Неориентированные графы, степени, изоморфизм

- **Граф** (математическая структура для представления связей между объектами):

– Обозначается как $G = (X, \Gamma)$.

– Состоит из:

1° Непустое множество X (множество всех вершин графа).

2° Отображение Γ множества X в X (правило, определяющее связи между вершинами).

- **Элементы графа**:

– **Вершина** (точка, узел графа): Каждый элемент множества X.

– **Дуга** (направленное ребро): Пара элементов (x, y), где $y \in \Gamma x$ (показывает направленную связь от x к y).

- **Множество дуг** (все связи в графе):

– Обозначается через U (полный набор всех связей).

– Дуги обозначаются буквами α, β, ω (при необходимости с индексами).

Определение. Степень вершины v_i (обозн. d_i или $\deg v_i$) -- число рёбер, инцидентных v_i (количество связей, примыкающих к вершине).

Теорема 2.1 (Эйлера) Сумма степеней вершин графа равна удвоенному числу рёбер:

$\sum_i \deg v_i = 2q$

Следствие 2.1(а). Число вершин с нечётными степенями всегда чётно (важно для существования эйлеровых путей).

Ограничения степеней:

В (p,q)-графе (где p -- число вершин, q -- число рёбер): $0 \leq \deg v \leq p - 1$ для любой вершины v

Обозначения:

- $\delta(G) = \min \deg G$ -- минимальная степень (наименьшее число связей у вершины)
- $\Delta(G) = \max \deg G$ -- максимальная степень (наибольшее число связей у вершины)

Определение. Регулярный (однородный) граф (все вершины имеют одинаковое число связей): $\delta(G) = \Delta(G) = r = \deg G$

Следствие 2.1(б). Каждый кубический граф имеет чётное число вершин (следует из теоремы Эйлера).

- Изолированная: $\deg v = 0$ (вершина без связей)
- Концевая (висячая): $\deg v = 1$ (вершина с единственной связью)

Графы G и H изоморфны (*изоморфны*: $G \cong H$ или $G = H$), если существует взаимно однозначное соответствие между их вершинами, сохраняющая смежность.

Маршруты, связность, метрика графа

Определение. *Маршрут* в графе G (последовательность переходов по вершинам и рёбрам) -- чередующаяся последовательность вершин и рёбер $v_0, x_1, v_1, \ldots, x_n, v_n$, где:

- Начинается и заканчивается вершиной (точкой графа)
- Каждое ребро инцидентно (напрямую соединяет) предшествующей и следующей вершинам

Обозначение: $(v_0 - v_n)$-маршрут (путь от вершины v_0 до v_n) записывается как $v_0 v_1 v_2 \ldots v_n$

Классификация маршрутов:

- *Замкнутый*: $v_0 = v_n$ (начальная и конечная вершины совпадают)
- *Открытый*: $v_0 \neq v_n$ (начальная и конечная вершины различны)
- *Цепь* (trail): все рёбра различны (по каждому ребру проходим не более одного раза)
- *Простая цепь* (path): все вершины и рёбра различны (нигде не повторяемся)
- *Цикл*: замкнутая цепь (маршрут возвращается в начальную точку)
- *Простой цикл*: замкнутый маршрут с $n \geq 3$ различными вершинами (замкнутый путь без повторений вершин, кроме начальной/конечной)

Длина маршрута $v_0 v_1 \ldots v_n = n$ (количество пройденных рёбер)

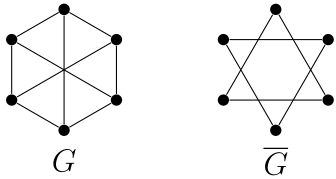
Важные метрики:

- *Обхват графа* $g(G)$: длина кратчайшего простого цикла (минимальное количество рёбер в замкнутом пути без повторений)
- *Окружение графа* $c(G)$: длина длиннейшего простого цикла (максимальное количество рёбер в замкнутом пути без повторений)

Примечание: $g(G)$ и $c(G)$ не определены для графов без циклов (для деревьев и лесов).

