# § 1. Определения и простейшие свойства

Пусть $E, F$ - линейные нормированные пространства. Отображение $A$ назовем отображением из $E$ в $F$, если для $A$ область определения $D(A) \subset E$, а множество значений $D(A) \subset F$. В таком случае пишем $A : D(A) \subset E \to F$.

Предположим, что пространства $E, F$ оба вещественные, или оба комплексные. Отображение $A$ из $E$ в $F$ называется **линейным оператором**, если:

1. $D(A)$ - линейное многообразие в $E$;

2. $A(\lambda x) = \lambda Ax$, где $x \in D(A)$ и $\lambda$ число;

3. $A(x + y) = Ax + Ay$, где $x, y \in D(A)$.

Нетрудно показать, что для линейного оператора $A$ множество значений $D(A)$ является линейным многообразием в $F$. Заметим также, что $A\Theta = \Theta$.

Линейный оператор $f$ из $E$ - вещественного линейного нормированного пространства в $\mathbb{R}^1$ называется вещественным линейным функционалом. Линейный оператор $f$ из $E$ - комплексного линейного нормированного пространства в $\mathbb{C}^1$ называется комплексным линейным функционалом.

Замечание. Так как $D(A)$ - линейное многообразие в $E$, то $D(A)$ с нормой, порожденной пространством $E$, можно считать самостоятельным линейным нормированным пространством. Поэтому часто считают, что линейный оператор $A$ задан на всем пространстве $E$ и пишут $A : E \to F$, то есть $D(A) = E$.

Теорема 1.1. Пусть $E, F$ - линейные нормированные пространства и $A : E \to F$ - Линейный оператор. Пусть оператор A непрерывен в точке $x_0 \in E$. Тогда оператор $A$ непрерывен в любой точке $x \in E$.

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\} \subset E$ такая, что $x_n \to x$ при $n \to \infty$. Рассмотрим

$$Ax_n - Ax = A(x_n - x + x_0) - Ax_0.$$

Здесь $y_n = x_n - x + x_0 \to x_0$ при $n \to \infty$. Следовательно,

$$\|Ax_n - Ax\|_F = \|Ay_n - Ax_0\|_F \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Линейный оператор $A : D(A) \subset E \to F$ называется ограниченным на $D(A)$, если

$$(\exists C \geq 0)(\forall x \in D(A)) \left[\|Ax\|_F \leq C\|x\|_E\right].$$

Теорема 1.2. Пусть $E, F$ - линейные нормированные пространства. Линейный оператор $A : E \to F$ непрерывен на $E$ тогда и только тогда, когда он ограничен на $E$.

Доказательство. Пусть оператор $A$ непрерывен на $E$, но не является ограниченным. Тогда

$$(\forall n \in \mathbb{N})\,(\exists x_n \in E)\,\left[\|Ax_n\|_F > n\,\|x_n\|_E\right]$$

Заметим, что $x_n \neq \Theta$. Определим элементы $x'_n = x_n / (n\,\|x_n\|_E)$. Тогда $\|x'_n\|_E = = 1/n \to 0$ при $n \to \infty$, то есть $x'_n \to \Theta \in E$. Из непрерывности оператора $A$ следует

$$\|Ax'_n\|_F = \|Ax'_n - A\Theta\|_F \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

С другой стороны

$$\|Ax'_n\|_F = \frac{1}{n\,\|x_n\|_E}\,\|Ax_n\|_F > \frac{1}{n\,\|x_n\|_E} n\,\|x_n\|_E = 1.$$

Из полученного противоречия следует ограниченность оператора $A$ на $E$.

Теперь предположим, что оператор $A$ ограничен на $E$. Тогда из оценки $\|Ax-Ay\|_F \le C\|x-y\|_E$ для $x, y \in E$ следует, что оператор $A$ на $E$ удовлетворяет условию Липшица и, следовательно, непрерывен на $E$.$\odot$

Замечание. Полученные утверждения выполняются и для линейных функционалов, как частного случая линейных операторов. Отметим здесь, что линейный функционал $f$, определенный на $D(f) \subset E$ ограничен на $D(f)$, если

$$(\exists C \ge 0)(\forall x \in D(f))\,[|f(x)| \le C\|x\|_E]\,.$$

Теорема 1.3. Пусть $E, F$ - линейные нормированные пространства, пространство $E$ конечномерно. Пусть $A : E \to F$ Линейный оператор. Тогда оператор $A$ ограничен на $E$.

Доказательство. Пусть $E = \mathscr{L}\,(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m)$, где $\{\omega_k\}_{k=1}^m$ – базис пространства $E$. Тогда всякий $x \in E$ представим в виде $x = \sum_{k=1}^m x_k\omega_k$, где $x_k$– координаты элемента $x$ в базисе $\{\omega_k\}$. Определим в $E$ новую норму $\|x\|_E^* = \sum_{k=1}^m |x_k|$. Исходная норма $\|x\|_E$ и новая $\|x\|_E^*$ эквивалентны. Тогда

$$(\exists M > 0)(\forall x \in E)\,[\|x\|_E^* \le M\|x\|_E]$$

Далее для любого $x \in E$ получим

$$\|Ax\|_F = \left\|A\sum_{k=1}^m x_k\omega_k\right\|_F = \left\|\sum_{k=1}^m x_kA\omega_k\right\|_F \le \sum_{k=1}^m |x_k|\,\|A\omega_k\|_F \le$$
$$\le \max_k \|A\omega_k\|_F \sum_{k=1}^m |x_k| \le M \max_k \|A\omega_k\|_F\,\|x\|_E = C\|x\|_E,$$

где константа $C = M\max_k \|A\omega_k\|_F < \infty$.

- ЗАДАЧА.

1.1. Пусть $E$ - банахово пространство и $F$ - линейное нормированное пространство. Пусть $A : E \to F$ линейный ограниченный оператор такой, что $(\exists c > 0)(\forall x \in E)\,(\|Ax\|_F \ge c\|x\|_E)$. Показать, что множество значений оператора $R(A)$ - подпространство $F$.

## § 2. Норма линейного ограниченного оператора

Пусть $E, F$ - линейные нормированные пространства. Пусть Линейный оператор $A : D(A) \subset E \to F$ ограниченный на $D(A)$. Тогда из (1.1) следует, что числовое множество

$$M = \left\{\frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E} \mid (x \in D(A)) \wedge (x \ne \Theta)\right\}$$

ограничено сверху константой $C \ge 0$. Обозначим

$$\|A\| = \sup M = \sup_{\substack{x\in D(A)\\ x\ne\Theta}} \frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E} \le C < \infty.$$

Величина $\|A\|$ называется нормой оператора $A$ на $D(A)$. Если $D(A) = E$, то $\|A\|$ называется просто нормой оператора $A$. Иногда норму оператора обозначают с указанием пространств $\|A\|_{E\to F}$.

Очевидно, что

$$(\forall x \in D(A))\,[\|Ax\|_F \le \|A\|\|x\|_E]$$

С другой стороны

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists x_\varepsilon \in D(A))\left[\frac{\|Ax_\varepsilon\|_F}{\|x_\varepsilon\|_E} > \|A\| - \varepsilon\right]$$

то есть $\|Ax_\varepsilon\|_F > (\|A\| - \varepsilon)\,\|x_\varepsilon\|_E$. Таким образом, $\|A\| = \min C$, где константы $C$ фигурируют в условии (1.1).

Теорема 2.1. Пусть $E, F$ - линейные нормированные пространства. Пусть $A : D(A) \subset E \to F$ - Линейный оператор, ограниченный на $D(A)$. Тогда

$$\|A\| = \sup_{\substack{x\in D(A)\\ x\neq\Theta}} \frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\substack{x\in D(A)\\ \|x\|_E\leq 1}} \|Ax\|_F = \sup_{\substack{x\in D(A)\\ \|x\|_E=1}} \|Ax\|_F.$$

Доказательство. Заметим, что

$$\|A\| = \sup_{\substack{x\in D(A)\\ x\neq\Theta}} \frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\substack{x\in D(A)\\ x\neq\Theta}} \left\|A\frac{x}{\|x\|_E}\right\|_F \leq$$

$$\leq \sup_{\substack{y\in D(A)\\ \|y\|=1}} \|Ay\|_F = \sup_{\substack{y\in D(A)\\ \|y\|=1}} \frac{\|Ay\|_F}{\|y\|_E} \leq \|A\|.$$

Осталось показать, что

$$\sup_{\substack{x\in D(A)\\ \|x\|_E\leq 1}} \|Ax\|_F = \|A\|$$

Пусть $x \in D(A)$ такой, что $\|x\|_E \leq 1$. Тогда $\|Ax\|_F \leq \|A\|\|x\|_E \leq \|A\|$. Отсюда следует

$$\|A\| \geq \sup_{\substack{x\in D(A)\\ \|x\|_E\leq 1}} \|Ax\|_F \geq \sup_{\substack{x\in D(A)\\ \|x\|_E=1}} \|Ax\|_F = \|A\|.$$

Пример 2.1. Линейный оператор Фредгольма в $C[a, b]$.

В вещественном пространстве $C[a, b]$ определим оператор Фредгольма

$$Ax(t) = \int_a^b K(t, s)x(s)ds$$

где функция $K(t, s)$ непрерывная по совокупности переменных $t, s \in [a, b]$. Для функции $x \in C[a, b]$ функция $Ax(t)$ непрерывная по $t \in [a, b]$, так как функция $K(t, s)x(s)$ непрерывная по совокупности переменных $t, s \in [a, b]$ (см., напр., [18]). Следовательно, оператор $A : C[a, b] \to C[a, b]$.

Очевидно, что оператор $A$ линейный. Установим ограниченность.

$$\|Ax\| = \max_{a\leq t\leq b}\left|\int_a^b K(t, s)x(s)ds\right| \leq \max_{a\leq t\leq b}\int_a^b |K(t, s)||x(s)|ds \leq$$

$$\leq \max_{a\leq t\leq b}\int_a^b |K(t, s)|ds\|x\|.$$

Итак, оператор $A$ ограниченный и

$$\|A\| \leq \max_{a\leq t\leq b}\int_a^b |K(t, s)|ds < \infty$$

Покажем, что на самом деле в (2.2) имеет место равенство. В силу непрерывности по $t \in [a, b]$ функции $\int_a^b |K(t, s)|ds$ найдется $t_0 \in [a, b]$, что

$$\max_{a\leq t\leq b}\int_a^b |K(t, s)|ds = \int_a^b |K(t_0, s)|\,ds.$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ определим функцию

$$x_\varepsilon(t) = \frac{K(t_0, t)}{\varepsilon + |K(t_0, t)|} \in C[a, b].$$

Заметим, что $\|x_\varepsilon\| \leq 1$. Далее получим

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \geq \|Ax_\varepsilon\| \geq |Ax_\varepsilon(t_0)| \geq Ax_\varepsilon(t_0) = \int_a^b K(t_0, s)\, x_\varepsilon(s) ds =$$
$$= \int_a^b K(t_0, s) \frac{K(t_0, s)}{\varepsilon + |K(t_0, s)|} ds = \int_a^b \frac{(|K(t_0, s)| + \varepsilon - \varepsilon)\, |K(t_0, s)|}{\varepsilon + |K(t_0, s)|} ds =$$
$$= \int_a^b |K(t_0, s)|\, ds - \varepsilon \int_a^b \frac{|K(t_0, s)|}{\varepsilon + |K(t_0, s)|} ds \geq \int_a^b |K(t_0, s)|\, ds - \varepsilon(b - a).$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получим

$$\|A\| \geq \int_a^b |K(t_0, s)|\, ds = \max_{a \leq t \leq b} \int_a^b |K(t, s)| ds.$$

Таким образом, из (2.2) и (2.3) следует для оператора Фредгольма

$$\|A\| = \max_{a \leq t \leq b} \int_a^b |K(t, s)| ds.$$

Пример 2.2. ПРОСТЕЙШИЙ ОПЕРАТОР ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ. В пространстве $C[0, 1]$ рассмотрим оператор

$$Ax(t) = \frac{d}{dt} x(t)$$

За область определения этого оператора примем множество $D(A) = C^1[0, 1]$, то есть множество непрерывно дифференцируемых на $[0, 1]$ функций. Тогда $A$ - Линейный оператор, действующий в $C[0, 1]$.

