§ 1. Определения и простейшие свойства

Пусть E, F - линейные нормированные пространства. Отображение A назовем отображением из E в F, если для A область определения $D(A) \subset E$, а множество значений $R(A) \subset F$. В таком случае пишем $A : D(A) \subset E \to F$.

Предположим, что пространства E, F оба вещественные, или оба комплексные. Отображение A из E в F называется **линейным оператором**, если:

1. $D(A)$ - линейное многообразие в E;
2. $A(\lambda x) = \lambda Ax$, где $x \in D(A)$ и λ число;
3. $A(x + y) = Ax + Ay$, где $x, y \in D(A)$.

Нетрудно показать, что для линейного оператора A множество значений $R(A)$ является линейным многообразием в F. Заметим также, что $A\Theta = \Theta$.

Линейный оператор f из E - вещественного линейного нормированного пространства в $\mathbb{R}^1$ называется вещественным линейным функционалом. Линейный оператор f из E - комплексного линейного нормированного пространства в $\mathbb{C}^1$ называется комплексным линейным функционалом.

Замечание. Так как $D(A)$ - линейное многообразие в E, то $D(A)$ с нормой, порожденной пространством E, можно считать самостоятельным линейным нормированным пространством. Поэтому часто считают, что линейный оператор A задан на всем пространстве E и пишут $A : E \to F$, то есть $D(A) = E$.

Теорема 1.1. Пусть E, F - линейные нормированные пространства и $A : E \to F$ - Линейный оператор. Пусть оператор А непрерывен в точке $x_0 \in E$. Тогда оператор A непрерывен в любой точке $x \in E$.

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\} \subset E$ такая, что $x_n \to x$ при $n \to \infty$. Рассмотрим

$$Ax_n - Ax = A\left(x_n - x + x_0\right) - Ax_0.$$

Здесь $y_n = x_n - x + x_0 \to x_0$ при $n \to \infty$. Следовательно,

$$\|Ax_n - Ax\|_F = \|Ay_n - Ax_0\|_F \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Линейный оператор $A : D(A) \subset E \to F$ называется ограниченным на $D(A)$, если

$$(\exists C \geq 0)(\forall x \in D(A))\left[\|Ax\|_F \leq C\|x\|_E\right].$$

Теорема 1.2. Пусть E, F - линейные нормированные пространства. Линейный оператор $A : E \to F$ непрерывен на E тогда и только тогда, когда он ограничен на E.

Доказательство. Пусть оператор A непрерывен на E, но не является ограниченным. Тогда

$$(\forall n \in \mathbb{N})\left(\exists x_n \in E\right)\left[\|Ax_n\|_F > n\left\|x_n\right\|_E\right]$$

Заметим, что $x_n \neq \Theta$. Определим элементы $x_n' = x_n / \left(n\left\|x_n\right\|_E\right)$. Тогда $\|x_n'\|_E = = 1/n \to 0$ при $n \to \infty$, то есть $x_n' \to \Theta \in E$. Из непрерывности оператора A следует

$$\|Ax_n'\|_F = \|Ax_n' - A\Theta\|_F \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

С другой стороны

$$\|Ax_n'\|_F = \frac{1}{n\left\|x_n\right\|_E}\left\|Ax_n\right\|_F > \frac{1}{n\left\|x_n\right\|_E} n\left\|x_n\right\|_E = 1.$$

Из полученного противоречия следует ограниченность оператора A на E.

Теперь предположим, что оператор A ограничен на E. Тогда из оценки $\|Ax-Ay\|_F \leq C\|x-y\|_E$ для $x, y \in E$ следует, что оператор A на E удовлетворяет условию Липшица и, следовательно, непрерывен на E.$\odot$

Замечание. Полученные утверждения выполняются и для линейных функционалов, как частного случая линейных операторов. Отметим здесь, что линейный функционал f, определенный на $D(f) \subset E$ ограничен на $D(f)$, если

$$(\exists C \geq 0)(\forall x \in D(f))\left[|f(x)| \leq C\|x\|_E\right].$$

Теорема 1.3. Пусть E, F - линейные нормированные пространства, пространство E конечномерно. Пусть $A : E \to F$ Линейный оператор. Тогда оператор A ограничен на E.

Доказательство. Пусть $E = \mathscr{L}\left(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m\right)$, где $\{\omega_k\}_{k=1}^m$ – базис пространства E. Тогда всякий $x \in E$ представим в виде $x = \sum_{k=1}^m x_k\omega_k$, где x_k- координаты элемента x в базисе $\{\omega_k\}$. Определим в E новую норму $\|x\|_E^* = \sum_{k=1}^m |x_k|$. Исходная норма $\|x\|_E$ и новая $\|x\|_E^*$ эквивалентны. Тогда

$$(\exists M > 0)(\forall x \in E)\left[\|x\|_E^* \leq M\|x\|_E\right]$$

Далее для любого $x \in E$ получим

$$\|Ax\|_F = \left\|A\sum_{k=1}^m x_k\omega_k\right\|_F = \left\|\sum_{k=1}^m x_kA\omega_k\right\|_F \leq \sum_{k=1}^m |x_k|\,\|A\omega_k\|_F \leq$$
$$\leq \max_k \|A\omega_k\|_F \sum_{k=1}^m |x_k| \leq M \max_k \|A\omega_k\|_F\,\|x\|_E = C\|x\|_E,$$

где константа $C = M\max_k \|A\omega_k\|_F < \infty$.

- ЗАДАЧА.

1.1. Пусть E - банахово пространство и F - линейное нормированное пространство. Пусть $A : E \to F$ линейный ограниченный оператор такой, что $(\exists c > 0)(\forall x \in E)\left(\|Ax\|_F \geq c\|x\|_E\right)$. Показать, что множество значений оператора $R(A)$ - подпространство F.

§ 2. Норма линейного ограниченного оператора

Пусть E, F - линейные нормированные пространства. Пусть Линейный оператор $A : D(A) \subset E \to F$ ограниченный на $D(A)$. Тогда из (1.1) следует, что числовое множество

$$M = \left\{\frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E} \mid (x \in D(A)) \wedge (x \neq \Theta)\right\}$$

ограничено сверху константой $C \geq 0$. Обозначим

$$\|A\| = \sup M = \sup_{\substack{x\in D(A)\\ x\neq\Theta}} \frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E} \leq C < \infty.$$

Величина $\|A\|$ называется нормой оператора A на $D(A)$. Если $D(A) = E$, то $\|A\|$ называется просто нормой оператора A. Иногда норму оператора обозначают с указанием пространств $\|A\|_{E\to F}$.

Очевидно, что

$$(\forall x \in D(A))\left[\|Ax\|_F \leq \|A\|\|x\|_E\right]$$

С другой стороны

$$(\forall \varepsilon>0)\left(\exists x_{\varepsilon} \in D(A)\right)\left[\frac{\left\|A x_{\varepsilon}\right\|_{F}}{\left\|x_{\varepsilon}\right\|_{E}}>\|A\|-\varepsilon\right]$$

то есть $\left\|A x_{\varepsilon}\right\|_{F}>(\|A\|-\varepsilon)\left\|x_{\varepsilon}\right\|_{E}$. Таким образом, $\|A\|=\min C$, где константы C фигурируют в условии (1.1).

