Homework #7

Due: 2024-6-25 00:00 | 5 Questions, 100 Pts

Name: 彭博

Question 1 (42') (矢量微分恒等式).

已知 φ 为标量场函数，$\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ 为矢量场函数，$\mathbf{a}$ 为任意矢量，请证明如下恒等式：

a (7')

$$\nabla(\varphi\mathbf{v}) = \varphi(\nabla\mathbf{v}) + (\nabla\varphi)\mathbf{v}$$

b (7')

$$\nabla(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) = (\nabla\mathbf{v})\cdot\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})\cdot\mathbf{v}$$

c (7')

$$(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{v})\times\mathbf{a} = [\mathbf{v}\nabla - \nabla\mathbf{v}]\cdot\mathbf{a}$$

d (7')

$$\nabla(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) = \mathbf{u}\times(\nabla\times\mathbf{v}) + \mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{u}) + \mathbf{u}\cdot(\nabla\mathbf{v}) + \mathbf{v}\cdot(\nabla\mathbf{u})$$

e (7')

$$\nabla\times(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = \mathbf{v}\cdot(\nabla\mathbf{u}) - \mathbf{v}(\nabla\cdot\mathbf{u}) + \mathbf{u}(\nabla\cdot\mathbf{v}) - \mathbf{u}\cdot(\nabla\mathbf{v})$$

f (7') 若 $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u} = 0$，$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u} = 0$，则 $\mathbf{u}$ 为调和函数，即

$$\nabla\cdot\nabla\mathbf{u} = 0.$$

◀

Answer. 为方便证明，这里假设场函数和矢量都位于 $\mathbb{E}^3$ 空间中并且使用张量记号来进行推导。由于假定了欧式空间，我们可以不再区分协变和逆变，把指标统一记为下标。

a

$$\begin{aligned}\nabla(\varphi\mathbf{v}) &= \frac{\partial}{\partial x_i}(\varphi v_j)\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j \\ &= \varphi\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j + v_j\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j \\ &= \varphi(\nabla\mathbf{v}) + (\nabla\varphi)\mathbf{v}\end{aligned} \tag{1}$$

b 恒等式左边展开为

$$\begin{aligned}\nabla(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) = \nabla(u_i v_i) &= \frac{\partial u_i v_i}{\partial x_j}\boldsymbol{e}_j \\ &= v_i\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\boldsymbol{e}_j + u_i\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\boldsymbol{e}_j\end{aligned} \tag{2}$$

同时，恒等式右边可以分别展开为

$$\begin{aligned}(\nabla\mathbf{v})\cdot\mathbf{u} &= \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\right)\cdot u_k\boldsymbol{e}_k \\ &= u_j\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i\end{aligned} \tag{3}$$

$$
\begin{aligned}
(\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} &= \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\right) \cdot v_k \boldsymbol{e}_k \\
&= v_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i
\end{aligned} \tag{4}
$$

因此，恒等式成立

$$
\nabla(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) = (\nabla \mathbf{v})\cdot\mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})\cdot\mathbf{v} \tag{5}
$$

c 恒等式左边展开为

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{a} &= \left(\varepsilon_{ijk}\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_k\right) \times \mathbf{a} \\
&= \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\frac{\partial v_j}{\partial x_i} a_l \boldsymbol{e}_m \\
&= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\frac{\partial v_j}{\partial x_i} a_l \boldsymbol{e}_m \\
&= \frac{\partial v_j}{\partial x_i} a_i \boldsymbol{e}_j - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} a_j \boldsymbol{e}_i \\
&= (\mathbf{v}\nabla)\cdot\mathbf{a} - (\nabla\mathbf{v})\cdot\mathbf{a} \\
&= [\mathbf{v}\nabla - \nabla\mathbf{v}]\cdot\mathbf{a}
\end{aligned} \tag{6}
$$

d 恒等式左边展开为

$$
\nabla(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) = v_i\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\boldsymbol{e}_j + u_i\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\boldsymbol{e}_j \tag{7}
$$

