

Homework #9

Due: 2024-7-9 00:00 | 5 Questions, 100 Pts

Name: 彭博

Question 1 (20') (常微分方程).

求解以下常微分方程：

a (5') $(y')^2 + y^2 = 1.$

b (5') $y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x.$

c (5') $xy' = \sqrt{x^6 - y^2} + 3y.$

d (5')

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y}.$$

Answer.

a

$$y' = \frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{1 - y^2} \quad (1)$$

以 $\frac{dy}{dx} = \sqrt{1 - y^2}$ 为例，通过分离变量可以得到

$$\frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = dx \quad (2)$$

两边同时积分，得到

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \arcsin y = \int dx = x + C \quad (3)$$

即

$$y = \sin(x + C) \quad (4)$$

类似地，对于 $\frac{dy}{dx} = -\sqrt{1 - y^2}$ 可以得到通解

$$y = \sin(-x + C) \quad (5)$$

b $y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x$ 是一个二阶常系数非齐次线性微分方程。首先利用特征方程计算它的通解：

$$y = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x \quad (6)$$

接下来可以构造一个特解

$$y^* = -\frac{1}{2} x e^x \cos x \quad (7)$$

整理一下得到微分方程的解为

$$y = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x - \frac{1}{2} x e^x \cos x \quad (8)$$

c 首先构造变量代换

$$y = x^3 \sin \theta \quad (9)$$

因此

$$y' = 3x^2 \sin \theta + x^3 \cos \theta \cdot \theta' \quad (10)$$

将上面两个式子代入方程，得到

$$x(3x^2 \sin \theta + x^3 \cos \theta \cdot \theta') = x^3 \cos \theta + 3x^3 \sin \theta \quad (11)$$

整理之后得到

$$x(3x^2 \sin \theta + x^3 \cos \theta \cdot \theta') = x^3 \cos \theta + 3x^3 \sin \theta \quad (12)$$

$$x \frac{d\theta}{dx} = 1 \quad (13)$$

$$\theta = \ln(Cx) \quad (14)$$

因此，微分方程的解为

$$y = x^3 \sin(\ln(Cx)) \quad (15)$$

d 使用特征根法求解矩阵微分方程。首先求出系数矩阵的特征值和特征向量分别为：

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 2, \quad (16)$$

$$\boldsymbol{\mu}_1 = (1, 1, 1), \quad \boldsymbol{\mu}_2 = (2, 1, 1), \quad \boldsymbol{\mu}_3 = (0, 1, -1), \quad (17)$$

因此，矩阵微分方程的解为

$$\mathbf{y} = C_1 \boldsymbol{\mu}_1 e^x + C_2 \boldsymbol{\mu}_2 e^{2x} + C_3 \boldsymbol{\mu}_3 e^{2x} \quad (18)$$

展开的形式为

$$\begin{cases} y_1 &= C_1 e^x + 2C_2 e^{2x} \\ y_2 &= C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{2x} \\ y_3 &= C_1 e^x + C_2 e^{2x} - C_3 e^{2x} \end{cases} \quad (19)$$

◁

Question 2 (30') (辛积分器).

人们在求解常微分方程

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

时, 使用的最简单的方法便是根据已知量来计算对应的更新量

$$y(t + \Delta t) = y(t) + \Delta t f(t_n, y_n),$$

这一方法被称为欧拉法。

对于粒子运动而言, 我们使用其位置 x 与速度 v 来表示其状态。对应地, 其上的欧拉法更新策略为

$$x(t + \Delta t) = x(t) + v(t)\Delta t,$$

$$v(t + \Delta t) = v(t) + a(x(t))\Delta t,$$

a (5') 请根据上述算法完成 `utils.py` 文件中的 `explicit_euler` 函数。你应当注意到, 由于该方法仅有一阶精度, 我们在 `ode.py` 中将每一时间步切分为了 100 个子时间步。

对于数值求解 Hamilton 方程

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p},$$

人们引入了辛积分器的概念。其中 H 为 Hamilton 量, 位置和动量坐标的集合 $z = (q, p)$ 被称为正则坐标。Hamilton 方程随时间的演化构成了一个辛同态, 即 2-形式 $dp \wedge dq$ 保持不变。如果数值积分方案能够保持这个 2-形式, 就被称为辛积分器。

对于可分离的 Hamilton 量

$$H(p, q) = T(p) + V(q),$$

我们引入算符 $D_H(\cdot) = \{\cdot, H\}$ 来返回被作用量的泊松括号, 则 Hamilton 方程可以被简化为

$$\dot{z} = D_H(z),$$

此时解为

$$z(\tau) = \exp(\tau(D_T + D_V))z(0).$$

一般而言, D_T 与 D_V 不对易, 所以不能对其展开时任意合并算符, 我们将解写为

$$\exp(\tau(D_T + D_V)) = \prod_{i=1}^k \exp(c_i \tau D_T) \exp(d_i \tau D_V) + \mathcal{O}(\tau^{k+1}).$$

