

## 1. Неориентированные графы, степени, изоморфизм

- **Граф** (математическая структура для представления связей между объектами):
  - Обозначается как  $G = (X, \Gamma)$ .
  - Состоит из:
    - 1° Непустое множество  $X$  (множество всех вершин графа).
    - 2° Отображение  $\Gamma$  множества  $X$  в  $X$  (правило, определяющее связи между вершинами).
- **Элементы графа:**
  - **Вершина** (точка, узел графа): Каждый элемент множества  $X$ .
  - **Дуга** (направленное ребро): Пара элементов  $(x, y)$ , где  $y \in \Gamma x$  (показывает направленную связь от  $x$  к  $y$ ).
- **Множество дуг** (все связи в графе):
  - Обозначается через  $U$  (полный набор всех связей).
  - Дуги обозначаются буквами  $\alpha, \beta, \omega$  (при необходимости с индексами).

**Определение.** Степень вершины  $v_i$  (обозн.  $d_i$  или  $\deg v_i$ ) -- число рёбер, инцидентных  $v_i$  (количество связей, примыкающих к вершине).

**Теорема 2.1 (Эйлера)** (фундаментальное свойство графов). Сумма степеней вершин графа равна удвоенному числу рёбер:

$$\sum_i \deg v_i = 2q$$

**Следствие 2.1(а).** Число вершин с нечётными степенями всегда чётно (важно для существования эйлеровых путей).

**Ограничения степеней:**

В  $(p, q)$ -графе (где  $p$  -- число вершин,  $q$  -- число рёбер):  $0 \leq \deg v \leq p - 1$  для любой вершины  $v$

**Обозначения:**

- $\delta(G) = \min \deg G$  -- минимальная степень (наименьшее число связей у вершины)
- $\Delta(G) = \max \deg G$  -- максимальная степень (наибольшее число связей у вершины)

**Определение.** Регулярный (однородный) граф (все вершины имеют одинаковое число связей):  $\delta(G) = \Delta(G) = r = \deg G$

**Следствие 2.1(б).** Каждый кубический граф имеет чётное число вершин (следует из теоремы Эйлера).

**Специальные вершины:**

- Изолированная:  $\deg v = 0$  (вершина без связей)
- Концевая (висячая):  $\deg v = 1$  (вершина с единственной связью)

## 2. Маршруты, связность, метрика графа

**Определение.** *Маршрут* в графе  $G$  (последовательность переходов по вершинам и рёбрам) -- чередующаяся последовательность вершин и рёбер  $v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n$ , где:

- Начинается и заканчивается вершиной (точкой графа)
- Каждое ребро инцидентно (напрямую соединяет) предшествующей и следующей вершинам

**Обозначение:**  $(v_0 - v_n)$ -маршрут (путь от вершины  $v_0$  до  $v_n$ ) записывается как  $v_0 v_1 v_2 \dots v_n$

**Классификация маршрутов:**

- *Замкнутый:*  $v_0 = v_n$  (начальная и конечная вершины совпадают)
- *Открытый:*  $v_0 \neq v_n$  (начальная и конечная вершины различны)
- *Цепь* (trail): все рёбра различны (по каждому ребру проходим не более одного раза)
- *Простая цепь* (path): все вершины и рёбра различны (нигде не повторяемся)
- *Цикл:* замкнутая цепь (маршрут возвращается в начальную точку)
- *Простой цикл:* замкнутый маршрут с  $n \geq 3$  различными вершинами (замкнутый путь без повторений вершин, кроме начальной/конечной)

**Длина маршрута**  $v_0 v_1 \dots v_n = n$  (количество пройденных рёбер)

**Важные метрики:**

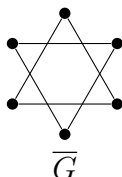
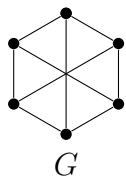
- *Обхват графа*  $g(G)$ : длина кратчайшего простого цикла (минимальное количество рёбер в замкнутом пути без повторений)
- *Окружение графа*  $c(G)$ : длина длиннейшего простого цикла (максимальное количество рёбер в замкнутом пути без повторений)

