# 第2、3章 基础知识

2.1 确知信号

2.2 带通信号

# 2.1 确知信号

信号 — 某个随时间变化的电子或电气物理量，如电压 $v(t)$ 或电流 $i(t)$。

信号分析主要包括两个方面：

- 原域（比如时域）的分析
- 变换域（比如频域）的分析

**时域描述：**

波形，周期，直流分量，功率，分贝，……

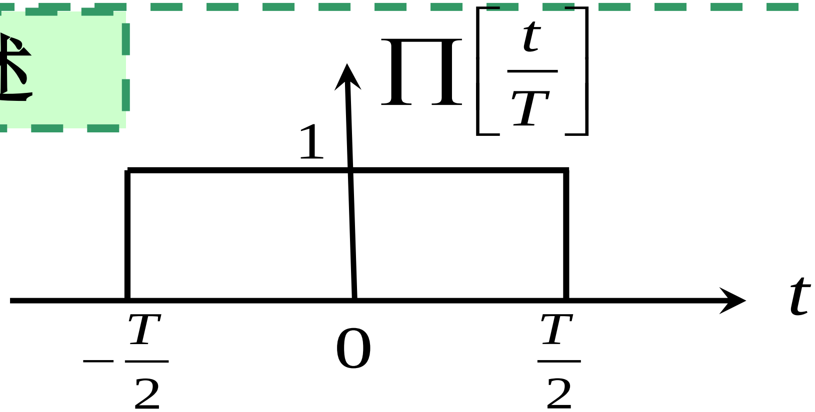
**频域描述：**

频率，带宽，……

# 2.1.1 信号的时频域描述

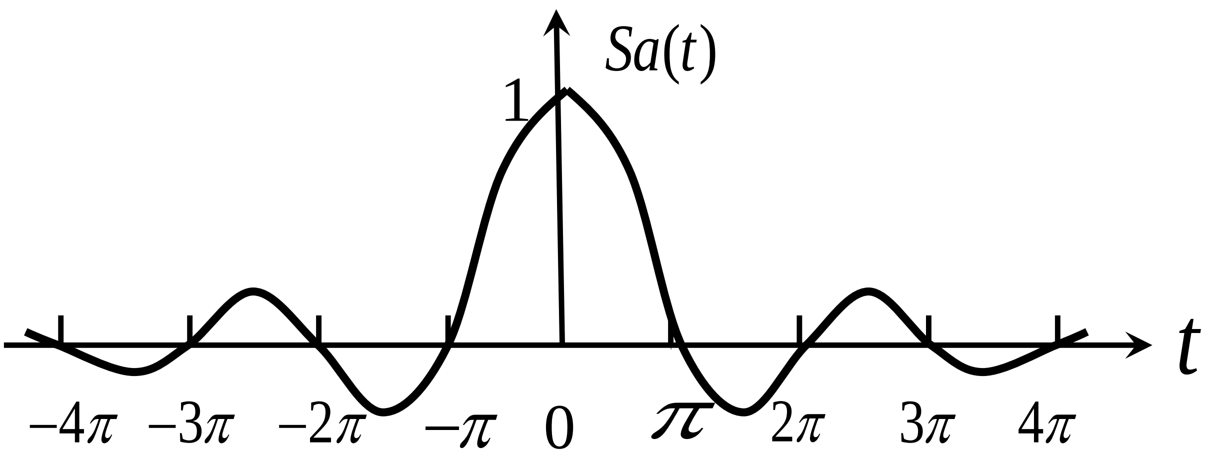
☆ 波形

## 时域描述



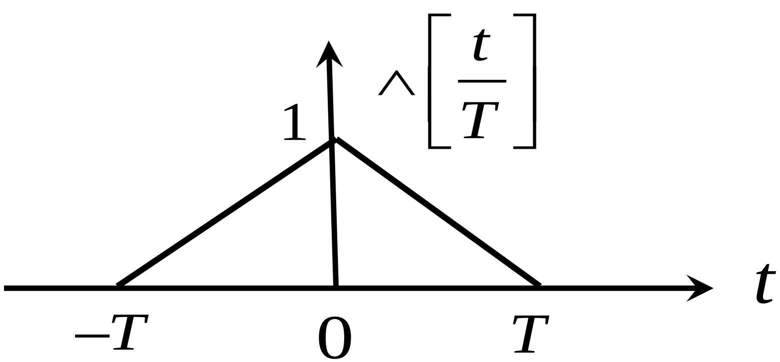

$$\Pi\left[\frac{t}{T}\right]=\begin{cases}1 & |t|\le T/2\\ 0 & |t|>T/2\end{cases}$$

矩形脉冲




$$Sa(t)=\frac{\sin t}{t}$$

Sa( ) 函数




$$\wedge\left[\frac{t}{T}\right]=\begin{cases}1-|t|/T & |t|\le T\\ 0 & |t|>T\end{cases}$$

三角函数

## 时域描述

☆ 波形的各种不同分类

1. 信号或噪声

2. 数字或模拟

3. 确定或随机

4. 周期或非周期

5. 功率或能量类型

6. 物理可实现或物理不可实现

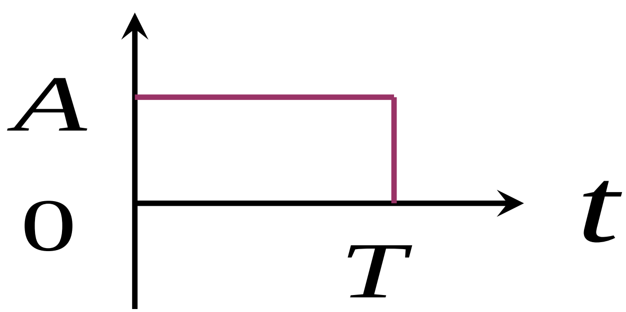
注意：以后用 $x(t)$ 表示任意信号，$v(t)$ 表示电压信号，$i(t)$ 表示电流信号。

# 数字和模拟波形

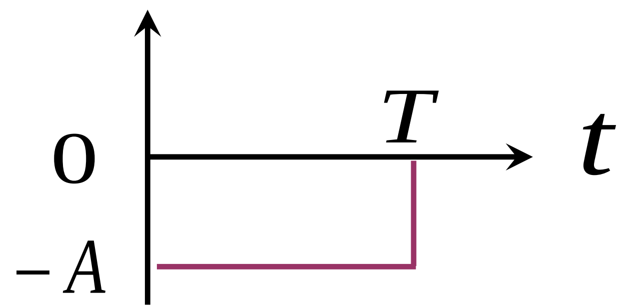
## 1. 数字波形

定义：取离散幅度值的时间函数

例子：




"1"



