

# Оглавление

0.1	Случайный вектор . . . . .	2
0.2	Неравенство Маркова . . . . .	3
0.3	Неравенство Чебышева . . . . .	3
0.4	Закон больших чисел . . . . .	4
0.5	Центральная предельная теорема . . . . .	5
0.6	Теорема Муавра-Лапласа . . . . .	7
0.7	Применение теоремы Муавра-Лапласа . . . . .	8
<b>1</b>	<b>Типовые дискретные распределения</b>	<b>9</b>
1.1	Вырожденное распределение . . . . .	9
1.1.1	Определение . . . . .	9
1.1.2	Матожидание . . . . .	9
1.1.3	Дисперсия . . . . .	9
1.2	Гипергеометрическое распределение . . . . .	10
1.2.1	Определение . . . . .	10
1.2.2	Математическое ожидание . . . . .	10
1.2.3	Дисперсия . . . . .	11
1.3	Биномиальное распределение . . . . .	13
1.3.1	Определение . . . . .	13
1.3.2	Матожидание . . . . .	13
1.3.3	Дисперсия . . . . .	14
1.4	Отрицательное биномиальное распределение . . . . .	16
1.4.1	Определение . . . . .	16
1.4.2	Матожидание . . . . .	16
1.4.3	Дисперсия . . . . .	17
1.5	Распределение Паскаля . . . . .	18
1.5.1	Определение . . . . .	18
1.5.2	Матожидание и дисперсия . . . . .	18
1.6	Геометрическое распределение . . . . .	18
1.6.1	Определение . . . . .	18
1.6.2	Математическое ожидание . . . . .	19
1.6.3	Дисперсия . . . . .	20
1.7	Распределение Пуассона . . . . .	21
1.7.1	Определение . . . . .	21
1.7.2	Матожидание . . . . .	21
1.7.3	Дисперсия . . . . .	22
<b>2</b>	<b>Типовые абсолютно непрерывные распределения</b>	<b>23</b>
2.1	Равномерное распределение . . . . .	23
2.1.1	Определение . . . . .	23
2.1.2	Матожидание . . . . .	23
2.1.3	Дисперсия . . . . .	23
2.2	Нормальное распределение . . . . .	24
2.2.1	Определение . . . . .	24
2.2.2	Матожидание . . . . .	24
2.2.3	Дисперсия . . . . .	25
2.3	Распределение Коши . . . . .	26
2.3.1	Определение . . . . .	26
2.3.2	Отсутствие моментов (в т. ч. матожидания и дисперсии) . . . . .	26
2.4	Гамма-распределение . . . . .	29
2.4.1	Определение . . . . .	29
2.4.2	Матожидание . . . . .	30

2.4.3	Дисперсия	31
2.5	Показательное распределение	31
2.5.1	Определение	31
2.5.2	Матожидание и дисперсия	32
2.6	Распределение Эрланга	32
2.6.1	Определение	32
2.6.2	Матожидание и дисперсия	32
2.7	Хи-квадрат-распределение	32
2.7.1	Определение	32
2.7.2	Матожидание и дисперсия	32
2.8	Распределение Парето	33
2.8.1	Определение	33
2.8.2	Плотность	33
2.8.3	Математическое ожидание	33
2.8.4	Прочие моменты	34
2.8.5	Дисперсия	35

## 0.1 Случайный вектор

**Определение.** Пусть случайный опыт  $G \sim \langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$ . Случайным вектором  $\vec{\xi}$  размерности  $n$ , наблюдаемым в опыте  $G$ , называется упорядоченный набор случайных величин, наблюдаемых в данном опыте.

Можно доказать эквивалентность следующего определения:

**Определение.** Пусть случайный опыт  $G \sim \langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$ . Случайным вектором  $\vec{\xi}$  размерности  $n$ , наблюдаемым в опыте  $G$ , называется функция  $\vec{\xi} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ , такая, что  $\vec{\xi}(\mathcal{F}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$ -измерима, т. е.  $\forall (B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}) [\vec{\xi}^{-1}(B) \in \mathcal{F}]$ .

**Определение.** Пусть случайный вектор  $\vec{\xi}$  наблюдается в случайном опыте  $G \sim \langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$ . Распределением случайного вектора  $\vec{\xi}$  называется функция  $P_{\vec{\xi}} : \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \rightarrow [0; 1]$ , определяемая равенством

$$P_{\vec{\xi}}(B) = P(\vec{\xi}^{-1}(B))$$

Можно доказать, что  $P_{\vec{\xi}}$  — вероятностная мера на  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$ . Этот факт даёт возможность перейти к выборочному вероятностному пространству (аналогично тому, как это было сделано для случайной величины):

$$\langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle \xrightarrow{\vec{\xi}} \langle \mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}, P_{\vec{\xi}} \rangle$$

и рассматривать в нём непосредственно заданный случайный вектор  $\vec{\eta}(\vec{x}) = \vec{x}$ . Легко видеть, что в таком случае  $\forall (B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}) [P_{\vec{\eta}}(B) = P_{\vec{\xi}}(B)]$ .

## 0.2 Неравенство Маркова

Пусть  $\xi \in L_1(\Omega, \mathcal{F}, P)$  и  $P\{\xi \geq 0\} = 1$ ,  $T > 0$ . Тогда

$$P\{\xi \geq T\} \leq \frac{M\xi}{T} \quad (1)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} M\xi &= \int_{-\infty}^{\infty} x dF_{\xi}(x) = \\ &\quad (\text{т. к. } \xi \text{ неотрицательна почти наверное}) \\ &= \int_{\{x \geq T\}} x dF_{\xi}(x) + \int_{\{0 \leq x < T\}} x dF_{\xi}(x) \geq \\ &\quad (\text{т. к. } F_{\xi} \text{ - неубывающая}) \\ &\geq \int_{\{x \geq T\}} x dF_{\xi}(x) \geq \int_{\{x \geq T\}} T dF_{\xi}(x) = T \int_{\{x \geq T\}} dF_{\xi}(x) = \\ &= T \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} F_{\xi}(x) - F_{\xi}(T-) \right) = TP\{\xi \geq T\} \end{aligned}$$

Доказано.

## 0.3 Неравенство Чебышева

Пусть  $\xi \in l_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ,  $\varepsilon > 0$ . Тогда

$$P\{|\xi - M\xi| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2} \quad (2)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} P\{|\xi - M\xi| \geq \varepsilon\} &= P\{|\xi - M\xi|^2 \geq \varepsilon^2\} = \\ &\quad (\text{положив в неравенстве Маркова (1) } T = \varepsilon^2) \\ &= \frac{M((\xi - M\xi)^2)}{\varepsilon^2} = \frac{D\xi}{\varepsilon^2} \end{aligned}$$

Доказано.

## 0.4 Закон больших чисел

**Идеология.** Обычно случайная величина «размазана» по числовой оси. Если случайные величины складывать, то «размазанность» будет «расползаться». Но оказывается, что при определённых условиях среднее арифметическое величин «расползаться» не будет.

