1. Неориентированные графы, степени, изоморфизм

- **Граф**:
  - Обозначается как $G = (X, \Gamma)$.
  - Состоит из:
    1° Непустое множество X.
    2° Отображение Γ множества X в X.
- **Элементы графа**:
  - **Вершина**: Каждый элемент множества X называется точкой или вершиной графа.
  - **Дуга**: Пара элементов (x, y), где $y \in \Gamma x$, называется дугой графа.
- **Изображение графа**:
  - Элементы X изображаются точками на плоскости.
  - Пары точек x и y, где $y \in \Gamma x$, соединяются непрерывной линией со стрелкой от x к y.
- **Множество дуг**:
  - Обозначается через U.
  - Дуги обозначаются буквами α, β, ω (при необходимости с индексами).

Степенью вершины v_i в графе G — обозначается d_i или $\deg v_i$ — называется число рёбер, инцидентных v_i (то есть рёбер, которые соединены с v_i). Поскольку каждое ребро инцидентно двум вершинам, в сумму степеней вершин графа каждое ребро вносит двойку. Таким образом, мы приходим к утверждению, которое установлено Эйлером и является исторически первой теоремой теории графов.

Теорема 2.1

Сумма степеней вершин графа G равна удвоенному числу его рёбер:

$$\sum_i \deg v_i = 2q.$$

Следствие 2.1 (а)

В любом графе число вершин с нечётными степенями чётно.

В (p, q)-графе $0 \leq \deg v \leq p - 1$ для любой вершины v. Минимальная степень вершин графа G обозначается через $\min \deg G$ или $\delta(G)$, максимальная — через $\max \deg G = \Delta(G)$. Если $\delta(G) = \Delta(G) = r$, то все вершины имеют одинаковую степень и такой граф G называется *регулярным* (или *однородным*) степени r. В этом случае говорят о степени графа и пишут $\deg G = r$.

Регулярный граф степени 0 совсем не имеет рёбер. Если G — регулярный граф степени 1, то каждая его компонента содержит точно одно ребро; в регулярном графе степени 2 каждая компонента — цикл, и, конечно, обратно. Первые интересные[2] регулярные графы имеют степень 3; такие графы называются *кубическими*. На рис. 2.11 показаны два регулярных графа с 6 вершинами. Второй из них изоморфен каждому из трёх графов, изображённых на рис. 2.5.

Следствие 2.1 (б)

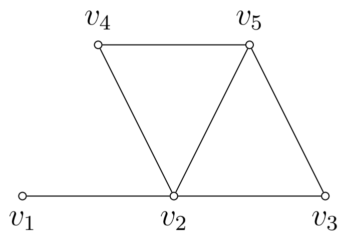
Каждый кубический граф имеет чётное число вершин.

Полезно дать названия вершинам с малыми степенями. Вершина v называется *изолированной*, если $\deg v = 0$, и *концевой* (или *висячей*), если $\deg v = 1$.

Два графа G и H изоморфны (записывается $G \cong H$ или иногда $G = H$), если между их множествами вершин существует взаимно однозначное соответствие, сохраняющее смежность. Например, графы G_1 и G_2 на рис. 2.5 изоморфны при соответствии $v_i \leftrightarrow u_i$, и чисто случайно оказалось, что граф G_1 изоморфен каждому из них. Совершенно очевидно, что изоморфизм есть отношение эквивалентности на графах.

2. Маршруты, связность, метрика графа

Одно из наиболее простых свойств, которым может обладать граф, это свойство быть связным. В данном разделе рассматриваются основные структурные свойства связных и несвязных графов. *Маршрутом* в графе G называется чередующаяся последовательность вершин и рёбер $v_0, x_1, v_1, \ldots, x_n, v_n$; эта последовательность начинается и кончается вершиной, и каждое ребро последовательности инцидентно двум вершинам, одна из которых непосредственно предшествует ему, а другая непосредственно следует за ним. Указанный маршрут соединяет вершины v_0 и v_n, и его можно обозначить $v_0v_1v_2\ldots v_n$ (наличие рёбер подразумевается). Эта последовательность иногда называется $(v_0 - v_n)$-маршрутом. Маршрут *замкнут*, если $v_0 = v_n$, и *открыт* в противном случае. Маршрут называется *цепью* (trail), если все его рёбра различны, и *простой цепью* (path), если все вершины (а следовательно, и рёбра) различны. Замкнутая цепь называется *циклом*. Замкнутый маршрут называется *простым циклом*, если все его n вершин различны и $n \geq 3$.



В помеченном графе G на рис. 2.9 $v_1v_2v_3v_2v_3$ — маршрут, который не является цепью, а $v_1v_2v_5v_4v_2v_3$ — не простая цепь, $v_1v_2v_5v_4$ — простая цепь и $v_2v_4v_5v_2$ — простой цикл.

Длина маршрута $v_0v_1\ldots v_n$ равна n, т. е. количеству рёбер в нём[1].

3. Самодополнительный графы

Указанную ситуацию можно описать графом G с шестью вершинами, представляющими людей; смежность двух вершин соответствует знакомству. Требуется показать, что в G найдутся либо три попарно смежные, либо три попарно несмежные вершины. Дополнение $\overline{G}$ графа G имеет в качестве множества вершин множество $V(G)$, две вершины в $\overline{G}$ смежны тогда и только тогда, когда они не смежны в G. На рис. 2.12 в графе G нет треугольников, а в графе $\overline{G}$ их ровно два[1]. *Самодополнительный граф* — это граф, изоморфный своему дополнению. Примеры таких графов приведены на рис. 2.13.

В полном графе K_p каждая пара его p вершин[2] смежна. Таким образом, граф K_p имеет $\binom{p}{2}$ рёбер и является регулярным степени $p-1$. Граф K_3 — треугольник. Графы $\overline{K_p}$ — вполне несвязные (или регулярные степени 0).

