1. Неориентированные графы, степени, изоморфизм

- **Граф** (математическая структура для представления связей между объектами):
  - Обозначается как $G = (X, \Gamma)$.
  - Состоит из:
    1° Непустое множество X (множество всех вершин графа).
    2° Отображение Γ множества X в X (правило, определяющее связи между вершинами).
- **Элементы графа**:
  - **Вершина** (точка, узел графа): Каждый элемент множества X.
  - **Дуга** (направленное ребро): Пара элементов (x, y), где $y \in \Gamma x$ (показывает направленную связь от x к y).
- **Множество дуг** (все связи в графе):
  - Обозначается через U (полный набор всех связей).
  - Дуги обозначаются буквами α, β, ω (при необходимости с индексами).

Определение. Степень вершины v_i (обозн. d_i или $\deg v_i$) -- число рёбер, инцидентных v_i (количество связей, примыкающих к вершине).

Теорема 2.1 (Эйлера) (фундаментальное свойство графов). Сумма степеней вершин графа равна удвоенному числу рёбер:

$\sum_i \deg v_i = 2q$

Следствие 2.1(а). Число вершин с нечётными степенями всегда чётно (важно для существования эйлеровых путей).

Ограничения степеней:

В (p,q)-графе (где p -- число вершин, q -- число рёбер): $0 \leq \deg v \leq p - 1$ для любой вершины v

Обозначения:

- $\delta(G) = \min \deg G$ -- минимальная степень (наименьшее число связей у вершины)
- $\Delta(G) = \max \deg G$ -- максимальная степень (наибольшее число связей у вершины)

Определение. Регулярный (однородный) граф (все вершины имеют одинаковое число связей): $\delta(G) = \Delta(G) = r = \deg G$

Классификация регулярных графов (по количеству связей у каждой вершины):

- Степень 0: граф без рёбер (изолированные точки)
- Степень 1: компоненты -- одиночные рёбра (пары связанных вершин)
- Степень 2: компоненты -- циклы (каждая вершина связана ровно с двумя другими)
- Степень 3: кубические графы (каждая вершина имеет ровно три связи)

Следствие 2.1(б). Каждый кубический граф имеет чётное число вершин (следует из теоремы Эйлера).

Специальные вершины:

- Изолированная: $\deg v = 0$ (вершина без связей)
- Концевая (висячая): $\deg v = 1$ (вершина с единственной связью)

2. Маршруты, связность, метрика графа

Определение. *Маршрут* в графе G (последовательность переходов по вершинам и рёбрам) -- чередующаяся последовательность вершин и рёбер $v_0, x_1, v_1, \ldots, x_n, v_n$, где:

- Начинается и заканчивается вершиной (точкой графа)
- Каждое ребро инцидентно (напрямую соединяет) предшествующей и следующей вершинам

Обозначение: $(v_0 - v_n)$-маршрут (путь от вершины v_0 до v_n) записывается как $v_0 v_1 v_2 \ldots v_n$

Классификация маршрутов:

- *Замкнутый*: $v_0 = v_n$ (начальная и конечная вершины совпадают)
- *Открытый*: $v_0 \neq v_n$ (начальная и конечная вершины различны)
- *Цепь* (trail): все рёбра различны (по каждому ребру проходим не более одного раза)
- *Простая цепь* (path): все вершины и рёбра различны (нигде не повторяемся)
- *Цикл*: замкнутая цепь (маршрут возвращается в начальную точку)
- *Простой цикл*: замкнутый маршрут с $n \geq 3$ различными вершинами (замкнутый путь без повторений вершин, кроме начальной/конечной)

Длина маршрута $v_0 v_1 \ldots v_n = n$ (количество пройденных рёбер)

Важные метрики:

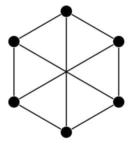
- *Обхват графа* $g(G)$: длина кратчайшего простого цикла (минимальное количество рёбер в замкнутом пути без повторений)
- *Окружение графа* $c(G)$: длина длиннейшего простого цикла (максимальное количество рёбер в замкнутом пути без повторений)

Примечание: $g(G)$ и $c(G)$ не определены для графов без циклов (для деревьев и лесов).

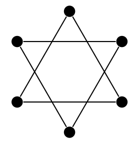
3. Самодополнительные графы

Определение. *Дополнение графа* $\overline{G}$ (граф с теми же вершинами, но противоположными связями):

- Множество вершин: $V(\overline{G}) = V(G)$
- Две вершины смежны в $\overline{G}$ $\Leftrightarrow$ несмежны в G



G



$\overline{G}$

Определение. *Самодополнительный граф* -- граф, изоморфный своему дополнению (структура графа совпадает со структурой его дополнения).

