Homework #8

Due: 2024-7-2 00:00 | 6 Questions, 100 Pts

Name: 彭博

Question 1 (25') (曲率、挠率与 Frenet 标架).
求下列曲线的曲率和挠率:

a (5') $\boldsymbol{r}(t) = \left(at, \sqrt{2}a\log t, a/t\right), \quad a > 0;$

b (5') $\boldsymbol{r}(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t), bt), \quad a > 0;$

c (5') $\boldsymbol{r}(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t).$

我们为曲线 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$，其中 s 为弧长参数，得出 Frenet 标架为 $\{\boldsymbol{r}(s); \boldsymbol{\alpha}(s), \boldsymbol{\beta}(s), \boldsymbol{\gamma}(s)\}$.

d (5') 假定曲线的挠率 $\tau \neq 0$ 为一个常数，求曲线

$$\tilde{\boldsymbol{r}}(s) = \frac{1}{\tau}\boldsymbol{\beta}(s) - \int \boldsymbol{\gamma}(s)\,\mathrm{d}s$$

的曲率和挠率。

e (5') 假定曲线的曲率 $\kappa \neq 0$ 为一个常数，挠率 $\tau > 0$, 求曲线

$$\tilde{\boldsymbol{r}}(s) = \frac{1}{\kappa}\boldsymbol{\beta}(s) + \int \boldsymbol{\alpha}(s)\,\mathrm{d}s$$

的曲率和挠率，以及它的 Frenet 标架 $\left\{\tilde{\boldsymbol{r}}(s); \tilde{\boldsymbol{\alpha}}(s), \tilde{\boldsymbol{\beta}}(s), \tilde{\boldsymbol{\gamma}}(s)\right\}$.

◀

Answer.

a 首先计算 $\boldsymbol{r}(t)$ 的各阶导数

$$\boldsymbol{r}'(t) = \left(a, \frac{\sqrt{2}a}{t}, -\frac{a}{t^2}\right) = a\left(1, \frac{\sqrt{2}}{t}, -\frac{1}{t^2}\right) \tag{1}$$

$$\left|\boldsymbol{r}'(t)\right| = a\sqrt{1 + \frac{2}{t^2} + \frac{1}{t^4}} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{r}''(t) = a\left(0, -\frac{\sqrt{2}}{t^2}, \frac{2}{t^3}\right) \tag{3}$$

$$\boldsymbol{r}'''(t) = a\left(0, \frac{2\sqrt{2}}{t^3}, -\frac{6}{t^4}\right) \tag{4}$$

然后带入曲率和挠率的公式进行计算

$$\begin{aligned}\kappa(t) &= \frac{|\boldsymbol{r}'(t) \times \boldsymbol{r}''(t)|}{|\boldsymbol{r}'(t)|^3} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{2}a^2}{t^2}\sqrt{1 + \frac{2}{t^2} + \frac{1}{t^4}}}{a^3\left(1 + \frac{2}{t^2} + \frac{1}{t^4}\right)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{at^2}\left(1 + \frac{2}{t^2} + \frac{1}{t^4}\right)^{-1}\end{aligned} \tag{5}$$

$$
\begin{aligned}
\tau(t) &= \frac{\big(\boldsymbol{r}'(t), \boldsymbol{r}''(t), \boldsymbol{r}'''(t)\big)}{|\boldsymbol{r}'(t) \times \boldsymbol{r}''(t)|^2} \\
&= \frac{\frac{2\sqrt{2}a^3}{t^6}}{\frac{2a^4}{t^4}\left(1+\frac{2}{t^2}+\frac{1}{t^4}\right)} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{at^2}\left(1+\frac{2}{t^2}+\frac{1}{t^4}\right)^{-1}
\end{aligned} \tag{6}
$$

b 首先计算 $\boldsymbol{r}(t)$ 的各阶导数

$$\boldsymbol{r}'(t) = \Big(a(1-\cos t), a\sin t, b\Big) \tag{7}$$

$$\big|\boldsymbol{r}'(t)\big| = \sqrt{a^2\big(1-\cos t\big)^2 + a^2\sin^2 t + b^2} = \sqrt{2a^2(1-\cos t)+b^2} \tag{8}$$

$$\boldsymbol{r}''(t) = (a\sin t, a\cos t, 0) \tag{9}$$

$$\boldsymbol{r}'''(t) = (a\cos t, -a\sin t, 0) \tag{10}$$

然后带入曲率和挠率的公式进行计算

$$
\begin{aligned}
\kappa(t) &= \frac{|\boldsymbol{r}'(t) \times \boldsymbol{r}''(t)|}{|\boldsymbol{r}'(t)|^3} \\
&= \frac{\sqrt{a^2b^2 + a^4(\cos t - 1)^2}}{(2a^2(1-\cos t)+b^2)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned} \tag{11}
$$