**Теорема 0.4.1.** Пусть  $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$  — последовательность стохастически независимых интегрируемых с квадратом случайных величин, дисперсия которых ограничена в совокупности, т. е.

$$\forall(k \in \mathbb{N}) [\xi_k \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)]$$

$$\exists(C > 0) \forall(k \in \mathbb{N}) [D\xi_k \leq C]$$

$$\text{Обозначим } \bar{\xi}_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k, \bar{\mu}_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M\xi_k$$

Тогда

$$\forall(\varepsilon > 0) \left[ P(|\bar{\xi}_n - \bar{\mu}_n| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \right]$$

**Доказательство.**

$$P\{|\bar{\xi}_n - \bar{\mu}_n| \geq \varepsilon\} =$$

$$(\text{т. к. } \bar{\mu}_n = M\bar{\xi}_n)$$

$$= P\{|\bar{\xi}_n - M\bar{\xi}_n| \geq \varepsilon\} \leq$$

(применяем неравенство Чебышева (2))

$$\leq \frac{D\bar{\xi}_n}{\varepsilon^2} = \frac{D\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k\right)}{\varepsilon^2} = \frac{\frac{1}{n^2} D\left(\sum_{k=1}^n \xi_k\right)}{\varepsilon^2} =$$

(в силу стохастической независимости дисперсия аддитивна)

$$= \frac{\frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=1}^n D\xi_k\right)}{\varepsilon^2} \leq \frac{\frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=1}^n C\right)}{\varepsilon^2} = \frac{nC}{n^2\varepsilon^2} = \frac{C}{n\varepsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

**Доказано.**

**Определение.** Пусть  $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$  — последовательность случайных величин, наблюдаемых в опыте  $G \sim \langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$ ,  $\xi$  — также случайная величина, наблюдаемая в этом опыте. Говорят, что  $\xi_k$  сходится по вероятности к  $\xi$  и

пишут:

$$\xi_k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \xi$$

если

$$\forall(\varepsilon > 0) \left[ P\{|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \right]$$

Сформулируем теперь следствие из закона больших чисел — в случае, когда мы имеем дело с последовательностью одинаково распределённых случайных величин.

**Следствие 0.4.1.1.** Рассмотрим последовательность одинаково распределённых интегрируемых с квадратом случайных величин  $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ , наблюдаемых в случайном опыте  $G \sim \langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$ . Обозначим  $M\xi_k = \mu$ ,  $D\xi_k = \sigma^2$ . Тогда  $\bar{\xi}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \mu$ .

Рассмотрим теперь схему Бернулли.

**Следствие 0.4.1.2.** (теорема Бернулли) Частота появления события при неограниченном увеличении количества независимых повторений одного и того же опыта по вероятности сходится к вероятности данного события. Переформулируем строго.

Пусть к  $G \sim \langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$  применена схема Бернулли с вероятностью успеха  $p$  и количеством повторений  $n$ . Обозначим через  $\nu_n$  количество успехов в  $n$  опытах. Тогда  $\frac{\nu_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} p$ .

**Доказательство.** Пусть случайная величина  $\xi_k$  равна 1, если в  $k$ -м опыте произошёл успех, и 0 в противном случае. Очевидно, что  $\xi_k$  стохастически независимы и распределены одинаково. Заметим, что  $\nu_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ . Более того,  $\bar{\xi}_n = \frac{\nu_n}{n}$ ,  $M\xi_k = p$ . Применив следствие 1 из закона больших чисел, получим требуемое. **Доказано.**

## 0.5 Центральная предельная теорема

Закон больших чисел и следствия из него позволяют судить о поведении среднего арифметического последовательности одинаково распределённых случайных величин, т. е. сумма величин (обратите внимание,

«сдвинутых» на матожидание) делится на  $n$ , благодаря чему и стабилизируется. Возникает закономерный вопрос: а что будет, если делить не на первую степень  $n$ , а на небольшую положительную? Ответ для случая степени, равной  $\frac{1}{2}$ , и даёт центральная предельная теорема.

**Теорема 0.5.1.** Пусть  $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$  — последовательность одинаково распределённых интегрируемых с квадратом случайных величин, наблюдаемых в опыте  $G \sim \langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$ . Пусть  $\xi \sim N(0, 1)$ . Обозначим  $\mu = M\xi_k$ ,  $\sigma^2 = D\xi_k$  ( $\sigma > 0$ ). Проведём теперь над каждой  $\xi_k$  манипуляцию, состоящую из уже знакомого нам сдвига на матожидание и новой операции - «нормирования» дисперсией:

$$\xi_k^0 = \frac{\xi_k - \mu}{\sigma}$$

(Рекомендуем, кстати, читателю убедиться, что  $\|\xi_k^0\|_{L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)} = 1$ .) Тогда

$$\bar{\xi}_n = \frac{\sum_{k=1}^n \xi_k^0}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{слабо}} \xi, \text{ т.е.}$$

$$P\{\bar{\xi}_n < x\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

**Доказательство.** В доказательстве будем использовать переход к характеристическим функциям и тот факт, что характеристическая функция суммы равна произведению характеристических функций.

Сначала заметим, что  $\dot{\varphi}_{\xi_k^0} = iM\xi_k^0 = 0$ ,  $\ddot{\varphi}_{\xi_k^0} = i^2 D\xi_k^0 = -1$ .

$$\begin{aligned}\varphi_{\bar{\xi}_n}(t) &= \varphi_{\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \xi_k^0}(t) = \varphi_{\sum_{k=1}^n \xi_k^0} \left( \frac{t}{\sqrt{n}} \right) = \\ &= \prod_{k=1}^n \varphi_{\xi_k^0} \left( \frac{t}{\sqrt{n}} \right) = \left( \varphi_{\xi_k^0} \left( \frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right)^n =\end{aligned}$$

(применяем формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано)

$$\begin{aligned}&= \left( \varphi_{\xi_k^0}(0) + \dot{\varphi}_{\xi_k^0}(0) \frac{t}{\sqrt{n}} + \ddot{\varphi}_{\xi_k^0}(0) \frac{t^2}{2n} + o \left( \frac{1}{n} \right) \right)^n = \\ &= \left( 1 + 0 \cdot \frac{t}{\sqrt{n}} - 1 \cdot \frac{t^2}{2n} + o \left( \frac{1}{n} \right) \right)^n = \\ &= \left( 1 - \frac{t^2}{2n} + o \left( \frac{1}{n} \right) \right)^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{второй замечательный предел}} e^{-\frac{t^2}{2}} = \varphi_{\xi}(t)\end{aligned}$$

Итак,  $\varphi_{\bar{\xi}_n}(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \varphi_{\xi}(t)$ , следовательно,

$$\bar{\xi}_n = \sum_{k=1}^n n \frac{\xi_k - \mu}{\sigma \sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \xi$$

**Доказано.**

## 0.6 Теорема Муавра-Лапласа

Особо рассмотрим частный случай центральной предельной теоремы для биномиального распределения.

**Теорема 0.6.1.** Пусть  $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$  — последовательность одинаково биномиально с параметрами  $(1, p)$  распределённых случайных величин, наблюдаемых в опыте  $G \sim \langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$ . Тогда

$$\frac{\sum_{k=1}^n \xi_k - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{слабо}} \xi \sim N(0, 1)$$

Для доказательства этой теоремы достаточно вспомнить числовые характеристики биномиального распределения.

