

### § 3. Пример: нелинейный маятник •

Описываемые здесь и далее три модели дают некоторое представление о возможных видах нелинейных колебаний в случае одной степени свободы, но далеко не исчерпывают всего их разнообразия.

Траектории нелинейного маятника. Гамильтониан нелинейного маятника с единичной массой имеет вид

$$H = 1/2\dot{x}^2 - \omega_0^2 \cos x, \quad (3.1)$$

где  $q = x$  и  $p = \dot{x}$ . Уравнения движения (1.5) дают

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \sin x = 0. \quad (3.2)$$

Потенциал  $V = -\omega_0^2 \cos x$  и фазовый портрет приведены на рис. 1.10. Аналогично уравнениям (2.4) состояния равновесия маятника определяются уравнениями

$$\dot{x}_s = 0, \quad \sin x_s = 0. \quad (3.3)$$

Это дает  $\dot{x}_s = 0, x_s = \pi n, n = 0, \pm 1, \dots$ . В положении равновесия скорость  $\dot{x}_s$  равна нулю, а потенциал  $V(x_s)$  имеет минимум (четные  $n$ ) или максимум (нечетные  $n$ ). Соответственно точки при четных  $n$ -эллиптические, при нечетных  $n$ -гиперболические.

Траектории на фазовой плоскости при  $H < \omega_0^2$  соответствуют «захваченным» частицам, совершающим финитные колебания в потенциальных ямах. При  $H > \omega_0^2$  фазовые траектории относятся к «пролетным» частицам, движение которых инфинитно. Как видно из рис. 1.10, это периодические колебания около некоторого значения скорости, причем верхней и нижней ветвям фазовых кривых соответствуют различные направления скорости.

Сепаратрисой является фазовая траектория, проходящая через точку  $\dot{x}_s = 0, x_s = \pi$ . Поэтому ей соответствует энергия  $H_s = \omega_0^2$ . Решение на сепаратрисе найти просто. Действительно, подставим  $H_s = \omega_0^2$  в уравнение (3.1) и выразим из него  $\dot{x}$ :

$$\dot{x} = \pm 2\omega_0 \cos(x/2). \quad (3.4)$$

Отсюда интегрирование при начальном условии  $t = 0, x = 0$  дает

$$\omega_0 t = \ln \operatorname{tg} \left( \frac{x}{4} + \frac{\pi}{4} \right), \quad (3.5)$$

или

$$x = 4 \operatorname{arctg} e^{\omega_0 t} - \pi. \quad (3.6)$$

Выражение (3.6) есть не что иное, как уравнение сепаратрисы (вторая ветвь сепаратрисы получается из первой (3.6) обращением времени  $t \rightarrow -t$ ).

Однако более интересная информация о динамике частицы на сепаратрисе получается, если рассмотреть выражение для скорости  $v = \dot{x}$ . Для этого из (3.5) получаем соотношение

$$\cos(x/2) = 1/\operatorname{ch}(\omega_0 t)$$

и подставляем его в (3.4):

