1. Неориентированные графы, степени, изоморфизм

- **Граф** (математическая структура для представления связей между объектами):
  - Обозначается как $G = (X, \Gamma)$.
  - Состоит из:
    1° Непустое множество X (множество всех вершин графа).
    2° Отображение Γ множества X в X (правило, определяющее связи между вершинами).
- **Элементы графа**:
  - **Вершина** (точка, узел графа): Каждый элемент множества X.
  - **Дуга** (направленное ребро): Пара элементов (x, y), где $y \in \Gamma x$ (показывает направленную связь от x к y).
- **Множество дуг** (все связи в графе):
  - Обозначается через U (полный набор всех связей).
  - Дуги обозначаются буквами α, β, ω (при необходимости с индексами).

Определение. Степень вершины v_i (обозн. d_i или $\deg v_i$) -- число рёбер, инцидентных v_i (количество связей, примыкающих к вершине).

Теорема 2.1 (Эйлера) (фундаментальное свойство графов). Сумма степеней вершин графа равна удвоенному числу рёбер:

$$\sum_i \deg v_i = 2q$$

Следствие 2.1(а). Число вершин с нечётными степенями всегда чётно (важно для существования эйлеровых путей).

Ограничения степеней:

В (p,q)-графе (где p -- число вершин, q -- число рёбер): $0 \leq \deg v \leq p - 1$ для любой вершины v

Обозначения:

- $\delta(G) = \min \deg G$ -- минимальная степень (наименьшее число связей у вершины)
- $\Delta(G) = \max \deg G$ -- максимальная степень (наибольшее число связей у вершины)

Определение. Регулярный (однородный) граф (все вершины имеют одинаковое число связей): $\delta(G) = \Delta(G) = r = \deg G$

Классификация регулярных графов (по количеству связей у каждой вершины):

- Степень 0: граф без рёбер (изолированные точки)
- Степень 1: компоненты -- одиночные рёбра (пары связанных вершин)
- Степень 2: компоненты -- циклы (каждая вершина связана ровно с двумя другими)
- Степень 3: кубические графы (каждая вершина имеет ровно три связи)

Следствие 2.1(б). Каждый кубический граф имеет чётное число вершин (следует из теоремы Эйлера).

Специальные вершины:

- Изолированная: $\deg v = 0$ (вершина без связей)
- Концевая (висячая): $\deg v = 1$ (вершина с единственной связью)

2. Маршруты, связность, метрика графа

Определение. *Маршрут* в графе G (последовательность переходов по вершинам и рёбрам) -- чередующаяся последовательность вершин и рёбер $v_0, x_1, v_1, \ldots, x_n, v_n$, где:

- Начинается и заканчивается вершиной (точкой графа)
- Каждое ребро инцидентно (напрямую соединяет) предшествующей и следующей вершинам

Обозначение: $(v_0 - v_n)$-маршрут (путь от вершины v_0 до v_n) записывается как $v_0 v_1 v_2 \ldots v_n$

Классификация маршрутов:

- *Замкнутый*: $v_0 = v_n$ (начальная и конечная вершины совпадают)
- *Открытый*: $v_0 \neq v_n$ (начальная и конечная вершины различны)
- *Цепь* (trail): все рёбра различны (по каждому ребру проходим не более одного раза)
- *Простая цепь* (path): все вершины и рёбра различны (нигде не повторяемся)
- *Цикл*: замкнутая цепь (маршрут возвращается в начальную точку)

- *Простой цикл*: замкнутый маршрут с $n \geq 3$ различными вершинами (замкнутый путь без повторений вершин, кроме начальной/конечной)

Длина маршрута $v_0 v_1 \dots v_n = n$ (количество пройденных рёбер)

Важные метрики:
- *Обхват графа* $g(G)$: длина кратчайшего простого цикла (минимальное количество рёбер в замкнутом пути без повторений)
- *Окружение графа* $c(G)$: длина длиннейшего простого цикла (максимальное количество рёбер в замкнутом пути без повторений)

Примечание: $g(G)$ и $c(G)$ не определены для графов без циклов (для деревьев и лесов).

3. Самодополнительные графы

Определение. *Дополнение графа* $\overline{G}$ (граф с теми же вершинами, но противоположными связями):
- Множество вершин: $V(\overline{G}) = V(G)$
- Две вершины смежны в $\overline{G} \Leftrightarrow$ несмежны в G

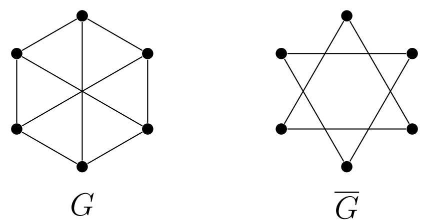

Рис. 2.12. Граф и его дополнение.

Определение. *Самодополнительный граф* -- граф, изоморфный своему дополнению (структура графа совпадает со структурой его дополнения).

Полный граф K_p (все вершины попарно соединены):
- Содержит p вершин
- Имеет $\binom{p}{2}$ рёбер
- Является регулярным степени $p-1$
- Частный случай: K_3 -- треугольник

Вполне несвязный граф $\overline{K_p}$ -- дополнение полного графа (регулярный граф степени 0).

