Линейный оператор

Пусть E, F - линейные нормированные пространства. Отображение A назовем отображением из E в F, если для A область определения $D(A) \subset E$, а множество значений $D(A) \subset F$. В таком случае пишем $A : D(A) \subset E \to F$.

Предположим, что пространства E, F оба вещественные, или оба комплексные. Отображение A из E в F называется линейным оператором, если:

1. $D(A)$ - линейное многообразие в E;
2. $A(\lambda x) = \lambda Ax$, где $x \in D(A)$ и λ число;
3. $A(x + y) = Ax + Ay$, где $x, y \in D(A)$.

Ограниченный линейный оператор

Линейный оператор $A : D(A) \subset E \to F$ называется ограниченным на $D(A)$, если

$$(\exists C \geq 0)(\forall x \in D(A)) \left[\|Ax\|_F \leq C\|x\|_E\right].$$

Норма линейного ограниченного оператора

Пусть E, F - линейные нормированные пространства. Пусть Линейный оператор $A : D(A) \subset E \to F$ ограниченный на $D(A)$. Тогда из (1.1) следует, что числовое множество

$$M = \left\{ \frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E} \mid (x \in D(A)) \wedge (x \neq \Theta) \right\}$$

ограничено сверху константой $C \geq 0$. Обозначим

$$\|A\| = \sup M = \sup_{\substack{x \in D(A) \\ x \neq \Theta}} \frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E} \leq C < \infty.$$

Величина $\|A\|$ называется нормой оператора A на $D(A)$.

$L(E, F)$ **множество всех линейных ограниченных операторов**

Пусть E, F - линейные нормированные пространства, причем оба вещественные или оба комплексные. Через $L(E, F)$ обозначим множество всех линейных ограниченных операторов $A : E \to F$. В случае $F = E$ вместо $L(E, E)$ пишут $L(E)$.

Определим на множестве $L(E, F)$ операции умножения на число и сложение. Считаем для числа λ и $A, B \in L(E, F)$ операторы λA и $A + B$ такие, что для $x \in E$

$$(\lambda A)x = (\lambda)Ax, \quad (A + B)x = Ax + Bx.$$

Сильно фундаментальная последовательность Последовательность операторов $\{A_n\} \subset L(E, F)$ называется сильно фундаментальной, если для любого $x \in E$ последовательность $\{A_n x\} \subset F$ фундаментальна.

Сильно полное пространство Пространство $L(E, F)$ называется сильно полным, если для всякой сильно фундаментальной последовательности $\{A_n\} \subset L(E, F)$ найдется оператор $A \subset L(E, F)$ такой, что $A_n \xrightarrow{\text{сильно}} A$.

$\widetilde{A}$ **Продолжение оператора по непрерывности на всё пространство** Пусть E - линейное нормированное пространство и F банахово пространство. Линейный оператор $A : D(A) \subset E \to F$

ограничен на своей области определения $D(A)$ и множество $D(A)$ плотно в E. Тогда существует оператор $\widetilde{A} \in L(E, F)$ такой, что:

$$1)\ (\forall x \in D(A))[\widetilde{A}x = Ax], \quad 2)\ \|\widetilde{A}\| = \|A\|$$

Обратимый оператор Оператор A называется обратимым, если

$$(\forall y \in R(A))(\exists x \in D(A) \text{ единственный })[Ax = y].$$

Ядро оператора или нуль-многообразие

Для линейного оператора A определим множество

$$N(A) = \{x \in D(A) \mid Ax = \Theta\}$$

называемое ядром или нуль-многообразием оператора A. Нетрудно видеть, что $N(A)$ - линейное многообразие в пространстве E.

Непрерывно обратимый оператор

Оператор A называется непрерывно обратимым, если оператор A обратим и обратный $A^{-1} \in L(F, E)$.

Резолъвента оператора

Пусть E - комплексное линейное нормированное пространство и задан линейный оператор $A : D(A) \subset E \to E$. Для числа $\lambda \in \mathbb{C}^1$ рассмотрим оператор $A - \lambda I$. Если оператор $A - \lambda I$ непрерывно обратим, то есть существует обратный оператор $(A - \lambda I)^{-1} \in L(E)$, то оператор $(A - \lambda I)^{-1} = R(A, \lambda)$ называется резолъвентой оператора A, а соответствующее значение λ называется регулярным значением оператора A.

Спектр оператора

Множество всех регулярных значений оператора A обозначают $\rho(A)$. Множество чисел $\mathbb{C}^1 \backslash \rho(A) = \sigma(A)$ называется спектром оператора A.

Собственные значения оператора

Числа $\lambda \in \sigma(A)$ такие, что $N(A - \lambda I) \neq \{\Theta\}$ называются собственными значениями оператора A. Соответствующие элементы $x \in E(x \neq \Theta)$ такие, что $(A - \lambda I)x = \Theta$ или $Ax = \lambda x$, называются собственными элементами.

Замкнутый оператор

Пусть E, F - линейные нормированные пространства и линейный оператор $A : D(A) \subset E \to F$. Оператор A называется замкнутым, если

$(\forall \{x_n\} \subset D(A)) \left[\left(x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0\right) \wedge \left(Ax_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} y_0\right) \Rightarrow (x_0 \in D(A)) \wedge (Ax_0 = y_0)\right].$

График оператор

Пусть теперь задан линейный оператор $A : D(A) \subset E \to F$. Определим в $E \times F$ множество

$$\Gamma(A) = \{(x, Ax) \mid x \in D(A)\} \subset E \times F$$

которое называется графиком оператора A. Легко проверить, что множество $\Gamma(A)$ есть линейное многообразие в $E \times F$.