# 1. Неориентированные графы, степени, изоморфизм

- **Граф**:
  - Обозначается как $G = (X, \Gamma)$.
  - Состоит из:
    1° Непустое множество $X$.
    2° Отображение $\Gamma$ множества $X$ в $X$.
- **Элементы графа**:
  - **Вершина**: Каждый элемент множества $X$ называется точкой или вершиной графа.
  - **Дуга**: Пара элементов $(x, y)$, где $y \in \Gamma x$, называется дугой графа.
- **Изображение графа**:
  - Элементы $X$ изображаются точками на плоскости.
  - Пары точек $x$ и $y$, где $y \in \Gamma x$, соединяются непрерывной линией со стрелкой от $x$ к $y$.
- **Множество дуг**:
  - Обозначается через $U$.
  - Дуги обозначаются буквами $\alpha$, $\beta$, $\omega$ (при необходимости с индексами).

*Степенью* вершины $v_i$ в графе $G$ — обозначается $d_i$ или $\deg v_i$ — называется число рёбер, инцидентных $v_i$ (то есть рёбер, которые соединены с $v_i$). Поскольку каждое ребро инцидентно двум вершинам, в сумму степеней вершин графа каждое ребро вносит двойку. Таким образом, мы приходим к утверждению, которое установлено Эйлером и является исторически первой теоремой теории графов.

**Теорема 2.1**

Сумма степеней вершин графа $G$ равна удвоенному числу его рёбер:

$$\sum_i \deg v_i = 2q.$$

**Следствие 2.1 (а)**

В любом графе число вершин с нечётными степенями чётно.

В $(p, q)$-графе $0 \le \deg v \le p - 1$ для любой вершины $v$. Минимальная степень вершин графа $G$ обозначается через $\min \deg G$ или $\delta(G)$, максимальная — через $\max \deg G = \Delta(G)$. Если $\delta(G) = \Delta(G) = r$, то все вершины имеют одинаковую степень и такой граф $G$ называется *регулярным* (или *однородным*) степени $r$. В этом случае говорят о степени графа и пишут $\deg G = r$.

Регулярный граф степени 0 совсем не имеет рёбер. Если $G$ — регулярный граф степени 1, то каждая его компонента содержит точно одно ребро; в регулярном графе степени 2 каждая компонента — цикл, и, конечно, обратно. Первые интересные[2] регулярные графы имеют степень 3; такие графы называются *кубическими*. На рис. 2.11 показаны два регулярных графа с 6 вершинами. Второй из них изоморфен каждому из трёх графов, изображённых на рис. 2.5.

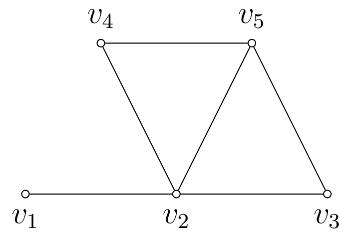
## Следствие 2.1 (б)

Каждый кубический граф имеет чётное число вершин.

Полезно дать названия вершинам с малыми степенями. Вершина $v$ называется *изолированной*, если $\deg v = 0$, и *концевой* (или *висячей*), если $\deg v = 1$.

## 2. Маршруты, связность, метрика графа

Одно из наиболее простых свойств, которым может обладать граф, это свойство быть связным. В данном разделе рассматриваются основные структурные свойства связных и несвязных графов. *Маршрутом* в графе $G$ называется чередующаяся последовательность вершин и рёбер $v_0, x_1, v_1, \ldots, x_n, v_n$; эта последовательность начинается и кончается вершиной, и каждое ребро последовательности инцидентно двум вершинам, одна из которых непосредственно предшествует ему, а другая непосредственно следует за ним. Указанный маршрут соединяет вершины $v_0$ и $v_n$, и его можно обозначить $v_0 v_1 v_2 \ldots v_n$ (наличие рёбер подразумевается). Эта последовательность иногда называется $(v_0 - v_n)$-маршрутом. Маршрут *замкнут*, если $v_0 = v_n$, и *открыт* в противном случае. Маршрут называется *цепью* (trail), если все его рёбра различны, и *простой цепью* (path), если все вершины (а следовательно, и рёбра) различны. Замкнутая цепь называется *циклом*. Замкнутый маршрут называется *простым циклом*, если все его $n$ вершин различны и $n \geq 3$.