## 0.7 Применение теоремы Муавра-Лапласа

Сначала заметим, что по теореме Муавра-Лапласа при достаточно большом  $n$  для  $\xi \sim Bi(n, p)$  имеет место приближенное равенство

$$P\{\xi < b\} \approx \Phi\left(\frac{b - p}{\sqrt{np(1 - p)}}\right) \quad (3)$$

Легко понять, что тогда

$$P\{a < \xi < b\} \approx \Phi\left(\frac{b - p}{\sqrt{np(1 - p)}}\right) - \Phi\left(\frac{a - p}{\sqrt{np(1 - p)}}\right) \quad (4)$$

**Пример 0.7.1.** Пусть среди новорождённых частота появления мальчиков составляет 0,515 и мы хотим узнать, с какой вероятностью среди 10000 новорождённых мальчиков будет меньше, чем девочек. Рассмотрим количество мальчиков — случайную величину  $\xi \sim Bi(10000; 0,515)$ . Применяем теорему Муавра-Лапласа, а именно формулу (4):

$$\begin{aligned} P\{\xi \in [0; 10000]\} &\approx \\ &\approx \Phi\left(\frac{5000 - 5150}{\sqrt{10^4 \cdot 0,515 \cdot 0,485}}\right) - \Phi\left(\frac{-5150}{\sqrt{10^4 \cdot 0,515 \cdot 0,485}}\right) \approx \\ &\approx \Phi(-3) - \Phi(-103) \approx 0 \end{aligned}$$



# Глава 1

## Типовые дискретные распределения

### 1.1 Вырожденное распределение

#### 1.1.1 Определение

Говорят, что случайная величина  $\xi$  имеет вырожденное распределение, если  $\xi$  есть некоторая константа  $c$  (т.е. случайная величина  $\xi$  всегда принимает одно и то же значение).

#### 1.1.2 Матожидание

Здесь и далее через  $N_\xi$  обозначаем множество всех значений, которые может принимать дискретная случайная величина  $\xi$ . В нашем случае  $N_\xi = \{c\}$ .

По формуле матожидания дискретной случайной величины:

$$M\xi = \sum_{x_k \in N_\xi} x_k \cdot P\{\xi = x_k\} = \sum_{x_k \in \{c\}} x_k \cdot P\{\xi = x_k\} = c \cdot P\{\xi = c\} = c \cdot 1 = c \quad (1.1)$$

#### 1.1.3 Дисперсия

Сначала ищем матожидание квадрата:

$$M(\xi^2) = \sum_{x_k \in N_\xi} x_k^2 \cdot P\{\xi = x_k\} = \sum_{x_k \in \{c\}} x_k^2 \cdot P\{\xi = x_k\} = c^2 \cdot P\{\xi = c\} = c^2 \cdot 1 = c^2 \quad (1.2)$$

По формуле дисперсии имеем:

$$D\xi = M(\xi^2) - (M\xi)^2 = c^2 - c^2 = 0 \quad (1.3)$$

## 1.2 Гипергеометрическое распределение

### 1.2.1 Определение

$P\{\xi = k\} = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$ , где  $N$  - общее количество элементов,  $n$  - выбираемое без возвращения количество элементов,  $k$  - требуемое количество успешных элементов.

### 1.2.2 Математическое ожидание

Будем, как обычно, полагать, что при  $a > b$ , или  $a < 0$ , или  $b < 0$   $C_b^a = 0$ . Это позволит нам не следить за пределами суммирования.

Далее, подготовим плацдарм в виде нескольких формул. Во-первых, сумма вероятностей всех исходов равна 1:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} = 1 \quad (1.4)$$

Заменив  $n$  на  $n - 1$ ;  $k$  на  $k - 1$ ;  $M$  на  $M - 1$ ;  $N$  на  $N - 1$ , имеем:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_{M-1}^{k-1} C_{N-M}^{n-k}}{C_{N-1}^{n-1}} = 1 \quad (1.5)$$

Заметим также, что

$$C_b^a = \frac{b!}{a!(a-b)!} = \frac{b(b-1)!}{a(a-1)!((a-1)-(b-1))!} = \frac{b}{a} C_{b-1}^{a-1} \quad (1.6)$$

Теперь приступаем непосредственно к штурму первого момента.

$$\begin{aligned}
M\xi &= \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} \stackrel{(1.6)}{=} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\frac{M}{k} C_{M-1}^{k-1} C_{N-M}^{n-k}}{\frac{N}{n} C_{N-1}^{n-1}} = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\frac{M}{k} C_{M-1}^{k-1} C_{(N-1)-(M-1)}^{(n-1)-(k-1)}}{\frac{N}{n} C_{N-1}^{n-1}} =
\end{aligned}$$

(выносим за знак суммы некоторые множители, не зависящие от  $k$ )

$$\begin{aligned}
&= \frac{Mn}{N} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\frac{1}{k} C_{M-1}^{k-1} C_{(N-1)-(M-1)}^{(n-1)-(k-1)}}{C_{N-1}^{n-1}} = \\
&= \frac{Mn}{N} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_{M-1}^{k-1} C_{(N-1)-(M-1)}^{(n-1)-(k-1)}}{C_{N-1}^{n-1}} \stackrel{(1.5)}{=} \frac{Mn}{N} \quad (1.7)
\end{aligned}$$

### 1.2.3 Дисперсия

Здесь мы снова применим приём, знакомый по формуле (1.20), а именно — разбитие суммы с квадратом на две. Считаем второй начальный

МОМЕНТ:

$$\begin{aligned}
M(\xi^k) &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} + \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} = \\
&\quad (\text{вторую сумму мы считали парой строк выше, чем и воспользуемся}) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} + \frac{Mn}{N} \stackrel{(1.6)}{=} \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) \frac{\frac{M}{k} C_{M-1}^{k-1} C_{N-M}^{n-k}}{\frac{N}{n} C_{N-1}^{n-1}} + \frac{Mn}{N} \stackrel{(1.6)}{=} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) \frac{\frac{M}{k} \cdot \frac{M-1}{k-1} C_{M-2}^{k-2} C_{N-M}^{n-k}}{\frac{N}{n} \cdot \frac{N-1}{n-1} C_{N-2}^{n-2}} + \frac{Mn}{N} = \\
&\quad (\text{сокращаем множители } k(k-1)) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M(M-1) C_{M-2}^{k-2} C_{N-M}^{n-k}}{\frac{N}{n} \cdot \frac{N-1}{n-1} C_{N-2}^{n-2}} + \frac{Mn}{N} = \\
&\quad (\text{выносим за скобки некоторые множители, не содержащие } k) \\
&= \frac{M(M-1)n(n-1)}{N(N-1)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_{M-2}^{k-2} C_{N-M}^{n-k}}{C_{N-2}^{n-2}} + \frac{Mn}{N} \stackrel{1.5}{=} \\
&= \frac{M(M-1)n(n-1)}{N(N-1)} + \frac{Mn}{N} \quad (1.8)
\end{aligned}$$

