Homework #3

Due: 2024-6-18 23:59 | 5 Questions, 100 Pts

Name: 彭博, ID: XXX

Question 1 (15') (Coupon Collector).
假设有 n 种抽奖券。每次抽取的过程中抽中任一种奖券的概率均相同。

a (5') 假设抽取了 X 次后第一次抽到第一种抽奖券，求关于 X 的期望 $\mathbb{E}[X]$。

b (5') 假设抽取了 Y 次后集齐了全部的奖券，求关于 Y 的期望 $\mathbb{E}[Y]$。

c (5') 为了以高于 $1-\epsilon$ 的概率集齐全部的奖券，求证最少进行抽取的次数

$$m = \mathcal{O}\left(n \log \frac{n}{\epsilon}\right).$$

◀

Answer.

a 假设在第 k 次第一次抽到第一种奖券，说明前 $k-1$ 次都只能从其它的奖券中进行抽取。这种情况的概率为

$$\Pr(X=k) = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{n} \tag{1}$$

实际上，随机变量 X 对应参数为 $\frac{1}{n}$ 的几何分布，$X \sim G(\frac{1}{n})$，对应的数学期望为

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\frac{1}{n}} = n \tag{2}$$

b 从已经抽到的奖券数目进行分析，第一次从奖池中抽到奖券所需的次数为 1，这是因为第一次抽取总是能够得到一种奖券。
接下来需要抽取第二种奖券。我们可以把抽奖的过程看作是参数为 $\frac{n-1}{n}$ 的伯努利试验：每次抽取以 $\frac{1}{n}$ 的概率抽中之前的抽到的奖券，以 $\frac{n-1}{n}$ 的概率抽到一种新的奖券。利用几何分布的性质可以知道抽取到第二种奖券所需的抽取次数的期望为 $\frac{n}{n-1}$。
类似地，抽取到第 $k+1$ 种奖券所需抽取次数的期望为 $\frac{n}{n-k}$。对 $k=1,2,...,n-1$ 的期望进行求和即为随机变量 Y 的数学期望

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y] &= 1 + \frac{n}{n-1} + \frac{n}{n-2} + \cdots + \frac{n}{1} \\ &= n\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \cdots + \frac{1}{1}\right) \\ &= nH_n\end{aligned} \tag{3}$$

其中 H_n 表示调和级数前 n 项的和。

c 对于第 i 种抽奖券，其经过 m 次抽取仍然没有被抽中的概率是

$$p_i = \left(1-\frac{1}{n}\right)^m \le e^{-\frac{m}{n}} \tag{4}$$

取 $m = n\log n + cn$，其中 c 为常数，得到

$$p_i \le e^{\frac{m}{n}} = e^{-\frac{n\log n + cn}{n}} = \frac{e^{-c}}{n} \tag{5}$$

利用 union bound 可以得到经过 m 次抽取仍然没有得到所有奖券的概率满足不等式

$$\Pr(Y \ge m) = \Pr(Y \ge n\log n + cn) \le \sum_i p_i = e^{-c} \tag{6}$$

即

$$\Pr(Y \le n\log n + cn) \ge 1 - e^{-c} \tag{7}$$

取 $c = \log\frac{1}{\varepsilon}$，其中 ε 为常数，最终得到

$$\Pr\Big(Y \le n\log\frac{n}{\varepsilon}\Big) \ge 1 - \varepsilon \tag{8}$$

上式说明，经过 $m = \mathcal{O}\big(n\log\frac{n}{\epsilon}\big)$ 次抽取，抽中全部奖券的概率大于等于 $1-\epsilon$.

$\lhd$

Question 2 (30') (独立性).
在概率论的实践中，我们强调变量间的独立性。对于随机变量 X, Y，我们称他们统计上独立，当且仅当他们的联合概率等于它们概率的乘积，即

$$\Pr[X \cap Y] = \Pr[X]\Pr[Y].$$

a (5') 请证明对于统计上独立的随机变量 X, Y，对于期望算子 $\mathbb{E}$ 满足

$$\mathbb{E}[X^n Y^m] = \mathbb{E}[X^n]\mathbb{E}[Y^m].$$

Answer. 以离散型随机变量为例，$X^n Y^m$ 的数学期望为

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^n Y^m] &= \sum_i \sum_j (X_i^n Y_j^m) \Pr[(X = X_i) \cap (Y = Y_j)] \\
&= \sum_i \sum_j (X_i^n Y_j^m) \Pr[X = X_i] \Pr[(Y = Y_j] \\
&= \sum_i X_i^n \Pr[X = X_i] \sum_j Y_j^m \Pr[Y = Y_j] \\
&= \mathbb{E}[X^n]\mathbb{E}[Y^m]
\end{aligned} \tag{9}$$