$$v = \pm 2\omega_0 / \operatorname{ch}(\omega_0 t) \quad (3.7)$$

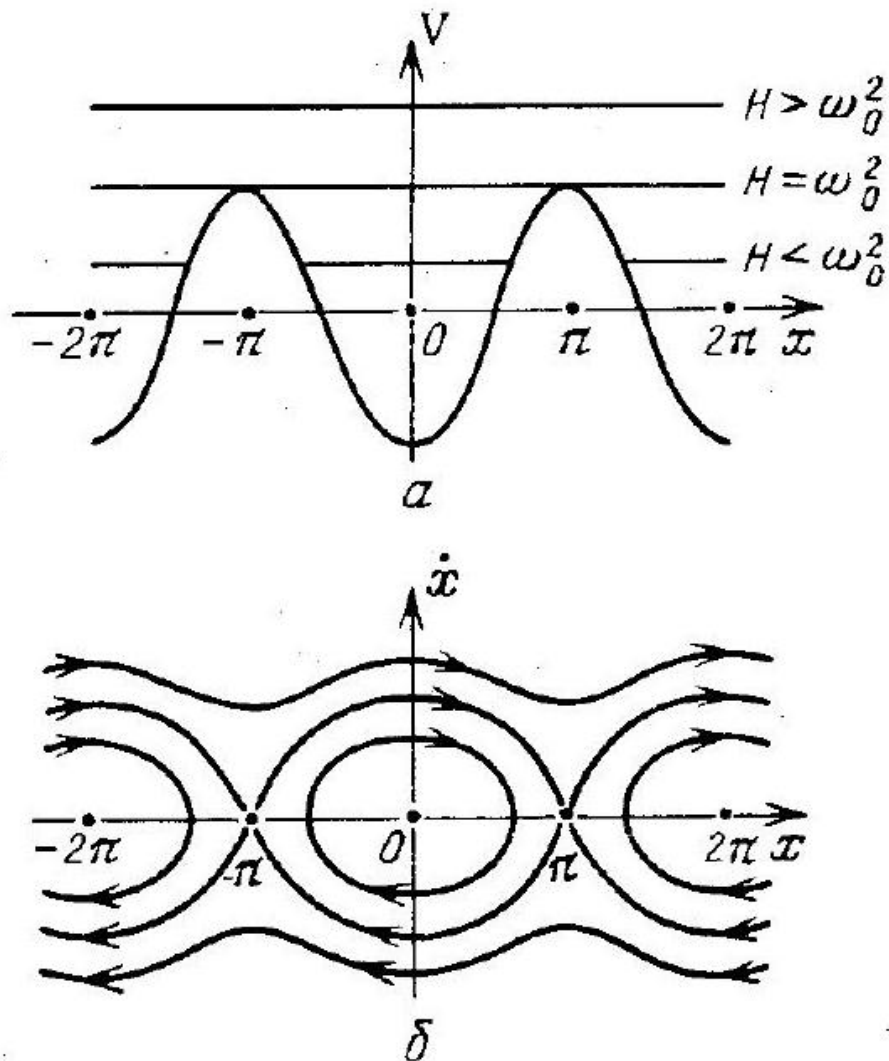


Рис. 1.10. Периодический потенциал (а) и соответствующий ему фазовый портрет (б)

Решение типа (3.7) имеет вид уединенной волны (рис. 1.11) и носит название солитона. Характерная ширина профиля скорости  $\sim 1/\omega_0$ . Его края экспоненциально спадают при  $t \rightarrow \pm\infty$ . Знак плюс в (3.7) соответствует солитону, движущемуся вправо (верхняя ветвь сепаратрисы на фазовой плоскости - рис. 1.10б). Знак минус в (3.7) соответствует движению влево.

Рассмотрим теперь общее решение уравнения (3.2) при тех же начальных условиях  $t = 0, x = 0$ . Для удобства воспользуемся переменными действии-углом, определенными формулами (2.7). Введем параметр \*)  $x$  :

