§ 1. Определения и простейшие свойства

Пусть E, F - линейные нормированные пространства. Отображение A назовем отображением из E в F, если для A область определения $D(A) \subset E$, а множество значений $R(A) \subset F$. В таком случае пишем $A : D(A) \subset E \to F$.

Предположим, что пространства E, F оба вещественные, или оба комплексные. Отображение A из E в F называется **линейным оператором**, если:

1. $D(A)$ - линейное многообразие в E;
2. $A(\lambda x) = \lambda Ax$, где $x \in D(A)$ и λ число;
3. $A(x + y) = Ax + Ay$, где $x, y \in D(A)$.

Нетрудно показать, что для линейного оператора A множество значений $R(A)$ является линейным многообразием в F. Заметим также, что $A\Theta = \Theta$.

Линейный оператор f из E - вещественного линейного нормированного пространства в $\mathbb{R}^1$ называется вещественным линейным функционалом. Линейный оператор f из E - комплексного линейного нормированного пространства в $\mathbb{C}^1$ называется комплексным линейным функционалом.

Замечание. Так как $D(A)$ - линейное многообразие в E, то $D(A)$ с нормой, порожденной пространством E, можно считать самостоятельным линейным нормированным пространством. Поэтому часто считают, что линейный оператор A задан на всем пространстве E и пишут $A : E \to F$, то есть $D(A) = E$.

Теорема 1.1. Пусть E, F - линейные нормированные пространства и $A : E \to F$ - линейный оператор. Пусть оператор A непрерывен в точке $x_0 \in E$. Тогда оператор A непрерывен в любой точке $x \in E$.

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\} \subset E$ такая, что $x_n \to x$ при $n \to \infty$. Рассмотрим

$$Ax_n - Ax = A\left(x_n - x + x_0\right) - Ax_0.$$

Здесь $y_n = x_n - x + x_0 \to x_0$ при $n \to \infty$. Следовательно,

$$\|Ax_n - Ax\|_F = \|Ay_n - Ax_0\|_F \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Линейный оператор $A : D(A) \subset E \to F$ называется ограниченным на $D(A)$, если

$$(\exists C \geq 0)(\forall x \in D(A)) \left[\|Ax\|_F \leq C\|x\|_E\right].$$

Теорема 1.2. Пусть E, F - линейные нормированные пространства. Линейный оператор $A : E \to F$ непрерывен на E тогда и только тогда, когда он ограничен на E.

Доказательство. Пусть оператор A непрерывен на E, но не является ограниченным. Тогда

$$(\forall n \in \mathbb{N})\left(\exists x_n \in E\right)\left[\|Ax_n\|_F > n\left\|x_n\right\|_E\right]$$

Заметим, что $x_n \neq \Theta$. Определим элементы $x'_n = x_n / (n \|x_n\|_E)$. Тогда $\|x'_n\|_E = = 1/n \to 0$ при $n \to \infty$, то есть $x'_n \to \Theta \in E$. Из непрерывности оператора A следует

$$\|Ax'_n\|_F = \|Ax'_n - A\Theta\|_F \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

С другой стороны

$$\|Ax'_n\|_F = \frac{1}{n\|x_n\|_E} \|Ax_n\|_F > \frac{1}{n\|x_n\|_E} n \|x_n\|_E = 1.$$

Из полученного противоречия следует ограниченность оператора A на E.

Теперь предположим, что оператор A ограничен на E. Тогда из оценки $\|Ax - Ay\|_F \leq C\|x-y\|_E$ для $x, y \in E$ следует, что оператор A на E удовлетворяет условию Липшица и, следовательно, непрерывен на E.$\odot$

Замечание. Полученные утверждения выполняются и для линейных функционалов, как частного случая линейных операторов. Отметим здесь, что линейный функционал f, определенный на $D(f) \subset E$ ограничен на $D(f)$, если

$$(\exists C \geq 0)(\forall x \in D(f)) \left[|f(x)| \leq C\|x\|_E\right].$$

Теорема 1.3. Пусть E, F - линейные нормированные пространства, пространство E конечномерно. Пусть $A : E \to F$ линейный оператор. Тогда оператор A ограничен на E.