Теперь считаем дисперсию — исключительно алгебраическое время-

провождение:

$$\begin{aligned}
D\xi &= M(\xi^2) - (M\xi)^2 = \frac{M(M-1)n(n-1)}{N(N-1)} + \frac{Mn}{N} - \frac{M^2n^2}{N^2} = \\
&= \frac{Mn}{N} \left( \frac{(M-1)(n-1)}{N-1} + 1 - \frac{Mn}{N} \right) = \\
&= \frac{Mn}{N} \left( \frac{Mn - M - n + 1}{N-1} + 1 - \frac{Mn}{N} \right) = \\
&= \frac{Mn}{N} \left( \frac{MnN - MN - nN + N}{N(N-1)} + 1 - \frac{MnN - Mn}{N(N-1)} \right) = \\
&= \frac{Mn}{N} \left( \frac{MnN - MN - nN + N - MnN + Mn}{N(N-1)} + 1 \right) = \\
&= \frac{Mn}{N} \left( \frac{-MN - nN + N + Mn}{N(N-1)} + 1 \right) = \\
&= \frac{Mn}{N} \left( \frac{-MN - nN + N + Mn + N^2 - N}{N(N-1)} \right) = \\
&= \frac{Mn}{N} \left( \frac{-MN - nN + Mn + N^2}{N(N-1)} \right) = \\
&= \frac{Mn}{N} \left( \frac{n(M-N) - N(M-N)}{N(N-1)} \right) = \\
&= \frac{Mn}{N} \left( \frac{(n-N)(M-N)}{N(N-1)} \right) = \frac{Mn(n-N)(M-N)}{N^2(N-1)} \quad (1.9)
\end{aligned}$$

### 1.3 Биномиальное распределение

#### 1.3.1 Определение

$$P\{\xi = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad (1.10)$$

#### 1.3.2 Матожидание

И снова заметим, что сумма вероятностей равна 1:

$$\sum_{l=0}^m C_m^l p^l (1-p)^{m-l} = 1 \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned}
M\xi &= \sum_{k=0}^n k C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \\
&\quad ( \text{ при } k=0 \text{ под суммой всё равно } 0 ) \\
&= \sum_{k=1}^n k C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \stackrel{(1.6)}{=} \sum_{k=1}^n k \frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1} p^k (1-p)^{(n-1)-(k-1)} = \\
&= \sum_{k=1}^n n C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} p (1-p)^{(n-1)-(k-1)} = np \sum_{k=1}^n C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)} = \\
&\quad ( \text{ положив } l = k-1, m = n-1 ) \\
&= np \sum_{l=0}^m C_m^l p^l (1-p)^{m-l} \stackrel{(1.11)}{=} np \quad (1.12)
\end{aligned}$$

### 1.3.3 Дисперсия

$$\begin{aligned}
D\xi &= M(xi^2) - (M\xi)^2 = \sum_{k=0}^n k^2 C_n^k p^k (1-p)^{n-k} - n^2 p^2 = \\
&\quad ( \text{ при } k=0 \text{ под суммой всё равно } 0 ) - n^2 p^2 \\
&= \sum_{k=1}^n k^2 C_n^k p^k (1-p)^{n-k} - n^2 p^2 \stackrel{(1.6)}{=} \sum_{k=1}^n k^2 \frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1} p^k (1-p)^{(n-1)-(k-1)} - n^2 p^2 = \\
&= \sum_{k=1}^n kn C_{n-1}^{k-1} p^k (1-p)^{(n-1)-(k-1)} - n^2 p^2 = \\
&= \sum_{k=1}^n (k-1+1)n C_{n-1}^{k-1} p^k (1-p)^{(n-1)-(k-1)} - n^2 p^2 = \\
&= \sum_{k=1}^n (k-1)n C_{n-1}^{k-1} p^k (1-p)^{(n-1)-(k-1)} + \sum_{k=1}^n n C_{n-1}^{k-1} p^k (1-p)^{(n-1)-(k-1)} - n^2 p^2 =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= n \sum_{k=1}^n (k-1) C_{n-1}^{k-1} p^k (1-p)^{(n-1)-(k-1)} + \\
&\quad + n \sum_{k=1}^n C_{n-1}^{k-1} p^k (1-p)^{(n-1)-(k-1)} - n^2 p^2 = \\
&\quad \left( \text{положив } l = k-1, m = n-1 \right) \\
&= n \sum_{l=0}^m l C_m^l p^l \cdot p(1-p)^{m-l} + n \sum_{l=0}^m C_m^l p^l \cdot p(1-p)^{m-l} - n^2 p^2 = \\
&= np \sum_{l=0}^m l C_m^l p^l (1-p)^{m-l} + np \sum_{l=0}^m C_m^l p^l (1-p)^{m-l} - n^2 p^2 = \\
&\quad \left( \text{но правая сумма соответствует (1.11)} \right) \\
&= np \sum_{l=0}^m l C_m^l p^l (1-p)^{m-l} + np - n^2 p^2 = \\
&\quad \left( \text{при } l=0 \text{ под суммой всё равно } 0 \right) \\
&= np \sum_{l=1}^m l C_m^l p^l (1-p)^{m-l} + np - n^2 p^2 \stackrel{(1.6)}{=} \\
&= np \sum_{l=1}^m l \frac{m}{l} C_{m-1}^{l-1} p^{l-1} (1-p)^{m-l} + np - n^2 p^2 = \\
&= nmp \sum_{l=1}^m C_{m-1}^{l-1} p^{l-1} \cdot p(1-p)^{(m-1)-(l-1)} + np - n^2 p^2 = \\
&= n(n-1)p^2 \sum_{l=1}^m C_{m-1}^{l-1} p^{l-1} (1-p)^{(m-1)-(l-1)} + np - n^2 p^2 = \\
&\quad \left( \text{но такую сумму мы уже считали при вычислении математического ожидания} \right) \\
&= n(n-1)p^2 + np - n^2 p^2 = n^2 p^2 - np^2 + np - n^2 p^2 = -np^2 + np = np(1-p)
\end{aligned} \tag{1.13}$$

## 1.4 Отрицательное биномиальное распределение

### 1.4.1 Определение

Говорят, что  $\xi$  имеет отрицательное биномиальное распределение с параметрами  $\nu > 0$  и  $p \in (0; 1)$  и пишут:  $\xi \sim \gamma(\nu, p)$ , если

$$P\{\xi = k\} = \frac{\Gamma(\nu+k)}{k!\Gamma(\nu)} p^\nu (1-p)^k, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