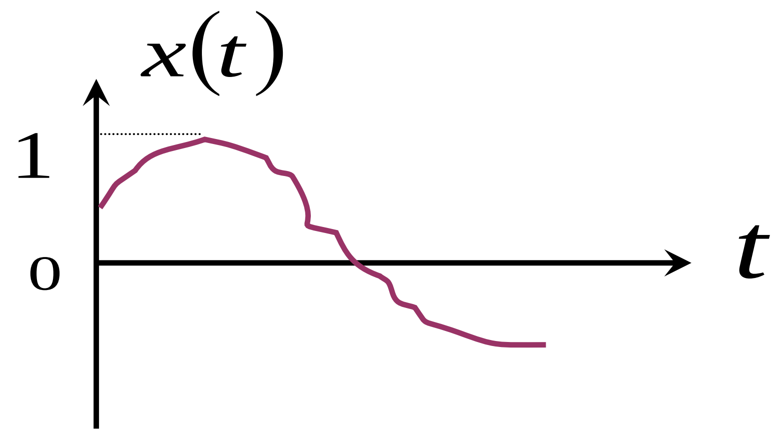

"0"

应用：在数字通信系统中传输信号

## 2. 模拟波形

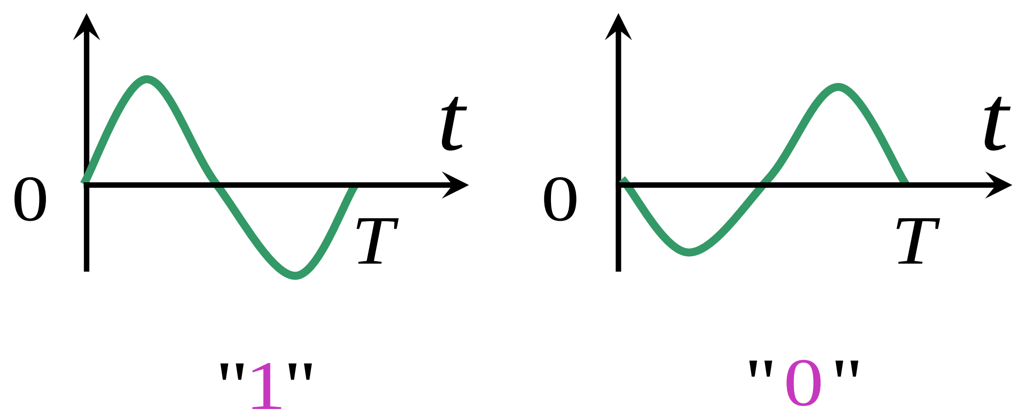
定义：取连续幅度值的时间函数

例子：



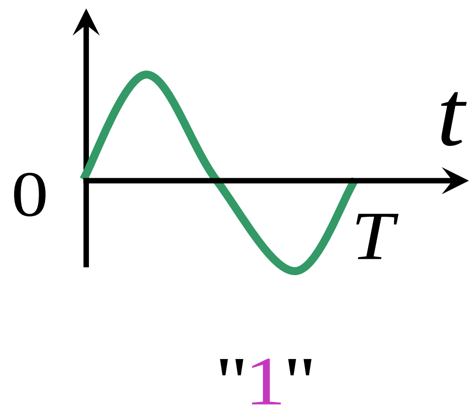

应用：在模拟和数字通信系统中传输信号

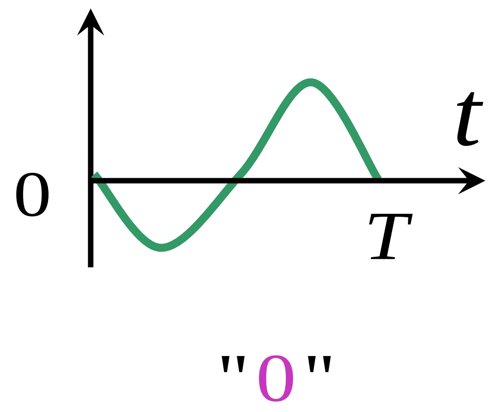
如数字系统中：




称为数字信号的模拟传送方式。

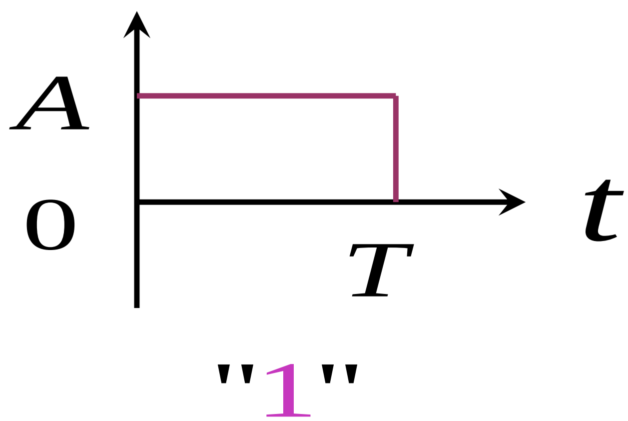
如数字系统中：

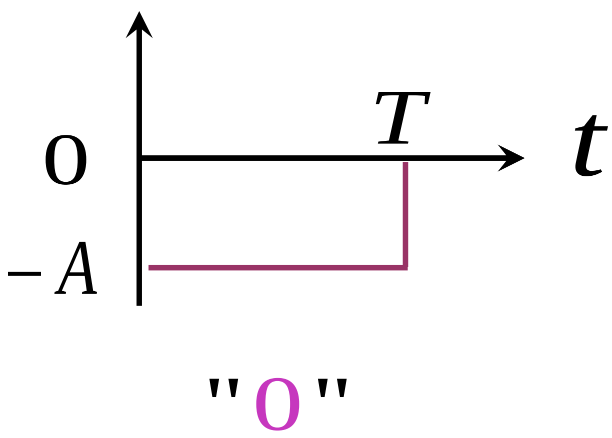



称为数字信号的模拟传送方式。

对应的，**1**中的数字波形：




称为数字信号的数字传送方式。

# 时域描述

☆ 周期　　☆ 直流分量

## 1. 周期信号

$$x(t)=x(t+T)$$

T: 周期　　1/T : 基频

## 2. 直流分量

☆ 时间平均算子　$\overline{[\ \cdot\ ]}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}[\ \cdot\ ]dt$

信号的直流分量

$$x_{dc}=\overline{x(t)}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t)dt$$

## 3. 功率与能量

信号的**能量**：

$$E = \lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T} x^2(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt$$

信号的**功率**：

$$P = \overline{x^2(t)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x^2(t)dt$$