В помеченном графе $G$ на рис. 2.9 $v_1 v_2 v_3 v_2 v_3$ — маршрут, который не является цепью, а $v_1 v_2 v_5 v_4 v_2 v_3$ — не простая цепь, $v_1 v_2 v_5 v_4$ — простая цепь и $v_2 v_4 v_5 v_2$ — простой цикл.

Длина маршрута $v_0 v_1 \ldots v_n$ равна $n$, т. е. количеству рёбер в нём[1].

Расстоянием $d(u,v)$ между двумя вершинами $u$ и $v$ графа $G$ называется длина кратчайшей простой цепи, соединяющей их; если $u$ и $v$ не соединены, то полагаем $d(u,v) = \infty$. В связном графе расстояние является метрикой, т. е. удовлетворяет следующим аксиомам (аксиомам метрики): для любых трёх вершин $u$, $v$ и $w$

1. $d(u,v) \geq 0$ и $d(u,v) = 0$ тогда и только тогда, когда $u = v$;
2. $d(u,v) = d(v,u)$;
3. $d(u,v) + d(v,w) \geq d(u,w)$.

Кратчайшая простая $(u - v)$-цепь часто называется геодезической.

Диаметр $d(G)$ связного графа $G$ — это длина самой длинной геодезической. Граф $G$ на рис. 2.9 имеет обхват $g = 3$, окружение $c = 4$ и диаметр $d = 2$.

Квадрат $G^2$ графа $G$ имеет то же множество вершин, что и граф $G$, т. е. $V(G^2) = V(G)$, и две вершины $u$ и $v$ в $G^2$ смежны тогда и только тогда, когда $d(u,v) \leq 2$ в $G$. Степени $G^3$, $G^4$, ...графа $G$ определяются аналогично. Например, $C_5^2 = K_5$ и $P_4^2 = K_1 + K_3$.

## 3. Самодополнительный графы

Указанную ситуацию можно описать графом $G$ с шестью вершинами, представляющими людей; смежность двух вершин соответствует знакомству. Требуется показать, что в $G$ найдутся либо три попарно смежные, либо три попарно несмежные вершины. Дополнение $\overline{G}$ графа $G$ имеет в качестве множества вершин множество $V(G)$, две вершины в $G$ смежны тогда и только тогда, когда они не смежны в $G$. На рис. 2.12 в графе $G$ нет треугольников, а в графе $\overline{G}$ их ровно два[1]. *Самодополнительный граф* — это граф, изоморфный своему дополнению. Примеры таких графов приведены на рис. 2.13.

В полном графе $K_p$ каждая пара его $p$ вершин[2] смежна. Таким образом, граф $K_p$ имеет $\binom{p}{2}$ рёбер и является регулярным степени $p - 1$. Граф $K_3$ — треугольник. Графы $\overline{K_p}$ — вполне несвязные (или регулярные степени 0).

[1]Обхват графа $G$ — обозначается $g(G)$ — это длина кратчайшего простого цикла графа $G$ (если он есть); окружение графа $G$ — обозначается $c(G)$ — длина самого длинного простого цикла графа $G$. Эти понятия не определены в случае, когда в $G$ нет циклов.

# 4. Экстремальные графы

Среди первых результатов в одном из направлений теории графов — теории экстремальных графов (см. Эрдёш) — можно отметить следующую известную теорему Турана . Как обычно, пусть $|r|$ — наибольшее целое число, не превышающее действительного числа $r$, а $\{r\} = r - |r|$ есть наименьшее целое число, не меньшее $r$.

*1) Доказательство существования чисел $r(m, n)$ для любых натуральных $m$ и $n$ см., например, у М. Холла*

*2) Отметим, что по нашему определению бесконечный граф не является графом. Имеется обзорная статья о бесконечных графах: Нэш-Вильямс.*

**Теорема 2.3.** Наибольшее число рёбер у графов, имеющих $r$ вершин и не содержащих треугольников, равно $\lfloor r^2/4 \rfloor$.