4. Экстремальные графы

Теорема 2.3 (Турана) (о максимальном числе рёбер в графе без треугольников):
Наибольшее число рёбер у графов с r вершин без треугольников равно $\lfloor r^2/4 \rfloor$.

Доказательство (по индукции для чётных r):
1. База: очевидна для малых r
2. Шаг: для $r = 2n+2$, где утверждение верно для всех чётных $r \leq 2n$:
   - Пусть G -- граф с $p = 2n+2$ вершинами без треугольников
   - Существуют смежные вершины u, v (граф не вполне несвязный)
   - В подграфе $G' = G - \{u, v\}$ максимум n^2 рёбер
   - Нет вершины w, смежной с u и v одновременно
   - Если w смежна с k вершинами G', то v смежна максимум с $(2n-k)$ вершинами
   - Всего рёбер: $n^2 + k + (2n-k) + 1 = n^2 + 2n + 1 = p^2/4$

Конструктивное доказательство существования:
Для чётного p $(p, p^2/4)$-граф без треугольников строится так:
- Берём два множества V_1 и V_2 по $p/2$ вершин
- Соединяем каждую вершину из V_1 с каждой из V_2

Примечания:
- Доказательство существования чисел $r(m,n)$ см. у М. Холла
- По определению бесконечный граф не является графом
- Обзор бесконечных графов: см. Нэш-Вильямс

5. Числа Рамсея

Мотивационная задача: В любой группе из 6 человек найдутся либо 3 попарно знакомых, либо 3 попарно незнакомых (переформулировка в терминах графов).

Теорема 2.2 (о существовании треугольника): В графе G с 6 вершинами либо G, либо $\overline{G}$ содержит треугольник.
Доказательство: Пусть v -- произвольная вершина графа G. Среди 5 оставшихся вершин найдутся 3 вершины u_1, u_2, u_3, смежные с v в G (иначе они были бы смежны в $\overline{G}$). Если любые две из u_1, u_2, u_3 смежны в G -- получаем треугольник с v. Если нет -- u_1, u_2, u_3 образуют треугольник в $\overline{G}$.
Определение. *Число Рамсея* $r(m,n)$ (минимальное число вершин, гарантирующее наличие либо K_m, либо K_n):
- Симметричность: $r(m,n) = r(n,m)$
- Верхняя оценка (Эрдёш-Секереш): $r(m,n) \leq \binom{m+n-2}{m-1}$

Теорема Рамсея (для бесконечных графов): Каждый бесконечный граф содержит либо $\aleph_0$ попарно смежных вершин, либо $\aleph_0$ попарно несмежных вершин.
Примечание: Задача нахождения точных значений $r(m,n)$ остаётся открытой. Известные значения приведены в таблице 2.1.

6. Эйлеровы графы

Определение. *Эйлеров граф* -- граф, содержащий цикл со всеми вершинами и рёбрами (имеет эйлеров цикл). Обязательно связный.
Теорема 7.1 (критерий эйлеровости). Для связного графа G эквивалентны:
1. G -- эйлеров граф
2. Все вершины имеют чётную степень
3. Рёбра можно разбить на простые циклы

Доказательство:
(1)$\Rightarrow$(2): В эйлеровом цикле каждое прохождение вершины даёт $+2$ к её степени. Каждое ребро используется один раз $\Rightarrow$ степени чётны.
(2)$\Rightarrow$(3): В связном графе с чётными степенями:
- Найдём простой цикл Z
- Удалим его рёбра -- получим граф G_1 с чётными степенями
- Повторяем до пустого графа G_n

(3)$\Rightarrow$(1): Имея разбиение на циклы:
- Берём цикл Z_1
- Находим цикл Z_2 с общей вершиной v
- Строим замкнутую цепь из Z_1 и Z_2
- Продолжаем до полного эйлерова цикла

Следствие 7.1(а). В связном графе с $2n$ вершинами нечётной степени ($n \geq 1$) рёбра можно разбить на n открытых цепей.
Следствие 7.1(б). В связном графе с двумя вершинами нечётной степени существует открытая цепь, содержащая все рёбра (начинается и заканчивается в вершинах нечётной степени).

7. Деревья

Основные определения: *Ациклический граф* -- граф без циклов. *Дерево* -- связный ациклический граф. *Лес* -- граф без циклов (компоненты -- деревья).
Теорема 4.1. Для графа G эквивалентны: 1) G -- дерево 2) любые две вершины соединены единственной простой цепью 3) G связен и $p = q + 1$ 4) G ациклический и $p = q + 1$ 5) G ациклический, и добавление любого ребра создаёт ровно один цикл 6) G связный, не K_p при $p \geq 3$, добавление ребра создаёт один цикл 7) G не $K_3 \cup K_1$ и не $K_3 \cup K_2$, $p = q + 1$, добавление ребра создаёт один цикл
Доказательство (схема): 1$\Rightarrow$2: От противного: две цепи образуют цикл 2$\Rightarrow$3: Индукция по числу вершин 3$\Rightarrow$4: От противного: цикл длины n требует $q \geq p$ 4$\Rightarrow$5: Единственность компоненты из $p = q + k$ 5$\Rightarrow$6: K_p при $p \geq 3$ содержит цикл 6$\Rightarrow$7: Анализ возможных циклов 7$\Rightarrow$1: Исключение случаев с циклами

Следствие 4.1(а). В нетривиальном дереве есть минимум две висячие вершины. *Доказательство:* Из $\sum d_i = 2(p-1)$ в дереве.