Самодополнительные графы

Дополнение графа $\overline{G}$ (граф с теми же вершинами, но противоположными связями):



- Множество вершин: $V(\overline{G}) = V(G)$
- Две вершины смежны в $\overline{G} \Leftrightarrow$ несмежны в G

Полный граф K_p (все вершины попарно соединены):

- Содержит p вершин
- Имеет $\binom{p}{2}$ рёбер
- Является регулярным степени $p-1$
- Частный случай: K_3 -- треугольник

Вполне несвязный граф $\overline{K_p}$ -- дополнение полного графа (регулярный граф степени 0).

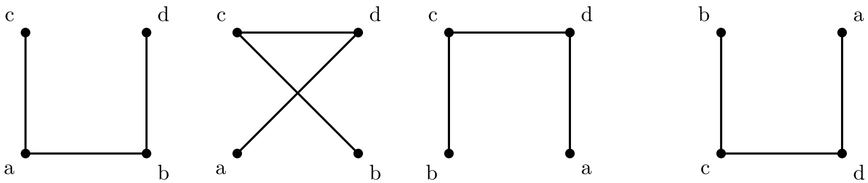


Рис. 1: Граф - Его дополние - переворачиваем - Получили тот же граф

Экстремальные графы

Теорема 2.3 (Турана): Наибольшее число рёбер у графов с r вершинами без треугольников равно $\lfloor r^2/4 \rfloor$.

Доказательство (по индукции для чётных r):

1. База: очевидна для малых r.
2. Шаг: для $r = 2n + 2$, где утверждение верно для всех чётных $r \leq 2n$:

- Пусть G — граф с $p = 2n + 2$ вершинами без треугольников.
- Существуют смежные вершины u, v (граф не вполне несвязный).
- В подграфе $G' = G - \{u, v\}$ максимум n^2 рёбер.
- Нет вершины w, смежной с u и v одновременно.
- Если w смежна с k вершинами G', то v смежна максимум с $(2n-k)$ вершинами.
- Всего рёбер: $n^2 + k + (2n - k) + 1 = n^2 + 2n + 1 = p^2/4$.

Конструктивное доказательство существования:

Для чётного p $(p, p^2/4)$-граф без треугольников строится так:

- Берём два множества V_1 и V_2 по $p/2$ вершин.
- Соединяем каждую вершину из V_1 с каждой из V_2.

Примечания:

- Доказательство существования чисел $r(m, n)$ см. у М. Холла.
- По определению бесконечный граф не является графом.
- Обзор бесконечных графов: см. Нэш-Вильямс.

Теорема 2.4: Граф является двудольным тогда и только тогда, когда все его простые циклы чётны.

Доказательство:

- Если G — двудольный граф, то его вершины можно разбить на V_1 и V_2, и любое ребро соединяет вершины из разных множеств.
- Каждый простой цикл $v_1 v_2 \ldots v_n v_1$ содержит вершины из V_1 и V_2, так что длина n цикла чётна.
- Обратное: если все простые циклы чётны, то каждое ребро соединяет V_1 и V_2.

Дополнительные результаты:

- $ex(p, C_p) = \left\lfloor \frac{1}{2} + \frac{p(p-1)}{2} \right\rfloor$
- $ex(p, K_{4-x}) = \left\lfloor \frac{p^2}{4} \right\rfloor$
- $ex(p, K_{3,x} - x) = \left\lfloor \frac{p^2}{4} \right\rfloor$

Обобщение Турана: $ex(p, K_n) = \frac{(n-2)(p^2-r^2)}{2(n-1)} + \binom{r}{2}$, где $p \equiv r \pmod{(n-1)}$ и $0 \leq r < n-1$.

Числа Рамсея

Мотивационная задача: В любой группе из 6 человек найдутся либо 3 попарно знакомых, либо 3 попарно незнакомых (переформулировка в терминах графов).

Теорема 2.2 (о существовании треугольника): В графе G с 6 вершинами либо G, либо $\overline{G}$ содержит треугольник.

