Homework #2

Due: 2024-4-30 00:00 | 4 Questions, 100 Pts

Name: 彭博

说明：只需完成 60 分的内容即可满足本次作业的要求。

Question 1 (20') (欧拉角表示). 试证明内旋效果等价于颠倒顺序后的外旋效果（课件第 29 页）。具体地，试证明按照 $x - y' - z''$ 依次转动 α, β, γ 的内旋效果与按照 $z - y - x$ 依次转动 γ, β, α 的外旋效果等价。 ◀

Answer. 记使用内旋得到的旋转矩阵为 R_{in}，外旋对应的旋转矩阵为 R_{ex}。首先考虑内旋的情况：初始状态局部坐标系与世界坐标系重合，此时空间中一点 p 经过绕 x 轴旋转 α 角度后在世界坐标系下的坐标为:

$$p_w = R_X(\alpha) p_l^1 \tag{1}$$

其中，p_w 为点 p 在世界坐标系下的坐标；p_l^1 为第一次旋转后的局部坐标。接下来考虑第二次旋转:

$$p_l^1 = R_Y(\beta) p_l^2 \tag{2}$$

类似地，第三次旋转的坐标变换关系为:

$$p_l^2 = R_Z(\gamma) p_l^3 \tag{3}$$

在局部坐标系下，p 点的坐标保持不变，即 $p_l^3 = p$。将上面三个式子结合起来可以得到:

$$\begin{aligned} p_w &= R_X(\alpha) p_l^1 \\ &= R_X(\alpha) R_Y(\beta) p_l^2 \\ &= R_X(\alpha) R_Y(\beta) R_Z(\gamma) p_l^3 \\ &= R_X(\alpha) R_Y(\beta) R_Z(\gamma) p \end{aligned} \tag{4}$$

因此使用内旋进行旋转时，每次旋转相当于右乘一个旋转矩阵，这样得到内旋对应的旋转矩阵为：

$$R_{in} = R_X(\alpha) R_Y(\beta) R_Z(\gamma) \tag{5}$$

而在使用外旋进行旋转时，由于旋转轴是固定的，每次旋转都是在旋转后的位置重新绕世界坐标轴旋转。因此每次旋转相当于左乘一个旋转矩阵，这样得到外旋的旋转矩阵为:

$$R_{ex} = R_X(\alpha) R_Y(\beta) R_Z(\gamma) \tag{6}$$

显然 R_{in} 和 R_{ex} 这两个矩阵是是相等的，因此内旋效果等价于颠倒顺序后的外旋效果。 ◁

Question 2 (20') (轴角表示、四元数表示). 试证明轴角表示下的相对旋转插值（课件第 37 页）与四元数表示的 Slerp 插值（课件第 52 页）等价。具体来说，你需要推导出两种插值方法在 t 时刻的旋转轴 $\boldsymbol{u}_t$ 和旋转角度 θ_t 是相同的，从而得到二者的旋转矩阵 $\mathbf{R}_t$ 相同。 ◀

Answer. 设相对旋转为 R，则根据 Rodrigues 公式可以得到旋转轴 $\boldsymbol{u}$ 和角度 θ。使用轴角表示下的相对旋转插值时，旋转轴 $\boldsymbol{u}$ 保持不变，而 $t \in [0,1]$ 时刻的旋转角度为:

$$\theta_t = t \cdot \theta \tag{7}$$

它对应的四元数表示为:

$$q_t = \left(\cos \frac{t\theta}{2}, \sin \frac{t\theta}{2} \boldsymbol{u} \right) \tag{8}$$

根据 Slerp 插值公式，t 时刻对应的旋转四元数为:

$$\begin{aligned}
q_t' &= \frac{\sin \frac{(1-t)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} q_0 + \frac{\sin \frac{t\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} q_1 \\
&= \left(\frac{\sin \frac{(1-t)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} + \frac{\sin \frac{t\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \cos \frac{\theta}{2}, \frac{\sin \frac{t\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \sin \frac{\theta}{2} \boldsymbol{u} \right) \\
&= \left(\frac{\sin (1-t)\frac{\theta}{2} + \sin \frac{t\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}, \sin \frac{t\theta}{2} \boldsymbol{u} \right)
\end{aligned} \tag{9}$$