其中, $\sum_{i=1}^k c_i = \sum_{i=1}^k d_i = 1$ 为实数系数, k 为积分器的阶。

应当注意到, 对于所有的 z 而言,

$$D_T^2(z) = \{\{z, T\}, T\} = \{(\dot{q}, 0), T\} = (0, 0).$$

我们可将指数上的算符转换为线性算符。即, $\exp(c_i \tau D_T)$ 对应的映射为

$$\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} q + \tau c_i \frac{\partial T}{\partial p}(p) \\ p \end{pmatrix},$$

$\exp(d_i \tau D_V)$ 对应的映射为

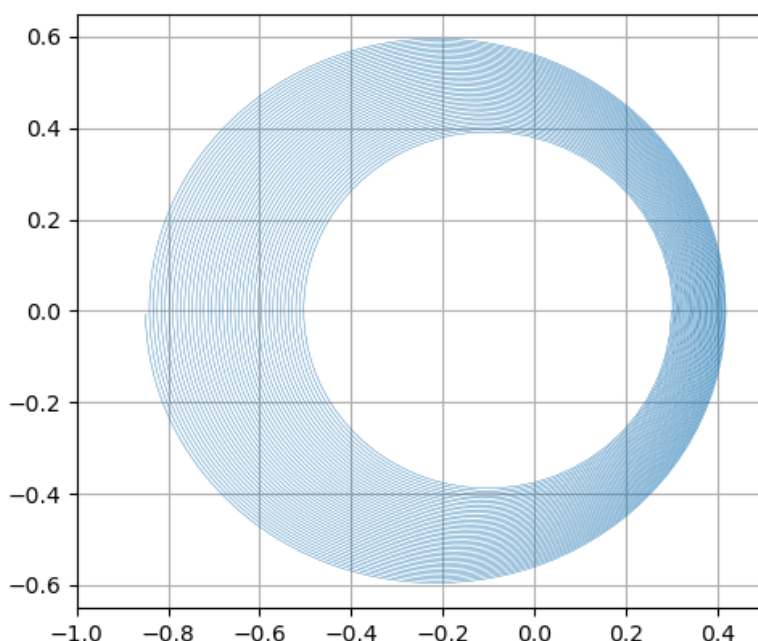
$$\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} q \\ p - \tau d_i \frac{\partial V}{\partial q}(q) \end{pmatrix}.$$

- b (10') 请根据上述描述推导出一阶的辛欧拉积分格式。
- c (10') 请根据您所推导出的一阶辛欧拉积分格式完成 `utils.py` 文件中的 `symplectic_euler` 函数。
- d (5') 请推导出一些二阶与三阶的辛欧拉积分格式并进行测试。您可以思考这些格式所对应的精度阶数。



Answer.

- a 使用显式欧拉积分得到的质点轨迹如下图所示。



- b 取积分器的阶数为 $k = 1$, 得到指数映射的形式为

$$\exp(\tau(D_T + D_V)) = \exp(\tau D_T) \exp(\tau D_V) + \mathcal{O}(\tau^2) \quad (20)$$

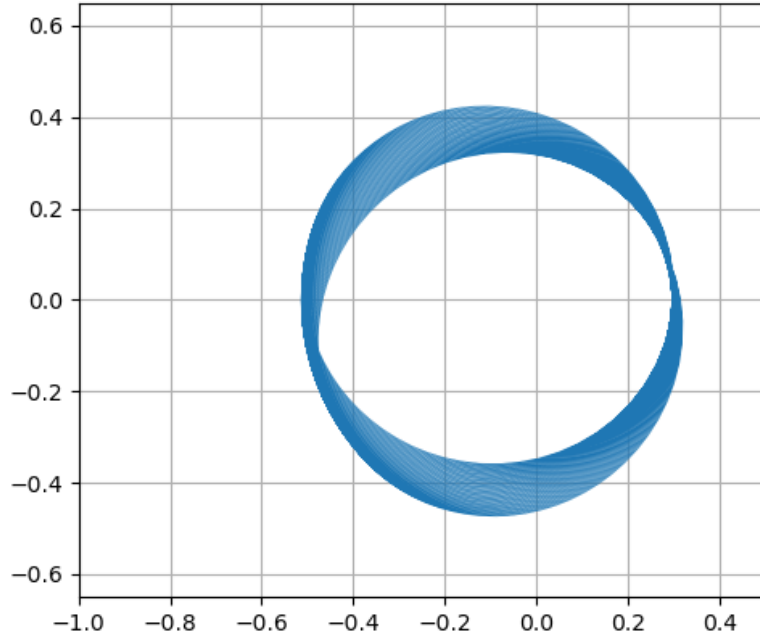
因此, Hamilton 方程的解可以近似为

$$\begin{aligned} z(\tau) &\approx \exp(\tau(D_T + D_V))z(0) \\ &= \exp(\tau D_T) \exp(\tau D_V)z(0) \end{aligned} \quad (21)$$

转换为线性算符, 得到

$$\begin{cases} p(\tau) = p(0) - \tau \frac{\partial V}{\partial q}(q(0)) \\ q(\tau) = q(0) + \tau \frac{\partial T}{\partial p}(p(\tau)) \end{cases} \quad (22)$$