**Примечание:**  $g(G)$  и  $c(G)$  не определены для графов без циклов (для деревьев и лесов).

### 3. Самодополнительные графы

**Дополнение графа  $\overline{G}$**  (граф с теми же вершинами, но противоположными связями):

- Множество вершин:  $V(\overline{G}) = V(G)$
- Две вершины смежны в  $\overline{G}$   $\Leftrightarrow$  несмежны в  $G$



**Самодополнительный граф** -- граф, изоморфный своему дополнению (структура графа совпадает со структурой его дополнения).

**Полный граф  $K_p$**  (все вершины попарно соединены):

- Содержит  $p$  вершин
- Имеет  $\binom{p}{2}$  рёбер
- Является регулярным степени  $p - 1$
- Частный случай:  $K_3$  -- треугольник

**Вполне несвязный граф  $\overline{K_p}$**  -- дополнение полного графа (регулярный граф степени 0).

### 4. Экстремальные графы

**Теорема 2.3 (Турана)** (о максимальном числе рёбер в графе без треугольников):

Наибольшее число рёбер у графов с  $r$  вершин без треугольников равно  $\lfloor r^2/4 \rfloor$ .

**Доказательство** (по индукции для чётных  $r$ ):

1. База: очевидна для малых  $r$
2. Шаг: для  $r = 2n + 2$ , где утверждение верно для всех чётных  $r \leq 2n$ :
  - Пусть  $G$  -- граф с  $p = 2n + 2$  вершинами без треугольников
  - Существуют смежные вершины  $u, v$  (граф не вполне несвязный)
  - В подграфе  $G' = G - \{u, v\}$  максимум  $n^2$  рёбер
  - Нет вершины  $w$ , смежной с  $u$  и  $v$  одновременно
  - Если  $w$  смежна с  $k$  вершинами  $G'$ , то  $v$  смежна максимум с  $(2n - k)$  вершинами
  - Всего рёбер:  $n^2 + k + (2n - k) + 1 = n^2 + 2n + 1 = p^2/4$

**Конструктивное доказательство существования:**

Для чётного  $p$  ( $p, p^2/4$ )-граф без треугольников строится так:

- Берём два множества  $V_1$  и  $V_2$  по  $p/2$  вершин
- Соединяем каждую вершину из  $V_1$  с каждой из  $V_2$

**Примечания:**

- Доказательство существования чисел  $r(m, n)$  см. у М. Холла
- По определению бесконечный граф не является графом
- Обзор бесконечных графов: см. Нэш-Вильямс

## 5. Числа Рамсея

**Мотивационная задача:** В любой группе из 6 человек найдутся либо 3 попарно знакомых, либо 3 попарно незнакомых (переформулировка в терминах графов).

**Теорема 2.2** (о существовании треугольника): В графе  $G$  с 6 вершинами либо  $G$ , либо  $\overline{G}$  содержит треугольник.

**Доказательство:** Пусть  $v$  -- произвольная вершина графа  $G$ . Среди 5 оставшихся вершин найдутся 3 вершины  $u_1, u_2, u_3$ , смежные с  $v$  в  $G$  (иначе они были бы смежны в  $\overline{G}$ ). Если любые две из  $u_1, u_2, u_3$  смежны в  $G$  -- получаем треугольник с  $v$ . Если нет --  $u_1, u_2, u_3$  образуют треугольник в  $\overline{G}$ .

**Число Рамсея**  $r(m, n)$  (минимальное число вершин, гарантирующее наличие либо  $K_m$ , либо  $K_n$ ):

- Симметричность:  $r(m, n) = r(n, m)$
- Верхняя оценка (Эрдёш-Секереш):  $r(m, n) \leq \binom{m+n-2}{m-1}$

**Теорема Рамсея** (для бесконечных графов): Каждый бесконечный граф содержит либо  $\aleph_0$  попарно смежных вершин, либо  $\aleph_0$  попарно несмежных вершин.