对于连续型随机变量，证明的方法是类似的，只需要把求和符号换成积分并且把概率质量函数 Pr 换成概率密度函数 p 即可。 ◁

两个变量 X, Y 间的协方差 cov 被定义为

$$\text{cov}[X, Y] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y].$$

b (5') 从 $[-1, 1]$ 上随机均匀采样，将采样结果作为随机变量 X，定义依赖于 X 的随机变量 $Y = X^2$。请计算 X 与 Y 的协方差。

c (5') 设随机变量 X, Y 的联合分布密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}(1 + xy), & |x| < 1, |y| < 1, \\ 0, & \text{else}. \end{cases}$$

请计算判断 X 与 Y 是否独立，X^2 与 Y^2 是否独立。

Answer.

b 随机变量 X 的概率密度函数为

$$p(x) = \frac{1}{2}, \quad -1 \leq x \leq 1 \tag{10}$$

因此，X 的期望和方差为

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-1}^{1} xp(x)\ \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}x\ \mathrm{d}x = 0 \tag{11}$$

$$\mathbb{D}[X] = \int_{-1}^{1} (x - \mathbb{E}[X])^2 p(x)\ \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3} \tag{12}$$

因此，X 与 Y 的协方差为

$$\begin{aligned} \mathrm{cov}[X, Y] &= \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X^3] \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} x^3\ \mathrm{d}x = 0 \end{aligned} \tag{13}$$

c 首先计算 X 和 Y 的边缘概率密度函数

$$f_X(x) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{4}(1 + xy)\ \mathrm{d}y = \frac{1}{2} \tag{14}$$

$$f_Y(y) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{4}(1 + xy)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \tag{15}$$

显然 $f(x, y) \neq f_X(x) f_Y(y)$，因此随机变量 X 和 Y 不是相互独立的。
接下来考虑 X^2 和 Y^2，它们的边缘概率密度函数为

$$\Pr\left[X^2 \le u\right] = \Pr\left[-\sqrt{u} \le X \le \sqrt{u}\right] = \int_{-\sqrt{u}}^{\sqrt{u}} f_X(x)\ \mathrm{d}x = \sqrt{u} \tag{16}$$

$$f_{X^2}(u) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} \Pr\left[X^2 \le u\right] = \frac{1}{2\sqrt{u}} \tag{17}$$

类似地，

$$f_{Y^2}(v) = \frac{1}{2\sqrt{v}} \tag{18}$$

接下来计算 X^2 和 Y^2 的联合概率密度函数

$$\begin{aligned} \Pr\left[X^2 \le u, Y^2 \le v\right] &= \Pr\left[-\sqrt{u} \le X \le \sqrt{u}, -\sqrt{v} \le Y \le \sqrt{v}\right] \\ &= \int_{-\sqrt{u}}^{\sqrt{u}} \int_{-\sqrt{v}}^{\sqrt{v}} \frac{1}{4}(1 + xy)\ \mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &= \sqrt{u}\sqrt{v} \end{aligned} \tag{19}$$

$$f_{X^2,Y^2}(u, v) = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \Pr\left[X^2 \le u, Y^2 \le v\right] = \frac{1}{4\sqrt{u}\sqrt{v}} \tag{20}$$

显然 $f_{X^2,Y^2}(u, v) = f_{X^2}(u) f_{Y^2}(v)$ ，因此 X^2 与 Y^2 是相互独立的。

$\triangleleft$

我们指出，对于随机变量 X, Y，若对于任意给定的常数 a, b，两者的线性组合 $aX + bY$ 均可表示为单变量正态分布，那么如果 X, Y 不相关，那么它们是独立的。但是实践中，有些人会认为两个线性不相关、正态分布的随机变量一定是统计独立的；有些人会认为正态分布关于随机变量的线性组合是正态分布的。以下两题为两个反例。

d (5’) 取 X 为一个期望为 0、方差为 1 的满足正态分布的变量。W 独立于 X，以相同的概率取 1 或者 -1。计算随机变量 $Y = WX$ 的协方差，并给出例子来说明 X, Y 不独立。

e (5') 取 X 为一个期望为 0、方差为 1 的满足正态分布的变量。取

$$Y = \begin{cases} X, & \text{if } |X| \le c, \\ -X, & \text{if } |X| > c, \end{cases}$$

