Неориентированные графы, степени, изоморфизм

- **Граф** (математическая структура для представления связей между объектами):

– Обозначается как $G = (X, \Gamma)$.

– Состоит из:

1° Непустое множество X (множество всех вершин графа).

2° Отображение Γ множества X в X (правило, определяющее связи между вершинами).

- **Элементы графа**:

– **Вершина** (точка, узел графа): Каждый элемент множества X.

– **Дуга** (направленное ребро): Пара элементов (x, y), где $y \in \Gamma x$ (показывает направленную связь от x к y).

- **Множество дуг** (все связи в графе):

– Обозначается через U (полный набор всех связей).

– Дуги обозначаются буквами α, β, ω (при необходимости с индексами).

Определение. Степень вершины v_i (обозн. d_i или $\deg v_i$) -- число рёбер, инцидентных v_i (количество связей, примыкающих к вершине).

Теорема 2.1 (Эйлера) Сумма степеней вершин графа равна удвоенному числу рёбер:

$\sum_i \deg v_i = 2q$

Следствие 2.1(а). Число вершин с нечётными степенями всегда чётно (важно для существования эйлеровых путей).

Ограничения степеней:

В (p,q)-графе (где p -- число вершин, q -- число рёбер): $0 \leq \deg v \leq p - 1$ для любой вершины v

Обозначения:

- $\delta(G) = \min \deg G$ -- минимальная степень (наименьшее число связей у вершины)
- $\Delta(G) = \max \deg G$ -- максимальная степень (наибольшее число связей у вершины)

Определение. Регулярный (однородный) граф (все вершины имеют одинаковое число связей): $\delta(G) = \Delta(G) = r = \deg G$

Следствие 2.1(б). Каждый кубический граф имеет чётное число вершин (следует из теоремы Эйлера).

- Изолированная: $\deg v = 0$ (вершина без связей)
- Концевая (висячая): $\deg v = 1$ (вершина с единственной связью)

Графы G и H изоморфны (*изоморфны*: $G \cong H$ или $G = H$), если существует взаимно однозначное соответствие между их вершинами, сохраняющая смежность.

Маршруты, связность, метрика графа

Определение. *Маршрут* в графе G (последовательность переходов по вершинам и рёбрам) -- чередующаяся последовательность вершин и рёбер $v_0, x_1, v_1, \ldots, x_n, v_n$, где:

- Начинается и заканчивается вершиной (точкой графа)
- Каждое ребро инцидентно (напрямую соединяет) предшествующей и следующей вершинам

Обозначение: $(v_0 - v_n)$-маршрут (путь от вершины v_0 до v_n) записывается как $v_0 v_1 v_2 \ldots v_n$

Классификация маршрутов:

- *Замкнутый*: $v_0 = v_n$ (начальная и конечная вершины совпадают)
- *Открытый*: $v_0 \neq v_n$ (начальная и конечная вершины различны)
- *Цепь* (trail): все рёбра различны (по каждому ребру проходим не более одного раза)
- *Простая цепь* (path): все вершины и рёбра различны (нигде не повторяемся)
- *Цикл*: замкнутая цепь (маршрут возвращается в начальную точку)
- *Простой цикл*: замкнутый маршрут с $n \geq 3$ различными вершинами (замкнутый путь без повторений вершин, кроме начальной/конечной)

Длина маршрута $v_0 v_1 \ldots v_n = n$ (количество пройденных рёбер)

Важные метрики:

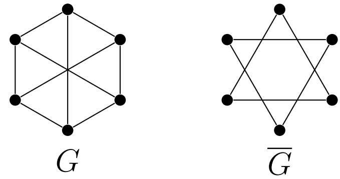
- *Обхват графа* $g(G)$: длина кратчайшего простого цикла (минимальное количество рёбер в замкнутом пути без повторений)
- *Окружение графа* $c(G)$: длина длиннейшего простого цикла (максимальное количество рёбер в замкнутом пути без повторений)

Примечание: $g(G)$ и $c(G)$ не определены для графов без циклов (для деревьев и лесов).

Самодополнительные графы

Дополнение графа $\overline{G}$ (граф с теми же вершинами, но противоположными связями):

- Множество вершин: $V(\overline{G}) = V(G)$
- Две вершины смежны в $\overline{G} \Leftrightarrow$ несмежны в G



Полный граф K_p (все вершины попарно соединены):

- Содержит p вершин
- Имеет $\binom{p}{2}$ рёбер
- Является регулярным степени $p-1$
- Частный случай: K_3 -- треугольник

Вполне несвязный граф $\overline{K_p}$ -- дополнение полного графа (регулярный граф степени 0).

