Лекция 9

Асимптотические методы теории нелинейных колебаний

Разложение в ряд по параметру нелинейности.
Осциллятор с квадратичной нелинейностью
Случаи, когда удается найти точные решения в явной аналитической форме, которым была посвящена предыдущая лекция, представляют, скорее, исключение из правил. Поэтому в теории колебаний разработан богатый арсенал приближенных или асимптотических методов. Основные идеи наиболее важных из них будут рассмотрены в настоящей главе.

Начнем с осциллятора с квадратичной нелинейностью

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^2 = 0 \tag{9.1}$$

Как было показано в лекции 8, это уравнение можно привести к универсальному виду, не содержащему параметров. Однако здесь для наших целей больше подходит несколько иная нормировка переменных. Пусть известен некоторый характерный масштаб колебаний A. Введем безразмерные время и координату следующим образом:

$$t' = \omega_0 t, x' = x/A. \tag{9.2}$$

Уравнение (9.1) примет вид (штрихи у безразмерных переменных опускаем)

$$\ddot{x} + x + \varepsilon x^2 = 0, \tag{9.3}$$

где $\varepsilon = \alpha A/\omega_0^2$. Рассмотрим случай слабой нелинейности, когда $\varepsilon \ll 1$, т.е. уравнение (9.3) содержит малый параметр. Вообще, следует отметить, что условием применимости любого асимптотического метода является присутствие в уравнении малого (или большого) параметра.

Уравнение (9.3) близко к уравнению линейного консервативного осциллятора, оно отличается от него малым слагаемым порядка ε. Поэтому интуитивно ясно, что решение будет иметь вид квазигармонических (т.е. почти гармонических, близких к гармоническим) колебаний. Попробуем построить приближенное решение уравнения (9.3). Наиболее простой способ, очевидно, состоит в том, чтобы искать решение в виде ряда по степеням малого параметра ε :

$$x(t) = x_1(t) + \varepsilon x_2(t) + \varepsilon^2 x_3(t) + \ldots \tag{9.4}$$

считая $x_{1,2,..}$ величинами порядка единицы. В литературе подобный прием называют методом разложения по малому параметру или прямым разложением. Подставив ряд (9.4) в уравнение (9.3), получим

$$\ddot{x}_1 + \varepsilon\ddot{x}_2 + \varepsilon^2\ddot{x}_3 + \ldots + x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^2 x_3 + \ldots + \varepsilon x_1^2 + 2\varepsilon^2 x_1 x_2 + \ldots = 0. \quad (9.5)$$

Приравнивая в (9.5) к нулю члены при одинаковых степенях ε, приходим к системе «зацепляющихся» уравнений

$$\varepsilon^0 : \ddot{x}_1 + x_1 = 0, \quad (9.6)$$

$$\varepsilon^1 : \ddot{x}_2 + x_2 + x_1^2 = 0, \quad (9.7)$$

$$\varepsilon^2 : \ddot{x}_3 + x_3 + 2x_1 x_2 = 0, \quad (9.8)$$

Уравнение (9.6) есть уравнение гармонического осциллятора, решение которого имеет вид

$$x_1 = a\cos(t + \varphi), \quad (9.9)$$

где амплитуда a и начальная фаза φ — постоянные, определяемые из начальных условий. Далее подставим решение (9.9) в уравнение (9.7), чтобы найти x_2 :

$$\ddot{x}_2 + x_2 = -x_1^2 = -\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2}\cos 2(t + \varphi) \quad (9.10)$$

Это уравнение формально совпадает с уравнением линейного консервативного осциллятора под внешним воздействием. Его решение следует искать в виде

$$x_2 = x_2^{(o)} + x_2^{(h)}, \quad (9.11)$$

где

$$x_2^{(o)} = a_1 \cos(t + \varphi_1) \quad (9.12)$$

- решение однородного уравнения, описывающее собственные колебания осциллятора. Его амплитуда a_1 и начальная фаза φ_1 по-прежнему определяются из начальных условий. Второе слагаемое $x_2^{(h)}$ есть частное решение неоднородного уравнения. Оно