其中 c 为某一常数。观察可知若 $c \to 0$，那么 $\operatorname{cov}[X,Y] \to -1$；若 $c \to \infty$，那么 $\operatorname{cov}[X,Y] \to 1$。由于相关性关于 c 连续，那么必然存在一个值 c 使得 $\operatorname{cov}[X,Y] = 0$。请证明 Y 为一个正态分布。

Answer.

d 利用全期望公式可以计算得到 $Y = WX$ 的期望为

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y] &= \mathbb{E}[Y \mid W = -1]\Pr[W = -1] + \mathbb{E}[Y \mid W = 1]\Pr[W = 1] \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{E}[-X] + \frac{1}{2}\mathbb{E}[X] = 0 \end{aligned} \tag{21}$$

类似地，X 和 Y 的协方差为

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}[X,Y] &= \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[XY] \\ &= \mathbb{E}[XY \mid W = -1]\Pr[W = -1] + \mathbb{E}[XY \mid W = 1]\Pr[W = 1] \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{E}[-X^2] + \frac{1}{2}\mathbb{E}[X^2] = 0 \end{aligned} \tag{22}$$

要证明 X 和 Y 不是相互独立，可以考虑给定 X 的样本情况下 Y 的可能取值。如果 X 和 Y 是相互独立的，则 Y 的取值与 X 无关；而实际上 Y 只能取 X 或 $-X$ 两个值之一，因此 X 和 Y 不是相互独立。

e 记标准正态分布的概率密度函数为 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$，累积概率密度函数为 $\Pr[X \le x] = \Phi(x)$，则 Y 的概率密度函数为

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= f(y)\Pr[|X| \le c] + f(-y)\Pr[|X| > c] \\ &= f(y) \cdot (2\Phi(c) - 1) + f(y) \cdot 2(1 - \Phi(c)) \\ &= f(y) \end{aligned} \tag{23}$$

因此，Y 是一个标准正态分布。

◁

对于一列相同概率空间上的随机变量 $\{X_i\}_{i=1}^n$，我们称每 k 个元素独立为对于每一个大小不大于 k 的子集 $I \subseteq \{1, \dots, n\}$，$|I| \le k$，对于任一取值列 $\{a_i\}$，满足

$$\Pr\left[\bigwedge_{i \in I} X_i = a_i\right] = \prod_{i \in I} \Pr[X_i = a_i].$$

若 $k = n$，则这些 $\{X_i\}$ 相互独立。

f (5') 设三维随机向量 (X, Y, Z) 的联合密度函数为

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{1}{8\pi^3}(1 - \sin x \sin y \sin z), & 0 < x, y, z < 2\pi, \\ 0, & \text{else}. \end{cases}$$

请求出 X, Y, Z 各自的边际分布，并判断是否两两独立？是否相互独立？

◀

Answer.

f 首先求出 X 的边缘概率密度：

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \iint_{[0,2\pi]} \frac{1}{8\pi^3}(1-\sin x\sin y\sin z)\ \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2\pi} \end{aligned} \tag{24}$$

因此，X 是区间 $[0,2\pi]$ 上的均匀分布。类似地，Y 和 Z 也是 $[0,2\pi]$ 上的均匀分布。

接下来考虑 X、Y、Z 之间的独立性，在 $[0,2\pi]$ 上对 x 进行积分得到

$$\begin{aligned} f_{YZ}(y,z) &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{8\pi^3}(1-\sin x\sin y\sin z)\ \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \\ &= f_Y(y)f_Z(z) \end{aligned} \tag{25}$$