**Примечание:** Задача нахождения точных значений  $r(m, n)$  остаётся открытой. Известные значения приведены в таблице 2.1.

## 6. Эйлеровы графы

**Эйлеров граф** -- граф, содержащий цикл со всеми вершинами и рёбрами (имеет эйлеров цикл). Обязательно связный.

**Теорема 7.1** (критерий эйлеровости). Для связного графа  $G$  эквивалентны:

1.  $G$  -- эйлеров граф
2. Все вершины имеют чётную степень
3. Рёбра можно разбить на простые циклы

**Доказательство:**

(1) $\Rightarrow$ (2): В эйлеровом цикле каждое прохождение вершины даёт +2 к её степени. Каждое ребро используется один раз  $\Rightarrow$  степени чётны.

(2) $\Rightarrow$ (3): В связном графе с чётными степенями:

- Найдём простой цикл  $Z$
- Удалим его рёбра -- получим граф  $G_1$  с чётными степенями
- Повторяем до пустого графа  $G_n$

(3) $\Rightarrow$ (1): Имея разбиение на циклы:

- Берём цикл  $Z_1$
- Находим цикл  $Z_2$  с общей вершиной  $v$
- Строим замкнутую цепь из  $Z_1$  и  $Z_2$
- Продолжаем до полного эйлерова цикла

**Следствие 7.1(а).** В связном графе с  $2n$  вершинами нечётной степени ( $n \geq 1$ ) рёбра можно разбить на  $n$  открытых цепей.

**Следствие 7.1(б).** В связном графе с двумя вершинами нечётной степени существует открытая цепь, содержащая все рёбра (начинается и заканчивается в вершинах нечётной степени).

## 7. Деревья

**Основные определения:** **Ациклический граф** -- граф без циклов. **Дерево** -- связный ациклический граф. **Лес** -- граф без циклов (компоненты -- деревья).

**Теорема 4.1.** Для графа  $G$  эквивалентны: 1)  $G$  -- дерево 2) любые две вершины соединены единственной простой цепью 3)  $G$  связен и  $p = q+1$  4)  $G$  ациклический и  $p = q+1$  5)  $G$  ациклический, и добавление любого ребра создаёт ровно один цикл 6)  $G$  связный, не  $K_p$  при  $p \geq 3$ , добавление ребра создаёт один цикл 7)  $G$  не  $K_3 \cup K_1$  и не  $K_3 \cup K_2$ ,  $p = q + 1$ , добавление ребра создаёт один цикл

**Доказательство** (схема):  $1 \Rightarrow 2$ : От противного: две цепи образуют цикл  $2 \Rightarrow 3$ : Индукция по числу вершин  $3 \Rightarrow 4$ : От противного: цикл длины  $n$  требует  $q \geq p$   $4 \Rightarrow 5$ : Единственность компоненты из  $p = q + k$   $5 \Rightarrow 6$ :  $K_p$  при  $p \geq 3$  содержит цикл  $6 \Rightarrow 7$ : Анализ возможных циклов  $7 \Rightarrow 1$ : Исключение случаев с циклами

**Следствие 4.1(а).** В нетривиальном дереве есть минимум две висячие вершины. *Доказательство:* Из  $\sum d_i = 2(p - 1)$  в дереве.

