Оглавление

0.1 Случайный вектор

Определение. Пусть случайный опыт $G \sim \langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$. Случайным вектором $\vec{\xi}$ размерности n, наблюдаемым в опыте G, называется упорядоченный набор случайных величин, наблюдаемых в данном опыте.

Можно доказать эквивалентность следующего определения:

Определение. Пусть случайный опыт $G \sim \langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$. Случайным вектором $\vec{\xi}$ размерности n, наблюдаемым в опыте G, называется функция $\vec{\xi} : \Omega \to \mathbb{R}^n$, такая, что $\vec{\xi}$ $(\mathcal{F}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$-измерима, т. е. $\forall (B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})[\vec{\xi}^{-1}(B) \in \mathcal{F}]$.

Определение. Пусть случайный вектор $\vec{\xi}$ наблюдается в случайном опыте $G \sim \langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$. Распределением случайного вектора $\vec{\xi}$ называется функция $P_{\vec{\xi}} : \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \to [0; 1]$, определяемая равенством

$$P_{\vec{\xi}}(B) = P(\vec{\xi}^{-1}(B))$$

Можно доказать, что $P_{\vec{\xi}}$ — вероятностная мера на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$. Этот факт даёт возможность перейти к выборочному вероятностному пространству (аналогично тому, как это было сделано для случайной величины):

$$\langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle \xrightarrow{\vec{\xi}} \left\langle \mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}, P_{\vec{\xi}} \right\rangle$$

и рассматривать в нём непосредственно заданный случайный вектор $\vec{\eta}(\vec{x}) = \vec{x}$. Легко видеть, что в таком случае $\forall (B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}) \left[P_{\vec{\eta}}(B) = P_{\vec{\xi}}(B) \right]$.

0.2 Неравенство Маркова

Пусть $\xi \in L_1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и $P\{\xi \geqslant 0\} = 1$, $T > 0$. Тогда

$$P\{\xi \geqslant T\} \leqslant \frac{M\xi}{T} \tag{1}$$

Доказательство.

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_\xi(x) =$$

(т. к. ξ неотрицательна почти наверное)

$$= \int_{\{x \geqslant T\}} x dF_\xi(x) + \int_{\{0 \leqslant x < T\}} x dF_\xi(x) \geqslant$$

(т. к. F_ξ - неубывающая)

$$\geqslant \int_{\{x \geqslant T\}} x dF_\xi(x) \geqslant \int_{\{x \geqslant T\}} T dF_\xi(x) = T \int_{\{x \geqslant T\}} dF_\xi(x) =$$

$$= T \left(\lim_{x \to +\infty} F_\xi(x) - F_\xi(T-) \right) = TP\{\xi \geqslant T\}$$

Доказано.

0.3 Неравенство Чебышева

Пусть $\xi \in l_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\varepsilon > 0$. Тогда

$$P\{|\xi - M\xi| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{D\xi}{\varepsilon^2} \tag{2}$$

Доказательство.

$$P\{|\xi - M\xi| \geqslant \varepsilon\} = P\{|\xi - M\xi|^2 \geqslant \varepsilon^2\} =$$

(положив в неравенстве Маркова (1) $T = \varepsilon^2$)

$$= \frac{M\left((\xi - M\xi)^2\right)}{\varepsilon^2} = \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$$

Доказано.

0.4 Закон больших чисел

Идеология. Обычно случайная величина «размазана» по числовой оси. Если случайные величины складывать, то «размазанность» будет «расползаться». Но оказывается, что при определённых условиях среднее арифметическое величин «расползаться» не будет.

Теорема 0.4.1. Пусть $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность стохастически независимых интегрируемых с квадратом случайных величин, дисперсия которых ограничена в совокупности, т. е.

$$\forall (k \in \mathbb{N}) \, [\xi_k \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)]$$

$$\exists (C > 0) \forall (k \in \mathbb{N}) \, [D\xi_k \leqslant C]$$

Обозначим $\bar{\xi}_n := \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$, $\bar{\mu}_n := \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} M\xi_k$

Тогда

$$\forall (\varepsilon > 0) \left[P(|\bar{\xi}_n - \bar{\mu}_n| \geqslant \varepsilon) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \right]$$

Доказательство.

$$P\{|\bar{\xi}_n - \bar{\mu}_n| \geqslant \varepsilon\} =$$

$$(\text{т. к. } \bar{\mu}_n = M\bar{\xi}_n)$$

$$= P\{|\bar{\xi}_n - M\bar{\xi}_n| \geqslant \varepsilon\} \leqslant$$

(применяем неравенство Чебышева (2))

$$\leqslant \frac{D\bar{\xi}_n}{\varepsilon^2} = \frac{D\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k\right)}{\varepsilon^2} = \frac{\frac{1}{n^2} D\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k\right)}{\varepsilon^2} =$$

(в силу стохастической независимости дисперсия аддитивна)

$$= \frac{\frac{1}{n^2}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} D\xi_k\right)}{\varepsilon^2} \leqslant \frac{\frac{1}{n^2}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} C\right)}{\varepsilon^2} = \frac{nC}{n^2\varepsilon^2} = \frac{C}{n\varepsilon^2} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Доказано.