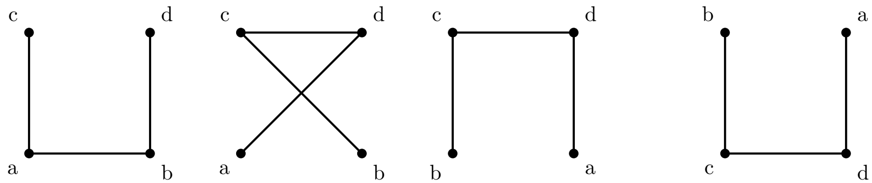


Рис. 1: Граф - Его дополние - переворачиваем - Получили тот же граф

Экстремальные графы

Теорема 2.3 (Турана): Наибольшее число рёбер у графов с r вершинами без треугольников равно $\lfloor r^2/4 \rfloor$.

Доказательство (по индукции для чётных r):

1. База: очевидна для малых r.
2. Шаг: для $r = 2n+2$, где утверждение верно для всех чётных $r \leq 2n$:

- Пусть G — граф с $p = 2n+2$ вершинами без треугольников.
- Существуют смежные вершины u, v (граф не вполне несвязный).
- В подграфе $G' = G - \{u, v\}$ максимум n^2 рёбер.
- Нет вершины w, смежной с u и v одновременно.
- Если w смежна с k вершинами G', то v смежна максимум с $(2n-k)$ вершинами.
- Всего рёбер: $n^2 + k + (2n-k) + 1 = n^2 + 2n + 1 = p^2/4$.

Конструктивное доказательство существования:

Для чётного p $(p, p^2/4)$-граф без треугольников строится так:

- Берём два множества V_1 и V_2 по $p/2$ вершин.
- Соединяем каждую вершину из V_1 с каждой из V_2.

Примечания:

- Доказательство существования чисел $r(m,n)$ см. у М. Холла.
- По определению бесконечный граф не является графом.
- Обзор бесконечных графов: см. Нэш-Вильямс.

Теорема 2.4: Граф является двудольным тогда и только тогда, когда все его простые циклы чётны.

Доказательство:

- Если G — двудольный граф, то его вершины можно разбить на V_1 и V_2, и любое ребро соединяет вершины из разных множеств.
- Каждый простой цикл $v_1 v_2 \ldots v_n v_1$ содержит вершины из V_1 и V_2, так что длина n цикла чётна.
- Обратное: если все простые циклы чётны, то каждое ребро соединяет V_1 и V_2.

Дополнительные результаты:

- $ex(p, C_p) = \left\lfloor \frac{1}{2} + \frac{p(p-1)}{2} \right\rfloor$
- $ex(p, K_{4-x}) = \left\lfloor \frac{p^2}{4} \right\rfloor$
- $ex(p, K_{3,x} - x) = \left\lfloor \frac{p^2}{4} \right\rfloor$

Обобщение Турана: $ex(p, K_n) = \frac{(n-2)(p^2-r^2)}{2(n-1)} + \binom{r}{2}$, где $p \equiv r \pmod{(n-1)}$ и $0 \leq r < n-1$.

Числа Рамсея

Мотивационная задача: В любой группе из 6 человек найдутся либо 3 попарно знакомых, либо 3 попарно незнакомых (переформулировка в терминах графов).

Теорема 2.2 (о существовании треугольника): В графе G с 6 вершинами либо G, либо $\overline{G}$ содержит треугольник.

Доказательство: Пусть v -- произвольная вершина графа G. Среди 5 оставшихся вершин найдутся 3 вершины u_1, u_2, u_3, смежные с v в G (иначе они были бы смежны в $\overline{G}$). Если любые две из u_1, u_2, u_3 смежны в G -- получаем треугольник с v. Если нет -- u_1, u_2, u_3 образуют треугольник в $\overline{G}$.

Число Рамсея $r(m,n)$ (минимальное число вершин, гарантирующее наличие либо K_m, либо K_n):

- Симметричность: $r(m,n) = r(n,m)$
- Верхняя оценка (Эрдёш-Секереш): $r(m,n) \leq \binom{m+n-2}{m-1}$

Теорема Рамсея (для бесконечных графов): Каждый бесконечный граф содержит либо $\aleph_0$ попарно смежных вершин, либо $\aleph_0$ попарно несмежных вершин.

