1. Неориентированные графы, степени, изоморфизм

- **Граф**:
  - Обозначается как $G = (X, \Gamma)$.
  - Состоит из:
    1° Непустое множество X.
    2° Отображение Γ множества X в X.
- **Элементы графа**:
  - **Вершина**: Каждый элемент множества X называется точкой или вершиной графа.
  - **Дуга**: Пара элементов (x, y), где $y \in \Gamma x$, называется дугой графа.
- **Изображение графа**:
  - Элементы X изображаются точками на плоскости.
  - Пары точек x и y, где $y \in \Gamma x$, соединяются непрерывной линией со стрелкой от x к y.
- **Множество дуг**:
  - Обозначается через U.
  - Дуги обозначаются буквами α, β, ω (при необходимости с индексами).

Степенью вершины v_i в графе G — обозначается d_i или $\deg v_i$ — называется число рёбер, инцидентных v_i (то есть рёбер, которые соединены с v_i). Поскольку каждое ребро инцидентно двум вершинам, в сумму степеней вершин графа каждое ребро вносит двойку. Таким образом, мы приходим к утверждению, которое установлено Эйлером и является исторически первой теоремой теории графов.

Теорема 2.1

Сумма степеней вершин графа G равна удвоенному числу его рёбер:

$$\sum_i \deg v_i = 2q.$$

Следствие 2.1 (а)

В любом графе число вершин с нечётными степенями чётно.

В (p, q)-графе $0 \leq \deg v \leq p - 1$ для любой вершины v. Минимальная степень вершин графа G обозначается через $\min\deg G$ или $\delta(G)$, максимальная — через $\max\deg G = \Delta(G)$. Если $\delta(G) = \Delta(G) = r$, то все вершины имеют одинаковую степень и такой граф G называется *регулярным* (или *однородным*) степени r. В этом случае говорят о степени графа и пишут $\deg G = r$.

Регулярный граф степени 0 совсем не имеет рёбер. Если G — регулярный граф степени 1, то каждая его компонента содержит точно одно ребро; в регулярном графе степени 2 каждая компонента — цикл, и, конечно, обратно. Первые интересные[2] регулярные графы имеют степень 3; такие графы называются *кубическими*. На рис. 2.11 показаны два регулярных графа с 6 вершинами. Второй из них изоморфен каждому из трёх графов, изображённых на рис. 2.5.

Следствие 2.1 (б)

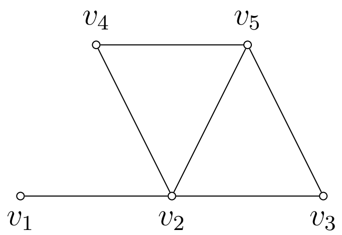
Каждый кубический граф имеет чётное число вершин.

Полезно дать названия вершинам с малыми степенями. Вершина v называется *изолированной*, если $\deg v = 0$, и *концевой* (или *висячей*), если $\deg v = 1$.

Два графа G и H изоморфны (записывается $G \cong H$ или иногда $G = H$), если между их множествами вершин существует взаимно однозначное соответствие, сохраняющее смежность. Например, графы G_1 и G_2 на рис. 2.5 изоморфны при соответствии $v_i \leftrightarrow u_i$, и чисто случайно оказалось, что граф G_1 изоморфен каждому из них. Совершенно очевидно, что изоморфизм есть отношение эквивалентности на графах.

2. Маршруты, связность, метрика графа

Одно из наиболее простых свойств, которым может обладать граф, это свойство быть связным. В данном разделе рассматриваются основные структурные свойства связных и несвязных графов.



Маршрутом в графе G называется чередующаяся последовательность вершин и рёбер $v_0, x_1, v_1, \ldots, x_n, v_n$; эта последовательность начинается и кончается вершиной, и каждое ребро последовательности инцидентно двум вершинам, одна из которых непосредственно предшествует ему, а другая непосредственно следует за ним. Указанный маршрут соединяет вершины v_0 и v_n, и его можно обозначить $v_0 v_1 v_2 \ldots v_n$ (наличие рёбер подразумевается). Эта последовательность иногда называется $(v_0 - v_n)$-маршрутом. Маршрут *замкнут*, если $v_0 = v_n$, и *открыт* в противном случае. Маршрут называется *цепью* (trail), если все его рёбра различны, и *простой цепью* (path), если все вершины (а следовательно, и рёбра) различны. Замкнутая цепь называется *циклом*. Замкнутый маршрут называется *простым циклом*, если все его n вершин различны и $n \geq 3$.

В помеченном графе G на рис. 2.9 $v_1 v_2 v_3 v_2 v_3$ — маршрут, который не является цепью, а $v_1 v_2 v_5 v_4 v_2 v_3$ — не простая цепь, $v_1 v_2 v_5 v_4$ — простая цепь и $v_2 v_4 v_5 v_2$ — простой цикл.

Длина маршрута $v_0 v_1 \ldots v_n$ равна n, т. е. количеству рёбер в нём[1].

3. Самодополнительный графы

Указанную ситуацию можно описать графом G с шестью вершинами, представляющими людей; смежность двух вершин соответствует знакомству. Требуется показать, что в G найдутся либо три попарно смежные, либо три попарно несмежные вершины. Дополнение $\overline{G}$ графа G имеет в качестве множества вершин множество $V(G)$, две вершины в $\overline{G}$ смежны тогда и только тогда, когда они не смежны в G. На рис. 2.12 в графе G нет треугольников, а в графе $\overline{G}$ их ровно два[1]. *Самодополнительный граф* — это граф, изоморфный своему дополнению. Примеры таких графов приведены на рис. 2.13.

В полном графе K_p каждая пара его p вершин[2] смежна. Таким образом, граф K_p имеет $\binom{p}{2}$ рёбер и является регулярным степени $p - 1$. Граф K_3 — треугольник. Графы $\overline{K_p}$ — вполне несвязные (или регулярные степени 0).

4. Экстремальные графы

Среди первых результатов в одном из направлений теории графов — теории экстремальных графов (см. Эрдёш) — можно отметить следующую известную теорему Турана . Как обычно, пусть $|r|$ — наибольшее целое число, не превышающее действительного числа r, а $\{r\} = r - |r|$ есть наименьшее целое число, не меньшее r.

---

[1]Обхват графа G — обозначается $g(G)$ — это длина кратчайшего простого цикла графа G (если он есть); окружение графа G — обозначается $c(G)$ — длина самого длинного простого цикла графа G. Эти понятия не определены в случае, когда в G нет циклов.

1) Доказательство существования чисел $r(m,n)$ для любых натуральных m и n см., например, у М. Холла

2) Отметим, что по нашему определению бесконечный граф не является графом. Имеется обзорная статья о бесконечных графах: Нэш-Вильямс.

Теорема 2.3. Наибольшее число рёбер у графов, имеющих r вершин и не содержащих треугольников, равно $\lfloor r^2/4 \rfloor$.

Доказательство. Утверждение очевидно для малых значений r. Доказательство по индукции можно дать отдельно для нечетных и для четных r; здесь будет рассмотрен только случай четных значений r. Предположим, что утверждение справедливо для всех четных значений $r \le 2n$. Докажем его для $r = 2n+2$. Итак, пусть G — граф с $p = 2n+2$ вершинами, не содержащий треугольников. Поскольку граф G не является вполне несвязным, то в нём существуют две смежные вершины u и v. В подграфе $G' = G - \{u, v\}$ имеется $2n$ вершин и нет треугольников, так что по предположению индукции в графе G' самое большее $\lfloor 4n^2/4 \rfloor = n^2$ рёбер. Сколько еще рёбер может быть в графе G? В графе G нет такой вершины w, что вершины u и v одновременно смежны с w, т. е. вершины u, v и w образуют в графе G треугольник. Таким образом, если вершина w смежна с k вершинами графа G', то вершина v может быть смежна самое большее с $2n-k$ вершинами графа G', и граф G не больше чем

$$n^2 + k + (2n-k) + 1 = n^2 + 2n + 1 = p^2/4 = \lfloor p^2/4 \rfloor$$

рёбер.

Для завершения доказательства осталось установить, что для каждого чётного p существует $(p, p^2/4)$-граф, не содержащий треугольников. Такой граф можно образовать следующим образом: возьмем два множества V_1 и V_2, каждое из которых имеет $p/2$ вершин, и соединим каждую вершину из V_1 с каждой вершиной из V_2. Для $p = 6$ соответствующий граф G_1 приведен на рис. 2.5.

Двудольный граф (или *биграф*[2]) G --- это граф, множество вершин V которого можно разбить на два подмножества V_1 и V_2 таким образом, что каждое ребро графа G соединяет вершины из разных множеств (будем говорить, что ребра графа G соединяют множества V_1 и V_2). Например, граф, представленный на рис. 2.14, а, можно нарисовать так, как показано на рис. 2.14, б, чтобы подчеркнуть, что этот граф --- двудольный.

Если граф G содержит все ребра, соединяющие множества V_1 и V_2, то этот граф называется *полным двудольным.* Если при этом в множестве V_1 имеется m вершин, а в V_2 имеется n вершин, то будем писать $G = K_{m,n}$ --- $K(m,n)$. *Звездой* называется полный двудольный граф $K_{1,m}$. Понятно, что в графе $K_{m,n}$ имеется mn ребер. Поэтому, если p четно, то граф $K(\frac{p}{2}, \frac{p}{2})$ содержит $p^2/4$ ребер; если p нечетно, то граф $K(\lfloor p/2 \rfloor, \lceil p/2 \rceil)$ содержит $\lfloor p/2 \rfloor \cdot \lceil p/2 \rceil = \lfloor p^2/4 \rfloor$ ребер. В каждом из таких графов нет треугольников, что следует из теоремы Кёнига [**?**, **?**].

Теорема 2.4. Граф является двудольным тогда и только тогда, когда все его простые циклы чётны.

Доказательство. Если G --- двудольный граф, то множество его вершин V можно разбить на два подмножества V_1 и V_2 таким образом, что любое ребро этого графа соединяет некоторую вершину из множества V_1 с некоторой вершиной из V_2. Поэтому каждый простой цикл $v_1 v_2 \ldots v_n v_1$ графа содержит вершины из V_1, скажем, с нечётными номерами и вершины из V_2 с чётными, так что длина n этого цикла является чётным числом.

Чтобы доказать обратное, предположим, не теряя общности, что G --- связный граф (поскольку каждую компоненту графа G можно рассматривать отдельно). Возьмем произвольную вершину $v_1 \in V$ и обозначим через V_1 множество, состоящее из v_1 и всех вершин, находящихся в графе G на чётном расстоянии от v_1; пусть $V_2 = V \setminus V_1$. Так как все простые циклы графа G чётны, то каждое его ребро соединяет множества V_1 и V_2. В самом деле, если существует ребро uv, соединяющее две вершины из множества V_2, то объединение геодезических, идущих из вершины v_1 к вершине u, а также из вершины v_1 к вершине v, вместе с ребром uv образует цикл нечётной длины; мы пришли к противоречию.

[2] В литературе встречаются и другие термины для этого понятия, например бикроматический граф, простой граф, четный граф, граф паросочетаний.

Теорема 2.3 является первым примером решения одной из задач «теории экстремальных графов»: для данного графа H найти $ex(p, H)$ --- наибольшее число рёбер, которое может быть в графе, имеющем p вершин и не содержащем запрещённый подграф H. Таким образом, в теореме 2.3 утверждается, что $ex(p, K_3) = \left\lfloor \frac{p^2}{4} \right\rfloor$. Приведем некоторые другие подобные результаты (Эрдёш [3]):

$$ex(p, C_p) = \left\lfloor \frac{1}{2} + \frac{p(p-1)}{2} \right\rfloor \tag{1}$$

$$ex(p, K_{4-x}) = \left\lfloor \frac{p^2}{4} \right\rfloor \tag{2}$$

$$ex(p, K_{3,x} - x) = \left\lfloor \frac{p^2}{4} \right\rfloor \tag{3}$$

Туран [?] обобщил доказанную им теорему 2.3, определив значения функции $ex(p, K_n)$ для всех $n \leq p$:

$$ex(p, K_n) = \frac{(n-2)(p^2 - r^2)}{2(n-1)} + \binom{r}{2},$$

где $p \equiv r \pmod{(n-1)}$ и $0 \leq r < n-1$. Другое доказательство этого результата см. у Моцкина и Штрауса [?].

Известно также, что каждый $(2n, n^2+1)$-граф содержит n треугольников, каждый $(p, 3p-5)$-граф содержит два простых цикла, не имеющих общих ребер (для $p \geq 6$), и каждый $(3n, 3n^2+1)$-граф содержит n^2 простых циклов длины 4.

5. Числа Рамсея

Широко известна следующая головоломка.

Доказать, что среди любых шести человек найдутся либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

1. Напоминаем читателю (см. введение), что в тексте не все теоремы доказываются.

2. По своим структурным свойствам. — *Прим. перев.*

В этих терминах головоломку можно сформулировать так:

Теорема 2.2. Если G — граф с шестью вершинами, то либо G, либо $\overline{G}$ содержит треугольник.

Доказательство. Пусть v — произвольная вершина графа G, имеющего шесть вершин. Так как вершина v с любой из остальных пяти вершин смежна или в G, или в $\overline{G}$, то, не теряя общности, можно предположить, что вершины u_1, u_2, u_3 смежны с v в G. Если какие-либо две из вершин u_1, u_2, u_3 смежны в G, то вместе с v они образуют треугольник. Если никакие две из них не смежны в G, то в графе $\overline{G}$ вершины u_1, u_2, u_3 образуют треугольник.