Доказательство. Пусть $E = \mathscr{L}(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m)$, где $\{\omega_k\}_{k=1}^m$ – базис пространства E. Тогда всякий $x \in E$ представим в виде $x = \sum_{k=1}^m x_k \omega_k$, где x_k– координаты элемента x в базисе $\{\omega_k\}$. Определим в E новую норму $\|x\|_E^* = \sum_{k=1}^m |x_k|$. Исходная норма $\|x\|_E$ и новая $\|x\|_E^*$ эквивалентны. Тогда

$$(\exists M > 0)(\forall x \in E) \left[\|x\|_E^* \leq M\|x\|_E\right]$$

Далее для любого $x \in E$ получим

$$\|Ax\|_F = \left\|A\sum_{k=1}^m x_k\omega_k\right\|_F = \left\|\sum_{k=1}^m x_k A\omega_k\right\|_F \leq \sum_{k=1}^m |x_k| \, \|A\omega_k\|_F \leq$$
$$\leq \max_k \|A\omega_k\|_F \sum_{k=1}^m |x_k| \leq M \max_k \|A\omega_k\|_F \|x\|_E = C\|x\|_E,$$

где константа $C = M \max_k \|A\omega_k\|_F < \infty$.

- ЗАДАЧА.

1.1. Пусть E - банахово пространство и F - линейное нормированное пространство. Пусть $A : E \to F$ линейный ограниченный оператор такой, что $(\exists c > 0)(\forall x \in E) (\|Ax\|_F \geq c\|x\|_E)$. Показать, что множество значений оператора $R(A)$ - подпространство F.

§ 2. Норма линейного ограниченного оператора

Пусть E, F - линейные нормированные пространства. Пусть линейный оператор $A : D(A) \subset E \to F$ ограниченный на $D(A)$. Тогда из (1.1) следует, что числовое множество

$$M = \left\{ \frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E} \mid (x \in D(A)) \wedge (x \neq \Theta) \right\}$$

ограничено сверху константой $C \geq 0$. Обозначим

$$\|A\| = \sup M = \sup_{\substack{x \in D(A) \\ x \neq \Theta}} \frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E} \leq C < \infty.$$

Величина $\|A\|$ называется нормой оператора A на $D(A)$. Если $D(A) = E$, то $\|A\|$ называется просто нормой оператора A. Иногда норму оператора обозначают с указанием пространств $\|A\|_{E \to F}$.

Очевидно, что

$$(\forall x \in D(A)) \left[\|Ax\|_F \leq \|A\| \|x\|_E \right]$$

С другой стороны

$$(\forall \varepsilon > 0) \, (\exists x_\varepsilon \in D(A)) \left[\frac{\|Ax_\varepsilon\|_F}{\|x_\varepsilon\|_E} > \|A\| - \varepsilon \right]$$

то есть $\|Ax_\varepsilon\|_F > (\|A\| - \varepsilon) \, \|x_\varepsilon\|_E$. Таким образом, $\|A\| = \min C$, где константы C фигурируют в условии (1.1).

Теорема 2.1. Пусть E, F - линейные нормированные пространства. Пусть $A : D(A) \subset E \to F$ - линейный оператор, ограниченный на $D(A)$. Тогд

$$\|A\| = \sup_{\substack{x \in D(A) \\ x \neq \Theta}} \frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\substack{x \in D(A) \\ \|x\|_E \leq 1}} \|Ax\|_F = \sup_{\substack{x \in D(A) \\ \|x\|_E = 1}} \|Ax\|_F.$$

Доказательство. Заметим, что

$$\|A\| = \sup_{\substack{x \in D(A) \\ x \neq \Theta}} \frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\substack{x \in D(A) \\ x \neq \Theta}} \left\| A \frac{x}{\|x\|_E} \right\|_F \leq$$

$$\leq \sup_{\substack{y \in D(A) \\ \|y\| = 1}} \|Ay\|_F = \sup_{\substack{y \in D(A) \\ \|y\| = 1}} \frac{\|Ay\|_F}{\|y\|_E} \leq \|A\|.$$