Определение. Пусть $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность случайных величин, наблюдаемых в опыте $G \sim \langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$, ξ — также случайная величина, наблюдаемая в этом опыте. Говорят, что ξ_k сходится по вероятности к ξ и пишут:

$$\xi_k \xrightarrow[n\to\infty]{P} \xi$$

если

$$\forall(\varepsilon > 0) \left[P\{|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \right]$$

Сформулируем теперь следствие из закона больших чисел — в случае, когда мы имеем дело с последовательностью одинаково распределённых случайных величин.

Следствие 0.4.1.1. Рассмотрим последовательность одинаково распределённых интегрируемых с квадратом случайных величин $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$, наблюдаемых в случайном опыте $G \sim \langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$. Обозначим $M\xi_k = \mu$, $D\xi_k = \sigma^2$. Тогда $\bar{\xi}_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} \mu$.

Рассмотрим теперь схему Бернулли.

Следствие 0.4.1.2. (теорема Бернулли) Частота появления события при неограниченном увеличении количества независимых повторений одного и того же опыта по вероятности сходится к вероятности данного события. Переформулируем строго.

Пусть к $G \sim \langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$применена схема Бернулли с вероятностью успеха p и количеством повторений n. Обозначим через ν_n количество успехов в n опытах. Тогда $\frac{\nu_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} p$.

Доказательство. Пусть случайная величина ξ_k равна 1, если в k-м опыте произошёл успех, и 0 в противном случае. Очевидно, что ξ_k стохастически независимы и распределены одинаково. Заметим, что $\nu_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$. Более того, $\bar{\xi}_n = \frac{\nu_n}{n}$, $M\xi_k = p$. Применив следствие 1 из закона больших чисел, получим требуемое. **Доказано.**

0.5 Центральная предельная теорема

Закон больших чисел и следствия из него позволяют судить о поведении среднего арифметического последовательности одинаково распределённых случайных величин, т. е. сумма величин (обратите внимание, «сдвинутых» на матожидание) делится на n, благодаря чему и стабилизируется. Возникает закономерный вопрос: а что будет, если делить не на первую степень n, а на небольшую положительную? Ответ для случая степени, равной $\frac{1}{2}$, и даёт центральная предельная теорема.

Теорема 0.5.1. Пусть $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность одинаково распределённых интегрируемых с квадратом случайных величин, наблюдаемых в опыте $G \sim \langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$. Пусть $\xi \sim N(0,1)$. Обозначим $\mu = M\xi_k$, $\sigma^2 = D\xi_k$ ($\sigma > 0$). Проведём теперь над каждой ξ_k манипуляцию, состоящую из уже знакомого нам сдвига на матожидание и новой операции - «нормирования» дисперсией:

$$\xi_k^0 = \frac{\xi_k - \mu}{\sigma}$$

(Рекомендуем, кстати, читателю убедиться, что $\|\xi_k^0\|_{L_2(\Omega,\mathcal{F},P)} = 1$.) Тогда $\bar{\xi}_n = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k^0}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{слабо}} \xi$, т.е.

$$P\{\bar{\xi}_n < x\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dx$$

Доказательство. В доказательстве будем использовать переход к характеристическим функциям и тот факт, что характеристическая функция суммы равна произведению характеристических функций.

Сначала заметим, что $\dot{\varphi}_{\xi_k^0} = iM\xi_k^0 = 0$, $\ddot{\varphi}_{\xi_k^0} = i^2 D\xi_k^0 = -1$.

$$\varphi_{\bar{\xi}_n}(t) = \varphi_{\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n \xi_k^0}(t) = \varphi_{\sum_{k=1}^n \xi_k^0}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \varphi_{\xi_k^0}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \left(\varphi_{\xi_k^0}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n =$$

(применяем формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано)

$$= \left(\varphi_{\xi_k^0}(0) + \dot{\varphi}_{\xi_k^0}(0)\frac{t}{\sqrt{n}} + \ddot{\varphi}_{\xi_k^0}(0)\frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n =$$

$$= \left(1 + 0 \cdot \frac{t}{\sqrt{n}} - 1 \cdot \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n =$$

$$= \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{второй замечательный предел}} e^{-\frac{t^2}{2}} = \varphi_\xi(t)$$

Итак, $\varphi_{\bar{\xi}_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi_\xi(t)$, следовательно,

$$\bar{\xi}_n = \sum_{k=1} n \frac{\xi_k - \mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi$$

Доказано.