Примечание: Задача нахождения точных значений $r(m,n)$ остаётся открытой. Известные значения приведены в таблице 2.1.

Эйлеровы графы

Эйлеров граф -- граф, содержащий цикл со всеми вершинами и рёбрами (имеет эйлеров цикл). Обязательно связный.

Теорема 7.1 (критерий эйлеровости). Для связного графа G эквивалентны:

1. G -- эйлеров граф
2. Все вершины имеют чётную степень
3. Рёбра можно разбить на простые циклы

Доказательство:

(1)⇒(2): В эйлеровом цикле каждое прохождение вершины даёт $+2$ к её степени. Каждое ребро используется один раз ⇒ степени чётны.

(2)⇒(3): В связном графе с чётными степенями:

- Найдём простой цикл Z
- Удалим его рёбра -- получим граф G_1 с чётными степенями
- Повторяем до пустого графа G_n

(3)⇒(1): Имея разбиение на циклы:

- Берём цикл Z_1
- Находим цикл Z_2 с общей вершиной v
- Строим замкнутую цепь из Z_1 и Z_2
- Продолжаем до полного эйлерова цикла

Следствие 7.1(а). В связном графе с $2n$ вершинами нечётной степени $(n \geq 1)$ рёбра можно разбить на n открытых цепей.

Следствие 7.1(б). В связном графе с двумя вершинами нечётной степени существует открытая цепь, содержащая все рёбра (начинается и заканчивается в вершинах нечётной степени).

Деревья

Основные определения: Ациклический граф -- граф без циклов. **Дерево** -- связный ациклический граф. **Лес** -- граф без циклов (компоненты -- деревья).

Теорема 4.1. Для графа G эквивалентны: 1) G -- дерево 2) любые две вершины соединены единственной простой цепью 3) G связен и $p = q + 1$ 4) G ациклический и $p = q + 1$ 5) G ациклический, и добавление любого ребра создаёт ровно один цикл 6) G связный, не K_p при $p \geq 3$, добавление ребра создаёт один цикл 7) G не $K_3 \cup K_1$ и не $K_3 \cup K_2$, $p = q + 1$, добавление ребра создаёт один цикл

Доказательство (схема): 1⇒2: От противного: две цепи образуют цикл 2⇒3: Индукция по числу вершин 3⇒4: От противного: цикл длины n требует $q \geq p$ 4⇒5: Единственность компоненты из $p = q + k$ 5⇒6: K_p при $p \geq 3$ содержит цикл 6⇒7: Анализ возможных циклов 7⇒1: Исключение случаев с циклами

Следствие 4.1(а). В нетривиальном дереве есть минимум две висячие вершины. *Доказательство:* Из $\sum d_i = 2(p-1)$ в дереве.

Диаметр и радиус графа

Расстояние $d(u,v)$ между вершинами (длина кратчайшей простой цепи):

$$d(u,v) = \begin{cases} \text{длина кратчайшей } (u\text{-}v)\text{-цепи}, & \text{если вершины соединены} \\ \infty, & \text{если вершины не соединены} \end{cases}$$

Свойства метрики (для связного графа):

1. $d(u,v) \geq 0$; $d(u,v) = 0 \Leftrightarrow u = v$ (неотрицательность)
2. $d(u,v) = d(v,u)$ (симметричность)
3. $d(u,v) + d(v,w) \geq d(u,w)$ (неравенство треугольника)

Термины:

- *Геодезическая* -- кратчайшая простая (u-v)-цепь
- *Диаметр графа* $d(G)$ -- длина самой длинной геодезической

Степени графа: Для графа G определяется G^k (k-я степень):

- $V(G^k) = V(G)$ (те же вершины)
- Вершины u,v смежны в $G^k \Leftrightarrow d(u,v) \leq k$ в G

Примеры: $C_5^2 = K_5$, $P_4^2 = K_1 + K_3$

Хроматическое число графа

— это минимальное количество цветов, необходимых для раскраски графа так, чтобы никакие две смежные вершины не имели одинакового цвета. Граф G называется n-раскрашиваемым, если $\chi(G) \le n$, и n-хроматическим, если $\chi(G) = n$.