Осталось показать, что

$$\sup_{\substack{x \in D(A) \\ \|x\|_E \leq 1}} \|Ax\|_F = \|A\|$$

Пусть $x \in D(A)$ такой, что $\|x\|_E \leq 1$. Тогда $\|Ax\|_F \leq \|A\|\|x\|_E \leq \|A\|$. Отсюда следует

$$\|A\| \geq \sup_{\substack{x \in D(A) \\ \|x\|_E \leq 1}} \|Ax\|_F \geq \sup_{\substack{x \in D(A) \\ \|x\|_E = 1}} \|Ax\|_F = \|A\|.$$

Пример 2.1. ЛиНЕЙНЫЙ ОПЕРАТОР ФРЕДГОЛЬМА В $C[a,b]$.

В вещественном пространстве $C[a,b]$ определим оператор Фредгольма

$$Ax(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)ds$$

где функция $K(t,s)$ непрерывная по совокупности переменных $t, s \in [a,b]$. Для функции $x \in C[a,b]$ функция $Ax(t)$ непрерывная по $t \in [a,b]$, так как функция $K(t,s)x(s)$ непрерывная по совокупности переменных $t, s \in [a,b]$ (см., напр., [18]). Следовательно, оператор $A : C[a,b] \to C[a,b]$.

Очевидно, что оператор A линейный. Установим ограниченность.

$$\|Ax\| = \max_{a \leq t \leq b} \left| \int_a^b K(t,s)x(s)ds \right| \leq \max_{a \leq t \leq b} \int_a^b |K(t,s)||x(s)|ds \leq$$
$$\leq \max_{a \leq t \leq b} \int_a^b |K(t,s)|ds \|x\|.$$

Итак, оператор A ограниченный и

$$\|A\| \leq \max_{a \leq t \leq b} \int_a^b |K(t,s)|ds < \infty$$

Покажем, что на самом деле в (2.2) имеет место равенство. В силу непрерывности по $t \in [a,b]$ функции $\int_a^b |K(t,s)|ds$ найдется $t_0 \in [a,b]$, что

$$\max_{a \leq t \leq b} \int_a^b |K(t,s)|ds = \int_a^b |K(t_0, s)| \, ds.$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ определим функцию

$$x_\varepsilon(t) = \frac{K(t_0, t)}{\varepsilon + |K(t_0, t)|} \in C[a,b].$$

Заметим, что $\|x_\varepsilon\| \leq 1$. Далее получим

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|Ax\| \ge \|Ax_\varepsilon\| \ge |Ax_\varepsilon(t_0)| \ge Ax_\varepsilon(t_0) = \int_a^b K(t_0,s)\, x_\varepsilon(s)ds =$$
$$= \int_a^b K(t_0,s) \frac{K(t_0,s)}{\varepsilon + |K(t_0,s)|} ds = \int_a^b \frac{(|K(t_0,s)| + \varepsilon - \varepsilon)\,|K(t_0,s)|}{\varepsilon + |K(t_0,s)|} ds =$$
$$= \int_a^b |K(t_0,s)|\, ds - \varepsilon \int_a^b \frac{|K(t_0,s)|}{\varepsilon + |K(t_0,s)|} ds \ge \int_a^b |K(t_0,s)|\, ds - \varepsilon(b-a).$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получим

$$\|A\| \ge \int_a^b |K(t_0,s)|\, ds = \max_{a\le t\le b} \int_a^b |K(t,s)| ds.$$

Таким образом, из (2.2) и (2.3) следует для оператора Фредгольма

$$\|A\| = \max_{a\le t\le b} \int_a^b |K(t,s)| ds.$$

Пример 2.2. ПРОСТЕЙШИЙ ОПЕРАТОР ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ. В пространстве $C[0,1]$ рассмотрим оператор

$$Ax(t) = \frac{d}{dt} x(t)$$

За область определения этого оператора примем множество $D(A) = C^1[0,1]$, то есть множество непрерывно дифференцируемых на $[0,1]$ функций. Тогда A - линейный оператор, действующий в $C[0,1]$.