представляет собой вынужденные колебания осциллятора, т.е. отклик на внешнее воздействие. Как мы знаем из теории линейных колебаний, в спектре вынужденных колебаний будут содержаться те частоты, которые присутствуют в спектре вынуждающей силы. В данном случае это нулевая (постоянная составляющая) и вторая гармоники. Нетрудно найти, что

$$x_2^{(t)} = -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{6}\cos 2(t + \varphi). \quad (9.13)$$

Итак

$$x_2 = a_1 \cos(t+\varphi_1) - \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{6}\cos 2(t+\varphi) \tag{9.14}$$

Отметим, что полученное нами решение содержит четыре независимых постоянных $(a, \varphi, a_1, \varphi_1)$, для определения которых имеются только два начальных условия. Поэтому можно две из этих постоянных выбрать произвольным образом. Наиболее удобно положить $a_1 = 0$. В дальнейшем для простоты условимся во всех высших порядках малости полагать составляющие, соответствующие собственным колебаниям, равными нулю.

Таким образом, окончательный вид решения с точностью до членов порядка ε^2 таков:

$$x \approx a\cos(t+\varphi) + \varepsilon\left[-\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{6}\cos 2(t+\varphi)\right] + \ldots. \tag{9.15}$$

Как видно из выражения (9.15), в спектре колебаний появляются высшие гармоники: нулевая и вторая, амплитуды которых имеют порядок εa^2, т.е. много меньше амплитуды основной составляющей. Можно продолжить описанную процедуру, продвигаясь во все более высокие порядки малости. В решении появятся и другие гармоники: третья, четвертая и т.д. Однако их амплитуды будут еще меньше (порядка $\varepsilon^{n-1}a^n$, где $n-$ номер гармоники). Действительно, поскольку нелинейность является слабой, амплитуды высших гармоник должны быстро уменьшаться с ростом их номера.

Остается только вычислить константы a и φ. Пусть начальные условия имеют вид

$$x(0) = x_0, \dot{x}(0) = y_0. \tag{9.16}$$

Тогда, используя выражение (9.15), легко найти, что

$$\begin{gathered} a\cos\varphi - \varepsilon\left[\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{6}\cos 2\varphi\right] = x_0 \\ a\sin\varphi + \frac{\varepsilon a^2}{3}\sin 2\varphi = -y_0. \end{gathered} \tag{9.17}$$

Это система трансцендентных уравнений, получить точное решение которой в общем случае не удается. Однако, учитывая, что в (9.17) содержится малый параметр, можно представить решение в виде рядов

$$\begin{aligned} a &= a_0 + \varepsilon a_1 + \ldots \\ \varphi &= \varphi_0 + \varepsilon\varphi_1 + \ldots \end{aligned} \tag{9.18}$$

В разложениях (9.18) нужно учитывать то же число членов, что и в решении (9.15). Пытаться найти a и φ с более высокой степенью точности, очевидно, просто не имеет смысла.

Итак, подставим (9.18) в систему (9.17) и выделим члены одинаковых порядков малости. В нулевом порядке по ε будем иметь

$$a_0 \cos\varphi_0 = x_0 \qquad (9.19)$$
$$a_0 \sin\varphi_0 = -y_0$$

откуда нетрудно найти, что

$$a_9 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$$
$$\varphi_0 = \arg(x - iy) = -2\,\mathrm{arctg}\,\frac{y_0}{x_0 + \sqrt{x_0^2 + y_0^2}}. \qquad (9.20)$$

Члены порядка ε в (9.17) дают

$$a_1 \cos\varphi_0 - a_0\varphi_1 \sin\varphi_0 - \frac{a_0^2}{2} + \frac{a_0^2}{6}\cos 2\varphi_0 = 0 \qquad (9.21)$$
$$a_1 \sin\varphi_0 + a_0\varphi_1 \cos\varphi_0 + \frac{a^2}{3}\sin 2\varphi = 0$$

Это система линейных уравнений относительно a_1, φ_1, найти решение которой не представляет труда. Мы предлагаем читателю проделать это самостоятельно.