4. Экстремальные графы

Среди первых результатов в одном из направлений теории графов — теории экстремальных графов (см. Эрдёш) — можно отметить следующую известную теорему Турана . Как обычно, пусть $|r|$ — наибольшее целое число, не превышающее действительного числа r, а $\{r\} = r - |r|$ есть наименьшее целое число, не меньшее r.

[1] Обхват графа G — обозначается $g(G)$ — это длина кратчайшего простого цикла графа G (если он есть); окружение графа G — обозначается $c(G)$ — длина самого длинного простого цикла графа G. Эти понятия не определены в случае, когда в G нет циклов.

1) Доказательство существования чисел $r(m,n)$ для любых натуральных m и n см., например, у М. Холла

2) Отметим, что по нашему определению бесконечный граф не является графом. Имеется обзорная статья о бесконечных графах: Нэш-Вильямс.

Теорема 2.3. Наибольшее число рёбер у графов, имеющих r вершин и не содержащих треугольников, равно $\lfloor r^2/4 \rfloor$.

Доказательство. Утверждение очевидно для малых значений r. Доказательство по индукции можно дать отдельно для нечетных и для четных r; здесь будет рассмотрен только случай четных значений r. Предположим, что утверждение справедливо для всех четных значений $r \leq 2n$. Докажем его для $r = 2n + 2$. Итак, пусть G — граф с $p = 2n + 2$ вершинами, не содержащий треугольников. Поскольку граф G не является вполне несвязным, то в нём существуют две смежные вершины u и v. В подграфе $G' = G - \{u, v\}$ имеется $2n$ вершин и нет треугольников, так что по предположению индукции в графе G' самое большее $\lfloor 4n^2/4 \rfloor = n^2$ рёбер. Сколько еще рёбер может быть в графе G? В графе G нет такой вершины w, что вершины u и v одновременно смежны с w, т. е. вершины u, v и w образуют в графе G треугольник. Таким образом, если вершина w смежна с k вершинами графа G', то вершина v может быть смежна самое большее с $2n - k$ вершинами графа G', и граф G не больше чем

$$n^2 + k + (2n - k) + 1 = n^2 + 2n + 1 = p^2/4 = \lfloor p^2/4 \rfloor$$

рёбер.

Для завершения доказательства осталось установить, что для каждого чётного p существует $(p, p^2/4)$-граф, не содержащий треугольников. Такой граф можно образовать следующим образом: возьмем два множества V_1 и V_2, каждое из которых имеет $p/2$ вершин, и соединим каждую вершину из V_1 с каждой вершиной из V_2. Для $p = 6$ соответствующий граф G_1 приведен на рис. 2.5.

5. Числа Рамсея

Широко известна следующая головоломка.

Доказать, что среди любых шести человек найдутся либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

1. Напоминаем читателю (см. введение), что в тексте не все теоремы доказываются.

2. По своим структурным свойствам. — *Прим. перев.*

В этих терминах головоломку можно сформулировать так:

Теорема 2.2. Если G — граф с шестью вершинами, то либо G, либо $\overline{G}$ содержит треугольник.

Доказательство. Пусть v — произвольная вершина графа G, имеющего шесть вершин. Так как вершина v с любой из остальных пяти вершин смежна или в G, или в $\overline{G}$, то, не теряя общности, можно предположить, что вершины u_1, u_2, u_3 смежны с v в G. Если какие-либо две из вершин u_1, u_2, u_3 смежны в G, то вместе с v они образуют треугольник. Если никакие две из них не смежны в G, то в графе $\overline{G}$ вершины u_1, u_2, u_3 образуют треугольник.

Обобщая теорему 2.2, естественно поставить вопрос: каково наименьшее целое число $r(m,n)$, для которого каждый граф с $r(m,n)$ вершинами содержит K_m или K_n?

Числа $r(m,n)$ называются *числами Рамсея* [1]. Ясно, что $r(m,n) = r(n,m)$. Задача, связанная с нахождением чисел Рамсея, остается нерешенной, хотя известна простая верхняя оценка, полученная Эрдёшем и Секерешем [1]:

$$r(m,n) \leq \binom{m+n-2}{m-1}. \tag{1}$$

Постановка этой задачи вытекает из теоремы Рамсея. Бесконечный граф [2] имеет бесконечное множество вершин и не содержит кратных ребер и петель. Рамсей [1] доказал (на языке теории множеств), что каждый бесконечный граф содержит $\aleph_0$ попарно смежных вершин или $\aleph_0$ попарно несмежных вершин.

Все известные числа Рамсея приведены в табл. 2.1 (взята из обзорной статьи Гравера и Якелл [1]).

6. Эйлеровы графы

Как мы уже видели в гл. 1, отрицательное решение Эйлером задачи о кёнигсбергских мостах привело к первой опубликованной работе по теории графов. Задачу об обходе мостов можно обобщить и получить следующую задачу теории графов: можно ли найти в данном графе G цикл, содержащий все вершины и все рёбра? Граф, в котором это возможно, называется *эйлеровым*. Таким образом, эйлеров граф имеет *эйлеров цикл* — замкнутую цепь, содержащую все вершины и все рёбра. Ясно, что эйлеров граф должен быть связным.

Теорема 7.1. Для связного графа G следующие утверждения эквивалентны:

1. G — эйлеров граф;
2. каждая вершина графа G имеет чётную степень;
3. множество рёбер графа G можно разбить на простые циклы.

Доказательство. (1) влечет (2). Пусть T — эйлеров цикл в G. Каждое прохождение данной вершины в T вносит 2 в степень этой вершины и, поскольку каждое ребро графа G появляется точно один раз в T, любая вершина должна иметь чётную степень.