0.6 Теорема Муавра-Лапласа

Особо рассмотрим частный случай центральной предельной теоремы для биномиального распределения.

Теорема 0.6.1. Пусть $\{\xi_k\}_{k=1}^\infty$ — последовательность одинаково биномиально с параметрами $(1, p)$ распределённых случайных величин, наблюдаемых в опыте $G \sim \langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$. Тогда

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{слабо}} \xi \sim N(0, 1)$$

Для доказательства этой теоремы достаточно вспомнить числовые характеристики биномиального распределения.

0.7 Применение теоремы Муавра-Лапласа

Сначала заметим, что по теореме Муавра-Лапласа при достаточно большом n для $\xi \sim Bi(n,p)$ имеет место приближенное равенство

$$P\{\xi < b\} \approx \Phi\left(\frac{b-p}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \tag{3}$$

Легко понять, что тогда

$$P\{a < \xi < b\} \approx \Phi\left(\frac{b-p}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{a-p}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \tag{4}$$

Пример 0.7.1. Пусть среди новорождённых частота появления мальчиков составляет $0,515$ и мы хотим узнать, с каком вероятностью среди 10000 новорождённых мальчиков будет меньше, чем девочек. Рассмотрим количество мальчиков — случайную величину $\xi \sim Bi(10000; 0,515)$. Применяем теорему Муавра-Лапласа, а именно формулу (4):

$$P\{\xi \in [0; 10000]\} \approx$$
$$\approx \Phi\left(\frac{5000-5150}{\sqrt{10^4 \cdot 0,515 \cdot 0,485}}\right) - \Phi\left(\frac{-5150}{\sqrt{10^4 \cdot 0,515 \cdot 0,485}}\right) \approx$$
$$\approx \Phi(-3) - \Phi(-103) \approx 0$$

Глава 1

Типовые дискретные распределения

1.1 Вырожденное распределение

1.1.1 Определение

Говорят, что случайная величина ξ имеет вырожденное распределение, если ξ есть некоторая константа c (т.е. случайная величина ξ всегда принимает одно и то же значение).

1.1.2 Матожидание

Здесь и далее через N_ξ обозначаем множество всех значений, которые может принимать дискретная случайная величина ξ. В нашем случае $N_\xi = \{c\}$.

По формуле матожидания дискретной случайной величины:

$$M\xi = \sum_{x_k \in N_\xi} x_k \cdot P\{\xi = x_k\} = \sum_{x_k \in \{c\}} x_k \cdot P\{\xi = x_k\} = c \cdot P\{\xi = c\} = c \cdot 1 = c \tag{1.1}$$

1.1.3 Дисперсия

Сначала ищем матожидание квадрата:

$$M(\xi^2) = \sum_{x_k \in N_\xi} x_k^2 \cdot P\{\xi = x_k\} = \sum_{x_k \in \{c\}} x_k^2 \cdot P\{\xi = x_k\} = c^2 \cdot P\{\xi = c\} = c^2 \cdot 1 = c^2 \tag{1.2}$$

По формуле дисперсии имеем:

$$D\xi = M(\xi^2) - (M\xi)^2 = c^2 - c^2 = 0 \tag{1.3}$$

1.2 Геометрическое распределение

1.2.1 Определение

$$P\{\xi = k\} = (1-p)^{k-1}p,\ k \in \mathbb{N}.$$

1.2.2 Математическое ожидание

$$\begin{aligned}M\xi = \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}p = p\sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} = p\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d}{dp}(-(1-p)^k) = \\ = p\frac{d}{dp}\sum_{k=1}^{\infty}(-(1-p)^k) = -p\frac{d}{dp}\frac{1-p}{1-(1-p)} = -p\frac{d}{dp}\frac{1-p}{p} = \\ = -p\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p}-1\right) = -p\left(-\frac{1}{p^2}\right) = \frac{1}{p}\end{aligned} \tag{1.4}$$

1.2.3 Дисперсия

И снова будем применять почленное дифференцирование рядов.

$$D\xi = M(\xi^2) - (M\xi)^2 = M(\xi^2) - \frac{1}{p^2} = \sum_{k=1}^{\infty} k^2(1-p)^{k-1}p - \frac{1}{p^2} =$$

$$= p\sum_{k=1}^{\infty}(k^2+k-k)(1-p)^{k-1} - \frac{1}{p^2} =$$

$$= p\sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)(1-p)^{k-1} - p\sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} - \frac{1}{p^2} =$$

(значение второй суммы мы уже находили в (1.4))

$$= p\sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)(1-p)^{k-1} - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = p\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d^2}{dp^2}(1-p)^{k+1} - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} =$$

$$= p\frac{d^2}{dp^2}\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k+1} - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = p\frac{d^2}{dp^2}\left((1-p)\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^k\right) - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} =$$

$$= p\frac{d^2}{dp^2}\left((1-p)\frac{1-p}{p}\right) - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = p\frac{d^2}{dp^2}\left(\frac{1-2p+p^2}{p}\right) - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} =$$

$$= p\frac{d^2}{dp^2}\left(\frac{1}{p} - 2 + p\right) - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = p\frac{2}{p^3} - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} =$$

$$= \frac{2}{p^2} - \frac{p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2} \quad (1.5)$$

1.3 Гипергеометрическое распределение

1.3.1 Определение

$P\{\xi = k\} = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$, где N - общее количество элементов, n - выбираемое без возвращения количество элементов, k - требуемое количество успешных элементов.