Обобщая теорему 2.2, естественно поставить вопрос: каково наименьшее целое число $r(m, n)$, для которого каждый граф с $r(m, n)$ вершинами содержит K_m или K_n?

Числа $r(m, n)$ называются *числами Рамсея* [1]. Ясно, что $r(m, n) = r(n, m)$. Задача, связанная с нахождением чисел Рамсея, остается нерешенной, хотя известна простая верхняя оценка, полученная Эрдёшем и Секерешем [1]:

$$r(m, n) \leq \binom{m+n-2}{m-1}. \tag{4}$$

Постановка этой задачи вытекает из теоремы Рамсея. Бесконечный граф [2] имеет бесконечное множество вершин и не содержит кратных ребер и петель. Рамсей [1] доказал (на языке теории множеств), что каждый бесконечный граф содержит $\aleph_0$ попарно смежных вершин или $\aleph_0$ попарно несмежных вершин.

Все известные числа Рамсея приведены в табл. 2.1 (взята из обзорной статьи Гравера и Якелл [1]).

6. Эйлеровы графы

Как мы уже видели в гл. 1, отрицательное решение Эйлером задачи о кёнигсбергских мостах привело к первой опубликованной работе по теории графов. Задачу об обходе мостов можно обобщить и получить следующую задачу теории графов: можно ли найти в данном графе G цикл, содержащий все вершины и все рёбра? Граф, в котором это возможно, называется *эйлеровым.* Таким образом, эйлеров граф имеет *эйлеров цикл* — замкнутую цепь, содержащую все вершины и все рёбра. Ясно, что эйлеров граф должен быть связным.

Теорема 7.1. Для связного графа G следующие утверждения эквивалентны:

1. G — эйлеров граф;

2. каждая вершина графа G имеет чётную степень;

3. множество рёбер графа G можно разбить на простые циклы.

Доказательство. (1) влечет (2). Пусть T — эйлеров цикл в G. Каждое прохождение данной вершины в T вносит 2 в степень этой вершины и, поскольку каждое ребро графа G появляется точно один раз в T, любая вершина должна иметь чётную степень.

(2) влечет (3). Так как G — связный и нетривиальный граф, то степень каждой вершины равна по крайней мере 2, так что G содержит простой цикл Z. Удаление рёбер цикла Z приводит к остовному подграфу G_1, в котором также каждая вершина имеет чётную степень. Если в G_1 нет рёбер, то (3) уже доказано; в противном случае применим высказанные выше соображения к G_1 и получим граф G_2, в котором опять степени всех вершин чётны, и т. д. Одновременно с пустым графом G_n получаем разбиение рёбер графа G на n простых циклов.

(3) влечет (1). Пусть Z_1 — один из простых циклов этого разбиения. Если G состоит только из этого цикла, то очевидно, что G — эйлеров граф. В противном случае другой простой цикл Z_2 в G имеет вершину v, общую с Z_1. Маршрут, начинающийся с v и состоящий из цикла Z_1 и следующего непосредственно за ним цикла Z_2, является замкнутой цепью, которая содержит рёбра этих двух циклов. Продолжая эту процедуру, мы можем построить замкнутую цепь, содержащую все рёбра графа G; следовательно, G — эйлеров граф.

Например, связный граф, представленный на рис. 7.1, в котором каждая вершина имеет чётную степень, обладает эйлеровым циклом. Из теоремы 7.1 следует, что если в связном графе G нет вершин с нечётными степенями, то в G есть замкнутая цепь, содержащая все вершины и все рёбра графа.

G. Аналогичный результат справедлив для связных графов, имеющих некоторое число вершин с нечётными степенями.

Следствие 7.1 (а). Пусть G — связный граф, в котором $2n$ вершин имеют нечётные степени, $n \geq 1$. Тогда множество рёбер графа G можно разбить на n открытых цепей.

Следствие 7.1 (б). Пусть G — связный граф, в котором две вершины имеют нечётные степени. Тогда в G есть открытая цепь, содержащая все вершины и все рёбра графа G (и начинающаяся в одной из вершин с нечётной степенью, а кончающаяся в другой).

7. Деревья

Граф называется *ациклическим*, если в нём нет циклов. *Дерево* — это связный ациклический граф. Каждый граф, не содержащий циклов, называется *лесом.* Таким образом, компонентами

[1] Ясно, что эта теорема справедлива также и для мультиграфов.

леса являются деревья. Существуют 23 различных дерева [2] с восемью вершинами; они показаны на рис. 4.1. Известны и другие определения дерева. В теореме 4.1 отражены некоторые из них.

Теорема 4.1. Для графа G следующие утверждения эквивалентны:

1. G — дерево;
2. любые две вершины в G соединены единственной простой цепью;
3. G — связный граф и $p = q + 1$;
4. G — ациклический граф и $p = q + 1$;
5. G — ациклический граф, и если любую пару несмежных вершин соединить ребром x, то в графе $G + x$ будет точно один простой цикл;
6. G — связный граф, отличный от K_p для $p \geq 3$, и если любую пару несмежных вершин соединить ребром x, то в графе $G + x$ будет точно один простой цикл;
7. G — граф, отличный от $K_3 \cup K_1$ и $K_3 \cup K_2$, $p = q + 1$, и если любую пару несмежных вершин соединить ребром x, то в графе $G + x$ будет точно один простой цикл.

[1] Джойс Килмер (1886—1918) — американский поэт. — *Прим. перев.*

[2] Можно предложить читателю нарисовать деревья с восемью вершинами. Как правило, одни деревья забывают рисовать, а другие рисуют несколько раз.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Поскольку G — связный граф, то любые две его вершины соединены простой цепью. Пусть P_1 и P_2 — две различные простые цепи, соединяющие вершины u и v, и пусть w — первая вершина, принадлежащая P_1 (при переходе по P_1 из u в v), такая, что w принадлежит и P_1, и P_2, но вершина, предшествующая ей в P_1, не принадлежит P_2. Если w' — следующая за w вершина в P_1, принадлежащая также P_2, то сегменты (части) цепей P_1 и P_2, находящиеся между вершинами w и w', образуют простой цикл в графе G. Поэтому, если G — ациклический граф, то между любыми двумя его вершинами существует самое большее одна простая цепь.

(2) $\Rightarrow$ (3). Ясно, что граф G — связный. Соотношение $p = q + 1$ докажем по индукции. Утверждение очевидно для связных графов с одной и двумя вершинами. Предположим, что оно верно для графов, имеющих меньше p вершин. Если же граф G имеет p вершин, то удаление из него любого ребра делает граф G несвязным графом, в точности две компоненты. По предположению индукции в каждой компоненте число вершин на единицу больше числа ребер. Таким образом, общее число ребер в графе G должно равняться $p - 1$.

(3) *влечет* (4). Предположим, что в графе G есть простой цикл длины n. Этот цикл содержит n вершин и n рёбер, а для любой из $p-n$ вершин, не принадлежащих циклу, существует инцидентное ей ребро, которое лежит на геодезической, идущей от некоторой вершины цикла. Все такие рёбра попарно различны; отсюда $q \geq p$, т. е. пришли к противоречию.

(4) *влечет* (5). Так как G — ациклический граф, то каждая его компонента является деревом. Если всего k компонент, то, поскольку в каждой из них число вершин на единицу больше числа рёбер, имеем $p = q + k$. В нашем случае должно быть $k = 1$, так что G — связный граф. Таким образом, G — дерево и любые две его вершины соединяет единственная простая цепь. Если к дереву G добавить ребро uv, то ребро вместе с единственной простой цепью, соединяющей вершины u и v, образует простой цикл, который также единствен в силу единственности простой цепи.

(5) *влечет* (6). Поскольку каждый полный граф K_p для $p \geq 3$ содержит простой цикл, граф G не может быть одним из этих графов. Граф G должен быть связным, так как в ином случае можно было бы добавить ребро x, соединяющее две вершины из разных компонент графа G, и граф $G + x$ был бы ациклическим.

(6) *влечет* (7). Докажем, что любые две вершины графа G соединены единственной простой цепью, а тогда, поскольку (2) влечет (3), получим $p = q+1$. Ясно, что в графе G любые две вершины соединены простой цепью. Если какая-то пара вершин графа G соединена двумя простыми цепями, то из доказательства того, что (1) влечет (2), следует наличие у графа G простого цикла Z. В Z

не может быть более трех вершин, так как иначе, соединив ребром x две несмежные вершины в Z, получим граф $G+x$, имеющий более одного простого цикла (если же в Z нет несмежных вершин, то в графе G более одного цикла). Таким образом, цикл Z есть K_3, и он должен быть собственным подграфом графа G, поскольку по предположению G не является полным графом K_p с $p \geq 3$. Так как G — связный граф, то можно предположить, что в G есть другая вершина, смежная с некоторой вершиной подграфа K_3. Тогда ясно, что если к графу G добавлять ребро, то его можно добавить так, чтобы в графе $G+x$ образовались по крайней мере два простых цикла. Если больше нельзя добавлять новых ребер, не нарушая для графа G второго условия из (6), то G есть K_p с $p \geq 3$ вопреки предположению.

(7) *влечет* (1). Если граф G имеет простой цикл, то этот цикл должен быть треугольником, являющимся компонентой графа G, что было показано в предыдущем абзаце. В этой компоненте соответственно две вершины графа G соединены. Все остальные компоненты графа G должны быть деревьями, но для того, чтобы выполнялось соотношение $p = q + 1$, должно быть не более одной компоненты, отличной от указанного треугольника. Это дерево содержит

Простую цепь длины 2, то к графу G можно так добавить ребро x, чтобы образовать в графе $G+x$ два простых цикла. Следовательно, этим деревом может быть или K_1, или K_2. Значит, граф G — или K_3 или K_1, или $K_3 \cup K_2$, а эти графы мы исключили из рассмотрения. Таким образом, G — ациклический граф. Но если G — ациклический граф и $p = q+1$, то G связан, поскольку (4) влечет (5), а (5) влечет (6). Итак, G — дерево, и теорема доказана.

Так как для нетривиального дерева $\sum d_i = 2q = 2(p-1)$, то в дереве должно быть по крайней мере две вершины со степенями, меньшими 2.

Следствие 4.1 (а). В любом нетривиальном дереве имеется по крайней мере две висячие вершины.

Этот результат также следует из теоремы 3.4.

8. Диаметр и радиус графа

Расстоянием $d(u,v)$ между двумя вершинами u и v графа G называется длина кратчайшей простой цепи, соединяющей их; если u и v не соединены, то полагаем $d(u,v) = \infty$. В связном графе расстояние является метрикой, т. е. удовлетворяет следующим аксиомам (аксиомам метрики): для любых трёх вершин u, v и w

1. $d(u,v) \geq 0$ и $d(u,v) = 0$ тогда и только тогда, когда $u = v$;
2. $d(u,v) = d(v,u)$;
3. $d(u,v) + d(v,w) \geq d(u,w)$.

Кратчайшая простая $(u-v)$-цепь часто называется геодезической.

Диаметр $d(G)$ связного графа G — это длина самой длинной геодезической. Граф G на рис. 2.9 имеет обхват $g = 3$, окружение $c = 4$ и диаметр $d = 2$.

Квадрат G^2 графа G имеет то же множество вершин, что и граф G, т. е. $V(G^2) = V(G)$, и две вершины u и v в G^2 смежны тогда и только тогда, когда $d(u,v) \leq 2$ в G. Степени G^3, G^4, ...графа G определяются аналогично. Например, $C_5^2 = K_5$ и $P_4^2 = K_1 + K_3$.

9. Хроматическое число графа

Раскраской графа называется такое приписывание цветов его вершинам, что никакие две смежные вершины не получают одинакового цвета. Множество всех вершин одного цвета является независимым и называется одноцветным классом. В n-раскраске графа G используется n цветов, и, таким образом, эта раскраска разбивает V на n одноцветных классов. Хроматическое число $\chi(G)$ графа G определяется как наименьшее n, для которого граф G имеет n-раскраску. Граф G называется n-раскрашиваемым, если $\chi(G) \leq n$, и n-хроматическим, если $\chi(G) = n$.

Поскольку граф G, очевидно, имеет p-раскраску и $\chi(G)$-раскраску, он должен иметь также n-раскраску для любого n, удовлетворяющего неравенствам $\chi(G) \leq n \leq p$. Граф на рис. 12.1 является

2-хроматическим. На этом же рисунке приведены n-раскраски для $n = 2, 3, 4$; положительные целые числа указывают цвета.

Легко найти хроматические числа некоторых известных графов:

$$\chi(K_p) = p, \quad \chi(K_p - x) = p - 1, \quad \chi(K'_p) = 1, \quad \chi(K_{m,n}) = 2, \quad \chi(C_{2n}) = 2, \quad \chi(C_{2n+1}) = 3 \quad \text{и} \quad \chi(T) = 2$$

для любого нетривиального дерева T.

Очевидно, что граф является 1-хроматическим тогда и только тогда, когда он вполне несвязан. Описание двуцветных (2-раскрашиваемых) графов дано Кёнигом [?], стр. 170 и отражено в теореме 12.1 (см. также теорему 2.4).