Покажем неограниченность оператора $A$ на $D(A)$. Для $n \in \mathbb{N}$ положим $x_n(t) = \sin n\pi t$. Тогда $Ax_n(t) = n\pi \cos n\pi t$. Для $x \in C[0, 1]$ норма $\|x\|_C = = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t)|$, поэтому

$$\|x_n\|_C = 1, \quad \|Ax_n\|_C = n\pi = n\pi \|x_n\|_C$$

Из последнего равенства следует, что условие (1.1) ограниченности оператора $A$ не выполняется, так как $n\pi \to \infty$ при $n \to \infty$.

Рассмотрим оператор, который задается формулой (2.4), но уже из пространства $C^1[0, 1]$ с нормой $\|x\|_{C^1} = \|x\|_C + \|x'\|_C$ в пространство $C[0, 1]$. Итак, $A : C^1[0, 1] \to C[0, 1]$. Очевидно, что оператор $A$ линейный. Кроме того, для всех $x \in C^1[0, 1]$

$$\|Ax\|_C = \|x'\|_C \leq \|x\|_C + \|x'\|_C = \|x\|_{C^1}$$

Получили, что оператор дифференцирования $A : C^1[0, 1] \to C[0, 1]$ ограничен и $\|A\|_{C^1 \to C} \leq 1$. Найдем точное значение нормы оператора. Для $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим функции $x_n(t) = (n\pi)^{-1} \sin n\pi t$. Тогда $Ax_n(t) = \cos n\pi t$ и, следовательно, $\|Ax_n\|_C = 1$. Далее получим

$$\|x_n\|_{C^1} = \|x_n\|_C + \|x_n'\|_C = \frac{1}{n\pi} + 1$$

Следовательно,

$$\|A\|_{C^1 \to C} = \sup_{\substack{x \in C^1 \\ x \neq \Theta}} \frac{\|Ax\|_C}{\|x\|_{C^1}} \geq \frac{\|Ax_n\|_C}{\|x_n\|_{C^1}} = \frac{n\pi}{1 + n\pi}.$$

Учитывая, что $n \in \mathbb{N}$ любые, из (2.5) при $n \to \infty$ получим $\|A\|_{C^1 \to C} \geq 1$. Таким образом, для оператора дифференцирования $\|A\|_{C^1 \to C} = 1$.

# § §. Пространство линейных ограниченных операторов

Пусть $E, F$ - линейные нормированные пространства, причем оба вещественные или оба комплексные. Через $L(E, F)$ обозначим множество всех линейных ограниченных операторов $A : E \to F$. В случае $F = E$ вместо $L(E, E)$ пишут $L(E)$.

Определим на множестве $L(E, F)$ операции умножения на число и сложение. Считаем для числа $\lambda$ и $A, B \in L(E, F)$ операторы $\lambda A$ и $A + B$ такие, что для $x \in E$

$$(\lambda A)x = (\lambda)Ax, \quad (A + B)x = Ax + Bx.$$

Нетрудно видеть, что так определенные операторы $\lambda A$ и $A+B$ принадлежат $L(E, F)$. В качестве нуля $\Theta \in L(E, F)$ определим оператор $\Theta$ такой, что $\Theta x = \Theta \in F$ для всех $x \in E$. Легко проверить выполнение в $L(E, F)$ всех аксиом линейного пространства.

В полученном линейном пространстве $L(E, F)$ определим норму. Для $A \in L(E, F)$ положим, как и в (2.1),

$$\|A\| = \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq \Theta}} \frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E}.$$

Для проверки аксиом нормы напомним

$$(\forall x \in E) \left[ \|Ax\|_F \le \|A\| \|x\|_E \right].$$

1). Очевидно, что $\|A\| \ge 0$. Пусть теперь $\|A\| = 0$. Тогда $\|Ax\|_F = 0$ для всех $x \in E$. Следовательно, $Ax = \Theta$ для всех $x \in E$ и оператор $A = \Theta \in L(E, F)$. Для $\Theta \in L(E, F)$ свойство $\|\Theta\| = 0$ очевидно. Доказана первая аксиома. 2). Вторая аксиома нормы следует из соотношения

$$\|\lambda A\| = \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq \Theta}} \frac{\|\lambda Ax\|_F}{\|x\|_E} = |\lambda| \|A\|.$$

3). Третья аксиома нормы следует из оценки для всех $x \in E$.

$$\|(A + B)x\|_F \le \|Ax\|_F + \|Bx\|_F \le (\|A\| + \|B\|)\|x\|$$

которая означает $\|A + B\| \le \|A\| + \|B\|$.

Итак, $L(E, F)$ - линейное нормированное пространство и определена сходимость по норме операторов.

Пусть последовательность операторов $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L(E, F)$ такая, что для некоторого оператора $A \in L(E, F)$ выполняется $\|A_n - A\| \to 0$ при $n \to \infty$. В таком случае говорят, что операторы $A_n (n \in \mathbb{N})$ сходятся к оператору $A$ по операторной норме. Такую сходимость $A_n \to A$ называют также равномерной сходимостью, поскольку она равносильна $\|A_n x - Ax\|_F \to 0$ при $n \to \infty$ равномерно по $x$ из любого шара $B[\Theta, r] = \{x \in E \mid \|x\|_E \le r\}$. Факт равномерной сходимости операторов при $n \to \infty$ будем обозначать $A_n \rightrightarrows A$.

Теорема 3.1. Пусть $E$ - линейное нормированное пространство и пространство $F$ банахово. Тогда пространство $L(E, F)$ с операторной нормой является банаховым пространством.

Доказательство. Возьмем произвольную фундаментальную последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L(E, F)$, то есть

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \ge N)(\forall p \in \mathbb{N}) \left[ \|A_{n+p} - A_n\| < \varepsilon \right]$$

Пусть $x \in E$. Из неравенства

$$\|A_{n+p}x - A_n x\|_F \le \|A_{n+p} - A_n\| \, \|x\|_E$$

и (3.1) следует фундаментальность последовательности $\{A_n x\}_{n=1}^{\infty} \subset F$. Но пространство $F$ полное, поэтому эта последовательность сходится в $F$. Обозначим $\lim_{n\to\infty} A_n x = y(x) \in F$. Таким образом, определено отображение $A : E \to F$, действующее по правилу $Ax = y(x) = \lim_{n\to\infty} A_n x$.

Линейность отображения $A$ очевидным образом следует из линейности операторов $A_n$ и свойств предела. Итак, $A : E \to F$ - Линейный оператор.

Установим ограниченность этого оператора. Так как всякая фундаментальная последовательность ограничена, то $(\exists C > 0)(\forall n \in \mathbb{N})\,[\|A_n\| \le C]$. Следовательно, для всех $x \in E$ выполняется $\|A_n x\|_F \le \|A_n\|\,\|x\|_E \le C\|x\|_E$. Отсюда при $n \to \infty$ получим $\|Ax\|_F \le C\|x\|_E$, то есть оператор $A$ ограниченный и $A \in L(E, F)$.

Покажем, что $\|A_n - A\| \to 0$ при $n \to \infty$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и пусть выполнено (3.1). Тогда для $x \in E$ с $\|x\|_E \le 1$ получим из (3.1) и (3.2)

$$(\forall n \ge N)(\forall p \in \mathbb{N})\left[\|A_{n+p}x - A_n x\|_F < \varepsilon\right]$$

В последней оценке $p \to \infty$. Получим для всех $x \in E$ с $\|x\|_E \le 1$ и всех $n \ge N$ оценку $\|Ax - A_n x\|_F \le \varepsilon$. Отсюда для всех $n \ge N$ следует

$$\|A - A_n\| = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|_E \le 1}} \|(A - A_n)\,x\|_F \le \varepsilon$$

Итак,

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \ge N)\,[\|A - A_n\| \le \varepsilon]$$

что означает $A_n \rightrightarrows A$. $\odot$

Отдельно рассмотрим пространство $L(E, \mathbb{R}^1)$, если пространство $E$ вещественное, и пространство $L(E, \mathbb{C}^1)$, если пространство $E$ комплексное. Оба эти пространства являются пространствами линейных ограниченных функционалов, вещественных или комплексных соответственно. Обозначать эти пространства принято символом $E^*$. Называют пространство $E^*$ пространством, сопряженным к пространству $E$. Заметим, что всякое сопряженное пространство является полным, так как пространства чисел $\mathbb{R}^1$ и $\mathbb{C}^1$ полные.

Замечание. Если пространства $E$ и $F$ комплексные, то операцию умножения оператора на число иногда определяют формулой $(\lambda A)x = \bar{\lambda}(Ax)$. При этом пространство $L(E, F)$ также будет ЛНП, которое полно, если полно пространство $F$. Соответственно, будет полно и сопряженное пространство $E^* = L(E, \mathbb{C}^1)$, в котором умножение функционала на число определяется подобным образом $(\lambda f)x = \bar{\lambda}(fx)$. Обратим внимание, что сопряженное пространство $E^*$ иногда определяют как пространство полулинейных ограниченных функционалов $f(\alpha x + \beta y) = \bar{\alpha} f(x) + \bar{\beta} f(y)$. При таком определении пространство $E^*$ также полно. Заметим, что в вещественном случае все эти подходы совпадают.

Определим суперпозицию (произведение) линейных операторов. Пусть $E_1,\ E_2, E_3$ - линейные нормированные пространства. Пусть заданы операторы $A \in L(E_1, E_2)$ и $B \in L(E_2, E_3)$. Определим на $E_1$ отображение

$$(BA)x = B(Ax)$$

Очевидно, $BA : E_1 \to E_3$ и является линейным оператором. Из оценки

$$\|(BA)x\|_{E_3} = \|B(Ax)\|_{E_3} \le \|B\|\|Ax\|_{E_2} \le \|B\|\|A\|\|x\|_{E_1}$$

следует ограниченность оператора $BA$ и оценка нормы $\|BA\| \le \|B\|\|A\|$. Таким образом, оператор $BA \in L(E_1, E_3)$.

Если оператор $A \in L(E)$, то определены операторы $A^n \in L(E)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, можно определять многочлены от операторов, а также операторные ряды, что позволяет определять и некоторые функции от операторов.

Заметим, что вообще операторы $BA \neq AB$ (один из этих операторов может быть не определен). Но и в случае, когда определены оба оператора $BA$ и $AB$, равенство выполняется не всегда. Например, в пространстве $C[0,1]$ заданы операторы $(Ax)(t) = tx(t)$ и $(Bx)(t) = \int_0^t x(s)ds$. Очевидно, что $A, B \in L(C[0,1])$ и

$$ABx(t) = t\int_0^t x(s)ds \neq \int_0^t sx(s)ds = BAx(t)$$

Если выполняется равенство $AB = BA$, то говорят, что операторы коммутируют или перестановочны.

В пространстве $L(E,F)$ определим еще одну сходимость операторов, аналогом которой для функций является поточечная сходимость.

Пусть последовательность операторов $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L(E,F)$ такая, что для некоторого оператора $A \in L(E,F)$ выполняется $\|A_n x - Ax\|_F \to 0$ при $n \to \infty$ для всех $x \in E$. В таком случае говорят, что операторы $A_n (n \in \mathbb{N})$ сходятся к оператору $A$ сильно. Факт сильной сходимости операторов при $n \to \infty$ будем обозначать $A_n \overset{\text{сильно}}{\longrightarrow} A$.

Из неравенства $\|A_n x - Ax\|_F \leq \|A_n - A\| \|x\|_E$ следует, что из равномерной сходимости операторов следует сильная сходимость. Обратное утверждение неверно, что видно из следующего примера.

Пример 3.1. В пространстве последовательностей $l_2$ операторы

$$P_n x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots) \text{ где } n \in \mathbb{N} \text{ и } x = (x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots) \in l_2.$$

. Очевидно, что $P_n \in L(l_2)$ и для $x \in l_2$

$$\|Ix - P_n x\| = \|(0, 0, \ldots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots)\| = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^2\right)^{1/2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Получили $P_n \overset{\text{сильно}}{\longrightarrow} I$. Справедлива оценка

$$\|Ix - P_n x\| = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^2\right)^{1/2} \leq \|x\|$$

из которой следует $\|I - P_n\| \leq 1$. Определим элемент $x_0 = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$, где 1 стоит на $n+1$-ом месте. Тогда $\|x_0\| = 1$ и

$$\|I - P_n\| = \sup_{\|x\|=1} \|(I - P_n)x\| \geq \|(I - P_n)x_0\| = \|x_0\| = 1$$

Таким образом, $(\forall n \in \mathbb{N})\,[\|I - P_n\| = 1]$.