Доказательство: Пусть v -- произвольная вершина графа G. Среди 5 оставшихся вершин найдутся 3 вершины u_1, u_2, u_3, смежные с v в G (иначе они были бы смежны в $\overline{G}$). Если любые две из u_1, u_2, u_3 смежны в G -- получаем треугольник с v. Если нет -- u_1, u_2, u_3 образуют треугольник в $\overline{G}$.

Число Рамсея $r(m,n)$ (минимальное число вершин, гарантирующее наличие либо K_m, либо K_n):

- Симметричность: $r(m,n) = r(n,m)$
- Верхняя оценка (Эрдёш-Секереш): $r(m,n) \leq \binom{m+n-2}{m-1}$

Теорема Рамсея (для бесконечных графов): Каждый бесконечный граф содержит либо $\aleph_0$ попарно смежных вершин, либо $\aleph_0$ попарно несмежных вершин.

Примечание: Задача нахождения точных значений $r(m,n)$ остаётся открытой. Известные значения приведены в таблице 2.1.

Эйлеровы графы

Эйлеров граф -- граф, содержащий цикл со всеми вершинами и рёбрами (имеет эйлеров цикл). Обязательно связный.

Теорема 7.1 (критерий эйлеровости). Для связного графа G эквивалентны:

1. G -- эйлеров граф
2. Все вершины имеют чётную степень
3. Рёбра можно разбить на простые циклы

Доказательство:

(1)$\Rightarrow$(2): В эйлеровом цикле каждое прохождение вершины даёт $+2$ к её степени. Каждое ребро используется один раз $\Rightarrow$ степени чётны.

(2)$\Rightarrow$(3): В связном графе с чётными степенями:

- Найдём простой цикл Z
- Удалим его рёбра -- получим граф G_1 с чётными степенями
- Повторяем до пустого графа G_n

(3)$\Rightarrow$(1): Имея разбиение на циклы:

- Берём цикл Z_1
- Находим цикл Z_2 с общей вершиной v
- Строим замкнутую цепь из Z_1 и Z_2
- Продолжаем до полного эйлерова цикла

Следствие 7.1(а). В связном графе с $2n$ вершинами нечётной степени $(n \geq 1)$ рёбра можно разбить на n открытых цепей.

Следствие 7.1(б). В связном графе с двумя вершинами нечётной степени существует открытая цепь, содержащая все рёбра (начинается и заканчивается в вершинах нечётной степени).

Деревья

Основные определения: Ациклический граф -- граф без циклов. **Дерево** -- связный ациклический граф. **Лес** -- граф без циклов (компоненты -- деревья).

Теорема 4.1. Для графа G эквивалентны: 1) G -- дерево 2) любые две вершины соединены единственной простой цепью 3) G связен и $p = q + 1$ 4) G ациклический и $p = q + 1$ 5) G ациклический, и добавление любого ребра создаёт ровно один цикл 6) G связный, не K_p при $p \geq 3$, добавление ребра создаёт один цикл 7) G не $K_3 \cup K_1$ и не $K_3 \cup K_2$, $p = q + 1$, добавление ребра создаёт один цикл

Доказательство (схема): 1⇒2: От противного: две цепи образуют цикл 2⇒3: Индукция по числу вершин 3⇒4: От противного: цикл длины n требует $q \geq p$ 4⇒5: Единственность компоненты из $p = q + k$ 5⇒6: K_p при $p \geq 3$ содержит цикл 6⇒7: Анализ возможных циклов 7⇒1: Исключение случаев с циклами

Следствие 4.1(a). В нетривиальном дереве есть минимум две висячие вершины. *Доказательство:* Из $\sum d_i = 2(p-1)$ в дереве.