Теорема 2.1. Пусть E, F - линейные нормированные пространства. Пусть $A: D(A) \subset E \rightarrow F$ - Линейный оператор, ограниченный на $D(A)$. Тогда

$$\|A\|=\sup_{\substack{x \in D(A) \\ x \neq \Theta}} \frac{\|A x\|_{F}}{\|x\|_{E}}=\sup_{\substack{x \in D(A) \\ \|x\|_{E} \leq 1}}\|A x\|_{F}=\sup_{\substack{x \in D(A) \\ \|x\|_{E}=1}}\|A x\|_{F} .$$

Доказательство. Заметим, что

$$\|A\|=\sup_{\substack{x \in D(A) \\ x \neq \Theta}} \frac{\|A x\|_{F}}{\|x\|_{E}}=\sup_{\substack{x \in D(A) \\ x \neq \Theta}}\left\|A \frac{x}{\|x\|_{E}}\right\|_{F} \leq$$

$$\leq \sup_{\substack{y \in D(A) \\ \|y\|=1}}\|A y\|_{F}=\sup_{\substack{y \in D(A) \\ \|y\|=1}} \frac{\|A y\|_{F}}{\|y\|_{E}} \leq\|A\| .$$

Осталось показать, что

$$\sup_{\substack{x \in D(A) \\ \|x\|_{E} \leq 1}}\|A x\|_{F}=\|A\|$$

Пусть $x \in D(A)$ такой, что $\|x\|_{E} \leq 1$. Тогда $\|A x\|_{F} \leq\|A\|\|x\|_{E} \leq\|A\|$. Отсюда следует

$$\|A\| \geq \sup_{\substack{x \in D(A) \\ \|x\|_{E} \leq 1}}\|A x\|_{F} \geq \sup_{\substack{x \in D(A) \\ \|x\|_{E}=1}}\|A x\|_{F}=\|A\| .$$

Пример 2.1. ЛиНЕЙНЫЙ ОПЕРАТОР ФРЕДГОЛЬМА В $C[a, b]$.

В вещественном пространстве $C[a, b]$ определим оператор Фредгольма

$$A x(t)=\int_{a}^{b} K(t, s) x(s) d s$$

где функция $K(t, s)$ непрерывная по совокупности переменных $t, s \in[a, b]$. Для функции $x \in C[a, b]$ функция $A x(t)$ непрерывная по $t \in[a, b]$, так как функция $K(t, s) x(s)$ непрерывная по совокупности переменных $t, s \in[a, b]$ (см., напр., [18]). Следовательно, оператор $A: C[a, b] \rightarrow C[a, b]$.

Очевидно, что оператор A линейный. Установим ограниченность.

$$\|A x\|=\max_{a \leq t \leq b}\left|\int_{a}^{b} K(t, s) x(s) d s\right| \leq \max_{a \leq t \leq b} \int_{a}^{b}|K(t, s)\|x(s)| d s \leq$$

$$\leq \max_{a \leq t \leq b} \int_{a}^{b}|K(t, s)| d s\|x\| .$$

Итак, оператор A ограниченный и

$$\|A\| \leq \max_{a \leq t \leq b} \int_{a}^{b}|K(t, s)| d s<\infty$$

Покажем, что на самом деле в (2.2) имеет место равенство. В силу непрерывности по $t \in[a, b]$ функции $\int_{a}^{b}|K(t, s)| d s$ найдется $t_{0} \in[a, b]$, что

$$\max_{a \leq t \leq b} \int_{a}^{b}|K(t, s)| d s=\int_{a}^{b}\left|K\left(t_{0}, s\right)\right| d s .$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ определим функцию

$$x_\varepsilon(t) = \frac{K(t_0, t)}{\varepsilon + |K(t_0, t)|} \in C[a, b].$$

Заметим, что $\|x_\varepsilon\| \leq 1$. Далее получим

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \geq \|Ax_\varepsilon\| \geq |Ax_\varepsilon(t_0)| \geq Ax_\varepsilon(t_0) = \int_a^b K(t_0, s)\, x_\varepsilon(s) ds =$$

$$= \int_a^b K(t_0, s) \frac{K(t_0, s)}{\varepsilon + |K(t_0, s)|} ds = \int_a^b \frac{(|K(t_0, s)| + \varepsilon - \varepsilon) |K(t_0, s)|}{\varepsilon + |K(t_0, s)|} ds =$$

$$= \int_a^b |K(t_0, s)|\, ds - \varepsilon \int_a^b \frac{|K(t_0, s)|}{\varepsilon + |K(t_0, s)|} ds \geq \int_a^b |K(t_0, s)|\, ds - \varepsilon(b - a).$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получим

$$\|A\| \geq \int_a^b |K(t_0, s)|\, ds = \max_{a \leq t \leq b} \int_a^b |K(t, s)| ds.$$

Таким образом, из (2.2) и (2.3) следует для оператора Фредгольма

$$\|A\| = \max_{a \leq t \leq b} \int_a^b |K(t, s)| ds.$$

Пример 2.2. ПРОСТЕЙШИЙ ОПЕРАТОР ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ. В пространстве $C[0, 1]$ рассмотрим оператор

$$Ax(t) = \frac{d}{dt} x(t)$$

За область определения этого оператора примем множество $D(A) = C^1[0, 1]$, то есть множество непрерывно дифференцируемых на $[0, 1]$ функций. Тогда A - Линейный оператор, действующий в $C[0, 1]$.

Покажем неограниченность оператора A на $D(A)$. Для $n \in \mathbb{N}$ положим $x_n(t) = \sin n\pi t$. Тогда $Ax_n(t) = n\pi \cos n\pi t$. Для $x \in C[0, 1]$ норма $\|x\|_C = = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t)|$, поэтому

$$\|x_n\|_C = 1, \quad \|Ax_n\|_C = n\pi = n\pi \|x_n\|_C$$

Из последнего равенства следует, что условие (1.1) ограниченности оператора A не выполняется, так как $n\pi \to \infty$ при $n \to \infty$.