### 1.4.2 Матожидание

Как обычно, заметим, что сумма вероятностей равна 1, т.е.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu+k)}{k!\Gamma(\nu)} p^\nu (1-p)^k = 1 \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned} M\xi &= \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\Gamma(\nu+k)}{k!\Gamma(\nu)} p^\nu (1-p)^k = \\ &\quad (\text{при } k=0 \text{ под суммой всё равно } 0) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\Gamma(\nu+k)}{k!\Gamma(\nu)} p^\nu (1-p)^k = \\ &\quad (\text{т.к. } \Gamma(\nu+1) = \nu\Gamma(\nu)) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\Gamma(\nu+k)}{k(k-1)!\frac{\Gamma(\nu+1)}{\nu}} \frac{p^{\nu+1}}{p} (1-p)^{k-1} (1-p) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu+k)}{(k-1)!\frac{\Gamma(\nu+1)}{\nu}} \frac{p^{\nu+1}}{p} (1-p)^{k-1} (1-p) \\ &\quad (\text{выносим за знак суммы некоторые постоянные множители}) \\ &= \frac{\nu(1-p)}{p} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu+1+(k-1))}{(k-1)!\Gamma(\nu+1)} p^{\nu+1} (1-p)^{k-1} = \\ &\quad (\text{положим } l = k-1, \mu = \nu+1) \\ &= \frac{\nu(1-p)}{p} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\mu+l)}{l!\Gamma(\mu)} p^\mu (1-p)^l = \\ &\quad (\text{эта сумма есть (1.14) в других обозначениях}) \\ &= \frac{\nu(1-p)}{p} \quad (1.15) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
D\xi &= M(\xi^2) - (M\xi)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\Gamma(\nu + k)}{k! \Gamma(\nu)} p^\nu (1-p)^k - \left( \frac{\nu(1-p)}{p} \right)^2 = \\
&\quad (\text{при } k=0 \text{ под суммой всё равно } 0) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{\Gamma(\nu + k)}{k! \Gamma(\nu)} p^\nu (1-p)^k - \left( \frac{\nu(1-p)}{p} \right)^2 = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (k^2 - k + k) \frac{\Gamma(\nu + k)}{k! \Gamma(\nu)} p^\nu (1-p)^k - \left( \frac{\nu(1-p)}{p} \right)^2 = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) \frac{\Gamma(\nu + k)}{k! \Gamma(\nu)} p^\nu (1-p)^k + \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\Gamma(\nu + k)}{k! \Gamma(\nu)} p^\nu (1-p)^k - \left( \frac{\nu(1-p)}{p} \right)^2 = \\
&\quad (\text{но правую сумму мы уже считали в (1.15)}) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) \frac{\Gamma(\nu + k)}{k! \Gamma(\nu)} p^\nu (1-p)^k + \frac{\nu(1-p)}{p} - \left( \frac{\nu(1-p)}{p} \right)^2 = \\
&\quad (\text{при } k=1 \text{ под суммой всё равно } 0) \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \frac{\Gamma(\nu + k)}{k! \Gamma(\nu)} p^\nu (1-p)^k + \\
&\quad + \frac{\nu(1-p)}{p} - \left( \frac{\nu(1-p)}{p} \right)^2 = \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \frac{\Gamma(\nu + 2 + (k-2))}{k(k-1)(k-2)! \frac{\Gamma(\nu+2)}{\nu(\nu+1)}} \frac{p^{\nu+2}}{p^2} (1-p)^{k-2} (1-p)^2 + \\
&\quad + \frac{\nu(1-p)}{p} - \left( \frac{\nu(1-p)}{p} \right)^2 = \\
&= \frac{\nu(\nu+1)(1-p)^2}{p^2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu + 2 + (k-2))}{(k-2)! \Gamma(\nu+2)} p^{\nu+2} (1-p)^{k-2} + \\
&\quad + \frac{\nu(1-p)}{p} - \left( \frac{\nu(1-p)}{p} \right)^2 =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left( \text{положим } l = k - 2, \mu = \nu + 2 \right) \\
& = \frac{\nu(\nu + 1)(1 - p)^2}{p^2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\mu + l)}{l! \Gamma(\mu)} p^{\mu} (1 - p)^l + \frac{\nu(1 - p)}{p} - \left( \frac{\nu(1 - p)}{p} \right)^2 = \\
& \quad \left( \text{эта сумма есть (1.14) в других обозначениях} \right) \\
& = \frac{\nu(\nu + 1)(1 - p)^2}{p^2} + \frac{\nu(1 - p)}{p} - \left( \frac{\nu(1 - p)}{p} \right)^2 = \\
& = \frac{(\nu^2 + \nu)(1 - p)^2}{p^2} + \frac{\nu(1 - p)p}{p^2} - \frac{\nu^2(1 - p)^2}{p^2} = \\
& = \frac{\nu(1 - p)^2}{p^2} + \frac{\nu(1 - p)p}{p^2} = \frac{\nu(1 - p)}{p^2} \quad (1.16)
\end{aligned}$$

## 1.5 Распределение Паскаля

### 1.5.1 Определение

Говорят, что  $\xi$  имеет распределение Паскаля с параметрами  $n \in \mathbb{N}$  и  $p \in (0; 1)$ , если  $\xi \sim \gamma(n, p)$ .

### 1.5.2 Матожидание и дисперсия

Тривиальнейшей заменой  $\nu$  на  $n$  в формулах (1.15) и (1.16) имеем соответственно:

$$M\xi = \frac{n(1 - p)}{p} \quad (1.17)$$

$$D\xi = \frac{n(1 - p)}{p^2} \quad (1.18)$$

## 1.6 Геометрическое распределение

### 1.6.1 Определение

$$P\{\xi = k\} = (1 - p)^k p, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

### 1.6.2 Математическое ожидание

$$\begin{aligned} M\xi &= \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^k p = p(1-p) \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} = \\ &= p(1-p) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dp} (-(1-p)^k) = p(1-p) \frac{d}{dp} \sum_{k=1}^{\infty} (-(1-p)^k) = \\ &= -p(1-p) \frac{d}{dp} \frac{1-p}{1-(1-p)} = -p(1-p) \frac{d}{dp} \frac{1-p}{p} = \\ &= -p(1-p) \frac{d}{dp} \left( \frac{1}{p} - 1 \right) = -p(1-p) \left( -\frac{1}{p^2} \right) = \frac{1-p}{p} \quad (1.19) \end{aligned}$$

### 1.6.3 Дисперсия

И снова будем применять почленное дифференцирование рядов.

$$\begin{aligned}
D\xi &= M(\xi^2) - (M\xi)^2 = M(\xi^2) - \frac{(1-p)^2}{p^2} = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k^2(1-p)^k p - \frac{(1-p)^2}{p^2} = \\
&= p(1-p) \sum_{k=1}^{\infty} (k^2 + k - k)(1-p)^{k-1} - \frac{(1-p)^2}{p^2} = \\
&= p(1-p) \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)(1-p)^{k-1} - p(1-p) \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} - \frac{(1-p)^2}{p^2} = \\
&\quad (\text{значение второй суммы мы уже находили в (1.19)}) \\
&= (1-p)p \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)(1-p)^{k-1} - \frac{1-p}{p} - \frac{(1-p)^2}{p^2} = \\
&= (1-p)p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d^2}{dp^2} (1-p)^{k+1} - \frac{1-p}{p} - \frac{(1-p)^2}{p^2} = \\
&= (1-p)p \frac{d^2}{dp^2} \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k+1} - \frac{1-p}{p} - \frac{(1-p)^2}{p^2} = \\
&= (1-p)p \frac{d^2}{dp^2} \left( (1-p) \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^k \right) - \frac{1-p}{p} - \frac{(1-p)^2}{p^2} = \\
&= p(1-p) \frac{d^2}{dp^2} \left( (1-p) \frac{1-p}{p} \right) - \frac{1-p}{p} - \frac{(1-p)^2}{p^2} = \\
&= p(1-p) \frac{d^2}{dp^2} \left( \frac{1-2p+p^2}{p} \right) - \frac{1-p}{p} - \frac{(1-p)^2}{p^2} = \\
&= p(1-p) \frac{d^2}{dp^2} \left( \frac{1}{p} - 2 + p \right) - \frac{1-p}{p} - \frac{(1-p)^2}{p^2} = \\
&= p(1-p) \frac{2}{p^3} - \frac{1-p}{p} - \frac{(1-p)^2}{p^2} = \\
&= \frac{2(1-p)}{p^2} - \frac{p(1-p)}{p^2} - \frac{(1-p)^2}{p^2} = \frac{1-p}{p^2} (2-p-(1-p)) = \frac{1-p}{p^2} \quad (1.20)
\end{aligned}$$

## 1.7 Распределение Пуассона

### 1.7.1 Определение

$$P\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \text{ где } k \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} \quad (1.21)$$

### 1.7.2 Матожидание

Заметим, что сумма вероятностей всех исходов равна 1, т.е.