Покажем неограниченность оператора A на $D(A)$. Для $n \in \mathbb{N}$ положим $x_n(t) = \sin n\pi t$. Тогда $Ax_n(t) = n\pi \cos n\pi t$. Для $x \in C[0,1]$ норма $\|x\|_C = = \max_{0\le t\le 1} |x(t)|$, поэтому

$$\|x_n\|_C = 1, \quad \|Ax_n\|_C = n\pi = n\pi \|x_n\|_C$$

Из последнего равенства следует, что условие (1.1) ограниченности оператора A не выполняется, так как $n\pi \to \infty$ при $n \to \infty$.

Рассмотрим оператор, который задается формулой (2.4), но уже из пространства $C^1[0,1]$ с нормой $\|x\|_{C^1} = \|x\|_C + \|x'\|_C$ в пространство $C[0,1]$. Итак, $A : C^1[0,1] \to C[0,1]$. Очевидно, что оператор A линейный. Кроме того, для всех $x \in C^1[0,1]$

$$\|Ax\|_C = \|x'\|_C \le \|x\|_C + \|x'\|_C = \|x\|_{C^1}$$

Получили, что оператор дифференцирования $A : C^1[0,1] \to C[0,1]$ ограничен и $\|A\|_{C^1\to C} \le 1$. Найдем точное значение нормы оператора. Для $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим функции $x_n(t) = (n\pi)^{-1} \sin n\pi t$. Тогда $Ax_n(t) = \cos n\pi t$ и, следовательно, $\|Ax_n\|_C = 1$. Далее получим

$$\|x_n\|_{C^1} = \|x_n\|_C + \|x_n'\|_C = \frac{1}{n\pi} + 1$$

Следовательно,

$$\|A\|_{C^1\to C} = \sup_{\substack{x\in C^1\\ x\neq\Theta}} \frac{\|Ax\|_C}{\|x\|_{C^1}} \geq \frac{\|Ax_n\|_C}{\|x_n\|_{C^1}} = \frac{n\pi}{1+n\pi}.$$

Учитывая, что $n \in \mathbb{N}$ любые, из (2.5) при $n \to \infty$ получим $\|A\|_{C^1\to C} \geq 1$. Таким образом, для оператора дифференцирования $\|A\|_{C^1\to C} = 1$.

§ §. Пространство линейных ограниченных операторов

Пусть E, F - линейные нормированные пространства, причем оба вещественные или оба комплексные. Через $L(E, F)$ обозначим множество всех линейных ограниченныхоператоров $A : E \to F$. В случае $F = E$ вместо $L(E, E)$ пишут $L(E)$.

Определим на множестве $L(E, F)$ операции умножения на число и сложение. Считаем для числа λ и $A, B \in L(E, F)$ операторы λA и $A + B$ такие, что для $x \in E$

$$(\lambda A)x = (\lambda)Ax, \quad (A + B)x = Ax + Bx.$$

Нетрудно видеть, что так определенные операторы λA и $A+B$ принадлежат $L(E, F)$. В качестве нуля $\Theta \in L(E, F)$ определим оператор Θ такой, что $\Theta x = \Theta \in F$ для всех $x \in E$. Легко проверить выполнение в $L(E, F)$ всех аксиом линейного пространства.

В полученном линейном пространстве $L(E, F)$ определим норму. Для $A \in L(E, F)$ положим, как и в (2.1),

$$\|A\| = \sup_{\substack{x\in E\\ x\neq\Theta}} \frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E}.$$

Для проверки аксиом нормы напомним

$$(\forall x \in E)\, [\|Ax\|_F \leq \|A\|\|x\|_E]\,.$$

1). Очевидно, что $\|A\| \geq 0$. Пусть теперь $\|A\| = 0$. Тогда $\|Ax\|_F = 0$ для всех $x \in E$. Следовательно, $Ax = \Theta$ для всех $x \in E$ и оператор $A = \Theta \in L(E, F)$. Для $\Theta \in L(E, F)$ свойство $\|\Theta\| = 0$ очевидно. Доказана первая аксиома. 2). Вторая аксиома нормы следует из соотношения

$$\|\lambda A\| = \sup_{\substack{x\in E\\ x\neq\Theta}} \frac{\|\lambda Ax\|_F}{\|x\|_E} = |\lambda|\|A\|.$$