Рассмотрим оператор, который задается формулой (2.4), но уже из пространства $C^1[0, 1]$ с нормой $\|x\|_{C^1} = \|x\|_C + \|x'\|_C$ в пространство $C[0, 1]$. Итак, $A : C^1[0, 1] \to C[0, 1]$. Очевидно, что оператор A линейный. Кроме того, для всех $x \in C^1[0, 1]$

$$\|Ax\|_C = \|x'\|_C \leq \|x\|_C + \|x'\|_C = \|x\|_{C^1}$$

Получили, что оператор дифференцирования $A : C^1[0, 1] \to C[0, 1]$ ограничен и $\|A\|_{C^1 \to C} \leq 1$. Найдем точное значение нормы оператора. Для $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим функции $x_n(t) = (n\pi)^{-1} \sin n\pi t$. Тогда $Ax_n(t) = \cos n\pi t$ и, следовательно, $\|Ax_n\|_C = 1$. Далее получим

$$\|x_n\|_{C^1} = \|x_n\|_C + \|x'_n\|_C = \frac{1}{n\pi} + 1$$

Следовательно,

$$\|A\|_{C^1 \to C} = \sup_{\substack{x \in C^1 \\ x \neq \Theta}} \frac{\|Ax\|_C}{\|x\|_{C^1}} \geq \frac{\|Ax_n\|_C}{\|x_n\|_{C^1}} = \frac{n\pi}{1 + n\pi}.$$

Учитывая, что $n \in \mathbb{N}$ любые, из (2.5) при $n \to \infty$ получим $\|A\|_{C^1 \to C} \geq 1$. Таким образом, для оператора дифференцирования $\|A\|_{C^1 \to C} = 1$.

§ §. Пространство линейных ограниченных операторов

Пусть E, F - линейные нормированные пространства, причем оба вещественные или оба комплексные. Через $L(E, F)$ обозначим множество всех линейных ограниченных операторов $A : E \to F$. В случае $F = E$ вместо $L(E, E)$ пишут $L(E)$.

Определим на множестве $L(E, F)$ операции умножения на число и сложение. Считаем для числа λ и $A, B \in L(E, F)$ операторы λA и $A + B$ такие, что для $x \in E$

$$(\lambda A)x = (\lambda)Ax, \quad (A + B)x = Ax + Bx.$$

Нетрудно видеть, что так определенные операторы λA и $A+B$ принадлежат $L(E, F)$. В качестве нуля $\Theta \in L(E, F)$ определим оператор Θ такой, что $\Theta x = \Theta \in F$ для всех $x \in E$. Легко проверить выполнение в $L(E, F)$ всех аксиом линейного пространства.

В полученном линейном пространстве $L(E, F)$ определим норму. Для $A \in L(E, F)$ положим, как и в (2.1),

$$\|A\| = \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq \Theta}} \frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E}.$$

Для проверки аксиом нормы напомним

$$(\forall x \in E) \left[\|Ax\|_F \leq \|A\| \|x\|_E \right].$$

1). Очевидно, что $\|A\| \geq 0$. Пусть теперь $\|A\| = 0$. Тогда $\|Ax\|_F = 0$ для всех $x \in E$. Следовательно, $Ax = \Theta$ для всех $x \in E$ и оператор $A = \Theta \in L(E, F)$. Для $\Theta \in L(E, F)$ свойство $\|\Theta\| = 0$ очевидно. Доказана первая аксиома. 2). Вторая аксиома нормы следует из соотношения

$$\|\lambda A\| = \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq \Theta}} \frac{\|\lambda Ax\|_F}{\|x\|_E} = |\lambda| \|A\|.$$

3). Третья аксиома нормы следует из оценки для всех $x \in E$.

$$\|(A + B)x\|_F \leq \|Ax\|_F + \|Bx\|_F \leq (\|A\| + \|B\|)\|x\|$$

которая означает $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

Итак, $L(E, F)$ - линейное нормированное пространство и определена сходимость по норме операторов. Пусть последовательность операторов $\{A_n\}_{n=1}^\infty \subset L(E, F)$ такая, что для некоторого оператора $A \in L(E, F)$ выполняется $\|A_n - A\| \to 0$ при $n \to \infty$. В таком случае говорят, что операторы $A_n (n \in \mathbb{N})$ сходятся к оператору A по операторной норме. Такую сходимость $A_n \to A$ называют также равномерной сходимостью, поскольку она равносильна $\|A_n x - Ax\|_F \to 0$ при $n \to \infty$ равномерно по x из любого шара $B[\Theta, r] = \{x \in E \mid \|x\|_E \leq r\}$. Факт равномерной сходимости операторов при $n \to \infty$ будем обозначать $A_n \rightrightarrows A$.

Теорема 3.1. Пусть E - линейное нормированное пространство и пространство F банахово. Тогда пространство $L(E, F)$ с операторной нормой является банаховым пространством.

Доказательство. Возьмем произвольную фундаментальную последовательность $\{A_n\}_{n=1}^\infty \subset L(E, F)$, то есть

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N)(\forall p \in \mathbb{N}) \left[\|A_{n+p} - A_n\| < \varepsilon \right]$$

Пусть $x \in E$. Из неравенства

$$\|A_{n+p}x - A_n x\|_F \leq \|A_{n+p} - A_n\| \, \|x\|_E$$

и (3.1) следует фундаментальность последовательности $\{A_n x\}_{n=1}^\infty \subset F$. Но пространство F полное, поэтому эта последовательность сходится в F. Обозначим $\lim_{n\to\infty} A_n x = y(x) \in F$. Таким образом, определено отображение $A : E \to F$, действующее по правилу $Ax = y(x) = \lim_{n\to\infty} A_n x$.

Линейность отображения A очевидным образом следует из линейности операторов A_n и свойств предела. Итак, $A : E \to F$ - Линейный оператор.

Установим ограниченность этого оператора. Так как всякая фундаментальная последовательность ограничена, то $(\exists C > 0)(\forall n \in \mathbb{N})\,[\|A_n\| \le C]$. Следовательно, для всех $x \in E$ выполняется $\|A_n x\|_F \le \|A_n\|\,\|x\|_E \le C\|x\|_E$. Отсюда при $n \to \infty$ получим $\|Ax\|_F \le C\|x\|_E$, то есть оператор A ограниченный и $A \in L(E, F)$.

Покажем, что $\|A_n - A\| \to 0$ при $n \to \infty$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и пусть выполнено (3.1). Тогда для $x \in E$ с $\|x\|_E \le 1$ получим из (3.1) и (3.2)

$$(\forall n \ge N)(\forall p \in \mathbb{N})\left[\|A_{n+p}x - A_n x\|_F < \varepsilon\right]$$

В последней оценке $p \to \infty$. Получим для всех $x \in E$ с $\|x\|_E \le 1$ и всех $n \ge N$ оценку $\|Ax - A_n x\|_F \le \varepsilon$. Отсюда для всех $n \ge N$ следует

$$\|A - A_n\| = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|_E \le 1}} \|(A - A_n)\,x\|_F \le \varepsilon$$

Итак,

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \ge N)\,[\|A - A_n\| \le \varepsilon]$$

что означает $A_n \rightrightarrows A$. $\odot$

Отдельно рассмотрим пространство $L\left(E, \mathbb{R}^1\right)$, если пространство E вещественное, и пространство $L\left(E, \mathbb{C}^1\right)$, если пространство E комплексное. Оба эти пространства являются пространствами линейных ограниченных функционалов, вещественных или комплексных соответственно. Обозначать эти пространства принято символом E^*. Называют пространство E^* пространством, сопряженным к пространству E. Заметим, что всякое сопряженное пространство является полным, так как пространства чисел $\mathbb{R}^1$ и $\mathbb{C}^1$ полные.