**Доказательство.** Утверждение очевидно для малых значений $r$. Доказательство по индукции можно дать отдельно для нечетных и для четных $r$; здесь будет рассмотрен только случай четных значений $r$. Предположим, что утверждение справедливо для всех четных значений $r \leq 2n$. Докажем его для $r = 2n + 2$. Итак, пусть $G$ — граф с $p = 2n + 2$ вершинами, не содержащий треугольников. Поскольку граф $G$ не является вполне несвязным, то в нём существуют две смежные вершины $u$ и $v$. В подграфе $G' = G - \{u, v\}$ имеется $2n$ вершин и нет треугольников, так что по предположению индукции в графе $G'$ самое большее $\lfloor 4n^2/4 \rfloor = n^2$ рёбер. Сколько еще рёбер может быть в графе $G$? В графе $G$ нет такой вершины $w$, что вершины $u$ и $v$ одновременно смежны с $w$, т. е. вершины $u$, $v$ и $w$ образуют в графе $G$ треугольник. Таким образом, если вершина $w$ смежна с $k$ вершинами графа $G'$, то вершина $v$ может быть смежна самое большее с $2n - k$ вершинами графа $G'$, и граф $G$ не больше чем

$$n^2 + k + (2n - k) + 1 = n^2 + 2n + 1 = p^2/4 = \lfloor p^2/4 \rfloor$$

рёбер.

Для завершения доказательства осталось установить, что для каждого чётного $p$ существует $(p, p^2/4)$-граф, не содержащий треугольников. Такой граф можно образовать следующим образом: возьмем два множества $V_1$ и $V_2$, каждое из которых имеет $p/2$ вершин, и соединим каждую вершину из $V_1$ с каждой вершиной из $V_2$. Для $p = 6$ соответствующий граф $G_1$ приведен на рис. 2.5.

# 5. Числа Рамсея

Широко известна следующая головоломка.

*Доказать, что среди любых шести человек найдутся либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.*

1. Напоминаем читателю (см. введение), что в тексте не все теоремы доказываются.

2. По своим структурным свойствам. — *Прим. перев.*

В этих терминах головоломку можно сформулировать так:

**Теорема 2.2.** Если $G$ — граф с шестью вершинами, то либо $G$, либо $\overline{G}$ содержит треугольник.

**Доказательство.** Пусть $v$ — произвольная вершина графа $G$, имеющего шесть вершин. Так как вершина $v$ с любой из остальных пяти вершин смежна или в $G$, или в $\overline{G}$, то, не теряя общности, можно предположить, что вершины $u_1, u_2, u_3$ смежны с $v$ в $G$. Если какие-либо две из вершин $u_1, u_2, u_3$ смежны в $G$, то вместе с $v$ они образуют треугольник. Если никакие две из них не смежны в $G$, то в графе $\overline{G}$ вершины $u_1, u_2, u_3$ образуют треугольник.

Обобщая теорему 2.2, естественно поставить вопрос: каково наименьшее целое число $r(m, n)$, для которого каждый граф с $r(m, n)$ вершинами содержит $K_m$ или $K_n$?

Числа $r(m, n)$ называются *числами Рамсея* [1]. Ясно, что $r(m, n) = r(n, m)$. Задача, связанная с нахождением чисел Рамсея, остается нерешенной, хотя известна простая верхняя оценка, полученная Эрдёшем и Секерешем [1]:

$$r(m,n) \leq \binom{m+n-2}{m-1}. \qquad (1)$$

Постановка этой задачи вытекает из теоремы Рамсея. Бесконечный граф [2] имеет бесконечное множество вершин и не содержит кратных ребер и петель. Рамсей [1] доказал (на языке теории множеств), что каждый бесконечный граф содержит $\aleph_0$ попарно смежных вершин или $\aleph_0$ попарно несмежных вершин.

Все известные числа Рамсея приведены в табл. 2.1 (взята из обзорной статьи Гравера и Якелл [1]).

## 6. Эйлеровы графы

Как мы уже видели в гл. 1, отрицательное решение Эйлером задачи о кёнигсбергских мостах привело к первой опубликованной работе по теории графов. Задачу об обходе мостов можно обобщить и получить следующую задачу теории графов: можно ли найти в данном графе $G$ цикл, содержащий все вершины и все рёбра? Граф, в котором это возможно, называется *эйлеровым*. Таким образом, эйлеров граф имеет *эйлеров цикл* — замкнутую цепь, содержащую все вершины и все рёбра. Ясно, что эйлеров граф должен быть связным.

**Теорема 7.1.** Для связного графа $G$ следующие утверждения эквивалентны:

1. $G$ — эйлеров граф;
2. каждая вершина графа $G$ имеет чётную степень;
3. множество рёбер графа $G$ можно разбить на простые циклы.

