0.0.1 Гомоморфизмы. Виды и свойства гомоморфизмов.

Определение. Пусть даны алгебраические структуры $(G, \cdot)$ и $(G', \odot)$. Гомоморфизмом называется отображение (функция) $f : G \to G'$, такое, что

$$\forall(a, b \in G)[f(a \cdot b) = f(a) \odot f(b)]$$

Определение. Инъективный гомоморфизм называется мономорфизмом.

Определение. Сюръективный гомоморфизм называется эпиморфизмом.

Определение. Биективный гомоморфизм называется изоморфизмом.

Определение. Гомоморфизм структуры в себя называется эндоморфизмом.

Определение. Изоморфизм структуры в себя называется автоморфизмом.

Пример.

$f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, где $f(A) = |A|$, является гомоморфизмом моноидов $(M_n(\mathbb{R}), \cdot)$ и $(\mathbb{R}, \cdot)$.

Теорема.

Суперпозиция гомоморфизмов является гомоморфизмом.

Доказательство. Пусть даны алгебраические структуры $(G, \cdot)$, $(G', \odot)$ и $(G'', \times)$ и гомоморфизмы $f : G \to G'$ и $g : G' \to G''$. Нужно доказать, что $h : G \to G''$, такое, что $h = g \circ f$, является гомоморфизмом. Проверим определение гомоморфизма непосредственно для $\forall(a, b \in G)$:

$$h(a \cdot b) = (g \circ f)(a \cdot b) = g(f(a \cdot b)) = g(f(a) \odot f(b)) =$$

$$g(f(a)) \times g(f(b)) = h(a) \times h(b)$$

Доказано.

Теорема.

При гомоморфизме групп нейтральный элемент переходит в нейтральный.

Доказательство. Пусть $(G, \cdot)$ и $(G', \odot)$ - группы с нейтральными элементами e и e' соответственно, $f : G \to G'$ - гомоморфизм. Нужно доказать, что $f(e) = e'$.

Пусть $f(e) = x$.

Тогда $x \cdot e = x = f(e) = f(e \cdot e) = f(e) \odot f(e) = x \odot x$, т. е. $x \odot e' = x \odot x$, откуда по закону сокращения $x = e'$.

Доказано.

Замечание.

Требование группы в теореме существенно: существуют моноиды, для которых образом нейтрального элемента при гомоморфизме является элемент, отличный от нейтрального. Рассмотрим множества $A = \{e'; x; a\}$ и $B = \{e; c\}$. Определим коммутативные операции на этих множествах:
$e' \cdot e' = e'$
$e' \cdot x = x$
$e' \cdot a = a$
$x \cdot x = x$
$x \cdot a = a$
$a \cdot a = a$
$e \odot e = e$
$e \odot c = c$
$c \odot c = c$

Тогда e' и e - нейтральные элементы моноидов $(A, \cdot)$ и $(B, \odot)$ соответственно. Введём теперь функцию $f : B \to A$: $f(e) = x$, $f(c) = a$. Несложную проверку того, что f - гомоморфизм, предоставляем читателю.

Теорема.

Отображение, обратное к изоморфизму, является изоморфизмом.

Доказательство. Пусть дан изоморфизм $f : (G, \cdot) \to (G', \odot)$. Чтобы отображение $f^{-1} : (G', \odot) \to (G, \cdot)$ было изоморфизмом, необоходимо и достаточно (по определению), чтобы оно было биективным гомоморфизмом. Так как биективность отображения обратима, достаточно доказать, что f^{-1} - гомоморфизм.

Действительно, $\forall(x, y \in G')\exists!(a \in G)\exists!(b \in G)[f(a) = x, f(b) = y]$.

Тогда

$$f(a \cdot b) = f(a) \odot f(b) \Rightarrow$$
$$f^{-1}(f(a \cdot b)) = f^{-1}(f(a) \odot f(b)) \Rightarrow$$
$$a \cdot b = f^{-1}(x \odot y) \Rightarrow$$
$$f^{-1}(x) \cdot f^{-1}(y) = f^{-1}(x \odot y)$$

Доказано.

Теорема.

Пусть даны группы $(G, \cdot)$, $(G', \odot)$ и гомоморфизм $f : G \to G'$. Тогда $\forall(a \in G)[f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}]$.

Доказательство.

$$f(a) \odot f(a^{-1}) = f(a \cdot a^{-1}) = f(e) = e' = f(a) \odot (f(a))^{-1}$$

Отсюда по правилу сокращения в группе $f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}$.

Доказано.

Определение. Пусть дано отображение $f : G \to G'$. Множество $f(G) \subset G'$ называется образом отображения f и обозначается $\mathrm{Im} f$.

Определение. Пусть дан гомоморфизм групп $f : G \to G'$. Ядром $\mathrm{Ker} f$ гомоморфизма f называется множество всех элементов G, которые гомоморфизм f переводит в нейтральный элемент e' группы G'.

Очевидно, что ядро любого гомоморфизма групп непусто, т. к. содержит единичный элемент e исходной группы G.

Теорема: критерий мономорфизма.

Гомоморфизм групп является мономорфизмом тогда и только тогда, когда его ядро состоит ровно из нейтрального элемента.

Доказательство. Пусть дан гомоморфизм групп $f : (G, \cdot) \to (G', \odot)$, e и e' - нейтральные элементы G и G' соответственно.

Необходимость. Пусть f - мономорфизм. Тогда по определению мономорфизма $|\mathrm{Ker} f| = 1$. Так как нейтральный элемент e всегда входит в ядро, то $\mathrm{Ker} f = \{e\}$.

Достаточность. Пусть $\mathrm{Ker} f = \{e\}$ и $f(a) = f(b)$. Тогда

$$(f(a))^{-1} \odot f(b) = (f(a))^{-1} \odot f(a) \Rightarrow$$
$$(f(a))^{-1} \odot f(b) = e' \Rightarrow$$
$$f(a^{-1}) \odot f(b) = e' \Rightarrow$$
$$f(a^{-1} \cdot b) = e' \Rightarrow$$
$$a^{-1} \cdot b = e \Rightarrow$$
$$b = a,$$

то есть гомоморфизм f инъективен, следовательно, является мономорфизмом.

Доказано.