Известные результаты

- $\chi(K_p) = p$
- $\chi(K_p - x) = p - 1$
- $\chi(K_p') = 1$
- $\chi(K_{m,n}) = 2$
- $\chi(C_{2n}) = 2$
- $\chi(C_{2n+1}) = 3$
- $\chi(T) = 2$ для любого нетривиального дерева T

Теорема 12.1: Граф двуцветен тогда и только тогда, когда он не содержит нечётных простых циклов.

Теорема 12.2: Для любого графа G, $\chi(G) \le 1 + \max \delta(G')$, где максимум берется по всем порожденным подграфам G' графа G.

Следствие 12.2 (а): Для любого графа G, $\chi \le 1 + \Delta$.

Теорема 12.3 (Брукс): Если $\Delta(G) = n$, то граф G всегда n-раскрашиваем, за исключением следующих двух случаев:

1. $n = 2$ и G имеет компоненту, являющуюся нечетным циклом;
2. $n \ge 2$ и K_{n+1} — компонента графа G.

Теорема 12.5: Для любых двух положительных целых чисел t и n существует n-хроматический граф, обхват которого превосходит t.

Теорема 12.6: Для любого графа G сумма и произведение чисел χ и $\bar{\chi}$ удовлетворяют неравенствам:

$$2\sqrt{p} \le \chi + \bar{\chi} \le p + 1, \tag{1}$$

$$p \le \chi\bar{\chi} \le \left(\frac{p+1}{2}\right)^2. \tag{2}$$

Заключение Представленные теоремы и оценки дают представление о сложности задачи нахождения хроматического числа графа и показывают, что даже для простых графов эта задача может быть нетривиальной.

Цикломатическое число графа

Мультиграф $(X{,}U)$ -- пара из множества вершин X и множества рёбер U, где пара вершин может соединяться несколькими рёбрами.

Важные числовые характеристики:

- Для мультиграфа G с n вершинами, m рёбрами, p компонентами:
- Ранг графа: $\rho(G) = n - p$
- Цикломатическое число: $\nu(G) = m - n + p = m - \rho(G)$

Теорема 1. При добавлении ребра между a и b:

- Если $a{,}b$ соединены цепью или совпадают:
- $\rho(G') = \rho(\bar{G})$
- $\nu(G') = \nu(\bar{G}) + 1$
- Иначе:
- $\rho(G) = \rho(\bar{G}) + 1$
- $\nu(G') = \nu(\bar{G})$

Векторное представление циклов:

- Каждому ребру присваивается ориентация
- Для цикла μ: $c^k = r_k - s_k$, где $r_k{,}s_k$ -- число проходов по/против ориентации
- Цикл представляется вектором $(c^1, \ldots{,}c^m)$
- Циклы независимы $\Leftrightarrow$ их векторы линейно независимы

Теорема 2. Цикломатическое число $\nu(G)$ равно максимальному количеству независимых циклов.

Следствия:

1. $\nu(G) = 0 \Leftrightarrow$ граф без циклов
2. $\nu(G) = 1 \Leftrightarrow$ граф содержит ровно один цикл

Теорема 3. В сильно связном графе цикломатическое число равно максимальному количеству независимых контуров.

Плоские графы и формула Эйлера

Планарный граф: Граф, который можно нарисовать без пересечения рёбер.

Плоский граф: Граф, нарисованный на плоскости.

Грани: Области, определяемые плоским графом; внешняя грань — неограниченная.

Цикл: Путь, начинающийся и заканчивающийся в одной вершине без повторений.

Формула Эйлера: Для полиэдров: $V - E + F = 2$, где V — вершины, E — рёбра, F — грани.

Графовая версия: Для связного плоского графа: $p - q + r = 2$.

Следствия и теоремы:

- **Следствие 11.1 (а)**: Если каждая грань — n-цикл, то $q = \frac{n(p-2)}{n-2}$.
- **Максимальный планарный граф**: Граф, который перестаёт быть планарным при добавлении ребра.
- **Следствие 11.1 (б)**: Для максимального плоского графа $q = 3p - 6$.
- **Условие планарности**: Для $p \geq 3$, $q \leq 3p - 6$.
- **Непланарные графы**: K_5 и $K_{3,3}$.
- **Теорема Уитни**: Граф планарен, если каждый его блок планарен.
- **Теорема 11.3**: Для любой грани f двусвязного плоского графа G найдётся изоморфный плоский граф с внешней гранью f.