Разложение по степеням параметра нелинейности. Осциллятор Дуффинга

Столь простой подход, как прямое разложение по степеням малого параметра, не всегда приводит к успеху. Чтобы показать это, рассмотрим осциллятор Дуффинга (осциллятор с кубической нелинейностью)

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = 0. \qquad (9.22)$$

Вновь используем замену переменных (9.2). Тогда уравнение (9.22) примет вид

$$\ddot{x} + x + \varepsilon x^3 = 0, \qquad (9.23)$$

где теперь $\varepsilon = \beta A^2/\omega_0^2$. Как и прежде, будем рассматривать случай слабой нелинейности, т.е. $\varepsilon \ll 1$. Отыскивая решение в виде (9.4), вместо уравнений (9.6)-(9.8) будем иметь

$$\varepsilon^0 : \ddot{x}_1 + x_1 = 0, \qquad (9.24)$$
$$\varepsilon^1 : \ddot{x}_2 + x_2 + x_1^3 = 0. \qquad (9.25)$$

В нулевом порядке по ε, естественно, по-прежнему получаем уравнение гармонического осциллятора, решение которого имеет вид (9.9). Попытаемся найти x_2. После подстановки выражения для x_1 (9.9) уравнение (9.7) приводится к виду

$$\ddot{x}_2 + x_2 = -x_1^3 = -a^3 \cos^3(t+\varphi) = -\frac{a^3}{4}[3\cos(t+\varphi) + \cos 3(t+\varphi)]. \quad (9.26)$$

Нужно найти решение этого уравнения, соответствующее вынужденным колебаниям в членах высшего порядка. Поскольку нелинейность кубичная, в данном случае в спектре внешнего воздействия содержатся первая и третья гармоники. Решение будем искать в виде суперпозиции откликов на эти воздействия:

$$x_2 = x_2^{(1)} + x_2^{(3)}, \quad (9.27)$$

где $x_2^{(1)}$ и $x_2^{(3)}$ удовлетворяют уравнениям

$$\ddot{x}_2^{(1)} + x_2^{(1)} = -\frac{3a^3}{4}\cos(t+\varphi), \quad (9.28)$$

$$\ddot{x}_2^{(3)} + x_2^{(3)} = -\frac{a^3}{4}\cos 3(t+\varphi). \quad (9.29)$$

Решение уравнения (9.29) находится без труда и имеет вид гармонических колебаний на частоте вынуждающей силы:

$$x_2^{(3)} = \frac{a^3}{32}\cos 3(t+\varphi). \quad (9.30)$$

Что же касается уравнения (9.28), то в нем внешнее воздействие имеет частоту, равную частоте собственных колебаний осциллятора. Как известно из теории линейных колебаний, в этом случае возникает резонанс, выражающийся в неограниченном нарастании амплитуды колебаний по линейному закону. Соответствующее решение имеет вид

$$x_2^{(1)} = -\frac{3a^3 t}{8}\sin(t+\varphi) \quad (9.30)$$

Это так называемый секулярный или вековой член. (Термин берет свое начало из небесной механики.) Окончательный вид решения с точностью до членов второго порядка малости таков:

$$x \approx a\cos(t+\varphi) + \varepsilon\left[-\frac{3a^3 t}{8}\sin(t+\varphi) + \frac{a^3}{32}\cos 3(t+\varphi)\right] + \dots \quad (9.31)$$

Обратим внимание, что, как бы ни был мал параметр ε, с течением времени второй член в решении (9.31), неограниченно нарастая, становится больше первого. Таким образом, справедливость разложения (9.4) на больших временах нарушается, или, как говорят математики, разложение не является равномерно пригодным по t. Это явно нефизический результат. Действительно, как мы показали в лекции 8, решения уравнения Дуффинга имеют вид периодических нелинейных колебаний, и никакого нарастания амплитуды со временем нет.

В чем же причина неудачного результата? Дело в том, что колебания осциллятора Дуффинга являются неизохронными, т.е. их период зависит от амплитуды. Разложение (9.4) принципиально не учитывает неизохронность: в спектре колебаний могут появиться только собственная частота линейных колебаний и её гармоники.

