Оглавление

Глава 1

Линейные пространства и линейные операторы

1.1 Линейные пространства

1.1.1 Определение линейного пространства

Поле

Определение 1.1.1. Полем называется множество F, в котором определены две алгебраические бинарные операции $+$ (сложение) и $\cdot$ (умножение) и выполнены аксиомы:

1. $(a+b)+c = a+(b+c)$ – ассоциативность сложения;
2. $\exists(0 \in F)\forall(a \in F)[a+0=a]$ – наличие нулевого элемента, т. е. нейтрального по сложению;
3. $\forall(a \in F)\exists((-a) \in F)[a+(-a)=0]$ – обратимость любого элемента по сложению;
4. $a+b=b+a$ – коммутативность сложения;
5. $(a \cdot b)\cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ – ассоциативность умножения;
6. $\exists(1 \in F)\forall(a \in F)[1 \cdot a = a]$ – наличие единичного элемента, т. е. нейтрального по умножению;
7. $\forall(a \in F, a \neq 0)\exists(a^{-1} \in F)[a \cdot a^{-1} = 1]$ – обратимость по умножению всех элементов, кроме нулевого;
8. $a \cdot b = b \cdot a$ – коомутативность умножения;
9. $(a+b)\cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Замечание 1.1.1. Из аксиомы 6 определения поля следует, что поле содержит не менее двух элементов.

Замечание 1.1.2. Фактически аксиомы 1-4 утверждают, что $(F, +)$ – абелева группа, аксиомы 5-8 – что $(F \setminus 0, \cdot)$ – абелева группа, а аксиома 9 связывает операции $+$ и $\cdot$.

Пример 1.1.1. Каждое из множеств $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ с обычными операциями сложения и умножения является полем.

Пример 1.1.2. Множество $\mathbb{Q}(\sqrt{})=\{x | x = p + q\sqrt{2}, p \in \mathbb{Q}, q \in \mathbb{Q}\}$ с обычными операциями сложения и умножения является полем. Операцию образования такого поля называют расширением поля.

Пример 1.1.3. Пусть p - простое число. На множестве $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, ..., p-1\}$ определим операции сложения $\oplus$ и умножения $\odot$ следующим образом: $m \oplus n$ и $m \odot n$ равны остаткам от деления обычной суммы и обычного произведения m и n соответственно. $(\mathbb{Z}_p, \oplus, \odot)$ - поле.

Пример 1.1.4. Множества целых чисел $\mathbb{Z}$ и натуральных чисел $\mathbb{N}$ с обычными операциями сложения и умножения полями не является, т. к. не содержат обратного элемента по умножению, например, для $a = 2$.

Пример 1.1.5. Множество всевозможных рациональных дробей вида $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ - многочлены с вещественными коэффициентами, притом $Q(x)$ - ненулевой многочлен, с обычными операциями сложения и умножения дробей является полем.

Элементы полей мы будем называть скалярами.

Линейные пространства

Определение 1.1.2. Множество R называется линейным (векторным) пространством над полем F и обозначается $R((F))$, если для $\forall(x, y, z \in R)\forall(\alpha, \beta \in F)$ определены сумма $x+y \in R$ и внешнее умножение $\alpha x \in R$ и выполнены аксиомы:

1. $(x + y) + z = x + (y + z)$ – ассоциативность сложения;
2. $\exists(\theta \in R)\forall(x \in R)[x + \theta = x]$ – существованание нулевого, т. е. нейтрального по сложению, элемента;
3. $\forall(x \in R)\exists((-x) \in R)[x + (-x) = \theta]$ – обратимость любого элемента по сложению;

4. $x + y = y + x$ – коммутативность сложения;
5. $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x$ – ассоциативность внешнего умножения;
6. $1 \cdot x = x$
7. $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$
8. $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$ – так как операнды внешнего умножения неравноправны, аксиом дистрибутивности две, а не одна, как в определении поля.

