Homework #5

Due: 2024-5-28 00:00 | 1 Questions, 100 Pts

Name: 彭博

Question 1 (100') (梳状函数). 如课件 26-28 页所示，梳状函数被定义为：

$$C_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

1. 试证明周期为 T 的梳状函数的傅里叶变换是周期为 $\frac{2\pi}{T}$ 的梳状函数，即：

$$\mathcal{F}(C_T(t)) = \frac{1}{T} C_{\frac{2\pi}{T}}(\omega).$$

2. 试证明任意函数 $F(\omega)$ 卷积梳状函数 $C_{\frac{2\pi}{T}}(\omega)$ 等价于将 $F(\omega)$ 每隔 $\frac{2\pi}{T}$ 平移复制一份后再叠加。

◀

Answer. 1. 对梳妆函数 $C_T(t)$ 使用傅里叶级数进行展开，得到

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) e^{-in\omega t} \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) e^{-in\omega t} \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{T} \end{aligned} \tag{1}$$

$$C_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\omega t} \tag{2}$$

其中

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{3}$$

对于级数求和项 $\sum e^{in\omega t}$，我们可以使用 Delta 函数的积分恒等式进行变形

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\omega t} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\frac{2\pi}{T}nt} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{T} n\right) e^{i\omega t} \, \mathrm{d}\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} C_{\frac{2\pi}{T}}(\omega) e^{i\omega t} \, \mathrm{d}\omega \end{aligned} \tag{4}$$

因此有

$$C_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\omega t} = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} C_{\frac{2\pi}{T}}(\omega) e^{i\omega t} \, \mathrm{d}\omega \tag{5}$$

对比傅里叶变换的公式可以得到

$$\mathcal{F}(C_T(t)) = \frac{1}{T} C_{\frac{2\pi}{T}}(\omega) \tag{6}$$

2. 根据卷积的定义有

$$\begin{aligned}
\left(\mathcal{F} * C_{\frac{2\pi}{T}}\right)(\omega) &= \int \mathcal{F}(\tau) C_{\frac{2\pi}{T}}(\omega - \tau)\ \mathrm{d}\tau \\
&= \int \mathcal{F}(\tau) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \tau - n\frac{2\pi}{T}\right)\ \mathrm{d}\tau \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\left(\omega - n\frac{2\pi}{T}\right)
\end{aligned} \tag{7}$$

对于级数内的每一项，$\mathcal{F}\left(\omega - n\frac{2\pi}{T}\right)$ 的意义是将函数 $\mathcal{F}(\omega)$ 平移了 $n\frac{2\pi}{T}$。因此卷积 $\left(\mathcal{F} * C_{\frac{2\pi}{T}}\right)(\omega)$ 相当于把函数 $\mathcal{F}(\omega)$ 每隔 $\frac{2\pi}{T}$ 平移复制一份后再叠加。

$\triangleleft$