## 8. Диаметр и радиус графа

**Расстояние**  $d(u, v)$  между вершинами (длина кратчайшей простой цепи):

$$d(u, v) = \begin{cases} \text{длина кратчайшей } (u-v)\text{-цепи,} & \text{если вершины соединены} \\ \infty, & \text{если вершины не соединены} \end{cases}$$

**Свойства метрики** (для связного графа):

1.  $d(u, v) \geq 0$ ;  $d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$  (неотрицательность)
2.  $d(u, v) = d(v, u)$  (симметричность)
3.  $d(u, v) + d(v, w) \geq d(u, w)$  (неравенство треугольника)

**Термины:**

- *Геодезическая* -- кратчайшая простая  $(u-v)$ -цепь
- *Диаметр графа*  $d(G)$  -- длина самой длинной геодезической

**Степени графа:** Для графа  $G$  определяется  $G^k$  ( $k$ -я степень):

- $V(G^k) = V(G)$  (те же вершины)
- Вершины  $u, v$  смежны в  $G^k \Leftrightarrow d(u, v) \leq k$  в  $G$

*Примеры:*  $C_5^2 = K_5$ ,  $P_4^2 = K_1 + K_3$

## 9. Хроматическое число графа

**Определение.** *p-хроматический граф* -- граф, вершины которого можно раскрасить в  $p$  цветов так, чтобы смежные вершины имели разные цвета.

**Хроматическое число**  $\chi(G)$  -- минимальное  $p$ , при котором граф  $p$ -хроматический.

**Хроматический класс** -- минимальное число цветов  $q$  для раскраски рёбер без одинаковых смежных рёбер.

**Теорема о двудольных графах.** Граф двудольный ( $\chi(G) = 2$ )  $\iff$  не содержит циклов нечётной длины.

**Доказательство:**

( $\Rightarrow$ ) Алгоритм раскраски в 2 цвета: 1) Выбираем вершину  $a$ , красим в синий 2) Смежные с синими красим в красный, с красными -- в синий 3) Отсутствие нечётных циклов гарантирует корректность

( $\Leftarrow$ ) От противного: в двудольном графе нельзя раскрасить нечётный цикл в 2 цвета.

**Теорема 4.** Для симметрического графа  $G$  эквивалентны: 1)  $G$  является  $p$ -хроматическим 2) Существует функция Гранди  $g(x)$  с  $\max g(x) \leq p - 1$

**Теорема 5.** Для графов  $G$  ( $p+1$ -хром.) и  $H$  ( $q+1$ -хром.):  $\chi(G \times H) = r + 1$ , где  $r = \max p' + q' : p' \leq p, q' \leq q$

**Теорема 6.** Для графов  $G$  и  $H$  с  $\chi(G)=p, \chi(H)=q$ :  $\chi(G \times H) = \min\{p, q\}$

**Важное свойство:** Для плоских графов  $\chi(G) \leq 5$  (достаточно 5 цветов для раскраски карты).

## 10. Цикломатическое число графа

**Мультиграф**  $(X, U)$  -- пара из множества вершин  $X$  и множества рёбер  $U$ , где пара вершин может соединяться несколькими рёбрами.

**Важные числовые характеристики:**

- Для мультиграфа  $G$  с  $n$  вершинами,  $m$  рёбрами,  $p$  компонентами:
  - Ранг графа:  $\rho(G) = n - p$
  - Цикломатическое число:  $\nu(G) = m - n + p = m - \rho(G)$

**Теорема 1.** При добавлении ребра между  $a$  и  $b$ :

- Если  $a, b$  соединены цепью или совпадают:
  - $\rho(G') = \rho(\bar{G})$
  - $\nu(G') = \nu(\bar{G}) + 1$
- Иначе:
  - $\rho(G) = \rho(\bar{G}) + 1$
  - $\nu(G') = \nu(\bar{G})$

**Векторное представление циклов:**

- Каждому ребру присваивается ориентация
- Для цикла  $\mu$ :  $c^k = r_k - s_k$ , где  $r_k, s_k$  -- число проходов по/против ориентации
- Цикл представляется вектором  $(c^1, \dots, c^m)$
- Циклы независимы  $\iff$  их векторы линейно независимы

**Теорема 2.** Цикломатическое число  $\nu(G)$  равно максимальному количеству независимых циклов.

**Следствия:**

1.  $\nu(G) = 0 \iff$  граф без циклов
2.  $\nu(G) = 1 \iff$  граф содержит ровно один цикл