- c 对于本题目中的质点系统, 一阶辛欧拉积分格式相当于先对质点速度进行更新再利用更新后的速度来更新质点的位置。使用一阶辛欧拉积分器可以得到质点的轨迹如下图所示。



d 取积分器的阶数为 $k = 2$ ，得到指数映射的形式为

$$\exp(\tau(D_T + D_V)) = \exp(c_1\tau D_T) \exp(d_1\tau D_V) \exp(c_2\tau D_T) \exp(d_2\tau D_V) + \mathcal{O}(\tau^3) \quad (23)$$

在 Verlet 积分法中，可以取 $c_1 = 0$ ， $d_1 = \frac{1}{2}$ ， $c_2 = 1$ ， $d_2 = \frac{1}{2}$ ，这样得到积分近似公式

$$z(\tau) \approx \exp(0) \exp\left(\frac{1}{2}\tau D_V\right) \exp(\tau D_T) \exp\left(\frac{1}{2}\tau D_V\right) z(0) \quad (24)$$

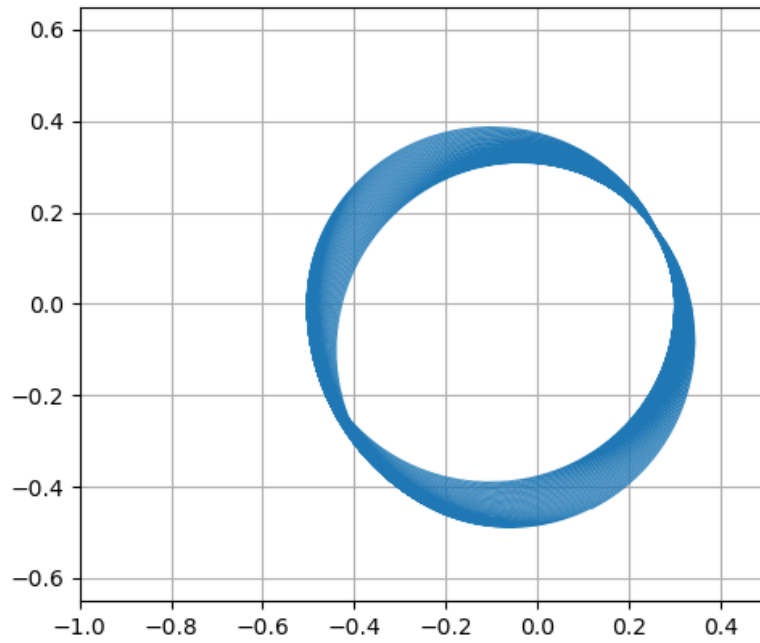
上式等价于三次更新

$$p\left(\frac{1}{2}\tau\right) = p(0) - \frac{1}{2}\tau \frac{\partial V}{\partial q}(q(0)) \quad (25)$$

$$q(\tau) = q(0) + \tau \frac{\partial T}{\partial p}\left(p\left(\frac{1}{2}\tau\right)\right) \quad (26)$$

$$p(\tau) = p' - \frac{1}{2}\tau \frac{\partial V}{\partial q}(q(\tau)) \quad (27)$$

对于本题目中的质点系统，Verlet 积分相当于先计算 $\frac{\tau}{2}$ 时刻的速度，然后用这个速度来更新 τ 时刻的位置，最后再利用更新后 τ 时刻的位置更新 τ 时刻的速度。使用二阶辛欧拉积分器可以得到质点的轨迹如下图所示。

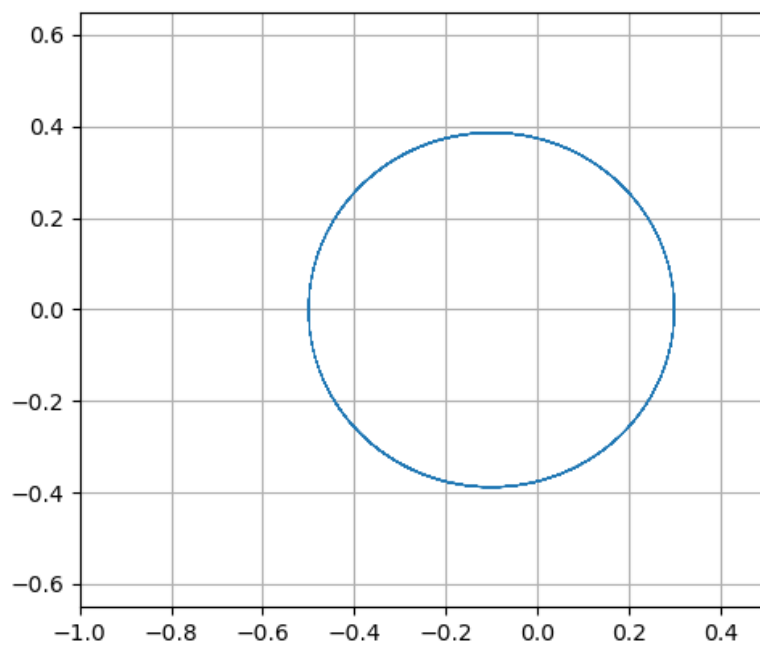


对于三阶积分器推导过程是类似的。取系数 c_i 、 d_i 分别为

$$c_1 = 1, \quad c_2 = -\frac{2}{3}, \quad c_3 = \frac{2}{3} \quad (28)$$

$$d_1 = -\frac{1}{24}, \quad d_2 = \frac{3}{4}, \quad d_3 = \frac{7}{24} \quad (29)$$