$$
\begin{aligned}
\tau(t) &= \frac{\big(\boldsymbol{r}'(t), \boldsymbol{r}''(t), \boldsymbol{r}'''(t)\big)}{|\boldsymbol{r}'(t) \times \boldsymbol{r}''(t)|^2} \\
&= \frac{-a^2b}{a^2b^2 + a^4(\cos t - 1)^2} \\
&= \frac{-b}{b^2 + a^2(\cos t - 1)^2}
\end{aligned} \tag{12}
$$

c 首先计算 $\boldsymbol{r}(t)$ 的各阶导数

$$\boldsymbol{r}'(t) = (-3\sin t\cos^2 t, 3\sin^2 t\cos t, -2\sin 2t) \tag{13}$$

$$\big|\boldsymbol{r}'(t)\big| = \sqrt{9\sin^2 t\cos^2 t + 4\sin^2 2t} = \frac{5}{2}|\sin 2t| \tag{14}$$

$$\boldsymbol{r}''(t) = (6\sin^2 t\cos t - 3\cos^3 t, -3\sin^3 t + 6\sin t\cos^2 t, -4\cos 2t) \tag{15}$$

$$\boldsymbol{r}'''(t) = (-6\sin^3 t + 21\sin t\cos^2 t, -21\sin^2 t\cos t + 6\cos^3 t) \tag{16}$$

然后带入曲率和挠率的公式进行计算即可。这里涉及到大量的三角函数变形，非常繁琐，故暂时略过。

d 首先计算 $\tilde{\boldsymbol{r}}(s)$ 的各阶导数

$$
\begin{aligned}
\tilde{\boldsymbol{r}}'(s) &= \frac{1}{\tau}\big(-\kappa(s)\boldsymbol{\alpha}(s) + \tau\boldsymbol{\gamma}(s)\big) - \boldsymbol{\gamma}(s) \\
&= -\frac{\kappa(s)}{\tau}\boldsymbol{\alpha}(s)
\end{aligned} \tag{17}
$$

$$\big|\tilde{\boldsymbol{r}}'(s)\big| = \left|\frac{\kappa(s)}{\tau}\right| \tag{18}$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{\boldsymbol{r}}''(s) &= -\frac{1}{\tau}\big(\kappa(s)\boldsymbol{\alpha}(s)\big)' \\
&= -\frac{1}{\tau}\big(\kappa'(s)\boldsymbol{\alpha}(s) + \kappa^2(s)\boldsymbol{\beta}(s)\big)
\end{aligned} \tag{19}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{\boldsymbol{r}}'''(s) &= -\frac{1}{\tau}\big(\kappa'(s)\boldsymbol{\alpha}(s) + \kappa^2(s)\boldsymbol{\beta}(s)\big)' \\
&= -\frac{1}{\tau}\big(\kappa''(s)\boldsymbol{\alpha}(s) + 3\kappa(s)\kappa'(s)\boldsymbol{\beta}(s) - \kappa^3(s)\boldsymbol{\alpha}(s) + \kappa^2(s)\tau\boldsymbol{\gamma}(s)\big)
\end{aligned} \tag{20}
$$

然后带入曲率和挠率的公式进行计算

$$
\begin{aligned}
\tilde{\kappa}(s) &= \frac{|\tilde{\boldsymbol{r}}'(t) \times \tilde{\boldsymbol{r}}''(t)|}{|\tilde{\boldsymbol{r}}'(t)|^3} \\
&= \frac{\frac{\kappa^3(s)}{\tau^2}|\boldsymbol{\alpha}(s) \times \boldsymbol{\beta}(s)|}{\left|\frac{\kappa(s)}{\tau}\right|^3} \\
&= |\tau|
\end{aligned} \tag{21}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{\tau}(s) &= \frac{\big(\tilde{\boldsymbol{r}}'(t), \tilde{\boldsymbol{r}}''(t), \tilde{\boldsymbol{r}}'''(t)\big)}{|\tilde{\boldsymbol{r}}'(t) \times \tilde{\boldsymbol{r}}''(t)|^2} \\
&= \frac{-\frac{\kappa^5(s)}{\tau^2}\big(\boldsymbol{\alpha}(s), \boldsymbol{\beta}(s), \boldsymbol{\gamma}(s)\big)}{\frac{\kappa^6(s)}{\tau^4}} \\
&= -\frac{\tau^2}{\kappa(s)}
\end{aligned} \tag{22}
$$