Замечание. Если пространства E и F комплексные, то операцию умножения оператора на число иногда определяют формулой $(\lambda A)x = \bar{\lambda}(Ax)$. При этом пространство $L(E, F)$ также будет ЛНП, которое полно, если полно пространство F. Соответственно, будет полно и сопряженное пространство $E^* = L\left(E, \mathbb{C}^1\right)$, в котором умножение функционала на число определяется подобным образом $(\lambda f)x = \bar{\lambda}(fx)$. Обратим внимание, что сопряженное пространство E^* иногда определяют как пространство полулинейных ограниченных функционалов $f(\alpha x + \beta y) = \bar{\alpha} f(x) + \bar{\beta} f(y)$. При таком определении пространство E^* также полно. Заметим, что в вещественном случае все эти подходы совпадают.

Определим суперпозицию (произведение) линейных операторов. Пусть $E_1,\ E_2, E_3$ - линейные нормированные пространства. Пусть заданы операторы $A \in L\left(E_1, E_2\right)$ и $B \in L\left(E_2, E_3\right)$. Определим на E_1 отображение

$$(BA)x = B(Ax)$$

Очевидно, $BA : E_1 \to E_3$ и является линейным оператором. Из оценки

$$\|(BA)x\|_{E_3} = \|B(Ax)\|_{E_3} \le \|B\|\|Ax\|_{E_2} \le \|B\|\|A\|\|x\|_{E_1}$$

следует ограниченность оператора BA и оценка нормы $\|BA\| \le \|B\|\|A\|$. Таким образом, оператор $BA \in L\left(E_1, E_3\right)$.

Если оператор $A \in L(E)$, то определены операторы $A^n \in L(E)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, можно определять многочлены от операторов, а также операторные ряды, что позволяет определять и некоторые функции от операторов.

Заметим, что вообще операторы $BA \ne AB$ (один из этих операторов может быть не определен). Но и в случае, когда определены оба оператора BA и AB, равенство выполняется не всегда. Например, в пространстве $C[0, 1]$ заданы операторы $(Ax)(t) = tx(t)$ и $(Bx)(t) = \int_0^t x(s)ds$. Очевидно, что $A, B \in L(C[0, 1])$ и

$$ABx(t) = t\int_0^t x(s)ds \neq \int_0^t sx(s)ds = BAx(t)$$

Если выполняется равенство $AB = BA$, то говорят, что операторы коммутируют или перестановочны.

В пространстве $L(E,F)$ определим еще одну сходимость операторов, аналогом которой для функций является поточечная сходимость.

Пусть последовательность операторов $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L(E,F)$ такая, что для некоторого оператора $A \in L(E,F)$ выполняется $\|A_n x - Ax\|_F \to 0$ при $n \to \infty$ для всех $x \in E$. В таком случае говорят, что операторы $A_n (n \in \mathbb{N})$ сходятся к оператору A сильно. Факт сильной сходимости операторов при $n \to \infty$ будем обозначать $A_n \stackrel{\text{сильно}}{\longrightarrow} A$.

Из неравенства $\|A_n x - Ax\|_F \leq \|A_n - A\| \, \|x\|_E$ следует, что из равномерной сходимости операторов следует сильная сходимость. Обратное утверждение неверно, что видно из следующего примера.

Пример 3.1. В пространстве последовательностей l_2 операторы

$$P_n x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots) \text{ где } n \in \mathbb{N} \text{ и } x = (x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots) \in l_2.$$

. Очевидно, что $P_n \in L\left(l_2\right)$ и для $x \in l_2$

$$\|Ix - P_n x\| = \|(0, 0, \ldots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots)\| = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^2\right)^{1/2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Получили $P_n \stackrel{\text{сильно}}{\longrightarrow} I$. Справедлива оценка

$$\|Ix - P_n x\| = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^2\right)^{1/2} \leq \|x\|$$

из которой следует $\|I - P_n\| \leq 1$. Определим элемент $x_0 = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$, где 1 стоит на $n+1$-ом месте. Тогда $\|x_0\| = 1$ и

$$\|I - P_n\| = \sup_{\|x\|=1} \|(I - P_n)\, x\| \geq \|(I - P_n)\, x_0\| = \|x_0\| = 1$$

Таким образом, $(\forall n \in \mathbb{N})\, [\|I - P_n\| = 1]$.

Теорема 3.2. Пусть E, F - линейные нормированные пространства и пространство E конечномерно. Операторы $A, A_n (n \in \mathbb{N}) \in L(E,F)$ и выполнено условие $A_n \stackrel{\text{силвно}}{\longrightarrow} A$ при $n \to \infty$. Тогда $A_n \rightrightarrows A$.

Доказательство. Пусть $E = \mathscr{L}\left(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m\right)$, где $\{\omega_k\}_{k=1}^{m}$ – базис пространства E. Тогда всякий $x \in E$ представим в виде $x = \sum_{k=1}^{m} x_k \omega_k$, где x_k– координаты элемента x в базисе $\{\omega_k\}$. Определим в E новую норму $\|x\|_E^* = \sum_{k=1}^{m} |x_k|$. Нормы $\|x\|_E$ и $\|x\|_E^*$ эквивалентны. Тогда

$$(\exists M > 0)(\forall x \in E)\left[\|x\|_E^* \leq M\|x\|_E\right].$$

Далее получим для любого $x \in E$ с $\|x\|_E \leq 1$

$$\|\left(A_n - A\right) x\|_F = \left\|\sum_{k=1}^{m} x_k \left(A_n - A\right) \omega_k\right\|_F \leq \sum_{k=1}^{m} |x_k| \, \|\left(A_n - A\right) \omega_k\|_F \leq$$
$$\leq \max_{1\leq k\leq m} \|\left(A_n - A\right) \omega_k\|_F \, \|x\|_E^* \leq M \max_{1\leq k\leq m} \|\left(A_n - A\right) \omega_k\|_F$$

В результате получим

$$\|A_n - A\| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|\left(A_n - A\right) x\|_F \leq M \max_{1\leq k\leq m} \|\left(A_n - A\right) \omega_k\|_F \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

• ЗАДАЧИ.

3.1. В пространстве l_2 для $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots)$ определены две последовательности операторов:

$$A_n x = \left(\frac{x_1}{n}, \frac{x_2}{n}, \ldots, \frac{x_k}{n}, \ldots\right), \quad B_n x = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n}, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots).$$

Каков характер сходимости каждой из последовательностей ?

3.2. Пусть E и F - линейные нормированные пространства; $x, x_n \in E$ $(n \in \mathbb{N})$, и $\|x_n - x\|_E \to 0$ при $n \to \infty$. Пусть $A, A_n \in L(E,F)(n = 1, 2, \ldots)$ и $\|A_n - A\| \to 0$ при $n \to \infty$. Доказать, что $\|A_n x_n - Ax\|_F \to 0$.