Теорема 3.2. Пусть E, $F$ - линейные нормированные пространства и пространство E конечномерно. Операторы $A, A_n (n \in \mathbb{N}) \in L(E,F)$ и выполнено условие $A_n \overset{\text{силвно}}{\longrightarrow} A$ при $n \to \infty$. Тогда $A_n \rightrightarrows A$.

Доказательство. Пусть $E = \mathscr{L}(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m)$, где $\{\omega_k\}_{k=1}^m$ – базис пространства $E$. Тогда всякий $x \in E$ представим в виде $x = \sum_{k=1}^m x_k \omega_k$, где $x_k$– координаты элемента $x$ в базисе $\{\omega_k\}$. Определим в $E$ новую норму $\|x\|_E^* = \sum_{k=1}^m |x_k|$. Нормы $\|x\|_E$ и $\|x\|_E^*$ эквивалентны. Тогда

$$(\exists M > 0)(\forall x \in E)\left[\|x\|_E^* \leq M\|x\|_E\right].$$

Далее получим для любого $x \in E$ с $\|x\|_E \leq 1$

$$\|(A_n - A)x\|_F = \left\|\sum_{k=1}^m x_k (A_n - A)\omega_k\right\|_F \leq \sum_{k=1}^m |x_k| \|(A_n - A)\omega_k\|_F \leq$$
$$\leq \max_{1\leq k\leq m} \|(A_n - A)\omega_k\|_F \|x\|_E^* \leq M \max_{1\leq k\leq m} \|(A_n - A)\omega_k\|_F$$

В результате получим

$$\|A_n - A\| = \sup_{\|x\|_E \le 1} \|(A_n - A)\, x\|_F \le M \max_{1\le k\le m} \|(A_n - A)\,\omega_k\|_F \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

• ЗАДАЧИ.

3.1. В пространстве $l_2$ для $x = (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots)$ определены две последовательности операторов:

$$A_n x = \left(\frac{x_1}{n}, \frac{x_2}{n}, \dots, \frac{x_k}{n}, \dots\right), \quad B_n x = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n}, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots).$$

Каков характер сходимости каждой из последовательностей ?

3.2. Пусть $E$ и $F$ - линейные нормированные пространства; $x, x_n \in E$ $(n \in \mathbb{N})$, и $\|x_n - x\|_E \to 0$ при $n \to \infty$. Пусть $A, A_n \in L(E,F)(n = 1, 2, \dots)$ и $\|A_n - A\| \to 0$ при $n \to \infty$. Доказать, что $\|A_n x_n - Ax\|_F \to 0$.

# §4. Принцип равномерной ограниченности

Лемма 4.1. Пусть $E, F$ - линейные нормированные пространства и множество операторов $\{A_\gamma\} \subset L(E,F)$ такое, что

$$(\exists B\,[x_0, r] \subset E, r > 0)\,(\exists C > 0)\,(\forall x \in B\,[x_0, r])\,(\forall \gamma)\,\left[\|A_\gamma x\|_F \le C\right].$$

Тогда для $(\forall\gamma)\,[\|A_\gamma\| \le 2C/r]$, то есть множество операторов $\{A_\gamma\}$ равномерно по $\gamma$ ограничено в $L(E,F)$.

Доказательство. Для произвольного $x \in E$, что $x \ne \Theta$, определим элемент

$$\frac{r}{\|x\|_E} x + x_0 \in B\,[x_0, r]$$

Далее получим

$$C \ge \left\| A_\gamma \left( \frac{r}{\|x\|_E} x + x_0 \right) \right\|_F = \left\| \left( \frac{r}{\|x\|_E} A_\gamma x \right) - (-A_\gamma x_0) \right\|_F \ge$$
$$\ge \left\| \frac{r}{\|x\|_E} A_\gamma x \right\|_F - \|A_\gamma x_0\|_F \ge \frac{r}{\|x\|_E} \|A_\gamma x\|_F - C.$$

Отсюда получается необходимая оценка для всех $x \in E$

$$\|A_\gamma x\|_F \le \frac{2C}{r} \|x\|_E$$

Теорема 4.1. Пусть даны $E$ - банахово пространство, $F$ - линейное нормированное пространство и операторы $\{A_\gamma\} \subset L(E,F)$. Пусть

$$(\forall x \in E)(\exists C \ge 0)(\forall\gamma)\left[\|A_\gamma x\|_F \le C\right]$$

Тогда $(\exists K)(\forall\gamma)\,[\|A_\gamma\| \le K]$, то есть множество операторов $\{A_\gamma\}$ равномерно по $\gamma$ ограничено в $L(E,F)$.

Доказательство. Определим для каждого $n \in \mathbb{N}$ множество

$$S_n = \left\{ x \in E \mid (\forall\gamma)\left[\|A_\gamma x\|_F \le n\right] \right\}$$

Покажем, что $E = \cup_{n=1}^\infty S_n$. Включение $\cup_{n=1}^\infty S_n \subset E$ очевидно. Возьмем теперь произвольный $x \in E$. Тогда $(\forall\gamma)\left[\|A_\gamma x\|_F \le C(x)\right]$. Выберем $n \ge C(x)$. Тогда $(\forall\gamma)\left[\|A_\gamma x\|_F \le n\right]$, следовательно, $x \in S_n$. Установлено включение $E \subset \cup_{n=1}^\infty S_n$. Необходимое равенство доказано.

Покажем, что множества $S_n$ замкнуты, то есть $\bar{S}_n = S_n$. Пусть $y \in \bar{S}_n$ и последовательность $\{y_k\} \subset S_n$ такая, что $\|y_k - y\|_E \to 0$ при $k \to \infty$. Так как $\|A_\gamma y_k\|_F \leq n$ и операторы $A_\gamma$ непрерывные, то при $k \to \infty$ получим $\|A_\gamma y\|_F \leq n$. Следовательно, $y \in S_n$, то есть все множества $S_n$ замкнуты.

Поскольку пространство $E$ полное, то по теореме Бэра $E$ есть множество второй категории. Тогда найдется множество $S_m$, которое не является нигде не плотным, то есть

$$(\exists B(x_0, \varepsilon_0) \subset E)\,(\forall B(y,\delta) \subset B(x_0, \varepsilon_0))\,[B(y,\delta) \cap S_m \neq \varnothing]\,.$$

Получили $\left(\forall y \in B(x_0, \varepsilon_0)\left[y \in \bar{S}_m\right]\right.$, то есть $B(x_0, \varepsilon_0) \subset \bar{S}_m = S_m$. Далее получим $B[x_0, \varepsilon_0] = \overline{B(x_0, \varepsilon_0)} \subset S_m$. Таким образом, установили

$$(\forall x \in B[x_0, \varepsilon_0])\,(\forall \gamma)\left[\|A_\gamma x\|_F \leq m\right]$$

Из леммы 4.1 теперь следует, что $(\forall \gamma)\,[\|A_\gamma\| \leq 2m/\varepsilon_0]$. O

Продемонстрируем одно из применений принципа равномерной ограниченности, установленного в теореме 4.1.

Последовательность операторов $\{A_n\} \subset L(E,F)$ называется сильно фундаментальной, если для любого $x \in E$ последовательность $\{A_n x\} \subset F$ фундаментальна. Пространство $L(E,F)$ называется сильно полным, если для всякой сильно фундаментальной последовательности $\{A_n\} \subset L(E,F)$ найдется оператор $A \subset L(E,F)$ такой, что $A_n \overset{\text{сильно}}{\longrightarrow} A$.

Теорема 4.2. Пусть $E, F$ - банаховы пространства. Тогда пространство $L(E,F)$ сильно полно.

Доказательства. Возьмем произвольную сильно фундаментальную последовательность $\{A_n\} \subset L(E,F)$. В силу полноты пространства $F$ для всякого $x \in E$ последовательность $\{A_n x\} \subset F$ сходится. Таким образом, как и в теореме 3.1 , определен линейный оператор $A : E \to F$, действующий по правилу $Ax = \lim_{n\to\infty} A_n x$.

Покажем ограниченность оператора $A$. Для каждого $x \in E$ последовательность $\{A_n x\} \subset F$ сходится, а значит ограничена, то есть

$$(\forall x \in E)(\exists C \geq 0)(\forall n \in \mathbb{N})\,[\|A_n x\|_F \leq C]$$

Так как пространство $E$ банахово, то из теоремы 4.1 следует

$$(\exists K \geq 0)(\forall n \in \mathbb{N})\,[\|A_n\| \leq K]$$

Далее для всех $x \in E$ получим $\|A_n x\|_F \leq \|A_n\|\,\|x\|_E \leq K\|x\|_E$. Отсюда при $n \to \infty$ следует $\|Ax\|_F \leq K\|x\|_E$.

Итак, оператор $A \in L(E,F)$ и по определению этого оператора $A_n x \to Ax$ при $n \to \infty$ для любого $x \in E$. Получили $A_n \overset{\text{сильно}}{\longrightarrow} A.8$

- ЗАДАЧА.

4.1. Пусть $E$ - банахово пространство и $F$ - линейное нормированное пространство. Пусть $A, A_n \in L(E,F)(n = 1,2,\ldots)$ и операторы $A_n$ при $n \to \infty$ сильно сходятся к оператору $A$. Пусть $x, x_n \in E$ и $\|x_n - x\|_E \to 0$ при $n \to \infty$. Доказать, что $\|A_n x_n - Ax\|_F \to 0$.

# §5. Продолжение оператора по непрерывности

Теорема 5.1. Пусть $E$ - линейное нормированное пространство и F банахово пространство. Линейный оператор $A : D(A) \subset E \to F$ ограничен на своей области определения $D(A)$ и множество $D(A)$ плотно в E. Тогда существует оператор $\widetilde{A} \in L(E,F)$ такой, что:

$$1)\ (\forall x \in D(A))[\widetilde{A}x = Ax], \qquad 2)\ \|\widetilde{A}\| = \|A\|$$

Доказательство. Возьмем произвольный $x \in E$. Так как $\overline{D(A)} = E$, то найдется последовательность $\{x_n\} \subset D(A)$ такая, что $x_n \to x$ при $n \to \infty$. Рассмотрим последовательность $\{Ax_n\} \subset F$. Для всех $n, m \in \mathbb{N}$ элементы $x_n - x_m \in D(A)$ и справедлива оценка

$$\|Ax_n - Ax_m\|_F \leq \|A\| \, \|x_n - x_m\|_E$$

из которой следует фундаментальность последовательности $\{Ax_n\} \subset F$. Поскольку пространство $F$ полное, то последовательность $\{Ax_n\}$ сходится, то есть существует $\lim_{n\to\infty} Ax_n = y(x) \in F$.

Покажем, что элемент $y(x) \in F$ не зависит от выбора последовательности $\{x_n\} \subset D(A)$. Пусть имеем также последовательность $\{x'_n\} \subset D(A)$ такую, что $x'_n \to x$ при $n \to \infty$. Обозначим $\lim_{n\to\infty} Ax_n = a$ и $\lim_{n\to\infty} Ax'_n = b$. Тогда

$$\|a - b\|_F \leq \|a - Ax_n\|_F + \|Ax_n - Ax'_n\|_F + \|Ax'_n - b\|_F \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

так как $\|Ax_n - Ax'_n\|_F \leq \|A\| \, \|x_n - x'_n\|_E \to 0$ при $n \to \infty$.

Таким образом, на $x \in E$ однозначно определен линейный оператор

$$\widetilde{A}x = y(x) = \lim_{n\to\infty} Ax_n$$

Линейность оператора $\widetilde{A}$ следует из линейности оператора $A$ и соответствующих свойств предела.

Покажем выполнение свойства 1). Если $x \in D(A)$, то при построении последовательности $\{x_n\}$ можно брать все $x_n = x$. Тогда

$$\widetilde{A}x = \lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} Ax = Ax.$$

Покажем выполнение свойства 2). Пусть $x \in E$ и последовательность $\{x_n\} \subset D(A)$ такая, что $x_n \to x$ при $n \to \infty$. Из оценки $\|Ax_n\|_F \leq \|A\| \, \|x_n\|_E$ при $n \to \infty$ получим $\|\widetilde{A}x\|_F \leq \|A\| \|x\|_E$. Таким образом, $\widetilde{A} \in L(E, F)$ и $\|\widetilde{A}\| \leq \|A\|$ Получим обратную оценку.

$$\|\widetilde{A}\| = \sup_{\substack{x\in E \\ \|x\|_E=1}} \|\widetilde{A}x\|_F \geq \sup_{\substack{x\in D(A) \\ \|x\|_E=1}} \|\widetilde{A}x\|_F = \sup_{\substack{x\in D(A) \\ \|x\|_E=1}} \|Ax\|_F = \|A\|.$$

Итак, $\|\widetilde{A}\| = \|A\|$.$\odot$

Построенный оператор $\widetilde{A}$ называют продолжением оператора $A$ по непрерывности на все пространство.