(2) влечет (3). Так как G — связный и нетривиальный граф, то степень каждой вершины равна по крайней мере 2, так что G содержит простой цикл Z. Удаление рёбер цикла Z приводит к остовному подграфу G_1, в котором также каждая вершина имеет чётную степень. Если в G_1 нет рёбер, то (3) уже доказано; в противном случае применим высказанные выше соображения к G_1 и получим граф G_2, в котором опять степени всех вершин чётны, и т. д. Одновременно с пустым графом G_n получаем разбиение рёбер графа G на n простых циклов.

(3) влечет (1). Пусть Z_1 — один из простых циклов этого разбиения. Если G состоит только из этого цикла, то очевидно, что G — эйлеров граф. В противном случае другой простой цикл Z_2 в G имеет вершину v, общую с Z_1. Маршрут, начинающийся с v и состоящий из цикла Z_1 и следующего непосредственно за ним цикла Z_2, является замкнутой цепью, которая содержит рёбра этих двух циклов. Продолжая эту процедуру, мы можем построить замкнутую цепь, содержащую все рёбра графа G; следовательно, G — эйлеров граф.

Например, связный граф, представленный на рис. 7.1, в котором каждая вершина имеет чётную степень, обладает эйлеровым циклом. Из теоремы 7.1 следует, что если в связном графе G нет вершин с нечётными степенями, то в G есть замкнутая цепь, содержащая все вершины и все рёбра графа.

G. Аналогичный результат справедлив для связных графов, имеющих некоторое число вершин с нечётными степенями.

Следствие 7.1 (а). Пусть G — связный граф, в котором $2n$ вершин имеют нечётные степени, $n \geq 1$. Тогда множество рёбер графа G можно разбить на n открытых цепей.

Следствие 7.1 (б). Пусть G — связный граф, в котором две вершины имеют нечётные степени. Тогда в G есть открытая цепь, содержащая все вершины и все рёбра графа G (и начинающаяся в одной из вершин с нечётной степенью, а кончающаяся в другой).

[1] Ясно, что эта теорема справедлива также и для мультиграфов.

7. Деревья

Граф называется *ациклическим*, если в нём нет циклов. *Дерево* — это связный ациклический граф. Каждый граф, не содержащий циклов, называется *лесом.* Таким образом, компонентами леса являются деревья. Существуют 23 различных дерева [2] с восемью вершинами; они показаны на рис. 4.1. Известны и другие определения дерева. В теореме 4.1 отражены некоторые из них.

Теорема 4.1. Для графа G следующие утверждения эквивалентны:

1. G — дерево;
2. любые две вершины в G соединены единственной простой цепью;
3. G — связный граф и $p = q + 1$;
4. G — ациклический граф и $p = q + 1$;
5. G — ациклический граф, и если любую пару несмежных вершин соединить ребром x, то в графе $G + x$ будет точно один простой цикл;
6. G — связный граф, отличный от K_p для $p \geq 3$, и если любую пару несмежных вершин соединить ребром x, то в графе $G + x$ будет точно один простой цикл;
7. G — граф, отличный от $K_3 \cup K_1$ и $K_3 \cup K_2$, $p = q + 1$, и если любую пару несмежных вершин соединить ребром x, то в графе $G + x$ будет точно один простой цикл.

[1] Джойс Килмер (1886—1918) — американский поэт. — *Прим. перев.*

[2] Можно предложить читателю нарисовать деревья с восемью вершинами. Как правило, одни деревья забывают рисовать, а другие рисуют несколько раз.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Поскольку G — связный граф, то любые две его вершины соединены простой цепью. Пусть P_1 и P_2 — две различные простые цепи, соединяющие вершины u и v, и пусть w — первая вершина, принадлежащая P_1 (при переходе по P_1 из u в v), такая, что w принадлежит и P_1, и P_2, но вершина, предшествующая ей в P_1, не принадлежит P_2. Если w' — следующая за w вершина в P_1, принадлежащая также P_2, то сегменты (части) цепей P_1 и P_2, находящиеся между вершинами w и w', образуют простой цикл в графе G. Поэтому, если G — ациклический граф, то между любыми двумя его вершинами существует самое большее одна простая цепь.

(2) $\Rightarrow$ (3). Ясно, что граф G — связный. Соотношение $p = q + 1$ докажем по индукции. Утверждение очевидно для связных графов с одной и двумя вершинами. Предположим, что оно верно для графов, имеющих меньше p вершин. Если же граф G имеет p вершин, то удаление из него любого ребра делает граф G несвязным графом, в точности две компоненты. По предположению индукции в каждой компоненте число вершин на единицу больше числа ребер. Таким образом, общее число ребер в графе G должно равняться $p - 1$.

(3) *влечет* (4). Предположим, что в графе G есть простой цикл длины n. Этот цикл содержит n вершин и n рёбер, а для любой из $p-n$ вершин, не принадлежащих циклу, существует инцидентное ей ребро, которое лежит на геодезической, идущей от некоторой вершины цикла. Все такие рёбра попарно различны; отсюда $q \geq p$, т. е. пришли к противоречию.

(4) *влечет* (5). Так как G — ациклический граф, то каждая его компонента является деревом. Если всего k компонент, то, поскольку в каждой из них число вершин на единицу больше числа рёбер, имеем $p = q + k$. В нашем случае должно быть $k = 1$, так что G — связный граф. Таким образом, G — дерево и любые две его вершины соединяет единственная простая цепь. Если к дереву G добавить ребро uv, то ребро вместе с единственной простой цепью, соединяющей вершины u и v, образует простой цикл, который также единственен в силу единственности простой цепи.

(5) *влечет* (6). Поскольку каждый полный граф K_p для $p \geq 3$ содержит простой цикл, граф G не может быть одним из этих графов. Граф G должен быть связным, так как в ином случае можно было бы добавить ребро x, соединяющее две вершины из разных компонент графа G, и граф $G + x$ был бы ациклическим.