Диаметр и радиус графа

Расстояние $d(u,v)$ между вершинами (длина кратчайшей простой цепи):

$$d(u,v) = \begin{cases} \text{длина кратчайшей } (u\text{-}v)\text{-цепи}, & \text{если вершины соединены} \\ \infty, & \text{если вершины не соединены} \end{cases}$$

Свойства метрики (для связного графа):

1. $d(u,v) \geq 0$; $d(u,v) = 0 \Leftrightarrow u = v$ (неотрицательность)
2. $d(u,v) = d(v,u)$ (симметричность)
3. $d(u,v) + d(v,w) \geq d(u,w)$ (неравенство треугольника)

Термины:

- *Геодезическая* -- кратчайшая простая $(u\text{-}v)$-цепь
- *Диаметр графа* $d(G)$ -- длина самой длинной геодезической

Степени графа: Для графа G определяется G^k (k-я степень):

- $V(G^k) = V(G)$ (те же вершины)
- Вершины u,v смежны в $G^k \Leftrightarrow d(u,v) \leq k$ в G

Примеры: $C_5^2 = K_5$, $P_4^2 = K_1 + K_3$

Хроматическое число графа

— это минимальное количество цветов, необходимых для раскраски графа так, чтобы никакие две смежные вершины не имели одинакового цвета. Граф G называется n-раскрашиваемым, если $\chi(G) \leq n$, и n-хроматическим, если $\chi(G) = n$.

Известные результаты

- $\chi(K_p) = p$
- $\chi(K_p - x) = p - 1$
- $\chi(K'_p) = 1$
- $\chi(K_{m,n}) = 2$
- $\chi(C_{2n}) = 2$
- $\chi(C_{2n+1}) = 3$
- $\chi(T) = 2$ для любого нетривиального дерева T

Теорема 12.1: Граф двуцветен тогда и только тогда, когда он не содержит нечётных простых циклов.

Теорема 12.2: Для любого графа G, $\chi(G) \leq 1 + \max \delta(G')$, где максимум берется по всем порожденным подграфам G' графа G.

Следствие 12.2 (а): Для любого графа G, $\chi \leq 1 + \Delta$.

Теорема 12.3 (Брукс): Если $\Delta(G) = n$, то граф G всегда n-раскрашиваем, за исключением следующих двух случаев:

1. $n = 2$ и G имеет компоненту, являющуюся нечетным циклом;
2. $n \geq 2$ и K_{n+1} — компонента графа G.

Теорема 12.5: Для любых двух положительных целых чисел t и n существует n-хроматический граф, обхват которого превосходит t.

Теорема 12.6: Для любого графа G сумма и произведение чисел χ и $\bar{\chi}$ удовлетворяют неравенствам:

$$2\sqrt{p} \leq \chi + \bar{\chi} \leq p + 1, \tag{1}$$

$$p \leq \chi\bar{\chi} \leq \left(\frac{p+1}{2}\right)^2. \tag{2}$$

Заключение Представленные теоремы и оценки дают представление о сложности задачи нахождения хроматического числа графа и показывают, что даже для простых графов эта задача может быть нетривиальной.

Цикломатическое число графа

Мультиграф (X,U) -- пара из множества вершин X и множества рёбер U, где пара вершин может соединяться несколькими рёбрами.

Важные числовые характеристики:

- Для мультиграфа G с n вершинами, m рёбрами, p компонентами:
  - Ранг графа: $\rho(G) = n - p$
  - Цикломатическое число: $\nu(G) = m - n + p = m - \rho(G)$

Теорема 1. При добавлении ребра между a и b:

- Если a,b соединены цепью или совпадают:
  - $\rho(G') = \rho(\bar{G})$
  - $\nu(G') = \nu(\bar{G}) + 1$
- Иначе:
  - $\rho(G) = \rho(\bar{G}) + 1$
  - $\nu(G') = \nu(\bar{G})$

Векторное представление циклов:

- Каждому ребру присваивается ориентация
- Для цикла μ: $c^k = r_k - s_k$, где r_k,s_k -- число проходов по/против ориентации
- Цикл представляется вектором $(c^1, \ldots, c^m)$
- Циклы независимы $\Leftrightarrow$ их векторы линейно независимы

Теорема 2. Цикломатическое число $\nu(G)$ равно максимальному количеству независимых циклов.