Элементы линейного пространства называют векторами, элемент θ – нулевым вектором, а вектор $(-x)$ – вектором, проивоположным вектору x. Пространства над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$ называют вещественными, над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ - комплексными.

Для удобства восприятия векторы мы будем обозначать малыми латинскими буквами, скаляры - малыми греческими.

Пример 1.1.6. Множества V_1, V_2, V_3 всех обычных векторов (направленных отрезков), выходящих из какой-нибудь фиксированной точки прямой, плоскости или пространства соответственно, с обычными операциями сложения векторов и умножения их на вещественные числа - вещественные линейные пространства.

Пример 1.1.7. Множества всевозможных упорядоченных наборов из n вещественных (или комплексных) чисел $\mathbb{R}^n$(или $\mathbb{C}^n$ соответственно) являются вещественными (комплексными) пространствами над полями $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$).

1.1.2 Базис, координаты, размерность пространства

1.1.3 Изоморфизм линейных пространств

1.1.4 Матрица перехода от одного базиса к другому. Преобразование координат при изменении базиса

1.1.5 Подпространства линейного пространства

1.1.6 Сумма и пересечение подпространств

1.1.7 Прямая сумма подпространств

…

1.2 Линейные операторы

1.2.1 Линейные операторы на пространстве

1.2.2 Матрица линейного оператора

1.2.3 Действия с линейными операторами

1.2.4 Аннулирующие многочлены

1.2.5 Обратный оператор

1.2.6 Линейный оператор, действующий из R^n в R^m

1.2.7 Ядро и образ линейного оператора. Ранг и дефект оператора

1.2.8 Собственные векторы и собственные значения линейного оператора

1.2.9 Теорема Гамильтона-Кэли

Теорема 1.2.1. *Гамильтона-Кэли* Характеристический многочлен $\varphi(\lambda)$ линейного оператора $A : R^n \to R^n$ является аннулирующим многочленом оператора A

Доказательство. Пусть e – какой-нибудь базис R^n и A_e - матрица оператора A в нём. Обозначим $B = A_e - \lambda I$, $\tilde{B}$ – матрицу, присоединённую к B, т. е.

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} |B_{11}| & \dots & |B_{n1}| \\ \dots & \dots & \dots \\ |B_{1n}| & \dots & |B_{nn}| \end{pmatrix}$$

Мы знаем, что $\tilde{B}B = |B|I$, откуда

$$\tilde{B}(A_e - \lambda I) = \varphi(\lambda)I$$

С другой стороны, элементы матрицы $\tilde{B}$ являются многочленами от λ, притом их степень не превосходит $n-1$. Значит,

$$\tilde{B} = B_0\lambda^{n-1} + B_1\lambda^{n-2} + ... + B_{n-1}$$

Пусть многочлен $\varphi(\lambda)$ имеет вид

$$\alpha_0\lambda^n + \alpha_1\lambda^{n-1} + ... + \alpha_n$$

Тогда

$$(B_0\lambda^{n-1} + B_1\lambda^{n-2} + ... + B_{n-1})(A_e - \lambda I) = (\alpha_0\lambda^n + \alpha_1\lambda^{n-1} + ... + \alpha_n)I$$

Рассмотри это выражение как равенство многочленов относительно λ. Раскрыв скобки, выпишем коэффициенты при одинаковых степенях λ и приравняем их:

$$-B_0 = \alpha_0 I$$

$$B_0 A_e - B_1 = \alpha_1 I$$

$$B_1 A_e - B_2 = \alpha_2 I$$

$$B_{n-2} A_e - B_{n-1} = \alpha_{n-1} I$$

$$B_{n-1} A_e \quad = \alpha_n I$$

Умножая эти равенства справа соответственно на A_e^n,A_e^{n-1}, ..., A_e, I и складывая, получим

$$0 = \alpha_0 A_e^n + \alpha_1 A_e^{n-1} + \alpha_n I$$

Таким образом, $\varphi(A_e) = 0$, следовательно, оператор $\varphi(\alpha)$ – нулевой

1.2.10 Инвариантные подпространства

...