1.3.2 Математическое ожидание

Будем, как обычно, полагать, что при $a > b$, или $a < 0$, или $b < 0$ $C_b^a = 0$. Это позволит нам не следить за пределами суммирования.

Далее, подготовим плацдарм в виде нескольких формул. Во-первых, сумма вероятностей всех исходов равна 1:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} = 1 \tag{1.6}$$

Заменив n на $n-1$; k на $k-1$; M на $M-1$; N на $N-1$, имеем:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_{M-1}^{k-1} C_{N-M}^{n-k}}{C_{N-1}^{n-1}} = 1 \tag{1.7}$$

Заметим также, что

$$C_b^a = \frac{b!}{a!(a-b)!} = \frac{b(b-1)!}{a(a-1)!((a-1)-(b-1))!} = \frac{b}{a} C_{b-1}^{a-1} \tag{1.8}$$

Теперь приступаем непосредственно к штурму первого момента.

$$M\xi = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} \overset{(1.8)}{=} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\frac{M}{k} C_{M-1}^{k-1} C_{N-M}^{n-k}}{\frac{N}{n} C_{N-1}^{n-1}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\frac{M}{k} C_{M-1}^{k-1} C_{(N-1)-(M-1)}^{(n-1)-(k-1)}}{\frac{N}{n} C_{N-1}^{n-1}} =$$

(выносим за знак суммы некоторые множители, не зависящие от k)

$$= \frac{Mn}{N} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\frac{1}{k} C_{M-1}^{k-1} C_{(N-1)-(M-1)}^{(n-1)-(k-1)}}{C_{N-1}^{n-1}} =$$

$$= \frac{Mn}{N} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_{M-1}^{k-1} C_{(N-1)-(M-1)}^{(n-1)-(k-1)}}{C_{N-1}^{n-1}} \overset{(1.7)}{=} \frac{Mn}{N} \tag{1.9}$$

1.3.3 Дисперсия

Здесь мы снова применим приём, знакомый по формуле (1.5), а именно — разбитие суммы с квадратом на две. Считаем второй начальный момент:

$$M(\xi^k) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} + \sum_{k=1}^{\infty} k\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} =$$

(вторую сумму мы считали парой строк выше, чем и воспользуемся)

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} + \frac{Mn}{N} \overset{(1.8)}{=} \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)\frac{\frac{M}{k} C_{M-1}^{k-1} C_{N-M}^{n-k}}{\frac{N}{n} C_{N-1}^{n-1}} + \frac{Mn}{N} \overset{(1.8)}{=}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)\frac{\frac{M}{k}\cdot\frac{M-1}{k-1} C_{M-2}^{k-2} C_{N-M}^{n-k}}{\frac{N}{n}\cdot\frac{N-1}{n-1} C_{N-2}^{n-2}} + \frac{Mn}{N} =$$

(сокращаем множители k(k-1))

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M(M-1) C_{M-2}^{k-2} C_{N-M}^{n-k}}{\frac{N}{n}\cdot\frac{N-1}{n-1} C_{N-2}^{n-2}} + \frac{Mn}{N} =$$

(выносим за скобки некоторые множители, не содержащие k)

$$= \frac{M(M-1)n(n-1)}{N(N-1)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_{M-2}^{k-2} C_{N-M}^{n-k}}{C_{N-2}^{n-2}} + \frac{Mn}{N} \overset{1.7}{=}$$

$$= \frac{M(M-1)n(n-1)}{N(N-1)} + \frac{Mn}{N} \quad (1.10)$$

Теперь считаем дисперсию — исключительно алгебраическое времяпровождение:

$$D\xi = M(\xi^2) - (M\xi)^2 = \frac{M(M-1)n(n-1)}{N(N-1)} + \frac{Mn}{N} - \frac{M^2n^2}{N^2} =$$

$$= \frac{Mn}{N}\left(\frac{(M-1)(n-1)}{N-1} + 1 - \frac{Mn}{N}\right) =$$

$$= \frac{Mn}{N}\left(\frac{Mn - M - n + 1}{N-1} + 1 - \frac{Mn}{N}\right) =$$

$$= \frac{Mn}{N}\left(\frac{MnN - MN - nN + N}{N(N-1)} + 1 - \frac{MnN - Mn}{N(N-1)}\right) =$$