Следствия:

1. $\nu(G) = 0 \Leftrightarrow$ граф без циклов
2. $\nu(G) = 1 \Leftrightarrow$ граф содержит ровно один цикл

Теорема 3. В сильно связном графе цикломатическое число равно максимальному количеству независимых контуров.

Плоские графы и формула Эйлера

Планарный граф: Граф, который можно нарисовать без пересечения рёбер.

Плоский граф: Граф, нарисованный на плоскости.

Грани: Области, определяемые плоским графом; внешняя грань — неограниченная.

Цикл: Путь, начинающийся и заканчивающийся в одной вершине без повторений.

Формула Эйлера: Для полиэдров: $V - E + F = 2$, где V — вершины, E — рёбра, F — грани.

Графовая версия: Для связного плоского графа: $p - q + r = 2$.

Следствия и теоремы:

- **Следствие 11.1 (а)**: Если каждая грань — n-цикл, то $q = \frac{n(p-2)}{n-2}$.
- **Максимальный планарный граф**: Граф, который перестаёт быть планарным при добавлении ребра.
- **Следствие 11.1 (б)**: Для максимального плоского графа $q = 3p - 6$.
- **Условие планарности**: Для $p \geq 3$, $q \leq 3p - 6$.
- **Непланарные графы**: K_5 и $K_{3,3}$.
- **Теорема Уитни**: Граф планарен, если каждый его блок планарен.
- **Теорема 11.3**: Для любой грани f двусвязного плоского графа G найдётся изоморфный плоский граф с внешней гранью f.

Дополнительные концепции:

- **Выпуклый многогранник**: Многогранник, содержащий любые соединяющие его точки отрезки.
- **Теорема Штейница и Радемахера**: Граф — 1-скелет выпуклого многогранника, если он планарен и трёхсвязен.
- **Теорема 11.7**: Любой планарный граф изоморфен плоскому графу с прямыми рёбрами.

Линейно независимые циклы

Линейно независимые циклы

- **Пространство циклов** и **пространство коциклов** определяются над полем $F_2 = \{0, 1\}$.
- **0-цепь** — линейная комбинация вершин $\Sigma e_i v_i$.
- **1-цепь** — линейная комбинация рёбер $\Sigma e_i x_i$.
- **Граничный оператор** ∂: переводит 1-цепи в 0-цепи.

– ∂ — линейный оператор.
– Если $x = uv$, то $\partial x = u + v$.

- **Кограничный оператор** δ: переводит 0-цепи в 1-цепи.

– δ — линейный оператор.
– $\delta v = \Sigma e_i x_i$, где $e_i = 1$, если ребро x_i инцидентно v.

Циклы и Коциклы

- **Циклический вектор** — 1-цепь с границей 0 (набор простых циклов без общих рёбер).
- **Пространство циклов** — векторное пространство всех циклических векторов.
- **Базис циклов** — максимальный набор независимых простых циклов.
- **Коцикл** — минимальный разрез графа.
- **Пространство коциклов** — множество всех кограниц графа.
- **Базис коциклов** — базис пространства коциклов, состоящий из коциклов.

Циклический ранг

- **Теорема 4.5**: Циклический ранг $m(G)$ равен числу хорд любого остова в G.
- **Следствие 4.5 (а)**: $m(G) = q - p + 1$ для связного (p, q)-графа.
- **Следствие 4.5 (б)**: $m(G) = q - p + k$ для (p, q)-графа с k компонентами.

Коциклический ранг

- **Теорема 4.6**: Коциклический ранг $t^*(G)$ равен числу рёбер любого остова.
- **Следствие 4.6 (а)**: $t^*(G) = p - 1$ для связного (p, q)-графа.
- **Следствие 4.6 (б)**: $t^*(G) = p - k$ для (p, q)-графа с k компонентами.

Замечания

- Уравнение Эйлера — Пуанкаре: $p - q = k - m(G)$.
- Графы как симплициальные комплексы: вершины — 0-симплексы, рёбра — 1-симплексы.