从而得到质点运动轨迹如下图所示：



通过对比可以发现，随着积分器阶数的增加质点运动轨迹的偏移量会逐渐减小。当使用三阶辛积分器时，质点运动轨迹的偏移量几乎是肉眼无法察觉的了。

<

Question 3 (20') (分离变量法).

对于一个正方形区域 $[0, 1] \times [0, 1]$ ，其上的电势满足 Laplace 方程

$$\nabla^2 \phi = 0.$$

我们为该地区设置边界条件为

$$\begin{aligned} \phi \Big|_{x=0} &= \phi \Big|_{x=1} = 1, \\ \phi \Big|_{y=0} &= \phi \Big|_{y=1} = -1. \end{aligned}$$

a (8') 请使用分离变量法求解上述方程。

b (10') 请使用 Jacobi 迭代算法数值求解上述方程，完成 `utils.py` 文件中的 `iter_jacobi` 函数。Jacobi 迭代算法的离散方案请参考 `README.md`。

c (2') 请对比数值算法求解结果与解析解之间的差。

**Answer.**

a 设 Laplace 方程的解可以表示为

$$\phi = u(x) \cdot v(y) \quad (30)$$

代入原方程得到

$$\nabla^2 \phi = v(y)u''(x) + u(x)v''(y) = 0 \quad (31)$$

两边同时除以 ϕ 得到

$$\frac{u''(x)}{u(x)} + \frac{v''(y)}{v(y)} = 0 \Rightarrow \frac{u''(x)}{u(x)} = -\frac{v''(y)}{v(y)} \quad (32)$$

此时方程左边仅是关于 x 的函数，而方程右边仅是关于 y 的函数，因此可以假定存在常数 λ 使得

$$\begin{cases} u''(x) = \lambda u(x) \\ v''(y) = -\lambda v(y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u''(x) - \lambda u(x) = 0 \\ v''(y) + \lambda v(y) = 0 \end{cases} \quad (33)$$

这样原始的 Laplace 方程就转换为两个独立的二阶常系数齐次线性微分方程，它们的解取决于 λ 的符号，而 λ 的符号还取决于 Laplace 方程的边界条件。为了继续求解，首先考虑一个边界条件：

$$\phi \Big|_{x=0} = 1, \quad \phi \Big|_{x=1} = \phi \Big|_{y=0} = \phi \Big|_{y=1} = 0, \quad (34)$$

此时可以得到 $v(y)$ 的一系列解

$$v_n(y) = \sin((n+1)\pi y), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (35)$$

接下来考虑 $u(x)$ 的解

$$u_n(x) = \sinh((n+1)\pi(x-1)) \quad (36)$$

整理之后得到

$$\phi_n(x, y) = \sinh((n+1)\pi(x-1)) \cdot \sin((n+1)\pi y) \quad (37)$$

$$\phi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sinh((n+1)\pi(x-1)) \cdot \sin((n+1)\pi y) \quad (38)$$

系数 a_n 可以通过边界条件来计算。

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{2}{\sinh(n+1)\pi} \int_0^1 \sin((n+1)\pi y) dy \\ &= \begin{cases} -\frac{4}{(n+1)\pi \cdot \sinh((n+1)\pi)}, & n \text{ 为偶数} \\ 0, & n \text{ 为奇数} \end{cases} \end{aligned} \quad (39)$$

因此, Laplace 方程在 $x=0$ 处 $\phi=1$ 其它边界 $\phi=0$ 的解为:

$$\phi_1(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sinh((n+1)\pi(x-1)) \cdot \sin((n+1)\pi y), \quad n=0, 2, 4, \dots \quad (40)$$

利用 x 和 y 的对称性, Laplace 方程在 $y=0$ 处 $\phi=-1$ 其它边界 $\phi=0$ 的解为:

$$\phi_2(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} -a_n \sinh((n+1)\pi(y-1)) \cdot \sin((n+1)\pi x), \quad n=0, 2, 4, \dots \quad (41)$$

在利用矩形区域的对称性将 x 替换为 $1-x$, 可以得到 $x=1$ 处 $\phi=1$ 其它边界 $\phi=0$ 的解为:

$$\phi_3(x, y) = \phi_1(1-x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} -a_n \sinh((n+1)\pi x) \cdot \sin((n+1)\pi y) \quad (42)$$