- ЗАДАЧА.

5.1. Пусть $H$ - гильбертово пространство и $M \subset H$ - линейное многообразие. Пусть $A$ - линейный ограниченный оператор, заданный на $M$ со значениями в банаховом пространстве $E$. Показать, что оператор $A$ можно продолжить на все пространство $H$ с сохранением нормы.

# §6. Обратимый и обратный операторы

Пусть $E, F$ - линейные нормированные пространства и $A$ - линейный (возможно неограниченный) оператор из $E$ в $F$, область определения $D(A) \subset E$ и множество значений $R(A) \subset F$, то есть $A : D(A) \subset E \to R(A) \subset F$.

Оператор $A$ называется обратимым, если

$$(\forall y \in R(A))(\exists x \in D(A) \text{ единственный })[Ax = y].$$

Таким образом, в случае обратимого оператора $A$ определено отображение $A^{-1}$ из $F$ в $E$ с областью определения $D\left(A^{-1}\right)=R(A)$ и множеством значений $R\left(A^{-1}\right)=D(A)$ такое, что для $y \in R(A)$ определен $A^{-1} y=x$, где $x \in D(A)$ такой единственный, что $A x=y$.

Теорема 6.1. Пусть E,F - линейные нормированные пространства. Отображение $A^{-1}$, определенное по линейному обратимому оператору $A: D(A) \subset E \rightarrow R(A) \subset F$, является линейным оператором.

Доказательство. Напомним, что $D(A)$ и $R(A)$ являются линейными многообразиями в пространствах $E$ и $F$ соответственно.

Пусть выбраны элементы $y_1, y_2 \in R(A)$ и числа $\alpha_1, \alpha_2$. Обозначим

$$x_1=A^{-1} y_1 \in D(A), \quad x_2=A^{-1} y_2 \in D(A).$$

В силу линейности и обратимости оператора $A$ получим

$$A\left(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2\right)=\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2.$$

Из определения отображения $A^{-1}$ следует

$$A^{-1}\left(\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2\right)=\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2=\alpha_1 A^{-1} y_1+\alpha_2 A^{-1} y_2.$$

Линейный оператор $A^{-1}$, определенный по линейному обратимому оператору $A$, называется оператором обратным к оператору $A$.

Из определения оператора $A^{-1}$ следует, что

$$(\forall y \in R(A))\left[A A^{-1} y=y\right], \quad(\forall x \in D(A))\left[A^{-1} A x=x\right].$$

Для линейного оператора $A$ определим множество

$$N(A)=\{x \in D(A) \mid A x=\Theta\}$$

называемое ядром или нуль-многообразием оператора $A$. Нетрудно видеть, что $N(A)$ - линейное многообразие в пространстве $E$.

Теорема 6.2. Пусть E, F - линейные нормированные пространства и $A: D(A) \subset E \rightarrow F$ линейный оператор. Оператор $A$ обратим тогда $u$ только тогда, когда $N(A)=\{\Theta\}$.

Доказательство. Если оператор $A$ обратим, то уравнение $A x=\Theta \in R(A)$ имеет единственное решение $x=A^{-1} \Theta=\Theta \in D(A)$, то есть $N(A)=\{\Theta\}$.

Пусть теперь $N(A)=\{\Theta\}$. Предположим для $y \in R(A)$ существуют $x_1, x_2 \in D(A)$ такие, что $A x_1=y$ и $A x_2=y$. Тогда $A\left(x_1-x_2\right)=\Theta$, что означает $x_1-x_2 \in N(A)$. Следовательно, $x_1=x_2$. Итак, элемент $x \in D(A)$ такой, что $A x=y$ единственный. Значит оператор $A$ обратим. ◯

Теорема 6.3. Пусть E, F - линейные нормированные пространства и $A: D(A) \subset E \rightarrow F$ линейный оператор. Оператор $A$ обратим и оператор $A^{-1}$ ограничен на $D(A)$ тогда и только тогда, когда

$$(\exists m>0)(\forall x \in D(A))\left[\|A x\|_F \geq m\|x\|_E\right].$$

Доказательство. Пусть оператор $A$ обратим и оператор $A^{-1}$ ограничен на $D(A)$. Тогда

$$(\exists C>0)(\forall y \in R(A))\left[\left\|A^{-1} y\right\|_E \leq C\|y\|_F\right]$$

Возьмем произвольный $x \in D(A)$ и пусть $y=A x \in R(A)$. Тогда $x=A^{-1} y$ и $\|x\|_E \leq C\|A x\|_F$. Следовательно,

$$(\exists C>0)(\forall x \in D(A))\left[\|A x\|_F \geq \frac{1}{C}\|x\|_E\right]$$

Пусть теперь выполнено (6.1), из которого сразу следует $N(A)=\{\Theta\}$, то есть оператор $A$ обратим и существует обратный $A^{-1}$. Покажем ограниченность на $R(A)$ обратного оператора. Возьмем $y \in R(A)$ и $x=A^{-1} y \in D(A)$. Тогда из (6.1) $\|A x\|_F \geq m\|x\|_E$. Но $A x=y$, поэтому $\|y\|_F \geq m\left\|A^{-1} y\right\|_E$.

Получили ограниченность на $R(A)$ оператора $A^{-1}$ и $\|A^{-1}\| \leq 1/m$. $\odot$ Пусть $E, F$ - линейные нормированные пространства и линейный оператор $A : D(A) \subset E \to F$.

Оператор $A$ называется непрерывно обратимым, если оператор $A$ обратим и обратный $A^{-1} \in L(F, E)$.

Лемма 6.1. Пусть $E, F$ - линейные нормированные пространства. Оператор $A \in L(E, F)$, и пусть существует оператор $B \in L(F, E)$ такой, что $BA = I_E$ и $AB = I_F$ (операторы $I_E$ и $I_F$ тождественные на E и $F$ соответственно). Тогда оператор $A$ непрерывно обратим и $A^{-1} = B$.

Доказательство. Пусть элемент $x \in N(A)$, то есть $Ax = \Theta$. Следовательно, $x = I_E x = BAx = B\Theta = \Theta$. Получили $N(A) = \{\Theta\}$ и оператор $A$ обратим.

Возьмем $y \in F$. Тогда $y = I_F y = ABy = A(By) \in R(A)$, то есть $R(A) = F$. Рассмотрим $A^{-1}y = A^{-1}ABy = By$. Следовательно, $A^{-1} = B \in L(F, E)$. $\bigcirc$

Теорема 6.4. Пусть $E$ - банахово пространство и оператор $A \in L(E)$ такой, что $\|A\| \leq q < 1$. Тогда оператор $I - A$ непрерывно обратим. Справедливо представление $(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$ и оценка $\|(I - A)^{-1}\| \leq (1 - q)^{-1}$.

Доказательство. Рассмотрим в $L(E)$ операторный ряд $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$, где оператор $A^0 = I$. Этот ряд сходится абсолютно, так как $\left\|A^k\right\| \leq \|A\|^k \leq q^k$, а числовой ряд $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ сходится. Так как $L(E)$ банахово пространство, то в $L(E)$ сходится и ряд $\sum_{k=0}^{\infty} A^k = S \in L(E)$.

Обозначим $\sum_{k=0}^{n} A^k = S_n \in L(E)$. Заметим, что $S_n(I - A) = I - A^{n+1}$. В последнем равенстве переходим к пределу при $n \to \infty$. Так как при $n \to \infty$

$$\left\|I - \left(I - A^{n+1}\right)\right\| = \left\|A^{n+1}\right\| \leq q^{n+1} \to 0,$$
$$\|S(I - A) - S_n(I - A)\| \leq \|S - S_n\| \, \|I - A\| \to 0,$$

то в пределе получим $S(I - A) = I$. Аналогично доказывается $(I - A)S = I$.

Из леммы 6.1 теперь следует непрерывная обратимость оператора $I - A$ и $(I - A)^{-1} = S \in L(E)$. Получим необходимую оценку

$$\left\|(I - A)^{-1}\right\| = \|S\| = \lim_{n \to \infty} \|S_n\| \leq \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \left\|A^k\right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} q^k = (1 - q)^{-1}.$$

Замечание. Более сильное утверждение получается, если вместо условия $\|A\| \leq q < 1$, обеспечивающего сходимость ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \|A\|^k$, воспользоваться признаком Коши сходимости этого ряда $\lim_{k\to\infty} \left\|A^k\right\|^{1/k} < 1$. Известно (напр.,[8]), что такой предел $r(A) = \lim_{k\to\infty} \left\|A^k\right\|^{1/k}$ существует и называется спектральным радиусом оператора $A$. Из определения спектрального радиуса $r(A)$ видно, что $r(A) \leq \|A\|$. Следствие 6.1. Пусть $E$ - банахово пространство, оператор $A \in L(E)$ и его спектральный радиус $r(A) < 1$. Тогда оператор $I - A$ непрерывно обратим и справедливо представление $(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$.

- ЗАДАЧИ.

6.1. В пространстве $l_2$ рассмотрим операторы $A$ и $B$, переводящие элементы $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots)$ в $Ax = (0, x_1, x_2, \ldots)$ и $Bx = (x_2, x_3, \ldots)$ соответственно. Являются ли операторы $A$ и $B$ обратимыми ?

6.2. Рассмотрим оператор $A : C[0, 1] \to C[0, 1]$, заданный выражением

$$Ax(t) = \int_0^t x(s)ds$$

а) Что представляет собой $R(A)$ ?

б) Существует ли обратный оператор и ограничен ли он ?

6.3. Показать, что соответствующие операторы $A : C[0, 1] \to C[0, 1]$ непрерывно обратимы и найти обратные: а) $Ax(t) = x(t) + \int_0^t x(s)ds$ б) $Ax(t) = x(t) - \int_0^1 tsx(s)ds$ в) $Ax(t) = x(t) + \int_0^1 \exp(t + s)x(s)ds$.

6.4. Пусть $E$ - линейное нормированное пространство и $A: E \to E$ такой линейный оператор, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} A^k x$ сходится для всех $x \in E$.

а) Доказать, что оператор $I - A$ обратим.

б) Пусть, кроме того, $A \in L(E)$. Доказать, что тогда для любого $x \in E$ выполнено $(I-A)^{-1}x = \sum_{k=0}^{\infty} A^k x$.

6.5. Пусть $E$ - банахово пространство, оператор $A \in L(E)$ и $\|I - A\| < 1$. Доказать, что оператор $A$ непрерывно обратим.

6.6. Пусть $E$ - банахово пространство. Доказать, что в пространстве $L(E)$ множество всех непрерывно обратимых операторов открыто.

# § 7. Теорема Банаха об обратном операторе

Теорема 7.1(Банах). Пусть $E, F$ - банаховы пространства. Пусть оператор $A \in L(E, F)$ такой, что $N(A) = \{\Theta\}$ и $R(A) = F$. Тогда оператор $A$ непрерывно обратим, то есть существует $A^{-1} \in L(F, E)$.

Обратим внимание, что существование оператора $A^{-1}: F \to E$ очевидно, так как $N(A) = \{\Theta\}$. Следует установить ограниченность оператора $A^{-1}$. Рассмотрим прежде вспомогательную лемму, при доказательстве которой существенно используются три простых факта, которые сформулируем в виде задач.

- ЗАДАЧИ.

7.1. Пусть $E$ - линейное нормированное пространство и множество $M \subset E$. Тогда $(\forall \lambda-$ числа $)[\lambda \bar{M} = \overline{\lambda M}]$.

7.2. Пусть $E$ - линейное нормированное пространство и шар $B[x, r] \subset E$. Тогда $(\forall \lambda-$ числа $)[\lambda B[x, r] = B[\lambda x, |\lambda| r]]$.

7.3. Пусть $E$ - линейное нормированное пространство и шар $B[x, r] \subset E$. Тогда $B[x, r] - B[x, r] = B[\Theta, 2r]$.