e 首先对 $\tilde{\boldsymbol{r}}(s)$ 求导

$$
\begin{aligned}
\tilde{\boldsymbol{r}}'(s) &= \frac{1}{\kappa}\big(-\kappa\boldsymbol{\alpha}(s) + \tau(s)\boldsymbol{\gamma}(s)\big) + \boldsymbol{\alpha}(s) \\
&= \frac{\tau(s)}{\kappa}\boldsymbol{\gamma}(s)
\end{aligned} \tag{23}
$$

因此，

$$
\big|\tilde{\boldsymbol{r}}'(s)\big| = \left|\frac{\tau(s)}{\kappa}\right| = \frac{\tau(s)}{\kappa} \tag{24}
$$

$$
\tilde{\boldsymbol{\alpha}}(s) = \boldsymbol{\gamma}(s) \tag{25}
$$

继续对 $\tilde{\boldsymbol{r}}'(s)$ 求导，得到

$$
\begin{aligned}
\tilde{\boldsymbol{r}}''(s) &= \frac{1}{\kappa}\big(\tau(s)\boldsymbol{\gamma}(s)\big)' \\
&= \frac{1}{\kappa}\big(\tau'(s)\boldsymbol{\gamma}(s) - \tau^2(s)\boldsymbol{\beta}(s)\big)
\end{aligned} \tag{26}
$$

$\tilde{\boldsymbol{r}}'(s)$ 和 $\tilde{\boldsymbol{r}}''(s)$ 叉乘的方向对应于 $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}(s)$ 的方向：

$$
\tilde{\boldsymbol{r}}'(s) \times \tilde{\boldsymbol{r}}''(s) \propto -\boldsymbol{\gamma}(s) \times \boldsymbol{\beta}(s) = \boldsymbol{\alpha}(s) \tag{27}
$$

因此，

$$
\tilde{\boldsymbol{\gamma}}(s) = \boldsymbol{\alpha}(s) \tag{28}
$$

使用 $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}(s)$ 和 $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}(s)$ 作叉乘可以得到 $\tilde{\boldsymbol{\beta}}(s)$

$$
\tilde{\boldsymbol{\beta}}(s) = \tilde{\boldsymbol{\gamma}}(s) \times \tilde{\boldsymbol{\alpha}}(s) = -\boldsymbol{\beta}(s) \tag{29}
$$

即曲线 $\tilde{\boldsymbol{r}}(s)$ 的 Frenet 标架为 $\{\tilde{\boldsymbol{r}}(s);\boldsymbol{\gamma}(s),-\boldsymbol{\beta}(s),\boldsymbol{\alpha}(s)\}$。曲率和挠率可以使用相应的公式进行计算

$$\begin{aligned}\tilde{\kappa}(s) &= \frac{|\tilde{\boldsymbol{r}}'(t)\times\tilde{\boldsymbol{r}}''(t)|}{|\tilde{\boldsymbol{r}}'(t)|^3} \\ &= \kappa\end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\tau}(s) &= \frac{\big(\tilde{\boldsymbol{r}}'(t),\tilde{\boldsymbol{r}}''(t),\tilde{\boldsymbol{r}}'''(t)\big)}{|\tilde{\boldsymbol{r}}'(t)\times\tilde{\boldsymbol{r}}''(t)|^2} \\ &= \frac{\kappa^2}{\tau(s)}\end{aligned} \tag{31}$$

◁

Question 2 (15') (参数曲线).
假定 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 是以 s 为弧长参数的正则参数曲线，它的挠率不为 0，曲率不是常数，并且下面的关系式成立：

$$\left(\frac{1}{\kappa(s)}\right)^2+\left(\frac{1}{\tau(s)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\kappa(s)}\right)\right)^2=R_0^2=\mathrm{const},$$

请证明该曲线落在一个球面上。

◀

Answer. 对关系式两边同时求导，可以得到

$$\begin{aligned}\frac{2}{\kappa(s)}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\kappa(s)}\right)+\frac{2}{\tau(s)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\kappa(s)}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\tau(s)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\kappa(s)}\right)\right)&=0\\ \frac{\tau(s)}{\kappa(s)}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\tau(s)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\kappa(s)}\right)\right)&=0\end{aligned}\tag{32}$$