因此，Y 和 Z 是相互独立的。类似地，X、Y、Z 之间是两两独立的。

显然 $f(x,y,z)\neq f_X(x)f_Y(y)f_Z(z)$，因此 X、Y、Z 之间不是相互独立的。

◁

Question 3 (10') (大数定律).
尽管很多情形下大数定理可以得到满足，但是我们也要注意不满足的情形。

a (5') 令 $\{X_n, n \geq 2\}$ 为一列独立的随机变量序列，满足

$$\Pr[X_n = \pm n] = \frac{1}{2n\log n}, \Pr[X_n = 0] = 1 - \frac{1}{n\log n}, n = 2, 3, \ldots$$

请证明 $\{X_n, n \geq 2\}$ 满足弱大数律，不满足强大数律。

b (5') 令 $\{X_n, n \geq 2\}$ 为一列独立的随机变量序列，密度函数为

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma_n} \exp\left\{ -\frac{\sqrt{2}|x|}{\sigma_n} \right\}, \quad x \in \mathbb{R},$$

其中 $\sigma_n^2 = 2n^2/(\log n)^2, n \geq 2$。请证明 $\{X_n, n \geq 2\}$ 满足强大数律，不满足弱大数律。

◀

Answer.

a 首先考虑 $\{X_n\}$ 的期望和方差：

$$\mathbb{E}[X_n] = -n \cdot \Pr[X_n = -n] + 0 \cdot \Pr[X_n = 0] + n \cdot \Pr[X_n = n] = 0 \tag{26}$$

$$\mathbb{D}[X_n] = n^2 \cdot \Pr[X_n = -n] + 0 \cdot \Pr[X_n = 0] + n^2 \cdot \Pr[X_n = n] = \frac{n}{\log n} \tag{27}$$

因此序列 $\{X_n\}$ 的平均值 $\bar{X}_n$ 满足

$$\mathbb{E}[\bar{X}_n] = \mathbb{E}\left[\frac{\sum_i X_i}{n}\right] = 0 \tag{28}$$

$$\mathbb{D}[\bar{X}_n] = \mathbb{D}\left[\frac{\sum_i X_i}{n}\right] = \frac{1}{n^2}\sum_i \mathbb{D}[X_i] < \frac{1}{\log n} \tag{29}$$

根据切比雪夫不等式有

$$\Pr\left[\left|\bar{X}_n - \mathbb{E}[\bar{X}_n]\right| \geq \varepsilon\right] = \Pr\left[\left|\bar{X}_n\right| \geq \varepsilon\right] \leq \frac{\mathbb{D}[\bar{X}_n]}{\varepsilon^2} \leq \frac{1}{\varepsilon^2 \log n} \tag{30}$$

其中 ε 为任意正数。因此，当 $n \to \infty$ 时有

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left[\left|\bar{X}_n - \mathbb{E}[\bar{X}_n]\right| < \varepsilon\right] = 1 - \lim_{n\to\infty} \Pr\left[\left|\bar{X}_n - \mathbb{E}[\bar{X}_n]\right| \geq \varepsilon\right] = 1 \tag{31}$$

即 $\{X_n\}$ 满足弱大数定律。
接下来考虑强大数定律。根据 Kolmogorov 强大数定律，当 $\lim_{n\to\infty}\sum_n \frac{\mathbb{D}[X_n]}{n^2} < \infty$ 时序列 $\{X_n\}$ 满足强大数定律。而在本例中 $\sum_n \frac{\mathbb{D}[X_n]}{n^2}$ 并不满足有界性条件：

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\mathbb{D}[X_n]}{n^2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log n} \tag{32}$$

其中，级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log n}$ 是发散的。因此 $\{X_n\}$ 不满足强大数定律。

b 随机变量 X_n 服从参数为 $(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_n)$ 的 Laplace 分布 $X_n \sim \text{Laplace}(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_n)$，对应的期望和方差为：

$$\mathbb{E}[X_n] = 0 \tag{33}$$

$$\mathbb{D}[X_n] = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_n\right)^2 = \sigma_n^2 = \frac{2n^2}{(\log n)^2} \tag{34}$$

根据 Kolmogorov 强大数定律，$\{X_n\}$ 满足强大数定律的条件为 $\lim_{n\to\infty}\sum_n \frac{\mathbb{D}[X_n]}{n^2}$ 有界，本例中为

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\mathbb{D}[X_n]}{n^2} = 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^2} \tag{35}$$