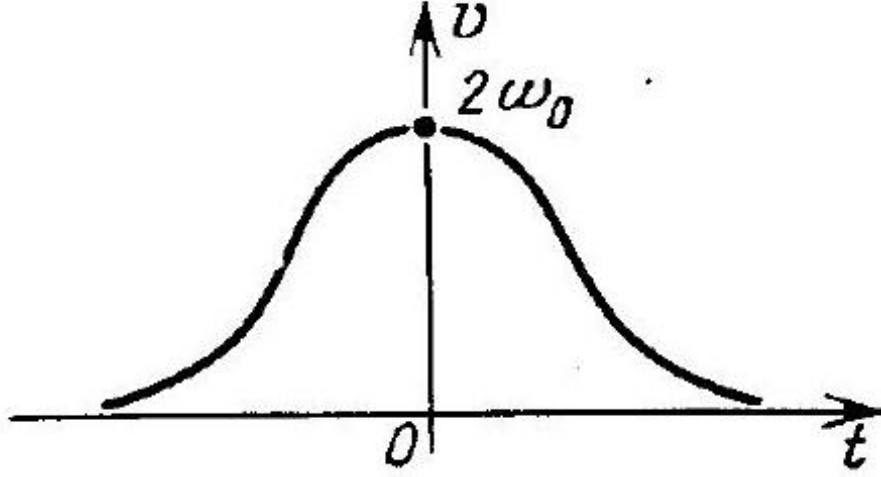


Рис. 1.11. Солитоноподобное решение для скорости на сепаратрисе

$$x^2 = (\omega_0^2 + H) / 2\omega_0^2 = 1/2 (1 + H/\omega_0^2), \quad (3.8)$$

принимаящий на сепаратрисе значение 1 и изменяющийся в области  $[0, \infty)$ , и переменную  $\xi$  :

$$\begin{aligned} x \sin \xi &= \sin(x/2) (x \leq 1), \\ \sin \xi &= \sin(x/2) (x \geq 1). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Имеем

$$I = I(H) = \frac{2}{\pi} \int_0^{x_0} dx [2 (H + \omega_0^2 \cos x)]^{1/2}$$

где точка поворота  $x_0$  находится из условия

$$H + \omega_0^2 \cos x_0 = 0$$

и использована симметрия движения частицы при определении интеграла  $I(H)$ . Здесь возникает необходимость доопределить выражение (2.7) для

---

\*) Здесь и далее одна и та же буква  $H$  используется как для обозначения гамильтониана, так и для интеграла энергии всюду, где это не должно вызвать недоразумений.

$I$  при значениях параметра  $x^2 > 1$ . Действительно, в этом случае из (3.8) следует, что уравнение для точки поворота не имеет решения, и в качестве точки  $x_0$  в интеграле для  $I$  следует взять  $x_0 = \pi$ . При таком определении действие есть площадь, ограниченная по  $x$  областью  $(-\pi, \pi)$  (см. рис. 1.10б) и лежащая между верхней и нижней относительно сепаратрисы ветвями траектории. Именно такое определение позволяет произвести непрерывную сшивку решения при переходе через сепаратрису (производная при этом имеет разрыв)

С помощью подстановки (3.9) приходим к выражению

$$I(H) = \frac{8}{\pi} \omega_0 \begin{cases} E\left(\frac{\pi}{2}; x\right) - (1 - x^2) F\left(\frac{\pi}{2}; x\right) & (x \leq 1), \\ x E\left(\frac{\pi}{2}; \frac{1}{x}\right) & (x \geq 1) \end{cases} \quad (3.10)$$

где  $F(\pi/2; x)$  и  $E(\pi/2; x)$  - полные эллиптические интегралы соответственно первого и второго рода.

Из (3.10) сразу находим частоту нелинейных колебаний маятника:

$$\omega(H) = \frac{dH(I)}{dI} = \left[ \frac{dI(H)}{dH} \right]^{-1} \quad (3.11)$$

Используя свойства эллиптических интегралов, находим

$$\omega(H) = \frac{\pi}{2} \omega_0 \begin{cases} \frac{1}{F(\pi/2; x)} & (x \leq 1), \\ \frac{x}{F(\pi/2; 1/x)} & (x \geq 1). \end{cases} \quad (3.12)$$

Мы отложим исследование формулы (3.12) до следующего пункта, а сейчас продолжим нахождение решения.