(6) *влечет* (7). Докажем, что любые две вершины графа G соединены единственной простой цепью, а тогда, поскольку (2) влечет (3), получим $p = q+1$. Ясно, что в графе G любые две вершины соединены простой цепью. Если какая-то пара вершин графа G соединена двумя простыми цепями, то из доказательства того, что (1) влечет (2), следует наличие у графа G простого цикла Z. В Z не может быть более трех вершин, так как иначе, соединив ребром x две несмежные вершины в Z, получим граф $G + x$, имеющий более одного простого цикла (если же в Z нет несмежных вершин, то в графе G более одного цикла). Таким образом, цикл Z есть K_3, и он должен быть собственным подграфом графа G, поскольку по предположению G не является полным графом K_p с $p \geq 3$. Так как G — связный граф, то можно предположить, что в G есть другая вершина, смежная с некоторой вершиной подграфа K_3. Тогда ясно, что если к графу G добавлять ребро, то его можно добавить так, чтобы в графе $G+x$ образовались по крайней мере два простых цикла. Если больше нельзя добавлять новых ребер, не нарушая для графа G второго условия из (6), то G есть K_p с $p \geq 3$ вопреки предположению.

(7) *влечет* (1). Если граф G имеет простой цикл, то этот цикл должен быть треугольником, являющимся компонентой графа G, что было показано в предыдущем абзаце. В этой компоненте соответственно две вершины графа G соединены. Все остальные компоненты графа G должны быть деревьями, но для того, чтобы выполнялось соотношение $p = q + 1$, должно быть не более одной компоненты, отличной от указанного треугольника. Это дерево содержит

Простую цепь длины 2, то к графу G можно так добавить ребро x, чтобы образовать в графе $G+x$ два простых цикла. Следовательно, этим деревом может быть или K_1, или K_2. Значит, граф G — или K_3 или K_1, или $K_3 \cup K_2$, а эти графы мы исключили из рассмотрения. Таким образом, G — ациклический граф. Но если G — ациклический граф и $p = q + 1$, то G связан, поскольку (4) влечет (5), а (5) влечет (6). Итак, G — дерево, и теорема доказана.

Так как для нетривиального дерева $\sum d_i = 2q = 2(p-1)$, то в дереве должно быть по крайней мере две вершины со степенями, меньшими 2.

Следствие 4.1 (а). В любом нетривиальном дереве имеется по крайней мере две висячие вершины.

Этот результат также следует из теоремы 3.4.

8. Диаметр и радиус графа

Расстоянием $d(u, v)$ между двумя вершинами u и v графа G называется длина кратчайшей простой цепи, соединяющей их; если u и v не соединены, то полагаем $d(u, v) = \infty$. В связном графе расстояние является метрикой, т. е. удовлетворяет следующим аксиомам (аксиомам метрики): для любых трёх вершин u, v и w

1. $d(u, v) \geq 0$ и $d(u, v) = 0$ тогда и только тогда, когда $u = v$;
2. $d(u, v) = d(v, u)$;
3. $d(u, v) + d(v, w) \geq d(u, w)$.

Кратчайшая простая $(u - v)$-цепь часто называется геодезической.

Диаметр $d(G)$ связного графа G — это длина самой длинной геодезической. Граф G на рис. 2.9 имеет обхват $g = 3$, окружение $c = 4$ и диаметр $d = 2$.

Квадрат G^2 графа G имеет то же множество вершин, что и граф G, т. е. $V(G^2) = V(G)$, и две вершины u и v в G^2 смежны тогда и только тогда, когда $d(u, v) \leq 2$ в G. Степени G^3, G^4, ...графа G определяются аналогично. Например, $C_5^2 = K_5$ и $P_4^2 = K_1 + K_3$.

9. Хроматическое число графа

Пусть дано натуральное число p, говорят, что граф G является p-хроматическим, если его вершины можно раскрасить p различными цветами таким образом, чтобы никакие две смежные вершины не были окрашены одинаково. Наименьшее число p, при котором граф G является p-хроматическим, называется *хроматическим числом* этого графа и обозначается символом $\chi(G)$.

Граф $(X \cup U)$ — симметрический и обладает к тому же весьма примечательным свойством: его можно начертить на плоскости так, чтобы никакие два ребра не пересекались (в точках, отличных от граничных). Такие графы называются *плоскими.* Известно, что хроматическое число плоского графа никогда не превышает 5 (см. гл. 21), таким образом, пяти красок достаточно для раскрашивания карты (плоской), при котором никакие две соседние страны не окрашиваются в один и тот же цвет.

Хроматическим классом графа называется натуральное число q, обладающее следующими свойствами:

1. каждое ребро графа можно окрасить в какой-нибудь из q цветов таким образом, чтобы никакие два смежных ребра не были окрашены одинаково;

2. это невозможно сделать с помощью только $q-1$ цветов.

Хроматический класс графа $(X \cup U)$ совпадает с хроматическим числом графа $(U \cup \Gamma)$, определяемого следующим образом: вершинами его служат ребра исходного графа и $u' \in \Gamma$, когда Граф является двудольным (т.е. имеет хроматическое число 2) в том и только в том случае, если он не содержит циклов нечётной длины.

Доказательство

(1) Рассмотрим граф (X, U) без нечётных циклов и покажем, что он — двудольный. Граф можно предполагать связным (в противном случае мы рассмотрели бы все его компоненты связности отдельно). Будем последовательно раскрашивать вершины по следующему правилу:

1° Произвольную вершину a окрашиваем в синий цвет.

2° Если вершина x уже оказалась синей, то все смежные с ней вершины окрашиваем в красный цвет. Если вершина y — красная, то все смежные с ней окрашиваем в синий цвет.