对其中实部进行化简得到:

$$\begin{aligned}
\frac{\sin (1-t)\frac{\theta}{2} + \sin \frac{t\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} &= \frac{\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{t\theta}{2} - \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{t\theta}{2} + \sin \frac{t\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \\
&= \frac{\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{t\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \\
&= \cos \frac{t\theta}{2}
\end{aligned} \tag{10}$$

因此

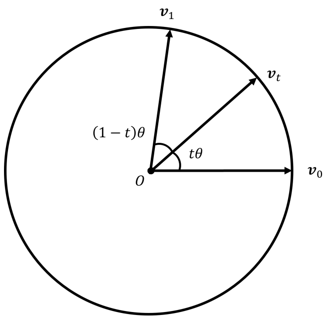
$$q_t' = \left(\cos \frac{t\theta}{2}, \sin \frac{t\theta}{2} \boldsymbol{u} \right) = q_t \tag{11}$$

这说明两种插值方法在 t 时刻会得到相同的四元数，即相同的旋转。 ◁

Question 3 (20') (四元数表示). 试证明四元数的 Slerp 公式（课件第 52 页）。具体地，已知如下图所示，四元数 v_0 与 v_1 的夹角为 θ，我们希望用 v_0 和 v_1 线性插值出四元数 v_t，即：

$$v_t = \alpha v_0 + \beta v_1$$

使得 v_0 与 v_t 的夹角为 $t\theta$，请证明 $\alpha = \frac{\sin((1-t)\theta)}{\sin(\theta)}, \beta = \frac{\sin(t\theta)}{\sin(\theta)}$。 ◀



Answer. 在 t 时刻 v_t 与 v_0 的夹角为 $t\theta$，与 v_1 的夹角为 $(1-t)\theta$。对 v_t 的表达式两边同时和 v_0 作内积得到:

$$\begin{aligned} \langle v_t, v_0 \rangle &= \langle \alpha v_0 + \beta v_1, v_0 \rangle \\ &= \alpha + \beta \langle v_0, v_1 \rangle \\ &= \alpha + \beta \cos\theta \\ &= \cos t\theta \end{aligned} \tag{12}$$

类似地，对 v_t 的表达式两边同时和 v_1 作内积得到:

$$\begin{aligned} \langle v_t, v_1 \rangle &= \alpha \cos\theta + \beta \\ &= \cos(1-t)\theta \end{aligned} \tag{13}$$

这样，得到了关于系数 α 和 β 的线性方程组:

$$\begin{cases} \alpha + \cos\theta\beta = \cos t\theta \\ \cos\theta\alpha + \beta = \cos(1-t)\theta \end{cases} \tag{14}$$

通过消元可以先解出系数 β:

$$\cos\theta(\cos t\theta - \cos\theta\beta) + \beta = \cos(1-t)\theta \tag{15}$$

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{\cos(1-t)\theta - \cos\theta\cos t\theta}{1-\cos^2\theta} \\ &= \frac{\sin\theta\sin t\theta}{\sin^2\theta} \\ &= \frac{\sin t\theta}{\sin\theta} \end{aligned} \tag{16}$$

最后代回方程组第一式可以解出系数 α:

$$\begin{aligned} \alpha &= \cos t\theta - \cos\theta\beta \\ &= \cos t\theta - \cos\theta\frac{\sin t\theta}{\sin\theta} \\ &= \frac{\sin\theta\cos t\theta - \cos\theta\sin t\theta}{\sin\theta} \\ &= \frac{\sin(1-t)\theta}{\sin\theta} \end{aligned} \tag{17}$$

◁

Question 4 (40') (代码题). 请按照代码文件夹中的 README 的要求完成代码填空。 ◀