Теорема. *Граф двуцветен тогда и только тогда, когда он не содержит нечётных простых циклов.*

Похоже, что проблема характеристики n-цветных графов для $n \geq 3$ всё ещё не решена, поскольку такой критерий даже для $n = 3$ помог бы решить гипотезу четырёх красок. Не найдены также эффективные методы определения хроматического числа произвольного графа. Однако известно несколько оценок для $\chi(G)$, в которых используются различные другие инварианты. Одна очевидная нижняя оценка — это число вершин в наибольшем полном подграфе графа G. Мы рассмотрим сейчас верхние оценки; первая такая оценка была получена Секерешем и Вильфом [?].

Теорема 12.2. Для любого графа G

$$\chi(G) \leq 1 + \max \delta(G'),$$

где максимум берется по всем порожденным подграфам G' графа G.

Доказательство. Утверждение очевидно для вполне несвязных графов. Пусть G — произвольный n-хроматический граф, $n \geq 2$, а H — любой наименьший порожденный подграф, для которого $\chi(H) = n$. Таким образом, $\chi(H - v) = n - 1$ для всех вершин v графа H. Следовательно, $\deg v \geq n - 1$, так что $\delta(H) \geq n - 1$, и потому

$$n - 1 \leq \delta(H) \leq \max \delta(H') \leq \max \delta(G'),$$

где первый максимум берется по всем порожденным подграфам H' графа H, а второй — по всем порожденным подграфам G' графа G. Отсюда вытекает, что

$$\chi(G) = n \leq 1 + \max \delta(G').$$

Следствие 12.2 (а). Для любого графа G хроматическое число не больше чем на 1 превышает максимальную степень:

$$\chi \leq 1 + \Delta.$$

Брукс [?] показал, однако, что часто эту оценку можно улучшить.

Теорема 12.3. Если $\Delta(G) = n$, то граф G всегда n-раскрашиваем, за исключением следующих двух случаев:

1. $n = 2$ и G имеет компоненту, являющуюся нечетным циклом;

2. $n \geq 2$ и K_{n+1} — компонента графа G.

Нижняя оценка, приводимая в монографиях Бержа [?] и Оре [?], и верхняя оценка, данная в статье Харари и Хедетниеми [?], содержат вершинное число независимости β_0 графа G.

Теорема. *Для любого графа G*

$$\frac{p}{\beta_0} \leq \chi \leq p - \beta_0 + 1.$$

Если $\chi(G) = n$, то множество V можно разбить на n одноцветных классов $V_1, V_2, \dots, V_n$, каждый из которых, как отмечалось выше, является независимым множеством вершин. Если $|V_i| = p_i$, то $p_i \le \beta_0$ для всех i, так что $p = \sum p_i \le n\beta_0$. Для проверки верхней оценки рассмотрим максимальное независимое множество S, содержащее β_0 вершин. Ясно, что $\chi(G-S) \ge \chi(G)-1$. Так как $G-S$ имеет $p-\beta_0$ вершин, то $\chi(G-S) \le p-\beta_0$. Отсюда $\chi(G) \le \chi(G-S)+1 \le p-\beta_0+1$.

Представленные здесь оценки не так уж хороши в том смысле, что для каждой оценки и любого положительного целого числа n существует такой граф G, что $\chi(G)$ отличается от оценки более чем на n.

Исследуя приведенные выше рассуждения, легко проникнуться верой в то, что все графы с большим хроматическим числом имеют большие клики и, следовательно, содержат треугольники. И вот Дирак [**?**] поставил вопрос, существует ли граф без треугольников, но с произвольно большим хроматическим числом. Положительно на этот вопрос ответили независимо друг от друга Бланш Декарт [**?**], Зыков [**?**] и Мышельский [**?**]. Затем их результат обобщили Дж. и Л. Келли [**?**], доказав, что для любого $n \ge 2$ существует n-хроматический граф, обхват которого превосходит 5. Они предположили, что справедливо следующее утверждение, которое первым доказал Эрдёш [**?**], используя вероятностные соображения. Позже Ловасц [**?**] дал конструктивное доказательство этой теоремы.

Теорема 12.5. Для любых двух положительных целых чисел t и n существует n-хроматический граф, обхват которого превосходит t.

Величина $\bar{\chi} = \chi(G) = \chi(\bar{G})$ представляет собой наименьшее число подмножеств, на которые можно разбить множество вершин графа G так, чтобы каждое подмножество порождало полный подграф графа G. Ясно, что $\chi(G) \ge \beta_0(G)$. Оценки для суммы и произведения хроматических чисел графа и его дополнения были получены Нордхаузом и Гаддумом [**?**].

Теорема 12.6. Для любого графа G сумма и произведение чисел χ и $\bar{\chi}$ удовлетворяют неравенствам

$$2\sqrt{p} \le \chi + \bar{\chi} \le p+1, \tag{12.4}$$

$$p \le \chi\bar{\chi} \le \left(\frac{p+1}{2}\right)^2. \tag{12.5}$$

Доказательство. Пусть G будет n-хроматическим графом, а $V_1, V_2, \dots, V_n$ его одноцветными классами, $|V_i| = p_i$. Тогда, разумеется, $\sum p_i = p$ и $\max p_i \ge p/n$. Так как каждый класс V_i порождает полный подграф в G, то $\bar{\chi} \ge \max p_i \ge p/n$, и поэтому $\chi\bar{\chi} \ge p$. Но поскольку среднее геометрическое двух положительных чисел не превосходит их среднего арифметического, то $\chi + \bar{\chi} \ge 2\sqrt{p}$. Обе нижние оценки доказаны.

Неравенство $\chi+\bar{\chi} \le p+1$ будем доказывать индукцией по p, заметив, что равенство достигается при $p=1$. Итак, предположим, что $\chi(G)+\bar{\chi}(G) \le p$ для всех графов G с $p-1$ вершинами. Пусть H и $\bar{H}$ — взаимодополнительные графы (граф и его дополнение) с p вершинами и v — вершина графа H. Тогда $G = H-v$ и $\bar{G} = \bar{H}-v$ будут взаимодополнительными графами с $p-1$ вершинами. Пусть степень вершины v в H равна d, так что степень в $\bar{H}$ равна $p-d-1$.

Очевидно, что

$$\chi(H) \le \chi(G)+1 \quad \text{и} \quad \overline{\chi}(H) \le \overline{\chi}(G)+1.$$

Если

$$\chi(H) < \chi(G)+1 \quad \text{или} \quad \overline{\chi}(H) < \overline{\chi}(G)+1,$$

то $\chi(H)+\overline{\chi}(H) \le p+1$. Предположим теперь, что $\chi(H) = \chi(G)+1$ и $\overline{\chi}(H) = \overline{\chi}(G)+1$. Тогда удаление вершины v из H, приводящее к образованию графа G, уменьшает хроматическое число, так что $d \ge \chi(G)$. Аналогично

$$p-d-1 \ge \overline{\chi}(G).$$

[1]Дама с этим именем есть на самом деле непустое подмножество множества {Брукс, Смит, Стоун, Татт}; в данном случае {Татт}.

Таким образом, $\chi(G) + \overline{\chi}(G) \leq p - 1$. Следовательно, всегда

$$\chi(H) + \overline{\chi}(H) \leq p + 1.$$

Наконец, используя неравенство $4\overline{\chi}\chi \leq (\chi + \overline{\chi})^2$, получаем

$$\overline{\chi}\chi \leq \left(\frac{p+1}{2}\right)^2.$$

10. Цикломатическое число графа

Понятие, которое мы собираемся здесь ввести не зависит от "ориентации". Для большей общности введем в рассмотрение не просто графы а *мультиграфы*; по определению, *мультиграф* (X, U) это пара, образованная множеством X вершин и множеством U ребер соединяющих некоторые пары вершин, в противоположность обычным графам у мультиграфа одна и та же пара вершин может соединяться более чем одним ребром.

Во многих задачах удобно вместо обычных графов рассматривать мультиграфы.

Пример (химия). Молекула представляется мультиграфом, вершины которого обозначены символами таблицы Менделеева (Пойа [4] применил теорию графов к органической химии для подсчета числа изомеров химических соединений). Говорят также, что этилен является 2-графом, ацетилен --- 3-графом, и т.д. (см. рис. 4--1)

Рис. 1: Этилен Ацетилен

Рассмотрим мультиграф G с n вершинами, m ребрами, p компонентами связности. Положим

$$\rho(G) = n - p,$$
$$\alpha(G) = m - \rho(G) = m - n + p,$$

$\nu(G)$ называется *цикломатическим числом* мультиграфа G. Его свойства играют важную роль[3]

Теорема 1 Пусть G --- мультиграф полученный из мультиграфа $\bar{G}$ добавлением нового ребра между вершинами a и b; если a и b совпадают или могут быть соединены цепью в $\bar{G}$, то

$$\rho(G') = \rho(\bar{G}), \quad \nu(G') = \nu(\bar{G}) + 1,$$

в противном случае

$$\rho(G) = \rho(\bar{G}) + 1, \quad \nu(G') = \nu(\bar{G})$$

(Непосредственно)

Следствие $\rho(\bar{G}) \geq 0, \quad \nu(\bar{G}) \geq 0$

В самом деле, для графа, образованного всеми вершинами G, но без ребер имеем $\rho = 0$, $\nu = 0$. Каждое добавление ребра либо увеличивает ρ, не меняя ν либо увеличивает ν. Таким образом, в процессе построения графа G числа ρ и ν могут только возрастать.

Для дальнейшего удобно следующим образом отождествлять циклы мультиграфа с векторами: придадим каждому ребру мультиграфа G произвольную ориентацию, если цикл μ проходит через ребро u_k в направлении его ориентации r_k раз и в противоположном направлении s_k раз, то полагаем $c^k = r_k - s_k$. Вектор

$$(c^1, c^2, \ldots, c^k, \ldots, c^m)$$

m-мерного пространства $\mathbb{R}^m$ будем называть *вектором-циклом*, соответствующим циклу μ и обозначать через $\boldsymbol{\mu}$ (или опять через μ, если это не может привести к недоразумению).

[3] Цикломатическим числом графа называется цикломатическое число того 2-графа который получится, если каждую дугу заменить ребром -- Прим перев

Циклы μ, μ', μ'', называются *независимыми*, если соответствующие им векторы линейно независимы[4]. Отметим, что это свойство не зависит от выбора ориентации ребер.

Если $\mathbf{c} = (c^1, c^2, \dots, c^m)$ и $\mathbf{d} = (d^1, d^2, \dots, d^m)$ --- два вектора из $\mathbb{R}^m$, а $\alpha \in \mathbb{R}$, то полагаем

$$\begin{aligned} \alpha\mathbf{c} &= (\alpha c^1, \alpha c^2, \dots, \alpha c^m) \\ -\mathbf{c} &= (-c^1, -c^2, \dots, -c^m) \\ \mathbf{c} + \mathbf{d} &= (c^1 + d^1, c^2 + d^2, \dots, c^m + d^m) \\ \mathbf{0} &= (0, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

Множество $E \subset \mathbb{R}^m$ представляет собой *векторное подпространство* если

$$\begin{aligned} \alpha \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{c} \in E &\Rightarrow \alpha\mathbf{c} \in E \\ \mathbf{c}, \mathbf{d} \in E &\Rightarrow \mathbf{c} + \mathbf{d} \in E \end{aligned}$$

Говорят, что векторы $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_k$ из $\mathbb{R}^m$ *линейно независимы*, если

$$\alpha_1\mathbf{c}_1 + \alpha_2\mathbf{c}_2 + \dots + \alpha_k\mathbf{c}_k = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$$

Напротив, когда для некоторых чисел α_i не равных одновременно нулю,

$$\alpha_1\mathbf{c}_1 + \alpha_2\mathbf{c}_2 + \dots + \alpha_k\mathbf{c}_k = \mathbf{0},$$

говорят, что данные векторы *линейно*

Теорема. *2 Цикломатическое число $\nu(G)$ мультиграфа G равно наибольшему количеству независимых циклов.*

Действительно, возьмем граф без ребер, образованный всеми вершинами G и, добавляя к нему ребро за ребром, построим данный мультиграф G. В силу теоремы 1 цикломатическое число увеличивается на единицу, когда добавление ребра приводит к образованию новых циклов и не меняется в противоположном случае. Допустим, что перед добавлением ребра u_k уже имелась база, состоящая из независимых циклов ρ_1, ρ_2, ..., и что добавление u_k повлекло за собой возникновение циклов ν_1, ν_2, ... Среди новых циклов наверняка имеются простые, пусть, например, ν_1 --- простой, $\nu_1^k = 1$. Очевидно ν_1 не может линейно выражаться через ρ_i (ибо $\mu_1^k = \mu_2^k = \dots = 0$). С другой стороны, ν_2 (и аналогично ν_3, ...) можно линейно выразить через ν_1, μ_1, μ_2, ..., в самом деле, вектор $\nu_2 - \lambda_1^2\nu_1$ соответствует некоторому циклу, не содержащему u_k (этот цикл получается из ν_2 заменой ребра u_k оставшейся частью ν_1 с измененным направлением обхода), и, значит линейно выражается через μ_1, μ_2, ... Таким образом каждый шаг, увеличивающий на единицу цикломатическое число, в то же время увеличивает на единицу наибольшее количество независимых циклов. Теорема доказана.