Так как граф связен, каждая его вершина рано или поздно окажется окрашенной, причём никакая вершина не будет одновременно синей и красной, ибо иначе x и a находились бы на одном цикле нечётной длины. Следовательно, граф — двудольный.

(2) Если граф — двудольный, то он, очевидно, не содержит циклов нечётной длины, ибо вершины такого цикла невозможно окрасить двумя цветами в соответствии с указанным требованием.

Замечание

Свойство. Граф G не имеет циклов нечётной длины равносильно свойству.

(2) граф G не имеет элементарных циклов нечётной длины.

Непосредственно ясно, что (1) $\Rightarrow$ (2), для доказательства того, что (2) $\Rightarrow$ (1), допустим что существует цикл $u = [x_0, x_1, \dots, x_p = x_0]$ нечётной длины p. Каждый раз, когда имеются такие две вершины x_j и x_k, что $j < k < p$ и $x_j = x_k$, цикл u можно разбить на два частичных цикла $[x_j, \dots, x_k]$ и $[x_k, \dots, x_j]$, причём ровно один из этих двух циклов имеет нечётную длину.

Ясно, что если продолжать таким же образом разбивать цикл p, пока это возможно, то всякий раз будет оставаться в точности один цикл нечётной длины, дойдя в конце концов до элементарных циклов мы получим противоречие с (2).

Эти результаты позволяют легко распознавать бикроматические графы, что же касается других графов, то для них графические методы определения хроматического числа неизвестны. Отметим, однако, что во многих случаях благодаря следующей теореме действенным орудием оказывается понятие функции Гранда.

Теорема 4 Пусть G — симметрический граф. Чтобы граф G был p-хроматическим, необходимо и достаточно, чтобы он допускал функцию Гранди $g(x)$, для которой

$$\max_{x \in X} g(x) \leq p - 1.$$

1° Если такая функция $g(x)$ существует, то граф G является p-хроматическим: в самом деле, достаточно числам $0, 1, \ldots, p-1$ поставить в соответствие различные цвета и окрасить каждую вершину x в тот цвет, который отвечает числу $g(x)$.

2° Предположим, что граф p-хроматический, и докажем, что на G существует функция Гранди, значения которой не превышают $p-1$.

Пусть $S_0, S_1, \ldots, S_{p-1}$ — множества вершин с одинаковым цветами. Присоединим к S_0 все вершины из S_1, не смежные ни с одной из вершин S_0. Далее присоединим к S_0 все вершины из S_2, не смежные ни с одной из вершин S_0 и вершин S_1, ранее присоединенных к S_0. Затем последовательно поступим подобным же образом с множествами $S_3, \ldots, S_{p-1}$. В результате получим множество $\overline{S_0} = S_0 \cup S_1 \cup \ldots \cup S_{p-1}$.

Функция $g(x)$, равная k при $x \in S_k$, есть функция Гранди для графа G, что и требовалось.

Теорема 5 Пусть G — $(p+1)$-хроматический граф, H — $(q+1)$-хроматический граф, обозначим через r наибольшую из d-сумм $p' + q'$, где $p' \leq p$, $q' \leq q$, тогда граф $G \times H$ является $(r+1)$-хроматическим.

Действительно, всегда можно предположить, что графы G и H симметрические (это никак не изменит рёбер графа $G \times H$), построим для G функцию Гранди $g(x)$ с наибольшим значением, не превосходящим p, а для H — функцию Гранди $h(x)$ с наибольшим значением, не превосходящим q в соответствии с предыдущей теоремой. В силу теоремы 8 (гл. 3) граф $G \times H$ допускает функцию Гранди с наибольшим значением, не превосходящим r, откуда и следует справедливость утверждения.

Например, читатель легко проверит, что если G 6-хроматический, а H 7-хроматический граф, то граф $G \times H$ является 8-хроматическим, потому что

$$r = 6 + 1 = (1 \cdot 1) = 7.$$

Теорема 6 Если G и H два различных графа с хроматическими числами p и q, а $r = \min\{p, q\}$, то граф $G \times H$ является r-хроматическим.

Предположим для определенности, что $p \leq q$, и раскрасим граф G с помощью p цветов; в графе $G \times H$ придумаем вершине $\xi = (x, y)$ тот же цвет, который имеет x в G. Тогда смежные вершины графа $G \times H$ будут иметь различные цвета (ибо иначе в G имелись бы одинаково окрашенные смежные вершины).

Ч. Т. Д.

Эту теорему можно выразить еще и так

$$\gamma(G \times H) \leq \min\{\gamma(G), \gamma(H)\}.$$

[1] Этот систематический способ, которым мы обязаны Гомори, основывается на симплекс-методе Данцига (G. Dantzig) и в общих чертах состоит в том, что сначала решается обычная линейная программа, а затем если какой-нибудь из переменных в этом решении отвечает нецелое число, то составляется некоторый набор линейных неравенств, которым удовлетворяют все целые решения, но не удовлетворяют уже найденные.

10. Цикломатическое число графа

Понятие, которое мы собираемся здесь ввести не зависит от "ориентации". Для большей общности введем в рассмотрение не просто графы а *мультиграфы*; по определению, *мультиграф* (X, U) это пара, образованная множеством X вершин и множеством U ребер соединяющих некоторые пары вершин, в противоположность обычным графам у мультиграфа одна и та же пара вершин может соединяться более чем одним ребром.

Во многих задачах удобно вместо обычных графов рассматривать мультиграфы.