§4. Принцип равномерной ограниченности

Лемма 4.1. Пусть E, F - линейные нормированные пространства и множество операторов $\{A_\gamma\} \subset L(E,F)$ такое, что

$$(\exists B\,[x_0, r] \subset E, r > 0)\,(\exists C > 0)\,(\forall x \in B\,[x_0, r])\,(\forall \gamma)\,\left[\|A_\gamma x\|_F \le C\right].$$

Тогда для $(\forall \gamma)\,[\|A_\gamma\| \le 2C/r]$, то есть множество операторов $\{A_\gamma\}$ равномерно по γ ограничено в $L(E,F)$.

Доказательство. Для произвольного $x \in E$, что $x \neq \Theta$, определим элемент

$$\frac{r}{\|x\|_E} x + x_0 \in B\,[x_0, r]$$

Далее получим

$$C \ge \left\| A_\gamma \left(\frac{r}{\|x\|_E} x + x_0 \right) \right\|_F = \left\| \left(\frac{r}{\|x\|_E} A_\gamma x \right) - (-A_\gamma x_0) \right\|_F \ge$$
$$\ge \left\| \frac{r}{\|x\|_E} A_\gamma x \right\|_F - \|A_\gamma x_0\|_F \ge \frac{r}{\|x\|_E} \|A_\gamma x\|_F - C.$$

Отсюда получается необходимая оценка для всех $x \in E$

$$\|A_\gamma x\|_F \le \frac{2C}{r} \|x\|_E$$

Теорема 4.1. Пусть даны E - банахово пространство, F - линейное нормированное пространство и операторы $\{A_\gamma\} \subset L(E,F)$. Пусть

$$(\forall x \in E)(\exists C \ge 0)(\forall \gamma)\left[\|A_\gamma x\|_F \le C\right]$$

Тогда $(\exists K)(\forall \gamma)\,[\|A_\gamma\| \le K]$, то есть множество операторов $\{A_\gamma\}$ равномерно по γ ограничено в $L(E,F)$.

Доказательство. Определим для каждого $n \in \mathbb{N}$ множество

$$S_n = \left\{ x \in E \mid (\forall \gamma)\left[\|A_\gamma x\|_F \le n\right] \right\}$$

Покажем, что $E = \cup_{n=1}^{\infty} S_n$. Включение $\cup_{n=1}^{\infty} S_n \subset E$ очевидно. Возьмем теперь произвольный $x \in E$. Тогда $(\forall \gamma)\left[\|A_\gamma x\|_F \le C(x)\right]$. Выберем $n \ge C(x)$. Тогда $(\forall \gamma)\left[\|A_\gamma x\|_F \le n\right]$, следовательно, $x \in S_n$. Установлено включение $E \subset \cup_{n=1}^{\infty} S_n$. Необходимое равенство доказано.

Покажем, что множества S_n замкнуты, то есть $\bar{S}_n = S_n$. Пусть $y \in \bar{S}_n$ и последовательность $\{y_k\} \subset S_n$ такая, что $\|y_k - y\|_E \to 0$ при $k \to \infty$. Так как $\|A_\gamma y_k\|_F \le n$ и операторы A_γ непрерывные, то при $k \to \infty$ получим $\|A_\gamma y\|_F \le n$. Следовательно, $y \in S_n$, то есть все множества S_n замкнуты.

Поскольку пространство E полное, то по теореме Бэра E есть множество второй категории. Тогда найдется множество S_m, которое не является нигде не плотным, то есть

$$(\exists B(x_0,\varepsilon_0)\subset E)\,(\forall B(y,\delta)\subset B(x_0,\varepsilon_0))\,[B(y,\delta)\cap S_m\neq\varnothing]\,.$$

Получили $\left(\forall y\in B(x_0,\varepsilon_0)\left[y\in\bar{S}_m\right]\right.$, то есть $B(x_0,\varepsilon_0)\subset\bar{S}_m=S_m$. Далее получим $B[x_0,\varepsilon_0]=\overline{B(x_0,\varepsilon_0)}\subset S_m$. Таким образом, установили

$$(\forall x\in B[x_0,\varepsilon_0])\,(\forall\gamma)\,\left[\|A_\gamma x\|_F\leq m\right]$$

Из леммы 4.1 теперь следует, что $(\forall\gamma)\,[\|A_\gamma\|\leq 2m/\varepsilon_0]$. O

Продемонстрируем одно из применений принципа равномерной ограниченности, установленного в теореме 4.1.

Последовательность операторов $\{A_n\}\subset L(E,F)$ называется сильно фундаментальной, если для любого $x\in E$ последовательность $\{A_nx\}\subset F$ фундаментальна. Пространство $L(E,F)$ называется сильно полным, если для всякой сильно фундаментальной последовательности $\{A_n\}\subset L(E,F)$ найдется оператор $A\subset L(E,F)$ такой, что $A_n\overset{\text{сильно}}{\longrightarrow}A$.

Теорема 4.2. Пусть E,F - банаховы пространства. Тогда пространство $L(E,F)$ сильно полно.

Доказательства. Возьмем произвольную сильно фундаментальную последовательность $\{A_n\}\subset L(E,F)$. В силу полноты пространства F для всякого $x\in E$ последовательность $\{A_nx\}\subset F$ сходится. Таким образом, как и в теореме 3.1 , определен линейный оператор $A:E\to F$, действующий по правилу $Ax=\lim_{n\to\infty}A_nx$.

Покажем ограниченность оператора A. Для каждого $x\in E$ последовательность $\{A_nx\}\subset F$ сходится, а значит ограничена, то есть

$$(\forall x\in E)(\exists C\geq 0)(\forall n\in\mathbb{N})\,[\|A_nx\|_F\leq C]$$

Так как пространство E банахово, то из теоремы 4.1 следует

$$(\exists K\geq 0)(\forall n\in\mathbb{N})\,[\|A_n\|\leq K]$$

Далее для всех $x\in E$ получим $\|A_nx\|_F\leq\|A_n\|\,\|x\|_E\leq K\|x\|_E$. Отсюда при $n\to\infty$ следует $\|Ax\|_F\leq K\|x\|_E$.

Итак, оператор $A\in L(E,F)$ и по определению этого оператора $A_nx\to Ax$ при $n\to\infty$ для любого $x\in E$. Получили $A_n\overset{\text{сильно}}{\longrightarrow}A$.8

- ЗАДАЧА.

4.1. Пусть E - банахово пространство и F - линейное нормированное пространство. Пусть $A,A_n\in L(E,F)(n=1,2,\ldots)$ и операторы A_n при $n\to\infty$ сильно сходятся к оператору A. Пусть $x,x_n\in E$ и $\|x_n-x\|_E\to 0$ при $n\to\infty$. Доказать, что $\|A_nx_n-Ax\|_F\to 0$.