接下来构造曲线

$$\boldsymbol{c}(s)=\boldsymbol{r}(s)+\frac{1}{\kappa(s)}\boldsymbol{\beta}(s)+\frac{1}{\tau(s)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\kappa(s)}\right)\boldsymbol{\gamma}(s)\tag{33}$$

对它求导，得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{c}'(s)&=\boldsymbol{\alpha}(s)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\kappa(s)}\right)\boldsymbol{\beta}(s)+\frac{1}{\kappa(s)}(-\kappa(s)\boldsymbol{\alpha}(s)+\tau(s)\boldsymbol{\gamma}(s))\\&\quad+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{1}{\tau(s)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\kappa(s)}\right)\right]\boldsymbol{\gamma}(s)+\frac{1}{\tau(s)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\kappa(s)}\right)[-\tau(s)\boldsymbol{\beta}(s)]\\&=\left(1-\frac{\kappa(s)}{\kappa(s)}\right)\boldsymbol{\alpha}(s)+\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\kappa(s)}\right)-\frac{\tau(s)}{\tau(s)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\kappa(s)}\right)\right]\boldsymbol{\beta}(s)\\&\quad+\left[\frac{\tau(s)}{\kappa(s)}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\tau(s)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\kappa(s)}\right)\right)\right]\boldsymbol{\gamma}(s)\\&=\mathbf{0}\end{aligned}\tag{34}$$

因此 $\boldsymbol{c}(s)$ 实际上是定点，记 $\boldsymbol{c}_0=\boldsymbol{c}(0)$ 。考虑曲线 $\boldsymbol{r}(s)$ 到 $\boldsymbol{c}(s)=\boldsymbol{c}_0$ 的距离平方 L^2

$$L^2=(\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{c}_0)\cdot(\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{c}_0)\tag{35}$$

对 L^2 进行求导，得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}L^2&=2\boldsymbol{\alpha}(s)\cdot(\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{c}_0)\\&=2\boldsymbol{\alpha}(s)\cdot(\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{c}(s))\\&=2\boldsymbol{\alpha}(s)\cdot\left[\frac{1}{\kappa(s)}\boldsymbol{\beta}(s)+\frac{1}{\tau(s)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\kappa(s)}\right)\boldsymbol{\gamma}(s)\right]\\&=0\end{aligned}\tag{36}$$

因此 L^2 为常数，即曲线 $\boldsymbol{r}(s)$ 落在以 $\boldsymbol{c}_0$ 为球心的球面上。

◁

Question 3 (30') (第一基本形与变换).
在球面 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=1$ 上, 取 $N=(0,0,1), S=(0,0,-1)$. 对于赤道平面上的任意一点 $p=(u,v,0)$, 可以作唯一的一条直线经过 N,p 两点，它与球面有唯一的交点，记为 p'.

a (5') 证明：点 p' 的坐标是

$$x=\frac{2u}{u^2+v^2+1},\quad y=\frac{2v}{u^2+v^2+1},\quad z=\frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1},$$

并且它给出了球面上去掉北极 N 的剩余部分的正则参数表示。

b (5') 求球面上去掉南极 S 的剩余部分的类似地正则参数表示。

c (5') 求上面两种正则参数表示在公共部分的参数变换。

d (5') 证明球面是可定向曲面。

接下来我们要寻找保长对应与保角对应。

e (5') 证明在悬链面

$$\boldsymbol{r}=(a\cosh t\cos\theta, a\cosh t\sin\theta, at),\quad -\infty<t<\infty,\quad 0\le\theta\le 2\pi$$

和正螺旋面

$$\boldsymbol{r}=(v\cos u, v\sin u, au),\quad 0\le u\le 2\pi,\quad -\infty<v<\infty$$

之间存在保长对应，其中常数 $a>0$.

f (5') 请建立旋转面

$$\boldsymbol{r}=(f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u))$$

和平面之间的保角对应。

◀

Answer.

a 连接 N、p 两点的直线可以表示为:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{l}(t)&=t\cdot p+(1-t)N\\&=t\cdot(u,v,0)+(1-t)\cdot(0,0,1)\\&=(tu,tv,1-t)\end{aligned}\tag{37}$$