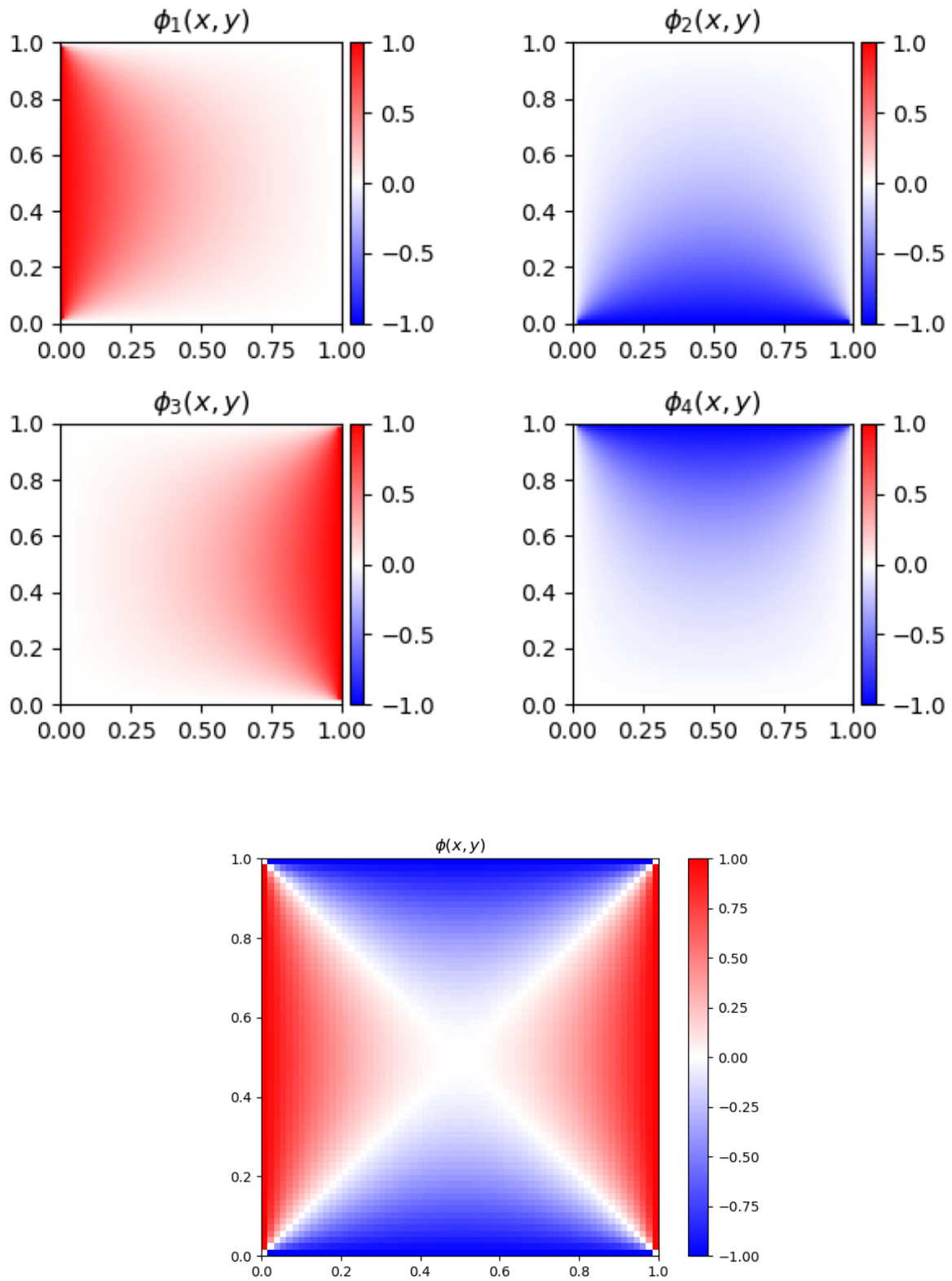
类似地, 将 y 替换为 $1-y$, 可以得到 $y=1$ 处 $\phi=-1$ 其它边界 $\phi=0$ 的解为:

$$\phi_4(x, y) = \phi_2(x, 1-y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sinh((n+1)\pi y) \cdot \sin((n+1)\pi x) \quad (43)$$