Следствие 1. *1 Граф G не имеет циклов тогда и только тогда, когда $\nu(G) = 0$.*

Следствие 2. *2 Граф G имеет один единственный цикл тогда и только тогда, когда $\nu(G) = 1$.*

Теорема. *3 В сильно связном графе цикломатическое число равно наибольшему количеству независимых контуров.*

В самом деле, рассмотрим 2-граф, получающийся заменой дуг данного графа G ребрами, и элементарный цикл μ, вершины, встречающиеся в цикле μ, можно распределить по следующим множествам множество S точек обладающих тем свойством, что одна из дуг μ исходит из точки, а другая заходит в нее, множество S'

зависимы Если $a_1 \neq 0$, то можно также написать

$$c_1 = \frac{a_2}{a_1}c_2 + \dots + \frac{a_k}{a_1}c_k,$$

в этом случае говорят, что c_1 линейно выражается через c_2, c_3 ..., c_k

[4]Напомним некоторые классические определения линейной алгебры

База векторного подпространства E есть такое множество векторов $\{e_1, e_2, ..., e_k\}$ из E, что каждый вектор подпространства E линейно выражается через векторы e_i, наименьшее из чисел k называется размерностью подпространства E.

В $E = \mathbb{R}^m$ одна из баз образуется векторами

$$e_1 = (1, 0, 0, ..., 0), e_2 = (0, 1, 0, ..., 0), ..., e_m = (0, 0, 0, ..., 1),$$

точек, из которых исходит по две дуги μ, множество S'' точек, в которые заходит по две дуги μ (см. рис 4-2).

Так как количество конечных точек равно количеству начальных то $|S'| = |S''|$, итак, пусть $x'_1, x'_2, ..., x'_k$ - элементы S', а $x''_1, x''_2, ..., x''_k$ - элементы S''

В цикле μ элементы S' чередуются с элементами S', и мы предположим нумерацию вершин такой что первая вершина после x'_i, не принадлежащая S есть x_i, наконец, если ν_0 — путь, в котором вершина x встречается раньше вершины y, то обозначим через $\mu_0[x,y]$ частичный путь из x в y. Поскольку граф сильно связен, существует контур ν_i, проходящий через x'_{i+1} и x'_i и содержащий дуги μна пути от x'_{i+1} к x'_i. Цикл μявляется линейной комбинацией контуров ибо можно написать

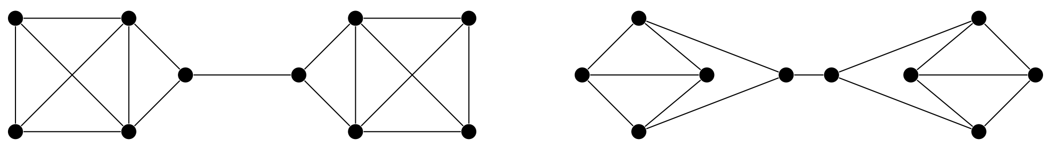
$\mu = \mu[x'_1,x''_1] - \nu_1[x'_2,x'_1] + \mu[x'_2,x''_2] + \cdots = \mu[x'_1,x_1] + \nu_1[x_1,x'_2] + \mu[x'_2,x''_2] + \nu_2[x_2,x'_3] + \cdots = -(\nu_1 + \nu_2 + \cdots)$

Значит каждый элементарный цикл есть линейная комбинация контуров и то же справедливо для произвольного цикла (поскольку он является линейной комбинацией элементарных)

В R^n контуры образуют базу векторного подпространства, порожденного циклами и в силу теоремы 2 эта база имеет размерность $\nu(G)$; поэтому наибольшее число независимых контуров равно $\nu(G)$

11. Плоские графы, формула Эйлера

Будем говорить, что граф *укладывается* на поверхности S, если его можно так нарисовать на S, что никакие два его ребра не пересекаются. Как уже отмечалось в гл. 1, мы будем использовать термины «вершины» и «рёбра» для абстрактных графов и «точки» и <<линии>> --- для геометрических графов (уложенных на некоторой поверхности). Граф называется *планарным*, если его можно уложить на плоскости; *плоский граф* --- это граф, уже уложенный на плоскости. Например, кубический граф, показанный на рис. ниже, *а*, планарный, поскольку он изоморфен плоскому графу, изображенному на рис. ниже, *б*.



а   б

Рис. 2: Планарный граф и его укладка.

Области, определяемые плоским графом, назовем его *гранями* (или *внутренними гранями*); неограниченную область будем называть *внешней гранью*. Если границей грани плоского графа является простой цикл, то иногда под гранью будем понимать этот цикл. Плоский граф, представленный на рис. 11.2, имеет две внутренние грани f_1, f_2 и одну внешнюю f_3. Из этих граней только f_2 ограничена простым циклом.

Изучение планарных графов было начато Эйлером в его исследованиях полиэдров. С каждым полиэдром связан граф, состоящий из точек и линий полиэдра; этот граф называется 1-*скелетом*. Например, граф Q_3 есть 1-скелет куба, а $K_{2,2,2}$ --- это 1-скелет октаэдра. Формула Эйлера для полиэдров --- один из классических результатов в математике.

Теорема (Формула Эйлера для полиэдров). *Для любого полиэдра, расположенного на сфере и имеющего V точек, E линий и F граней,*

$$V - E + F = 2. \tag{5}$$

Для 3-куба имеем $V = 8$, $E = 12$ и $F = 6$, так что равенство (5) выполняется; для тетраэдра $V = 4$, $E = 6$ и $F = 4$. Прежде чем доказывать равенство (5) в общем случае, переформулируем его в теоретико-графовых терминах. *Плоской картой* называется связный плоский граф вместе со всеми его гранями. Уравнение (5) для плоской карты (с p вершинами, q ребрами и r гранями) будет иметь вид

$$p - q + r = 2. \tag{6}$$

Легко доказать эту теорему по индукции. Однако соотношение (6) было уже доказано в гл. 4, когда мы установили, что циклический ранг m связного графа G определяется по формуле

$$m = q - p + 1.$$

Будем считать, что граф $\bar{G}$ двусвязен, поскольку, как легко видеть, если соотношение (11.1') выполняется отдельно для блоков графа G, то оно выполняется также и для графа G. Таким образом, каждая грань плоской укладки графа G есть простой цикл.

Мы только что отметили, что для плоской карты $p = V$ и $q = E$. Осталось только связать m с F. Покажем, что внутренние грани плоского графа G образуют базис простых циклов для графа G; число этих циклов, следовательно, равно m. Любой простой цикл Z графа G можно рассматривать как симметрическую разность граней графа G, содержащихся в Z. Поскольку внешняя грань есть, таким образом, сумма по модулю 2 всех внутренних граней (рассматриваемых как множества ребер), ясно, что $m = F - 1$. Следовательно, соотношение $m = q - p + 1$ переходит в $F - 1 = E - V + 1$.

Из формулы Эйлера вытекает много следствий.

Следствие 3 (11.1 (а)). *Если G --- плоская (p,q)-карта, в которой каждая грань является n-циклом, то*

$$q = \frac{n(p-2)}{n-2}. \tag{7}$$

Доказательство. Поскольку каждая грань графа G есть n-цикл, любое ребро в G принадлежит двум граням и каждая грань имеет n ребер. Тогда $nr = 2q$. Подставив это в (11.1'), получим искомый результат. □

Максимальным планарным графом называется граф, который при добавлении любого ребра перестает быть планарным. Подстановка в (11.2) $n = 3$ и $n = 4$ дает

Следствие 4 (11.1 (б)). *Если G --- максимальный плоский (p,q)-граф, то каждая его грань является треугольником и $q = 3p - 6$. Если G --- плоский граф, у которого любая грань есть 4-цикл, то $q = 2p - 4$.*

Так как наибольшим числом рёбер в плоском графе обладает граф, у которого каждая грань есть треугольник, то получаем необходимое условие планарности графа в терминах числа рёбер.

Следствие 11.1 (в). *Если G — произвольный планарный (p,q)-граф и $p \geq 3$, то $q \leq 3p - 6$. Если граф G двусвязан и не содержит треугольников, то $q \leq 2p - 4$.*

Следствие 11.1 (г). *Графы K_5 и $K_{3,3}$ не являются планарными.*

Доказательство. Граф K_5 есть (5,10)-граф и не может быть планарным, так как $q = 10 > 9 = 3p - 6$; для $K_{3,3}$ имеем $q = 9$ и $2q - 4 = 8$.

Следствие 11.1 (а). Каждый планарный граф $G \subseteq P \geq 4$ вершинами имеет по крайней мере четыре вершины со степенями, не превышающими 5.

Ясно, что граф планарный тогда и только тогда, когда каждая его компонента — планарный граф. Уитни [3] показал, что при исследовании планарности достаточно рассматривать двусвязные графы.

Теорема 11.2. Граф планарен тогда и только тогда, когда каждый его блок планарен.

Интуитивно очевидно, что любой планарный граф можно уложить на сфере, и обратно. Это замечание позволяет понять, что планарный граф можно уложить на плоскости многими различными способами.

Теорема 11.3. Для любой выделенной грани f двусвязного плоского графа G найдётся на плоскости изоморфный ему плоский граф, у которого грань, соответствующая грани f, будет внешней.

Доказательство. Пусть f — внешняя грань плоского блока G. Уложим G на сфере и выделим некоторую внутреннюю относительно f точку (назовем её «северным полюсом»). Проведем касательную плоскость к сфере через «южный полюс» и спроецируем G на плоскость из «северного полюса». В результате получим плоский граф, изоморфный графу G, в котором f — внешняя грань.

Следствие 11.3 (а). Для любого выделенного ребра планарного графа найдётся такая укладка этого графа на плоскости, что выделенное ребро будет принадлежать внешней грани.

Уитни также доказал, что каждый максимальный планарный граф является блоком. Более того, справедлива

Теорема 11.4 (Уитни). Каждый максимальный планарный граф, имеющий $p \geq 4$ вершины, трёхсвязен.

Существует пять способов укладки трёхсвязного колеса W_5 на плоскости: один из них изображен на рис. 11.3, а, остальные четыре — на рис. 11.3, б. Однако на сфере граф W_5 можно уложить лишь единственным способом. Это относится и ко всем трёхсвязным графам (Уитни [4]).

Теорема 11.5. Любой трёхсвязный планарный граф единственным образом укладывается на сфере.

Для того чтобы доказать необходимость трёхсвязности, рассмотрим изоморфные двусвязные графы G_1 и G_2, представленные на рис. 11.4. Граф G_1 укладывается на сфере так, что ни одна из его областей не ограничена пятью рёбрами, в то время как G_2 имеет две области, ограниченные пятью рёбрами.

Многогранник называется *выпуклым*, если отрезок прямой, соединяющий две произвольные точки многогранника, лежит целиком внутри многогранника. Следующая теорема принадлежит Штейнитцу и Радемахеру.

Теорема 11.6. Граф является 1-скелетом выпуклого трёхмерного многогранника тогда и только тогда, когда он планарен и трёхсвязен.

Одна из наиболее увлекательных областей исследований в теории планарных графов посвящена взаимосвязи между графом как комбинаторным объектом и графом как геометрической фигурой. Очень часто возникает вопрос о существовании специальной укладки графа (при тех или иных геометрических ограничениях). Например, Вагнер [**?**], Фари [**?**] и Штейн [**?**] независимо показали, что каждый планарный граф можно уложить на плоскости так, что каждое его ребро будет отрезком прямой.

Теорема 11.7. Любой планарный граф изоморфен плоскому графу, у которого все рёбра являются отрезками прямыми.

12. Линейно независимые циклы

Опишем два векторных пространства, связанных с графом G: пространство циклов и пространство коциклов. Для простоты изложения оба эти пространства задаются над двухэлементным полем $F_2 = \{0, 1\}$, в котором $1 + 1 = 0$ (хотя последующую теорию можно приспособить для произвольного поля). Так, число e_i, которое часто встречается в приводимых ниже определениях, равно 0 или 1.

Пусть, как обычно, G — граф с вершинами $v_1, \ldots, v_p$ и рёбрами $x_1, \ldots, x_q$. 0-цепь графа G формально определяется как линейная комбинация $\Sigma e_i v_i$ вершин, а 1-цепь — как линейная комбинация $\Sigma e_i x_i$ рёбер. *Граничный оператор* ∂ относит 1-цепи к 0-цепям в соответствии со следующими правилами:

[1]Обычно результат описанного проектирования называют стереографической проекцией.

а) ∂ — линейный оператор;

б) если $x = uv$, то $\partial x = u + v$.

С другой стороны, *кограничный оператор* δ относит 0-цепи к 1-цепям в соответствии с правилами:

а) δ — линейный оператор;

б) $\delta v = \Sigma e_i x_i$, где $e_i = 1$, если только ребро x_i инцидентно v.

На рис. 4.6 1-цепь $\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_4 + x_9$ имеет «границу»

$$\partial\sigma_1 = (v_1 + v_2) + (v_1 + v_3) + (v_2 + v_4) + (v_5 + v_6) = v_3 + v_4 + v_5 + v_6,$$

а 0-цепь $\sigma_0 = v_3 + v_4 + v_5 + v_6$ имеет «кограницу»

$$\delta\sigma_0 = (x_2 + x_4 + x_7) + (x_1 + x_4 + x_9) + (x_5 + x_6 + x_9) + (x_3 + x_7 + x_8) = x_2 + x_3 + x_7 + x_8.$$

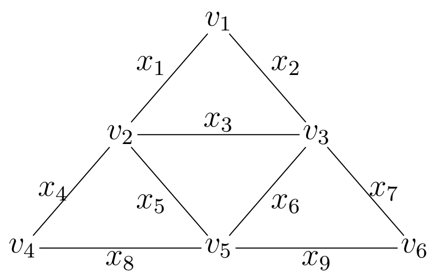


Рис. 3: Граф для иллюстрации граничного и кограничного операторов.