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda^l}{l!} e^{-\lambda} = 1 \quad (1.22)$$

$$\begin{aligned} M\xi &= \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \\ &\quad \left( \text{при } k=0 \text{ под суммой всё равно } 0 \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k \cdot (k-1)!} e^{-\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} e^{-\lambda} = \\ &= \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda} = \\ &\quad \left( \text{положив } l = k-1 \right) \\ &= \lambda \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda^l}{l!} e^{-\lambda} \stackrel{(1.22)}{=} \lambda \quad (1.23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D\xi &= M(\xi^2) - (M\xi)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} - \lambda^2 = \\
&\quad ( \text{ при } k = 0 \text{ под суммой всё равно } 0 ) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} - \lambda^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (k^2 - k + k) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} - \lambda^2 = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (k^2 - k) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} + \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} - \lambda^2 = \\
&\quad ( \text{ но правую сумму мы уже считали выше, в (1.23) } ) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (k^2 - k) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} + \lambda - \lambda^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} + \lambda - \lambda^2 = \\
&\quad ( \text{ при } k = 1 \text{ под суммой всё равно } 0 ) \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} + \lambda - \lambda^2 = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \frac{\lambda^2 \cdot \lambda^{k-2}}{k!} e^{-\lambda} + \lambda - \lambda^2 = \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \frac{\lambda^2 \cdot \lambda^{k-2}}{k(k-1) \cdot (k-2)!} e^{-\lambda} + \lambda - \lambda^2 = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^2 \cdot \lambda^{k-2}}{(k-2)!} e^{-\lambda} + \lambda - \lambda^2 = \\
&= \lambda^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cdot \lambda^{k-2}}{(k-2)!} e^{-\lambda} + \lambda - \lambda^2 = \\
&\quad ( \text{ положим } l = k - 2 ) \\
&= \lambda^2 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\cdot \lambda^l}{l!} e^{-\lambda} + \lambda - \lambda^2 \stackrel{(1.22)}{=} \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda \quad (1.24)
\end{aligned}$$

## Глава 2

# Типовые абсолютно непрерывные распределения

### 2.1 Равномерное распределение

#### 2.1.1 Определение

$$f_{\xi}(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{I}_{[a;b]}(x) \quad (2.1)$$

#### 2.1.2 Матожидание

$$\begin{aligned} M\xi &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\xi}(x) dx = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \\ &= \frac{1}{b-a} \left( \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{x=a}^{x=b} = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2} \end{aligned} \quad (2.2)$$

#### 2.1.3 Дисперсия

$$\begin{aligned} M(\xi^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 dx = \\ &= \frac{1}{b-a} \left( \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{x=a}^{x=b} = \frac{1}{b-a} \left( \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} \right) = \\ &= \frac{1}{b-a} \left( \frac{b^3 - a^3}{3} \right) = \frac{1}{b-a} \left( \frac{(b-a)(a^2 + ab + b^2)}{3} \right) = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned}
D\xi &= M(\xi^2) - (M\xi)^2 = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \\
&= \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} = \frac{4a^2 + 4ab + 4b^2}{12} - \frac{3a^2 + 6ab + 3b^2}{12} = \\
&= \frac{4a^2 + 4ab + 4b^2 - 3a^2 - 6ab - 3b^2}{12} = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{12} = \frac{(a-b)^2}{12} \quad (2.4)
\end{aligned}$$

## 2.2 Нормальное распределение

### 2.2.1 Определение

Говорят, что  $\xi \sim N(\mu, \sigma)$ , если

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (2.5)$$

### 2.2.2 Матожидание

$$\begin{aligned}
M\xi &= \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \\
&\quad \left( \text{положим } t = x - \mu, \text{ тогда } dx = dt \right) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (t + \mu) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}} dt = \int_{-\infty}^{\infty} t \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}} dt + \int_{-\infty}^{\infty} \mu \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}} dt = \\
&\quad \left( \text{левый интеграл - интеграл от нечётной функции} \right. \\
&\quad \left. \text{по всему пространству, он равен нулю} \right) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mu \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}} dt = \mu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}} dt = \\
&\quad \left( \text{это интеграл от плотности по всему пространству, он равен 1} \right) \\
&= \mu \quad (2.6)
\end{aligned}$$



### 2.2.3 Дисперсия

В отличие от других распределений, здесь мы будем считать дисперсию по определению.

Напомним читателю, что в курсе математического анализа вычислялся интеграл Пуассона:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \quad (2.7)$$

Вычислим теперь два очень похожих на него интеграла:

$$\begin{aligned} \int y e^{-y^2} dy = \\ \quad \left( \text{замена: } t = -y^2, dt = -2y dy \right) \\ = -\frac{1}{2} \int e^t dt = -\frac{1}{2} e^t = -\frac{1}{2} e^{-y^2} \quad (2.8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-y^2} dy = \\ \quad \left( \text{по частям: } u = y, du = dy, dv = y e^{-y^2} dy, \right. \\ \quad \left. v = -\frac{1}{2} e^{-y^2} \text{ по формуле (2.8)} \right) \\ = \left( -\frac{1}{2} y e^{-y^2} \right) \Big|_{y=-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{1}{2} e^{-y^2} dy = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \\ \quad \left( \text{а это — интеграл Пуассона (2.7)} \right) \\ = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (2.9) \end{aligned}$$

Теперь всё готово к штурму непосредственно дисперсии.

$$\begin{aligned}
D\xi &= M((\xi - M\xi)^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \\
&= \sigma\sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma^2} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \\
&\quad \left( \text{положим } y = \frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}}, \text{ тогда } dx = \sigma\sqrt{2}dy \right) \\
&= \sigma\sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma^2} e^{-y^2} \sigma\sqrt{2}dy = 2\sigma^2 \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-y^2} dy = \\
&\quad \left( \text{но это — интеграл вида (2.9)} \right) \\
&= 2\sigma^2 \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\pi}{2} = \sigma^2 \quad (2.10)
\end{aligned}$$

## 2.3 Распределение Коши

### 2.3.1 Определение

Говорят, что случайная величина  $\xi$  имеет распределение Коши с параметрами  $\mu \in \mathbb{R}$  и  $\sigma > 0$  и пишут:  $\xi \sim C(\mu, \sigma)$ , если

$$f_{\xi}(x) = \frac{1}{\pi\sigma} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (2.11)$$