§5. Продолжение оператора по непрерывности

Теорема 5.1. Пусть E - линейное нормированное пространство и F банахово пространство. Линейный оператор $A:D(A)\subset E\to F$ ограничен на своей области определения $D(A)$ и множество $D(A)$ плотно в E. Тогда существует оператор $\widetilde{A}\in L(E,F)$ такой, что:

$$1)\ (\forall x\in D(A))[\widetilde{A}x=Ax],\qquad 2)\ \|\widetilde{A}\|=\|A\|$$

Доказательство. Возьмем произвольный $x\in E$. Так как $\overline{D(A)}=E$, то найдется последовательность $\{x_n\}\subset D(A)$ такая, что $x_n\to x$ при $n\to\infty$. Рассмотрим последовательность $\{Ax_n\}\subset F$. Для всех $n,m\in\mathbb{N}$ элементы $x_n-x_m\in D(A)$ и справедлива оценка

$$\|Ax_n-Ax_m\|_F\leq\|A\|\,\|x_n-x_m\|_E$$

из которой следует фундаментальность последовательности $\{Ax_n\} \subset F$. Поскольку пространство F полное, то последовательность $\{Ax_n\}$ сходится, то есть существует $\lim_{n\to\infty} Ax_n = y(x) \in F$.

Покажем, что элемент $y(x) \in F$ не зависит от выбора последовательности $\{x_n\} \subset D(A)$. Пусть имеем также последовательность $\{x'_n\} \subset D(A)$ такую, что $x'_n \to x$ при $n \to \infty$. Обозначим $\lim_{n\to\infty} Ax_n = a$ и $\lim_{n\to\infty} Ax'_n = b$. Тогда

$$\|a-b\|_F \le \|a - Ax_n\|_F + \|Ax_n - Ax'_n\|_F + \|Ax'_n - b\|_F \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

так как $\|Ax_n - Ax'_n\|_F \le \|A\| \, \|x_n - x'_n\|_E \to 0$ при $n \to \infty$.

Таким образом, на $x \in E$ однозначно определен линейный оператор

$$\widetilde{A}x = y(x) = \lim_{n\to\infty} Ax_n$$

Линейность оператора $\widetilde{A}$ следует из линейности оператора A и соответствующих свойств предела.

Покажем выполнение свойства 1). Если $x \in D(A)$, то при построении последовательности $\{x_n\}$ можно брать все $x_n = x$. Тогда

$$\widetilde{A}x = \lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} Ax = Ax.$$

Покажем выполнение свойства 2). Пусть $x \in E$ и последовательность

$\{x_n\} \subset D(A)$ такая, что $x_n \to x$ при $n \to \infty$. Из оценки $\|Ax_n\|_F \le \|A\| \, \|x_n\|_E$

при $n \to \infty$ получим $\|\widetilde{A}x\|_F \le \|A\| \|x\|_E$. Таким образом, $\widetilde{A} \in L(E,F)$ и $\|\widetilde{A}\| \le \|A\|$ Получим обратную оценку.

$$\|\widetilde{A}\| = \sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|_E=1}} \|\widetilde{A}x\|_F \ge \sup_{\substack{x\in D(A)\\ \|x\|_E=1}} \|\widetilde{A}x\|_F = \sup_{\substack{x\in D(A)\\ \|x\|_E=1}} \|Ax\|_F = \|A\|.$$

Итак, $\|\widetilde{A}\| = \|A\|$.$\odot$

Построенный оператор $\widetilde{A}$ называют продолжением оператора A по непрерывности на все пространство.

- ЗАДАЧА.

5.1. Пусть H - гильбертово пространство и $M \subset H$ - линейное многообразие. Пусть A - линейный ограниченный оператор, заданный на M со значениями в банаховом пространстве E. Показать, что оператор A можно продолжить на все пространство H с сохранением нормы.

§6. Обратимый и обратный операторы

Пусть E, F - линейные нормированные пространства и A - линейный (возможно неограниченный) оператор из E в F, область определения $D(A) \subset E$ и множество значений $R(A) \subset F$, то есть $A : D(A) \subset E \to R(A) \subset F$.

Оператор A называется обратимым, если

$$(\forall y \in R(A))(\exists x \in D(A) \text{ единственный })[Ax = y].$$

Таким образом, в случае обратимого оператора A определено отображение A^{-1} из F в E с областью определения $D\left(A^{-1}\right) = R(A)$ и множеством значений $R\left(A^{-1}\right) = D(A)$ такое, что для $y \in R(A)$ определен $A^{-1}y = x$, где $x \in D(A)$ такой единственный, что $Ax = y$.

Теорема 6.1. Пусть E,F - линейные нормированные пространства. Отображение A^{-1}, определенное по линейному обратимому оператору $A : D(A) \subset E \to R(A) \subset F$, является линейным оператором.

Доказательство. Напомним, что $D(A)$ и $R(A)$ являются линейными многообразиями в пространствах E и F соответственно.

Пусть выбраны элементы $y_1, y_2 \in R(A)$ и числа α_1, α_2. Обозначим

$$x_1 = A^{-1}y_1 \in D(A), \quad x_2 = A^{-1}y_2 \in D(A).$$

В силу линейности и обратимости оператора A получим

$$A\left(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2\right) = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2.$$

Из определения отображения A^{-1} следует

$$A^{-1}\left(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2\right) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \alpha_1 A^{-1} y_1 + \alpha_2 A^{-1} y_2.$$

Линейный оператор A^{-1}, определенный по линейному обратимому оператору A, называется оператором обратным к оператору A.

Из определения оператора A^{-1} следует, что

$$(\forall y \in R(A))\left[AA^{-1}y = y\right], \quad (\forall x \in D(A))\left[A^{-1}Ax = x\right].$$

Для линейного оператора A определим множество

$$N(A) = \{x \in D(A) \mid Ax = \Theta\}$$

называемое ядром или нуль-многообразием оператора A. Нетрудно видеть, что $N(A)$ - линейное многообразие в пространстве E.

Теорема 6.2. Пусть E, F - линейные нормированные пространства и $A : D(A) \subset E \to F$ линейный оператор. Оператор A обратим тогда *и* только тогда, когда $N(A) = \{\Theta\}$.

Доказательство. Если оператор A обратим, то уравнение $Ax = \Theta \in R(A)$ имеет единственное решение $x = A^{-1}\Theta = \Theta \in D(A)$, то есть $N(A) = \{\Theta\}$.