Согласно определению  $S(q, I)$  в формулах (2.7) имеем

$$S(x, I) = \begin{cases} 4\omega_0 [E(\xi; x) - (1 - x^2) F(\xi; x)] & (x \leq 1), \\ 4\omega_0 x E(\xi; 1/x) & (x \geq 1), \end{cases} \quad (3.13)$$

где  $\xi = \xi(x)$  определяется формулами (3.9). Нетрудно видеть, что полному интегралу по четверти периода движения соответствует точка  $x_0$  такая, что

$$\begin{aligned} \sin(x_0/2) &= x^2 & (x \leq 1) \\ \sin(x_0/2) &= 1 & (x \geq 1) \end{aligned}$$

Отсюда в любом случае  $\xi_0 = \pi/2$ , и выражение  $4S(x_0, T)/2\pi$  переходит в формулы для действия (3.10), как это и должно быть.

Дифференцирование  $S(x, I)$  по  $I$  определяет фазовую переменную  $\vartheta$  (см. (2.7)).

Из формулы (3.1) для  $H$  и определения (3.9) находим скорость:

$$\dot{x} = 2x\omega_0 \left\{ \frac{\cos \xi}{1 - \frac{1}{x^2} \sin^2 \xi} \right\} = 2x\omega_0 \begin{cases} \operatorname{cn}(t; x) & (x \leq 1), \\ \operatorname{dn}(t; \frac{1}{x}) & (x \geq 1), \end{cases} \quad (3.14)$$

где  $\operatorname{sn}$  и  $\operatorname{dn}$  - эллиптические функции Якоби. При  $x = 1$  выражение (3.14) переходит в (3.7) (знаки  $\pm$  для простоты опускаются).

Спектр нелинейного маятника. Нашей ближайшей целью будет понять качественный характер колебаний маятника для различных значений его энергии  $H$ . Для этого сделаем две вещи. Во-первых, введем число

$$N = \frac{\omega_0}{\omega(H)} = \frac{2}{\pi} F\left(\frac{\pi}{2}; x\right) \quad (x \leq 1) \quad (3.15)$$

и, во-вторых, разложим выражение (3.14) для  $\dot{x}$  в ряд Фурье:

$$\dot{x} = 8\omega \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-1/2}}{1+a^{2n-1}} \cos[(2n-1)\omega t] & (x \leq 1), \\ 1/4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1+a^{2n}} \cos(n\omega t) & (x \geq 1) \end{cases} \quad (3.16)$$

где

$$\begin{aligned} a &= \exp\left(-\pi \frac{F'}{F}\right), \quad F \equiv F\left(\frac{\pi}{2}; \bar{x}\right), \\ F' &\equiv F\left(\pi/2; \sqrt{1-\bar{x}^2}\right), \quad \omega = \omega(H), \\ \bar{x} &= \begin{cases} x & (x \leq 1), \\ 1/x & (x \geq 1). \end{cases} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Рассмотрим теперь различные асимптотики выражений (3.16) и (3.17). Воспользуемся следующими асимптотиками полного эллиптического интеграла  $F(\pi/2; x)$  :

$$F\left(\frac{\pi}{2}; x\right) \sim \begin{cases} \pi/2 & (x \ll 1), \\ 1/2 \ln \frac{32H_s}{H_s-H} & (1-x^2 \ll 1). \end{cases} \quad (3.18)$$

Отсюда

$$N \sim \begin{cases} 1 & (x \ll 1) \\ \frac{1}{\pi} \ln \frac{32H_s}{H_s-H} & (1-x^2 \ll 1). \end{cases} \quad (3.19)$$

Аналогично из (3.17), (3.18) и (3.15) находим

$$a \sim \begin{cases} x^2/32 & (x \ll 1), \\ \exp(-\pi/N) & (1-x^2 \ll 1). \end{cases} \quad (3.20)$$

Теперь легко определить характер колебаний маятника во всех областях. При  $x \ll 1$ , т. е. при очень малых энергиях системы, частота  $\omega(H) \sim \omega_0$  и  $N \sim 1$ . Кроме того, согласно (3.20) амплитуды малы. Поэтому в (3.16) имеет смысл оставить только первое слагаемое суммы, так как малость остальных нарастает с ростом  $n$ . Это дает

$$v = \dot{x} \approx \omega_0 \sqrt{2x^2} \cos(\omega_0 t) = \sqrt{2\omega_0 I} \cos(\omega_0 t)$$

в соответствии с обычной линейной теорией (действительно, энергия, отсчитываемая от дна потенциальной ямы, равна  $\delta H = \omega_0^2 + H$ , и  $I = \delta H/\omega_0 = x^2 H_s/\omega_0 = x^2 \omega_0$ ).