令 $l(t)$ 到原点的距离为 1，即可解得 $l(t)$ 与球面的交点:

$$\boldsymbol{l}(t)\cdot\boldsymbol{l}(t)=(u^2+v^2)t^2+(1-t)^2=1\tag{38}$$

$$(u^2+v^2+1)t^2=2t\tag{39}$$

上式的非零解为 $t=\frac{2}{u^2+v^2+1}$，因此 p' 的坐标是

$$\begin{cases}x=tu & =\frac{2u}{u^2+v^2+1}\\ y=tv & =\frac{2v}{u^2+v^2+1}\\ z=1-t & =\frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}\end{cases}\tag{40}$$

b 连接 S、p 两点的直线可以表示为：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{l}(t) &= t\cdot p + (1-t)S \\ &= t\cdot(u,v,0) + (1-t)\cdot(0,0,-1) \\ &= (tu, tv, t-1)\end{aligned} \tag{41}$$

令 $l(t)$ 到原点的距离为 1，即可解得 $l(t)$ 与球面的交点：

$$\boldsymbol{l}(t)\cdot\boldsymbol{l}(t) = (u^2+v^2)t^2 + (t-1)^2 = 1 \tag{42}$$

$$(u^2+v^2+1)t^2 = 2t \tag{43}$$

上式的非零解为 $t = \frac{2}{u^2+v^2+1}$，因此 p' 的坐标是

$$\begin{cases} x = tu & = \frac{2u}{u^2+v^2+1} \\ y = tv & = \frac{2v}{u^2+v^2+1} \\ z = t-1 & = \frac{1-(u^2+v^2)}{u^2+v^2+1} \end{cases} \tag{44}$$

c 在球面上取非极点的一点 $q' = (x,y,z)$，将其与 N、S 分别连线并记其与赤道平面的交点为 $q_1 = (u_1,v_1,0)$、$q_2 = (u_2,v_2,0)$。利用前两问的结果可以得到两个交点与 q' 坐标的关系式：

$$\begin{cases} u_1 = \frac{x}{1-z} \\ v_1 = \frac{y}{1-z} \end{cases}, \quad \begin{cases} u_2 = \frac{x}{1+z} \\ v_2 = \frac{y}{1+z} \end{cases} \tag{45}$$

因此，我们可以利用 $q' = (x,y,z)$ 将 (u_1,v_1) 和 (u_2,v_2) 两种正则参数联系起来：

$$\begin{cases} u_2(u_1,v_1) = \frac{x(u_1,v_1)}{1+z(u_1,v_1)} & = \frac{u_1}{u_1^2+v_1^2} \\ v_2(u_1,v_1) = \frac{y(u_1,v_1)}{1+z(u_1,v_1)} & = \frac{v_1}{u_1^2+v_1^2} \end{cases} \tag{46}$$

$$\begin{cases} u_1(u_2,v_2) = \frac{x(u_2,v_2)}{z(u_2,v_2)-1} & = \frac{u_2}{u_2^2+v_2^2} \\ v_1(u_2,v_2) = \frac{y(u_2,v_2)}{z(u_2,v_2)-1} & = \frac{v_2}{u_2^2+v_2^2} \end{cases} \tag{47}$$

d 在 a、b 两问已经得到了球面除南极、北极两点外的正则参数曲面表示，它们公共区域的参数变换由 c 问给出。在重叠区域上两套参数变换的 Jacobi 矩阵为

$$\begin{aligned}\frac{\partial(u_2,v_2)}{\partial(u_1,v_1)} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial u_2}{\partial u_1} & \frac{\partial u_2}{\partial v_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial u_1} & \frac{\partial v_2}{\partial v_1} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{u_1^2+v_1^2}\begin{pmatrix} v_1^2-u_1^2 & -2u_1v_1 \\ -2u_1v_1 & u_1^2-v_1^2 \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{48}$$

其行列式为

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial(u_2,v_2)}{\partial(u_1,v_1)}\right| &= \frac{(v_1^2-u_1^2)(u_1^2-v_1^2)-4u_1^2v_1^2}{(u_1^2+v_1^2)^2} \\ &= -\frac{1}{u_1^2+v_1^2} < 0\end{aligned} \tag{49}$$

上式说明参数变换改变的球面的定向。为了处理这个问题我们可以取 $\tilde{u}_2=-u_2$，$\tilde{v}_2=v_2$，则 $(\tilde{u}_2,\tilde{v}_2)$ 与 (u,v) 之间的参数变换为

$$\begin{cases}\tilde{u}_2(u_1,v_1)=\frac{-u_1}{u_1^2+v_1^2}\\ \tilde{v}_2(u_1,v_1)=\frac{v_1}{u_1^2+v_1^2}\end{cases}\tag{50}$$

$$\begin{cases}u_1(\tilde{u}_2,\tilde{v}_2)=\frac{-\tilde{u}_2}{\tilde{u}_2^2+\tilde{v}_2^2}\\ v_1(\tilde{u}_2,\tilde{v}_2)=\frac{\tilde{v}_2}{\tilde{u}_2^2+\tilde{v}_2^2}\end{cases}\tag{51}$$