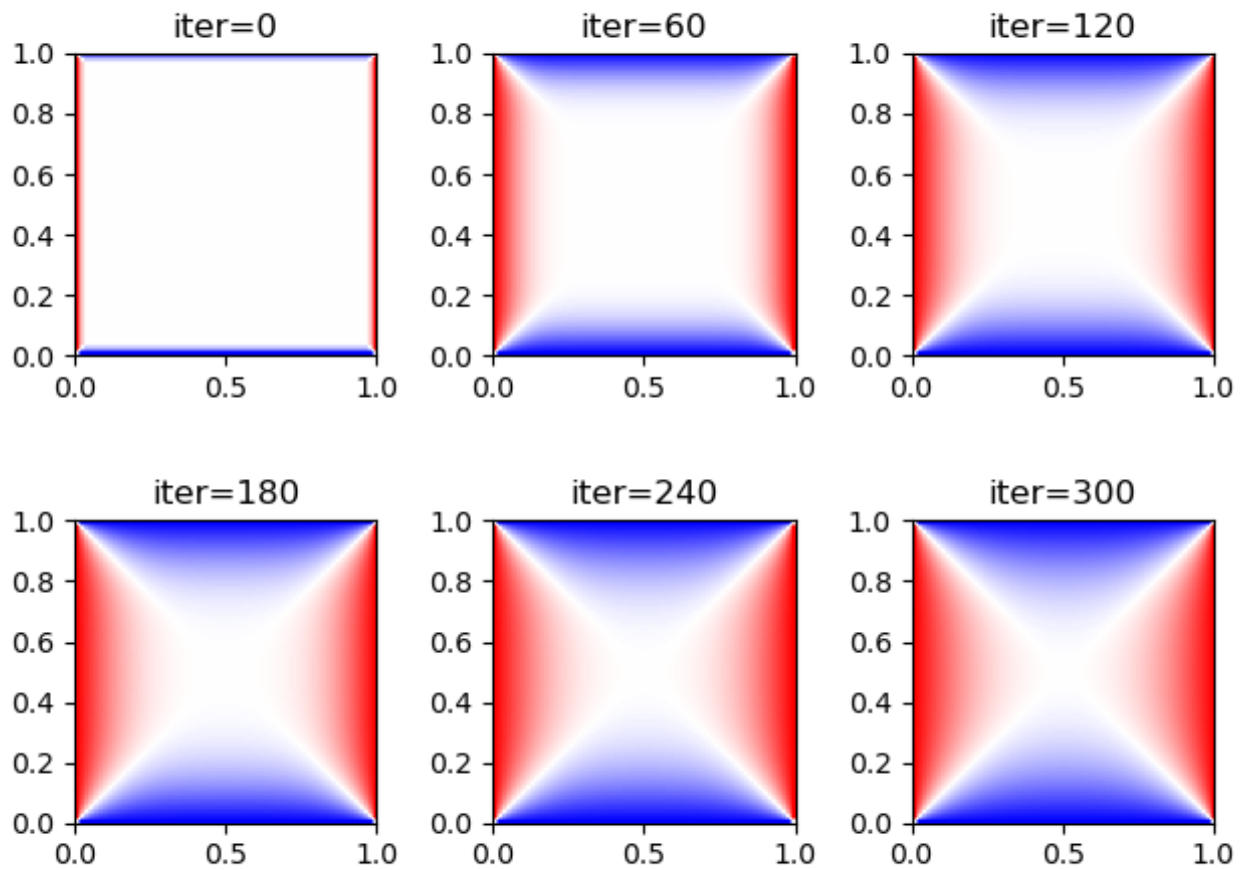
因此 Laplace 方程的解为四种边界条件下四个解的叠加

$$\phi(x, y) = \phi_1(x, y) + \phi_2(x, y) + \phi_3(x, y) + \phi_4(x, y) \quad (44)$$