**Теорема 3.** В сильно связном графе цикломатическое число равно максимальному количеству независимых контуров.

## 11. Плоские графы и формула Эйлера

**Планарный граф:** Граф, который можно нарисовать без пересечения рёбер.

**Плоский граф:** Граф, нарисованный на плоскости.

**Грани:** Области, определяемые плоским графом; внешняя грань — неограниченная.

**Цикл:** Путь, начинающийся и заканчивающийся в одной вершине без повторений.

**Формула Эйлера:** Для полиэдров:  $V - E + F = 2$ , где  $V$  — вершины,  $E$  — рёбра,  $F$  — грани.

**Графовая версия:** Для связного плоского графа:  $p - q + r = 2$ .

**Следствия и теоремы:**

- **Следствие 11.1 (а):** Если каждая грань —  $n$ -цикл, то  $q = \frac{n(p-2)}{n-2}$ .
- **Максимальный планарный граф:** Граф, который перестаёт быть планарным при добавлении ребра.
- **Следствие 11.1 (б):** Для максимального плоского графа  $q = 3p - 6$ .
- **Условие планарности:** Для  $p \geq 3$ ,  $q \leq 3p - 6$ .
- **Непланарные графы:**  $K_5$  и  $K_{3,3}$ .
- **Теорема Уитни:** Граф планарен, если каждый его блок планарен.
- **Теорема 11.3:** Для любой грани  $f$  двусвязного плоского графа  $G$  найдётся изоморфный плоский граф с внешней гранью  $f$ .

**Дополнительные концепции:**

- **Выпуклый многогранник:** Многогранник, содержащий любые соединяющие его точки отрезки.
- **Теорема Штейница и Радемахера:** Граф — 1-скелет выпуклого многогранника, если он планарен и трёхсвязен.
- **Теорема 11.7:** Любой планарный граф изоморфен плоскому графу с прямыми рёбрами.

## 12. Линейно независимые циклы

**Линейно независимые циклы**

- **Пространство циклов и пространство коциклов** определяются над полем  $F_2 = \{0, 1\}$ .
- **0-цепь** — линейная комбинация вершин  $\sum e_i v_i$ .
- **1-цепь** — линейная комбинация рёбер  $\sum e_i x_i$ .
- **Граничный оператор  $\partial$ :** переводит 1-цепи в 0-цепи.
  - $\partial$  — линейный оператор.
  - Если  $x = uv$ , то  $\partial x = u + v$ .
- **Кограничный оператор  $\delta$ :** переводит 0-цепи в 1-цепи.
  - $\delta$  — линейный оператор.
  - $\delta v = \sum e_i x_i$ , где  $e_i = 1$ , если ребро  $x_i$  инцидентно  $v$ .

**Циклы и Коциклы**

- **Циклический вектор** — 1-цепь с границей 0 (набор простых циклов без общих рёбер).
- **Пространство циклов** — векторное пространство всех циклических векторов.
- **Базис циклов** — максимальный набор независимых простых циклов.
- **Коцикл** — минимальный разрез графа.
- **Пространство коциклов** — множество всех кограниц графа.
- **Базис коциклов** — базис пространства коциклов, состоящий из коциклов.

**Циклический ранг**

- **Теорема 4.5:** Циклический ранг  $m(G)$  равен числу хорд любого остова в  $G$ .
- **Следствие 4.5 (а):**  $m(G) = q - p + 1$  для связного  $(p, q)$ -графа.
- **Следствие 4.5 (б):**  $m(G) = q - p + k$  для  $(p, q)$ -графа с  $k$  компонентами.

**Коциклический ранг**

- **Теорема 4.6:** Коциклический ранг  $t^*(G)$  равен числу рёбер любого остова.
- **Следствие 4.6 (а):**  $t^*(G) = p - 1$  для связного  $(p, q)$ -графа.
- **Следствие 4.6 (б):**  $t^*(G) = p - k$  для  $(p, q)$ -графа с  $k$  компонентами.