**Доказательство.** (1) влечет (2). Пусть $T$ — эйлеров цикл в $G$. Каждое прохождение данной вершины в $T$ вносит 2 в степень этой вершины и, поскольку каждое ребро графа $G$ появляется точно один раз в $T$, любая вершина должна иметь чётную степень.

(2) влечет (3). Так как $G$ — связный и нетривиальный граф, то степень каждой вершины равна по крайней мере 2, так что $G$ содержит простой цикл $Z$. Удаление рёбер цикла $Z$ приводит к остовному подграфу $G_1$, в котором также каждая вершина имеет чётную степень. Если в $G_1$ нет рёбер, то (3) уже доказано; в противном случае применим высказанные выше соображения к $G_1$ и получим граф $G_2$, в котором опять степени всех вершин чётны, и т. д. Одновременно с пустым графом $G_n$ получаем разбиение рёбер графа $G$ на $n$ простых циклов.

(3) влечет (1). Пусть $Z_1$ — один из простых циклов этого разбиения. Если $G$ состоит только из этого цикла, то очевидно, что $G$ — эйлеров граф. В противном случае другой простой цикл $Z_2$ в $G$ имеет вершину $v$, общую с $Z_1$. Маршрут, начинающийся с $v$ и состоящий из цикла $Z_1$ и следующего непосредственно за ним цикла $Z_2$, является замкнутой цепью, которая содержит рёбра этих двух циклов. Продолжая эту процедуру, мы можем построить замкнутую цепь, содержащую все рёбра графа $G$; следовательно, $G$ — эйлеров граф.

Например, связный граф, представленный на рис. 7.1, в котором каждая вершина имеет чётную степень, обладает эйлеровым циклом. Из теоремы 7.1 следует, что если в связном графе $G$ нет вершин с нечётными степенями, то в $G$ есть замкнутая цепь, содержащая все вершины и все рёбра графа.

G. Аналогичный результат справедлив для связных графов, имеющих некоторое число вершин с нечётными степенями.

**Следствие 7.1 (а).** Пусть $G$ — связный граф, в котором $2n$ вершин имеют нечётные степени, $n \geq 1$. Тогда множество рёбер графа $G$ можно разбить на $n$ открытых цепей.

**Следствие 7.1 (б).** Пусть $G$ — связный граф, в котором две вершины имеют нечётные степени. Тогда в $G$ есть открытая цепь, содержащая все вершины и все рёбра графа $G$ (и начинающаяся в одной из вершин с нечётной степенью, а кончающаяся в другой).

[1] Ясно, что эта теорема справедлива также и для мультиграфов.

# 7. Деревья

Граф называется *ациклическим*, если в нём нет циклов. *Дерево* — это связный ациклический граф. Каждый граф, не содержащий циклов, называется *лесом.* Таким образом, компонентами леса являются деревья. Существуют 23 различных дерева [2] с восемью вершинами; они показаны на рис. 4.1. Известны и другие определения дерева. В теореме 4.1 отражены некоторые из них.

**Теорема 4.1.** Для графа $G$ следующие утверждения эквивалентны:

1. $G$ — дерево;

2. любые две вершины в $G$ соединены единственной простой цепью;

3. $G$ — связный граф и $p = q + 1$;

4. $G$ — ациклический граф и $p = q + 1$;

5. $G$ — ациклический граф, и если любую пару несмежных вершин соединить ребром $x$, то в графе $G + x$ будет точно один простой цикл;

6. $G$ — связный граф, отличный от $K_p$ для $p \geq 3$, и если любую пару несмежных вершин соединить ребром $x$, то в графе $G + x$ будет точно один простой цикл;

7. $G$ — граф, отличный от $K_3 \cup K_1$ и $K_3 \cup K_2$, $p = q + 1$, и если любую пару несмежных вершин соединить ребром $x$, то в графе $G + x$ будет точно один простой цикл.

[1] Джойс Килмер (1886—1918) — американский поэт. — *Прим. перев.*

[2] Можно предложить читателю нарисовать деревья с восемью вершинами. Как правило, одни деревья забывают рисовать, а другие рисуют несколько раз.