$$= \frac{Mn}{N}\left(\frac{MnN - MN - nN + N - MnN + Mn}{N(N-1)} + 1\right) =$$

$$= \frac{Mn}{N}\left(\frac{-MN - nN + N + Mn}{N(N-1)} + 1\right) =$$

$$= \frac{Mn}{N}\left(\frac{-MN - nN + N + Mn + N^2 - N}{N(N-1)}\right) =$$

$$= \frac{Mn}{N}\left(\frac{-MN - nN + Mn + N^2}{N(N-1)}\right) =$$

$$= \frac{Mn}{N}\left(\frac{n(M-N) - N(M-N)}{N(N-1)}\right) =$$

$$= \frac{Mn}{N}\left(\frac{(n-N)(M-N)}{N(N-1)}\right) = \frac{Mn(n-N)(M-N)}{N^2(N-1)} \quad (1.11)$$

1.4 Биномиальное распределение

1.4.1 Определение

1.4.2 Матожидание

1.4.3 Дисперсия

1.5 Отрицательное биномиальное распределение

1.5.1 Определение

1.5.2 Матожидание

1.5.3 Дисперсия

1.6 Распределение Паскаля

1.6.1 Определение

1.6.2 Матожидание

1.6.3 Дисперсия

1.7 Распределение Пуассона

1.7.1 Определение

1.7.2 Матожидание

1.7.3 Дисперсия

Глава 2

Типовые абсолютно непрерывные распределения

2.1 Равномерное распределение

2.1.1 Определение

$$f_\xi(x) = \frac{1}{b-a}\mathbb{I}_{[a;b]}(x) \tag{2.1}$$

2.1.2 Матожидание

$$M\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x)dx = \int\limits_{a}^{b} x\frac{1}{b-a}dx =$$
$$= \frac{1}{b-a}\left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{x=a}^{x=b} = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2} \tag{2.2}$$

2.1.3 Дисперсия

$$M(\xi^2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2\frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2dx =$$
$$= \frac{1}{b-a}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{x=a}^{x=b} = \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^3}{3}-\frac{a^3}{3}\right) =$$
$$= \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^3-a^3}{3}\right) = \frac{1}{b-a}\left(\frac{(b-a)(a^2+ab+b^2)}{3}\right) = \frac{a^2+ab+b^2}{3} \tag{2.3}$$

$$D\xi = M(\xi^2) - (M\xi)^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 =$$
$$= \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4} = \frac{4a^2+4ab+4b^2}{12} - \frac{3a^2+6ab+3b^2}{12} =$$
$$= \frac{4a^2+4ab+4b^2-3a^2-6ab-3b^2}{12} = \frac{a^2-2ab+b^2}{12} = \frac{(a-b)^2}{12} \quad (2.4)$$

2.2 Нормальное распределение

2.2.1 Определение

Говорят, что $\xi \sim N(\mu, \sigma)$, если

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (2.5)$$

2.2.2 Матожидание

$$M\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx =$$

(положим $t = x - \mu$, тогда $dx = dt$)

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} (t+\mu) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}} dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} t \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}} dt + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mu \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}} dt =$$

(левый интеграл - интеграл от нечётной функции
по всему пространству, он равен нулю)

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mu \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}} dt = \mu \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}} dt =$$

(это интеграл от плотности по всему пространству, он равен 1)

$$= \mu \quad (2.6)$$

2.2.3 Дисперсия

В отличие от других распределений, здесь мы будем считать дисперсию по определению.

Напомним читателю, что в курсе математического анализа вычислялся интеграл Пуассона:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \tag{2.7}$$

Вычислим теперь два очень похожих на него интеграла:

$$\int ye^{-y^2} dy =$$

$$(\text{ замена: } t = -y^2,\ dt = -2ydy\ )$$

$$= -\frac{1}{2} \int e^t dt = -\frac{1}{2} e^t = -\frac{1}{2} e^{-y^2} \tag{2.8}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-y^2} dy =$$

$$(\text{ по частям: } u = y,\ du = dy,\ dv = ye^{-y^2} dy,$$

$$v = -\tfrac{1}{2} e^{-y^2} \text{ по формуле } (2.8))$$

$$= \left(-\frac{1}{2} y e^{-y^2}\right)\Big|_{y=-\infty}^{\infty} - \int\limits_{-\infty}^{\infty} -\frac{1}{2} e^{-y^2} dy = \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy =$$

$$(\text{ а это — интеграл Пуассона } (2.7)\ )$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{2.9}$$

Теперь всё готово к штурму непосредственно дисперсии.

$$D\xi = M\left((\xi - M\xi)^2\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx =$$

$$= \sigma\sqrt{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma^2} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx =$$

$$\text{(положим } y = \tfrac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}}\text{, тогда } dx = \sigma\sqrt{2}dy \text{)}$$

$$= \sigma\sqrt{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} y^2 \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma^2} e^{-y^2} \sigma\sqrt{2} dy = 2\sigma^2 \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-y^2} dy =$$

