Параметрические колебания нелинейных систем

Параметрический резонанс и параметрическая неустойчивость в линейной системе

Специфическим видом внешнего воздействия на колебательную систему является периодическое изменение параметров системы во времени. Такое воздействие называется параметрическим. Начнем с краткого напоминания об основных особенностях параметрических колебаний в линейных системах [1].

Рассмотрим простую модельную систему: колебательный контур с переменной емкостью (рис. 16.1). Изменение емкости со временем можно обеспечить, например, механически изменяя расстояние между пластинами конденсатора. В таком случае мгновенные значения заряда q и напряжения u на емкости будут связаны соотношением $q(t) = C(t)u(t)$. Это позволяет записать дифференциальное уравнение, описывающее колебания в контуре

$$\ddot{q} + \frac{1}{LC(t)}q = 0 \tag{16.1}$$

Уравнение (16.1) имеет вид уравнения гармонического осциллятора, собственная частота которого зависит от времени.

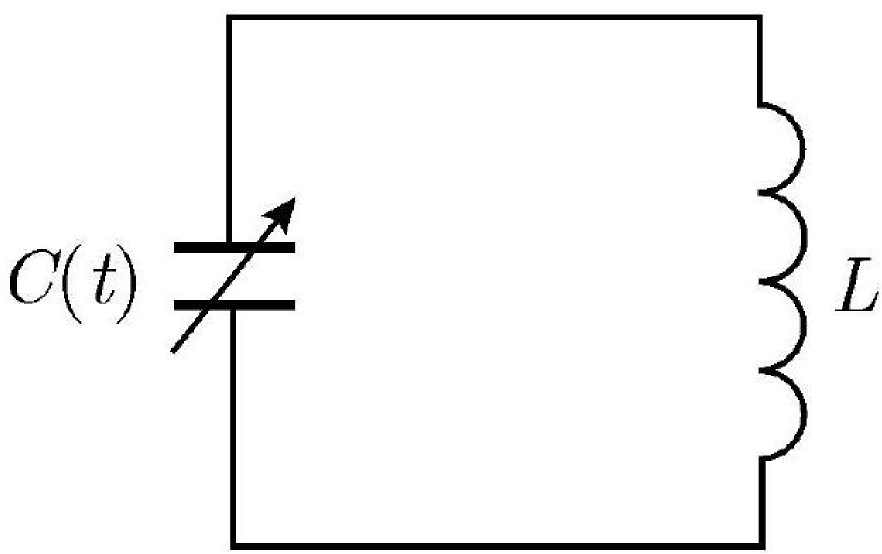

Рис. 16.1. Колебательный контур с переменной емкостью

Пусть емкость конденсатора изменяется следующим образом. В моменты времени, когда заряд на конденсаторе максимален, пластины резко раздвигаются. При

этом емкость уменьшается от некоторого значения C_2 до значения $C_1 < C_2$. Поскольку заряд на конденсаторе при этом не изменяется, напряжение

[1] Параметрические колебания в линейных системах и явление параметрического резонанса достаточно подробно обсуждаются в книге «Линейные колебания и волны», вхо-

скачком возрастет от значения V_2 до значения $V_1 = C_2V_2/C_1$. В моменты времени, когда заряд равен нулю, пластины так же резко сдвигаются; емкость при этом увеличивается, а напряжение остается равным нулю (рис. 16.2). В таком процессе постоянно совершается работа, которая идет на увеличение энергии колебаний. За один период приращение энергии составит (необходимо учесть, что в течение периода пластины раздвигаются дважды)

$$\Delta W = 2\left(W_1 - W_2\right) = C_1V_1^2 - C_2V_2^2 = C_2V_2^2\left(\frac{C_2}{C_1} - 1\right) \qquad (16.2)$$