Дополнительные концепции:

- **Выпуклый многогранник**: Многогранник, содержащий любые соединяющие его точки отрезки.
- **Теорема Штейница и Радемахера**: Граф — 1-скелет выпуклого многогранника, если он планарен и трёхсвязен.
- **Теорема 11.7**: Любой планарный граф изоморфен плоскому графу с прямыми рёбрами.

Линейно независимые циклы

Линейно независимые циклы

- **Пространство циклов** и **пространство коциклов** определяются над полем $F_2 = \{0, 1\}$.
- **0-цепь** — линейная комбинация вершин $\Sigma e_i v_i$.
- **1-цепь** — линейная комбинация рёбер $\Sigma e_i x_i$.
- **Граничный оператор** ∂: переводит 1-цепи в 0-цепи.
- ∂ — линейный оператор.
- Если $x = uv$, то $\partial x = u + v$.
- **Кограничный оператор** δ: переводит 0-цепи в 1-цепи.
- δ — линейный оператор.
- $\delta v = \Sigma e_i x_i$, где $e_i = 1$, если ребро x_i инцидентно v.

Циклы и Коциклы

- **Циклический вектор** — 1-цепь с границей 0 (набор простых циклов без общих рёбер).
- **Пространство циклов** — векторное пространство всех циклических векторов.
- **Базис циклов** — максимальный набор независимых простых циклов.
- **Коцикл** — минимальный разрез графа.
- **Пространство коциклов** — множество всех кограниц графа.
- **Базис коциклов** — базис пространства коциклов, состоящий из коциклов.

Циклический ранг

- **Теорема 4.5**: Циклический ранг $m(G)$ равен числу хорд любого остова в G.
- **Следствие 4.5 (а)**: $m(G) = q - p + 1$ для связного (p, q)-графа.
- **Следствие 4.5 (б)**: $m(G) = q - p + k$ для (p, q)-графа с k компонентами.

Коциклический ранг

- **Теорема 4.6**: Коциклический ранг $t^*(G)$ равен числу рёбер любого остова.
- **Следствие 4.6 (а)**: $t^*(G) = p - 1$ для связного (p, q)-графа.
- **Следствие 4.6 (б)**: $t^*(G) = p - k$ для (p, q)-графа с k компонентами.

Замечания

- Уравнение Эйлера — Пуанкаре: $p - q = k - m(G)$.
- Графы как симплициальные комплексы: вершины — 0-симплексы, рёбра — 1-симплексы.

Хроматическое число плоского графа

Основные утверждения:

- $\chi(H) \leq \chi(G) + 1$ и $\overline{\chi}(H) \leq \overline{\chi}(G) + 1$.
- Если $\chi(H) < \chi(G)+1$ или $\overline{\chi}(H) < \overline{\chi}(G)+1$, то $\chi(H)+\overline{\chi}(H) \leq p+1$.
- Всегда $\chi(H) + \overline{\chi}(H) \leq p + 1$.
- $\overline{\chi}\chi \leq \left(\frac{p+1}{2}\right)^2$.

Теорема о пяти красках:

Теорема. *Каждый планарный граф 5-раскрашиваем.*

Доказательство: Индукция по числу p вершин.

- База: для $p \leq 5$ граф p-раскрашиваем.
- Шаг: для графа G с $p+1$ вершинами, найдется вершина v степени 5 или менее. Граф $G - v$ 5-раскрашиваем.
- Если все пять цветов используются, переставляем цвета, чтобы получить 5-раскраску.

Гипотеза четырёх красок:

- Каждая плоская карта 4-раскрашиваема.
- Эквивалентно: каждый планарный граф 4-раскрашиваем.

Теорема 12.8:

Теорема. *Каждый планарный граф, имеющий меньше четырех треугольников, 3-раскрашиваем.*

Следствие 12.8 (a):

- Каждый планарный граф, не содержащий треугольников, 3-раскрашива

Теорема 12.9:

Теорема. *Гипотеза четырех красок справедлива тогда и только тогда, когда каждая кубическая плоская карта, не имеющая мостов, 4-раскрашиваема.*

Доказательство:

- Любая плоская карта 4-раскрашиваема тогда и только тогда, когда справедлива гипотеза четырех красок.
- Если 4-раскрашиваем всякая плоская карта, не содержащая мостов, то и всякая кубическая плоская карта, не содержащая мостов, также 4-раскрашиваема.