3). Третья аксиома нормы следует из оценки для всех $x \in E$.

$$\|(A+B)x\|_F \leq \|Ax\|_F + \|Bx\|_F \leq (\|A\| + \|B\|)\|x\|$$

которая означает $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

Итак, $L(E,F)$ - линейное нормированное пространство и определена сходимость по норме операторов. Пусть последовательность операторов $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L(E,F)$ такая, что для некоторого оператора $A \in L(E,F)$ выполняется $\|A_n - A\| \to 0$ при $n \to \infty$. В таком случае говорят, что операторы $A_n (n \in \mathbb{N})$ сходятся к оператору A по операторной норме. Такую сходимость $A_n \to A$ называют также равномерной сходимостью, поскольку она равносильна $\|A_n x - Ax\|_F \to 0$ при $n \to \infty$ равномерно по x из любого шара $B[\Theta, r] = \{x \in E \mid \|x\|_E \leq r\}$. Факт равномерной сходимости операторов при $n \to \infty$ будем обозначать $A_n \rightrightarrows A$.

Теорема 3.1. Пусть E - линейное нормированное пространство и пространство F банахово. Тогда пространство $L(E,F)$ с операторной нормой является банаховым пространством.

Доказательство. Возьмем произвольную фундаментальную последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L(E,F)$, то есть

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N)(\forall p \in \mathbb{N})\,[\|A_{n+p} - A_n\| < \varepsilon]$$

Пусть $x \in E$. Из неравенства

$$\|A_{n+p}x - A_n x\|_F \leq \|A_{n+p} - A_n\|\,\|x\|_E$$

и (3.1) следует фундаментальность последовательности $\{A_n x\}_{n=1}^{\infty} \subset F$. Но пространство F полное, поэтому эта последовательность сходится в F. Обозначим $\lim_{n\to\infty} A_n x = y(x) \in F$. Таким образом, определено отображение $A : E \to F$, действующее по правилу $Ax = y(x) = \lim_{n\to\infty} A_n x$.

Линейность отображения A очевидным образом следует из линейности операторов A_n и свойств предела. Итак, $A : E \to F$ - линейный оператор.

Установим ограниченность этого оператора. Так как всякая фундаментальная последовательность ограничена, то $(\exists C > 0)(\forall n \in \mathbb{N})\,[\|A_n\| \leq C]$. Следовательно, для всех $x \in E$ выполняется $\|A_n x\|_F \leq \|A_n\|\,\|x\|_E \leq C\|x\|_E$. Отсюда при $n \to \infty$ получим $\|Ax\|_F \leq C\|x\|_E$, то есть оператор A ограниченный и $A \in L(E,F)$.

Покажем, что $\|A_n - A\| \to 0$ при $n \to \infty$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и пусть выполнено (3.1). Тогда для $x \in E$ с $\|x\|_E \leq 1$ получим из (3.1) и (3.2)

$$(\forall n \geq N)(\forall p \in \mathbb{N})\,\left[\|A_{n+p}x - A_n x\|_F < \varepsilon\right]$$

В последней оценке $p \to \infty$. Получим для всех $x \in E$ с $\|x\|_E \leq 1$ и всех $n \geq N$ оценку $\|Ax - A_n x\|_F \leq \varepsilon$. Отсюда для всех $n \geq N$ следует

$$\|A - A_n\| = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|_E \leq 1}} \|(A - A_n)\,x\|_F \leq \varepsilon$$

Итак,

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N)\,[\|A - A_n\| \leq \varepsilon]$$

что означает $A_n \rightrightarrows A$. $\odot$

Отдельно рассмотрим пространство $L\,(E, \mathbb{R}^1)$, если пространство E вещественное, и пространство $L\,(E, \mathbb{C}^1)$, если пространство E комплексное. Оба эти пространства являются пространствами линейных ограниченных функционалов, вещественных или комплексных соответственно. Обозначать эти пространства принято символом E^*. Называют пространство E^* пространством, сопряженным к пространству E. Заметим, что всякое сопряженное пространство является полным, так как пространства чисел $\mathbb{R}^1$ и $\mathbb{C}^1$ полные.