Если ввести обозначения $\Delta C = C_2 - C_1, C = \left(C_1 + C_2\right)/2$ и считать, что $\Delta C \ll C$, соотношение (16.2) можно переписать в виде

$$\Delta W \approx 2W\frac{\Delta C}{C}. \qquad (16.3)$$

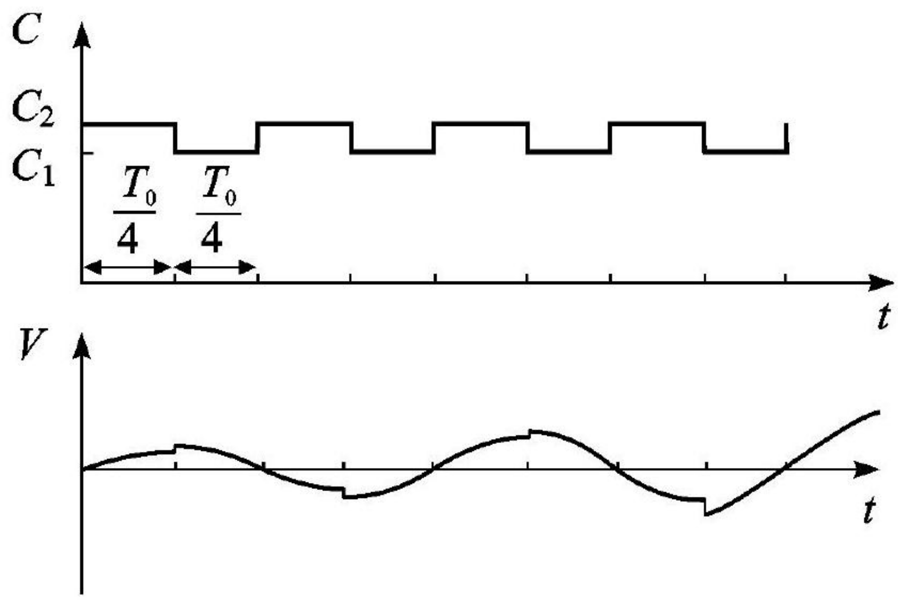

Рис. 16.2. Зависимость от времени емкости и напряжения в колебательном контуре с механически перестраиваемым конденсатором

Из приведенных выше рассуждений следует, что для эффективного поступления энергии в систему период колебаний T_0 и период изменения параметра T должны быть связаны соотношением

$$T \approx \frac{T_0}{2} \qquad (16.4)$$

дящей в состав настоящей серии.

которое представляет собой условие параметрического резонанса. Отметим отличие от резонансного условия при вынужденных колебаниях линейного осциллятора, $T \approx T_0$.

Можно, однако, раздвигать пластины не каждый раз, когда заряд на конденсаторе максимален, а через раз; энергия все равно будет поступать в систему, хотя и в меньшем количестве. Более того, очевидно, что это можно делать в общем случае только в каждый n-ный благоприятный момент. Таким образом, имеется, вообще говоря, бесконечное число параметрических резонансов, условия которых имеют вид

$$T \approx \frac{nT_0}{2} \tag{16.4}$$

Число $n = 1, 2, \ldots$ будем называть порядком резонанса, а резонанс при $n = 1$ - основным.

При выполнении условий резонанса колебания в линейной системе, как можно видеть на рис. 16.2, неограниченно нарастают. Это явление называется параметрической неустойчивостью.

Основной моделью в теории параметрических колебаний в линейных системах служит уравнение Матьё

$$\ddot{x} + \omega_0^2(1 + f\cos\omega t)x = 0, \tag{16.5}$$

которое представляет собой уравнение линейного осциллятора с гармоническим параметрическим возбуждением. Это уравнение детально исследовано математиками; более того, его решения составляют особый класс специальных функций - функции Матьё. Для наших дальнейших целей важно отметить следующие его свойства. На плоскости параметров амплитуда - частота воздействия существуют зоны неустойчивости, которые имеют вид характерных клювов, расположенных в окрестности резонансных частот

$$\omega \approx \frac{2\omega_0}{n}. \tag{16.6}$$

Перейдем к новой независимой переменной $\tau = \omega t/2$. Тогда уравнение (16.5) можно переписать в виде

$$x'' + (a + 2q\cos 2\tau)x = 0 \tag{16.7}$$

где $a = 4\omega_0^2/\omega^2, q = 2\omega_0^2 f/\omega^2$, штрихи обозначают дифференцирование по τ. Зоны неустойчивости на плоскости параметров (a, q) изображены на рис. 16.3. В новых переменных резонансное условие (16.6) принимает вид $a \approx n^2$.