Хроматическое число плоского графа

Основные утверждения:

- $\chi(H) \leq \chi(G)+1$ и $\overline{\chi}(H) \leq \overline{\chi}(G)+1$.
- Если $\chi(H) < \chi(G)+1$ или $\overline{\chi}(H) < \overline{\chi}(G)+1$, то $\chi(H)+\overline{\chi}(H) \leq p+1$.
- Всегда $\chi(H)+\overline{\chi}(H) \leq p+1$.
- $\overline{\chi}\chi \leq \left(\frac{p+1}{2}\right)^2$.

Теорема о пяти красках:

Теорема. *Каждый планарный граф 5-раскрашиваем.*

Доказательство: Индукция по числу p вершин.

- База: для $p \leq 5$ граф p-раскрашиваем.
- Шаг: для графа G с $p+1$ вершинами, найдется вершина v степени 5 или менее. Граф $G - v$ 5-раскрашиваем.
- Если все пять цветов используются, переставляем цвета, чтобы получить 5-раскраску.

Гипотеза четырёх красок:

- Каждая плоская карта 4-раскрашиваема.
- Эквивалентно: каждый планарный граф 4-раскрашиваем.

Теорема 12.8:

Теорема. *Каждый планарный граф, имеющий меньше четырех треугольников, 3-раскрашиваем.*

Следствие 12.8 (a):

- Каждый планарный граф, не содержащий треугольников, 3-раскрашива

Теорема 12.9:

Теорема. *Гипотеза четырех красок справедлива тогда и только тогда, когда каждая кубическая плоская карта, не имеющая мостов, 4-раскрашиваема.*

Доказательство:

- Любая плоская карта 4-раскрашиваема тогда и только тогда, когда справедлива гипотеза четырех красок.
- Если 4-раскрашиваем всякая плоская карта, не содержащая мостов, то и всякая кубическая плоская карта, не содержащая мостов, также 4-раскрашиваема.

Примеры неплоских графов

Порядковые числа в графах

Пример использования порядковых чисел

Порядковое число графа G — минимальное число цветов, необходимых для раскраски вершин графа так, чтобы никакие две смежные вершины не имели одинаковый цвет.

Теорема 5.1: Для любого графа G его порядковое число $\chi(G)$ удовлетворяет неравенству:

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$$

где $\Delta(G)$ — максимальная степень вершины в графе G.

Пример: Рассмотрим граф K_4 (полный граф с четырьмя вершинами).

- Все вершины соединены друг с другом.
- $\Delta(K_4) = 3$.
- $\chi(K_4) = 4$, так как каждая вершина должна иметь уникальный цвет.

Алгоритм раскраски графа:

1. Выберите вершину v с максимальной степенью.
2. Назначьте v минимально возможный цвет, не совпадающий с цветами её соседей.
3. Повторите для всех вершин графа.

Замечание: Порядковое число графа может быть равно $\Delta(G)$, если граф является двудольным.

Следствие 5.1(a): Если граф G планарен, то $\chi(G) \leq 4$ (теорема о четырёх красках).

Применение: Раскраска графов используется в задачах планирования, таких как распределение частот в беспроводных сетях и составление расписаний.

Функция Гранди

- **Функция Гранди:** Для конечного графа (X, Γ) функция $g(x)$ — это наименьшее неотрицательное целое число, не принадлежащее множеству $g(\Gamma x) = \{g(y) \mid y \in \Gamma x\}$.
- **Пример 1:** Граф на рис. 3-3 допускает две функции Гранди. Если $\mathit{\Gamma} x = \{y_1, y_2, \ldots\}$, то $g(x)$ — наименьшее число, отличное от $g(y_1), g(y_2)$.
- **Пример 2:** Граф на рис. 3-2 допускает единственную функцию Гранди $g(x)$, где $g(x) = o(x)$ для $x \neq a$, а в a принимает значение ω (трансфинитное число).
- **Теорема 5:** Прогрессивно конечный граф допускает одну функцию Гранди $g(x)$, и $g(x) \leq o(x)$.
- **Доказательство:** Индукция по множествам:

$$\begin{aligned} X(0) &= \{x \mid \mathit{\Gamma} x = \emptyset\}, \\ X(1) &= \{x \mid \mathit{\Gamma} x \subseteq X(0)\}, \\ X(2) &= \{x \mid \mathit{\Gamma} x \subseteq X(1)\}. \end{aligned}$$