同时，恒等式右边可以分别展开为

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{v}) &= \varepsilon_{ijk} u_i (\nabla \times \mathbf{v})_j \boldsymbol{e}_k \\
&= \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmj} u_i \frac{\partial v_m}{\partial x_l}\boldsymbol{e}_k \\
&= -(\delta_{il}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{kl}) u_i \frac{\partial v_m}{\partial x_l}\boldsymbol{e}_k \\
&= u_i\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\boldsymbol{e}_k - u_i\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_k \\
&= u_i\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\boldsymbol{e}_j - u_i\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_j
\end{aligned} \tag{8}
$$

$$
\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{u}) = v_i\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\boldsymbol{e}_j - v_i\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_j \tag{9}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}\cdot(\nabla\mathbf{v}) &= \mathbf{u}\cdot\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\right) \\
&= u_i\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_j
\end{aligned} \tag{10}
$$

$$
\mathbf{v}\cdot(\nabla\mathbf{u}) = v_i\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_j \tag{11}
$$

将恒等式右边各项累加，得到

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}\times(\nabla\times\mathbf{v}) + \mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{u}) + \mathbf{u}\cdot(\nabla\mathbf{v}) + \mathbf{v}\cdot(\nabla\mathbf{u}) &= u_i\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\boldsymbol{e}_j + v_i\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\boldsymbol{e}_j \\
&= \nabla(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})
\end{aligned} \tag{12}
$$

e 恒等式左边展开为

$$
\begin{aligned}
\nabla\times(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) &= \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_i}(\mathbf{u}\times\mathbf{v})_j\boldsymbol{e}_k \\
&= \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmj}\frac{\partial}{\partial x_i}(u_l v_m)\boldsymbol{e}_k \\
&= -(\delta_{il}\delta_{km}-\delta_{im}\delta_{kl})\frac{\partial}{\partial x_i}(u_l v_m)\boldsymbol{e}_k \\
&= (\delta_{im}\delta_{kl}-\delta_{il}\delta_{km})\left(v_m\frac{\partial u_l}{\partial x_i}+u_l\frac{\partial v_m}{\partial x_i}\right)\boldsymbol{e}_k \\
&= v_i\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_k+u_k\frac{\partial v_i}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_k-v_k\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_k-u_i\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_k \\
&= \mathbf{v}\cdot(\nabla\mathbf{u})+\mathbf{u}(\nabla\cdot\mathbf{v})-\mathbf{v}(\nabla\cdot\mathbf{u})-\mathbf{u}\cdot(\nabla\mathbf{v})
\end{aligned}
\tag{13}
$$

f 恒等式左边展开为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u}) &= \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_i}(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u})_j\boldsymbol{e}_k \\
&= \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\varepsilon_{lmj}\frac{\partial u_m}{\partial x_l}\right)\boldsymbol{e}_k \\
&= \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmj}\frac{\partial^2 u_m}{\partial x_i\partial x_l}\boldsymbol{e}_k \\
&= (\delta_{im}\delta_{kl}-\delta_{il}\delta_{km})\frac{\partial^2 u_m}{\partial x_i\partial x_l}\boldsymbol{e}_k \\
&= \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i\partial x_k}\boldsymbol{e}_k-\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i\partial x_i}\boldsymbol{e}_k \\
&= \nabla(\nabla\cdot\mathbf{u})-(\nabla\cdot\nabla)\mathbf{u} \\
&= \mathbf{0}
\end{aligned}
\tag{14}
$$

因此有

$$
\begin{aligned}
(\nabla\cdot\nabla)\mathbf{u} &= \nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}) \\
&= \nabla(\mathbf{0}) \\
&= \mathbf{0}
\end{aligned}
\tag{15}
$$

即 $\mathbf{u}$ 为调和函数。

◁

Question 2 (18') (亥姆霍兹分解).

a (9') 若矢量场 $\mathbf{A}$ 满足 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$，试证明必存在向量势函数 $\boldsymbol{\psi}$ 使得 $\mathbf{A} = \nabla \times \boldsymbol{\psi}$.

b (9') 若矢量场 $\mathbf{A}$ 满足 $\nabla \times \mathbf{A} = 0$，试证明必存在标量势函数 ϕ 使得 $\mathbf{A} = \nabla\phi$.