1-цепь с границей 0 называется *циклическим вектором*[5] графа G. Циклический вектор можно рассматривать как множество простых циклов, не имеющих попарно общих рёбер. Множество всех циклических векторов образует над F_2 векторное пространство, называемое *пространством циклов* графа G. *Базис циклов* графа G определяется как базис пространства циклов графа G, состоящий только из простых циклов. Будем говорить, что циклический вектор Z зависит от простых циклов $Z_1, Z_2, \ldots, Z_k$, если его можно представить в виде $\sum_{i=1}^{k} e_i Z_i$. Таким образом, можно сказать, что базис циклов графа G является максимальным набором независимых простых циклов графа G или минимальным набором простых циклов, от которых зависят все циклы.

Разрез связного графа — это множество рёбер, удаление которых приводит к несвязному графу. Коциклом называется минимальный разрез. Кограницей графа G называется кограница некоторой его 0-цепи. Кограница набора U вершин есть не что иное, как множество всех рёбер, соединяющих вершины из U' с вершинами, не принадлежащими U'. Очевидно, что каждая кограница является разрезом. Поскольку коцикл определяется как минимальный разрез графа G, а любой минимальный разрез есть кограница, то всякий коцикл является минимальной ненулевой кограницей. Множество всех кограниц графа G называется пространством коциклов графа G, а базис этого пространства, состоящий только из коциклов, называется базисом коциклов графа G.

Перейдём теперь к построению для пространства циклов графа G базиса, который соответствует остову T. В связном графе G хордой остова T называется ребро графа, не принадлежащее T. Ясно, что подграф графа G, содержащий остов T и его произвольную хорду, имеет только один (простой) цикл. Множество $Z(T)$ всех таких циклов (каждая хорда «порождает» один цикл) независимо, так как каждый из них содержит ребро, не принадлежащее ни одному из остальных циклов. Более того, любой цикл Z зависит от множества $Z(T)$, причём Z есть симметрическая разность циклов, которые определяются хордами остова T, принадлежащими Z. Поэтому, определяя

[5]Большинство топологов и некоторые специалисты по теории графов называют это «циклом». В свою очередь вместо нашего понятия простого цикла они используют термины «контуры», «элементарные циклы», «полигоны».

циклический ранг $m(G)$ как число простых циклов базиса пространства циклов графа G, можно сформулировать следующий результат.

Теорема 4.5. Циклический ранг связного графа G равен числу хорд любого остова в G.

Следствие 4.5 (а). Если G — связный (p,q)-граф, то $m(G) = q - p + 1$.

Следствие 4.5 (б). Если G — это (p,q)-граф с k компонентами, то $m(G) = q - p + k$.
[6]

Подобные утверждения справедливы также для пространства коциклов. Кодерево T^* остова T в связанном графе G --- это остовный подграф в G, содержащий только те рёбра графа G, которые не принадлежат T. Под кодеревом графа G понимается кодерево некоторого остова T. На рис. 4.7 показаны остов T и его кодерево T^* для графа G, представленного также на рис. 4.6.

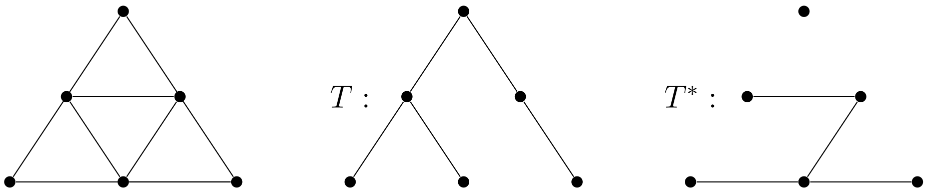
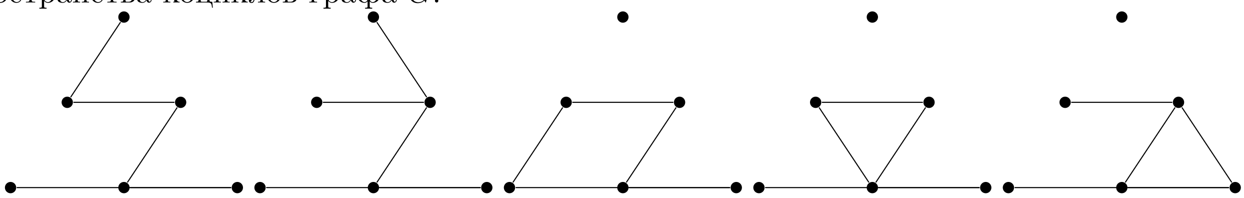


Рис. 4: Граф, дерево, кодерево

Рёбра графа G, не принадлежащие T^*, назовем ветвями графа G (относительно T^*. --- Перев.). Подграф графа G, состоящий из T^* и любой одной ветви, содержит ровно один коцикл. Множество всех таких коциклов (каждая ветвь <<порождает>>с один коцикл) является базисом пространства коциклов графа G.



На рис. 4.8 для графа G и его кодерева T^* (рис. 4.7) изображены коциклы, образующие пространство коциклов, --- они отмечены жирными линиями. *Коциклический ранг* $t^*(G)$ равен числу коциклов в базисе пространства коциклов графа G.

Теорема 4.6. Коциклический ранг связного графа G равен числу рёбер любого его остова.

Как и в случае циклов, немедленно получаем два следствия.

Следствие 4.6 (а). Если G --- связный (p,q)-граф, то $t^*(G) = p - 1$.

Следствие 4.6 (б). Если G --- это (p,q)-граф с k компонентами, то $t^*(G) = p - k$.

Замечание. Из теоремы 4.5 можно получить частное утверждение (для одномерного случая) одного важного общего результата о симплициальных комплексах. Для каждого симплициального комплекса имеет место уравнение Эйлера — Пуанкаре

$$a_0 - a_1 + a_2 - \ldots = \beta_0 - \beta_1 + \beta_2 - \ldots,$$

где β_n — числа Бетти, а a_n — количество симплексов соответствующих размерностей. По определению β_n является рангом векторного пространства n-мерных циклов. Напомним (гл. 1), что любой граф есть симплициальный комплекс, вершины соответствуют 0-симплексам, а ребра соответствуют 1-симплексам. Для графа G имеем $\beta_n = 0$ (число его компонент связности) и $\beta_1 = m(G)$ (число его независимых циклов). Поскольку графы не содержат n-симплексов при $n > 1$, то $a_n = \beta_n = 0$ для всех $n \geq 1$. Поэтому $a_0 - a_1 = \beta_0 - \beta_1$, так что $p - q = k - m(G)$ (в следствие 4.5) дает уравнение Эйлера — Пуанкаре для графов.

13. Хроматическое число плоского графа

Очевидно, что

$$\chi(H) \leq \chi(G) + 1 \quad \text{и} \quad \overline{\chi}(H) \leq \overline{\chi}(G) + 1.$$

[6]Остовом называется остовный подграф, являющийся деревом. — Прим. ред.

Если

$$\chi(H) < \chi(G) + 1 \quad \text{или} \quad \overline{\chi}(H) < \overline{\chi}(G) + 1,$$

то $\chi(H) + \overline{\chi}(H) \leq p + 1$. Предположим теперь, что $\chi(H) = \chi(G) + 1$ и $\overline{\chi}(H) = \overline{\chi}(G) + 1$. Тогда удаление вершины v из H, приводящее к образованию графа G, уменьшает хроматическое число, так что $d \geq \chi(G)$. Аналогично

$$p - d - 1 \geq \overline{\chi}(G).$$

Таким образом, $\chi(G) + \overline{\chi}(G) \leq p - 1$. Следовательно, всегда

$$\chi(H) + \overline{\chi}(H) \leq p + 1.$$

Наконец, используя неравенство $4\overline{\chi}\chi \leq (\chi + \overline{\chi})^2$, получаем

$$\overline{\chi}\chi \leq \left(\frac{p+1}{2}\right)^2.$$

Теорема о пяти красках

Хотя не известно, все ли планарные графы 4-раскрашиваемы, все они, несомненно, 5-раскрашиваемы. Мы приведем доказательство этого известного утверждения, принадлежащее Хивуду.

Теорема 12.7. *Каждый планарный граф 5-раскрашиваем.*

Доказательство. Будем доказывать индукцией по числу p вершин. Для любого планарного графа с $p \leq 5$ вершинами результат тривиален, поскольку такой граф p-раскрашиваем.

Допустим, что все планарные графы с p вершинами ($p \geq 5$) 5-раскрашиваемы. Пусть G — плоский граф с $p+1$ вершинами. В силу следствия 11.1 (д) в графе G найдется вершина v степени 5 или менее. По предположению индукции плоский граф $G - v$ 5-раскрашиваем.

Рассмотрим приписывание цветов вершинам графа $G-v$, при котором получается 5-раскраска; цвета будем обозначать через c_i, $1 \leq i \leq 5$. Ясно, что если некоторый цвет, скажем c_j, не используется в раскраске вершин, смежных с v, то, приписав цвет c_j вершине v, получим 5-раскраску графа G.

Осталось рассмотреть случай, когда $\deg v = 5$ и для вершин графа G, смежных с v, используются все пять цветов. Переставим номера цветов, если это необходимо, чтобы вершины, смежные с v и окрашенные в цвета c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, были циклически упорядочены относительно v. Пометим теперь вершину, смежную с v и окрашенную цветом c_i, буквой v_i, $1 \leq i \leq 5$ (рис. 12.2).

Обозначим через G_{13} подграф графа $G - v$, порожденный всеми вершинами, окрашенными в один из цветов c_1 и c_3. Если вершины v_1 и v_3 принадлежат различным компонентам графа G_{13}, то 5-раскраску графа $G-v$ можно получить, поменяв друг с другом (c_1 на c_3 и обратно) цвета вершин той компоненты графа G_{13}, которая содержит v_1. В этой 5-раскраске уже нет вершин, смежных с v и окрашенных в цвет c_1; поэтому, окрасив v в цвет c_1, образуем 5-раскраску графа G.

Если же вершины v_1 и v_3 принадлежат одной и той же компоненте графа G_{13}, то в G между v_1 и v_3 существует простая цепь, все вершины которой окрашены в цвета c_1 и c_3. Эта цепь вместе с цепью $v_1 v_3$ образует простой цикл, который обязательно окружает или вершину v_2, или вершины v_4 и v_5. В любом из этих случаев v_2 и v_4 нельзя соединить простой цепью, все вершины которой окрашены в цвета c_2 и c_4. Следовательно, рассматривая подграф G_{24} графа $G - v$, порожденный всеми вершинами, окрашенными в цвета c_2 и c_4, заключаем, что вершины v_2 и v_4 принадлежат различным его компонентам. Таким образом, если поменять между собой цвета вершин в компоненте подграфа G_{24}, содержащей v_2, получим 5-раскраску графа $G-v$, и в ней ни одна из вершин, смежных с v, не будет окрашена в цвет c_2. Поэтому, окрасив вершину v в цвет c_2, образуем 5-раскраску всего графа G.

Теорема о пяти красках

Хотя не известно, все ли планарные графы 4-раскрашиваемы, все они, несомненно, 5-раскрашиваемы. Мы приведем доказательство этого известного утверждения, принадлежащее Хивуду [**?**].

Теорема. *Каждый планарный граф 5-раскрашиваем.*

Будем доказывать индукцией по числу p вершин. Для любого планарного графа с $p \leq 5$ вершинами результат тривиален, поскольку такой граф p-раскрашиваем.

Допустим, что все планарные графы с p вершинами ($p \geq 5$) 5-раскрашиваемы. Пусть G — плоский граф с $p+1$ вершинами. В силу следствия 11.1 (д) в графе G найдется вершина v степени 5 или менее. По предположению индукции плоский граф $G - v$ 5-раскрашиваем.

Рассмотрим приписывание цветов вершинам графа $G-v$, при котором получается 5-раскраска; цвета будем обозначать через c_i, $1 \leq i \leq 5$. Ясно, что если некоторый цвет, скажем c_j, не используется в раскраске вершин, смежных с v, то, приписав цвет c_j вершине v, получим 5-раскраску графа G.

Осталось рассмотреть случай, когда $\deg v = 5$ и для вершин графа G, смежных с v, используются все пять цветов. Переставим номера цветов, если это необходимо, чтобы вершины, смежные с v и окрашенные в цвета c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, были циклически упорядочены относительно v. Пометим теперь вершину, смежную с v и окрашенную цветом c_i, буквой v_i, $1 \leq i \leq 5$ (рис. 12.2).

Обозначим через G_{13} подграф графа $G - v$, порожденный всеми вершинами, окрашенными в один из цветов c_1 и c_3. Если вершины v_1 и v_3 принадлежат различным компонентам графа G_{13}, то 5-раскраску графа $G-v$ можно получить, поменяв друг с другом (c_1 на c_3 и обратно) цвета вершин той компоненты графа G_{13}, которая содержит v_1. В этой 5-раскраске уже нет вершин, смежных с v и окрашенных в цвет c_1; поэтому, окрасив v в цвет c_1, образуем 5-раскраску графа G.