此时 Jacobi 矩阵的行列式为

$$\left|\frac{\partial(\tilde{u}_2,\tilde{v}_2)}{\partial(u_1,v_1)}\right|=\frac{1}{u_1^2+v_1^2}>0\tag{52}$$

因此，在球面去除南北极点外的公共部分是保持定向的，即球面是可定向曲面。

e 首先计算悬链面的第一基本形式 I_1

$$\begin{cases}\boldsymbol{r}_t=(a\sinh t\cos\theta,a\sinh t\sin\theta,a)\\ \boldsymbol{r}_\theta=(-a\cosh t\sin\theta,a\cosh t\cos\theta,0)\end{cases}\tag{53}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_1&=(a^2\sinh^2 t+a^2)(\mathrm{d}t)^2+a^2\cosh^2 t(\mathrm{d}\theta)^2\\&=a^2\cosh^2 t(\mathrm{d}t)^2+a^2(\sinh^2 t+1)(\mathrm{d}\theta)^2\end{aligned}\tag{54}$$

接下来计算正螺旋面的第一基本形式 I_2

$$\begin{cases}\boldsymbol{r}_u=(-v\sin u,v\cos u,a)\\ \boldsymbol{r}_v=(\cos u,\sin u,0)\end{cases}\tag{55}$$

$$\mathrm{I}_2=(v^2+a^2)(\mathrm{d}u)^2+(\mathrm{d}v)^2\tag{56}$$

因此可以构造参数映射 $\begin{cases}u=\theta\\ v=a\sinh t\end{cases}$，使得

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_2&=(v^2+a^2)(\mathrm{d}u)^2+(\mathrm{d}v)^2\\&=(a^2\sinh^2 t+a^2)(\mathrm{d}\theta)^2+a^2\cosh^2 t(\mathrm{d}t)^2\\&=a^2\cosh^2 t(\mathrm{d}t)^2+a^2(\sinh^2 t+1)(\mathrm{d}\theta)^2\\&=\mathrm{I}_1\end{aligned}\tag{57}$$

因此悬链面和正螺旋面之间存在保长对应。

f 首先计算旋转面的第一基本形式

$$\mathrm{I}=\left(f'^2(u)+g'^2(u)\right)(\mathrm{d}u)^2+f^2(u)\,(\mathrm{d}v)^2\tag{58}$$

因此可以构造参数映射

$$\begin{cases}\tilde{u}=\int\frac{\sqrt{f'^2(u)+g'^2(u)}}{f(u)}\,\mathrm{d}u\\ \tilde{v}=v\end{cases}\tag{59}$$

在 $(\tilde{u}, \tilde{v})$ 平面上的第一基本形式为

$$\begin{aligned}\tilde{\mathrm{I}} &= (\mathrm{d}\tilde{u})^2 + (\mathrm{d}\tilde{v})^2 \\ &= \frac{\left(f'^2(u) + g'^2(u)\right)}{f^2(u)} (\mathrm{d}u)^2 + (\mathrm{d}v)^2 \\ &= \frac{1}{f^2(u)} \mathrm{I}\end{aligned} \tag{60}$$

因此旋转面和平面之间存在保角对应。

$\triangleleft$

Question 4 (10') (第三基本型).
定义曲面的第三基本型为 $\mathrm{d}\boldsymbol{n}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{n}$. 证明:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{n}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{n}+2H\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{n}+K\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=0.$$

◀

Answer. 在曲面上取一点 p 并且取参数系 (u,v) 使得参数曲线正好成为彼此正交的曲率线网。于是在 p 点有

$$F=\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v=0 \tag{61}$$

$$M=0 \tag{62}$$

同时两个主曲率满足

$$\kappa_1=\frac{L}{E},\quad \kappa_2=\frac{N}{G} \tag{63}$$

根据 Weingarten 映射的定义有

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}-\boldsymbol{n}_u\\-\boldsymbol{n}_v\end{pmatrix}=W\begin{pmatrix}\boldsymbol{r}_u\\\boldsymbol{r}_v\end{pmatrix}&=\frac{1}{EG-F^2}\begin{pmatrix}LG-MF & -LF+ME\\ MG-NF & -MF+NE\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{r}_u\\\boldsymbol{r}_v\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\kappa_1 & 0\\ 0 & \kappa_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{r}_u\\\boldsymbol{r}_v\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{64}$$