(но это — интеграл вида (2.9))

$$= 2\sigma^2 \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sigma^2 \quad (2.10)$$

2.3 Распределение Коши

2.3.1 Определение

Говорят, что случайная величина ξ имеет распределение Коши с параметрами $\mu \in \mathbb{R}$ и $\sigma > 0$ и пишут: $\xi \sim C(\mu, \sigma)$, если

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\pi\sigma} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (2.11)$$

2.3.2 Отсутствие моментов (в т. ч. матожидания и дисперсии)

Убедимся, что матожидания не сущетсвует (а значит, не существует и моментов более высокого порядка, т. е. никаких моментов, в том числе дисперсии). Напомним, что матожиданием абсолютно непрерывной случайной величины ξ называется интеграл вида

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x) dx \quad (2.12)$$

в случае, если он сходится абсолютно. Для распределения Коши имеем интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\pi\sigma} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx \tag{2.13}$$

И этот интеграл по абсолютной величине расходится. В самом деле,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| x \frac{1}{\pi\sigma} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \right| dx =$$

(положим $x = \sigma y$, тогда $dx = \sigma dy$)

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sigma y}{\pi} \cdot \frac{1}{1+\left(y-\frac{\mu}{\sigma}\right)^2} \right| dy =$$

(положим $\lambda = \frac{\mu}{\sigma}$)

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sigma y}{\pi} \cdot \frac{1}{1+(y-\lambda)^2} \right| dy =$$

(положим $\alpha = 1 + |\lambda|$)

$$= \int_{-\infty}^{\alpha} \left| \frac{\sigma y}{\pi} \cdot \frac{1}{1+(y-\lambda)^2} \right| dy + \int_{\alpha}^{\infty} \left| \frac{\sigma y}{\pi} \cdot \frac{1}{1+(y-\lambda)^2} \right| dy \geqslant$$

(т.к. подынтегральное выражение неотрицательно, можем оценить снизу сумму интегралов вторым интегралом)

$$\geqslant \int_{\alpha}^{\infty} \left| \frac{\sigma y}{\pi} \cdot \frac{1}{1+(y-\lambda)^2} \right| dy = \int_{\alpha}^{\infty} \frac{\sigma |y|}{\pi} \cdot \frac{1}{1+(y-\lambda)^2} dy =$$

(т.к. при $y \geqslant \alpha = 1 + |\lambda| > 0$ имеем $|y| = y$)

$$= \int_{\alpha}^{\infty} \frac{\sigma y}{\pi} \cdot \frac{1}{1+(y-\lambda)^2} dy = \frac{\sigma}{\pi} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{y}{1+(y-\lambda)^2} dy =$$

(положим $z = y - \lambda$, тогда $dz = dy$)

$$= \frac{\sigma}{\pi} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{z+\lambda}{1+z^2} dz = \frac{\sigma}{\pi} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{z}{1+z^2} dz + \frac{\sigma}{\pi} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{\lambda}{1+z^2} dz =$$

$$= \frac{\sigma}{2\pi} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{2z}{1+z^2} dz + \frac{\sigma\lambda}{\pi} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{1}{1+z^2} dz =$$

$$= \frac{\sigma}{2\pi} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{2z}{1+z^2} dz + \frac{\sigma\lambda}{\pi} \left(\operatorname{arctg} z\right)\Big|_{z=\alpha}^{z=+\infty} =$$

$$= \frac{\sigma}{2\pi}\int\limits_{\alpha}^{\infty}\frac{2z}{1+z^2}dz + \frac{\sigma\lambda}{\pi}(\operatorname{arctg}(+\infty) - \operatorname{arctg}\alpha) =$$

$$= \frac{\sigma}{2\pi}\int\limits_{\alpha}^{\infty}\frac{2z}{1+z^2}dz + \frac{\mu}{\pi}(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\alpha) =$$

(к интегралу справа прибавляется конечная константа, зависящая от параметров распределения, обозначим её через β)

$$= \frac{\sigma}{2\pi}\int\limits_{\alpha}^{\infty}\frac{2z}{1+z^2}dz + \beta =$$

(положим $t = 1 + z^2$, тогда $dt = 2zdz$)

$$= \frac{\sigma}{2\pi}\int\limits_{\alpha}^{\infty}\frac{1}{t}dt + \beta = \frac{\sigma}{2\pi}\left(\ln|t|\right)\Big|_{t=\alpha}^{t=+\infty} + \beta =$$

$$= \frac{\sigma}{2\pi}\left(\ln|+\infty| - \ln|\alpha|\right) + \beta = \frac{\sigma}{2\pi}\left(+\infty - \ln\left(1 + \left|\frac{\mu}{\sigma}\right|\right)\right) + \beta = +\infty \tag{2.14}$$

Следовательно, интеграл (2.13) сходится не абсолютно, и ни математического ожидания, ни каких-либо других моментов (включая дисперсию) у распределения Коши не существует.