**Замечания**

- Уравнение Эйлера — Пуанкаре:  $p - q = k - m(G)$ .
- Графы как симплициальные комплексы: вершины — 0-симплексы, рёбра — 1-симплексы.

### 13. Хроматическое число плоского графа

### 14. Примеры неплоских графов

## 15. Порядковые числа в графах

### Пример использования порядковых чисел

**Порядковое число** графа  $G$  — минимальное число цветов, необходимых для раскраски вершин графа так, чтобы никакие две смежные вершины не имели одинаковый цвет.

**Теорема 5.1:** Для любого графа  $G$  его порядковое число  $\chi(G)$  удовлетворяет неравенству:

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$$

где  $\Delta(G)$  — максимальная степень вершины в графе  $G$ .

**Пример:** Рассмотрим граф  $K_4$  (полный граф с четырьмя вершинами).

- Все вершины соединены друг с другом.
- $\Delta(K_4) = 3$ .
- $\chi(K_4) = 4$ , так как каждая вершина должна иметь уникальный цвет.

### Алгоритм раскраски графа:

1. Выберите вершину  $v$  с максимальной степенью.
2. Назначьте  $v$  минимально возможный цвет, не совпадающий с цветами её соседей.
3. Повторите для всех вершин графа.

**Замечание:** Порядковое число графа может быть равно  $\Delta(G)$ , если граф является двудольным.

**Следствие 5.1(а):** Если граф  $G$  планарен, то  $\chi(G) \leq 4$  (теорема о четырёх красках).

**Применение:** Раскраска графов используется в задачах планирования, таких как распределение частот в беспроводных сетях и составление расписаний.

## 16. Функция Гранди

- **Функция Гранди:** Для конечного графа  $(X, \Gamma)$  функция  $g(x)$  — это наименьшее неотрицательное целое число, не принадлежащее множеству  $g(\Gamma x) = \{g(y) \mid y \in \Gamma x\}$ .
- **Пример 1:** Граф на рис. 3-3 допускает две функции Гранди. Если  $\Gamma x = \{y_1, y_2, \dots\}$ , то  $g(x)$  — наименьшее число, отличное от  $g(y_1), g(y_2)$ .
- **Пример 2:** Граф на рис. 3-2 допускает единственную функцию Гранди  $g(x)$ , где  $g(x) = o(x)$  для  $x \neq a$ , а в  $a$  принимает значение  $\omega$  (трансфинитное число).
- **Теорема 5:** Прогрессивно конечный граф допускает одну функцию Гранди  $g(x)$ , и  $g(x) \leq o(x)$ .
- **Доказательство:** Индукция по множествам:

$$\begin{aligned} X(0) &= \{x \mid \Gamma x = \emptyset\}, \\ X(1) &= \{x \mid \Gamma x \subseteq X(0)\}, \\ X(2) &= \{x \mid \Gamma x \subseteq X(1)\}. \end{aligned}$$

- **Теорема 6:** Если  $|X| < \infty$ , то  $g(x) \leq \Gamma$ . Если  $g(x) = n$ , то  $g$  принимает в  $\Gamma x$  все значения  $0, 1, 2, \dots, n-1$ , следовательно,  $|X| \geq n - g(x)$ .
- **Заключение:** Для  $\Gamma$ -конечного или прогрессивно ограниченного графа значения  $g(x)$  остаются конечными.