由于级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^2}$ 是收敛的，因此 $\{X_n\}$ 满足强大数定律。
接下来考虑弱大数定律，序列 $\{X_n\}$ 的平均值 $\bar{X}_n$ 满足

$$\mathbb{E}[\bar{X}_n] = \mathbb{E}\left[\frac{\sum_i X_i}{n}\right] = 0 \tag{36}$$

$$\mathbb{D}[\bar{X}_n] = \mathbb{D}\left[\frac{\sum_i X_i}{n}\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=2}^{n} \mathbb{D}[X_i] \tag{37}$$

对方差进行展开，有

$$\begin{aligned}\mathbb{D}[\bar{X}_n] &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=2}^{n} \mathbb{D}[X_i] = \frac{2}{n^2}\sum_{i=2}^{n} \frac{i^2}{(\log i)^2} \\ &> \frac{2}{(\log n)^2 n^2}\sum_{i=2}^{n} i^2 \\ &= \mathcal{O}\left(\frac{n}{(\log n)^2}\right)\end{aligned} \tag{38}$$

当 $n \to \infty$ 时，$\frac{n}{(\log n)^2} \to \infty$，即 $\bar{X}_n$ 的方差是发散的。因此 $\{X_n\}$ 不满足弱大数定律。

$\triangleleft$

Question 4 (15') (鞅).
随机过程中一个重要的基础概念是鞅（Martingale）。此处仅作简单介绍，图形学中的应用将在微分方程一节的习题中展示。
取 $(Z_i)_{i=1}^n$ 与 $(X_i)_{i=1}^n$ 为共同的概率空间上的一列随机变量，若是对于所有的 i，$\mathbb{E}[X_i \mid Z_1 \dots Z_{i=1}] = X_{i-1}$，那么 (X_i) 被称为关于 (Z_i) 的鞅。进一步地，$Y_i = X_i - X_{i-1}$ 被称为鞅差序列，满足对于所有的 i 而言，$\mathbb{E}[Y_i \mid Z_1 \dots Z_{i=1}] = 0$。
鞅无处不在。事实上，对于任意的随机变量我们都可以得到一个鞅。

a (5') 令 A 与 (Z_i) 为共同概率空间上的随机变量。请证明

$$X_i = \mathbb{E}[A \mid Z_1 \dots Z_i]$$

是一个鞅。

Answer.

a 明 $X_i = \mathbb{E}[A \mid Z_1 \dots Z_i]$ 是一个鞅，只需证

$$\mathbb{E}[X_{i+1} \mid Z_1, \dots, Z_i] = X_i \tag{39}$$

根据随机变量 X_i 的定义，有

$$X_i = \mathbb{E}[A \mid Z_1 \dots Z_i] \tag{40}$$

$$X_{i+1} = \mathbb{E}[A \mid Z_1 \dots Z_{i+1}] \tag{41}$$

利用条件期望的塔式性质 (tower property) 有

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{i+1} \mid Z_1, \dots, Z_i] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[A \mid Z_1 \dots Z_{i+1}] \mid Z_1, \dots, Z_i] \\ &= \mathbb{E}[A \mid Z_1 \dots Z_i] \\ &= X_i \end{aligned} \tag{42}$$

因此，X_i 是一个鞅。

$\triangleleft$

以上定义对应的鞅被称为关于 A 的 Doob martingale。
选取 $\mathcal{F}_i = \{Z_1, \dots, Z_i\}$，我们称一个随机变量 $T \in \{0, 1, 2, \dots\} \cup \{\infty\}$ 为一个停时，则事件 $\{T = i\}$ 关于 $\mathcal{F}_i$ 可测。即，已知 $\mathcal{F}_i$ 以后，$\{T = i\}$ 是否成立便可知晓，而不依赖此后的历史。例如第 1 次抛硬币朝上为一个停时，而第一次硬币朝下前的最后一次朝上便不构成一个停时。
若是停时满足 $\mathbb{E}[T] < \infty$ 且对于所有的 i 与某一指定常数 c 满足 $\mathbb{E}[|X_i - X_{i-1} \mid \mathcal{F}_i|] \leq c$，那么可以得到 $\mathbb{E}[X_T] = \mathbb{E}[X_0]$。

b (5') 一个赌徒一开始身无分文，他每局以相同的概率赢得一块钱或者输掉一块钱。如果他输了 a 块钱或者赢了 b 块钱便离开，其中 a, b 均为整数。求问他赢得 b 块钱的概率。

c (5') 求问他需要多少时间才会离开。请使用 $Y_i = X_i^2 - i$ 做变量代换。

Answer.