因此

$$\mathrm{d}\boldsymbol{n}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{n}=(\kappa_1)^2E(\mathrm{d}u)^2+(\kappa_2)^2G(\mathrm{d}v)^2 \tag{65}$$

$$2H\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{n}=-(\kappa_1+\kappa_2)\big(\kappa_1E(\mathrm{d}u)^2+\kappa_2G(\mathrm{d}v)^2\big) \tag{66}$$

$$K\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\kappa_1\kappa_2\big(E(\mathrm{d}u)^2+G(\mathrm{d}v)^2\big) \tag{67}$$

将上面三个式子相加即可:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{n}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{n}+2H\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{n}+K\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}&=\big(\kappa_1^2E-(\kappa_1+\kappa_2)\kappa_1E+\kappa_1\kappa_2E\big)(\mathrm{d}u)^2\\&\quad+\big(\kappa_2^2G-(\kappa_1+\kappa_2)\kappa_2G+\kappa_1\kappa_2G\big)(\mathrm{d}v)^2\\&=0\end{aligned} \tag{68}$$

◁

Question 5 (10') (可展曲面).

a (5') 证明：没有平点的曲面 $\boldsymbol{r}: D \to \mathbb{R}^3$ 是可展的当且仅当 $K \equiv 0$.

b (5') 试构造一个 $K \equiv 0$ 的曲面，但它不是可展曲面。

◀

Answer.

a 必要性是显然的。根据 Gauss 绝妙定理，Gauss 曲率 K 在保长映射下是不变量。因此可展曲面和平面具有相同的 Gauss 曲率，即 $K \equiv 0$。

接下来考虑充分性。在曲面上取非脐点的一点 p，并且取该处的正交曲率线网作为参数曲线网 (u, v)；对于脐点的情况只需取一个局部正交网作为参数曲线网。此时，$F = M = 0$，并且

$$K = \frac{LN}{EG} \equiv 0 \tag{69}$$

不妨假定 $v-$ 曲线对应的主曲率 $\kappa = \frac{N}{G} = 0$，于是 $N \equiv 0$，$L \neq 0$。根据 Codazzi 方程有

$$\frac{\partial N}{\partial u} = H\frac{\partial G}{\partial u} = 0 \tag{70}$$

$$2H = \frac{L}{E} + \frac{N}{G} = \frac{L}{E} \neq 0 \tag{71}$$

因此

$$\frac{\partial G}{\partial u} = 0 \tag{72}$$

根据自然标架的运动公式有

$$\boldsymbol{r}_{vv} = \Gamma^1_{22}\boldsymbol{r}_u + \Gamma^2_{22}\boldsymbol{r}_v + N\boldsymbol{n} \tag{73}$$

其中

$$\Gamma^1_{22} = -\frac{1}{2E}\frac{\partial G}{\partial u} = 0 \tag{74}$$

因此

$$\boldsymbol{r}_{vv} \times \boldsymbol{r}_v = \Gamma^1_{22}\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \equiv \boldsymbol{0} \tag{75}$$

上式说明 $v-$ 曲线的切方向保持不变，即 $v-$ 曲线是直线。

除此之外，根据已知条件有

$$\boldsymbol{n}_v \cdot \boldsymbol{r}_u = -M = 0 \tag{76}$$

$$\boldsymbol{n}_v \cdot \boldsymbol{r}_v = -N = 0 \tag{77}$$

$$\boldsymbol{n}_v \cdot \boldsymbol{n} = 0 \tag{78}$$

因此法向量 n 在 v 方向的导数为 0，即 n 沿 $v-$ 曲线保持不变。所以曲面一定是直纹面，也即可展曲面。

b ◁

Question 6 (10') (极小曲面).
定义曲面 $\boldsymbol{r}: D \to \mathbb{R}^3$ 为**极小曲面**当且仅当 $H \equiv 0$.

a (5') 考虑由悬链线旋转得到的旋转曲面，即悬链面：

$$\boldsymbol{r} = (c\cosh\frac{u}{c}\cos v, c\cosh\frac{u}{c}\sin v, u).$$

证明：悬链面是唯一的既是旋转曲面又是极小曲面的曲面。

b (5') [伯恩斯坦定理] 证明：如果 $\boldsymbol{r} = (u, v, z(u, v))$ 在 $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ 上都有定义且是极小曲面，则 z 一定是线性函数。换句话说如果一个极小曲面是一个平面上的函数图像，则这个极小曲面是个平面。