## 17. Внутреннее устойчивое множество

Граф  $G = (X, \Gamma)$ , множество  $S \subseteq V$  называется *внутренне устойчивым*, если  $\Gamma S \cap S = \emptyset$ . **Число внутренней устойчивости**

$$\alpha(G) = \max_{S \in \mathfrak{S}} |S|$$

**Связь с хроматическим числом**

$$\alpha(G)\gamma(G) \geq |X|$$

**Пример** Граф с  $\gamma(G) = 4$ , где белые вершины образуют наибольшее внутренне устойчивое множество.

**Лемма 1**

$$\alpha(G \times H) \geq \alpha(G) \cdot \alpha(H)$$

**Емкость графа**

$$\theta(G) = \sup_n \sqrt[n]{\alpha(G^n)}$$

**Лемма 2** Сохраняющее отображение  $\sigma$  переводит  $S$  во внутренне устойчивое множество  $\sigma(S)$ .

**Лемма 3** Если  $\sigma(X)$  внутренне устойчиво, то  $\theta(G) = \alpha(G)$ .

**Теорема 7 (Шеннон)** Если для  $G$  или  $H$  существует  $\sigma$ , то

$$\alpha(G \times H) = \alpha(G)\alpha(H)$$

**Следствие** Если  $\sigma$  переводит вершины  $G$  во внутренне устойчивое множество, то

$$\alpha(G) = \sup_n \sqrt[n]{\alpha(G^n)} = \alpha(G)$$

## 18. Внешнее устойчивое множество

Граф  $G = (X, \Gamma)$ , множество  $T \subseteq X$  внешне устойчиво, если для каждой вершины  $x \notin T$  имеем  $\Gamma_x \cap T \neq \emptyset$  (каждая вершина вне  $T$  соединена с  $T$ ). Если  $\mathcal{T}$  — все внешне устойчивые множества, то  $X \in \mathcal{T}$  и  $T \in \mathcal{T} \implies A \supseteq T \implies A \in \mathcal{T}$ .

**Число внешней устойчивости**

$$\beta(G) = \min_{T \in \mathcal{T}} |T|$$

(минимальное внешне устойчивое множество).

**Алгоритм нахождения наименьшего внешне устойчивого множества**

1. Удаляем вершину  $x$ , если  $\Delta x \subseteq \Delta y$  для  $y \neq x$  (вершина  $y$  заменяет  $x$ ). Пример: удаляем  $c, d, f$ .
2. Если есть висячее ребро  $(x, y)$ , то  $x \in T$ . Пример:  $a \in T$ .
3. Исключаем  $a$  и  $\Delta a = \{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ .
4. Повторяем шаги 1 и 2. Если граф неприводим, временно добавляем в  $T$  вершину, например  $b$ .
5. Исключаем  $b$  и  $\Delta b = \{a, e, f\}$ .
6. Упрощаем граф: исключаем  $g$ , так как  $\Delta g \subseteq \Delta e = \{g\}$ . Включаем  $e$  в  $T$ , получаем  $T = \{a, b, e\}$ .

## 19. Ядро графа

Пусть  $G = (X, \Gamma)$  — конечный или бесконечный граф. Множество  $S \subseteq X$  называется *ядром* графа, если  $S$  устойчиво как внутренне, так и внешне, т.е. если

$$x \in S \Rightarrow \Gamma x \cap S = \emptyset, \quad (1)$$

$$x \notin S \Rightarrow \Gamma x \cap S \neq \emptyset. \quad (2)$$

Из условия (1) следует, что ядро  $S$  не содержит петель. Из условия (2) — что  $S$  содержит все такие вершины  $x$ , для которых  $\Gamma x = \emptyset$ . Пустое множество  $\emptyset$  не может быть ядром.

### Теорема 1

Если  $S$  — ядро графа  $(X, \Gamma)$ , то множество  $S$  — максимальное в семействе  $\mathfrak{S}$  внутренне устойчивых множеств, т.е.

$$A \in \mathfrak{S}, A \supseteq S \Rightarrow A = S$$

### Теорема 2

В симметрическом графе без петель каждое максимальное множество семейства  $\mathfrak{S}$  внутренне устойчивых множеств представляет собой ядро.

### Следствие

Симметрический граф без петель обладает ядром.