- **Теорема 6:** Если $|X| < \infty$, то $g(x) \leq \Gamma$. Если $g(x) = n$, то g принимает в $\mathit{\Gamma} x$ все значения $0, 1, 2, \ldots, n-1$, следовательно, $|X| \geq n - g(x)$.
- **Заключение:** Для Γ-конечного или прогрессивно ограниченного графа значения $g(x)$ остаются конечными.

Внутреннее устойчивое множество Граф $G = (X, \Gamma)$, множество $S \subseteq V$ называется *внутренне устойчивым*, если $\Gamma S \cap S = \emptyset$.
Число внутренней устойчивости

$$\alpha(G) = \max_{S \in \mathfrak{S}} |S|$$

Связь с хроматическим числом

$$\alpha(G)\gamma(G) \geq |X|$$

Пример Граф с $\gamma(G) = 4$, где белые вершины образуют наибольшее внутренне устойчивое множество.

Лемма 1

$$\alpha(G \times H) \geq \alpha(G) \cdot \alpha(H)$$

Емкость графа

$$\theta(G) = \sup_n \sqrt[n]{\alpha(G^n)}$$

Лемма 2 Сохраняющее отображение σ переводит S во внутренне устойчивое множество $\sigma(S)$.

Лемма 3 Если $\sigma(X)$ внутренне устойчиво, то $\theta(G) = \alpha(G)$.

Теорема 7 (Шеннон) Если для G или H существует σ, то

$$\alpha(G \times H) = \alpha(G)\alpha(H)$$

Следствие Если σ переводит вершины G во внутренне устойчивое множество, то

$$\alpha(G) = \sup_n \sqrt[n]{\alpha(G^n)} = \alpha(G)$$

Внешнее устойчивое множество Граф $G = (X, \Gamma)$, множество $T \subseteq X$ внешне устойчиво, если для каждой вершины $x \notin T$ имеем $\Gamma_x \cap T \neq \varnothing$ (каждая вершина вне T соединена с T). Если $\mathcal{T}$ — все внешне устойчивые множества, то $X \in \mathcal{T}$ и $T \in \mathcal{T} \quad A \supseteq T \Rightarrow A \in \mathcal{T}$.

Число внешней устойчивости

$$\beta(G) = \min_{T \in \mathcal{T}} |T|$$

(минимальное внешне устойчивое множество).

Алгоритм нахождения наименьшего внешне устойчивого множества

1. Удаляем вершину x, если $\Delta x \subseteq \Delta y$ для $y \neq x$ (вершина y заменяет x). Пример: удаляем c, d, f.
2. Если есть висячее ребро (x, y), то $x \in T$. Пример: $a \in T$.
3. Исключаем a и $\Delta a = \{\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\}$.
4. Повторяем шаги 1 и 2. Если граф неприводим, временно добавляем в T вершину, например b.
5. Исключаем b и $\Delta b = \{a, e, f\}$.
6. Упрощаем граф: исключаем g, так как $\Delta g \subseteq \Delta e = \{g\}$. Включаем e в T, получаем $T = \{a, b, e\}$.

Ядро графа Пусть $G = (X, \Gamma)$ — конечный или бесконечный граф. Множество $S \subseteq X$ называется *ядром* графа, если S устойчиво как внутренне, так и внешне, т.е. если

$$x \in S \Rightarrow \Gamma x \cap S = \varnothing, \tag{3}$$

$$x \notin S \Rightarrow \Gamma x \cap S \neq \varnothing. \tag{4}$$

Из условия (1) следует, что ядро S не содержит петель. Из условия (2) — что S содержит все такие вершины x, для которых $\Gamma x = \varnothing$. Пустое множество $\varnothing$ не может быть ядром.