Лемма 7.1. Пусть $E$ - банахово пространство и $F$ - линейное нормированное пространство. Пусть задан линейный оператор $T: E \to F$ (возможно неограниченный). Определим множество $S = \{x \in E \mid \|Tx\|_F \leq 1\}$. Тогда

$$(\exists c > 0)(\forall r > 0)[B[\Theta, r] \subset \overline{rcS}]$$

Доказательство. Для $k \in \mathbb{N}$ определим множества $kS = \{kx \mid x \in S\}$. Покажем, что $E = \cup_{k=1}^{\infty} kS$. Включение $\cup_{k=1}^{\infty} kS \subset E$ очевидно. Установим обратное включение. Пусть $x \in E$. Тогда $(\exists k \in \mathbb{N})\,[\|Tx\|_F \leq k]$. Заметим, что $\|T(x/k)\|_F \leq 1$, то есть $x/k \in S$. Следовательно, $x = k(x/k) \in kS$. Установили $E \subset \cup_{k=1}^{\infty} kS$.

Так как пространство $E$ банахово, то $E$ есть множество второй категории, следовательно найдется множество $mS (m \in \mathbb{N})$, которое не является нигде не плотным. Таким образом,

$$(\exists B(x_0, r_0) \subset E)\,(\forall B(x, \varepsilon) \subset B(x_0, r_0))\,[B(x, \varepsilon) \cap mS \neq \varnothing]$$

Итак, шар $B(x_0, r_0) \subset \overline{mS}$. Отсюда следует $B[x_0, r_0] \subset \overline{mS} = m\bar{S}$ (задача 7.1). Далее получим (задача 7.2)

$$B\left[\frac{x_0}{m}, \frac{r_0}{m}\right] = \frac{1}{m} B[x_0, r_0] \subset \frac{1}{m}(m\bar{S}) = \bar{S}$$

Воспользуемся теперь задачей 7.3

$$B\left[\Theta, 2\frac{r_0}{m}\right] = B\left[\frac{x_0}{m}, \frac{r_0}{m}\right] - B\left[\frac{x_0}{m}, \frac{r_0}{m}\right] \subset \bar{S} - \bar{S}.$$

Установим теперь, что $\bar{S} - \bar{S} \subset 2\bar{S}$. Пусть элемент $z \in \bar{S} - \bar{S}$, то есть $z = x - y$, где $x, y \in \bar{S}$. Возьмем последовательности $\{x_n\}, \{y_n\} \subset S$ такие, что $x_n \to x$ и $y_n \to y$ при $n \to \infty$. Тогда $z_n = x_n - y_n \to x - y = z$. Рассмотрим

$$\|Tz_n\|_F = \|Tx_n - Ty_n\|_F \leq \|Tx_n\|_F + \|Ty_n\|_F \leq 1 + 1 = 2.$$

В таком случае, $z_n \in 2S$. Но тогда $z \in \overline{2S} = 2\bar{S}$. Получили $B[\Theta, 2r_0/m] \subset 2\bar{S}$. Далее рассмотрим шар

$$B[\Theta, 1] = \frac{m}{2r_0} B\left[\Theta, \frac{2r_0}{m}\right] \subset \frac{m}{2r_0} 2\bar{S} = \frac{m}{r_0}\bar{S}.$$

Обозначим $m/r_0 = c$. Итак, $B[\Theta, 1] \subset c\bar{S}$.

Теперь возьмем произвольное $r > 0$ и получим

$$B[\Theta, r] = rB[\Theta, 1] \subset rc\bar{S} = \overline{rcS}$$

Доказательство теоремы 7.1. Как отмечалось выше, определен оператор $A^{-1} : F \to E$. Определим множество $P = \{y \in F \mid \|A^{-1}y\|_E \leq 1\}$. Возьмем произвольный шар $B[\Theta, r] \subset F$. Так как пространство $F$ банахово, то по лемме 7.1

$$(\exists c > 0)(\forall r > 0)[B[\Theta, r] \subset \overline{rcP}]$$

Пусть $y \in B[\Theta, 1] \subset F$. Так как $B[\Theta, 1] \subset \overline{cP}$, то найдется $y_1 \in cP$, что $\|y - y_1\|_F < 2^{-1}$. Так как $y - y_1 \in B[\Theta, 2^{-1}] \subset \overline{2^{-1}cP}$, то найдется $y_2 \in 2^{-1}cP$, что $\|(y - y_1) - y_2\|_F < 2^{-2}$. Элемент $y - y_1 - y_2 \in B[\Theta, 2^{-2}] \subset \overline{2^{-2}cP}$, поэтому найдется $y_3 \in 2^{-2}cP$, что $\|(y - y_1 - y_2) - y_3\|_F < 2^{-3}$ и так далее.

По построению для всех $i \in \mathbb{N}$ элементы $y_i \in 2^{1-i}cP$, следовательно, $\|A^{-1}y_i\|_E \leq c2^{1-i}$. Кроме того, $\left\|y - \sum_{i=1}^{k} y_i\right\|_F < 2^{-k} \to 0$ при $k \to \infty$. Следовательно, $y = \sum_{i=1}^{\infty} y_i$.

Обозначим $x_i = A^{-1}y_i$. Рассмотрим в $E$ ряд $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$. Этот ряд абсолютно сходится, так как $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|_E \leq c\sum_{i=1}^{\infty} 2^{1-i} = 2c$. Пространство $E$ банахово, поэтому $\sum_{i=1}^{\infty} x_i = x \in E$. В силу непрерывности оператора $A$ получим

$$Ax = \sum_{i=1}^{\infty} Ax_i = \sum_{i=1}^{\infty} y_i = y$$

В таком случае, $x = A^{-1}y$ и

$$\|A^{-1}y\|_E = \|x\|_E = \left\|\sum_{i=1}^{\infty} x_i\right\|_E \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|_E \leq 2c.$$

Из последней оценки следует $\|A^{-1}\| \leq 2c$, то есть $A^{-1} \in L(F, E)$.$\odot$

- ЗАДАЧА.

7.4. Пусть на линейном пространстве $E$ заданы две нормы: $\|x\|_1$ и $\|x\|_2$. По отношению к каждой из них $E$ полное пространство. Предположим, что $(\exists c > 0)(\forall x \in E)(\|x\|_1 \leq c\|x\|_2)$. Доказать, что нормы $\|x\|_1$ и $\|x\|_2$ эквивалентны.

# § 8. Резольвента и спектр линейного оператора

Пусть $E$ - комплексное линейное нормированное пространство и задан линейный оператор $A : D(A) \subset E \to E$. Для числа $\lambda \in \mathbb{C}^1$ рассмотрим оператор $A - \lambda I$. Если оператор $A - \lambda I$ непрерывно обратим, то есть существует обратный оператор $(A - \lambda I)^{-1} \in L(E)$, то оператор

$(A-\lambda I)^{-1} = R(A,\lambda)$ называется резольвентой оператора $A$, а соответствующее значение $\lambda$ называется регулярным значением оператора $A$. Множество всех регулярных значений оператора $A$ обозначают $\rho(A)$. Множество чисел $\mathbb{C}^1 \backslash \rho(A) = \sigma(A)$ называется спектром оператора $A$.

Числа $\lambda \in \sigma(A)$ такие, что $N(A-\lambda I) \neq \{\Theta\}$ называются собственными значениями оператора $A$. Соответствующие элементы $x \in E (x \neq \Theta)$ такие, что $(A-\lambda I)x = \Theta$ или $Ax = \lambda x$, называются собственными элементами.

Теорема 8.1. Пусть $E$ - комплексное банахово пространство и оператор $A \in L(E)$. Пусть $\lambda \in \mathbb{C}^1$ такое, что $|\lambda| > \|A\|$. Тогда $\lambda \in \rho(A) u$ резольвента $R(A,\lambda)$ представима в виде

$$R(A,\lambda) = (A-\lambda I)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{\lambda^k}, \quad \text{где} \quad A^0 = I.$$

Доказательство. Так как $|\lambda| > 0$, то рассмотрим оператор $A - \lambda I = = -\lambda\left(I - \lambda^{-1}A\right)$. Заметим, что $\|\lambda^{-1}A\| < 1$, поэтому по теореме 6.4 существует обратный оператор

$$\left(I-\lambda^{-1}A\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\lambda^{-1}A\right)^k \in L(E).$$

Осталось показать, что $(A-\lambda I)^{-1} = -\lambda^{-1}\left(I-\lambda^{-1}A\right)^{-1}$. Для этого заметим, ЧТО

$$(A-\lambda I)\left[-\lambda^{-1}\left(I-\lambda^{-1}A\right)^{-1}\right] = I, \quad \left[-\lambda^{-1}\left(I-\lambda^{-1}A\right)^{-1}\right](A-\lambda I) = I$$

и воспользуемся леммой 6.1.$\odot$

Следствие 8.1. Пусть $E$ - комплексное банахово пространство и оператор $A \in L(E)$. Если число $\lambda \in \sigma(A)$, то $|\lambda| \leq \|A\|$.

Замечание. По признаку Коши ряд $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\lambda^{-1}A\right)^k$ сходится абсолютно, если

$$\lim_{k\to\infty}\left\|\left(\frac{A}{\lambda}\right)^k\right\|^{1/k} = \frac{r(A)}{|\lambda|} < 1,$$

где $r(A)$ - спектральный радиус оператора $A$. Так как $r(A) \leq \|A\|$, то доказанные выше теорему 8.1 и следствие 8.1 можно уточнить. Теорема 8.1'. Пусть $E$ - комплексное банахово пространство и оператор $A \in L(E)$. Пусть $\lambda \in \mathbb{C}^1$ такое, что $|\lambda| > r(A)$. Тогда $\lambda \in \rho(A) u$ резольвента $R(A,\lambda)$ представима в виде (8.1).

Следствие 8.1'. Пусть $E$ - комплексное банахово пространство и оператор $A \in L(E)$. Если число $\lambda \in \sigma(A)$, то $|\lambda| \leq r(A)$.

Теорема 8.2 Пусть $E$ - комплексное банахово пространство и оператор $A \in L(E)$. Тогда множество регулярных значений $\rho(A) \subset \mathbb{C}^1$ открыто.

Доказательство. Возьмем произвольное $\lambda_0 \in \rho(A)$. Тогда существует оператор $(A-\lambda_0 I)^{-1} \in L(E)$. Рассмотрим для $\lambda \in \mathbb{C}^1$ оператор

$$A - \lambda I = A - \lambda_0 I - (\lambda-\lambda_0)I = (A-\lambda_0 I)\left[I - (\lambda-\lambda_0)(A-\lambda_0 I)^{-1}\right].$$

Потребуем от $\lambda \in \mathbb{C}^1$ выполнения условия $|\lambda-\lambda_0| < \left\|(A-\lambda_0 I)^{-1}\right\|^{-1}$. Тогда $\left\|(\lambda-\lambda_0)(A-\lambda_0 I)^{-1}\right\| < 1$ и по теореме 6.4 существует оператор

$$\left[I - (\lambda-\lambda_0)(A-\lambda_0 I)^{-1}\right]^{-1} \in L(E).$$

Воспользовавшись леммой 6.1 , нетрудно показать, что тогда существует оператор

$$(A-\lambda I)^{-1} = \left[I - (\lambda-\lambda_0)(A-\lambda_0 I)^{-1}\right]^{-1}(A-\lambda_0 I)^{-1} \in L(E).$$

Таким образом, для чисел $\lambda$ из некоторой окрестности числа $\lambda_0$ оператор $A - \lambda I$ непрерывно обратим. Следовательно, множество $\rho(A)$ открыто. $\bigcirc$

Следствие 8.2. Пусть $E$ - комплексное банахово пространство и оператор $A \in L(E)$. Тогда множество $\sigma(A) \subset \mathbb{C}^1$ замкнуто.

• ЗАДАЧИ.

8.1. Пусть $\{e_k\}_{k=1}^n$ - базис в линейном пространстве $E$. Определим оператор $A : E \to E$ равенствами: $Ae_1 = \Theta, \quad Ae_{k+1} = e_k, \quad k = 1, 2, \dots, n-1$. Покажите, что $\lambda = 0$ единственное собственное значение оператора $A$.

8.2. В пространстве $C[0,1]$ рассмотрим оператор $Ax(t) = tx(t)$. Доказать, что его спектр $\sigma(A) = [0,1]$, причем ни одна точка спектра не является собственным значением.