Пусть теперь  $x^2 \rightarrow 1$ , т. е.  $H \rightarrow H_s$ . Тогда вблизи сепаратрисы частота  $\omega(H) \rightarrow 0$ , а период колебаний логарифмически расходится (см. (3.19)). Скорость  $\dot{x}$  системы приближается к периодической последовательности солитоноподобных импульсов (рис. 1.12). Расстояние между двумя горбами в одной и той же фазе близко к периоду колебаний  $2\pi/\omega(H)$ , а ширина каждого горба близка к  $2\pi/\omega_0$ . Поэтому число  $N$

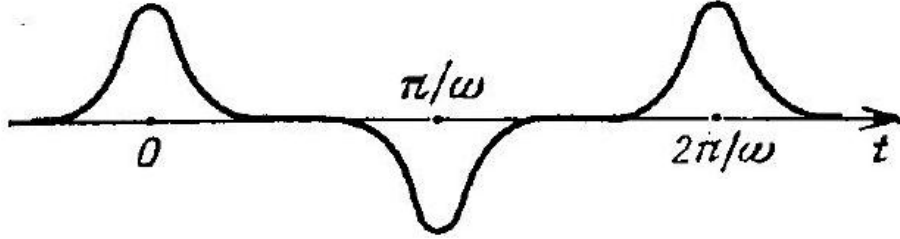


Рис. 1.12. Зависимость скорости от времени вблизи сепаратрисы определяет «скважность» функции  $v(t)$ . Вводя спектр скорости, как в (2.11), видим, согласно (3.20) и (3.16), что при  $N \gg 1$ , т. е. вблизи сепаратрисы,

$$b_n = 8\omega \frac{a^{n-1/2}}{1 + a^{2n-1}}$$

Принимая во внимание выражение для  $a$  в (3.20) при  $1 - x^2 \ll 1$ , получаем

$$b_n \sim 8\omega \begin{cases} 1 & (1 < n \leq N) \\ \exp(-\pi n/N) & (n] > [N) \end{cases} \quad (3.21)$$

т. е. все амплитуды приблизительно равны вплоть до  $n \sim N$  и экспоненциально малы при  $n > N$  в соответствии с соображениями, высказанными