### 2.3.2 Отсутствие моментов (в т. ч. матожидания и дисперсии)

Убедимся, что матожидания не существует (а значит, не существует и моментов более высокого порядка, т. е. никаких моментов, в том числе дисперсии). Напомним, что матожиданием абсолютно непрерывной случайной величины  $\xi$  называется интеграл вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f_{\xi}(x) dx \quad (2.12)$$

в случае, если он сходится абсолютно. Для распределения Коши имеем интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\pi\sigma} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx \quad (2.13)$$

И этот интеграл по абсолютной величине расходится. В самом деле,

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \left| x \frac{1}{\pi \sigma} \cdot \frac{1}{1 + \left( \frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2} \right| dx = \\
& \quad \left( \text{положим } x = \sigma y, \text{ тогда } dx = \sigma dy \right) \\
& = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sigma y}{\pi} \cdot \frac{1}{1 + \left( y - \frac{\mu}{\sigma} \right)^2} \right| dy = \\
& \quad \left( \text{положим } \lambda = \frac{\mu}{\sigma} \right) \\
& = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sigma y}{\pi} \cdot \frac{1}{1 + (y - \lambda)^2} \right| dy = \\
& \quad \left( \text{положим } \alpha = 1 + |\lambda| \right) \\
& = \int_{-\infty}^{\alpha} \left| \frac{\sigma y}{\pi} \cdot \frac{1}{1 + (y - \lambda)^2} \right| dy + \int_{\alpha}^{\infty} \left| \frac{\sigma y}{\pi} \cdot \frac{1}{1 + (y - \lambda)^2} \right| dy \geq
\end{aligned}$$

( т.к. подынтегральное выражение неотрицательно, можем оценить снизу сумму интегралов вторым интегралом )

$$\begin{aligned}
& \geq \int_{\alpha}^{\infty} \left| \frac{\sigma y}{\pi} \cdot \frac{1}{1 + (y - \lambda)^2} \right| dy = \int_{\alpha}^{\infty} \frac{\sigma |y|}{\pi} \cdot \frac{1}{1 + (y - \lambda)^2} dy = \\
& \quad \left( \text{т.к. при } y \geq \alpha = 1 + |\lambda| > 0 \text{ имеем } |y| = y \right) \\
& = \int_{\alpha}^{\infty} \frac{\sigma y}{\pi} \cdot \frac{1}{1 + (y - \lambda)^2} dy = \frac{\sigma}{\pi} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{y}{1 + (y - \lambda)^2} dy = \\
& \quad \left( \text{положим } z = y - \lambda, \text{ тогда } dz = dy \right) \\
& = \frac{\sigma}{\pi} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{z + \lambda}{1 + z^2} dz = \frac{\sigma}{\pi} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{z}{1 + z^2} dz + \frac{\sigma}{\pi} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{\lambda}{1 + z^2} dz = \\
& = \frac{\sigma}{2\pi} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{2z}{1 + z^2} dz + \frac{\sigma \lambda}{\pi} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{1}{1 + z^2} dz = \\
& = \frac{\sigma}{2\pi} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{2z}{1 + z^2} dz + \frac{\sigma \lambda}{\pi} (\operatorname{arctg} z) \Big|_{z=\alpha}^{z=+\infty} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sigma}{2\pi} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{2z}{1+z^2} dz + \frac{\sigma\lambda}{\pi} (\operatorname{arctg}(+\infty) - \operatorname{arctg} \alpha) = \\
&= \frac{\sigma}{2\pi} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{2z}{1+z^2} dz + \frac{\mu}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \alpha \right) = \\
&\quad \left( \text{к интегралу справа прибавляется конечная константа, зависящая} \\
&\quad \text{от параметров распределения, обозначим её через } \beta \text{ } \right) \\
&= \frac{\sigma}{2\pi} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{2z}{1+z^2} dz + \beta = \\
&\quad \left( \text{положим } t = 1 + z^2, \text{ тогда } dt = 2z dz \text{ } \right) \\
&= \frac{\sigma}{2\pi} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{1}{t} dt + \beta = \frac{\sigma}{2\pi} (\ln |t|) \Big|_{t=\alpha}^{t=+\infty} + \beta = \\
&= \frac{\sigma}{2\pi} (\ln |+\infty| - \ln |\alpha|) + \beta = \frac{\sigma}{2\pi} \left( +\infty - \ln \left( 1 + \left| \frac{\mu}{\sigma} \right| \right) \right) + \beta = +\infty
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Следовательно, интеграл (2.13) сходится не абсолютно, и ни математического ожидания, ни каких-либо других моментов (включая дисперсию) у распределения Коши не существует.

## 2.4 Гамма-распределение

### 2.4.1 Определение

Говорят, что  $\xi \sim \Gamma(\nu, \lambda)$ , если

$$f_{\xi}(x) = \frac{\lambda^{\nu}}{\Gamma(\nu)} e^{-\lambda x} x^{\nu-1} \cdot \mathbb{I}_{[0;+\infty)}(x) \tag{2.15}$$

### 2.4.2 Матожидание

$$\begin{aligned}
 M\xi &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\xi}(x) dx = \int_0^{+\infty} x \frac{\lambda^{\nu}}{\Gamma(\nu)} e^{-\lambda x} x^{\nu-1} dx = \\
 &\quad \left( \text{т. к. } \Gamma(\nu + 1) = \nu \Gamma(\nu) \right) \\
 &= \int_0^{+\infty} x \frac{\lambda^{\nu+1} \nu}{\lambda \Gamma(\nu + 1)} e^{-\lambda x} x^{\nu-1} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^{\nu+1} \nu}{\lambda \Gamma(\nu + 1)} e^{-\lambda x} x^{\nu+1-1} dx = \\
 &\quad = \frac{\nu}{\lambda} \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^{\nu+1}}{\Gamma(\nu + 1)} e^{-\lambda x} x^{(\nu+1)-1} dx = \\
 &\quad = \frac{\nu}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda^{\nu+1}}{\Gamma(\nu + 1)} e^{-\lambda x} x^{(\nu+1)-1} \cdot \mathbb{I}_{[0;+\infty)}(x) dx =
 \end{aligned}$$

( но это - интеграл по всему пространству от плотности распределения  $\Gamma(\lambda, \nu + 1)$  (2.15), который равен 1 )

$$= \frac{\nu}{\lambda} \quad (2.16)$$

### 2.4.3 Дисперсия

Считаем матожидание квадрата:

$$\begin{aligned}
 M(\xi^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_\xi(x) dx = \int_0^{+\infty} x^2 \frac{\lambda^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\lambda x} x^{\nu-1} dx = \\
 &\quad \left( \text{т. к. } \Gamma(\nu + 1) = \nu \Gamma(\nu) \right) \\
 &= \int_0^{+\infty} x^2 \frac{\lambda^{\nu+1} \nu}{\lambda \Gamma(\nu + 1)} e^{-\lambda x} x^{\nu-1} dx = \int_0^{+\infty} x^2 \frac{\lambda^{\nu+2} \nu(\nu + 1)}{\lambda^2 \Gamma(\nu + 2)} e^{-\lambda x} x^{\nu-1} dx = \\
 &= \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^{\nu+2} \nu(\nu + 1)}{\lambda^2 \Gamma(\nu + 2)} e^{-\lambda x} x^{(\nu+2)-1} dx = \\
 &= \frac{\nu(\nu + 1)}{\lambda^2} \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^{\nu+2}}{\Gamma(\nu + 2)} e^{-\lambda x} x^{(\nu+2)-1} dx = \\
 &= \frac{\nu(\nu + 1)}{\lambda^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda^{\nu+2}}{\Gamma(\nu + 2)} e^{-\lambda x} x^{(\nu+2)-1} \cdot \mathbb{I}_{[0;+\infty)}(x) dx = \\
 &\quad \left( \text{но это — интеграл по всему пространству от плотности} \right. \\
 &\quad \left. \text{распределения } \Gamma(\nu + 1, \lambda) \text{ (2.15), который равен 1} \right) \\
 &= \frac{\nu(\nu + 1)}{\lambda^2} \quad (2.17)
 \end{aligned}$$