Замечание. Если пространства E и F комплексные, то операцию умножения оператора на число иногда определяют формулой $(\lambda A)x = \bar{\lambda}(Ax)$. При этом пространство $L(E, F)$ также будет ЛНП, которое полно, если полно пространство F. Соответственно, будет полно и сопряженное пространство $E^* = L\,(E, \mathbb{C}^1)$, в котором умножение функционала на число определяется подобным образом $(\lambda f)x = \bar{\lambda}(fx)$. Обратим внимание, что сопряженное пространство E^* иногда определяют как пространство полулинейных ограниченных функционалов $f(\alpha x + \beta y) = \bar{\alpha} f(x) + \bar{\beta} f(y)$. При таком определении пространство E^* также полно. Заметим, что в вещественном случае все эти подходы совпадают.

Определим суперпозицию (произведение) линейных операторов. Пусть E_1, E_2, E_3 - линейные нормированные пространства. Пусть заданы операторы $A \in L\,(E_1, E_2)$ и $B \in L\,(E_2, E_3)$. Определим на E_1 отображение

$$(BA)x = B(Ax)$$

Очевидно, $BA : E_1 \to E_3$ и является линейным оператором. Из оценки

$$\|(BA)x\|_{E_3} = \|B(Ax)\|_{E_3} \leq \|B\|\|Ax\|_{E_2} \leq \|B\|\|A\|\|x\|_{E_1}$$

следует ограниченность оператора BA и оценка нормы $\|BA\| \leq \|B\|\|A\|$. Таким образом, оператор $BA \in L\,(E_1, E_3)$.

Если оператор $A \in L(E)$, то определены операторы $A^n \in L(E)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, можно определять многочлены от операторов, а также операторные ряды, что позволяет определять и некоторые функции от операторов.

Заметим, что вообще операторы $BA \neq AB$ (один из этих операторов может быть не определен). Но и в случае, когда определены оба оператора BA и AB, равенство выполняется не всегда. Например, в пространстве $C[0, 1]$ заданы операторы $(Ax)(t) = tx(t)$ и $(Bx)(t) = \int_0^t x(s)ds$. Очевидно, что $A, B \in L(C[0, 1])$ и

$$ABx(t) = t\int_0^t x(s)ds \neq \int_0^t sx(s)ds = BAx(t)$$

Если выполняется равенство $AB = BA$, то говорят, что операторы коммутируют или перестановочны.

В пространстве $L(E, F)$ определим еще одну сходимость операторов, аналогом которой для функций является поточечная сходимость.

Пусть последовательность операторов $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L(E, F)$ такая, что для некоторого оператора $A \in L(E, F)$ выполняется $\|A_n x - Ax\|_F \to 0$ при $n \to \infty$ для всех $x \in E$. В таком случае говорят, что операторы $A_n (n \in \mathbb{N})$ сходятся к оператору A силъно. Факт сильной сходимости операторов при $n \to \infty$ будем обозначать $A_n \overset{\text{сильно}}{\longrightarrow} A$.

Из неравенства $\|A_n x - Ax\|_F \leq \|A_n - A\| \, \|x\|_E$ следует, что из равномерной сходимости операторов следует сильная сходимость. Обратное утверждение неверно, что видно из следующего примера.

Пример 3.1. В пространстве последовательностей l_2 операторы

$$P_n x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots) \text{ где } n \in \mathbb{N} \text{ и } x = (x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots) \in l_2.$$

. Очевидно, что $P_n \in L\left(l_2\right)$ и для $x \in l_2$

$$\|Ix - P_n x\| = \|(0, 0, \ldots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots)\| = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^2\right)^{1/2} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Получили $P_n \overset{\text{сильно}}{\longrightarrow} I$. Справедлива оценка

$$\|Ix - P_n x\| = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^2\right)^{1/2} \leq \|x\|$$