◀

Answer.

a 首先证明旋度场的散度恒为 0，即 $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{F} \equiv 0$：

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{F} = \nabla \cdot \left(\varepsilon_{ijk} \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \boldsymbol{e}_k \right) = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 F_j}{\partial x_i \partial x_k} \tag{16}$$

对于任意给定的 F_j ，对应的求和项求和后为 0：

$$\varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 F_j}{\partial x_i \partial x_k} + \varepsilon_{kji} \frac{\partial^2 F_j}{\partial x_k \partial x_i} = 0 \tag{17}$$

因此，旋度场的散度恒为 0。取 $\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{F}$ 即可。

b 首先证明散度场的旋度恒为 0，即 $\nabla \times \nabla\phi \equiv 0$：

$$\nabla \times \nabla\phi = \nabla \times \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_j} \boldsymbol{e}_j \right) = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} \boldsymbol{e}_k \tag{18}$$

对于任意给定的 $\boldsymbol{e}_k$ ，对应的求和项求和后为 0：

$$\varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} + \varepsilon_{jik} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_i} = 0 \tag{19}$$

因此，散度场的旋度恒为 0。取 $\mathbf{A} = \nabla\phi$ 即可。

◁

我们为一个集合 V 配备了加法 $+:(V,V)\to V$ 和数乘 $(\mathbb{R},V)\to V$，便构成了一个（$\mathbb{R}$ 上的）线性空间。其上的加法需要满足结合律、交换律，并具有单位元与逆元；其上的数乘需要关于加法满足分配律。该线性空间中的元素 $v\in V$ 被我们称为矢量。

我们将标量线性函数 $\alpha: V\xrightarrow{\text{linear}}\mathbb{R}$ 为余矢量。包含了全体余矢量的空间 V^* 被我们称为关于 V 的对偶空间。若 V 为有限维空间，那么 $\dim V=\dim V^*$. 对于有限维矢量空间 V 中的任意一组基底 $\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n$，将存在一组 V^* 中唯一一组基底 $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ 满足

$$\alpha_i(\boldsymbol{e}_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$$

这组基底被称为对偶基。这些对偶基可以提取出矢量在基底下的系数，即

$$\boldsymbol{v}=\alpha_1(\boldsymbol{v})\boldsymbol{e}_1+\cdots+\alpha_n(\boldsymbol{v})\boldsymbol{e}_n.$$

我们扩展这一概念，称多元线性函数

$$\omega:\underbrace{V\times\cdots\times V}_{k}\xrightarrow{\text{multilinear}}\mathbb{R}$$

为 k-形式。该 k-形式需要满足斜对称性，即

$$\omega(\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_i,\dots,\boldsymbol{v}_j,\dots,\boldsymbol{v}_k)=-\omega(\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_j,\dots,\boldsymbol{v}_i,\dots,\boldsymbol{v}_k).$$

我们将包含了全体 k-形式的空间记作 $\mathrm{Alt}^k V=\bigwedge^k V^*$, 并将流形 M 上的 k-形式场记作 $\Gamma(\mathrm{Alt}^k TM)=\Omega^k(M)$。若 $\dim V=n$，那么排列组合可得

$$\dim\left(\bigwedge^k V^*\right)=\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Question 3 (15') (外积).

我们对于微分形式可以定义一种新的乘法，叫做外积

$$\wedge:\bigwedge^k V^*\times\bigwedge^l V^*\to\bigwedge^{k+l} V^*,$$

满足结合律 $(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma=\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma)$, 且 1-形式为关于该乘法的迷向向量，即对于任意的 $\alpha\in V^*$ 满足 $\alpha\wedge\alpha=0$.

a (5') 请验证对于任意的 $\alpha,\beta\in V^*$，满足 $\alpha\wedge\beta=-\beta\wedge\alpha$。

b (5') 更一般地，对于 $\sigma\in\bigwedge^k V^*,\omega\in\bigwedge^l V^*$，满足 $\sigma\wedge\omega=(-1)^{kl}\omega\wedge\sigma$.

由于外积运算的定义，我们可以对 1-形式做外积来得到 k-形式。对于 $\alpha_1,\dots,\alpha_k\in V^*$，可以得到 k-形式 $(\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_k)$ 为

$$(\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_k)(\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_k)=\det\begin{pmatrix}\alpha_1(\boldsymbol{v}_1) & \cdots & \alpha_1(\boldsymbol{v}_k)\\ \vdots & & \vdots\\ \alpha_k(\boldsymbol{v}_1) & \cdots & \alpha_k(\boldsymbol{v}_k)\end{pmatrix}.$$

c (5') 选取 $\left(\mathbb{R}^4\right)^*$ 中的基底为 $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z, \mathrm{d}t$. 对于 2-形式 $\alpha = u_{12}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + u_{24}\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}t + u_{34}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t$ 与 1-形式 $\beta = w_2\,\mathrm{d}y + w_3\,\mathrm{d}z$，计算 $\alpha \wedge \beta$ 与 $\alpha \wedge \alpha$.