**Доказательство.** (1) ⇒ (2). Поскольку $G$ — связный граф, то любые две его вершины соединены простой цепью. Пусть $P_1$ и $P_2$ — две различные простые цепи, соединяющие вершины $u$ и $v$, и пусть $w$ — первая вершина, принадлежащая $P_1$ (при переходе по $P_1$ из $u$ в $v$), такая, что $w$ принадлежит и $P_1$, и $P_2$, но вершина, предшествующая ей в $P_1$, не принадлежит $P_2$. Если $w'$ — следующая за $w$ вершина в $P_1$, принадлежащая также $P_2$, то сегменты (части) цепей $P_1$ и $P_2$, находящиеся между вершинами $w$ и $w'$, образуют простой цикл в графе $G$. Поэтому, если $G$ — ациклический граф, то между любыми двумя его вершинами существует самое большее одна простая цепь.

(2) ⇒ (3). Ясно, что граф $G$ — связный. Соотношение $p = q + 1$ докажем по индукции. Утверждение очевидно для связных графов с одной и двумя вершинами. Предположим, что оно верно для графов, имеющих меньше $p$ вершин. Если же граф $G$ имеет $p$ вершин, то удаление из него любого ребра делает граф $G$ несвязным графом, в точности две компоненты. По предположению индукции в каждой компоненте число вершин на единицу больше числа ребер. Таким образом, общее число ребер в графе $G$ должно равняться $p - 1$.

(3) *влечет* (4). Предположим, что в графе $G$ есть простой цикл длины $n$. Этот цикл содержит $n$ вершин и $n$ рёбер, а для любой из $p-n$ вершин, не принадлежащих циклу, существует инцидентное ей ребро, которое лежит на геодезической, идущей от некоторой вершины цикла. Все такие рёбра попарно различны; отсюда $q \geq p$, т. е. пришли к противоречию.

(4) *влечет* (5). Так как $G$ — ациклический граф, то каждая его компонента является деревом. Если всего $k$ компонент, то, поскольку в каждой из них число вершин на единицу больше числа рёбер, имеем $p = q + k$. В нашем случае должно быть $k = 1$, так что $G$ — связный граф. Таким образом, $G$ — дерево и любые две его вершины соединяет единственная простая цепь. Если к дереву $G$ добавить ребро $uv$, то ребро вместе с единственной простой цепью, соединяющей вершины $u$ и $v$, образует простой цикл, который также единственен в силу единственности простой цепи.

(5) *влечет* (6). Поскольку каждый полный граф $K_p$ для $p \geq 3$ содержит простой цикл, граф $G$ не может быть одним из этих графов. Граф $G$ должен быть связным, так как в ином случае можно было бы добавить ребро $x$, соединяющее две вершины из разных компонент графа $G$, и граф $G + x$ был бы ациклическим.

(6) *влечет* (7). Докажем, что любые две вершины графа $G$ соединены единственной простой цепью, а тогда, поскольку (2) влечет (3), получим $p = q+1$. Ясно, что в графе $G$ любые две вершины соединены простой цепью. Если какая-то пара вершин графа $G$ соединена двумя простыми цепями, то из доказательства того, что (1) влечет (2), следует наличие у графа $G$ простого цикла $Z$. В $Z$ не может быть более трех вершин, так как иначе, соединив ребром $x$ две несмежные вершины в $Z$, получим граф $G + x$, имеющий более одного простого цикла (если же в $Z$ нет несмежных вершин, то в графе $G$ более одного цикла). Таким образом, цикл $Z$ есть $K_3$, и он должен быть собственным подграфом графа $G$, поскольку по предположению $G$ не является полным графом $K_p$ с $p \geq 3$. Так как $G$ — связный граф, то можно предположить, что в $G$ есть другая вершина, смежная с некоторой вершиной подграфа $K_3$. Тогда ясно, что если к графу $G$ добавлять ребро, то его можно добавить так, чтобы в графе $G+x$ образовались по крайней мере два простых цикла. Если больше нельзя добавлять новых ребер, не нарушая для графа $G$ второго условия из (6), то $G$ есть $K_p$ с $p \geq 3$ вопреки предположению.

(7) *влечет* (1). Если граф $G$ имеет простой цикл, то этот цикл должен быть треугольником, являющимся компонентой графа $G$, что было показано в предыдущем абзаце. В этой компоненте соответственно две вершины графа $G$ соединены. Все остальные компоненты графа $G$ должны быть деревьями, но для того, чтобы выполнялось соотношение $p = q + 1$, должно быть не более одной компоненты, отличной от указанного треугольника. Это дерево содержит

Простую цепь длины 2, то к графу $G$ можно так добавить ребро $x$, чтобы образовать в графе $G+x$ два простых цикла. Следовательно, этим деревом может быть или $K_1$, или $K_2$. Значит, граф $G$ — или $K_3$ или $K_1$, или $K_3 \cup K_2$, а эти графы мы исключили из рассмотрения. Таким образом, $G$ — ациклический граф. Но если $G$ — ациклический граф и $p = q + 1$, то $G$ связан, поскольку (4) влечет (5), а (5) влечет (6). Итак, $G$ — дерево, и теорема доказана.