b 记 Z_i 为赌徒在 i 时刻赌博的结果，X_i 为 i 时刻他身上总共的钱，则容易证明 X_i 是一个鞅。因此可以定义 $T \in \{\mathbb{N} \mid X_T = -a \text{ or } X_T = b\}$ 为停时。根据停时定理有

$$\mathbb{E}[X_T] = \mathbb{E}[X_0] = 0 \tag{43}$$

由于 X_T 只有 $X_T = -a$ 或 $X_T = b$ 两种可能情况，可以设他最终赢得 b 块钱的概率为 p，输掉 a 块钱的概率为 $1-p$。因此有

$$\mathbb{E}[X_T] = p \times b + (1-p) \times (-a) = 0 \tag{44}$$

解得 $p = \frac{a}{a+b}$，即赌徒最后赢钱的概率是 $\frac{a}{a+b}$。

c 这里沿用上一问的记号，同时定义随机变量序列 $Y_i = X_i^2 - i$。首先证明 Y_i 是一个鞅

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y_{i+1} \mid Z_1,\dots,Z_i] &= \mathbb{E}\left[X_{i+1}^2 - (i+1) \mid Z_1,\dots,Z_i\right] \\
&= \mathbb{E}\left[(X_i + Z_{i+1})^2 - (i+1) \mid Z_1,\dots,Z_i\right] \\
&= \mathbb{E}\left[X_i^2 + 2X_iZ_{i+1} + Z_{i+1}^2 - (i+1) \mid Z_1,\dots,Z_i\right] \\
&= \mathbb{E}\left[X_i^2 - i \mid Z_1,\dots,Z_i\right] + \mathbb{E}\left[2X_iZ_{i+1} + Z_{i+1}^2 - 1 \mid Z_1,\dots,Z_i\right] \\
&= Y_i + \mathbb{E}\left[2X_iZ_{i+1} + Z_{i+1}^2 - 1 \mid Z_1,\dots,Z_i\right]
\end{aligned} \tag{45}$$

因此，我们只需要考察第二项 $\mathbb{E}\left[2X_iZ_{i+1} + Z_{i+1}^2 - 1 \mid Z_1,\dots,Z_i\right]$ 。注意到每次赌博的结果是相互独立的，且 $\mathbb{E}[Z_{i+1}] = 0$，$Z_{i+1}^2 = 1$，这样有

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[2X_iZ_{i+1} + Z_{i+1}^2 - 1 \mid Z_1,\dots,Z_i\right] &= 2X_i\mathbb{E}[Z_{i+1} \mid Z_1,\dots,Z_i] + \mathbb{E}\left[Z_{i+1}^2 \mid Z_1,\dots,Z_i\right] - 1 \\
&= 0
\end{aligned} \tag{46}$$

整理后得到

$$\mathbb{E}[Y_{i+1} \mid Z_1,\dots,Z_i] = Y_i \tag{47}$$

即 Y_i 是一个鞅。因此可以定义 $T \in \{\mathbb{N} \mid X_T = -a \text{ or } X_T = b\}$ 为停时。根据停时定理，有

$$\mathbb{E}[Y_T] = \mathbb{E}[Y_0] = 0 \tag{48}$$

因此

$$\mathbb{E}[Y_T] = \mathbb{E}[X_T^2 - T] = \mathbb{E}[X_T^2] - \mathbb{E}[T] = 0 \tag{49}$$

$$\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}[X_T^2] = a^2 \times \Pr[X_T = -a] + b^2 \times \Pr[X_T = b] \tag{50}$$

根据上一问可知 $\Pr[X_T = -a] = \frac{b}{a+b}$，$\Pr[X_T = b] = \frac{a}{a+b}$，因此有

$$\mathbb{E}[T] = a^2 \times \frac{b}{a+b} + b^2 \times \frac{a}{a+b} = ab \tag{51}$$

即平均需要 ab 的时间才能离开。

◁

◀

Question 5 (30') (代码填空).
请完成代码包中给出的任务。

◀