◀

Answer.

a 取 $\gamma = (\alpha + \beta) \in V^*$，则有

$$\begin{aligned}\gamma \wedge \gamma &= (\alpha+\beta) \wedge (\alpha+\beta) \\ &= \alpha\wedge\alpha + \alpha\wedge\beta + \beta\wedge\alpha + \beta\wedge\beta \\ &= \alpha\wedge\beta + \beta\wedge\alpha \\ &= 0\end{aligned} \tag{20}$$

因此 $\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha$。

b 令 $\sigma = \sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \cdots \wedge \sigma_k$，$\omega = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_l$ ，则有

$$\sigma \wedge \omega = (\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \cdots \wedge \sigma_k) \wedge (\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_l) \tag{21}$$

$$\omega \wedge \sigma = (\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_l) \wedge (\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \cdots \wedge \sigma_k) \tag{22}$$

即 $\sigma \wedge \omega$ 与 $\omega \wedge \sigma$ 之间相差一个 1-form 的排序。因此我们可以将 $(\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_l)$ 中的每一项依次向前移动 k 个位置来得到排序后的基。根据反对称性，每次向前移动一位需要乘以一次 -1。这样有

$$\sigma \wedge \omega = (-1)^{kl}\omega \wedge \sigma \tag{23}$$

c

$$\begin{aligned}\alpha \wedge \beta &= (u_{12}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + u_{24}\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}t + u_{34}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t) \wedge (w_2\,\mathrm{d}y + w_3\,\mathrm{d}z) \\ &= w_2 u_{34}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}y + w_3 u_{12}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + w_3 u_{24}\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}z \\ &= w_3 u_{12}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + (w_2 u_{34} - w_3 u_{24})\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t\end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}\alpha \wedge \alpha = (&u_{12}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + u_{24}\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}t + u_{34}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t) \\ &\wedge (u_{12}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + u_{24}\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}t + u_{34}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t) \\ &= u_{12}u_{34}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t + u_{12}u_{34}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\ &= 2u_{12}u_{34}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t\end{aligned} \tag{25}$$

◁

我们为矢量空间配置一个非退化的对称双线性形式

$$\flat : V \to V^*,$$

则该矢量空间可以被称为度量空间。该度量可逆，其逆为 $\sharp = \flat^{-1} : V^* \to V$；对称，即 $\flat(\boldsymbol{u})(\boldsymbol{v}) = \flat(\boldsymbol{v})(\boldsymbol{u})$。我们将 $\flat(\boldsymbol{u})$ 记作 $\boldsymbol{u}^\flat \in V^*$.

对于三维平直空间 $\mathbb{R}^3$ 而言，选取其正交基底为 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$，则 $\boldsymbol{e}_1^\flat, \boldsymbol{e}_2^\flat, \boldsymbol{e}_3^\flat$ 为 $(\mathbb{R}^3)^*$ 上的对偶基底。那么对于任一矢量 $\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{e}_1 + u_2\boldsymbol{e}_2 + u_3\boldsymbol{e}_3$ 可以被写为 1-形式

$$\boldsymbol{u}^b = u_1\boldsymbol{e}_1^\flat + u_2\boldsymbol{e}_2^\flat + u_3\boldsymbol{e}_3^\flat \in (\mathbb{R}^3)^*$$

或者 2-形式

$$\star\boldsymbol{u}^b = u_1\left(\boldsymbol{e}_2^\flat \wedge \boldsymbol{e}_3^\flat\right) + u_2\left(\boldsymbol{e}_3^\flat \wedge \boldsymbol{e}_1^\flat\right) + u_3\left(\boldsymbol{e}_1^\flat \wedge \boldsymbol{e}_2^\flat\right) \in \bigwedge^2(\mathbb{R}^3)^*.$$