Если же вершины v_1 и v_3 принадлежат одной и той же компоненте графа G_{13}, то в G между v_1 и v_3 существует простая цепь, все вершины которой окрашены в цвета c_1 и c_3. Эта цепь вместе с цепью $v_1 v_3$ образует простой цикл, который обязательно окружает или вершину v_2, или вершины v_4 и v_5. В любом из этих случаев v_2 и v_4 нельзя соединить простой цепью, все вершины которой окрашены в цвета c_2 и c_4. Следовательно, рассматривая подграф G_{24} графа $G - v$, порожденный всеми вершинами, окрашенными в цвета c_2 и c_4, заключаем, что вершины v_2 и v_4 принадлежат различным его компонентам. Таким образом, если поменять между собой цвета вершин в компоненте подграфа G_{24}, содержащей v_2, получим 5-раскраску графа $G-v$, и в ней ни одна из вершин, смежных с v, не будет окрашена в цвет c_2. Поэтому, окрасив вершину v в цвет c_2, образуем 5-раскраску всего графа G.

Гипотеза четырёх красок

В гл. 1 уже упоминалось, что гипотеза четырёх красок, благодаря попыткам решить её, служила катализатором для теории графов. Мы здесь представим теоретико-графовое обсуждение этой бесславной проблемы. *Раскраской плоской карты* G называется такое приписывание цветов областям в G, что никакие две смежные области не получают одинакового цвета. Карта G называется n-раскрашиваемой, если существует её раскраска, использующая n или менее цветов. Первоначальная формулировка гипотезы, упомянутой в гл. 1, выглядит так: каждая плоская карта 4-раскрашиваема.

Гипотеза четырёх красок. Каждый планарный граф 4-раскрашиваем.

Ещё раз подчёркиваем, что под раскраской графа всегда понимается раскраска его вершин, в то время как раскраска карты означает, что раскрашиваются именно её области. Таким образом, предположение, что каждая плоская карта 4-раскрашиваема, на самом деле эквивалентно приведённой только что формулировке гипотезы четырёх красок. Чтобы убедиться в этом, предположим, что гипотеза четырёх красок справедлива, и возьмём произвольную плоскую карту G. Пусть G^* — граф, являющийся основой карты, и геометрически двойственной к карте G. Так как две области карты G смежны тогда и только тогда, когда соответствующие им вершины графа G^* смежны, то карта G 4-раскрашиваема, поскольку граф G^* 4-раскрашиваем.

Обратно, предположим, что каждая плоская карта 4-раскрашиваема. Пусть H — любой планарный граф, а H^* — граф, двойственный к графу H и нарисованный так, что каждая его область содержит точно одну вершину графа H. Связный плоский псевдограф H^* можно перевести в плоский граф H', добавляя две новые вершины на каждую петлю графа H^* и одну новую вершину на каждое ребро из множества кратных ребер. Теперь 4-раскрашиваемость графа H' означает 4-раскрашиваемость графа H. Таким образом, эквивалентность обеих формулировок доказана.

Если будет доказана гипотеза четырех красок, то результат будет неулучшаем, поскольку легко привести примеры планарных 4-хроматических графов. Таковы графы K_4 и W_5, изображенные на рис. 12.3. В каждом из этих графов не менее четырех треугольников, что является в силу теоремы Грюнбаума [1] необходимым условием 4-хроматичности.

Теорема 12.8. *Каждый планарный граф, имеющий меньше четырех треугольников, 3-раскрашиваем*

Отсюда немедленно вытекает следующее утверждение, первоначально доказанное Грёшем [1].

Следствие 12.8 (а). *Каждый планарный граф, не содержащий треугольников, 3-раскрашиваем.*

Оре и Стемпл [**?**] показали, что все плоские карты, имеющие не более 39 областей, 4-раскрашиваемы, и тем самым увеличили на 4 число областей в более раннем результате такого типа [7]. Все эти примеры подтверждают гипотезу четырех красок. Как мы сейчас увидим, эту гипотезу в ее формулировке для плоских карт можно попробовать доказывать для специального класса плоских карт.

Теорема 12.9. Гипотеза четырех красок справедлива тогда и только тогда, когда каждая кубическая плоская карта, не имеющая мостов, 4-раскрашиваема.

Доказательство. Мы уже видели, что любая плоская карта 4-раскрашиваема тогда и только тогда, когда справедлива гипотеза четырех красок. В свою очередь это эквивалентно предложению, что каждая плоская карта, не содержащая мостов, 4-раскрашиваема, так как элементарное стягивание с помощью отождествления висячих вершин моста не изменяет числа областей карты и не нарушает смежность любых ее областей.

Ясно, что если 4-раскрашиваем всякая плоская карта, не содержащая мостов, то и всякая кубическая плоская карта, не содержащая мостов, также 4-раскрашиваема. Чтобы проверить обратное, предположим, что G — плоская карта без мостов и что все кубические плоские карты без мостов 4-раскрашиваемы. Так как G не содержит мостов, то в ней нет висячих вершин. Если в G существует вершина v степени 2, инцидентная ребрам y и z, то произведем подразделение ребер y и z, обозначая дополнительные вершины через i и w соответственно. Удалим теперь v, отождествляя вершину i с одной из вершин степени 2 в некоторой копии графа $K_4 - x$, а вершину w — с другой вершиной степени 2 в $K_4 - x$. Очевидно, что каждая из новых вершин имеет степень 3 (рис. 12.4). Если G содержит вершину v_0 степени $n \geq 4$, инцидентную ребрам $x_1, x_2, \ldots, x_n$, упорядоченным циклически относительно v_0, то, добавляя новую вершину v_i, подразделяем каждое ребро x_i. Затем удалим v_0 и добавим новые ребра $v_1v_2, v_2v_3, \ldots, v_n - 1v_n, v_nv_1$. Опять каждая из дополнительных вершин имеет степень 3.

Обозначим полученную кубическую плоскую карту, которая, очевидно, не содержит мостов, через G'. Эта карта по предположению 4-раскрашиваема. Рассмотрим в карте G произвольную вершину v, у которой $\deg v \neq 3$. Если в G' отождествим между собой все добавленные при построении карты G' вершины, соответствующие вершине v (причем сделать это для всех вершин у карты G, степень которых отлична от 3), то получим карту G. Поэтому, имея некоторую 4-раскраску карты G' и осуществляя указанное выше стягивание карты G' в карту G, получаем m-раскраску карты G, где $m \leq 4$. Теорема доказана.

14. Примеры неплоских графов

Ещё одна хуета

15. Ориентированные графы, порядковая функция

Ориентированный граф, или *орграф*, D состоит из конечного непустого множества V вершин и заданного набора X упорядоченных пар различных вершин. Элементы из X называются *ориентированными ребрами*, или *дугами*. По определению в орграфе нет петель и кратных дуг. *Направленный граф* --- это орграф, не имеющий симметричных[8] пар ориентированных ребер. На рис. 2.4 приведены все орграфы с тремя вершинами и тремя дугами; два последних из них --- направленные графы. Орграфам посвящена последняя, 16 глава, но время от времени к ним мы будем обращаться и в других главах.

[7] 1

[8] То есть дуг вида (u, v) и (v, u). --- Прим. перев.

Граф называется *помеченным* (или *перенумерованным*), если его вершины отличаются одна от другой какими-либо пометками, например $v_1, v_2, \ldots, v_p$. Графы G_1 и G_2 на рис. 2.5 помеченные, а граф G_3 нет.

Хорошо известным обобщением понятия *целого числа* служит понятие *порядкового числа*, напомним его.

В строке $(x_1, x_2, \ldots, x_{12})$ на 12 объектом место объекта x_6 указывается символом 6.

Допустим теперь, что собрание объектов x_1, x_2 бесконечно и что эти объекты расположены в некотором порядке, скажем

$$(x_4, x_5, x_6, \ldots, x_1, x_2, x_3).$$

Если места объектов x_4, x_5, x_6 можно определить обычными целыми числами, то для определения мест объектов x_1, x_2, x_3 потребуется ввести новые символы $\omega+1$ для x_1, $\omega+2$ для x_2, $\omega+3$ для x_3. Символы 1, 2, ..., $\omega+3$ называются *порядковыми числами первого рода* (или *непредельными порядковыми числами*), а символ ω, не определяющий никакого места, — *порядковым числом второго рода* (или *предельным порядковым числом*).

Эти определения можно продолжать и дальше, например, при порядке

$$(x_3, x_5, x_7, x_9, \ldots, x_2, x_4, x_6, \ldots),$$

место объекта x_8 будет $\omega+4$, место x_1 будет ω^2+1.

Для двух порядковых чисел α и β считают, что $\alpha < \beta$, если объект, место которого указывается символом α, предшествует объекту, место которого указывается символом β.

Разумеется, порядковые числа можно определить строго при помощи алгебраических понятий.

В теории графов понятие порядкового числа имеет большое значение. Например, если рассматривать конечные предложения о конечных графах, на некотором этапе бесконечные графы.
1) Пара, образованная множеством X и отношением порядка $\prec$, есть *вполне упорядоченное множество*, если любое подмножество множества X имеет наименьший элемент. Два вполне упорядоченных множества $(X, \prec)$ и $(Y, \preceq)$ называются *эквивалентными*, если между X и Y можно установить взаимно однозначное соответствие f, при котором

$$x \prec y \iff f(x) \preceq f(y)$$

Порядковое число будет тогда классом эквивалентности, содержащим данное вполне упорядоченное множество. Запомним лишь результат: сами порядковые числа вполне упорядочены отношением $\leq$ (См., например, [1] (гл. 1)) (См. также гл. С. А. Александров, *Введение в общую теорию множеств и функций*, М.-Л., 1948, или Ф. Хаусдорф, *Теория множеств*, М.-Л., 1937. --- Прим. ред.)

Для заданного графа $G = (X, \Gamma)$ рассмотрим множества

$$X(0) = \{x | \Gamma x = \emptyset\},$$

$$X(1) = \{x | \Gamma x \subseteq X(0)\},$$

$$X(2) = \{x | \Gamma x \subseteq X(1)\},$$

$$\ldots$$

$$X(k) = \{x | \Gamma x \subseteq X(k-1)\},$$

$$X(\omega) = \bigcup_{\alpha<\omega} X(\alpha),$$

$$X(\omega+1) = \{x | \Gamma x \subseteq X(\omega)\},$$

Ясно, что эти определения можно продолжать неограниченно: если α --- порядковое число первого рода, то полагаем

$$X(\alpha) = \{x | \Gamma x \subseteq X(\alpha-1)\},$$

а если α --- порядковое число второго рода, полагаем

$$X(\alpha) = \bigcup_{\beta < \alpha} X(\beta).$$

Заметим, что если два порядковых числа α и β удовлетворяют условию $\alpha \ll \beta$, то $X(\alpha) \subseteq X(\beta)$.

Порядком вершины x называется наименьшее порядковое число α, для которого

$$x \in X(\alpha),$$

$$x \notin X(\beta) \quad \text{при всех}\, \beta < \alpha.$$

Полагаем тогда $\alpha = o(x)$, разумеется, некоторые вершины могут не иметь порядка. К таким относятся, например, все вершины контура. Функция $o(x)$, определенная, вообще говоря, не на всем X, называется *порядковой функцией* графа.

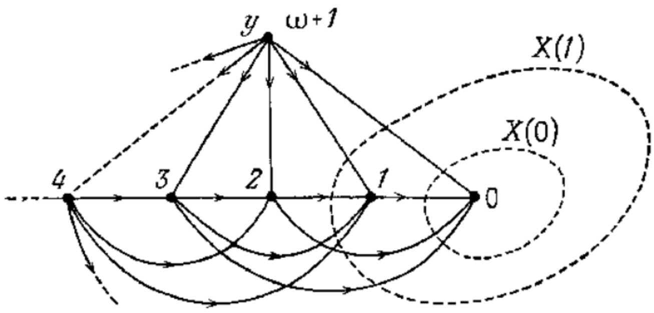


Рис. 3--2

Пример. У графа, изображенного на рис. 3--2, каждая вершина x имеет порядок $o(x)$, который указан на чертеже, лишь одна вершина y имеет трансфинитный порядок. Здесь $X = X(\omega + 1)$.

Теорема 4 Порядковая функция определена на всем множестве X в том и только в том случае, если граф (X, Γ) прогрессивно конечен.

1° Пусть $\theta(x)$ существует для всех $x \in X$, покажем, что граф прогрессивно конечен. С этой целью мы допустим, что существует бесконечный путь $[a_1, a_2, \ldots]$ и убедимся в том, что это приводит к противоречию.

Положим $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$; имеем $A \cap X(\emptyset) = \emptyset$. Если $A \cap X(\beta) = \emptyset$ для всех порядковых чисел $\beta < \alpha$, то также $A \cap X(\alpha) = \emptyset$. Тогда в силу принципа индукции, $A \cap X = \emptyset$.

Отсюда $A = \emptyset$, что невозможно.

2° Наоборот, предположим, что существует вершина x, не имеющая порядка, пусть B — множество всех таких вершин. Имеем $B \neq \emptyset$.

Если $x_1 \in B \cap \Gamma^*(x)$ (либо $x_1 \notin X(0)$) поэтому в X_1 найдется вершина $x_2 \in B$, точно так же в Γ_{x_2} найдется вершина $x_3 \in B$ и т.д.