Пусть теперь $N(A) = \{\Theta\}$. Предположим для $y \in R(A)$ существуют $x_1, x_2 \in D(A)$ такие, что $Ax_1 = y$ и $Ax_2 = y$. Тогда $A\left(x_1 - x_2\right) = \Theta$, что означает $x_1 - x_2 \in N(A)$. Следовательно, $x_1 = x_2$. Итак, элемент $x \in D(A)$ такой, что $Ax = y$ единственный. Значит оператор A обратим. ◯

Теорема 6.3. Пусть E, F - линейные нормированные пространства и $A : D(A) \subset E \to F$ линейный оператор. Оператор A обратим и оператор A^{-1} ограничен на $R(A)$ тогда и только тогда, когда

$$(\exists m > 0)(\forall x \in D(A))\left[\|Ax\|_F \geq m\|x\|_E\right].$$

Доказательство. Пусть оператор A обратим и оператор A^{-1} ограничен на $R(A)$. Тогда

$$(\exists C > 0)(\forall y \in R(A))\left[\left\|A^{-1}y\right\|_E \leq C\|y\|_F\right]$$

Возьмем произвольный $x \in D(A)$ и пусть $y = Ax \in R(A)$. Тогда $x = A^{-1}y$ и $\|x\|_E \leq C\|Ax\|_F$. Следовательно,

$$(\exists C > 0)(\forall x \in D(A))\left[\|Ax\|_F \geq \frac{1}{C}\|x\|_E\right]$$

Пусть теперь выполнено (6.1), из которого сразу следует $N(A) = \{\Theta\}$, то есть оператор A обратим и существует обратный A^{-1}. Покажем ограниченность на $R(A)$ обратного оператора. Возьмем $y \in R(A)$ и $x = A^{-1}y \in D(A)$. Тогда из (6.1) $\|Ax\|_F \geq m\|x\|_E$. Но $Ax = y$, поэтому $\|y\|_F \geq m\left\|A^{-1}y\right\|_E$. Получили ограниченность на $R(A)$ оператора A^{-1} и $\|A^{-1}\| \leq 1/m$. ⊙ Пусть E, F - линейные нормированные пространства и линейный оператор $A : D(A) \subset E \to F$. Оператор A называется непрерывно обратимым, если оператор A обратим и обратный $A^{-1} \in L(F, E)$.

Лемма 6.1. Пусть E, F - линейные нормированные пространства. Оператор $A \in L(E, F)$, и пусть существует оператор $B \in L(F, E)$ такой, что $BA = I_E$ и $AB = I_F$ (операторы I_E и I_F тождественные на E и F соответственно). Тогда оператор A непрерывно обратим и $A^{-1} = B$.

Доказательство. Пусть элемент $x \in N(A)$, то есть $Ax = \Theta$. Следовательно, $x = I_E x = BAx = B\Theta = \Theta$. Получили $N(A) = \{\Theta\}$ и оператор A обратим.

Возьмем $y \in F$. Тогда $y = I_F y = ABy = A(By) \in R(A)$, то есть $R(A) = F$. Рассмотрим $A^{-1}y = A^{-1}ABy = By$. Следовательно, $A^{-1} = B \in L(F,E)$. $\bigcirc$

Теорема 6.4. Пусть E - банахово пространство и оператор $A \in L(E)$ такой, что $\|A\| \leq q < 1$. Тогда оператор $I - A$ непрерывно обратим. Справедливо представление $(I-A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$ и оценка $\|(I-A)^{-1}\| \leq (1-q)^{-1}$.

Доказательство. Рассмотрим в $L(E)$ операторный ряд $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$, где оператор $A^0 = I$. Этот ряд сходится абсолютно, так как $\left\|A^k\right\| \leq \|A\|^k \leq q^k$, а числовой ряд $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ сходится. Так как $L(E)$ банахово пространство, то в $L(E)$ сходится и ряд $\sum_{k=0}^{\infty} A^k = S \in L(E)$.

Обозначим $\sum_{k=0}^{n} A^k = S_n \in L(E)$. Заметим, что $S_n(I-A) = I - A^{n+1}$. В последнем равенстве переходим к пределу при $n \to \infty$. Так как при $n \to \infty$

$$\left\|I - \left(I - A^{n+1}\right)\right\| = \left\|A^{n+1}\right\| \leq q^{n+1} \to 0,$$
$$\|S(I-A) - S_n(I-A)\| \leq \|S - S_n\| \, \|I - A\| \to 0,$$

то в пределе получим $S(I-A) = I$. Аналогично доказывается $(I-A)S = I$.

Из леммы 6.1 теперь следует непрерывная обратимость оператора $I - A$ и $(I-A)^{-1} = S \in L(E)$. Получим необходимую оценку

$$\left\|(I-A)^{-1}\right\| = \|S\| = \lim_{n\to\infty} \|S_n\| \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left\|A^k\right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} q^k = (1-q)^{-1}.$$

Замечание. Более сильное утверждение получается, если вместо условия $\|A\| \leq q < 1$, обеспечивающего сходимость ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \|A\|^k$, воспользоваться признаком Коши сходимости этого ряда $\lim_{k\to\infty} \left\|A^k\right\|^{1/k} < 1$. Известно (напр.,[8]), что такой предел $r(A) = \lim_{k\to\infty} \left\|A^k\right\|^{1/k}$ существует и называется спектральным радиусом оператора A. Из определения спектрального радиуса $r(A)$ видно, что $r(A) \leq \|A\|$. Следствие 6.1. Пусть E - банахово пространство, оператор $A \in L(E)$ и его спектральный радиус $r(A) < 1$. Тогда оператор $I - A$ непрерывно обратим и справедливо представление $(I-A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$.

- ЗАДАЧИ.

6.1. В пространстве l_2 рассмотрим операторы A и B, переводящие элементы $x = (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots)$ в $Ax = (0, x_1, x_2, \dots)$ и $Bx = (x_2, x_3, \dots)$ соответственно. Являются ли операторы A и B обратимыми ?

6.2. Рассмотрим оператор $A : C[0,1] \to C[0,1]$, заданный выражением

$$Ax(t) = \int_0^t x(s)ds$$

а) Что представляет собой $R(A)$?

б) Существует ли обратный оператор и ограничен ли он ?

6.3. Показать, что соответствующие операторы $A : C[0,1] \to C[0,1]$ непрерывно обратимы и найти обратные: а) $Ax(t) = x(t) + \int_0^t x(s)ds$ б) $Ax(t) = x(t) - \int_0^1 tsx(s)ds$ в) $Ax(t) = x(t) + \int_0^1 \exp(t+s)x(s)ds$.

6.4. Пусть E - линейное нормированное пространство и $A : E \to E$ такой линейный оператор, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} A^k x$ сходится для всех $x \in E$.

а) Доказать, что оператор $I - A$ обратим.

б) Пусть, кроме того, $A \in L(E)$. Доказать, что тогда для любого $x \in E$ выполнено $(I-A)^{-1}x = \sum_{k=0}^{\infty} A^k x$.

6.5. Пусть E - банахово пространство, оператор $A \in L(E)$ и $\|I - A\| < 1$. Доказать, что оператор A непрерывно обратим.

6.6. Пусть E - банахово пространство. Доказать, что в пространстве $L(E)$ множество всех непрерывно обратимых операторов открыто.

§ 7. Теорема Банаха об обратном операторе

Теорема 7.1(Банах). Пусть E, F - банаховы пространства. Пусть оператор $A \in L(E,F)$ такой, что $N(A) = \{\Theta\}$ и $R(A) = F$. Тогда оператор A непрерывно обратим, то есть существует $A^{-1} \in L(F,E)$.

Обратим внимание, что существование оператора $A^{-1} : F \to E$ очевидно, так как $N(A) = \{\Theta\}$. Следует установить ограниченность оператора A^{-1}. Рассмотрим прежде вспомогательную лемму, при доказательстве которой существенно используются три простых факта, которые сформулируем в виде задач.