将 3-形式的基底 $\boldsymbol{e}_1^\flat \wedge \boldsymbol{e}_2^\flat \wedge \boldsymbol{e}_3^\flat$ 简记为 $\det$，对于 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3$，$\alpha = \boldsymbol{a}^\flat, \beta = \boldsymbol{b}^\flat, \omega = \star\boldsymbol{w}^\flat$，可以得到：

- 1-形式间的外积对应于叉乘 $\alpha \wedge \beta = \star(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})^\flat$.
- 1-形式与 2-形式间的外积对应于点乘 $\alpha \wedge \omega = \omega \wedge \alpha = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{w} \det$.
- 作用在 1-形式上的内积对应于点乘 $i_{\boldsymbol{a}}\beta = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$.
- 作用在 2-形式上的内积对应于叉乘 $i_{\boldsymbol{a}}\omega = (\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{a})^\flat$.
- 作用在 3-形式上的内积给出该矢量与其 2-形式的对应 $i_{\boldsymbol{w}} \det = \omega$.

其中描述的内积算子 $i_{\boldsymbol{a}} : \bigwedge^k V^* \to \bigwedge^{k-1} V^*$，满足

- 对于所有的 $\beta \in V^*$，$i_{\boldsymbol{a}}\beta = \beta(\boldsymbol{a})$.
- **Leibniz 规则**。对于 $\eta \in \bigwedge^k V^*$，$i_{\boldsymbol{a}}(\eta \wedge \sigma) = (i_{\boldsymbol{a}}\eta) \wedge \sigma + (-1)^k \eta \wedge (i_{\boldsymbol{a}}\sigma)$.
- **链复形**。$i_{\boldsymbol{a}} i_{\boldsymbol{a}} = 0$.
- 实践中,可以将矢量 $\boldsymbol{a}$ 插入到其作用的第一个位置上,即 $(i_{\boldsymbol{a}}\eta)(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_{k-1}) = \eta(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_{k-1})$.

Question 4 (9') (内积).
使用 Leibniz 规则与三维空间中对应的矢量形式，验证以下结论

a (4') $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$ 满足 $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$.

b (5') $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^3$ 满足 $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d})$.

◀

Answer.

a 取 $\alpha = \boldsymbol{a}^\flat$，$\beta = \boldsymbol{b}^\flat$，$\gamma = \boldsymbol{c}^\flat$。根据内积的定义和 Leibniz 规则有

$$\begin{aligned} i_{\boldsymbol{a}}(\beta \wedge \gamma) &= i_{\boldsymbol{a}}(\beta) \wedge \gamma - \beta \wedge i_{\boldsymbol{a}}(\gamma) \\ &= \beta(\boldsymbol{a})\gamma - \gamma(\boldsymbol{a})\beta \\ &= (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\gamma - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\beta \end{aligned} \tag{26}$$

另一方面，

$$i_{\boldsymbol{a}}(\beta \wedge \gamma) = ((\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \times \boldsymbol{a})^\flat \tag{27}$$

对上面两个式子同时取 $\sharp$ 即可

$$(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \times \boldsymbol{a} \tag{28}$$

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} \tag{29}$$

b 取 $\alpha = \boldsymbol{a}^\flat$，$\beta = \boldsymbol{b}^\flat$，$\gamma = \boldsymbol{c}^\flat$，$\delta = \boldsymbol{d}^\flat$。根据上一问的推导可以得到

$$\begin{aligned} i_{\boldsymbol{a}}(\gamma \wedge \delta) &= (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\delta - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d})\gamma \\ &= ((\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) \times \boldsymbol{a})^\flat \end{aligned} \tag{30}$$

继续和 $\boldsymbol{b}$ 作内积，有

$$\begin{aligned} i_{\boldsymbol{b}}\big(i_{\boldsymbol{a}}(\gamma \wedge \delta)\big) &= (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\delta(\boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d})\gamma(\boldsymbol{b}) \\ &= (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d}) \\ &= i_{\boldsymbol{b}}\big(((\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) \times \boldsymbol{a})^\flat\big) \\ &= \boldsymbol{b} \cdot ((\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) \times \boldsymbol{a}) \end{aligned} \tag{31}$$

结合矢量混合积的性质，有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{b} \cdot ((\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) \times \boldsymbol{a}) &= (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \\ &= (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) \end{aligned} \tag{32}$$