**物理意义**：电路中的电流或电压信号，在**单位电阻**（1欧姆）上的消耗的能量或功率。

信号有两种类型：

1. **功率**信号：功率P为有限值, 而能量E为无穷大。

2. **能量**信号：能量E为有限值，而功率P为零。

## 4. 均方根值：

$$\overline{x^2(t)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x^2(t)dt$$

$$x_{rms} = \sqrt{\overline{x^2(t)}}$$

幅度的一种度量，例如：

(1) 直流：　$x(t) = B \Rightarrow x_{rms} = B$

(2) 正弦波：　$x(t) = B\cos(2\pi ft + \theta) \Rightarrow x_{rms} = 0.707B$

基于 $x_{rms}$ 计算功率：　$P = x_{rms}^2$

## 5. 分贝：

采用10为底的对数度量功率的相对比值

（1）功率增益：

$$G = 10\log_{10}\left(\frac{P_{out}}{P_{in}}\right) \quad (dB) \quad = 20\log_{10}\left(\frac{x_{o\_rms}}{x_{i\_rms}}\right)$$

输入与负载阻值为 $R_i$与$R_L$ ，则实际增益为:

$$G = 10\log_{10}\left(\frac{v_{o\_rms}^2 / R_L}{v_{i\_rms}^2 / R_i}\right) = 10\log_{10}\left(\frac{i_{o\_rms}^2 R_L}{i_{i\_rms}^2 R_i}\right)$$

（2）信号与噪声的功率比：

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{dB} = 10\log_{10}\frac{P_s}{P_n} = 20\log_{10}\frac{s_{rms}}{n_{rms}} \quad (dB)$$

（3）基于某个参考电平值来度量某绝对电平：

$$\text{P的}dBm\text{值} = 10\log_{10}\frac{\text{P的瓦特值}}{10^{-3}}$$

以1mW作为参考

$$= 30 + 10\log_{10}\text{（P的瓦特值）}$$

比如： $0dBm = 1mW$ 　　 $20dBm = 100mW$

$23.01dBm = 200mW$

类似： $dBW$ 以**1W**为参考， $dBk$ 以**1kW**为参考。

## 频域描述

☆ 频率

波形 $x(t)$ 的傅立叶变换为：

$$X(f)=F[x(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

傅立叶反变换为：

$$x(t)=F^{-1}[X(f)]=\int_{-\infty}^{\infty}X(f)e^{j2\pi ft}df$$

常用波形的例子：

$$\prod\left[\frac{t}{T}\right]\leftrightarrow TSa(\pi fT)$$

$$TSa(\pi Tt)\leftrightarrow\prod\left[\frac{f}{T}\right]$$

$$\wedge\left[\frac{t}{T}\right]\leftrightarrow TSa^{2}(\pi fT)$$

## 2.1.2 能量谱密度与功率谱密度

信号 $x(t)$ 有两种类型：

1. 功率信号 2. 能量信号

### 1. 能量谱密度：

对能量信号，定义为：$\left|X(f)\right|^2$

物理含义：信号的能量沿频率f的分布情况

信号的总能量为：

$$E=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|X(f)\right|^2 df$$

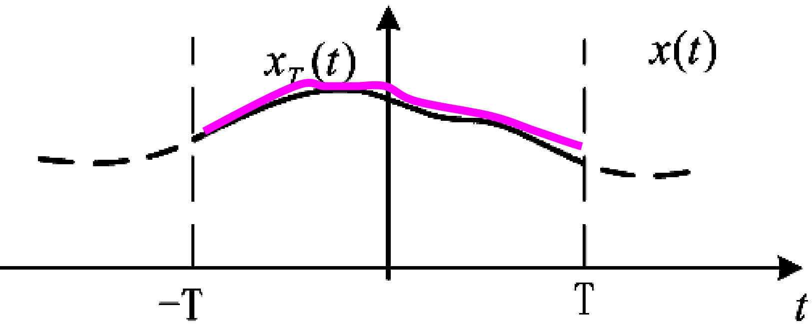
## 2. 功率谱密度：

信号 $x(t)$ 有两种类型：

1. 功率信号 2. 能量信号

对功率信号，定义为：

$$S(f)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\left|X_T(f)\right|^2$$




$$x_T(t)\Leftrightarrow X_T(f)$$

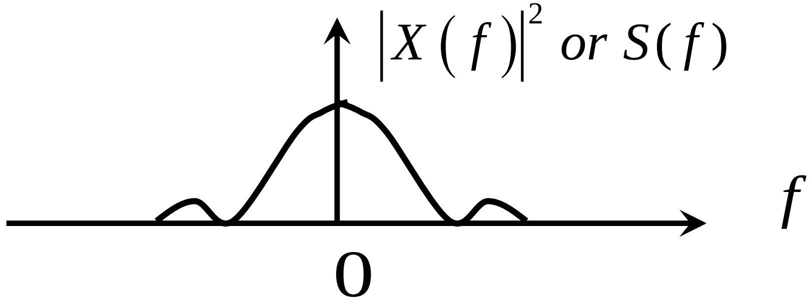
物理含义：　信号的功率沿频率f的分布情况

信号的总功率为：　$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x^2(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}S(f)df$