Тогда

$$D\xi = M(\xi^2) - (M\xi)^2 = \frac{\nu(\nu + 1)}{\lambda^2} - \left(\frac{\nu}{\lambda}\right)^2 = \frac{\nu^2 - \nu - \nu^2}{\lambda^2} = \frac{\nu}{\lambda^2} \quad (2.18)$$

## 2.5 Показательное распределение

### 2.5.1 Определение

Говорят, что случайная величина  $\xi$  имеет показательное распределение с параметром  $\lambda > 0$  и пишут:  $\xi \sim \Pi(\lambda)$ , если  $\xi \sim \Gamma(1, \lambda)$ .

### 2.5.2 Матожидание и дисперсия

Воспользовавшись определением, положим в формулах (2.16) и (2.17)  $\nu = 1$ :

$$M\xi = \frac{1}{\lambda} \quad (2.19)$$

$$D\xi = \frac{1}{\lambda^2} \quad (2.20)$$

## 2.6 Распределение Эрланга

### 2.6.1 Определение

Говорят, что случайная величина  $\xi$  имеет распределение Эрланга с параметрами  $n \in \mathbb{N}$  и  $\lambda > 0$  и пишут:  $\xi \sim Er_n(\lambda)$ , если  $\xi \sim \Gamma(n, \lambda)$ .

### 2.6.2 Матожидание и дисперсия

Воспользовавшись определением, положим в формулах (2.16) и (2.17)  $\nu = n$ :

$$M\xi = \frac{n}{\lambda} \quad (2.21)$$

$$D\xi = \frac{n}{\lambda^2} \quad (2.22)$$

## 2.7 Хи-квадрат-распределение

### 2.7.1 Определение

Говорят, что случайная величина  $\xi$  имеет хи-квадрат-распределение с параметром  $n \in \mathbb{N}$  и пишут:  $\xi \sim \chi_n^2$ , если  $\xi \sim \Gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$ .

### 2.7.2 Матожидание и дисперсия

Воспользовавшись определением, положим в формулах (2.16) и (2.17)  $\nu = \frac{n}{2}$  и  $\lambda = \frac{1}{2}$ :

$$M\xi = \frac{\frac{n}{2}}{\frac{1}{2}} = n \quad (2.23)$$



$$D\xi = \frac{\frac{n}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 2n \quad (2.24)$$

## 2.8 Распределение Парето

### 2.8.1 Определение

**Определение.** Говорят, что случайная величина  $\xi$  имеет распределение Парето с параметрами  $x_0 > 0$  и  $\alpha > 0$  и пишут  $\xi \sim \text{Par}(x_0, \alpha)$ , если

$$F_\xi(x) = P\{\xi < x\} = \left(1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^\alpha\right) \cdot \mathbb{I}_{[x_0; +\infty)}(x)$$

Легко видеть, что функция распределения непрерывна.

### 2.8.2 Плотность

$$f_\xi(x) = \alpha \frac{x_0^\alpha}{x^{\alpha+1}} \cdot \mathbb{I}_{[x_0; +\infty)}(x)$$

### 2.8.3 Математическое ожидание

Математическое ожидание, а, следовательно, и другие моменты, могут существовать или не существовать в зависимости от значения  $\alpha$ . Попробуем найти матожидание:

$$\begin{aligned} M\xi &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \alpha \frac{x_0^\alpha}{x^{\alpha+1}} \cdot \mathbb{I}_{[x_0; +\infty)}(x) dx = \int_{x_0}^{+\infty} x \alpha \frac{x_0^\alpha}{x^{\alpha+1}} dx = \\ &= \int_{x_0}^{+\infty} \alpha \frac{x_0^\alpha}{x^\alpha} dx = \alpha x_0^\alpha \int_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx \quad (2.25) \end{aligned}$$

Последний интеграл, как мы знаем из курса математического анализа, сходится при  $\alpha > 1$ . Следовательно, при  $\alpha > 1$  из формулы (2.25) имеем

$$\begin{aligned}
 M\xi &= \alpha x_0^\alpha \int_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \alpha x_0^\alpha \left( \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{x^{\alpha-1}} \right) \Big|_{x=x_0}^{x=+\infty} dx = \\
 &= \alpha x_0^\alpha \left( 0 - \frac{1}{1-\alpha} \cdot \frac{1}{x_0^{\alpha-1}} \right) = \alpha x_0^\alpha \frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{x_0^{\alpha-1}} = \\
 &= \frac{\alpha x_0^\alpha}{(\alpha-1)x_0^{\alpha-1}} = \frac{\alpha x_0}{\alpha-1} \quad (2.26)
 \end{aligned}$$

#### 2.8.4 Прочие моменты

Как известно, начальный момент существует или не существует одновременно с центральным. Для начального момента порядка  $k$  рассуждениями, аналогичными (2.25), имеем

$$M(\xi^k) = \alpha x_0^\alpha \int_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha-k+1}} dx \quad (2.27)$$

А такой интеграл сходится при  $\alpha - k + 1 > 1$ , т.е. при  $\alpha > k$ . Следовательно, у распределения Парето с параметрами  $x_0$  и  $\alpha$  существуют  $k$ -ые центральный и начальный моменты тогда и только тогда, когда  $\alpha > k$ .

### 2.8.5 Дисперсия

Вооружившись формулами (2.26) и (2.27), посчитаем дисперсию этого распределения при  $\alpha > 2$ :

$$\begin{aligned} D\xi &= M(\xi^2) - (M\xi)^2 = \alpha x_0^\alpha \int_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha-1}} dx - \left( \frac{\alpha x_0}{\alpha-1} \right)^2 = \\ &= \alpha x_0^\alpha \frac{1}{\alpha-2} \cdot \frac{1}{x_0^{\alpha-2}} - \frac{\alpha^2 x_0^2}{(\alpha-1)^2} = \frac{\alpha x_0^2}{\alpha-2} - \frac{\alpha^2 x_0^2}{(\alpha-1)^2} = \\ &= \alpha x_0^2 \left( \frac{1}{\alpha-2} - \frac{\alpha}{(\alpha-1)^2} \right) = \\ &= \alpha x_0^2 \left( \frac{(\alpha-1)^2}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2} - \frac{\alpha^2 - 2\alpha}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2} \right) = \\ &= \alpha x_0^2 \left( \frac{\alpha^2 - 2\alpha + 1}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2} - \frac{\alpha^2 - 2\alpha}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2} \right) = \frac{\alpha x_0^2}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2} \quad (2.28) \end{aligned}$$