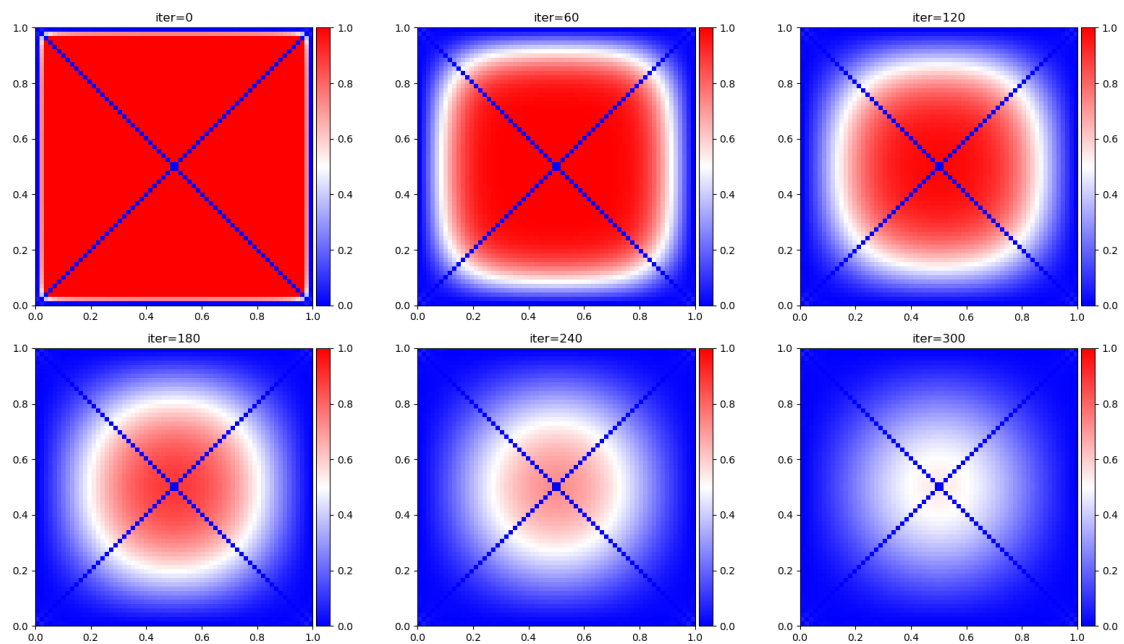
取前 100 个级数的和, 可以得到 Laplace 方程的解如下所示。



b 使用 Jacobi 迭代算法求解本题中的 Laplace 方程可以得到数值解如下图所示。



c 通过对比 Jacobi 迭代得到的数值解以及第一问中计算得到的解析解，并计算它们之间的相对误差可以得到误差分布图像如下图所示。



不难发现，在矩形区域的四条边界以及对角线上的相对误差始终为 0。随着 Jacobi 迭代步数的增加，

误差会逐渐从四条边界向中心不断减少 (红色区域向中心收缩)。经过 300 次迭代后, 矩形区域的中心仍然有很大一片区域的相对误差在 50% 以上。



Question 4 (20') (Green 恒等式).

设区域 V 内有连续可微的标量函数场 ϕ, ψ

a (5') 请证明 Green 第一恒等式

$$\int_V (\psi \nabla^2 \phi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi) dV = \oint_{\partial V} \psi \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} dA.$$

b (5') 请证明 Green 第二恒等式

$$\int_V (\psi \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \psi) dV = \oint_{\partial V} \left(\psi \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} - \phi \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} \right) dA.$$

c (5') 取 $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ 为

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

的基本解, ψ 在区域内满足拉普拉斯方程。请证明 Green 第三恒等式

$$\psi(\mathbf{r}) = \int_{\partial V} \left(\psi(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}'} - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}'} \right) dA$$

d (5') 求斜半空间 $\{(x, y, z) : ax + by + cz > 0\}$ 的 Green 函数。

◀

Answer.

a 利用矢量微分恒等式可以得到

$$\nabla \cdot (\psi \nabla \phi) = \nabla \psi \cdot \nabla \phi + \psi \nabla^2 \phi \quad (45)$$

在区域 V 上进行积分有

$$\int_V (\psi \nabla^2 \phi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi) dV = \int_V \nabla \cdot (\psi \nabla \phi) dV \quad (46)$$

对等式右边使用散度定理可以得到

$$\int_V \nabla \cdot (\psi \nabla \phi) dV = \oint_{\partial V} (\psi \nabla \phi) \cdot \mathbf{n} dA = \oint_{\partial V} \psi \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} dA \quad (47)$$

整理之后即为 Green 第一恒等式

$$\int_V (\psi \nabla^2 \phi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi) dV = \oint_{\partial V} \psi \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} dA \quad (48)$$

b 利用上一问证明的 Green 第一恒等式有

$$\int_V (\psi \nabla^2 \phi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi) dV = \oint_{\partial V} \psi \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} dA \quad (49)$$

$$\int_V (\phi \nabla^2 \psi + \nabla \psi \cdot \nabla \phi) dV = \oint_{\partial V} \phi \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} dA \quad (50)$$

将上面两个等式相减即为 Green 第二恒等式

$$\int_V (\psi \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \psi) dV = \oint_{\partial V} \left(\psi \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} - \phi \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} \right) dA \quad (51)$$

c 令 $\phi(\mathbf{r}') = G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ ，利用 Green 第二恒等式有

$$\begin{aligned} \int_V (\psi \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \psi) dV &= \oint_{\partial V} \left(\psi \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} - \phi \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} \right) dA \\ &= \oint_{\partial V} \left(\psi(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}'} - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}'} \right) dA \end{aligned} \quad (52)$$

对等式左边有

$$\int_V (\psi \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \psi) dV = \int_V (\psi(\mathbf{r}') \nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla^2 \psi(\mathbf{r}')) dV \quad (53)$$

由于 ψ 在区域内满足拉普拉斯方程，即

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{r}') \equiv 0 \quad (54)$$

因此只需考虑 $\psi(\mathbf{r}') \nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 的部分。由于 $\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ ，结合 δ 函数的积分性质有

$$\int_V \psi(\mathbf{r}') \nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV = \int_V \psi(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV = \psi(\mathbf{r}) \quad (55)$$

整理一下即为 Green 第三恒等式

$$\psi(\mathbf{r}) = \oint_{\partial V} \left(\psi(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}'} - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}'} \right) dA \quad (56)$$

d 整个三维空间中的 Green 函数为

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{\rho}|} \quad (57)$$

其中 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ ， $\mathbf{r}' = (x', y', z')$ ， $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = (x - x', y - y', z - z')$ 。

设 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ 关于平面 $ax + by + cz = 0$ 的对称点为 $\mathbf{r}^* = (x^*, y^*, z^*)$ ，它们之间的关系式为

$$\mathbf{r}^* = (x^*, y^*, z^*) = (x, y, z) + \lambda \cdot (a, b, c) \quad (58)$$

$$\lambda = -2 \frac{ax + by + cz}{a^2 + b^2 + c^2} \quad (59)$$

利用镜像法，设在对称点上存在一个虚拟的场函数使得 Green 函数在对称平面上的值为 0。则利用对称性，虚拟场可以表示为 $-G(\mathbf{r}^*, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{\rho}^*|}$ 。因此斜半空间上的 Green 函数可以表示为两个场的叠加

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{\rho}^*|} - \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{\rho}|} \quad (60)$$

$$\boldsymbol{\rho}^* = \mathbf{r}^* - \mathbf{r}' \quad (61)$$

◁

Question 5 (10') (从 ODE 到 PDE).