## 2.1.3 信号的频带与带宽

### 1. 基带（低通）信号：

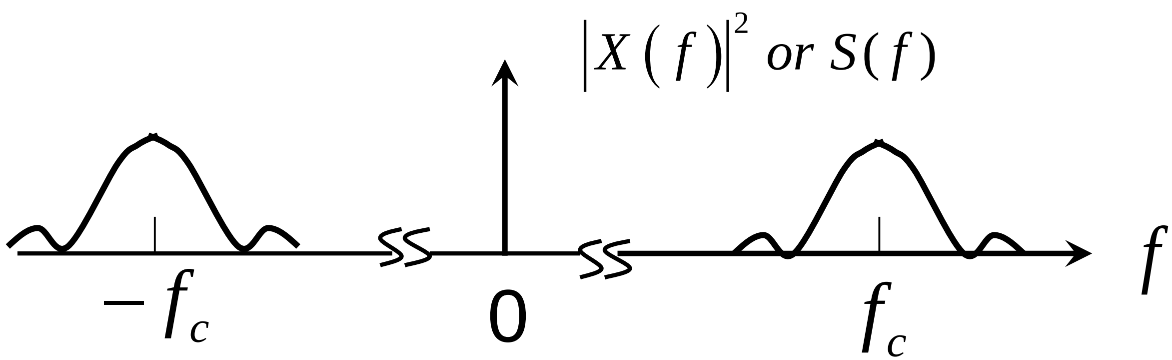
主要能量或功率集中在零频率附近。 如语音信号。




### 2. 频带（带通）信号：

主要能量或功率集中在某一非零频率附近。

如无线通信中的传输信号。



在工程定义中，信号带宽是能量谱或功率谱中正频率部分的宽度。

信号带宽有多种度量方法：

1. 绝对带宽

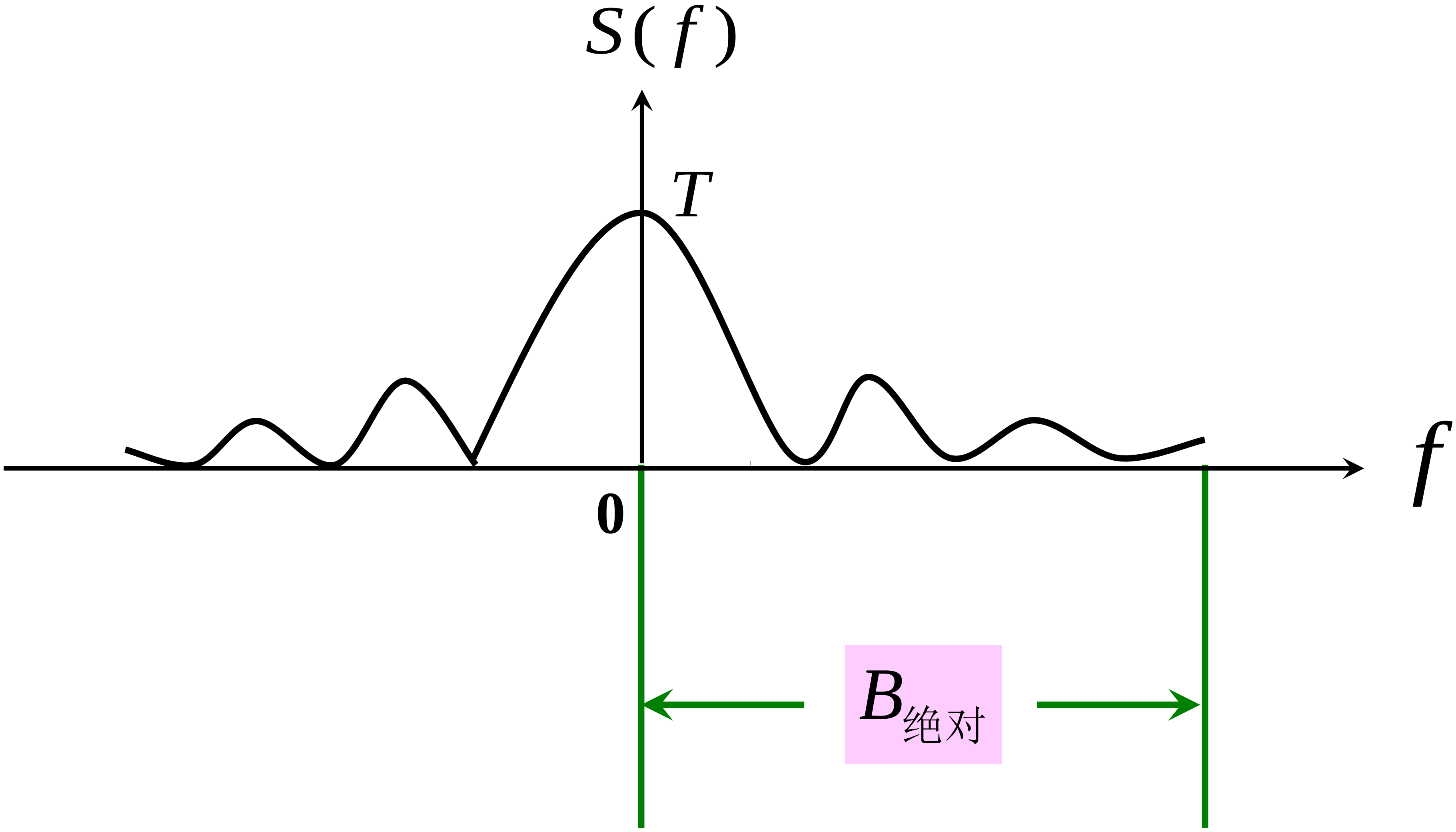
2. 3dB带宽

3. 等效矩形带宽

4. n阶零点带宽

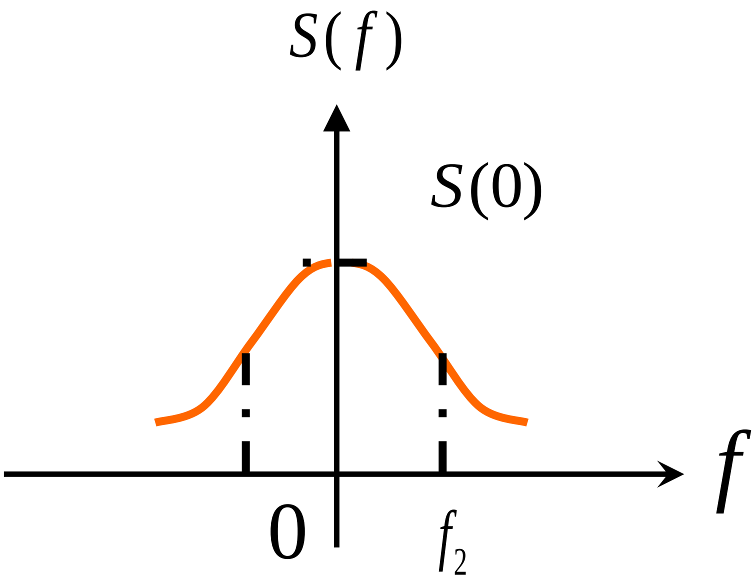
后面的讨论中，以功率谱为例，能量谱同理。

## 1. 绝对带宽 $B_{绝对}$



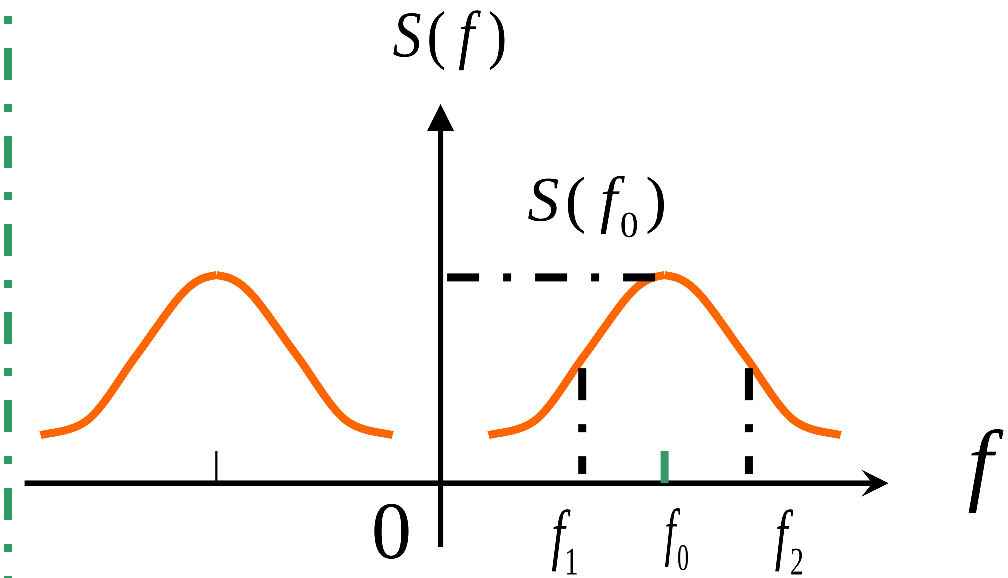
## 2. 3dB带宽 （用于度量信号的性能）

$S(f)$ 下降到**0.5**处对应的带宽；




$$S(f_2)=\frac{1}{2}S(0)$$