- ЗАДАЧИ.

7.1. Пусть E - линейное нормированное пространство и множество $M \subset E$. Тогда $(\forall\lambda-$ числа $)[\lambda\bar{M} = \overline{\lambda M}]$.

7.2. Пусть E - линейное нормированное пространство и шар $B[x,r] \subset E$. Тогда $(\forall\lambda-$ числа $)[\lambda B[x,r] = B[\lambda x, |\lambda| r]]$.

7.3. Пусть E - линейное нормированное пространство и шар $B[x,r] \subset E$. Тогда $B[x,r] - B[x,r] = B[\Theta, 2r]$.

Лемма 7.1. Пусть E - банахово пространство и F - линейное нормированное пространство. Пусть задан линейный оператор $T : E \to F$ (возможно неограниченный). Определим множество $S = \{x \in E \mid \|Tx\|_F \le 1\}$. Тогда

$$(\exists c > 0)(\forall r > 0)[B[\Theta, r] \subset \overline{rcS}]$$

Доказательство. Для $k \in \mathbb{N}$ определим множества $kS = \{kx \mid x \in S\}$. Покажем, что $E = \cup_{k=1}^{\infty} kS$. Включение $\cup_{k=1}^{\infty} kS \subset E$ очевидно. Установим обратное включение. Пусть $x \in E$. Тогда $(\exists k \in \mathbb{N})\,[\|Tx\|_F \le k]$. Заметим, что $\|T(x/k)\|_F \le 1$, то есть $x/k \in S$. Следовательно, $x = k(x/k) \in kS$. Установили $E \subset \cup_{k=1}^{\infty} kS$.

Так как пространство E банахово, то E есть множество второй категории, следовательно найдется множество $mS (m \in \mathbb{N})$, которое не является нигде не плотным. Таким образом,

$$(\exists B(x_0, r_0) \subset E)\,(\forall B(x, \varepsilon) \subset B(x_0, r_0))\,[B(x, \varepsilon) \cap mS \neq \varnothing]$$

Итак, шар $B(x_0, r_0) \subset \overline{mS}$. Отсюда следует $B[x_0, r_0] \subset \overline{mS} = m\bar{S}$ (задача 7.1). Далее получим (задача 7.2)

$$B\left[\frac{x_0}{m}, \frac{r_0}{m}\right] = \frac{1}{m} B[x_0, r_0] \subset \frac{1}{m}(m\bar{S}) = \bar{S}$$

Воспользуемся теперь задачей 7.3

$$B\left[\Theta, 2\frac{r_0}{m}\right] = B\left[\frac{x_0}{m}, \frac{r_0}{m}\right] - B\left[\frac{x_0}{m}, \frac{r_0}{m}\right] \subset \bar{S} - \bar{S}.$$

Установим теперь, что $\bar{S} - \bar{S} \subset 2\bar{S}$. Пусть элемент $z \in \bar{S} - \bar{S}$, то есть $z = x - y$, где $x, y \in \bar{S}$. Возьмем последовательности $\{x_n\}, \{y_n\} \subset S$ такие, что $x_n \to x$ и $y_n \to y$ при $n \to \infty$. Тогда $z_n = x_n - y_n \to x - y = z$. Рассмотрим

$$\|Tz_n\|_F = \|Tx_n - Ty_n\|_F \le \|Tx_n\|_F + \|Ty_n\|_F \le 1 + 1 = 2.$$

В таком случае, $z_n \in 2S$. Но тогда $z \in \overline{2S} = 2\bar{S}$. Получили $B[\Theta, 2r_0/m] \subset 2\bar{S}$. Далее рассмотрим шар

$$B[\Theta, 1] = \frac{m}{2r_0} B\left[\Theta, \frac{2r_0}{m}\right] \subset \frac{m}{2r_0} 2\bar{S} = \frac{m}{r_0}\bar{S}.$$

Обозначим $m/r_0 = c$. Итак, $B[\Theta, 1] \subset c\bar{S}$.

Теперь возьмем произвольное $r > 0$ и получим

$$B[\Theta, r] = rB[\Theta, 1] \subset rc\bar{S} = \overline{rcS}$$

Доказательство теоремы 7.1. Как отмечалось выше, определен оператор $A^{-1} : F \to E$. Определим множество $P = \{y \in F \mid \|A^{-1}y\|_E \leq 1\}$. Возьмем произвольный шар $B[\Theta, r] \subset F$. Так как пространство F банахово, то по лемме 7.1

$$(\exists c > 0)(\forall r > 0)[B[\Theta, r] \subset \overline{rcP}]$$

Пусть $y \in B[\Theta, 1] \subset F$. Так как $B[\Theta, 1] \subset \overline{cP}$, то найдется $y_1 \in cP$, что $\|y - y_1\|_F < 2^{-1}$. Так как $y - y_1 \in B\left[\Theta, 2^{-1}\right] \subset \overline{2^{-1}cP}$, то найдется $y_2 \in 2^{-1}cP$, что $\|(y - y_1) - y_2\|_F < 2^{-2}$. Элемент $y - y_1 - y_2 \in B\left[\Theta, 2^{-2}\right] \subset \overline{2^{-2}cP}$, поэтому найдется $y_3 \in 2^{-2}cP$, что $\|(y - y_1 - y_2) - y_3\|_F < 2^{-3}$ и так далее.

По построению для всех $i \in \mathbb{N}$ элементы $y_i \in 2^{1-i}cP$, следовательно, $\|A^{-1}y_i\|_E \leq c2^{1-i}$. Кроме того, $\left\|y - \sum_{i=1}^{k} y_i\right\|_F < 2^{-k} \to 0$ при $k \to \infty$. Следовательно, $y = \sum_{i=1}^{\infty} y_i$.

Обозначим $x_i = A^{-1}y_i$. Рассмотрим в E ряд $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$. Этот ряд абсолютно сходится, так как $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|_E \leq c\sum_{i=1}^{\infty} 2^{1-i} = 2c$. Пространство E банахово, поэтому $\sum_{i=1}^{\infty} x_i = x \in E$. В силу непрерывности оператора A получим

$$Ax = \sum_{i=1}^{\infty} Ax_i = \sum_{i=1}^{\infty} y_i = y$$

В таком случае, $x = A^{-1}y$ и

$$\left\|A^{-1}y\right\|_E = \|x\|_E = \left\|\sum_{i=1}^{\infty} x_i\right\|_E \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|_E \leq 2c.$$

Из последней оценки следует $\|A^{-1}\| \leq 2c$, то есть $A^{-1} \in L(F, E)$.$\odot$

- ЗАДАЧА.

7.4. Пусть на линейном пространстве E заданы две нормы: $\|x\|_1$ и $\|x\|_2$. По отношению к каждой из них E полное пространство. Предположим, что $(\exists c > 0)(\forall x \in E)\left(\|x\|_1 \leq c\|x\|_2\right)$. Доказать, что нормы $\|x\|_1$ и $\|x\|_2$ эквивалентны.