8.3. Найти $\sigma(A)$ и $R(\lambda, A)$ (резольвенту) оператора $A$ из задачи 6.2 .

8.4. Пусть в $C[0,1]$ задан оператор дифференцирования $Ax(t) = x'(t)$. Показать, что:

а) $\sigma(A) = \varnothing$, если $D(A) = \{x(t) \mid (x' \in C[0,1]) \wedge (x(0) = 0)\}$;

б) $\sigma(A)$ состоит из одних собственных значений, заполняющих всю комплексную плоскость, если $D(A) = \{x(t) \mid x' \in C[0,1]\}$;

в) $\sigma(A)$ состоит из собственных значений вида $2\pi ik (k \in \mathbb{Z}, i-$ мнимая единица), если $D(A) = \{x(t) \mid (x' \in C[0,1]) \wedge (x(0) = x(1))\}$. 8.5. Показать, что линейный оператор $A : E \to E$, где $E$ - линейное нормированное пространство, и его резольвента коммутируют.

8.6. Пусть $E$ - линейное нормированное пространство и линейные операторы $A, B : E \to E$. Доказать, что для того чтобы $A$ и $B$ коммутировали, необходимо, чтобы $B$ коммутировал с $R(\lambda, A)$ для любого $\lambda \in \rho(A)$, и достаточно, чтобы $B$ и $R(\lambda, A)$ коммутировали хотя бы для одного $\lambda \in \rho(A)$.

8.7. Пусть $E$ - линейное нормированное пространство, оператор $A \in L(E)$ и непрерывно обратим. Доказать, что если $\lambda \in \sigma(A^{-1})$, то $\lambda^{-1} \in \sigma(A)$; обратно, если $\mu \in \sigma(A)$, то $\mu^{-1} \in \sigma(A^{-1})$.

# § 9. Замкнутые операторы

Пусть $E, F$ - линейные нормированные пространства и линейный оператор $A : D(A) \subset E \to F$. Оператор $A$ называется замкнутым, если

$$(\forall \{x_n\} \subset D(A)) \left[\left(x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0\right) \wedge \left(Ax_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} y_0\right) \Rightarrow (x_0 \in D(A)) \wedge (Ax_0 = y_0)\right].$$

Заметим, что всякий оператор $A \in L(E, F)$ замкнут, так как он непрерывен. В случае, когда $D(A) \neq E$, даже для ограниченного оператора дело обстоит сложнее.

Теорема 9.1. Пусть $E, F$ - линейные нормированные пространства и линейный оператор $A : D(A) \subset E \to F$ ограничен на $D(A)$. Для замкнутости оператора A достаточно, а в случае $F$ банахова пространства необходимо, чтобы множество $D(A)$ было замкнуто в $E$.

Доказательство. Начнем с достаточности. Пусть оператор $A$ ограничен на $D(A)$ и множество $D(A)$ замкнуто. Пусть последовательность $\{x_n\} \subset D(A)$ такая, что $x_n \to x_0$ и $Ax_n \to y_0$ при $n \to \infty$. В силу замкнутости $D(A)$ элемент $x_0 \in D(A)$. Оператор $A$ непрерывен на $D(A)$, поэтому $Ax_n \to Ax_0$ при $n \to \infty$. Следовательно, $Ax_0 = y_0$. Итак, оператор $A$ замкнутый.

Переходим к доказательству необходимости. Пусть оператор $A$ ограничен на $D(A)$, замкнут и $F$ - банахово пространство. Покажем замкнутость множества $D(A)$. Возьмем элемент $x_0 \in \overline{D(A)}$. Тогда найдется последовательность $\{x_n\} \subset D(A)$ такая, что $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$. Для $n, m \in \mathbb{N}$ элементы $x_n - x_m \in D(A)$, поэтому $\|Ax_n - Ax_m\|_F \le C \|x_n - x_m\|_E$. Отсюда следует фундаментальность последовательности $\{Ax_n\} \subset F$. Тогда, учитывая полноту $F$, получим $Ax_n \to y_0 \in F$. Из условия замкнутости оператора $A$ следует $x_0 \in D(A)$, то есть множество $D(A)$ замкнуто. ◯

Пример 9.1. Укажем неограниченный замкнутый оператор.

В пространстве $C[0,1]$ рассмотрим неограниченный оператор из примера 2.2: $Ax(t) = x'(t)$ с областью определения $D(A) = C^1[0,1] \subset C[0,1]$. Пусть

Теорема 8.1'. Пусть $E$ - комплексное банахово пространство и оператор $A \in L(E)$. Пусть $\lambda \in \mathbb{C}^1$ такое, что $|\lambda| > r(A)$. Тогда $\lambda \in \rho(A)$и резольвента $R(A, \lambda)$ представима в виде (8.1).

Следствие 8.1'. Пусть $E$ - комплексное банахово пространство и оператор $A \in L(E)$. Если число $\lambda \in \sigma(A)$, mo $|\lambda| \le r(A)$.

Теорема 8.2 Пусть $E$ - комплексное банахово пространство и оператор $A \in L(E)$. Тогда множество регулярных значений $\rho(A) \subset \mathbb{C}^1$ открыто.

Доказательство. Возьмем произвольное $\lambda_0 \in \rho(A)$. Тогда существует оператор $(A - \lambda_0 I)^{-1} \in L(E)$. Рассмотрим для $\lambda \in \mathbb{C}^1$ оператор

$$A-\lambda I=A-\lambda_0 I-(\lambda-\lambda_0)\, I=(A-\lambda_0 I)\left[I-(\lambda-\lambda_0)\,(A-\lambda_0 I)^{-1}\right].$$

Потребуем от $\lambda \in \mathbb{C}^1$ выполнения условия $|\lambda-\lambda_0|<\left\|(A-\lambda_0 I)^{-1}\right\|^{-1}$. Тогда $\left\|(\lambda-\lambda_0)\,(A-\lambda_0 I)^{-1}\right\|<1$ и по теореме 6.4 существует оператор

$$\left[I-(\lambda-\lambda_0)\,(A-\lambda_0 I)^{-1}\right]^{-1} \in L(E).$$

Воспользовавшись леммой 6.1 , нетрудно показать, что тогда существует оператор

$$(A-\lambda I)^{-1}=\left[I-(\lambda-\lambda_0)\,(A-\lambda_0 I)^{-1}\right]^{-1}(A-\lambda_0 I)^{-1} \in L(E).$$

Таким образом, для чисел $\lambda$ из некоторой окрестности числа $\lambda_0$ оператор $A-\lambda I$ непрерывно обратим. Следовательно, множество $\rho(A)$ открыто. ◯

Следствие 8.2. Пусть $E$ - комплексное банахово пространство и оператор $A \in L(E)$. Тогда множество $\sigma(A) \subset \mathbb{C}^1$ замкнуто.

- ЗАДАЧИ.

8.1. Пусть $\{e_k\}_{k=1}^n$ - базис в линейном пространстве $E$. Определим оператор $A: E \to E$ равенствами: $Ae_1=\Theta, \quad Ae_{k+1}=e_k, \quad k=1,2,\ldots,n-1$. Покажите, что $\lambda=0$ единственное собственное значение оператора $A$.

8.2. В пространстве $C[0,1]$ рассмотрим оператор $Ax(t)=tx(t)$. Доказать, что его спектр $\sigma(A)=[0,1]$, причем ни одна точка спектра не является собственным значением.

8.3. Найти $\sigma(A)$ и $R(\lambda,A)$ (резольвенту) оператора $A$ из задачи 6.2 .

8.4. Пусть в $C[0,1]$ задан оператор дифференцирования $Ax(t)=x'(t)$. Показать, что:

а) $\sigma(A)=\varnothing$, если $D(A)=\{x(t) \mid (x' \in C[0,1]) \wedge (x(0)=0)\}$;

б) $\sigma(A)$ состоит из одних собственных значений, заполняющих всю комплексную плоскость, если $D(A)=\{x(t) \mid x' \in C[0,1]\}$;

в) $\sigma(A)$ состоит из собственных значений вида $2\pi ik (k \in \mathbb{Z}, i-$ мнимая единица), если $D(A)=\{x(t) \mid (x' \in C[0,1]) \wedge (x(0)=x(1))\}$. 8.5. Показать, что линейный оператор $A: E \to E$, где $E$ - линейное нормированное пространство, и его резольвента коммутируют.

8.6. Пусть $E$ - линейное нормированное пространство и линейные операторы $A,B: E \to E$. Доказать, что для того чтобы $A$ и $B$ коммутировали, необходимо, чтобы $B$ коммутировал с $R(\lambda,A)$ для любого $\lambda \in \rho(A)$, и достаточно, чтобы $B$ и $R(\lambda,A)$ коммутировали хотя бы для одного $\lambda \in \rho(A)$.

8.7. Пусть $E$ - линейное нормированное пространство, оператор $A \in L(E)$ и непрерывно обратим. Доказать, что если $\lambda \in \sigma(A^{-1})$, то $\lambda^{-1} \in \sigma(A)$; обратно, если $\mu \in \sigma(A)$, то $\mu^{-1} \in \sigma(A^{-1})$.

# § 9. Замкнутые операторы

Пусть $E,F$ - линейные нормированные пространства и линейный оператор $A: D(A) \subset E \to F$. Оператор $A$ называется замкнутым, если

$(\forall \{x_n\} \subset D(A))\left[\left(x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0\right) \wedge \left(Ax_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} y_0\right) \Rightarrow (x_0 \in D(A)) \wedge (Ax_0=y_0)\right]$.

Заметим, что всякий оператор $A \in L(E,F)$ замкнут, так как он непрерывен. В случае, когда $D(A) \neq E$, даже для ограниченного оператора дело обстоит сложнее.

Теорема 9.1. Пусть $E,F$ - линейные нормированные пространства и линейный оператор $A: D(A) \subset E \to F$ ограничен на $D(A)$. Для замкнутости оператора А достаточно, а в случае $F$ банахова пространства необходимо, чтобы множество $D(A)$ было замкнуто в $E$.

Доказательство. Начнем с достаточности. Пусть оператор $A$ ограничен на $D(A)$ и множество $D(A)$ замкнуто. Пусть последовательность $\{x_n\} \subset D(A)$ такая, что $x_n \to x_0$ и $Ax_n \to y_0$ при $n \to \infty$. В силу замкнутости $D(A)$ элемент $x_0 \in D(A)$. Оператор $A$ непрерывен на $D(A)$, поэтому $Ax_n \to Ax_0$ при $n \to \infty$. Следовательно, $Ax_0=y_0$. Итак, оператор $A$ замкнутый.

Переходим к доказательству необходимости. Пусть оператор $A$ ограничен на $D(A)$, замкнут и $F$ - банахово пространство. Покажем замкнутость множества $D(A)$. Возьмем элемент $x_0 \in \overline{D(A)}$. Тогда найдется последовательность $\{x_n\} \subset D(A)$ такая, что $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$. Для $n, m \in \mathbb{N}$ элементы $x_n - x_m \in D(A)$, поэтому $\|Ax_n - Ax_m\|_F \leq C\|x_n - x_m\|_E$. Отсюда следует фундаментальность последовательности $\{Ax_n\} \subset F$. Тогда, учитывая полноту $F$, получим $Ax_n \to y_0 \in F$. Из условия замкнутости оператора $A$ следует $x_0 \in D(A)$, то есть множество $D(A)$ замкнуто. ◯

Пример 9.1. Укажем неограниченный замкнутый оператор.

В пространстве $C[0,1]$ рассмотрим неограниченный оператор из примера 2.2: $Ax(t) = x'(t)$ с областью определения $D(A) = C^1[0,1] \subset C[0,1]$. Пусть последовательность функций $\{x_n\} \subset D(A)$ такая, что выполняется $x_n \to x_0$ и $Ax_n = x_n' \to y_0$ при $n \to \infty$( сходимости по норме $C[0,1]$). По формуле Ньютона-Лейбница

$$x_n(t) = x_n(0) + \int_0^t x_n'(s)ds$$

В равенстве (9.1)$n \to \infty$. Поскольку из сходимости по норме пространства $C[0,1]$ (равномерной) следует поточечная сходимость, получим $x_n(t) \to x_0(t)$ и $x_n(0) \to x_0(0)$. Соответствующая сходимость интегралов следует из оценки

$$\left|\int_0^t x_n'(s)ds - \int_0^t y_0(s)ds\right| \leq \int_0^1 |x_n'(s) - y_0(s)|\,ds \leq \|x_n' - y_0\|$$

Таким образом, из (9.1) получаем равенство

$$x_0(t) = x_0(0) + \int_0^t y_0(s)ds$$

Из (9.2) следует, что функция $x_0 \in C^1[0,1] = D(A)$ и $Ax_0(t) = x_0'(t) = y_0(t)$, то есть $Ax_0 = y_0$. Замкнутость оператора $A$ установлена.