Отметим следующие отличия от резонанса при вынужденных колебаниях. Вопервых, малая расстройка (в пределах зоны неустойчивости) не может стабилизировать неустойчивость, тогда как при вынужденных колебаниях амплитуда нарастает до бесконечности только в случае точного резонанса $\omega = \omega_0$. Кроме того нарастание амплитуды параметрических колебаний происходит по экспоненйильному закону, а не по линейному.

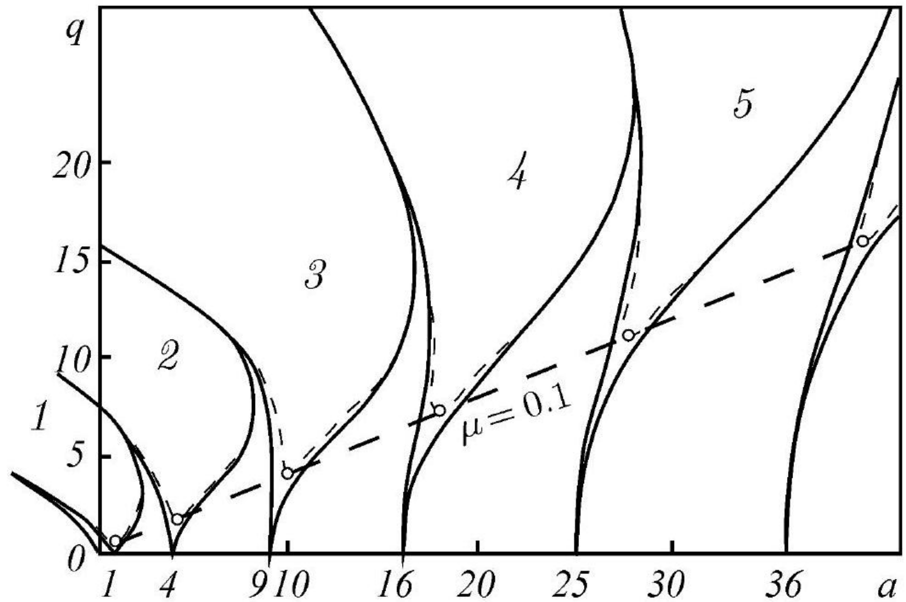

Рис. 16.3. Границы зон неустойчивости на плоскости параметров (a, q) для уравнения Матьё. Цифры l-5 соответствуют номерам резонансов.

Добавление линейного затухания также не стабилизирует неустойчивость, а лишь сужает границы зон (на рис. 16.3 они показаны штриховой линией). Действительно, если рассмотреть уравнение параметрического осциллятора с затуханием

$$y'' + 2\gamma y' + (b + 2q\cos 2\tau)x = 0, \tag{16.8}$$

нетрудно показать, что заменой $y = x\exp[-\gamma\tau]$ оно может быть приведено к виду (16.7), где $a = b - \gamma^2$. Чтобы решение уравнения (16.8) было неустойчивым, необходимо, чтобы соответствующее решение уравнения (16.7) нарастало как $\exp(p\tau)$, где $p > \gamma$. Поэтому границы зон неустойчивости сдвигаются вверх. Поскольку амплитуда воздействия должна превышать некоторое пороговое значение (которое увеличивается с ростом номера резонанса), говорят, что неустойчивость носит пороговый характер.

Отсюда следует, что нелинейность играет принципиальную роль в теории параметрических колебаний. Только учет нелинейных эффектов позволяет ответить на вопрос, чем заканчивается развитие неустойчивости на больших временах, и определить характеристики установившегося режима колебаний. Аналогичная ситуация имеет место и для автоколебаний (лекция 11).