Для осциллятора с квадратичной нелинейностью (9.3) мы на самом деле пришли бы к аналогичному результату, если бы продвинулись в вычислениях ещё на один порядок. Как видно из уравнения (9.8), при попытке найти решение для x_3 в правой части появится произведение x_1x_2. Поскольку выражение для x_1 (9.9) содержит первую гармонику, а выражение для x_2 (9.13) - вторую, их произведение будет содержать первую и третью гармоники. Следовательно, в решении для x_3 мы также получим секулярно растущее слагаемое.

Метод Линштедта - Пуанкаре

Итак, необходимо модифицировать схему решения таким образом, чтобы можно было учесть неизохронность. Наиболее простой способ был предложен А. Линштедтом (1883) и А. Пуанкаре (1892). Введем в уравнении (9.23) новую временную переменную $\tau = \omega t$. Поскольку $d/dt = \omega d/d\tau$, получим

$$\omega^2 x'' + x + \varepsilon x^3 = 0 \tag{9.32}$$

Здесь штрихами обозначены производные по τ. Будем искать решение уравнения (9.32) в виде разложений в степенной ряд как для переменной x, так и для частоты ω :

$$\begin{aligned} x &= x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^2 x_3 + \ldots \\ \omega &= 1 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \ldots \end{aligned} \tag{9.33}$$

Первый член в разложении для ω должен представлять собой частоту линейных колебаний, которая в принятой нормировке равна единице. Последующие поправки $\omega_1, \omega_2, \ldots$ будут описывать эффекты неизохронности.

Подставим разложения (9.33) в уравнение (9.32). Получим

$$\begin{aligned} &\left[1 + 2\varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\left(\omega_1^2 + 2\omega_2\right) + \ldots\right]\left[x_1'' + \varepsilon x_2'' + \ldots\right] + \\ &\quad + x_1 + \varepsilon x_2 + \ldots \varepsilon x_1^3 + 3\varepsilon^2 x_1^2 x_2 + \ldots = 0 \end{aligned} \tag{9.34}$$

Преобразуем уравнение (9.34). После несложных вычислений приведем его к виду

$$x_1'' + x_1 + \varepsilon\left(x_2'' + x_2 + 2\omega_1 x_1'' + x_1^3\right) + \ldots = 0 \tag{9.35}$$

Приравнивая к нулю члены нулевого и первого порядков малости, будем иметь

$$x_1'' + x_1 = 0, \tag{9.36}$$

$$x_2'' + x_2 = -2\omega_1 x_1'' - x_1^3. \tag{9.37}$$

Решение уравнения (9.36) запишем в виде

$$x_1 = a\cos(\tau + \varphi) = a\cos(\omega t + \varphi) \tag{9.38}$$

Подставив это соотношение в правую часть (9.37), найдем, что

$$x_2'' + x_2 = 2\omega_1 a\cos(\tau + \varphi) - \frac{a^3}{4}[3\cos(\tau + \varphi) + \cos 3(\tau + \varphi)]. \tag{9.39}$$

Теперь необходимо выбрать ω_1 таким образом, чтобы устранить члены, пропорциональные $\cos(\tau + \varphi)$, которые приводят к секулярному росту решения для x_2. Для этого, очевидно, следует положить

$$\omega_1 = \frac{3a^2}{8} \tag{9.40}$$

Теперь уравнение (9.39) принимает вид

$$x_2'' + x_2 = -\frac{a^3}{4}\cos 3(\tau + \varphi) \tag{9.41}$$

Его решение

$$x_2 = \frac{a^3}{32}\cos 3(\tau + \varphi) \tag{9.42}$$

не содержит секулярных составляющих и разложение остается равномерно пригодным при всех t.

Окончательный вид найденного нами решения с точностью до членов порядка ε^2 таков (ср. (9.31)):

$$x \approx a\cos(\omega t + \varphi) + \frac{\varepsilon a^3}{32}\cos 3(\omega t + \varphi), \tag{9.43}$$

$$\omega \approx 1 + \frac{3\varepsilon a^2}{8}. \tag{9.44}$$

Если параметр ε считается положительным, то частота колебаний растет с ростом амплитуды, при $\varepsilon < 0$ частота, наоборот, уменьшается.