Полный граф K_p (все вершины попарно соединены):

- Содержит p вершин
- Имеет $\binom{p}{2}$ рёбер
- Является регулярным степени $p - 1$
- Частный случай: K_3 -- треугольник

Вполне несвязный граф $\overline{K_p}$ -- дополнение полного графа (регулярный граф степени 0).

4. Экстремальные графы

Теорема 2.3 (Турана) (о максимальном числе рёбер в графе без треугольников):
Наибольшее число рёбер у графов с r вершин без треугольников равно $\lfloor r^2/4 \rfloor$.

Доказательство (по индукции для чётных r):

1. База: очевидна для малых r
2. Шаг: для $r = 2n+2$, где утверждение верно для всех чётных $r \leq 2n$:
   - Пусть G -- граф с $p = 2n+2$ вершинами без треугольников
   - Существуют смежные вершины u, v (граф не вполне несвязный)
   - В подграфе $G' = G - \{u, v\}$ максимум n^2 рёбер
   - Нет вершины w, смежной с u и v одновременно
   - Если w смежна с k вершинами G', то v смежна максимум с $(2n-k)$ вершинами
   - Всего рёбер: $n^2 + k + (2n - k) + 1 = n^2 + 2n + 1 = p^2/4$

Конструктивное доказательство существования:
Для чётного p $(p, p^2/4)$-граф без треугольников строится так:

- Берём два множества V_1 и V_2 по $p/2$ вершин
- Соединяем каждую вершину из V_1 с каждой из V_2

Примечания:

- Доказательство существования чисел $r(m, n)$ см. у М. Холла
- По определению бесконечный граф не является графом
- Обзор бесконечных графов: см. Нэш-Вильямс

5. Числа Рамсея

Мотивационная задача: В любой группе из 6 человек найдутся либо 3 попарно знакомых, либо 3 попарно незнакомых (переформулировка в терминах графов).

Теорема 2.2 (о существовании треугольника): В графе G с 6 вершинами либо G, либо $\overline{G}$ содержит треугольник.

Доказательство: Пусть v -- произвольная вершина графа G. Среди 5 оставшихся вершин найдутся 3 вершины u_1, u_2, u_3, смежные с v в G (иначе они были бы смежны в $\overline{G}$). Если любые две из u_1, u_2, u_3 смежны в G -- получаем треугольник с v. Если нет -- u_1, u_2, u_3 образуют треугольник в $\overline{G}$.

Определение. *Число Рамсея* $r(m,n)$ (минимальное число вершин, гарантирующее наличие либо K_m, либо K_n):

- Симметричность: $r(m,n) = r(n,m)$
- Верхняя оценка (Эрдёш-Секереш): $r(m,n) \leq \binom{m+n-2}{m-1}$

Теорема Рамсея (для бесконечных графов): Каждый бесконечный граф содержит либо $\aleph_0$ попарно смежных вершин, либо $\aleph_0$ попарно несмежных вершин.

Примечание: Задача нахождения точных значений $r(m,n)$ остаётся открытой. Известные значения приведены в таблице 2.1.

6. Эйлеровы графы

Определение. *Эйлеров граф* -- граф, содержащий цикл со всеми вершинами и рёбрами (имеет эйлеров цикл). Обязательно связный.

Теорема 7.1 (критерий эйлеровости). Для связного графа G эквивалентны:

1. G -- эйлеров граф
2. Все вершины имеют чётную степень
3. Рёбра можно разбить на простые циклы

Доказательство:

(1)⇒(2): В эйлеровом цикле каждое прохождение вершины даёт $+2$ к её степени. Каждое ребро используется один раз ⇒ степени чётны.

(2)⇒(3): В связном графе с чётными степенями:

- Найдём простой цикл Z
- Удалим его рёбра -- получим граф G_1 с чётными степенями
- Повторяем до пустого графа G_n

(3)⇒(1): Имея разбиение на циклы:

- Берём цикл Z_1
- Находим цикл Z_2 с общей вершиной v
- Строим замкнутую цепь из Z_1 и Z_2
- Продолжаем до полного эйлерова цикла

Следствие 7.1(а). В связном графе с $2n$ вершинами нечётной степени ($n \geq 1$) рёбра можно разбить на n открытых цепей.

Следствие 7.1(б). В связном графе с двумя вершинами нечётной степени существует открытая цепь, содержащая все рёбра (начинается и заканчивается в вершинах нечётной степени).

7. Деревья

Основные определения: *Ациклический граф* -- граф без циклов. *Дерево* -- связный ациклический граф. *Лес* -- граф без циклов (компоненты -- деревья).