Теорема 1

Если S — ядро графа (X, Γ), то множество S — максимальное в семействе $\mathfrak{S}$ внутренне устойчивых множеств, т.е.

$$A \in \mathfrak{S},\ A \supseteq S \Rightarrow A = S$$

Теорема 2

В симметрическом графе без петель каждое максимальное множество семейства $\mathfrak{S}$ внутренне устойчивых множеств представляет собой ядро.

Следствие

Симметрический граф без петель обладает ядром.

Характеристическая функция

Функция $\varphi_S(x)$ множества S определяется как:

$$\varphi_S(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x \in S \\ 0, & \text{при } x \notin S \end{cases}$$

Теорема 3

Для того чтобы множество S было ядром, необходимо и достаточно чтобы для характеристической функции $\varphi_S(x)$ выполнялось соотношение

$$\varphi_S(x) = 1 - \max_{y \in \Gamma x} \varphi_S(y)$$

Теорема 4

Прогрессивно конечный граф обладает ядром.

Теорема Ричардсона

Конечный граф, не содержащий контуров нечетной длины, обладает ядром.

Игры на графе, игра НИМ

Определение игры на графе Граф (X, Γ) дает возможность определить некоторую игру двух игроков, которых мы назовем (A) и (B). Положениями этой игры служат вершины графа, начальная вершина x_0 выбирается жребием, и противники играют поочередно: сперва игрок (A) выбирает вершину x_1 в множестве Γx_0, затем (B) выбирает вершину x_2 в множестве Γx_1, после этого (A) опять выбирает вершину x_3 в Γx_2, и т.д. Если один из игроков выбрал вершину x_n, для которой $\Gamma x_n = \emptyset$, то партия оканчивается, игрок, выбравший вершину последним, выиграл, а его противник проиграл. Ясно, что если граф не является прогрессивно конечным (граф, в котором любая последовательность вершин заканчивается), то партия может никогда не окончиться.

Игра НИМ В честь известного развлечения, которое здесь обобщено, будем описанную только что игру называть *игрой Ним*, а определяющий ее граф обозначать через (X, Γ); сейчас наша задача состоит в том, чтобы охарактеризовать выигрышные положения, т.е. те вершины графа, выбор которых обеспечивает выигрыш партии независимо от ответов противника.

Теорема 1. *Если граф имеет ядро S (множество вершин, из которых можно выиграть), и если один из игроков выбрал вершину в ядре, то этот выбор обеспечивает ему выигрыш или ничью.*

Действительно, если игрок (A) выбрал вершину $x_1 \in S$, то либо $\Gamma x_1 = \emptyset$, и тогда он уже выиграл партию, либо его противник (B) вынужден выбрать вершину $x_2 \in X \setminus S$, а значит, следующим ходом игрок (A) может выбрать x_3 опять в S и продолжать в том же духе. Если в какой-либо определенный момент один из игроков выбрал вершину x_n, для которой $\Gamma x_n = \emptyset$, то $x_n \in S$, и выигравшим партнером необходимо является (A).

Метод вычисления выигрышных позиций Основной метод для хорошего игрока состоит, следовательно, в вычислении какой-либо функции Гранди (функция, определяющая выигрышные позиции), если она существует, с помощью этой функции $g(x)$ получаем ядро

$$S = \{x | g(x) = 0\}$$

рассматриваемого графа. Если начальная вершина x_0 такова, что $g(x_0) = 0$, то игрок (А) находится в критическом положении, ибо его противник может обеспечить себе выигрыш или ничью. Напротив, если $g(x_0) \neq 0$, то игрок (А) сам обеспечивает себе выигрыш или ничью, выбирая такую вершину x_1, что $g(x_1) = 0$.

Следствие. Если граф прогрессивно конечен, то существует одна и только одна функция Гранди $g(x)$, каждый выбор такой вершины y, для которой $g(y) = 0$, является выигрышным, а каждый выбор такой вершины z, что $g(z) \neq 0$, — проигрышным. (Непосредственно)