Так как для нетривиального дерева $\sum d_i = 2q = 2(p - 1)$, то в дереве должно быть по крайней мере две вершины со степенями, меньшими 2.

**Следствие 4.1 (а).** В любом нетривиальном дереве имеется по крайней мере две висячие вершины.

Этот результат также следует из теоремы 3.4.

## 8. Диаметр и радиус графа

## 9. Хроматическое число графа

Пусть дано натуральное число $p$, говорят, что граф $G$ является $p$-хроматическим, если его вершины можно раскрасить $p$ различными цветами таким образом, чтобы никакие две смежные вершины не были окрашены одинаково. Наименьшее число $p$, при котором граф $G$ является $p$-хроматическим, называется *хроматическим числом* этого графа и обозначается символом $\chi(G)$.

Граф $(X \cup U)$ — симметрический и обладает к тому же весьма примечательным свойством: его можно начертить на плоскости так, чтобы никакие два ребра не пересекались (в точках, отличных от граничных). Такие графы называются *плоскими*. Известно, что хроматическое число плоского графа никогда не превышает 5 (см. гл. 21), таким образом, пяти красок достаточно для раскрашивания карты (плоской), при котором никакие две соседние страны не окрашиваются в один и тот же цвет.

*Хроматическим классом* графа называется натуральное число $q$, обладающее следующими свойствами:

1. каждое ребро графа можно окрасить в какой-нибудь из $q$ цветов таким образом, чтобы никакие два смежных ребра не были окрашены одинаково;

2. это невозможно сделать с помощью только $q - 1$ цветов.

Хроматический класс графа $(X \cup U)$ совпадает с хроматическим числом графа $(U \cup \Gamma)$, определяемого следующим образом: вершинами его служат ребра исходного графа и $u' \in \Gamma$, когда Граф является двудольным (т.е. имеет хроматическое число 2) в том и только в том случае, если он не содержит циклов нечётной длины.

## Доказательство

(1) Рассмотрим граф $(X, U)$ без нечётных циклов и покажем, что он — двудольный. Граф можно предполагать связным (в противном случае мы рассмотрели бы все его компоненты связности отдельно). Будем последовательно раскрашивать вершины по следующему правилу:

1° Произвольную вершину $a$ окрашиваем в синий цвет.

2° Если вершина $x$ уже оказалась синей, то все смежные с ней вершины окрашиваем в красный цвет. Если вершина $y$ — красная, то все смежные с ней окрашиваем в синий цвет.

Так как граф связен, каждая его вершина рано или поздно окажется окрашенной, причём никакая вершина не будет одновременно синей и красной, ибо иначе $x$ и $a$ находились бы на одном цикле нечётной длины. Следовательно, граф — двудольный.

(2) Если граф — двудольный, то он, очевидно, не содержит циклов нечётной длины, ибо вершины такого цикла невозможно окрасить двумя цветами в соответствии с указанным требованием.

## Замечание

**Свойство.** Граф $G$ не имеет циклов нечётной длины равносильно свойству.

(2) граф $G$ не имеет элементарных циклов нечётной длины.

Непосредственно ясно, что (1) $\Rightarrow$ (2), для доказательства того, что (2) $\Rightarrow$ (1), допустим что существует цикл $u = [x_0, x_1, \ldots, x_p = x_0]$ нечётной длины $p$. Каждый раз, когда имеются такие две вершины $x_j$ и $x_k$, что $j < k < p$ и $x_j = x_k$, цикл $u$ можно разбить на два частичных цикла $[x_j, \ldots, x_k]$ и $[x_k, \ldots, x_j]$, причём ровно один из этих двух циклов имеет нечётную длину.

Ясно, что если продолжать таким же образом разбивать цикл $p$, пока это возможно, то всякий раз будет оставаться в точности один цикл нечётной длины, дойдя в конце концов до элементарных циклов мы получим противоречие с (2).

Эти результаты позволяют легко распознавать бикроматические графы, что же касается других графов, то для них графические методы определения хроматического числа неизвестны. Отметим, однако, что во многих случаях благодаря следующей теореме действенным орудием оказывается понятие функции Гранда.