Примеры неплоских графов

Порядковые числа в графах

Пример использования порядковых чисел

Порядковое число графа G — минимальное число цветов, необходимых для раскраски вершин графа так, чтобы никакие две смежные вершины не имели одинаковый цвет.

Теорема 5.1: Для любого графа G его порядковое число $\chi(G)$ удовлетворяет неравенству:

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$$

где $\Delta(G)$ — максимальная степень вершины в графе G.

Пример: Рассмотрим граф K_4 (полный граф с четырьмя вершинами).

- Все вершины соединены друг с другом.
- $\Delta(K_4) = 3$.
- $\chi(K_4) = 4$, так как каждая вершина должна иметь уникальный цвет.

Алгоритм раскраски графа:

1. Выберите вершину v с максимальной степенью.
2. Назначьте v минимально возможный цвет, не совпадающий с цветами её соседей.
3. Повторите для всех вершин графа.

Замечание: Порядковое число графа может быть равно $\Delta(G)$, если граф является двудольным.

Следствие 5.1(а): Если граф G планарен, то $\chi(G) \leq 4$ (теорема о четырёх красках).

Применение: Раскраска графов используется в задачах планирования, таких как распределение частот в беспроводных сетях и составление расписаний.

Функция Гранди

- **Функция Гранди:** Для конечного графа (X, Γ) функция $g(x)$ — это наименьшее неотрицательное целое число, не принадлежащее множеству $g(\Gamma x) = \{g(y) \mid y \in \Gamma x\}$.
- **Пример 1:** Граф на рис. 3-3 допускает две функции Гранди. Если $\mathit{\Gamma} x = \{y_1, y_2, \ldots\}$, то $g(x)$ — наименьшее число, отличное от $g(y_1), g(y_2)$.
- **Пример 2:** Граф на рис. 3-2 допускает единственную функцию Гранди $g(x)$, где $g(x) = o(x)$ для $x \neq a$, а в a принимает значение ω (трансфинитное число).
- **Теорема 5:** Прогрессивно конечный граф допускает одну функцию Гранди $g(x)$, и $g(x) \leq o(x)$.
- **Доказательство:** Индукция по множествам:

$$X(0) = \{x \mid \mathit{\Gamma} x = \emptyset\},$$
$$X(1) = \{x \mid \mathit{\Gamma} x \subseteq X(0)\},$$
$$X(2) = \{x \mid \mathit{\Gamma} x \subseteq X(1)\}.$$

- **Теорема 6:** Если $|X| < \infty$, то $g(x) \leq \Gamma$. Если $g(x) = n$, то g принимает в $\mathit{\Gamma} x$ все значения $0, 1, 2, \ldots, n-1$, следовательно, $|X| \geq n - g(x)$.
- **Заключение:** Для Γ-конечного или прогрессивно ограниченного графа значения $g(x)$ остаются конечными.

Внутреннее устойчивое множество Граф $G = (X, \Gamma)$, множество $S \subseteq V$ называется *внутренне устойчивым*, если $\Gamma S \cap S = \emptyset$.
Число внутренней устойчивости

$$\alpha(G) = \max_{S \in \mathfrak{S}} |S|$$

Связь с хроматическим числом

$$\alpha(G)\gamma(G) \geq |X|$$

Пример Граф с $\gamma(G) = 4$, где белые вершины образуют наибольшее внутренне устойчивое множество.

Лемма 1

$$\alpha(G \times H) \geq \alpha(G) \cdot \alpha(H)$$

Емкость графа

$$\theta(G) = \sup_n \sqrt[n]{\alpha(G^n)}$$

Лемма 2 Сохраняющее отображение σ переводит S во внутренне устойчивое множество $\sigma(S)$.

Лемма 3 Если $\sigma(X)$ внутренне устойчиво, то $\theta(G) = \alpha(G)$.

Теорема 7 (Шеннон) Если для G или H существует σ, то

$$\alpha(G \times H) = \alpha(G)\alpha(H)$$

Следствие Если σ переводит вершины G во внутренне устойчивое множество, то

$$\alpha(G) = \sup_n \sqrt[n]{\alpha(G^n)} = \alpha(G)$$

Внешнее устойчивое множество Граф $G = (X, \Gamma)$, множество $T \subseteq X$ внешне устойчиво, если для каждой вершины $x \notin T$ имеем $\Gamma_x \cap T \neq \varnothing$ (каждая вершина вне T соединена с T). Если $\mathcal{T}$ — все внешне устойчивые множества, то $X \in \mathcal{T}$ и $T \in \mathcal{T} \quad A \supseteq T \Rightarrow A \in \mathcal{T}$.