Теорема 9.2. Пусть $E, F$ - линейные нормированные пространства и оператор $A : D(A) \subset E \to F$ замкнут и обратим. Тогда обратный оператор $A^{-1} : D\left(A^{-1}\right) \subset F \to E$ замкнут

Доказательство. Напомним, что $D\left(A^{-1}\right) = R(A) \subset F$ и $R\left(A^{-1}\right) = = D(A) \subset E$. Возьмем последовательность $\{y_n\} \subset R(A)$ такую, что $\|y_n - y_0\|_F \to 0$ и $\|A^{-1}y_n - x_0\|_E \to 0$ при $n \to \infty$. Заметим, $A^{-1}y_n = x_n \in D(A)$ и $y_n = Ax_n$. Следовательно, $\|x_n - x_0\|_E \to 0$ и $\|Ax_n - y_0\|_F \to 0$. Так как по условию оператор $A$ замкнут, то $x_0 \in D(A)$ и $y_0 = Ax_0$. Таким образом, $y_0 \in R(A) = D\left(A^{-1}\right)$ и $A^{-1}y_0 = x_0$, то есть оператор $A^{-1}$ замкнутый..

Следствие 9.1. Пусть $E, F$ - линейные нормированные пространства u оператор $A : D(A) \subset E \to F$ непрерывно обратим. Тогда оператор $A$ замKHYm

Доказательство. Обратный оператор $A^{-1} \in L(F, E)$ и, следовательно, замкнут. Оператор $A = \left(A^{-1}\right)^{-1}$, то есть обратный к замкнутому, и потому замкнут. ◯

Свойство замкнутости линейного оператора тесно связано с замкнутостью его графика.

Пусть $E, F$ - линейные нормированные пространства. Рассмотрим множествО

$$E \times F = \{(x, y) \mid (x \in E) \wedge (y \in F)\}$$

Определим на $E \times F$ линейные операции

$$\alpha_1(x_1, y_1) + \alpha_2(x_2, y_2) = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2).$$

Тогда $E \times F$ становится линейным пространством с нулевым элементом $\Theta = (\Theta, \Theta) \in E \times F$. Превратим $E \times F$ в нормированное пространство, задав норму

$$\|(x, y)\|_{E \times F} = \|x\|_E + \|y\|_F.$$

Нетрудно доказать, что для случая банаховых пространств $E$ и $F$ пространство $E \times F$ также будет банаховым.

Пусть теперь задан линейный оператор $A : D(A) \subset E \to F$. Определим в $E \times F$ множество

$$\Gamma(A) = \{(x, Ax) \mid x \in D(A)\} \subset E \times F$$

которое называется графиком оператора $A$. Легко проверить, что множество $\Gamma(A)$ есть линейное многообразие в $E \times F$.

Теорема 9.3. Пусть $E, F$ - линейные нормированные пространства и $A : D(A) \subset E \to F$ линейный оператор. Множество $\Gamma(A)$ замкнуто в $E \times F$ тогда и только тогда, когда оператор  замкнут.

Доказательство. Предположим, что множество $\Gamma(A)$ замкнуто в $E \times F$. Возьмем последовательность $\{x_n\} \subset D(A)$ такую, что $x_n \to x_0$ и $Ax_n \to y_0$ при $n \to \infty$. Тогда

$$\|(x_n, Ax_n) - (x_0, y_0)\|_{E\times F} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Элементы $(x_n, Ax_n) \in \Gamma(A)$, поэтому $(x_0, y_0) \in \overline{\Gamma(A)} = \Gamma(A)$. Следовательно, $x_0 \in D(A)$ и $y_0 = Ax_0$. Таким образом, оператор $A$ замкнут.

Теперь предположим, что замкнут оператор $A$. Возьмем точку прикосновения $(x_0, y_0) \in \overline{\Gamma(A)}$. Тогда существует последовательность $\{x_n\} \subset D(A)$ такая, что выполнено (9.3). Следовательно, $x_n \to x_0$ и $Ax_n \to y_0$ при $n \to \infty$. Так как оператор $A$ замкнут, то $x_0 \in D(A)$ и $y_0 = Ax_0$. Таким образом, $(x_0, y_0) = (x_0, Ax_0) \in \Gamma(A)$ и множество $\Gamma(A)$ замкнуто.

Теорема 9.4. Пусть $E, F$ - банаховы пространства. Пусть линейный оператор $A : E \to F$ замкнут. Тогда оператор $A \in L(E, F)$.

Доказательство. Рассмотрим график оператора $\Gamma(A) = \{(x, Ax) \mid x \in E\}$, который по теореме 9.3 является замкнутым линейным многообразием (подпространством) банахова пространства $E \times F$. Тогда $\Gamma(A)$ с нормой

$$\|(x, Ax)\|_{\Gamma(A)} = \|x\|_E + \|Ax\|_F$$

порожденной нормой пространства $E \times F$, можно считать самостоятельным банаховым пространством.

На пространстве $\Gamma(A)$ определим оператор $B : \Gamma(A) \to E$ следующей формулой $B(x, Ax) = x$. Очевидно, оператор $B$ линейный. Покажем его ограниченность.

$$\|B(x, Ax)\|_E = \|x\|_E \le \|x\|_E + \|Ax\|_F = \|(x, Ax)\|_{\Gamma(A)}$$

Итак, оператор $B$ ограничен и $\|B\| \le 1$, то есть $B \in L(\Gamma(A), E)$. Заметим также, что множество значений $R(B) = E$. Рассмотрим ядро оператора $N(B) \subset \Gamma(A)$. Пусть $B(x, Ax) = \Theta \in E$. Следовательно, $x = \Theta$ и $Ax = A\Theta = \Theta \in F$. Получили $(x, Ax) = (\Theta, \Theta) = \Theta \in \Gamma(A)$, то есть $N(B) = \{\Theta\}$

Из теоремы 7.1 следует, что оператор $B$ непрерывно обратим, то есть суЩествует ограниченный обратный оператор $B^{-1} : E \to \Gamma(A)$. Заметим, если $x \in E$, то $B^{-1}x = (x, Ax)$. Следовательно

$$\left\|B^{-1}x\right\|_{\Gamma(A)} = \|(x, Ax)\|_{\Gamma(A)} = \|x\|_E + \|Ax\|_F \le \left\|B^{-1}\right\|_{E\to\Gamma(A)} \|x\|_E$$

Отсюда следует для всех $x \in E$ оценка $\|Ax\|_F \le \|B^{-1}\|_{E\to\Gamma(A)} \|x\|_E$, что означает ограниченность оператора $A$, а значит $A \in L(E, F)$.$\bigcirc$

- ЗАДАЧИ.

9.1. Пусть $E, F$ - линейные нормированные пространства, $A$ - замкнутый линейный оператор из $E$ в $F$. Доказать, что ядро $N(A)$ оператора $A$ является подпространством пространства $E$.

9.2. Пусть $E$ - линейное нормированное пространство, $F$ - банахово пространство, $A$ - замкнутый линейный оператор из $E$ в $F, B$ - линейный оператор из $E$ в $F$, ограниченный на $D(B)$, и $D(A) \subset D(B)$. Доказать, что оператор $A + B$ с $D(A + B) = D(A)$ замкнут.

9.3. Показать, что операторы $A$ из задач 2.11 и 2.12 замкнуты.

9.4. В пространстве $C[0,1]$ задан оператор $Ax(t) = x'(t)$ с областью определения $D(A) = \{x \in C[0,1] \mid (x' \in C[0,1]) \wedge [x(0) = x(1) = 0]\}$. Доказать, что оператор $A$ замкнут.

9.5. Пусть $E, F$ - банаховы пространства, $A$ - линейный оператор из $E$ в $F$. Доказать, что оператор $A$ является замкнутым тогда и только тогда, когда множество $D(A)$ с нормой $\|x\|_{D(A)} = \|x\|_E + \|Ax\|_F$ является банаховым пространством.

9.6. Пусть $E$ - линейное нормированное пространство, в котором $L, M-$ подпространства, и $E = L \oplus M$. Определим оператор $P$ проектирования $E$ на подпространство $L$ параллельно подпространству $M$ равенством $Px = u$, где $x = u + v (u \in L, v \in M)$. Доказать, что оператор $P$ замкнут, а, если $E-$ банахово пространство, то ограничен.

# § 10. Линейные ограниченные функционалы

Важнейшей в функциональном анализе является

Теорема 10.1 (Хан-Банах). Пусть $E$ - линейное нормированное пространство и на линейном многообразии $D \subset E$ задан линейный ограниченный функционал $f$. Тогда существует линейный ограниченный функционал $F \in E^*$ такой, что:

$$1)\ (\forall x \in D)[F(x) = f(x)], \quad 2)\|F\| = \|f\|$$

Другими словами: всякий линейный ограниченный функционал, определенный на линейном многообразии линейного нормированного пространства, можно продолжить на все пространство с сохранением нормы. Обратим внимание, что единственность продолжения не утверждается.

Заметим, что по теореме 5.1 функционал $f$ можно продолжить с сохранением нормы на замыкание $\bar{D}$, которое будет уже подпространством $E$. Если $\bar{D} = E$, то доказательство закончено. Если же нет, то далее функционал $f$ нужно продолжать уже с подпространства. Поэтому при доказательстве теоремы Хана-Банаха, без ограничения общности, можно считать, что $D$ подпространство $E$.

Доказательство этой теоремы в общем случае весьма громоздко (напр., [1], [12]) и опирается на лемму Цорна. Поэтому ограничимся рассмотрением только случая гильбертова пространства.

Прежде докажем теорему о представлении линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве.

Теорема 10.2 (Ф. Рисс). Пусть $H$ - гильбертово пространство со скалярным произведением $(u, v)$, где $, v \in H$. Пусть $f$ - линейный ограниченный функционал на $H$, mo есть $f \in H^*$. Тогда

$$(\exists y_f \in H)\,(\forall x \in H)\,[f(x) = (x, y_f)]$$

При этом $y_f \in H$ определяется по функционалу $f$ однозначно $\|y_f\| = \|f\|$. Доказательство. Для выбранного функционала $f \in H^*$ рассмотрим его ядро $N(f) = \{z \in H \mid f(z) = 0\}$. Заметим, что $N(f)-$ замкнутое линейное многообразие в $H$, то есть подпространство $H$.

Если $N(f) = H$, то $f(x) = 0$ для всех $x \in H$, и тогда верно представление $f(x) = (x, \Theta)$, то есть $y_f = \Theta$. Предположим теперь, что $N = N(f) \neq H$. Воспользуемся теоремой о проекциях $H = N \oplus N^{\perp}$ и $N^{\perp} \neq \{\Theta\}$. Возьмем $y_0 \in N^{\perp}$ и $y_0 \neq \Theta$. Тогда $f(y_0) \neq 0$. Строим элемент $y_1 = y_0 / f(y_0)$, для которого $f(y_1) = 1$.

Возьмем произвольный $x \in H$ и пусть $f(x) = \alpha$. Тогда $f(x) = \alpha f(y_1)$. Следовательно, $f(x - \alpha y_1) = 0$, то есть $x - \alpha y_1 = z \in N$. Получили представление $x = \alpha y_1 + z$, где $\alpha y_1 \in N^{\perp}$ и $z \in N$. Далее рассмотрим

$$(x, y_1) = (\alpha y_1 + z, y_1) = \alpha \|y_1\|^2$$

так как $(z, y_1) = 0$. Обозначим $y_f = y_1 / \|y_1\|^2$. Таким образом,

$$f(x) = \alpha = \left(x, \frac{y_1}{\|y_1\|^2}\right) = (x, y_f)$$

Предположим, что для некоторого $\bar{y} \in H$ также для всех $x \in H$ выполняется $f(x) = (x, \bar{y})$. Тогда $(x, y_f - \bar{y}) = 0$. Положим $x = y_f - \bar{y}$. Получим $\|y_f - \bar{y}\|^2 = 0$, то есть $\bar{y} = y_f$ и, следовательно, элемент $y_f \in H$ определяется по функционалу $f$ однозначно.