整理之后得到

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d}) \tag{33}$$

$\triangleleft$

选取标量场 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ 与矢量场 $\boldsymbol{v}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$，我们可以将 $\boldsymbol{v}=v_1\boldsymbol{e}_1+v_2\boldsymbol{e}_2+v_3\boldsymbol{e}_3$ 写成 1-形式 $\boldsymbol{v}^b=v_1\,\mathrm{d}x+v_2\,\mathrm{d}y+u_3\,\mathrm{d}z$ 或者 2-形式 $\star\boldsymbol{v}^b=i_{\boldsymbol{v}}\det=v_1(\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z)+v_2(\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x)+v_3(\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y)$. 外微分 $\mathrm{d}:\Omega^k(M)\to\Omega^{k+1}(M)$ 由与内积算子一致的方法定义为

- 作用在 0-形式 f 上得到的 $\mathrm{d}f$ 即为关于其微分。
- **链复形**。$\mathrm{d}\circ\mathrm{d}=0$.
- **Leibniz 规则**。对于 $\omega\in\bigwedge^k V^*$，$\mathrm{d}(\omega\wedge\sigma)=(\mathrm{d}\omega)\wedge\sigma+(-1)^k\omega\wedge(\mathrm{d}\sigma)$.

那么

- d 作用在 0-形式得到梯度
$$\boldsymbol{\nabla} f=(\mathrm{d}f)^\sharp.$$
- d 作用在 1-形式得到旋度
$$(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v})^\flat=\star\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}^\flat\,.$$
- d 作用在 2-形式得到散度
$$(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v})\det=\mathrm{d}\star\boldsymbol{v}^\flat=\mathrm{d}i_{\boldsymbol{v}}\det\,.$$

Question 5 (16’) (外微分).
选取 $f,g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ 为三维空间中的标量场，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 为三维空间中的矢量场。请根据以上知识证明：

a (4’) $\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{b})$.

b (4’) $\boldsymbol{\nabla}\cdot(f\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{\nabla}f)\cdot\boldsymbol{a}+f\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{a}$.

c (4’) $\boldsymbol{\nabla}\times(f\boldsymbol{a})=\boldsymbol{\nabla}f\times\boldsymbol{a}+f\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{a}$.

d (4’) $\boldsymbol{\nabla}\times(f\boldsymbol{\nabla}g)=\boldsymbol{\nabla}f\times\boldsymbol{\nabla}g$.

◀

Answer.

a 取 $\alpha=\boldsymbol{a}^\flat$，$\beta=\boldsymbol{b}^\flat$。根据外微分的定义和 Leibniz 规则有：

$$\mathrm{d}(\alpha\wedge\beta)=(\mathrm{d}\alpha)\wedge\beta-\alpha\wedge(\mathrm{d}\beta) \tag{34}$$

注意到左边进行微分的 2-形式对应于叉乘：

$$\alpha\wedge\beta=\star(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^\flat \tag{35}$$

结合外微分算子和散度的关系式有：

$$\mathrm{d}(\alpha\wedge\beta)=\mathrm{d}\star(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^\flat=\big(\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\big)\det \tag{36}$$

接下来考虑右边的微分式 $(\mathrm{d}\alpha)\wedge\beta$。记 2-形式 $\omega=\mathrm{d}\alpha=\star\boldsymbol{w}^\flat$ ，可以得到

$$(\mathrm{d}\alpha)\wedge\beta=\omega\wedge\beta=\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{b}\det \tag{37}$$

结合外微分算子和旋度的关系式有：

$$\begin{aligned}\star\,\mathrm{d}\alpha&=\star\,\mathrm{d}\boldsymbol{a}^\flat=(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{a})^\flat\\&=\star\omega=\boldsymbol{w}^\flat\end{aligned} \tag{38}$$

即 $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{w}$，因此

$$(\mathrm{d}\alpha)\wedge\beta=\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{b}\det=\big((\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}\big)\det \tag{39}$$

类似地，

$$\alpha\wedge(\mathrm{d}\beta)=\big(\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{b})\big)\det \tag{40}$$

整理一下，得到：

$$\big(\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\big)\det=\big((\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}\big)\det-\big(\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{b})\big)\det \tag{41}$$