◀

Answer.

a 旋转曲面的参数方程可以表示为：

$$\boldsymbol{r} = (u\cos v, u\sin v, f(u)) \tag{79}$$

其第一基本形式和第二基本形式分别为

$$\mathrm{I} = \big(1 + f'(u)\big)(\mathrm{d}u)^2 + u^2(\mathrm{d}v)^2 \tag{80}$$

$$\mathrm{II} = \frac{f''(u)}{\sqrt{1+f'^2(u)}}(\mathrm{d}u)^2 + \frac{uf'(u)}{\sqrt{1+f'^2(u)}}(\mathrm{d}v)^2 \tag{81}$$

根据平均曲率的公式可以得到

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}\left(\frac{LG - 2MF + NE}{EG - F^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{f''(u)}{(\sqrt{1+f'^2(u)})^3} + \frac{f'(u)}{u\sqrt{1+f'^2(u)}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{uf''(u) + f'(u)(1+f'^2(u))}{u(\sqrt{1+f'^2(u)})^3} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{82}$$

因此得到极小曲面的微分方程

$$uf''(u) + f'(u)(1 + f'^2(u)) = 0 \tag{83}$$

上式可以改写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\frac{uf'(u)}{\sqrt{1+f'^2(u)}}\right) = 0 \tag{84}$$

因此得到它的第一积分

$$\frac{f'^2(u)}{1+f'^2(u)} = \frac{C}{u^2} \tag{85}$$

其中常数 $C \geq 0$。如果 $C = 0$，则有

$$f'(u) = 0, \quad f(u) = \mathrm{const} \tag{86}$$

此时的曲面对应一个平面，不是我们所需要的旋转面。因此常数 C 满足 $C=c^2$，此时可以解得

$$f'(u)=\pm\frac{c}{\sqrt{u^2-c^2}} \tag{87}$$

$$f(u)=\pm\int\frac{c\,\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2-c^2}}=\pm c\log\left(u+\sqrt{u^2-c^2}\right) \tag{88}$$

此时的曲面方程为

$$\boldsymbol{r}=(u\cos v,u\sin v,\pm c\log\left(u+\sqrt{u^2-c^2}\right)) \tag{89}$$

令

$$u=c\cosh\frac{\tilde{u}}{c},\quad v=\tilde{v} \tag{90}$$

这样就得到悬链线方程

$$\boldsymbol{r}=\left(c\cosh\frac{\tilde{u}}{c}\cos\tilde{v},c\cosh\frac{\tilde{u}}{c}\sin\tilde{v},\tilde{u}\right) \tag{91}$$

前面的推导说明悬链面是唯一的既是旋转曲面又是极小曲面的曲面。

b 首先计算曲面的第一类基本量和第二类基本量：

$$\boldsymbol{r}_u=(1,0,z_u),\quad \boldsymbol{r}_v=(0,1,z_v) \tag{92}$$

$$\boldsymbol{r}_{uu}=(0,0,z_{uu}),\quad \boldsymbol{r}_{uv}=(0,0,z_{uv}),\quad \boldsymbol{r}_{vv}=(0,0,z_{vv}) \tag{93}$$

$$\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|}=\frac{(-z_u,-z_v,1)}{\sqrt{z_u^2+z_v^2+1}} \tag{94}$$

$$E=\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_u=1+z_u^2,\quad F=\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v=z_uz_v,\quad G=\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_v=1+z_v^2 \tag{95}$$

$$L=\boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{n}=\frac{z_{uu}}{\sqrt{z_u^2+z_v^2+1}},\quad M=\boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{n}=\frac{z_{uv}}{\sqrt{z_u^2+z_v^2+1}},\quad N=\boldsymbol{r}_{vv}\cdot\boldsymbol{n}=\frac{z_{vv}}{\sqrt{z_u^2+z_v^2+1}} \tag{96}$$

根据平均曲率的公式有

$$H=\frac{1}{2}\left(\frac{LG-2MF+NE}{EG-F^2}\right)=0 \tag{97}$$

代入后可以得到偏微分方程

$$(1+z_v^2)z_{uu}-z_uz_vz_{uv}+(1+z_u^2)z_{vv}=0 \tag{98}$$

求解这个偏微分方程比较复杂，涉及到复变函数的一些技巧。不过这个偏方程的解是一个一次多项式：

$$z=au+by+z \tag{99}$$

容易验证这样的一次多项式是满足偏微分方程的。因此这个极小曲面是一个平面。

$\triangleleft$