Пример (химия). Молекула представляется мультиграфом, вершины которого обозначены символами таблицы Менделеева (Пойа [4] применил теорию графов к органической химии для

Рис. 1: Этилен Ацетилен

подсчета числа изомеров химических соединений). Говорят также, что этилен является 2-графом, ацетилен --- 3-графом, и т.д. (см. рис. 4--1)

Рассмотрим мультиграф G с n вершинами, m ребрами, p компонентами связности. Положим

$$\rho(G) = n - p,$$
$$\alpha(G) = m - \rho(G) = m - n + p,$$

$\nu(G)$ называется *цикломатическим числом* мультиграфа G. Его свойства играют важную роль[2]

Теорема 1 Пусть G --- мультиграф полученный из мультиграфа $\bar{G}$ добавлением нового ребра между вершинами a и b; если a и b совпадают или могут быть соединены цепью в $\bar{G}$, то

$$\rho(G') = \rho(\bar{G}), \quad \nu(G') = \nu(\bar{G}) + 1,$$

в противном случае

$$\rho(G) = \rho(\bar{G}) + 1, \quad \nu(G') = \nu(\bar{G})$$

(Непосредственно)

Следствие $\rho(\bar{G}) \geq 0, \quad \nu(\bar{G}) \geq 0$

В самом деле, для графа, образованного всеми вершинами G, но без ребер имеем $\rho = 0$, $\nu = 0$. Каждое добавление ребра либо увеличивает ρ, не меняя ν либо увеличивает ν. Таким образом, в процессе построения графа G числа ρ и ν могут только возрастать.

Для дальнейшего удобно следующим образом отождествлять циклы мультиграфа с векторами: придадим каждому ребру мультиграфа G произвольную ориентацию, если цикл μ проходит через ребро u_k в направлении его ориентации r_k раз и в противоположном направлении s_k раз, то полагаем $c^k = r_k - s_k$. Вектор

$$(c^1, c^2, \ldots, c^k, \ldots, c^m)$$

m-мерного пространства $\mathbb{R}^m$ будем называть *вектором-циклом*, соответствующим циклу μ и обозначать через $\boldsymbol{\mu}$ (или опять через μ, если это не может привести к недоразумению).

Циклы μ, μ', μ'', называются *независимыми*, если соответствующие им векторы линейно независимы[3]. Отметим, что это свойство не зависит от выбора ориентации ребер.

Если $\mathbf{c} = (c^1, c^2, \ldots, c^m)$ и $\mathbf{d} = (d^1, d^2, \ldots, d^m)$ --- два вектора из $\mathbb{R}^m$, а $\alpha \in \mathbb{R}$, то полагаем

$$\begin{aligned} \alpha\mathbf{c} &= (\alpha c^1, \alpha c^2, \ldots, \alpha c^m) \\ -\mathbf{c} &= (-c^1, -c^2, \ldots, -c^m) \\ \mathbf{c} + \mathbf{d} &= (c^1 + d^1, c^2 + d^2, \ldots, c^m + d^m) \\ \mathbf{0} &= (0, 0, \ldots, 0) \end{aligned}$$

Множество $E \subset \mathbb{R}^m$ представляет собой *векторное подпространство* если

$$\alpha \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{c} \in E \Rightarrow \alpha\mathbf{c} \in E$$
$$\mathbf{c}, \mathbf{d} \in E \Rightarrow \mathbf{c} + \mathbf{d} \in E$$

Говорят, что векторы $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_k$ из $\mathbb{R}^m$ *линейно независимы*, если

$$\alpha_1\mathbf{c}_1 + \alpha_2\mathbf{c}_2 + \cdots + \alpha_k\mathbf{c}_k = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$$

[2]Цикломатическим числом графа называется цикломатическое число того 2-графа который получится, если каждую дугу заменить ребром -- Прим перев

[3]Напомним некоторые классические определения линейной алгебры

Напротив, когда для некоторых чисел α_i не равных одновременно нулю,

$$\alpha_1 \mathbf{c}_1 + \alpha_2 \mathbf{c}_2 + \cdots + \alpha_k \mathbf{c}_k = \mathbf{0},$$

говорят, что данные векторы *линейно*

Теорема. *2 Цикломатическое число $\nu(G)$ мультиграфа G равно наибольшему количеству независимых циклов.*

Действительно, возьмем граф без ребер, образованный всеми вершинами G и, добавляя к нему ребро за ребром, построим данный мультиграф G. В силу теоремы 1 цикломатическое число увеличивается на единицу, когда добавление ребра приводит к образованию новых циклов и не меняется в противоположном случае. Допустим, что перед добавлением ребра u_k уже имелась база, состоящая из независимых циклов ρ_1, ρ_2, ..., и что добавление u_k повлекло за собой возникновение циклов ν_1, ν_2, ... Среди новых циклов наверняка имеются простые, пусть, например, ν_1 --- простой, $\nu_1^k = 1$. Очевидно ν_1 не может линейно выражаться через ρ_i (ибо $\mu_1^k = \mu_2^k = \cdots = 0$). С другой стороны, ν_2 (и аналогично ν_3, ...) можно линейно выразить через ν_1, μ_1, μ_2, ..., в самом деле, вектор $\nu_2 - \lambda_1^2 \nu_1$ соответствует некоторому циклу, не содержащему u_k (этот цикл получается из ν_2 заменой ребра u_k оставшейся частью ν_1 с измененным направлением обхода), и, значит линейно выражается через μ_1, μ_2, ... Таким образом каждый шаг, увеличивающий на единицу цикломатическое число, в то же время увеличивает на единицу наибольшее количество независимых циклов. Теорема доказана.