### Характеристическая функция

Функция  $\varphi_S(x)$  множества  $S$  определяется как:

$$\varphi_S(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x \in S \\ 0, & \text{при } x \notin S \end{cases}$$

### Теорема 3

Для того чтобы множество  $S$  было ядром, необходимо и достаточно чтобы для характеристической функции  $\varphi_S(x)$  выполнялось соотношение

$$\varphi_S(x) = 1 - \max_{y \in \Gamma x} \varphi_S(y)$$

### Теорема 4

Прогрессивно конечный граф обладает ядром.

### Теорема Ричардсона

Конечный граф, не содержащий контуров нечетной длины, обладает ядром.

## 20. Игры на графе, игра НИМ

**Определение игры на графе** Граф  $(X, \Gamma)$  дает возможность определить некоторую игру двух игроков, которых мы назовем  $(A)$  и  $(B)$ . Положениями этой игры служат вершины графа, начальная вершина  $x_0$  выбирается жребием, и противники играют поочередно: сперва игрок  $(A)$  выбирает вершину  $x_1$  в множестве  $\Gamma x_0$ , затем  $(B)$  выбирает вершину  $x_2$  в множестве  $\Gamma x_1$ , после этого  $(A)$  опять выбирает вершину  $x_3$  в  $\Gamma x_2$ , и т.д. Если один из игроков выбрал вершину  $x_n$ , для которой  $\Gamma x_n = \emptyset$ , то партия оканчивается, игрок, выбравший вершину последним, выиграл, а его противник проиграл. Ясно, что если граф не является прогрессивно конечным (граф, в котором любая последовательность вершин заканчивается), то партия может никогда не окончиться.

**Игра НИМ** В честь известного развлечения, которое здесь обобщено, будем описанную только что игру называть *игрой Ним*, а определяющий ее граф обозначать через  $(X, \Gamma)$ ; сейчас наша задача состоит в том, чтобы охарактеризовать выигрышные положения, т.е. те вершины графа, выбор которых обеспечивает выигрыш партии независимо от ответов противника.

**Теорема 1.** Если граф имеет ядро  $S$  (множество вершин, из которых можно выиграть), и если один из игроков выбрал вершину в ядре, то этот выбор обеспечивает ему выигрыш или ничью.

Действительно, если игрок  $(A)$  выбрал вершину  $x_1 \in S$ , то либо  $\Gamma x_1 = \emptyset$ , и тогда он уже выиграл партию, либо его противник  $(B)$  вынужден выбрать вершину  $x_2 \in X \setminus S$ , а значит, следующим ходом игрок  $(A)$  может выбрать  $x_3$  опять в  $S$  и продолжать в том же духе. Если в какой-либо определенный момент один из игроков выбрал вершину  $x_n$ , для которой  $\Gamma x_n = \emptyset$ , то  $x_n \in S$ , и выигравшим партнером необходимо является  $(A)$ .

**Метод вычисления выигрышных позиций** Основной метод для хорошего игрока состоит, следовательно, в вычислении какой-либо функции Гранди (функция, определяющая выигрышные позиции), если она существует, с помощью этой функции  $g(x)$  получаем ядро

$$S = \{x | g(x) = 0\}$$

рассматриваемого графа. Если начальная вершина  $x_0$  такова, что  $g(x_0) = 0$ , то игрок  $(A)$  находится в критическом положении, ибо его противник может обеспечить себе выигрыш или ничью. Напротив, если  $g(x_0) \neq 0$ , то игрок  $(A)$  сам обеспечивает себе выигрыш или ничью, выбирая такую вершину  $x_1$ , что  $g(x_1) = 0$ .

**Следствие.** Если граф прогрессивно конечен, то существует одна и

только одна функция Гранди  $g(x)$ , каждый выбор такой вершины  $y$ , для которой  $g(y) = 0$ , является выигрышным, а каждый выбор такой вершины  $z$ , что  $g(z) \neq 0$ , — проигрышным. (Непосредственно)