Отметим, что в отличие от осциллятора с квадратичной нелинейностью в спектре колебаний в первую очередь появляется не вторая, а третья гармоника. Если продолжать разложения далее, то можно убедиться, что спектр будет содержать только нечетные гармоники. Это является следствием симметрии уравнения Дуффинга относительно замены $x \to -x$. Аналогичный результат мы получили при анализе колебаний математического маятника (лекция 7).

Задача 9.1. Получите оценку для частоты слабонелинейных колебаний (9.44) из точного решения, найденного в лекции 8.

Решение. В случае $\varepsilon > 0$ для периода справедливо соотношение (8.34). Заменив в этой формуле x_0^2 приближенно на величину εa^2, найдем, что

$$T = \frac{4K(m)}{\sqrt{1+\varepsilon a^2}}, m^2 = \frac{\varepsilon a^2}{2\left(1+\varepsilon a^2\right)} \tag{9.45}$$

где $K(m)$ - полный эллиптический интеграл первого рода. С учетом малости ε имеем $m^2 \approx \varepsilon a^2/2$.
Получим приближенное выражение для $K(m)$ при малых значениях m. В этом случае

$$K(m) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1-m^2\sin^2\psi}} \approx \int_0^{\pi/2} \left(1+\frac{m^2}{2}\sin^2\psi\right) d\psi \tag{9.46}$$

Интеграл (9.46) легко вычисляется:

$$K(m) \approx \frac{\pi}{2}\left(1+\frac{m^2}{4}\right) = \frac{\pi}{2}\left(1+\frac{\varepsilon a^2}{8}\right). \tag{9.47}$$

Подставив это выражение в формулу (9.45) и ограничиваясь членами порядка ε, будем иметь

$$T \approx 2\pi\left(1+\frac{\varepsilon a^2}{8}\right)\left(1-\frac{\varepsilon a^2}{2}\right) \approx 2\pi\left(1-\frac{3\varepsilon a^2}{8}\right). \tag{9.48}$$

Тогда видно, что частота $\omega = 2\pi/T$ совпадает с формулой (9.44).
В случае $\varepsilon < 0$ период колебаний определяется формулой (8.42), которую можно приближенно записать в виде

$$T = \frac{4K(m)}{\sqrt{1-|\varepsilon|a^2/2}}, m^2 = \frac{|\varepsilon|a^2}{2\left(1-|\varepsilon|a^2/2\right)} \approx \frac{|\varepsilon|a^2}{2} \tag{9.49}$$

С учетом выражения (9.47) получаем

$$T \approx 2\pi\left(1+\frac{|\varepsilon|a^2}{8}\right)\left(1+\frac{|\varepsilon|a^2}{4}\right) \approx 2\pi\left(1+\frac{3|\varepsilon|a^2}{8}\right) = 2\pi\left(1-\frac{3\varepsilon a^2}{8}\right) \tag{9.50}$$

Следовательно, для частоты снова приходим к формуле(9.44).
На рис. 9.1 для сравнения приведены зависимости $x(t)$, полученные по различным приближенным методикам, и точное решение (8.36). Параметр a выбран равным 0.5 , т.е. нелинейность, вообще говоря, достаточно сильная. Тем не менее, решение (9.43), полученное методом Линштедта - Пуанкаре, достаточно хорошо согласуется с точным решением. В то же время зависимость $x(t)$, построенная согласно формуле (9.31), демонстрирует очевидный рост амплитуды по линейному закону, и уже на временах порядка периода колебаний расхождение становится существенным.

Задача 9.2 Приведите приближенно задачу о движении частицы в потенциальной яме вида $U(x) = U_0 \operatorname{tg}^2 \alpha x$ к модели осциллятора с кубической нелинейностью. В рамках этой модели найдите зависимость периода колебаний от частоты. Сравните полученный результат с точным (задача 4.6), построив соответствующую таблицу.