**基带信号** $B_{3dB}=f_2$

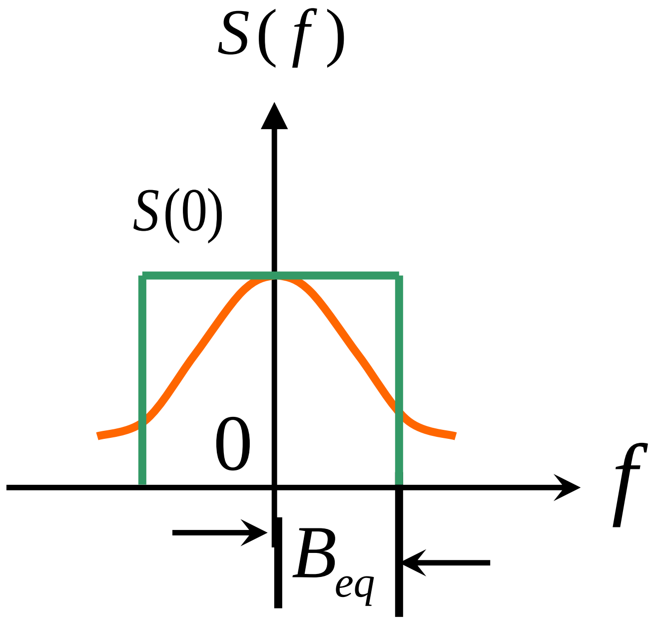



$$S(f_2)=S(f_1)=\frac{1}{2}S(f_0)$$

**带通信号** $B_{3dB}=f_2-f_1$

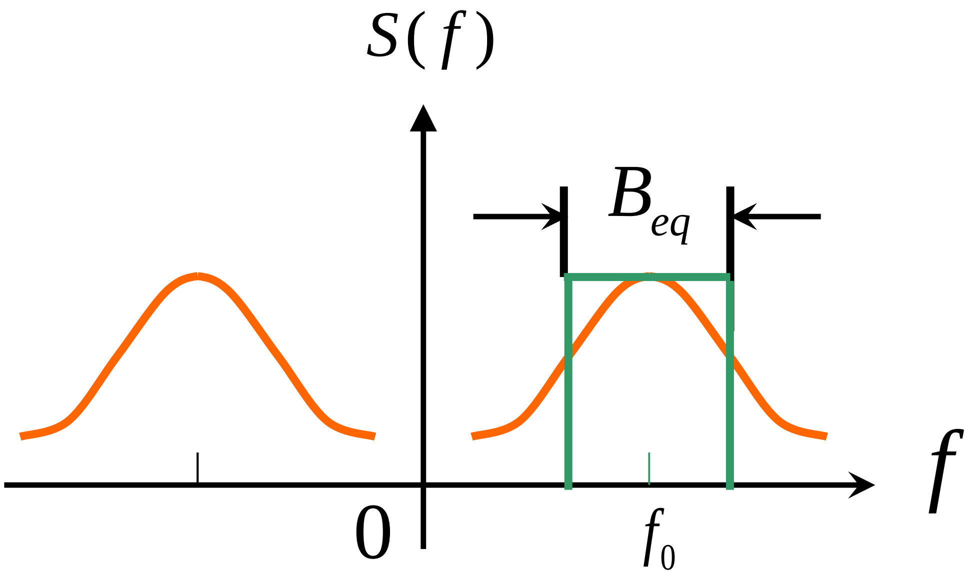
## 3. 等效矩形带宽（用于信号的简化分析）

$S(f)$ 的矩形等效宽度：




$$B_{eq} = \int_0^\infty \frac{S(f)}{S(0)} df$$

基带信号

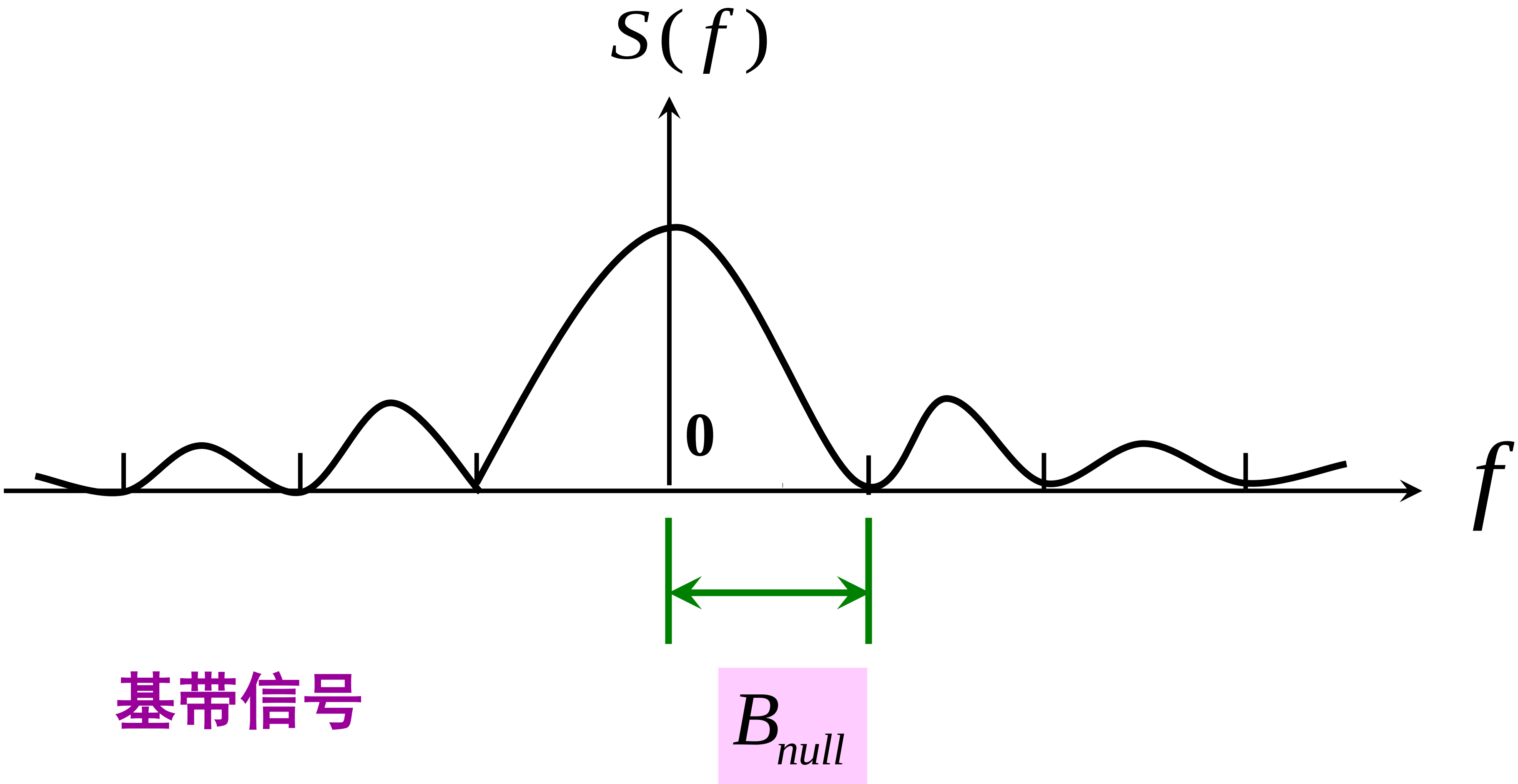



$$B_{eq} = \int_0^\infty \frac{S(f)}{S(f_0)} df$$

$f_0$ 为 $S(f)$ 的重心： $f_0 = \dfrac{\int_0^\infty fS(f)df}{\int_0^\infty S(f)df}$

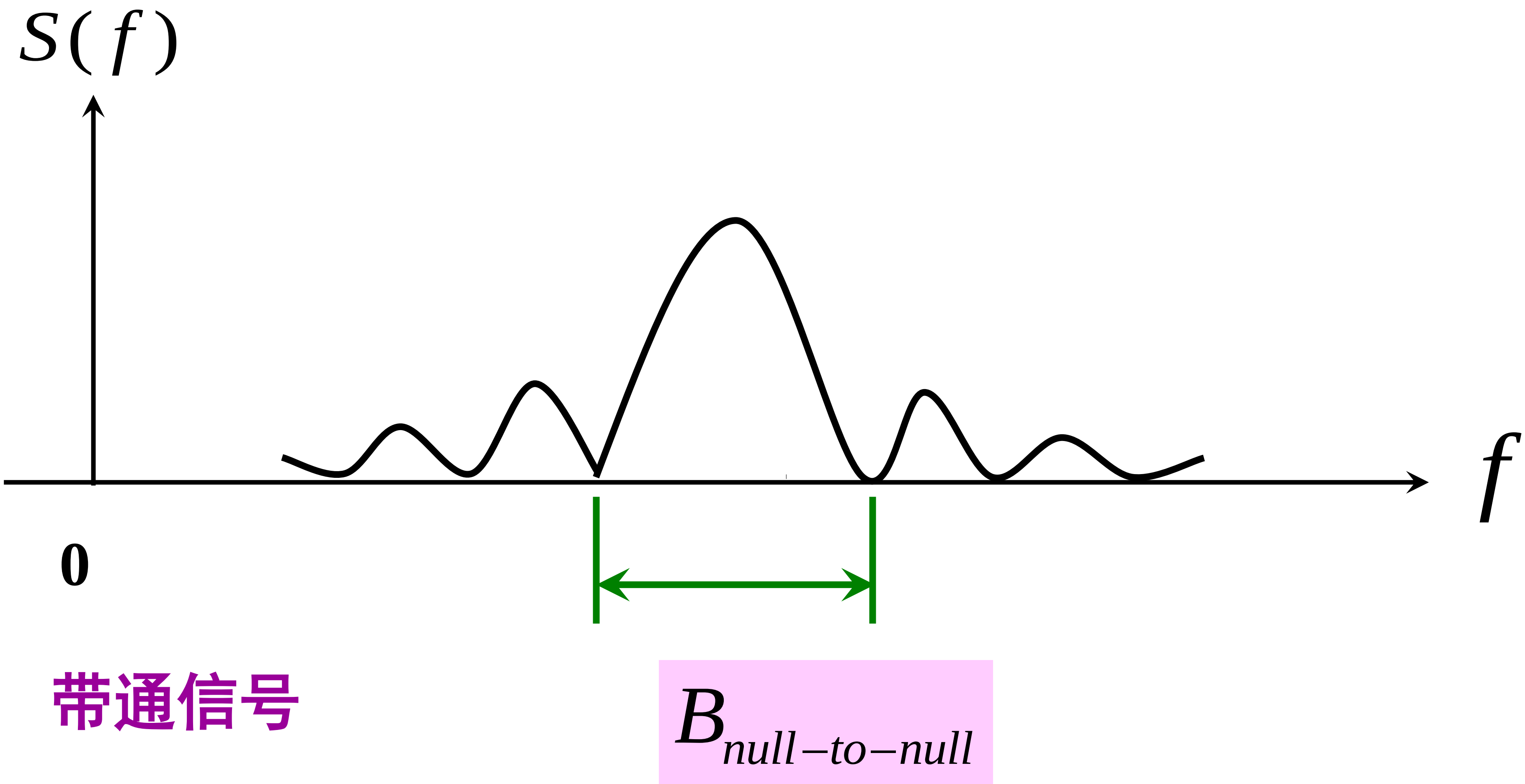
带通信号