8. Диаметр и радиус графа

Определение. *Расстояние* $d(u,v)$ между вершинами (длина кратчайшей простой цепи):

$$d(u,v) = \begin{cases} \text{длина кратчайшей } (u\text{-}v)\text{-цепи}, & \text{если вершины соединены} \\ \infty, & \text{если вершины не соединены} \end{cases}$$

Свойства метрики (для связного графа): 1) $d(u,v) \geq 0$; $d(u,v) = 0 \Leftrightarrow u = v$ (неотрицательность) 2) $d(u,v) = d(v,u)$ (симметричность) 3) $d(u,v) + d(v,w) \geq d(u,w)$ (неравенство треугольника)
Термины: • *Геодезическая* -- кратчайшая простая $(u\text{-}v)$-цепь • *Диаметр графа* $d(G)$ -- длина самой длинной геодезической
Степени графа: Для графа G определяется G^k (k-я степень): • $V(G^k) = V(G)$ (те же вершины) • Вершины u,v смежны в $G^k \Leftrightarrow d(u,v) \leq k$ в G *Примеры:* $C_5^2 = K_5$, $P_4^2 = K_1 + K_3$

9. Хроматическое число графа

Определение. *p-хроматический граф* -- граф, вершины которого можно раскрасить в p цветов так, чтобы смежные вершины имели разные цвета.
Хроматическое число $\chi(G)$ -- минимальное p, при котором граф p-хроматический.
Хроматический класс -- минимальное число цветов q для раскраски рёбер без одинаковых смежных рёбер.
Теорема о двудольных графах. Граф двудольный (χ(G)=2) ⊠ не содержит циклов нечётной длины.
Доказательство:
(⇒) Алгоритм раскраски в 2 цвета: 1) Выбираем вершину a, красим в синий 2) Смежные с синими красим в красный, с красными -- в синий 3) Отсутствие нечётных циклов гарантирует корректность
(⇐) От противного: в двудольном графе нельзя раскрасить нечётный цикл в 2 цвета.
Теорема 4. Для симметрического графа G эквивалентны: 1) G является p-хроматическим 2) Существует функция Гранди g(x) с $\max g(x) \leq p-1$
Теорема 5. Для графов G (p+1-хром.) и H (q+1-хром.): $\chi(G \times H) = r+1$, где r = maxp'+q': p'⊠p, q'⊠q
Теорема 6. Для графов G и H с χ(G)=p, χ(H)=q: $\chi(G \times H) = \min\{p,q\}$
Важное свойство: Для плоских графов χ(G)⊠5 (достаточно 5 цветов для раскраски карты).

10. Цикломатическое число графа

Определение. *Мультиграф* (X,U) -- пара из множества вершин X и множества рёбер U, где пара вершин может соединяться несколькими рёбрами.
Важные числовые характеристики: Для мультиграфа G с n вершинами, m рёбрами, p компонентами:

$$\rho(G) = n - p \quad \text{(ранг графа)}$$

$$\nu(G) = m - n + p = m - \rho(G) \quad \text{(цикломатическое число)}$$

Теорема 1. При добавлении ребра между a и b: Если a,b соединены цепью или совпадают:

$$\rho(G') = \rho(\bar{G}), \quad \nu(G') = \nu(\bar{G}) + 1$$

Иначе:

$$\rho(G) = \rho(\bar{G}) + 1, \quad \nu(G') = \nu(\bar{G})$$

Векторное представление циклов: • Каждому ребру присваивается ориентация • Для цикла μ: $c^k = r_k - s_k$, где r_k,s_k -- число проходов по/против ориентации • Цикл представляется вектором $(c^1, \ldots, c^m)$ • Циклы независимы $\Leftrightarrow$ их векторы линейно независимы
Теорема 2. Цикломатическое число $\nu(G)$ равно максимальному количеству независимых циклов.
Следствия: 1) $\nu(G) = 0 \Leftrightarrow$ граф без циклов 2) $\nu(G) = 1 \Leftrightarrow$ граф содержит ровно один цикл
Теорема 3. В сильно связном графе цикломатическое число равно максимальному количеству независимых контуров.

11. Плоские графы, формула Эйлера

12. Линейно независимые циклы

13. Хроматическое число плоского графа

14. Примеры неплоских графов

15. Ориентированные графы, порядковая функция

16. Функция Гранди

17. Внутреннее устойчивое множество

18. Внешнее устойчивое множество

19. Ядро графа

20. Игры на графе, игра НИМ

21. Транспортные сети

22. Теорема Кёнига-Холла

23. Приложения к матрицам

24. Бистохастические матрицы

25. Теорема Биркгофа - фон Неймана