2.4 Гамма-распределение

2.4.1 Определение

Говорят, что $\xi \sim \Gamma(\nu, \lambda)$, если

$$f_\xi(x) = \frac{\lambda^\nu}{\Gamma(\nu)}e^{-\lambda x}x^{\nu-1} \cdot \mathbb{I}_{[0;+\infty)}(x) \tag{2.15}$$

2.4.2 Матожидание

$$M\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x) dx = \int\limits_0^{+\infty} x \frac{\lambda^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\lambda x} x^{\nu-1} dx =$$

$$(\text{ т. к. } \Gamma(\nu+1) = \nu\Gamma(\nu))$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} x \frac{\lambda^{\nu+1}\nu}{\lambda\Gamma(\nu+1)} e^{-\lambda x} x^{\nu-1} dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\lambda^{\nu+1}\nu}{\lambda\Gamma(\nu+1)} e^{-\lambda x} x^{\nu+1-1} dx =$$

$$= \frac{\nu}{\lambda} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\lambda^{\nu+1}}{\Gamma(\nu+1)} e^{-\lambda x} x^{(\nu+1)-1} dx =$$

$$= \frac{\nu}{\lambda} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda^{\nu+1}}{\Gamma(\nu+1)} e^{-\lambda x} x^{(\nu+1)-1} \cdot \mathbb{I}_{[0;+\infty)}(x) dx =$$

(но это - интеграл по всему пространству от плотности распределения $\Gamma(\lambda, \nu+1)$(2.15), который равен 1)

$$= \frac{\nu}{\lambda} \quad (2.16)$$

2.4.3 Дисперсия

Считаем матожидание квадрата:

$$M(\xi^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_\xi(x)dx = \int_{0}^{+\infty} x^2 \frac{\lambda^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\lambda x} x^{\nu-1} dx =$$

$$\text{(т. к. } \Gamma(\nu+1) = \nu\Gamma(\nu))$$

$$= \int_{0}^{+\infty} x^2 \frac{\lambda^{\nu+1}\nu}{\lambda\Gamma(\nu+1)} e^{-\lambda x} x^{\nu-1} dx = \int_{0}^{+\infty} x^2 \frac{\lambda^{\nu+2}\nu(\nu+1)}{\lambda^2\Gamma(\nu+2)} e^{-\lambda x} x^{\nu-1} dx =$$

$$= \int_{0}^{+\infty} \frac{\lambda^{\nu+2}\nu(\nu+1)}{\lambda^2\Gamma(\nu+2)} e^{-\lambda x} x^{(\nu+2)-1} dx =$$

$$= \frac{\nu(\nu+1)}{\lambda^2} \int_{0}^{+\infty} \frac{\lambda^{\nu+2}}{\Gamma(\nu+2)} e^{-\lambda x} x^{(\nu+2)-1} dx =$$

$$= \frac{\nu(\nu+1)}{\lambda^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda^{\nu+2}}{\Gamma(\nu+2)} e^{-\lambda x} x^{(\nu+2)-1} \cdot \mathbb{I}_{[0;+\infty)}(x) dx =$$

(но это — интеграл по всему пространству от плотности распределения $\Gamma(\nu+1,\lambda)$(2.15), который равен 1)

$$= \frac{\nu(\nu+1)}{\lambda^2} \quad (2.17)$$

Тогда

$$D\xi = M(\xi^2) - (M\xi)^2 = \frac{\nu(\nu+1)}{\lambda^2} - \left(\frac{\nu}{\lambda}\right)^2 = \frac{\nu^2 - \nu - \nu^2}{\lambda^2} = \frac{\nu}{\lambda^2} \quad (2.18)$$

2.5 Показательное распределение

2.5.1 Определение

Говорят, что случайная величина ξ имеет показательное распределение с параметром $\lambda > 0$ и пишут: $\xi \sim \Pi(\lambda)$, если $\xi \sim \Gamma(1,\lambda)$.

2.5.2 Матожидание и дисперсия

Воспользовавшись определением, положим в формулах (2.16) и (2.17) $\nu = 1$:

$$M\xi = \frac{1}{\lambda} \tag{2.19}$$

$$D\xi = \frac{1}{\lambda^2} \tag{2.20}$$

2.6 Распределение Эрланга

2.6.1 Определение

Говорят, что случайная величина ξ имеет распределение Эрланга с параметрами $n \in \mathbb{N}$ и $\lambda > 0$ и пишут: $\xi \sim Er_n(\lambda)$, если $\xi \sim \Gamma(n, \lambda)$.