即：

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{b}) \tag{42}$$

b 取 $\alpha=\boldsymbol{a}^\flat$。根据外微分的定义和 Leibniz 规则有：

$$\mathrm{d}\star(f\alpha)=\mathrm{d}f(\star\alpha)=\mathrm{d}f\wedge\star\alpha+f\,\mathrm{d}\star\alpha \tag{43}$$

结合外微分算子和散度的关系式有：

$$\mathrm{d}\star(f\alpha)=\mathrm{d}\star(f\boldsymbol{a})^\flat=\big(\boldsymbol{\nabla}\cdot(f\boldsymbol{a})\big)\det \tag{44}$$

$$f\,\mathrm{d}\star\alpha=f\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{a}\det \tag{45}$$

根据 1-形式与 2-形式之间的外积对应于点乘，有

$$\mathrm{d}f\wedge\star\alpha=(\boldsymbol{\nabla}f)\cdot\boldsymbol{a}\det \tag{46}$$

整理一下，得到：

$$\big(\boldsymbol{\nabla}\cdot(f\boldsymbol{a})\big)\det=(\boldsymbol{\nabla}f)\cdot\boldsymbol{a}\det+f\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{a}\det \tag{47}$$

即：

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(f\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{\nabla}f)\cdot\boldsymbol{a}+f\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{a} \tag{48}$$

c 取 $\alpha=\boldsymbol{a}^\flat$。根据外微分的定义和 Leibniz 规则有：

$$\mathrm{d}(f\alpha)=\mathrm{d}f\wedge\alpha+f\,\mathrm{d}\alpha \tag{49}$$

对等式两边同时取 $\star$ 得到：

$$\star\,\mathrm{d}(f\alpha)=\star(\mathrm{d}f\wedge\alpha)+f\star\mathrm{d}\alpha \tag{50}$$

结合外微分算子和旋度的关系式有：

$$\star\,\mathrm{d}(f\alpha)=\star\,\mathrm{d}(f\boldsymbol{a})^\flat=\big(\boldsymbol{\nabla}\times(f\boldsymbol{a})\big)^\flat \tag{51}$$

$$f \star \mathrm{d}\alpha = f(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{a})^\flat \tag{52}$$

结合外微分算子和梯度以及叉乘的关系式有:

$$\mathrm{d}f \wedge \alpha = (\boldsymbol{\nabla} f)^\flat \wedge \alpha = \star(\boldsymbol{\nabla} f \times \alpha)^\flat \tag{53}$$

$$\star(\mathrm{d}f \wedge \alpha) = (\boldsymbol{\nabla} f \times \alpha)^\flat \tag{54}$$

整理一下，得到:

$$\left(\boldsymbol{\nabla} \times (f\boldsymbol{a})\right)^\flat = (\boldsymbol{\nabla} f \times \alpha)^\flat + (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{a})^\flat \tag{55}$$

对等式两边同时取 $\sharp$ 即可:

$$\boldsymbol{\nabla} \times (f\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{\nabla} f \times \alpha + f\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{a} \tag{56}$$

d 根据上一问的恒等式可以得知

$$\boldsymbol{\nabla} \times (f\boldsymbol{\nabla} g) = \boldsymbol{\nabla} f \times \boldsymbol{\nabla} g + f(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} g) \tag{57}$$

因此只需证明 $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} g \equiv 0$。根据外微分的链复形性质有

$$\mathrm{d} \circ \mathrm{d}g \equiv 0 \tag{58}$$

其中

$$\mathrm{d}g = (\boldsymbol{\nabla} g)^\flat \tag{59}$$

结合外微分算子和旋度的关系式有:

$$\begin{aligned} \star\mathrm{d}(\mathrm{d}g) &= \star\mathrm{d}(\boldsymbol{\nabla} g)^\flat = (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} g)^\flat \\ &= 0 \end{aligned} \tag{60}$$

因此

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} g \equiv 0 \tag{61}$$

这样就证明了所需的恒等式

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} \times (f\boldsymbol{\nabla} g) &= \boldsymbol{\nabla} f \times \boldsymbol{\nabla} g + f(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} g) \\ &= \boldsymbol{\nabla} f \times \boldsymbol{\nabla} g \end{aligned} \tag{62}$$

$\triangleleft$