§ 3. Пример: нелинейный маятник

1. Введение

Описываемые здесь и далее три модели дают некоторое представление о возможных видах нелинейных колебаний в случае одной степени свободы, но далеко не исчерпывают всего их разнообразия.

2. Основные уравнения

2.1 Гамильтониан системы

Гамильтониан нелинейного маятника с единичной массой:

$$H = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \omega_0^2 \cos x \tag{1}$$

2.2 Уравнение движения

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \sin x = 0 \tag{2}$$

3. Состояния равновесия

- Условия равновесия:
$$\dot{x}_s = 0, \quad \sin x_s = 0$$
- Решения: $x_s = \pi n$, где $n = 0, \pm 1, \ldots$
- Характер точек равновесия:
  - При четных n - эллиптические точки
  - При нечетных n - гиперболические точки

4. Анализ траекторий

4.1 Типы движения

- При $H < \omega_0^2$ - финитные колебания ("захваченные"частицы)
- При $H > \omega_0^2$ - инфинитное движение ("пролетные"частицы)

4.2 Сепаратриса

- Энергия на сепаратрисе: $H_s = \omega_0^2$
- Решение на сепаратрисе:

$$\dot{x} = \pm 2\omega_0 \cos(x/2)$$

- Интегральное решение:

$$\omega_0 t = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{4}\right)$$

- Явное решение:

$$x = 4 \operatorname{arctg} e^{\omega_0 t} - \pi$$

5. Солитонное решение

- Выражение для скорости:

$$v = \pm \frac{2\omega_0}{\operatorname{ch}(\omega_0 t)}$$

- Характеристики солитона:
  - Ширина профиля $\sim 1/\omega_0$
  - Экспоненциальное спадание при $t \to \pm\infty$

6. Переменные действие-угол

6.1 Параметризация

- Параметр x:

$$x^2 = \frac{\omega_0^2 + H}{2\omega_0^2} = \frac{1}{2}(1 + H/\omega_0^2)$$

- Переменная ξ:

$$\begin{aligned} x \sin\xi &= \sin(x/2) \quad (x \leq 1) \\ \sin\xi &= \sin(x/2) \quad (x \geq 1) \end{aligned}$$

7. Действие $I(H)$

$$I(H) = \frac{2}{\pi} \int_0^{x_0} dx \left[2\left(H + \omega_0^2 \cos x\right)\right]^{1/2} \tag{3}$$

где точка поворота x_0 находится из условия $H + \omega_0^2 \cos x_0 = 0$.

8. Спектральный анализ

- Число N:

$$N = \frac{\omega_0}{\omega(H)} = \frac{2}{\pi} F\left(\frac{\pi}{2}; x\right)$$

- Разложение в ряд Фурье:

$$\dot{x} = 8\omega \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-1/2}}{1+a^{2n-1}} \cos[(2n-1)\omega t], & (x \leq 1) \\ 1/4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1+a^{2n}} \cos(n\omega t), & (x \geq 1) \end{cases}$$

9. Период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \oint \frac{dx}{[2(H - V(x))]^{1/2}} \tag{4}$$

10. Асимптотическое поведение

$$T \sim \frac{2\pi}{\omega_0} \begin{cases} \ln(H_s/\Delta), & n = 1 \\ (\Delta/H_s)^{-(n-1)/2}, & n > 1 \end{cases} \tag{5}$$