Путь $[x_1, x_2, x_3, \ldots]$ обладает бесконечной длиной, и граф не может быть прогрессивно конечным. с

16. Функция Гранди

Рассмотрим конечный граф (X, Γ) и функцию g, относящую каждой вершине x целое число $g(x) \geq 0$. Будем говорить, что $g(x)$ есть *функция Гранди* для данного графа, если в каждой вершине x значение $g(x)$ представляет собой наименьшее из тех целых неотрицательных чисел, которые не принадлежат множеству

$$g(\Gamma x) = \{g(y) \mid y \in \Gamma x\}.$$

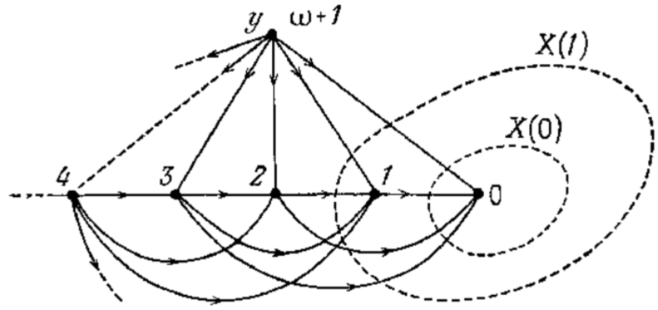


Рис. 3-3

Пользуясь трансфинитными порядковыми числами, можно определить функцию Гранди в случае бесконечного графа. $g(x)$ есть наименьшее порядковое число, не принадлежащее множеству

$$\{g(y) \mid y \in \Gamma x\}.$$

Из определения следует, что если $\Gamma x = \emptyset$, то необходимо $g(x) = 0$. Граф может не допускать функции Гранди (например, если у него есть петля) или же допускать более одной такой функции.

Пример 1 Граф, изображённый на рис. 3-3, допускает две функции Гранди, значения которых указаны около соответствующих вершин; можно убедиться, что если $x = \{y_1, y_2, \ldots\}$, то $g(x)$ — наименьшее целое число, отличное от $g(y_1), g(y_2)$.

Пример 2 Граф изображенный на рис. 3-2 допускает единственную функцию Гранди $g(x)$; эта функция при $x \neq a$, равна $o(x)$, а в вершине a принимает трансфинитное значение ω.

Теорема 5. Прогрессивно конечный граф допускает одну и только одну функцию Гранди $g(x)$, при этом

$$g(x) \leq o(x)$$

Доказательство получается непосредственно, если провести индукцию по множествам

$$X(0) = \{x | x = \emptyset\},$$

$$X(1) = \{x | x \subseteq X(0)\},$$

$$X(2) = \{x | x \subseteq X(1)\}$$

Теорема 6. Если $|X| < \infty$, то $g(x) \leq \Gamma$. Если $g(x) = n$, то функция g принимает в x все значения $0, 1, 2, \ldots, n-1$, поэтому $|X| \geq n - g(x)$.

Теоремы 5 и 6 показывают, что функция $g(x)$ не слишком охотно принимает большие значения; в частности для Г-конечного или для прогрессивно ограниченного графа значения $g(x)$ остаются конечными числами.

17. Внутреннее устойчивое множество

Рассмотрим граф $G = (X, \Gamma)$, множество $S \subseteq V$ называется *внутренне устойчивым*, если никакие две вершины из S не смежны, другими словами если

$$\Gamma S \cap S = \emptyset$$

Обозначим через $\mathfrak{S}$ семейство всех внутренне устойчивых множеств графа; имеем

$$S \in \mathfrak{S} \wedge S \subseteq A \Rightarrow A \in \mathfrak{S}$$

По определению *число внутренней устойчивости* графа G есть

$$\alpha(G) = \max_{S \in \mathfrak{S}} |S|$$

Замечание 1 Хроматическое число $\gamma(G)$ и число внутренней устойчивости $\alpha(G)$ связаны неравенством

$$\alpha(G)\gamma(G) \geq |X|.$$

В самом деле, можно разбить X на $\gamma(G)$ внутренних устойчивых множеств, образованных вершинами одинакового цвета и содержащих соответственно $m_1, m_2, \ldots, m_q$ вершин. Поэтому

$$|X| = m_1 + m_2 + \ldots + m_q \leq \gamma(G) \cdot \alpha(G) + \ldots + \alpha(G) = \gamma(G) \cdot \alpha(G).$$

Замечание 2 Можно поставить вопрос, не являются ли связи между обоими понятиями более тесными и нельзя ли найти хроматическое число, окрашивая сначала в цвет (1) наибольшее внутреннее устойчивое множество S_1, затем в цвет (2) наибольшее внутреннее устойчивое множество S_2 подграфа, порожденного вершинами $X \setminus S_1$, далее в цвет (3) наибольшее внутреннее устойчивое множество оставшегося подграфа и т.д. Оказывается, это не так, что видно на примере графа, изображенного на рис. 4--6 (его хроматическое число очевидно, равно 4), вершины, изображенные белыми кружками, образуют единственное наибольшее внутреннее устойчивое множество, но если их окрасить в один цвет, то остальные вершины $a\,b\,c\,d$ надо было бы окрасить с помощью только трех цветов, а это, очевидно, невозможно.

Иногда для двух графов G и H возникает вопрос о нахождении числа внутренней устойчивости произведения $G \times H$.

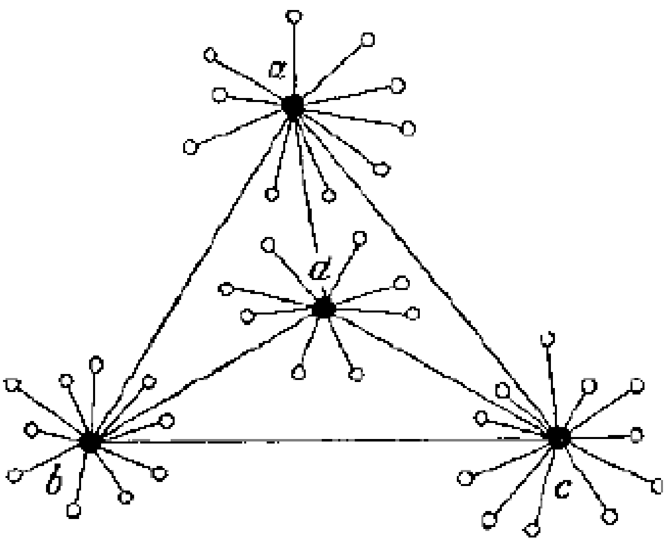


Рис. 5: Рис. 4--6

Лемма 1 Для двух графов G и H

$$\alpha(G \times H) \geq \alpha(G) \cdot \alpha(H)$$

Действительно, если S и T — наибольшие внутренне устойчивые множества соответственно для G и H, то декартово произведение $S \times T$ является внутренне устойчивым в графе $G \times H$, откуда

$$\alpha(G \times H) \geq |S \times T| = |S| \cdot |T| = \alpha(G) \cdot \alpha(H)$$

Эта лемма подсказывает нам следующее определение, назовем *емкость* графа G число

$$\theta(G) = \sup_n \sqrt[n]{\alpha(G^n)}$$

Имеем $\theta(G) \geq \alpha(G)$, мы собираемся показать, что почти всегда

$$\theta(G) = \alpha(G)$$

Между прочим, Шеннон установил, что граф G, изображенный на рис. 4-8, является единственным графом с числом вершин менее шести, для которого $\theta(G) \neq \alpha(G)$, фактически его емкость $\theta(G)$ не удалось определить, и известно лишь, что

$$\forall 5 \leq \theta(G) \leq \frac{5}{2}$$

Рассмотрим однозначное отображение σ множества X в себя, такое отображение называется *сохраняющим*, если

$$y \neq x,\, y \notin \Gamma(x) \Rightarrow \sigma(y) \neq \sigma(x),\, \sigma(y) \notin \Gamma(\sigma(x))$$

Это отображение сохраняет свойство пары вершин "быть несмежными и различными".

Лемма 2 Сохраняющее отображение σ переводит внутренне устойчивое множество S во внутренне устойчивое множество $\sigma(S)$, и при этом $|\sigma(S)| = |S|$.

В самом деле, ввиду однозначности отображения σ имеем $|\sigma(S)| \leq |S|$, а так как σ сохраняюще, то $|\sigma(S)| = |S|$.

Лемма 3 Если множество $\sigma(X)$ внутренне устойчиво, то число внутренне устойчивости графа G есть $\theta(G) = \alpha(G)$.

Действительно, раз $\sigma(X)$ внутренне устойчиво, то

$$|\sigma(X)| \leq \max_S |S| = \alpha(G)$$

С другой стороны, если S_0 — наибольшее внутренне устойчивое множество, то в силу леммы 2,

$$|\sigma(X)| \geq |\sigma(S_0)| = |S_0| = \alpha(G),$$

Отсюда

$$\alpha(G) = |\sigma(X)|.$$

Теорема 7 (Шеннон) *Если хотя бы для одного из графов G и H существует сохранное отображение σ, переводящее множество вершин этого графа во внутренне устойчивое множество, то*

$$\alpha(G \times H) = \alpha(G)\alpha(H).$$

Достаточно показать, что $\alpha(G \times H) \leq \alpha(G)\alpha(H)$, пусть σ — сохранное отображение для G, при котором $\sigma(X)$ внутренне устойчиво, и пусть σ_0 — отображение множества вершин графа $G \times H$ в себя, определенное следующим образом.

$$\sigma_0(x, y) = (\sigma(x), y).$$

Отображение σ_0 переводит две несмежные различные вершины $= (x, y)$ и $' = (x', y')$ в две несмежные различные вершины $(\sigma x, y)$ и $(\sigma x', y')$ и поэтому сохранно.

Если S_0 — наибольшее внутренне устойчивое множество графа $G \times H$, то $\alpha(G \times H) = |S_0| = |\sigma_0(S_0)|$ в силу леммы 2, распределим элементы $\sigma_0(S_0)$ по различным классам в зависимости от первой буквы каждого слова. Согласно лемме 3 получим: $|\sigma(X)| = \alpha(G)$ различных классов. Поскольку никакие два элемента из $\sigma_0(S_0)$ не смежны, каждый класс имеет самое большее $\alpha(H)$ элементов, значит

$$\alpha(G \times H) = |\sigma_0(S_0)| \leq \alpha(G)\alpha(H).$$

Следствие *Если множество вершин графа G при помощи сохранного отображения σ можно перевести во внутренне устойчивое множество, то емкость этого графа совпадает с числом внутренней устойчивости.*

В самом деле,

$$\alpha(G) \leq (\alpha(G))^2$$

и

$$\alpha(G \times G) \leq (\alpha(G))^3$$

и т.д.,
отсюда

$$\alpha(G) = \sup_n \sqrt[n]{\alpha(G^n)} = \alpha(G).$$

18. Внешнее устойчивое множество

Пусть дан граф $G = (X, \Gamma)$, говорят, что множество $T \subseteq X$ внешне устойчиво, если для каждой вершины $x \notin T$ имеем $\Gamma_x \cap T \neq \varnothing$, иначе говорят, если $\Gamma' T \supseteq X \setminus T$,

Если $\mathcal{T}$ — семейство всех внешне устойчивых множеств графа, то $X \in \mathcal{T}$

$T \in \mathcal{T} \quad A \supseteq T \Rightarrow A \in \mathcal{T}$

По определению, *число внешней устойчивости* графа G есть

$$\beta(G) = \min_{T \in \mathcal{T}} |T|$$

Задача, которая нас сейчас интересует, заключается в построении внешне устойчивого множества с наименьшим числом элементов.

Алгоритм для нахождения наименьшего внешне устойчивого множества

Рассмотрим для примера граф $G = (X, \Gamma)$ изображенный на рис. 4--11 и определим отображение Δ множества $X = \{a, b\}$ в новое множество

$$\overline{X} = \left\{ \begin{array}{c} \bar{a} \\ \bar{b} \end{array} \right\}$$

следующим образом

$$\bar{y} \in \Delta x \iff y = x \text{ или } y \in \Gamma^{-1} x$$

Тем самым построен так называемый простой граф[9], который мы обозначим через $(X, \overline{X})$ (рис. 4--12), если T --- внешне устойчивое множество графа G, то $\Delta T = \overline{X}$. Наоборот, если $\Delta T = \overline{X}$, то множество T внешне устойчиво в G. Задача свелась таким образом, к определению наименьшего множества $T \subseteq X$, для которого $\Delta T = \overline{X}$.

1° Удаляем из простого графа каждую такую вершину x, что $\Delta x \subseteq \Delta y$ для некоторой вершины $y \neq x$ (в самом деле, с точки зрения нашей задачи вершина y будет полностью заменять вершину x). В нашем примере мы удаляем, таким образом, вершины c, d, f.

2° Если в простом графе имеется висячее ребро (x, y), то очевидно, $x \in T$. В данном примере множеству T заведомо принадлежит вершина a.

3° Исключим из простого графа вершину a, уже входящую в T, и множество $\Delta a = \{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$, в результате получается граф, изображенный на рис. 4--13.

4° Снова пытаемся удалить некоторую вершину, как в 1° или исключив вершину, заведомо принадлежащую T, как в 2°, если упростить граф уже нельзя (как в данном примере), то назовем его неприводимым. Временно отнесем в T произвольную вершину, скажем b.

5° Исключим, как в 3°, вершину b и множество $\Delta b = \{a, e, f\}$.

