nu}}{\Gamma(\nu)} e^{-\lambda x} x^{\nu-1} dx = \\
 &\quad \left( \text{т. к. } \Gamma(\nu + 1) = \nu \Gamma(\nu) \right) \\
 &= \int_0^{+\infty} x \frac{\lambda^{\nu+1} \nu}{\lambda \Gamma(\nu + 1)} e^{-\lambda x} x^{\nu-1} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^{\nu+1} \nu}{\lambda \Gamma(\nu + 1)} e^{-\lambda x} x^{\nu+1-1} dx = \\
 &= \frac{\nu}{\lambda} \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^{\nu+1}}{\Gamma(\nu + 1)} e^{-\lambda x} x^{(\nu+1)-1} dx = \\
 &= \frac{\nu}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda^{\nu+1}}{\Gamma(\nu + 1)} e^{-\lambda x} x^{(\nu+1)-1} \cdot \mathbb{I}_{[0;+\infty)}(x) dx =
 \end{aligned}$$

( но это - интеграл по всему пространству от плотности  
распределения  $\Gamma(\lambda, \nu + 1)$ ([1.13](#)), который равен 1 )

$$= \frac{\nu}{\lambda} \quad (1.14)$$

### 1.4.3 Дисперсия

Считаем матожидание квадрата:

$$\begin{aligned}
 M(\xi^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_\xi(x) dx = \int_0^{+\infty} x^2 \frac{\lambda^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\lambda x} x^{\nu-1} dx = \\
 &\quad \left( \text{т. к. } \Gamma(\nu + 1) = \nu \Gamma(\nu) \right) \\
 &= \int_0^{+\infty} x^2 \frac{\lambda^{\nu+1} \nu}{\lambda \Gamma(\nu + 1)} e^{-\lambda x} x^{\nu-1} dx = \int_0^{+\infty} x^2 \frac{\lambda^{\nu+2} \nu(\nu + 1)}{\lambda^2 \Gamma(\nu + 2)} e^{-\lambda x} x^{\nu-1} dx = \\
 &= \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^{\nu+2} \nu(\nu + 1)}{\lambda^2 \Gamma(\nu + 2)} e^{-\lambda x} x^{(\nu+2)-1} dx = \\
 &= \frac{\nu(\nu + 1)}{\lambda^2} \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^{\nu+2}}{\Gamma(\nu + 2)} e^{-\lambda x} x^{(\nu+2)-1} dx = \\
 &= \frac{\nu(\nu + 1)}{\lambda^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda^{\nu+2}}{\Gamma(\nu + 2)} e^{-\lambda x} x^{(\nu+2)-1} \cdot \mathbb{I}_{[0;+\infty)}(x) dx = \\
 &\quad \left( \text{но это — интеграл по всему пространству от плотности} \right. \\
 &\quad \left. \text{распределения } \Gamma(\lambda, \nu + 1) \text{ (1.13), который равен } 1 \right) \\
 &= \frac{\nu(\nu + 1)}{\lambda^2} \quad (1.15)
 \end{aligned}$$

Тогда

$$D\xi = M(\xi^2) - (M\xi)^2 = \frac{\nu(\nu + 1)}{\lambda^2} - \left( \frac{\nu}{\lambda} \right)^2 = \frac{\nu^2 - \nu - \nu^2}{\lambda^2} = \frac{\nu}{\lambda^2} \quad (1.16)$$



## 1.5 распределение

### 1.5.1 Определение

### 1.5.2 Матожидание

### 1.5.3 Дисперсия

## 1.6 распределение

### 1.6.1 Определение

### 1.6.2 Матожидание

### 1.6.3 Дисперсия

## 1.7 распределение

### 1.7.1 Определение

### 1.7.2 Матожидание

### 1.7.3 Дисперсия

## 1.8 распределение

### 1.8.1 Определение

### 1.8.2 Матожидание

### 1.8.3 Дисперсия

## 1.9 распределение

### 1.9.1 Определение

### 1.9.2 Матожидание

### 1.9.3 Дисперсия