## 4. n阶零点带宽　（常用于数字信号的滤波）




基带信号

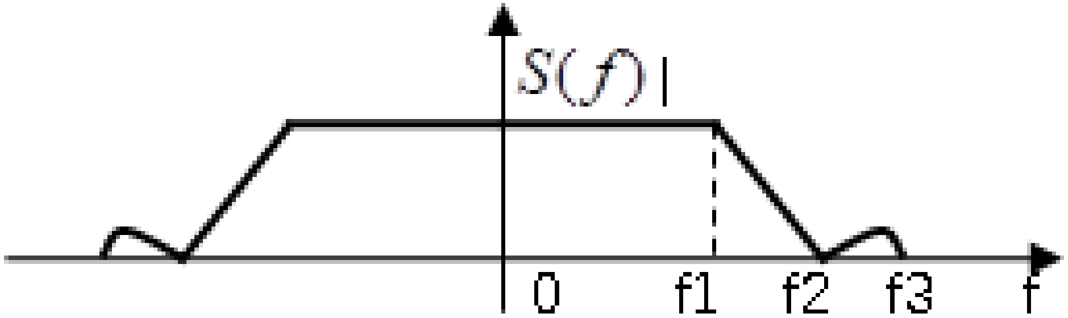
## 4. n阶零点带宽 （常用于数字信号的滤波）




带通信号

基带信号**s(t)**的谱如图所示, 其绝对带宽、

**3dB** 带宽 和 第一零点带宽分别是?



# 第2章 基础知识

2.1 确知信号

2.2 带通信号

# 2.2 带通信号

## 2.2.1 希尔伯特变换

### 1. 实信号的希尔伯特正反变换时域运算式

设有实信号$x(t)$，它的希尔伯特变换定义为:

$$\hat{x}(t) = H\left[x(t)\right] = x(t) * \frac{1}{\pi t}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(t-\tau)}{\pi\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\tau)}{\pi(t-\tau)} d\tau \quad \text{—— 正变换}$$