6° Продолжаем упрощение, как выше: из полученного графа можно исключить вершину g, так как $\Delta g \subseteq \Delta e = \{g\}$. Включая в T последнюю вершину e, получаем решение $T = \{a, b, e\}$.

[9]Простой граф --- это граф без петель и кратных рёбер.

19. Ядро графа

Пусть $G = (X, \Gamma)$ — конечный или бесконечный граф. Множество $S \subseteq X$ называется *ядром* графа, если S устойчиво как внутренне, так и внешне, т.е. если

$$x \in S \Rightarrow \Gamma x \cap S = \varnothing, \tag{8}$$

$$x \notin S \Rightarrow \Gamma x \cap S \neq \varnothing. \tag{9}$$

Из условия (1) вытекает, что ядро S не содержит петель. Из условия (2) — что S содержит все такие вершины x, для которых $\Gamma x = \varnothing$. Очевидно, пустое множество $\varnothing$ не может быть ядром.

Теорема 1 Если S -- ядро графа (X, Γ), то множество S -- максимальное в семействе $\mathfrak{S}$ внутренне устойчивых множеств, т.е.

$$A \in \mathfrak{S},\ A \supseteq S \Rightarrow A = S$$

Пусть A внутренне устойчивое множество, содержащее ядро S; предположим, что A строго содержит S и покажем, что это приводит к противоречию. В самом деле, тогда существовала бы такая вершина a, что $a \in A$, $a \notin S$, откуда $\Gamma a \cap S = \varnothing$ и, значит, $\Gamma a \cap A \neq \varnothing$ в противоречии с условием $A \in \mathfrak{S}$.

Теорема 2 В симметрическом графе без петель каждое максимальное множество семейства $\mathfrak{S}$ внутренне устойчивых множеств представляет собой ядро.

Пусть S -- максимальное множество из $\mathfrak{S}$, надо показать что для любой вершины $x \notin S$ имеет место $\Gamma x \cap S \neq \varnothing$. В самом деле, если $\Gamma x \cap S = \varnothing$ для некоторой вершины $x \in S$, то множество $A = S \cup \{x\}$ внутренне устойчиво (поскольку $x \notin \Gamma x$) и в то же время $A \supset S$, что противоречит предположению о максимальности S в $\mathfrak{S}$.

Следствие *Симметрический граф без петель обладает ядром*

В самом деле, образуем вспомогательный граф (S, Γ), вершинами которого служат внутренне устойчивые множества данного симметрического графа $a \subseteq S' \subseteq S$ тогда и только тогда, когда $S = S'$. Вспомогательный граф --- индуктивный следовательно по лемме Цорна (гл. 3) существует вершина $S \in S$ без строго последующих. Множество S является максимальным внутренне устойчивым и значит, в силу теоремы 2, ядром.

В случае когда данный симметрический граф конечен это следствие становится очевидным и процесс нахождения ядра состоит в следующем:

Берем произвольную вершину x_0 и полагаем $S_0 = \{x_0\}$; затем берем некоторую вершину $x_1 \notin \Gamma S_0$ и полагаем $S_1 = \{x_0, x_1\}$, далее берем вершину $x_2 \notin \Gamma S_1$, и т.д. Так как граф конечен, то рано или поздно мы получим $\Gamma S_n = X$ и S_n как максимальное множество в S будет ядром.

Характеристической функцией $\varphi_S(x)$ множества S называется функция

$$\varphi_S(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x \in S \\ 0, & \text{при } x \notin S \end{cases}$$

Если $\Gamma x = \emptyset$, то условимся считать, что $\max_{y \in \Gamma x} \varphi_S(y) = 0$.

Теорема 3 *Для того чтобы множество S было ядром, необходимо и достаточно чтобы для характеристической функции $\varphi_S(x)$ выполнялось соотношение*

$$\varphi_S(x) = 1 - \max_{y \in \Gamma x} \varphi_S(y)$$

1° Пусть S — ядро. В силу внутренней устойчивости

$$\varphi_S(x) = 1 \implies x \in S \implies \max_{y \in \Gamma x} \varphi_S(y) = 0.$$

В силу внешней устойчивости

$$\varphi_S(x) = 0 \implies x \notin S \implies \max_{y \in \Gamma x} \varphi_S(y) = 1.$$

Отсюда получается требуемое соотношение.

2°Пусть $\varphi_S(x)$ — характеристическая функция некоторого множества S, если рассматриваемое соотношение выполнено, то

$x \in S \implies \varphi_S(x) = 1 \implies \max_{y\in\Gamma_x} \varphi_S(y) = 0 \implies \Gamma_x \cap S = \varnothing$,

$x \notin S \implies \varphi_S(x) = 0 \implies \max_{y\in\Gamma_x} \varphi_S(y) = 1 \implies \Gamma_x \cap S \neq \varnothing$.

Следовательно S — ядро

Теорема 4 Прогрессивно конечный граф обладает ядром

Доказательство получается сразу, если заметить, что характеристическая функция $\varphi_S(x)$, удовлетворяющая соотношению предыдущей теоремы, по индукции определяется на множествах

$X(0) = \{x|\Gamma_x = \varnothing\}$,

$X(1) = \{x|\Gamma_x \subseteq X(0)\}$,

$X(2) = \{x|\Gamma_x \subseteq X(1)\}$,

Теорема 4 (гл 3) показывает, что таким путем φ_S будет определена на всем X.

Теорема Ричардсона Конечный граф, не содержащий контуров нечетной длины, обладает ядром

Пусть (X, Γ) — конечный граф без нечетных контуров, будем последовательно определять множества $Y_0, Y_1, Y_2, \subseteq X$ следующим образом

1°Берем $Y_0 = \varnothing$, обозначим через B_0 базу (см. гл. 2) подграфа, порождаемого множеством $X \setminus Y_0$, эта база существует в силу теоремы 1 (гл. 2). Полагаем $Y_1 = B_0 \cup \Gamma^{-1}B_0$.

2°Если множество Y_n уже определено, то обозначим через B_n какую-либо базу подграфа, порождаемого множеством $X \setminus Y_n$, удовлетворяющую условию $B_n \subseteq I^1(\Gamma^{-1}B_{n-1} \setminus Y_{n-1})$. Легко видеть,что такая база всегда существует[10]; далее полагаем

$$Y_{n+1} = Y_n \cup B_n \cup \Gamma^{-1}B_a$$

Тогда

$$\emptyset = Y_0 \subseteq Y_1 \subseteq Y_2 \subseteq \cdots$$

Так как граф предполагается конечным, то существует такой номер m, что $Y_m = X$, пусть

$$S = \bigcup_{n=0}^{m-1} B_n$$

Покажем что S — ядро графа (X, Γ).

1°S внешне устойчиво, ибо если $x \notin S$, то $x \in \Gamma^{-1}B_k \setminus Y_k$ для некоторого номера k, значит $\Gamma x \cap B_k \neq \emptyset$ и $\Gamma x \cap S \neq \emptyset$.

2°S внутренне устойчиво. В самом деле, никакие два элемента из B_n не могут быть смежны (ибо B_n является базой некоторого подграфа); рассмотрим две смежные вершины, одна из которых $\in B_n$, другая $\in B_p$, где $p < n$ (если такие вершины есть). Имеем $B_n \cap \Gamma^{-1}B_p = \emptyset$, ибо $\Gamma^{-1}B_p \subseteq Y_{p+1}$ и $B_n \subseteq X \setminus Y_n \subseteq X \setminus Y_{p+1}$. Точно так же $B_p \cap \Gamma^{-1}B_n = \emptyset$, так как в противном случае можно было бы

[11] Для доказательства того что граф $(X \setminus Y_n, \Gamma x \setminus Y_n)$ имеет базу

$$B_n \subseteq \Gamma^{-1}(\Gamma^{-1}B_{n-1} \setminus Y_{n-1}),$$

рассмотрим какую-нибудь базу B'_n и вершину a_0 без строго последующих, выбранную для построения B'_n в соответствии с теоремой 3 (п. 2), достаточно показать, что в $X \setminus Y_n$ найдётся вершина b, которой можно заменить вершину a_0 и для которой

1. $b \notin a_0$ (где $\gtrsim$ --- отношение квазипорядка в графе, порожденном множеством $X \setminus Y_n$)
2. $b \in \Gamma^{-1}(B_{n-1} \setminus Y_{n-1})$

[10] 1

[11] 1

В графе $(X \setminus Y_{n-1}, \Gamma \setminus Y_{n-1})$ существует путь $\mu = [a_0, a_1, \dots, b]$, ведущий из a_0 в B_{n-1}, пусть a_k --- первая вершина пути μ, принадлежащая Y_n. Так как $a_k \in X \setminus Y_{n-1}$, $a_k \in Y_n$, $a_k \notin B_{n-1}$, то $a_k \in \Gamma^{-1}B_{n-1} \setminus Y_{n-1}$ (предполагается, что множество Y_n определено по формуле $Y_n = Y_{n-1} \cup B_{n-2} \cup B_{n-1}$. Если бы $a_k \in B_{n-1}$, то вершина a_{k-1} принадлежала бы $\Gamma^{-1}B_{n-1} \setminus Y_{n-1}$ и таким образом, a_k не была бы первой вершиной пути μ, принадлежащей Y_n. Следовательно $a_k \notin B_n$, и так как $a_k \notin Y_{n-1}$, то $a_k \in \Gamma^{-1}B_{n-1} \setminus Y_{n-1}$. *Прим. ред.* Вершина $b = a_k$, удовлетворяет как условию (1), так и условию (2).

Построить такой путь $\mu = [x_0, \lambda_\rho, y_\rho, x_{n-1}, y_{n-2}, x_{n-2}, \dots, y_\rho, x_\rho]$, что

$$\begin{aligned}
&x_0 \in B_n, \quad x_1 \in \Gamma^{-1}B_n,\\
&x_n \in B_n \subseteq \Gamma^{-1}(\Gamma^{-1}B_{n-1} \setminus Y_{n-1}),\\
&y_{n-1} \in \Gamma^{-1}B_{n-1} \setminus Y_{n-1},\\
&x_{n-1} \in B_{n-1},\\
&y_\rho \in \Gamma^{-1}B_\rho \setminus Y_\rho,\\
&x_\rho \in B_\rho.
\end{aligned}$$

Заметим, что все вершины пути μ принадлежат $X \setminus Y_p$ и что μ идет из $x_0 \in B_p$ в $x_p \in B_p$ (см. рис. 5--3), так как B_p --- база подграфа, порожденного множеством $X \setminus Y_p$, то $x_0 = x_p$. Таким образом, путь μ представляет собой контур нечетной длины, что противоречит условию теоремы.

20. Игры на графе, игра НИМ

Граф (X, Γ) дает возможность определить некоторую игру двух игроков, которых мы назовем (A) и (B). Положениями этой игры служат вершины графа, начальная вершина x_0 выбирается жребием, и противники играют поочередно: сперва игрок (A) выбирает вершину x_1 в множестве Γx_0, затем (B) выбирает вершину x_2 в множестве Γx_1, после этого (A) опять выбирает вершину x_3 в Γx_2, и т.д. Если один из игроков выбрал вершину x_n, для которой $\Gamma x_n = \emptyset$, то партия оканчивается, игрок, выбравший вершину последним, выиграл, а его противник проиграл. Ясно, что если граф не является прогрессивно конечным, то партия может никогда не окончиться.

В честь известного развлечения, которое здесь обобщено, будем описанную только что игру называть *игрой Ним*, а определяющий ее граф обозначать через (X, Γ); сейчас наша задача состоит в том, чтобы охарактеризовать выигрышные положения, т.е. те вершины графа, выбор которых обеспечивает выигрыш партии независимо от ответов противника. Главным результатом является следующая

Теорема 1. *Если граф имеет ядро S и если один из игроков выбрал вершину в ядре, то этот выбор обеспечивает ему выигрыш или ничью.*

Действительно, если игрок (A) выбрал вершину $x_1 \in S$, то либо $\Gamma x_1 = \emptyset$, и тогда он уже выиграл партию, либо его противник (B) вынужден выбрать вершину $x_2 \in X \setminus S$, а значит, следующим ходом игрок (A) может выбрать x_3 опять в S и продолжать в том же духе. Если в какой-либо определенный момент один из игроков выбрал вершину x_n, для которой $\Gamma x_n = \emptyset$, то $x_n \in S$, и выигравшим партнером необходимо является (A).

сновной метод для хорошего игрока состоит следовательно, в вычислении какой-либо функции Гранди, если она существует, с помощью этой функции $g(x)$ получаем ядро

$$S = \{x | g(x) = 0\}$$

рассматриваемого графа. Если начальная вершина x_0 такова, что $g(x_0) = 0$, то игрок (A) находится в критическом положении, ибо его противник может обеспечить себе выигрыш или ничью. Напротив, если $g(x_0) \neq 0$, то игрок (A) сам обеспечивает себе выигрыш или ничью, выбирая такую вершину x_1, что $g(x_1) = 0$.

Следствие. Если граф прогрессивно конечен, то существует одна и только одна функция Гранди $g(x)$, каждый выбор такой вершины y, для которой $g(y) = 0$, является выигрышным, а каждый выбор такой вершины z, что $g(z) \neq 0$, — проигрышным. (Непосредственно)

21. Транспортные сети

22. Теорема Кёнига-Холла

23. Приложения к матрицам

24. Бистохастические матрицы

25. Теорема Биркгофа - фон Неймана