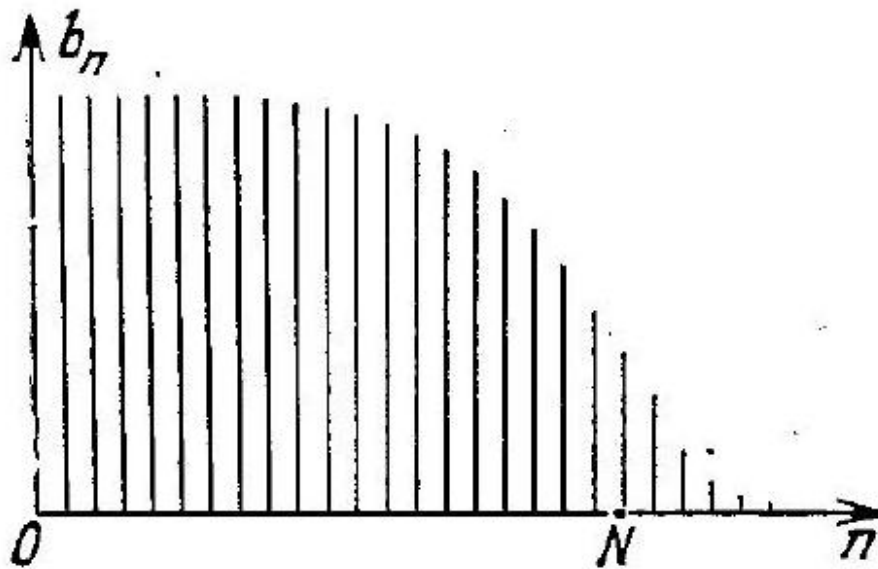


Рис. 1.13. Спектр скорости в окрестности сепаратрисы  
ранее. Отсюда следует, что спектр нелинейных колебаний маятника имеет вид, приведенный на рис. 1.13, и число  $N$  определяет характерное число гармоник в спектре.

По мере приближения к сепаратрисе  $N \rightarrow \infty$ , а сам спектр стремится к непрерывному. Как это высказывалось ранее в более общей форме, величина  $N$  является параметром характерного обрезания числа гармоник спектра.

Появление расходимости при  $\omega \rightarrow 0$  есть следствие приближения к траектории, проходящей через гиперболическую точку (т. е. к сепаратрисе). Это свойство имеет место не только при  $H \rightarrow \omega_0^2 - 0$ , т. е. снизу, но и при  $H \rightarrow \omega_0^2 + 0$ , т. е. со стороны пролетных частиц.

Общие свойства периода колебаний. Рассмотрим подробнее, как появляются нулевые или очень малые частоты колебаний, которые, как мы