回忆一下随机过程，我们定义一个 Gaussian 过程 W_t ，对于

$$\forall t_1, \dots, t_k, \quad W_{t_1, \dots, t_k} = (W_{t_1}, \dots, W_{t_k})$$

为多变量的高斯随机变量。其平均值 $m(t) = 0$ ，协方差 $K(s, t) = \min\{s, t\}$ ，对于 $t_1 < t_2$ 可以得到

$$W_{t_2} = W_{t_1} + \sqrt{t_2 - t_1} N(0, 1),$$

其中 $N(0, 1)$ 为以 0 为期望，方差为 1 的正态分布。

我们在弱形式下可以得到关于该过程微分的定义。对于任意平方可积的函数 f ，定义 Itô 积分

$$\int_0^T f(w, t) dW_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(w_i, t_i) (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}).$$

a (4') 请证明上述积分满足性质

$$\mathbb{E} \left(\int_S^T f(w, t) dW_t \right) = 0, \quad \mathbb{E} \left(\int_S^T f(w, t) dW_t \right)^2 = \mathbb{E} \left(\int_S^T f^2(w, t) dt \right).$$

b (2') 请计算如下积分

$$\int_0^t W_s dW_s.$$

根据 b 问中的结果，我们可以形式化地认为有

$$(dW_t)^2 = dt.$$

c (2') 对于二阶可微的函数 f 考虑映射 $Y_t = f(X_t)$ ，其中 $dX_t = b(w, t) dt + \sigma(w, t) dW_t$ 满足 $X_t|_{t=0} = X_0$ 。请计算 dY_t 的表达式。

对于一个 ODE 而言，将对应有一个一阶的 PDE 方程作为概率密度。即对于

$$\frac{dx}{dt} = b(x), \quad x \Big|_{t=0} = x_0,$$

若是 x_0 满足一定分布 $p_0(x)$ ，那么该概率密度的演化满足

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial(p b(x))}{\partial x} = 0.$$

d (2') 对于一个随机微分方程

$$dX_t = b(w, t) dt + \sigma(w, t) dW_t,$$

按照同样的方式定义概率密度为

$$p(x, t) dx = \Pr[X_t \in [x, x + dx]].$$

请给出对应的概率密度的演化方程。

上述结果表明，类似于解一阶偏微分方程时使用的特征线法，对于二阶偏微分方程应当使用带有随机游走的特征线。

Answer.

a

$$\mathbb{E}\left(\int_S^T f(w, t) dW_t\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^T f(w, t) dW_t\right) - \mathbb{E}\left(\int_0^S f(w, t) dW_t\right) \quad (62)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\int_0^T f(w, t) dW_t\right) &= \mathbb{E}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(w_i, t_i)(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(w_i, t_i) \mathbb{E}[(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(w_i, t_i) \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned} \quad (63)$$

因此

$$\mathbb{E}\left(\int_S^T f(w, t) dW_t\right) = 0 \quad (64)$$

对于第二个等式，首先考虑左边

$$\mathbb{E}\left(\int_S^T f(w, t) dW_t\right)^2 = \mathbb{E}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(w_i, t_i)(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})\right)^2 \quad (65)$$

将求和的部分展开并且求期望有

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{n-1} f(w_i, t_i)(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})\right)^2 &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} f(w_i, t_i) f(w_j, t_j)(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} f(w_i, t_i) f(w_j, t_j) \Delta W_i \Delta W_j\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} f(w_i, t_i) f(w_j, t_j) \mathbb{E}(\Delta W_i \Delta W_j) \end{aligned} \quad (66)$$

当 $i \neq j$ 时，利用布朗运动的独立增量性质以及增量的期望有

$$f(w_i, t_i) f(w_j, t_j) \mathbb{E}(\Delta W_i \Delta W_j) = f(w_i, t_i) f(w_j, t_j) \mathbb{E}(\Delta W_i) \mathbb{E}(\Delta W_j) = 0 \quad (67)$$

当 $i = j$ 时，利用布朗运动的增量的方差有

$$f(w_i, t_i) f(w_j, t_j) \mathbb{E}(\Delta W_i \Delta W_j) = f^2(w_i, t_i) \mathbb{E}(\Delta W_i)^2 = f^2(w_i, t_i) \Delta t_i \quad (68)$$

这样整个求和的部分可以重新写成

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{n-1} f(w_i, t_i)(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})\right)^2 = \sum_{i=0}^{n-1} f^2(w_i, t_i) \Delta t_i \quad (69)$$

令 $n \rightarrow \infty$ 则可以得到最终的等式

$$\mathbb{E} \left(\int_S^T f(w, t) \, dW_t \right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f^2(w_i, t_i) \Delta t_i = \mathbb{E} \left(\int_S^T f^2(w, t) \, dt \right) \quad (70)$$

◁