Число внешней устойчивости

$$\beta(G) = \min_{T \in \mathcal{T}} |T|$$

(минимальное внешне устойчивое множество).

Алгоритм нахождения наименьшего внешне устойчивого множества

1. Удаляем вершину x, если $\Delta x \subseteq \Delta y$ для $y \neq x$ (вершина y заменяет x). Пример: удаляем c, d, f.
2. Если есть висячее ребро (x, y), то $x \in T$. Пример: $a \in T$.
3. Исключаем a и $\Delta a = \{\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\}$.
4. Повторяем шаги 1 и 2. Если граф неприводим, временно добавляем в T вершину, например b.
5. Исключаем b и $\Delta b = \{a, e, f\}$.
6. Упрощаем граф: исключаем g, так как $\Delta g \subseteq \Delta e = \{g\}$. Включаем e в T, получаем $T = \{a, b, e\}$.

Ядро графа Пусть $G = (X, \Gamma)$ — конечный или бесконечный граф. Множество $S \subseteq X$ называется *ядром* графа, если S устойчиво как внутренне, так и внешне, т.е. если

$$x \in S \Rightarrow \Gamma x \cap S = \varnothing, \tag{3}$$

$$x \notin S \Rightarrow \Gamma x \cap S \neq \varnothing. \tag{4}$$

Из условия (1) следует, что ядро S не содержит петель. Из условия (2) — что S содержит все такие вершины x, для которых $\Gamma x = \varnothing$. Пустое множество $\varnothing$ не может быть ядром.

Теорема 1
Если S — ядро графа (X, Γ), то множество S — максимальное в семействе $\mathfrak{S}$ внутренне устойчивых множеств, т.е.

$$A \in \mathfrak{S},\ A \supseteq S \Rightarrow A = S$$

Теорема 2
В симметрическом графе без петель каждое максимальное множество семейства $\mathfrak{S}$ внутренне устойчивых множеств представляет собой ядро.

Следствие
Симметрический граф без петель обладает ядром.

Характеристическая функция
Функция $\varphi_S(x)$ множества S определяется как:

$$\varphi_S(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x \in S \\ 0, & \text{при } x \notin S \end{cases}$$

Теорема 3
Для того чтобы множество S было ядром, необходимо и достаточно чтобы для характеристической функции $\varphi_S(x)$ выполнялось соотношение

$$\varphi_S(x) = 1 - \max_{y \in \Gamma x} \varphi_S(y)$$

Теорема 4
Прогрессивно конечный граф обладает ядром.

Теорема Ричардсона
Конечный граф, не содержащий контуров нечетной длины, обладает ядром.

Игры на графе, игра НИМ

Определение игры на графе:

Граф (X, Γ) определяет игру двух игроков (A) и (B). Положениями игры служат вершины графа. Начальная вершина x_0 выбирается жребием. Игроки ходят поочередно: (A) выбирает $x_1 \in \Gamma x_0$, затем (B) выбирает $x_2 \in \Gamma x_1$, и так далее. Если $\Gamma x_n = \emptyset$, игрок, выбравший x_n, выигрывает.

Игра НИМ:

Эта игра называется *игрой Ним.* Задача — охарактеризовать выигрышные положения, т.е. вершины, выбор которых обеспечивает выигрыш независимо от ответов противника.

Теорема 1: *Если граф имеет ядро S, и игрок выбрал вершину в S, то это обеспечивает ему выигрыш или ничью.*

Доказательство:

Если (A) выбрал $x_1 \in S$, то либо $\Gamma x_1 = \emptyset$, и он выиграл, либо (B) выбирает $x_2 \in X \setminus S$, и (A) может выбрать $x_3 \in S$.

Метод вычисления выигрышных позиций:

Основной метод — вычисление функции Гранди $g(x)$. Ядро $S = \{x | g(x) = 0\}$. Если $g(x_0) = 0$, (A) в критическом положении. Если $g(x_0) \neq 0$, (A) может выиграть, выбрав x_1 с $g(x_1) = 0$.

Следствие:

Если граф прогрессивно конечен, существует единственная функция Гранди $g(x)$. Выбор y с $g(y) = 0$ — выигрышный, z с $g(z) \neq 0$ — проигрышный.