Теорема 4.1. Для графа G эквивалентны: 1) G -- дерево 2) любые две вершины соединены единственной простой цепью 3) G связен и $p = q+1$ 4) G ациклический и $p = q+1$ 5) G ациклический, и добавление любого ребра создаёт ровно один цикл 6) G связный, не K_p при $p \geq 3$, добавление ребра создаёт один цикл 7) G не $K_3 \cup K_1$ и не $K_3 \cup K_2$, $p = q + 1$, добавление ребра создаёт один цикл

Доказательство (схема): 1⇒2: От противного: две цепи образуют цикл 2⇒3: Индукция по числу вершин 3⇒4: От противного: цикл длины n требует $q \geq p$ 4⇒5: Единственность компоненты из $p = q + k$ 5⇒6: K_p при $p \geq 3$ содержит цикл 6⇒7: Анализ возможных циклов 7⇒1: Исключение случаев с циклами

Следствие 4.1(а). В нетривиальном дереве есть минимум две висячие вершины. *Доказательство:* Из $\sum d_i = 2(p-1)$ в дереве.

8. Диаметр и радиус графа

Определение. *Расстояние* $d(u,v)$ между вершинами (длина кратчайшей простой цепи):

$$d(u,v) = \begin{cases} \text{длина кратчайшей } (u\text{-}v)\text{-цепи}, & \text{если вершины соединены} \\ \infty, & \text{если вершины не соединены} \end{cases}$$

Свойства метрики (для связного графа): 1) $d(u,v) \geq 0$; $d(u,v) = 0 \Leftrightarrow u = v$ (неотрицательность) 2) $d(u,v) = d(v,u)$ (симметричность) 3) $d(u,v) + d(v,w) \geq d(u,w)$ (неравенство треугольника)

Термины: • *Геодезическая* -- кратчайшая простая (u-v)-цепь • *Диаметр графа* $d(G)$ -- длина самой длинной геодезической

Степени графа: Для графа G определяется G^k (k-я степень): • $V(G^k) = V(G)$ (те же вершины) • Вершины u,v смежны в $G^k \Leftrightarrow d(u,v) \leq k$ в G *Примеры:* $C_5^2 = K_5$, $P_4^2 = K_1 + K_3$

9. Хроматическое число графа

Определение. *p-хроматический граф* -- граф, вершины которого можно раскрасить в p цветов так, чтобы смежные вершины имели разные цвета.

Хроматическое число $\chi(G)$ -- минимальное p, при котором граф p-хроматический.

Хроматический класс -- минимальное число цветов q для раскраски рёбер без одинаковых смежных рёбер.

Теорема о двудольных графах. Граф двудольный (χ(G)=2) ⊠ не содержит циклов нечётной длины.

Доказательство:
(⇒) Алгоритм раскраски в 2 цвета: 1) Выбираем вершину a, красим в синий 2) Смежные с синими красим в красный, с красными -- в синий 3) Отсутствие нечётных циклов гарантирует корректность

(⇐) От противного: в двудольном графе нельзя раскрасить нечётный цикл в 2 цвета.

Теорема 4. Для симметрического графа G эквивалентны: 1) G является p-хроматическим 2) Существует функция Гранди g(x) с $\max g(x) \leq p - 1$

Теорема 5. Для графов G (p+1-хром.) и H (q+1-хром.): $\chi(G \times H) = r + 1$, где r = maxp'+q': p'⊠p, q'⊠q

Теорема 6. Для графов G и H с χ(G)=p, χ(H)=q: $\chi(G \times H) = \min\{p,q\}$

Важное свойство: Для плоских графов χ(G)⊠5 (достаточно 5 цветов для раскраски карты).

10. Цикломатическое число графа

Определение. *Мультиграф* (X,U) -- пара из множества вершин X и множества рёбер U, где пара вершин может соединяться несколькими рёбрами.

Важные числовые характеристики: Для мультиграфа G с n вершинами, m рёбрами, p компонентами:

$$\rho(G) = n - p \quad \text{(ранг графа)}$$

$$\nu(G) = m - n + p = m - \rho(G) \quad \text{(цикломатическое число)}$$

Теорема 1. При добавлении ребра между a и b: Если a,b соединены цепью или совпадают:

$$\rho(G') = \rho(\bar{G}), \quad \nu(G') = \nu(\bar{G}) + 1$$

Иначе:

$$\rho(G) = \rho(\bar{G}) + 1, \quad \nu(G') = \nu(\bar{G})$$

Векторное представление циклов: • Каждому ребру присваивается ориентация • Для цикла μ: $c^k = r_k - s_k$, где r_k,s_k -- число проходов по/против ориентации • Цикл представляется вектором $(c^1, \ldots, c^m)$ • Циклы независимы $\Leftrightarrow$ их векторы линейно независимы

Теорема 2. Цикломатическое число $\nu(G)$ равно максимальному количеству независимых циклов.

Следствия: 1) $\nu(G) = 0 \Leftrightarrow$ граф без циклов 2) $\nu(G) = 1 \Leftrightarrow$ граф содержит ровно один цикл

Теорема 3. В сильно связном графе цикломатическое число равно максимальному количеству независимых контуров.