2.6.2 Матожидание и дисперсия

Воспользовавшись определением, положим в формулах (2.16) и (2.17) $\nu = n$:

$$M\xi = \frac{n}{\lambda} \tag{2.21}$$

$$D\xi = \frac{n}{\lambda^2} \tag{2.22}$$

2.7 Хи-квадрат-распределение

2.7.1 Определение

Говорят, что случайная величина ξ имеет хи-квадрат-распределение с параметром $n \in \mathbb{N}$ и пишут: $\xi \sim \chi^2_n$, если $\xi \sim \Gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$.

2.7.2 Матожидание и дисперсия

Воспользовавшись определением, положим в формулах (2.16) и (2.17) $\nu = \frac{n}{2}$ и $\lambda = \frac{1}{2}$:

$$M\xi = \frac{\frac{n}{2}}{\frac{1}{2}} = n \tag{2.23}$$

$$D\xi = \frac{\frac{n}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 2n \tag{2.24}$$

2.8 Распределение Парето

2.8.1 Определение

Определение. Говорят, что случайная величина ξ имеет распределение Парето с параметрами $x_0 > 0$ и $\alpha > 0$ и пишут $\xi \sim Par(x_0, \alpha)$, если

$$F_\xi(x) = P\{\xi < x\} = \left(1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^\alpha\right) \cdot \mathbb{I}_{[x_0;+\infty)}(x)$$

Легко видеть, что функция распределения непрерывна.

2.8.2 Плотность

$$f_\xi(x) = \alpha \frac{x_0^\alpha}{x^{\alpha+1}} \cdot \mathbb{I}_{[x_0;+\infty)}(x)$$

2.8.3 Математическое ожидание

Математическое ожидание, а, следовательно, и другие моменты, могут существовать или не существовать в зависимости от значения α. Попробуем найти матожидание:

$$M\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x) dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\alpha \frac{x_0^\alpha}{x^{\alpha+1}} \cdot \mathbb{I}_{[x_0;+\infty)}(x) dx = \int\limits_{x_0}^{+\infty} x\alpha \frac{x_0^\alpha}{x^{\alpha+1}} dx = \\ = \int\limits_{x_0}^{+\infty} \alpha \frac{x_0^\alpha}{x^\alpha} dx = \alpha x_0^\alpha \int\limits_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx \tag{2.25}$$

Последний интеграл, как мы знаем из курса математического анализа, сходится при $\alpha > 1$. Следовательно, при $\alpha > 1$ из формулы (2.25) имеем

$$M\xi = \alpha x_0^\alpha \int\limits_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \alpha x_0^\alpha \left(\frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{x^{\alpha-1}} \right) \Bigg|_{x=x_0}^{x=+\infty} dx =$$
$$= \alpha x_0^\alpha \left(0 - \frac{1}{1-\alpha} \cdot \frac{1}{x_0^{\alpha-1}} \right) = \alpha x_0^\alpha \frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{x_0^{\alpha-1}} =$$
$$= \frac{\alpha x_0^\alpha}{(\alpha-1) x_0^{\alpha-1}} = \frac{\alpha x_0}{\alpha - 1} \quad (2.26)$$

2.8.4 Прочие моменты

Как известно, начальный момент существует или не существует одновременно с центральным. Для начального момента порядка k рассуждениями, аналогичными (2.25), имеем

$$M(\xi^k) = \alpha x_0^\alpha \int\limits_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha-k+1}} dx \quad (2.27)$$

А такой интеграл сходится при $\alpha - k + 1 > 1$, т.е. при $\alpha > k$. Следовательно, у распределения Парето с параметрами x_0 и α существуют k-ые центральный и начальный моменты тогда и только тогда, когда $\alpha > k$.

2.8.5 Дисперсия

Вооружившись формулами (2.26) и (2.27), посчитаем дисперсию этого распределения при $\alpha > 2$:

$$D\xi = M(\xi^2) - (M\xi)^2 = \alpha x_0^\alpha \int\limits_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha-1}} dx - \left(\frac{\alpha x_0}{\alpha - 1}\right)^2 =$$

$$= \alpha x_0^\alpha \frac{1}{\alpha - 2} \cdot \frac{1}{x_0^{\alpha-2}} - \frac{\alpha^2 x_0^2}{(\alpha-1)^2} = \frac{\alpha x_0^2}{\alpha - 2} - \frac{\alpha^2 x_0^2}{(\alpha-1)^2} =$$

$$= \alpha x_0^2 \left(\frac{1}{\alpha - 2} - \frac{\alpha}{(\alpha-1)^2}\right) =$$

$$= \alpha x_0^2 \left(\frac{(\alpha-1)^2}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2} - \frac{\alpha^2 - 2\alpha}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2}\right) =$$

$$= \alpha x_0^2 \left(\frac{\alpha^2 - 2\alpha + 1}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2} - \frac{\alpha^2 - 2\alpha}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2}\right) = \frac{\alpha x_0^2}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2} \quad (2.28)$$