**Теорема 4** Пусть $G$ — симметрический граф. Чтобы граф $G$ был $p$-хроматическим, необходимо и достаточно, чтобы он допускал функцию Гранди $g(x)$, для которой

$$\max_{x \in X} g(x) \leq p - 1.$$

1° Если такая функция $g(x)$ существует, то граф $G$ является $p$-хроматическим: в самом деле, достаточно числам $0, 1, \ldots, p-1$ поставить в соответствие различные цвета и окрасить каждую вершину $x$ в тот цвет, который отвечает числу $g(x)$.

2° Предположим, что граф $p$-хроматический, и докажем, что на $G$ существует функция Гранди, значения которой не превышают $p - 1$.

Пусть $S_0, S_1, \ldots, S_{p-1}$ — множества вершин с одинаковым цветами. Присоединим к $S_0$ все вершины из $S_1$, не смежные ни с одной из вершин $S_0$. Далее присоединим к $S_0$ все вершины из $S_2$, не смежные ни с одной из вершин $S_0$ и вершин $S_1$, ранее присоединенных к $S_0$. Затем последовательно поступим подобным же образом с множествами $S_3, \ldots, S_{p-1}$. В результате получим множество $\overline{S_0} = S_0 \cup S_1 \cup \ldots \cup S_{p-1}$.

Функция $g(x)$, равная $k$ при $x \in S_k$, есть функция Гранди для графа $G$, что и требовалось.

**Теорема 5** Пусть $G$ — $(p+1)$-хроматический граф, $H$ — $(q+1)$-хроматический граф, обозначим через $r$ наибольшую из $d$-сумм $p' + q'$, где $p' \leq p$, $q' \leq q$, тогда граф $G \times H$ является $(r + 1)$-хроматическим.

Действительно, всегда можно предположить, что графы $G$ и $H$ симметрические (это никак не изменит рёбер графа $G \times H$), построим для $G$ функцию Гранди $g(x)$ с наибольшим значением, не превосходящим $p$, а для $H$ — функцию Гранди $h(x)$ с наибольшим значением, не превосходящим $q$ в соответствии с предыдущей теоремой. В силу теоремы 8 (гл. 3) граф $G \times H$ допускает функцию Гранди с наибольшим значением, не превосходящим $r$, откуда и следует справедливость утверждения.

Например, читатель легко проверит, что если $G$ 6-хроматический, а $H$ 7-хроматический граф, то граф $G \times H$ является 8-хроматическим, потому что

$$r = 6 + 1 = (1 \cdot 1) = 7.$$

**Теорема 6** Если $G$ и $H$ два различных графа с хроматическими числами $p$ и $q$, а $r = \min\{p, q\}$, то граф $G \times H$ является $r$-хроматическим.

Предположим для определенности, что $p \leq q$, и раскрасим граф $G$ с помощью $p$ цветов; в графе $G \times H$ придумаем вершине $\xi = (x, y)$ тот же цвет, который имеет $x$ в $G$. Тогда смежные вершины графа $G \times H$ будут иметь различные цвета (ибо иначе в $G$ имелись бы одинаково окрашенные смежные вершины).

Ч. Т. Д.

Эту теорему можно выразить еще и так

$$\gamma(G \times H) \leq \min\{\gamma(G), \gamma(H)\}.$$

[1] Этот систематический способ, которым мы обязаны Гомори, основывается на симплекс-методе Данцига (G. Dantzig) и в общих чертах состоит в том, что сначала решается обычная линейная программа, а затем если какой-нибудь из переменных в этом решении отвечает нецелое число, то составляется некоторый набор линейных неравенств, которым удовлетворяют все целые решения, но не удовлетворяют уже найденные.

## 10. Цикломатическое число графа

## 11. Плоские графы, формула Эйлера

## 12. Линейно независимые циклы

## 13. Хроматическое число плоского графа

## 14. Примеры неплоских графов

## 15. Ориентированные графы, порядковая функция

## 16. Функция Гранди

## 17. Внутреннее устойчивое множество

## 18. Внешнее устойчивое множество

## 19. Ядро графа

## 20. Игры на графе, игра НИМ

## 21. Транспортные сети

## 22. Теорема Кёнига-Холла

## 23. Приложения к матрицам

## 24. Бистохастические матрицы

## 25. Теорема Биркгофа - фон Неймана