Оглавление

Глава 1

Линейные пространства и линейные операторы

1.1 Линейные пространства

1.1.1 Определение линейного пространства

Поле

Определение 1.1.1. Полем называется множество F, в котором определены две алгебраические бинарные операции $+$ (сложение) и $\cdot$ (умножение) и выполнены аксиомы:

1. $(a+b)+c = a+(b+c)$ – ассоциативность сложения;
2. $\exists(0 \in F)\forall(a \in F)[a+0=a]$ – наличие нулевого элемента, т. е. нейтрального по сложению;
3. $\forall(a \in F)\exists((-a) \in F)[a+(-a)=0]$ – обратимость любого элемента по сложению;
4. $a+b=b+a$ – коммутативность сложения;
5. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ – ассоциативность умножения;
6. $\exists(1 \in F)\forall(a \in F)[1 \cdot a = a]$ – наличие единичного элемента, т. е. нейтрального по умножению;
7. $\forall(a \in F, a \neq 0)\exists(a^{-1} \in F)[a \cdot a^{-1} = 1]$ – обратимость по умножению всех элементов, кроме нулевого;
8. $a \cdot b = b \cdot a$ – коомутативность умножения;
9. $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Замечание 1.1.1. *Из аксиомы 6 определения поля следует, что поле содержит не менее двух элементов.*

Замечание 1.1.2. *Фактически аксимоы 1-4 утверждают, что $(F,+)$ - абелева группа, аксиомы 5-8 - что $(F \setminus 0, \cdot)$ - абелева группа, а аксиома 9 связывает операции $+$ и $\cdot$.*

Пример 1.1.1. *Каждое из множеств $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ с обычными операциями сложения и умножения является полем.*

Пример 1.1.2. *Множество $\mathbb{Q}(\sqrt{})=\{x|x=p+q\sqrt{2}, p\in\mathbb{Q}, q\in\mathbb{Q}\}$ с обычными операциями сложения и умножения является полем. Операцию образования такого поля называют расширением поля.*

Пример 1.1.3. *Пусть p - простое число. На множестве $\mathbb{Z}_p=\{0,1,...,p-1\}$ определим операции сложения $\oplus$ и умножения $\odot$ следующим образом: $m\oplus n$ и $m\odot n$ равны остаткам от деления обычной суммы и обычного произведения m и n соответственно. $(\mathbb{Z}_p,\oplus,\odot)$ - поле.*

Пример 1.1.4. *Множества целых чисел $\mathbb{Z}$ и натуральных чисел $\mathbb{N}$ с обычными операциями сложения и умножения полями не является, т. к. не содержат обратного элемента по умножению, например, для $a=2$.*

Пример 1.1.5. *Множество всевозможных рациональных дробей вида $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ - многочлены с вещественными коэффициентами, притом $Q(x)$ - ненулевой многочлен, с обычными операциями сложения и умножения дробей является полем.*

Элементы полей мы будем называть скалярами.

Линейные пространства

Определение 1.1.2. Множество R называется линейным (векторным) пространством над полем F и обозначается $R((F))$, если для $\forall(x,y,z\in R)\forall(\alpha,\beta\in F)$ определены сумма $x+y=inR$ и внешнее умножение $\alpha x\in R$ и выполнены аксиомы:

1. $(x+y)+z=x+(y+z)$ – ассоциативность сложения;
2. $\exists(\theta\in R)\forall(x\in R)[x+\theta=x]$ – существованание нулевого, т. е. нейтрального по сложению, элемента;
3. $\forall(x\in R)\exists((-x)\in R)[x+(-x)=\theta]$ – обратимость любого элемента по сложению;

4. $x+y=y+x$ – коммутативность сложения;
5. $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x$ – ассоциативность внешнего умножения;
6. $1 \cdot x = x$
7. $\alpha \cdot (x+y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$
8. $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$ – так как операнды внешнего умножения неравноправны, аксиом дистрибутивности две, а не одна, как в определении поля.

Элементы линейного пространства называют векторами, элемент θ - нулевым вектором, а вектор $(-x)$ - вектором, проивоположным вектору x. Пространства над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$ называют вещественными, над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ - комплексными.

Для удобства восприятия векторы мы будем обозначать малыми латинскими буквами, скаляры - малыми греческими.

Пример 1.1.6.

1.1.2 Базис, координаты, размерность пространства

1.1.3 Изоморфизм линейных пространств

1.1.4 Матрица перехода от одного базиса к другому. Преобразование координат при изменении базиса

1.1.5 Подпространства линейного пространства

1.1.6 Сумма и пересечение подпространств

1.1.7 Прямая сумма подпространств

...