Homework #4

Due: 2024-5-14 00:00 | 1 Questions, 100 Pts

Name: 彭博

Question 1 (100') (插值). 假设采样点分布在 $x_i = 0, 1, 2, \cdots$ 的整点上，x_i 对应的采样值是 y_i，试求三阶厄米插值（课件第 16 页）在 Catmull-Rom 样条假设（课件第 17 页）下的基函数，最终应该得到的是如课件第 25 页所示那样的函数图形。

提示：你可以先代入 Catmull-Rom 样条假设的条件将插值曲线 $f(x)$ 写为仅包含采样值 y_i 而不包含 m_i 的形式，然后思考如果将这一关系转化为 $f(x) = \sum B_i y_i$。注意最终得到的基函数是一个分段函数。

◀

Answer. 三阶厄米插值在区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的表达式为：

$$y(x) = h_{00}(t)y_i + h_{10}(t)(x_{i+1} - x_i)m_i + h_{01}(t)y_{i+1} + h_{11}(t)(x_{i+1} - x_i)m_{i+1} \tag{1}$$

其中

$$\begin{cases} t = \dfrac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \\ h_{00}(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1 \\ h_{10}(t) = t^3 - 2t^2 + t \\ h_{01}(t) = -2t^3 + 3t^2 \\ h_{11}(t) = t^3 - t^2 \end{cases} \tag{2}$$

注意，当 $x < x_i$ 或 $x > x_{i+1}$ 时 $y \equiv 0$。

由于 Catmull-Rom 样条假设了均匀间隔的采样点，我们可以设 $x_{i+1} - x_i = l$，同时代入 $m_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2}$ 可以得到曲线在 $[x_i, x_{i+1}]$ 区间上的表达式：

$$\begin{aligned} y(x) &= h_{00}(t)y_i + h_{10}(t)\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2}l + h_{01}(t)y_{i+1} + h_{11}(t)\frac{y_{i+2} - y_i}{2}l \\ &= \Big(-\frac{l}{2}h_{10}(t)\Big)y_{i-1} + \Big(h_{00}(t) - \frac{l}{2}h_{11}(t)\Big)y_i + \Big(\frac{l}{2}h_{10}(t) + h_{01}(t)\Big)y_{i+1} + \Big(\frac{l}{2}h_{11}(t)\Big)y_{i+2} \end{aligned} \tag{3}$$

不难发现，插值曲线可以表示为基函数的线性组合 $y(x) = \sum B_i y_i$。其中基函数 B_i 是一个分段函数：

$$B_i = \begin{cases} \dfrac{l}{2}h_{11}(t), & x_{i-2} \le x \le x_{i-1} \\ \dfrac{l}{2}h_{10}(t) + h_{01}(t), & x_{i-1} \le x \le x_i \\ h_{00}(t) - \dfrac{l}{2}h_{11}(t), & x_i \le x \le x_{i+1} \\ -\dfrac{l}{2}h_{10}(t), & x_{i+1} \le x \le x_{i+2} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{4}$$

注意这里 t 为对应区间上的插值参数，其取值会随着数据点区间的变化而发生变化。当 x 位于均匀分布的数据点区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 中时，t 的表达式为：

$$t = \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \tag{5}$$

取区间端点 $x_{i-2} = 0$、$x_{i-1} = 1$、$x_i = 2$、$x_{i+1} = 3$、$x_{i+2} = 4$，可以得到基函数 B_i 的图像如下：

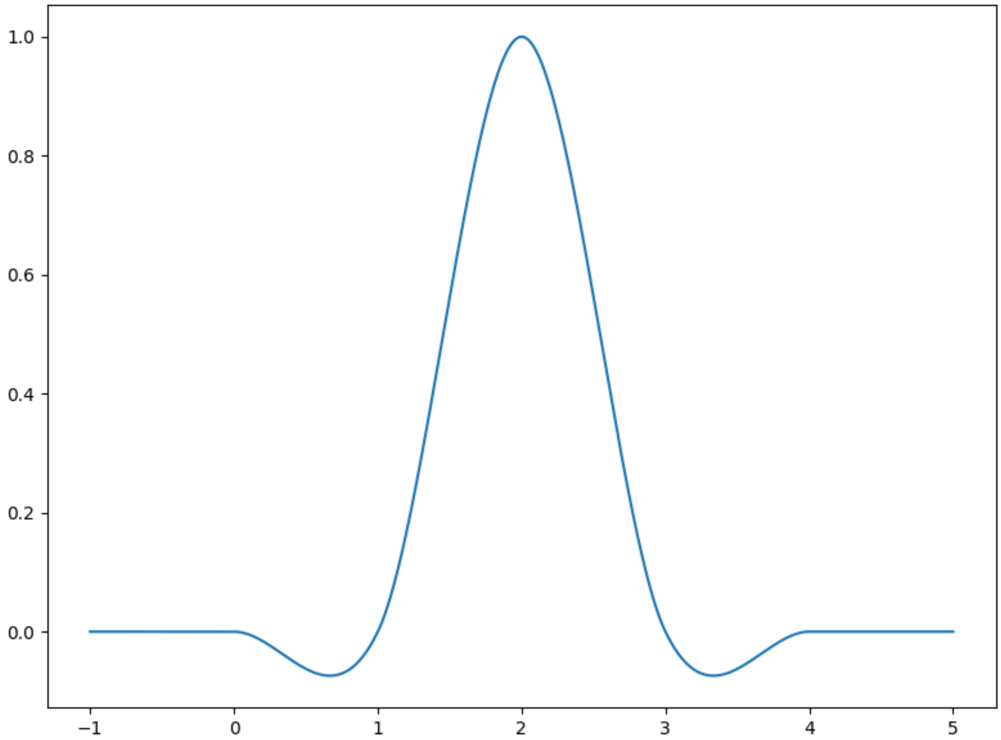

图 1: 基函数 B_i

◁