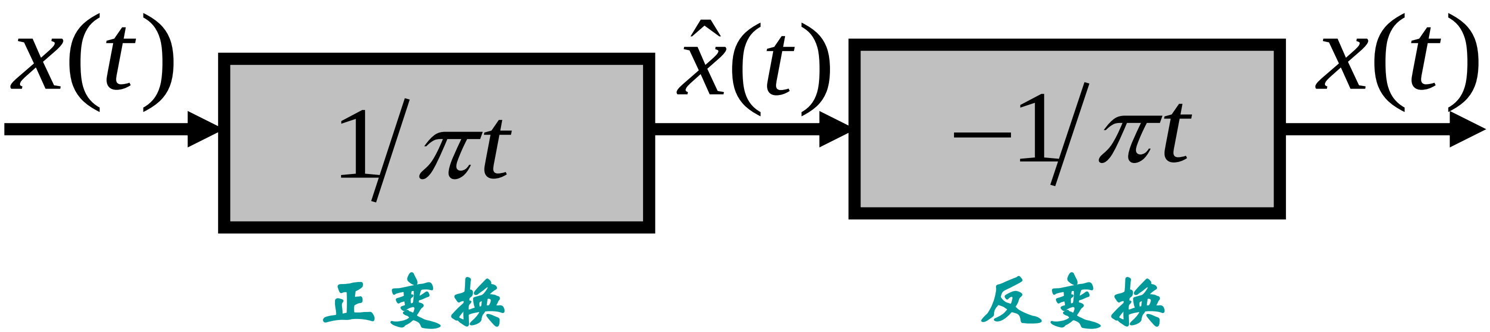
$$x(t) = H^{-1}\left[\hat{x}(t)\right] = \hat{x}(t) * \left(-\frac{1}{\pi t}\right) \quad \text{—— 反变换}$$

$$\hat{x}(t) = H\left[x(t)\right] = x(t) * \frac{1}{\pi t}$$

$$x(t) = H^{-1}\left[\hat{x}(t)\right] = \hat{x}(t) * \left(-\frac{1}{\pi t}\right)$$

$x(t)$ 和 $\hat{x}(t)$ 构成**希尔伯特变换对**：

$$x(t) \underset{H^{-1}}{\overset{H}{\rightleftarrows}} \hat{x}(t)$$



## 2. 实信号的希尔伯特正反变换频域运算式

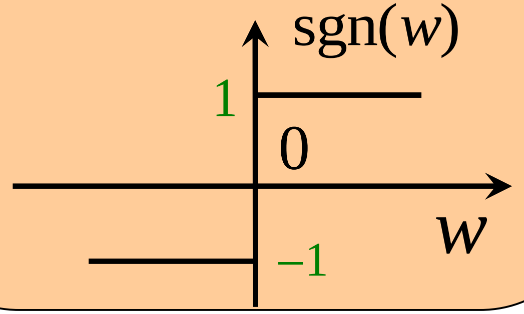
若有: $x(t) \leftrightarrow X(w)$

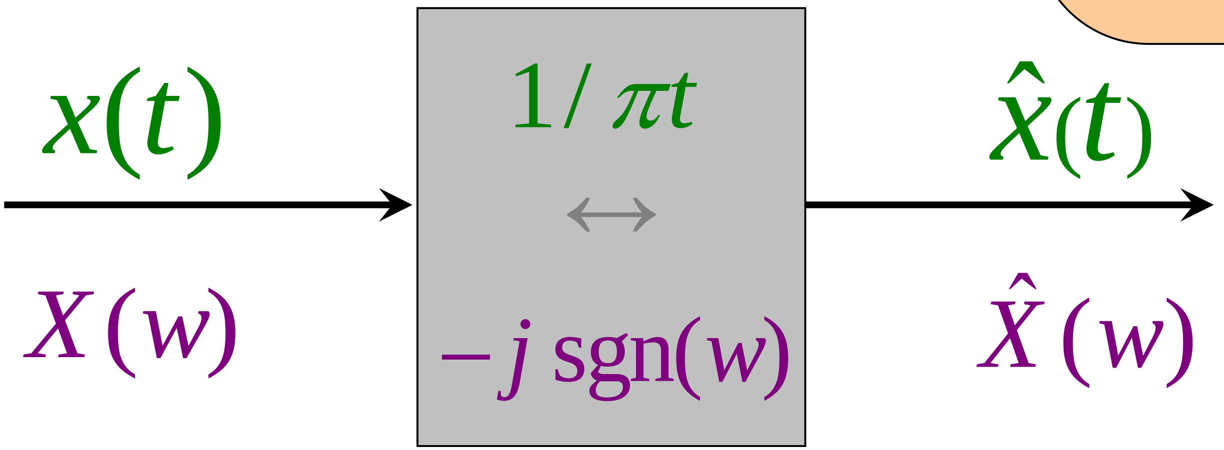
$$\hat{x}(t) \leftrightarrow \hat{X}(w)$$

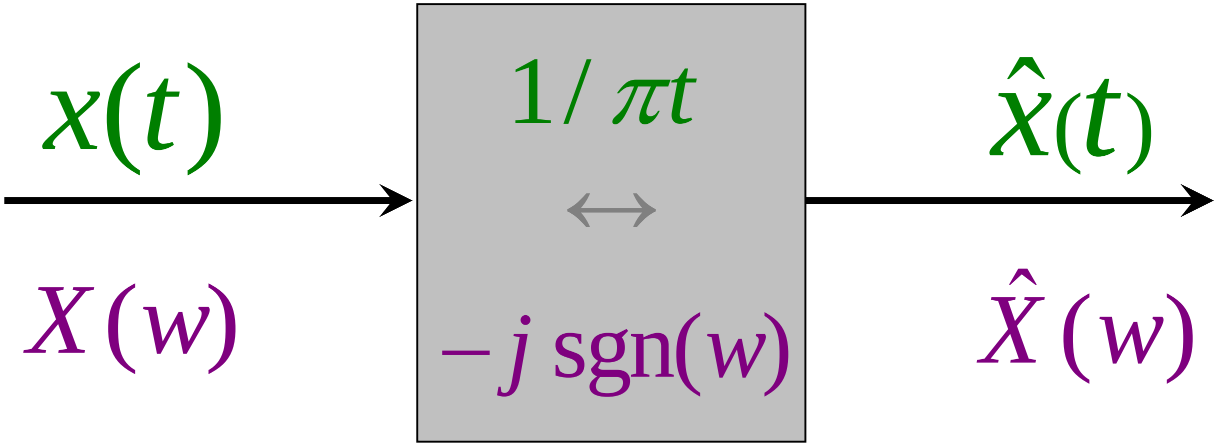
$$\frac{1}{\pi t} \leftrightarrow -j\,\mathrm{sgn}(w)$$

