

Конспект: Нелинейный резонанс

Линейный осциллятор и резонанс

Линейный осциллятор демонстрирует эффект резонанса, когда частота внешнего воздействия ω близка к собственной частоте ω_0 осциллятора. В этом случае амплитуда колебаний становится большой. Уравнение вынужденных колебаний линейного осциллятора имеет вид:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f \cos \omega t$$

Решение ищется в виде $x = A \cos \omega t$, что приводит к соотношению амплитуды:

$$|A| = \frac{f}{|\omega^2 - \omega_0^2|}$$

При $\omega \rightarrow \omega_0$ амплитуда стремится к бесконечности, но с учетом диссипации она ограничена.

Нелинейный осциллятор

Для нелинейного осциллятора частота свободных колебаний зависит от амплитуды. Например, для кубического осциллятора:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = 0$$

Частота колебаний сдвигается на $\Delta\omega(A) \approx 3\beta A^2/8\omega_0$. Для вынужденных колебаний используется модифицированная частота $\omega_0 + \Delta\omega(A)$:

$$|A| = \frac{f}{|\omega^2 - (\omega_0 + \Delta\omega)^2|} \approx \frac{f}{|\omega^2 - \omega_0^2 - 3\beta A^2\omega_0^2/4|}$$

Резонансные кривые

На рис. 14.4 показаны резонансные кривые для линейного и нелинейного осцилляторов. При $\beta > 0$ верхняя часть кривой наклонена вправо, при $\beta < 0$ — влево. В отличие от линейного случая, амплитуда вынужденных колебаний остается конечной даже при $\omega = \omega_0$ из-за неизохронности.

Нелинейный резонанс

Нелинейный резонанс характеризуется изменением амплитуды и частоты вынужденных колебаний в зависимости от параметров воздействия. Зависимость амплитуды от частоты может быть неоднозначной.

Консервативный осциллятор

Консервативный осциллятор сохраняет память о начальных условиях. Движение может быть периодическим или квазипериодическим в зависимости от соотношения частот. При наличии малой диссипации устанавливается режим вынужденных колебаний, описываемый резонансными кривыми.