

### § 3. Пример: нелинейный маятник •

В этом разделе рассматриваются три модели, которые иллюстрируют различные виды нелинейных колебаний для системы с одной степенью свободы.

#### Гамильтониан и уравнения движения

Гамильтониан нелинейного маятника с единичной массой представлен как:

$$H = 1/2\dot{x}^2 - \omega_0^2 \cos x, \quad (3.1)$$

где  $q = x$  и  $p = \dot{x}$ . Уравнения движения:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \sin x = 0. \quad (3.2)$$

#### Состояния равновесия

Состояния равновесия определяются уравнениями:

$$\dot{x}_s = 0, \quad \sin x_s = 0. \quad (3.3)$$

Решения:  $\dot{x}_s = 0, x_s = \pi n, n = 0, \pm 1, \dots$

#### Фазовый портрет и сепаратриса

Фазовые траектории при  $H < \omega_0^2$  и  $H > \omega_0^2$  описываются, включая сепаратрису с энергией  $H_s = \omega_0^2$ .

#### Солитоноподобные решения

Решение на сепаратрисе:

$$v = \pm 2\omega_0 / \operatorname{ch}(\omega_0 t) \quad (3.7)$$

#### Общее решение и переменные действие-угол

Используются переменные действие-угол для нахождения общего решения уравнения движения.

#### Частота нелинейных колебаний

Частота нелинейных колебаний маятника определяется как:

$$\omega(H) = \frac{\pi}{2} \omega_0 \begin{cases} \frac{1}{F(\pi/2; x)} & (x \leq 1), \\ \frac{x}{F(\pi/2; 1/x)} & (x \geq 1). \end{cases} \quad (3.12)$$

### **Спектр нелинейного маятника**

Анализируется спектр колебаний маятника и его зависимость от энергии  $H$ .

### **Общие свойства периода колебаний**

Исследуется период колебаний системы в потенциальной яме и его зависимость от энергии.