Следствие 1. *1 Граф G не имеет циклов тогда и только тогда, когда $\nu(G) = 0$.*

Следствие 2. *2 Граф G имеет один единственный цикл тогда и только тогда, когда $\nu(G) = 1$.*

Теорема. *3 В сильно связном графе цикломатическое число равно наибольшему количеству независимых контуров.*

В самом деле, рассмотрим 2-граф, получающийся заменой дуг данного графа G ребрами, и элементарный цикл μ, вершины, встречающиеся в цикле μ, можно распределить по следующим множествам множество S точек обладающих тем свойством, что одна из дуг μ исходит из точки, а другая заходит в нее, множество S'

зависимы Если $a_1 \neq 0$, то можно также написать

$$c_1 = \frac{a_2}{a_1} c_2 + ... + \frac{a_k}{a_1} c_k,$$

в этом случае говорят, что c_1 линейно выражается через c_2, c_3 ..., c_k

База векторного подпространства E есть такое множество векторов $\{e_1, e_2, ..., e_k\}$ из E, что каждый вектор подпространства E линейно выражается через векторы e_i, наименьшее из чисел k называется размерностью подпространства E.

В $E = \mathbb{R}^m$ одна из баз образуется векторами

$$e_1 = (1, 0, 0, ..., 0), e_2 = (0, 1, 0, ..., 0), ..., e_m = (0, 0, 0, ..., 1),$$

точек, из которых исходит по две дуги μ, множество S'' точек, в которые заходит по две дуги μ (см. рис 4-2).

Так как количество конечных точек равно количеству начальных то $|S'| = |S''|$, итак, пусть $x'_1, x'_2, ..., x'_k$ - элементы S', а $x''_1, x''_2, ..., x''_k$ - элементы S''

В цикле μ элементы S' чередуются с элементами S', и мы предположим нумерацию вершин такой что первая вершина после x'_i, не принадлежащая S есть x_i, наконец, если ν_0 — путь, в котором вершина x встречается раньше вершины y, то обозначим через $\mu_0[x,y]$ частичный путь из x в y. Поскольку граф сильно связен, существует контур ν_i, проходящий через x'_{i+1} и x'_i и содержащий дуги μна пути от x'_{i+1} к x'_i. Цикл μявляется линейной комбинацией контуров ибо можно написать

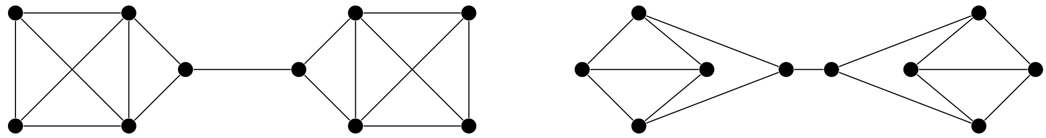
$\mu = \mu[x'_1,x''_1] - \nu_1[x'_2,x'_1] + \mu[x'_2,x''_2] + \cdots = \mu[x'_1,x_1] + \nu_1[x_1,x'_2] + \mu[x'_2,x''_2] + \nu_2[x_2,x'_3] + \cdots = -(\nu_1 + \nu_2 + \cdots)$

Значит каждый элементарный цикл есть линейная комбинация контуров и то же справедливо для произвольного цикла (поскольку он является линейной комбинацией элементарных)

В R^n контуры образуют базу векторного подпространства, порожденного циклами и в силу теоремы 2 эта база имеет размерность $\nu(G)$; поэтому наибольшее число независимых контуров равно $\nu(G)$

11. Плоские графы, формула Эйлера

Будем говорить, что граф *укладывается* на поверхности S, если его можно так нарисовать на S, что никакие два его ребра не пересекаются. Как уже отмечалось в гл. 1, мы будем использовать термины «вершины» и «рёбра» для абстрактных графов и «точки» и <<линии>> --- для геометрических графов (уложенных на некоторой поверхности). Граф называется *планарным*, если его можно уложить на плоскости; *плоский граф* --- это граф, уже уложенный на плоскости. Например, кубический граф, показанный на рис. ниже, *а*, планарный, поскольку он изоморфен плоскому графу, изображенному на рис. ниже, *б*.



а б

Рис. 2: Планарный граф и его укладка.

Области, определяемые плоским графом, назовем его *гранями* (или *внутренними гранями*); неограниченную область будем называть *внешней гранью.* Если границей грани плоского графа является простой цикл, то иногда под гранью будем понимать этот цикл. Плоский граф, представленный на рис. 11.2, имеет две внутренние грани f_1, f_2 и одну внешнюю f_3. Из этих граней только f_2 ограничена простым циклом.

Изучение планарных графов было начато Эйлером в его исследованиях полиэдров. С каждым полиэдром связан граф, состоящий из точек и линий полиэдра; этот граф называется 1-*скелетом.* Например, граф Q_3 есть 1-скелет куба, а $K_{2,2,2}$ --- это 1-скелет октаэдра. Формула Эйлера для полиэдров --- один из классических результатов в математике.

Теорема (Формула Эйлера для полиэдров)**.** *Для любого полиэдра, расположенного на сфере и имеющего V точек, E линий и F граней,*

$$V - E + F = 2. \tag{2}$$

Для 3-куба имеем $V = 8$, $E = 12$ и $F = 6$, так что равенство (2) выполняется; для тетраэдра $V = 4$, $E = 6$ и $F = 4$. Прежде чем доказывать равенство (2) в общем случае, переформулируем его в теоретико-графовых терминах. *Плоской картой* называется связный плоский граф вместе со всеми его гранями. Уравнение (2) для плоской карты (с p вершинами, q ребрами и r гранями) будет иметь вид

$$p - q + r = 2. \tag{3}$$

Легко доказать эту теорему по индукции. Однако соотношение (3) было уже доказано в гл. 4, когда мы установили, что циклический ранг m связного графа G определяется по формуле

$$m = q - p + 1.$$

Будем считать, что граф $\bar{G}$ двусвязен, поскольку, как легко видеть, если соотношение (11.1') выполняется отдельно для блоков графа G, то оно выполняется также и для графа G. Таким образом, каждая грань плоской укладки графа G есть простой цикл.