Покажем, что $\|y_f\| = \|f\|$. Действительно, для всех $x \in H$

$$|f(x)| = |(x, y_f)| \leq \|x\| \, \|y_f\|$$

Это означает, что $\|f\| \leq \|y_f\|$. С другой стороны, для $x = y_f$ выполняется $|f(y_f)| = \|y_f\|^2 = \|y_f\| \, \|y_f\|$. Следовательно, $\|f\| = \|y_f\|$.

Замечание. Построенное взаимно однозначное соответствие между элементами пространства $H$ и пространства $H^*$ является изометрией, так как сохраняет норму. Легко видеть, что это соответствие сохраняет линейные операции, то есть является изоморфизмом. Таким образом, пространства $H$ и $H^*$ можно отождествить, то есть считать $H = H^*$ с точностью до изометрического изоморфизма.

Доказательство теоремы 10.1 для гильбертова пространства.

Считаем, что в гильбертовом пространстве $H$ на подпространстве $D \subset H$ задан линейный ограниченный функционал $f$. Так как подпространство $D$ можно считать самостоятельным гильбертовым пространством, то по теореме 10.2 этот функционал порожден элементом $y \in D$, то есть $f(x) = (x, y)$ для всех $x \in D$.

Определим функционал $F$ на $x \in H$ тем же выражением $F(x) = (x, y)$. Очевидно, функционал $F$ линейный на $H$ и для всех $x \in D$ выполняется $F(x) = (x, y) = f(x)$ и $\|F\| = \|y\| = \|f\|$. Итак, функционал $F$ является продолжением функционала $f$ с сохранением нормы. Теорема Хана-Банаха для гильбертова пространства доказана. Но в случае гильбертова пространства, кроме существования продолжения, можно показать и единственность такого продолжения.

Предположим, что функционал $G(x) = (x, z)$ с некоторым $z \in H$ также является продолжением функционала $f$ с сохранением нормы. По теореме о проекциях $H = D \oplus D^{\perp}$, то есть элемент $z \in H$ однозначно представим в виде $z = z_1 + z_2$, где $z_1 \in D$ и $z_2 \in D^{\perp}$. Для всякого $x \in D$ получим

$$(x, z_1) = (x, z) = G(x) = f(x) = (x, y).$$

Следовательно, $(x, z_1 - y) = 0$, что означает $z_1 = y$. Итак, $z = y + z_2$. Теперь заметим, что по теореме 10.2

$$\|y\|^2 = \|f\|^2 = \|G\|^2 = \|z\|^2 = \|y + z_2\|^2 = \|y\|^2 + \|z_2\|^2 .$$

Отсюда следует $z_2 = \Theta$, то есть $z = y$ и $G(x) = (x, y) = F(x)$. ⊠

Сформулируем полученный аналог теоремы Хана-Банаха в гильбертовом пространстве.

Теорема 10.3. Пусть $H$ - гильбертово пространство и на линейном многообразии $D \subset H$ задан линейный ограниченный функционал $f$. Тогда существует единственное продолжение функционала $f$ на все пространство $H$ с сохранением нормы.

Весьма важными в функциональном анализе являются три следствия из теоремы Хана-Банаха, которые докажем для произвольного линейного нормированного пространства.

Следствие 10.1. Пусть $E$ - линейное нормированное пространство и элемент $x_0 \in E$ такой, что $x_0 \neq \Theta$. Тогда существует функционал $f \in E^*$ такой, что $f(x_0) = \|x_0\| \, u \|f\| = 1$.

Доказательство. Рассмотрим множество $\mathcal{L} = \{tx_0 \mid t- \text{ числа } \}$, которое является линейным многообразием в $E$. Определим на $x = tx_0 \in \mathcal{L}$ функционал $f(tx_0) = t\,\|x_0\|$. Очевидно, функционал $f$ линейный и $f(x_0) = \|x_0\|$. Кроме того, $|f(tx_0)| = |t| \, \|x_0\| = \|tx_0\|$, что означает ограниченность функционала $f$ на $\mathcal{L}$ и $\|f\| = 1$.

Осталось по теореме Хана-Банаха продолжить функционал $f$ с $\mathcal{L}$ на все пространство $E$.$\odot$

Следствие 10.2. Пусть $\mathcal{L}$ - линейное многообразие в линейном нормированном пространстве $E$. Пусть элемент $x_0 \notin \mathcal{L}$ такой, что

$$\rho(x_0, \mathcal{L}) = \inf_{x \in \mathcal{L}} \|x_0 - x\| = d > 0$$

Тогда существует функционал $f \in E^*$ такой, что:

1. $(\forall x \in \mathcal{L})[f(x)=0]$

2. $f\left(x_0\right)=1$

3. $\|f\|=1/d$.

Доказательство. Зададим в $E$ линейное многообразие

$$\mathcal{L}_1=\left\{x+t x_0 \mid (x \in \mathcal{L}) \wedge (t-\text{ числа })\right\}$$

Установим единственность представления элемента $y \in \mathcal{L}_1$ в виде $y=x+t x_0$. Пусть $y=x+t x_0=x_1+t_1 x_0$, где $x, x_1 \in \mathcal{L}$. Тогда $x-x_1=\left(t-t_1\right) x_0$. Если предположить, что $t=t_1$, то получим $x=x_1$ и представление $y$ единственно. Если же $t \neq t_1$, то элемент $x_0=\left(x-x_1\right) / \left(t-t_1\right) \in \mathcal{L}$. Но по условию $x_0 \notin \mathcal{L}$.

На $y=x+t x_0 \in \mathcal{L}_1$ определим функционал $f(y)=f\left(x+t x_0\right)=t$. Функционал $f$, как легко показать, на $\mathcal{L}_1$ линейный. Если взять $x \in \mathcal{L}$, то $x=x+0 x_0 \in \mathcal{L}_1$ и $f(x)=0$. Так как $x_0=\Theta+1 x_0 \in \mathcal{L}_1$, то $f\left(x_0\right)=1$. Итак, выполнены свойства 1) и 2).

Покажем ограниченность функционала $f$ на $\mathcal{L}_1$ и найдем его норму. Возьмем $y=x+t x_0 \in \mathcal{L}_1$ и пусть $t \neq 0$. Тогда $y \neq \Theta$, иначе $x_0=-x/t \in \mathcal{L}$. Далее получим

$$|f(y)|=|t|=\frac{|t|\|y\|}{\|y\|}=\frac{\|y\|}{\left\|x_0-(-x/t)\right\|} \leq \frac{\|y\|}{d}.$$

Оценка следует из того, что $-x/t \in \mathcal{L}$ и тогда $\left\|x_0-(-x/t)\right\| \geq d$. В случае $y=x+0 x_0 \in \mathcal{L}$ получим $|f(y)|=0 \leq \|y\|/d$. Таким образом, $\|f\| \leq 1/d$. Теперь по определению точной нижней границы найдем минимизирующую последовательность $\left\{x_n\right\} \subset \mathcal{L}$, то есть $\left\|x_0-x_n\right\| \rightarrow d$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда

$$1=f\left(x_0\right)=f\left(x_0\right)-f\left(x_n\right)=f\left(x_0-x_n\right) \leq \|f\|\left\|x_0-x_n\right\|$$

Отсюда при $n \rightarrow \infty$ получим $\|f\| \geq 1/d$. Следовательно, $\|f\|=1/d$ на линейном многообразии $\mathcal{L}_1$.

Осталось функционал $f$ продолжить по теореме Хана-Банаха с $\mathcal{L}_1$ на все пространство $E$.$\odot$

Следствие 10.3. Пусть $E$ - линейное нормированное пространство, $\left\{x_1, x_2, \ldots, x_n\right\} \subset E$ - линейно независимая система элементов. Тогда существует линейно независимая система функционалов $\left\{f_1, f_2, \ldots, f_n\right\} \subset E^*$ такая, что $f_l\left(x_k\right)=\delta_{lk}$, где символ $\delta_{lk}=1$ при $l=k$ u $\delta_{lk}=0$ npи $l \neq k$.

Доказательство. Возьмем элемент $x_1$ и рассмотрим линейную оболочку $\mathcal{L}_1=\mathscr{L}\left(x_2, x_3, \ldots, x_n\right)$, которая в силу конечномерности является подпространством $E$. Рассмотрим

$$\rho\left(x_1, \mathcal{L}_1\right)=\inf_{x \in \mathcal{L}_1}\left\|x_1-x\right\| \geq 0$$

Если предположить, что $\rho\left(x_1, \mathcal{L}_1\right)=0$, то в силу замкнутости $\mathcal{L}_1$ получим $x_1 \in \mathcal{L}_1$, а это невозможно в силу линейной независимости системы $\left\{x_1, x_2, \ldots, x_n\right\}$. Следовательно, $\rho\left(x_1, \mathcal{L}_1\right)>0$.

По следствию 10.2 существует функционал $f_1 \in E^*$ такой, что $f_1\left(x_1\right)=1$ и $f_1(x)=0$ на всех $x \in \mathcal{L}_1$. В частности, $f_1\left(x_k\right)=0$ для всех $k=\overline{2, n}$.

Функционалы $f_2, f_3, \ldots, f_n \in E^*$ строятся подобным образом. Так, например, для построения функционала $f_2 \in E^*$ следует рассмотреть линейную оболочку $\mathcal{L}_2=\mathscr{L}\left(x_1, x_3, x_4, \ldots, x_n\right)$ и определить по следствию 10.2 соответствующий функционал $f_2$.

Докажем линейную независимость функционалов $\left\{f_1, f_2, \ldots, f_n\right\}$. Предположим, что $\sum_{k=1}^n c_k f_k=\Theta \in E^*$. Тогда для любого $i=\overline{1, n}$ выполняется $0=\Theta\left(x_i\right)=\sum_{k=1}^n c_k f_k\left(x_i\right)=c_i$.$\odot$

Линейно независимые системы элементов $\left\{x_1, x_2, \ldots, x_n\right\} \subset E$ и функционалов $\left\{f_1, f_2, \ldots, f_n\right\} \subset E^*$ такие, что $f_l\left(x_k\right)=\delta_{lk}$, называются биортогональными.

Лемма 10.1. Пусть $E$ - линейное нормированное пространство, и задана $\left\{f_1, f_2, \ldots, f_n\right\} \subset E^*$ - линейно независимая система функционалов. Тогда существует линейно независимая система элементов $\left\{x_1, x_2, \ldots, x_n\right\} \subset E$, биортогоналвная с $\left\{f_1, f_2, \ldots, f_n\right\}$.

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции.

Покажем, что утверждение верно для одного функционала $f_1 \in E^*$. Заметим, что $f_1 \neq \Theta$. Тогда найдется $x_0 \in E$, что $f_1(x_0) \neq 0$. Положим $x_1 = x_0 / f_1(x_0)$. Элемент $x_1 \neq \Theta$ и $f_1(x_1) = 1$.

Предположим, что утверждение леммы справедливо для $m-1$-го функционала. Докажем, что тогда утверждение справедливо и для $m$ функционалов.

Итак, пусть для функционалов $\{f_2, f_3, \ldots, f_m\}$ построена биортогональная линейно независимая система элементов $\{x_2, x_3, \ldots, x_m\} \subset E$. Добавим функционал $f_1$. Для каждого $x \in E$ рассмотрим элементы $y = x - \sum_{l=2}^{m} f_l(x) x_l$. Тогда для каждого $i = 2, 3, \ldots, m$ выполнено

$$f_i(y) = f_i(x) - \sum_{l=2}^{m} f_l(x) f_i(x_l) = f_i(x) - f_i(x) = 0.$$

Предположим, что для каждого $x \in E$ и $f_1(y) = 0$. Тогда для каждого $x \in E$ выполняется $f_1(x) = \sum_{l=2}^{m} f_l(x) f_1(x_l)$, то есть $f_1 = \sum_{l=2}^{m} f_1(x_l) f_l$ и функционалы $\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ линейно зависимы. Полученное противоречие означает, что существует $x_1 \in E$ такой, что для $y_1 = x_1 - \sum_{l=2}^{m} f_l(x_1) x_l$ выполняется $f_1(y_1) \neq 0$. Положим $z_1 = y_1 / f_1(y_1)$. Тогда $f_1(z_1) = 1$ и одновременно $f_l(z_1) = 0$ для $l = \overline{2, m}$.