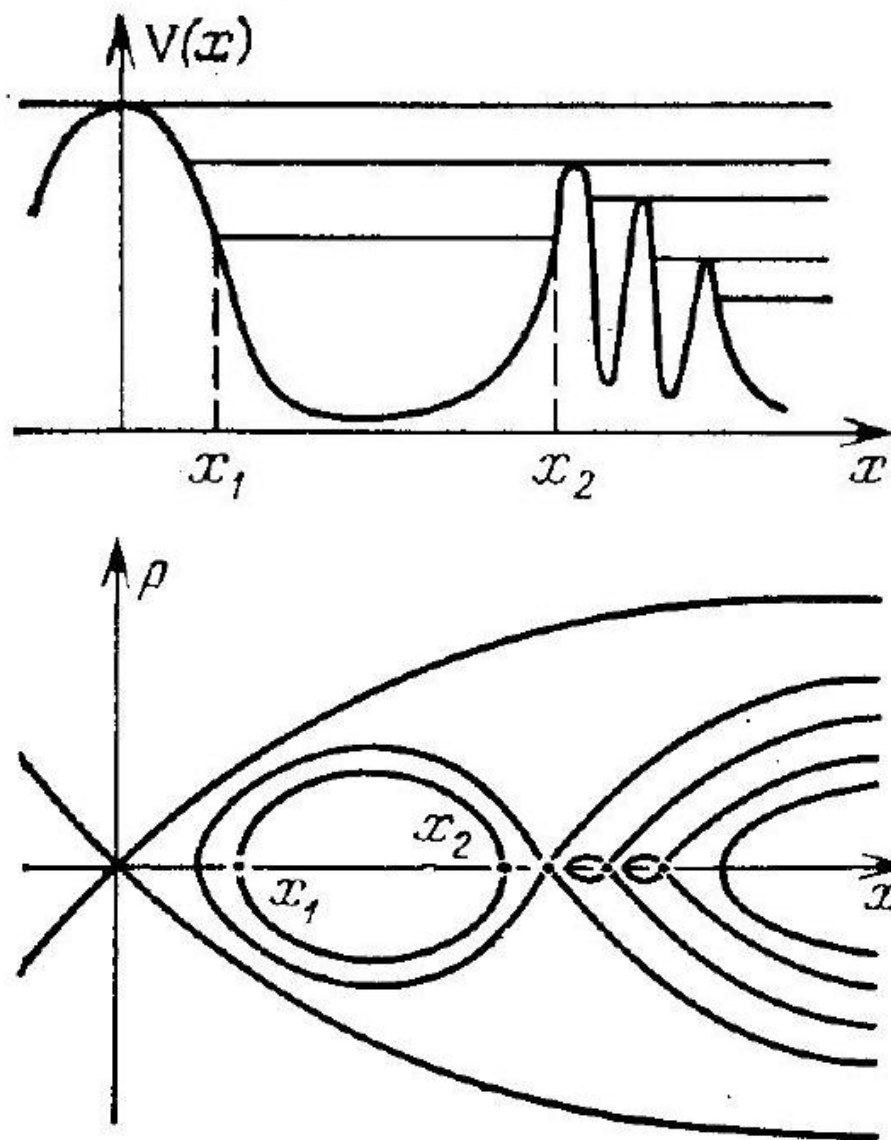


Рис. 1.14. Случай нескольких (трех) близких седел  
 только что видели, радикальнейшим образом изменяют всю картину колебаний по мере удаления от эллиптической точки положения равновесия. Выяснить это важно, так как речь идет о получении более детальной информации о системе при приближении ее траекторий к неустойчивым особым точкам.

Дифференцирование  $I$  по  $H$  в формуле (2.7) и определение  $\omega(1)$  в (2.8) дают период колебаний системы в потенциальной яме:



$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \oint \frac{dx}{[2(H - V(x))]^{1/2}}. \quad (3.22)$$

Исследуем в общей форме это выражение вблизи сепаратрисы. Для 1 этого обозначим расстояние энергии до сепаратрисы через

$$\Lambda = |H - H_s| \ll H_s. \quad (3.23)$$

Представим знаменатель в (3.22) в виде

$$[2(H - V(x))]^{1/2} \sim [(x - x_a)(x - x_b)(x - x_1) \dots (x - x_n)]^{1/2} \chi(x) \quad (3.24)$$

где  $x_a$  и  $x_b$ -точки поворота, между которыми совершается финитное движение;  $x_1, \dots, x_n$ -все другие точки поворота, кэторы расположены вблизи, скажем,  $x_b$ ;  $\chi(x)$ -функция, не имеющая нулей в комплексной плоскости в окрестности траектории. Для простоты ограничимся случаем, когда все  $x_i (i = 1, \dots, n)$  - действительные и нули с малой мнимой частью отсутствуют. В примере на рис. 1.14  $n = 5$ .

Основной вклад в выражение для  $T$  дают области по  $x$  в окрестности полюсов подынтегрального выражения, т. е. нулей импульса (3.24). Близко расположенные нули увеличивают кратность полюса. В окрестности сепаратрисы всегда имеется, по крайней мере, близость к двукратному вырождению:  $n \geq 1$ .

На основании сделанного замечания производим интегрирование в (3.22) только в окрестности полюса. Это дает

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \sim \frac{2\pi}{\omega_0} \begin{cases} \ln(H_s/\Delta) & (n = 1), \\ (\Delta/H_s)^{-(n-1)/2} & (n > 1). \end{cases} \quad (3.25)$$

Из формулы (3.25) можно также определить степень нелинейности колебаний:

$$\frac{d\omega}{dH} \sim \begin{cases} \omega^2/(\omega_0\Delta) & (n = 1) \\ \omega/\Delta & (n > 1) \end{cases} \quad (3.26)$$

Удобно выразить последнюю формулу либо только через энергию, либо только через частоту. Имеем

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{d\omega}{dH} \frac{H_s}{\omega_s} \sim \frac{H_s}{\Delta} \begin{cases} 1/\ln(H_s/\Delta) & (n = 1) \\ 1 & (n > 1) \end{cases} = \\ &= \begin{cases} (\omega/\omega_0) \exp(\omega_0/\omega) & (n = 1) \\ (\omega_0/\omega)^{2/(n-1)} & (n > 1) \end{cases} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Наиболее универсальное описание получается в энергетической шкале. Параметр нелинейности стремится к единице по мере роста числа точек поворота  $n$ , близких к данной точке поворота.