Мы только что отметили, что для плоской карты $p = V$ и $q = E$. Осталось только связать m с F. Покажем, что внутренние грани плоского графа G образуют базис простых циклов для графа G; число этих циклов, следовательно, равно m. Любой простой цикл Z графа G можно рассматривать как симметрическую разность граней графа G, содержащихся в Z. Поскольку внешняя грань есть, таким образом, сумма по модулю 2 всех внутренних граней (рассматриваемых как множества ребер), ясно, что $m = F-1$. Следовательно, соотношение $m = q-p+1$ переходит в $F-1 = E-V+1$.

Из формулы Эйлера вытекает много следствий.

Следствие 3 (11.1 (а))**.** *Если G --- плоская (p,q)-карта, в которой каждая грань является n-циклом, то*

$$q = \frac{n(p-2)}{n-2}. \tag{4}$$

Доказательство. Поскольку каждая грань графа G есть n-цикл, любое ребро в G принадлежит двум граням и каждая грань имеет n ребер. Тогда $nr = 2q$. Подставив это в (11.1'), получим искомый результат. □

Максимальным планарным графом называется граф, который при добавлении любого ребра перестает быть планарным. Подстановка в (11.2) $n = 3$ и $n = 4$ дает

Следствие 4 (11.1 (б))**.** *Если G --- максимальный плоский (p,q)-граф, то каждая его грань является треугольником и $q = 3p - 6$. Если G --- плоский граф, у которого любая грань есть 4-цикл, то $q = 2p - 4$.*

Так как наибольшим числом рёбер в плоском графе обладает граф, у которого каждая грань есть треугольник, то получаем необходимое условие планарности графа в терминах числа рёбер.

Следствие 11.1 (в). *Если G — произвольный планарный (p, q)-граф и $p \geq 3$, то $q \leq 3p - 6$. Если граф G двусвязан и не содержит треугольников, то $q \leq 2p - 4$.*

Следствие 11.1 (г). *Графы K_5 и $K_{3,3}$ не являются планарными.*

Доказательство. Граф K_5 есть (5,10)-граф и не может быть планарным, так как $q = 10 > 9 = 3p - 6$; для $K_{3,3}$ имеем $q = 9$ и $2q - 4 = 8$.

Следствие 11.1 (а). Каждый планарный граф $G \subseteq P \geq 4$ вершинами имеет по крайней мере четыре вершины со степенями, не превышающими 5.

Ясно, что граф планарный тогда и только тогда, когда каждая его компонента — планарный граф. Уитни [3] показал, что при исследовании планарности достаточно рассматривать двусвязные графы.

Теорема 11.2. Граф планарен тогда и только тогда, когда каждый его блок планарен.

Интуитивно очевидно, что любой планарный граф можно уложить на сфере, и обратно. Это замечание позволяет понять, что планарный граф можно уложить на плоскости многими различными способами.

Теорема 11.3. Для любой выделенной грани f двусвязного плоского графа G найдётся на плоскости изоморфный ему плоский граф, у которого грань, соответствующая грани f, будет внешней.

Доказательство. Пусть f — внешняя грань плоского блока G. Уложим G на сфере и выделим некоторую внутреннюю относительно f точку (назовем её «северным полюсом»). Проведем касательную плоскость к сфере через «южный полюс» и спроецируем G на плоскость из «северного полюса». В результате получим плоский граф, изоморфный графу G, в котором f — внешняя грань.

Следствие 11.3 (а). Для любого выделенного ребра планарного графа найдётся такая укладка этого графа на плоскости, что выделенное ребро будет принадлежать внешней грани.

Уитни также доказал, что каждый максимальный планарный граф является блоком. Более того, справедлива

Теорема 11.4 (Уитни). Каждый максимальный планарный граф, имеющий $p \geq 4$ вершины, трёхсвязен.

Существует пять способов укладки трёхсвязного колеса W_5 на плоскости: один из них изображен на рис. 11.3, а, остальные четыре — на рис. 11.3, б. Однако на сфере граф W_5 можно уложить лишь единственным способом. Это относится и ко всем трёхсвязным графам (Уитни [4]).

Теорема 11.5. Любой трёхсвязный планарный граф единственным образом укладывается на сфере.

Для того чтобы доказать необходимость трёхсвязности, рассмотрим изоморфные двусвязные графы G_1 и G_2, представленные на рис. 11.4. Граф G_1 укладывается на сфере так, что ни одна из его областей не ограничена пятью рёбрами, в то время как G_2 имеет две области, ограниченные пятью рёбрами.

Многогранник называется *выпуклым*, если отрезок прямой, соединяющий две произвольные точки многогранника, лежит целиком внутри многогранника. Следующая теорема принадлежит Штейнитцу и Радемахеру [**?**].

Теорема 11.6. Граф является 1-скелетом выпуклого трёхмерного многогранника тогда и только тогда, когда он планарен и трёхсвязен.

Одна из наиболее увлекательных областей исследований в теории планарных графов посвящена взаимосвязи между графом как комбинаторным объектом и графом как геометрической фигурой. Очень часто возникает вопрос о существовании специальной укладки графа (при тех или иных геометрических ограничениях). Например, Вагнер [**?**], Фари [**?**] и Штейн [**?**] независимо показали, что каждый планарный граф можно уложить на плоскости так, что каждое его ребро будет отрезком прямой.

Теорема 11.7. Любой планарный граф изоморфен плоскому графу, у которого все рёбра являются отрезками прямыми.

12. Линейно независимые циклы

13. Хроматическое число плоского графа

14. Примеры неплоских графов

15. Ориентированные графы, порядковая функция

16. Функция Гранди

17. Внутреннее устойчивое множество

18. Внешнее устойчивое множество

19. Ядро графа

20. Игры на графе, игра НИМ

21. Транспортные сети

22. Теорема Кёнига-Холла

23. Приложения к матрицам

24. Бистохастические матрицы

25. Теорема Биркгофа - фон Неймана

[1]Обычно результат описанного проектирования называют стереографической проекцией.