符号函数

$$Sgn(w) = \begin{cases} 1, & w > 0 \\ -1, & w < 0 \end{cases}$$



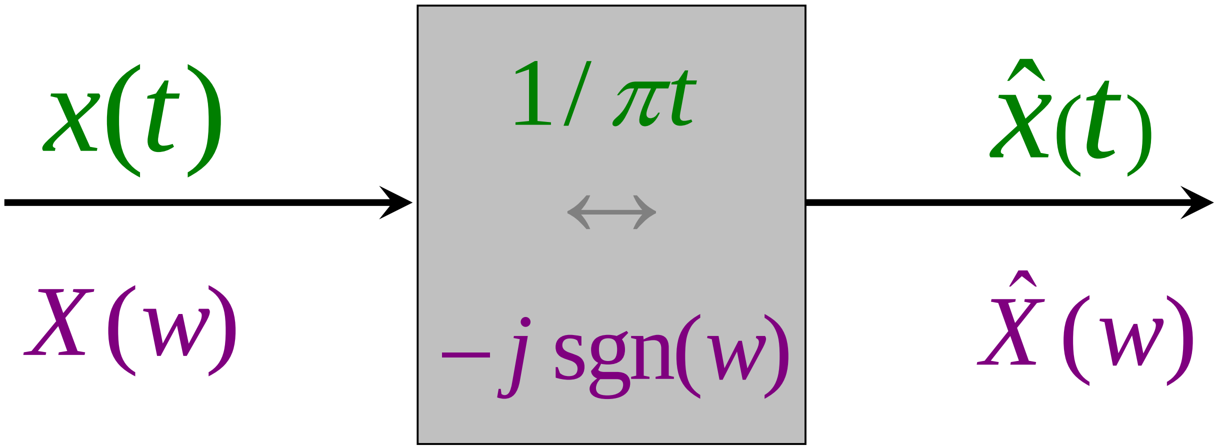



则有关系:

$$\hat{X}(w) = -j\,\mathrm{sgn}(w)\;X(w)$$

# 小结

**实**信号的希尔伯特变换**时**、**频**域特性




时域： $\hat{x}(t) = x(t) * \dfrac{1}{\pi t}$

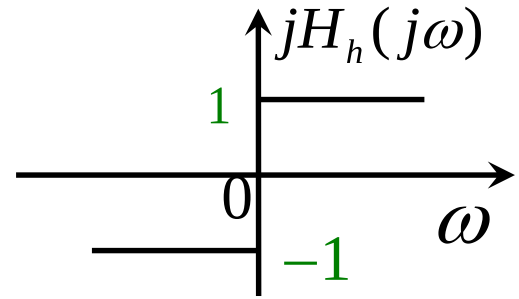
频域： $\hat{X}(w) = -j\,\mathrm{sgn}(w)\,X(w)$

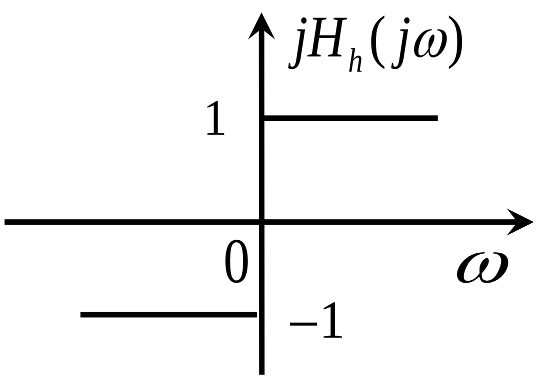
## 3. 希尔伯特滤波器

信号的希尔伯特变换等价于信号通过 $h(t)=\dfrac{1}{\pi t}$ 的线性时不变滤波器，它称为**希尔伯特滤波器**。

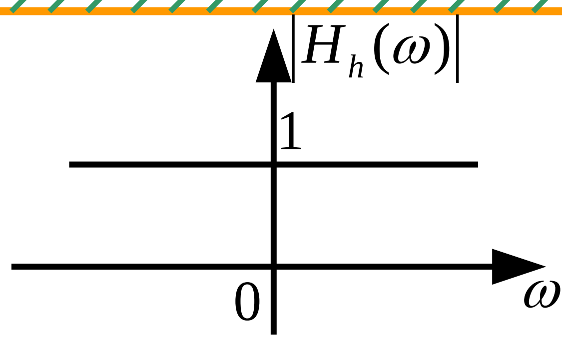
希尔伯特滤波器的频率响应特性:

$$H_h(j\omega)=-j\,\mathrm{sgn}(\omega)=\begin{cases}-j, \omega>0\\ j, \ \omega<0\end{cases}$$

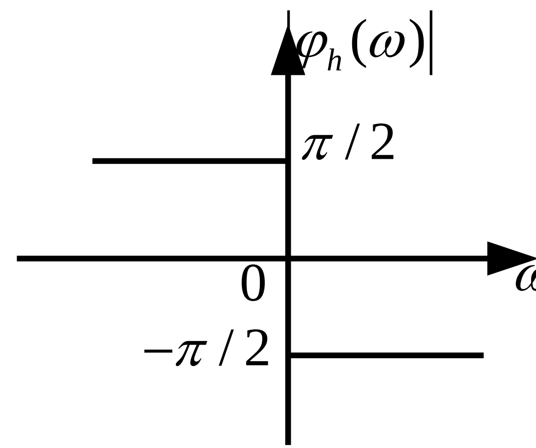



频率特性




幅频特性




相频特性

## 2.2.2 解析信号

**1.定义**：实信号$x(t)$作实部，其**H**变换 $x(t)$ 作虚部，

构成的复信号**Z(t)**为 $x(t)$ 的解析信号，即

$$\boxed{z(t) = x(t) + j\hat{x}(t)}$$

其中，$x(t)$ 可为**确定**或**随机**信号。

反之，由解析信号求出**原信号**：

$$x(t) = \mathrm{Re}[z(t)] = \frac{z(t) + z^{*}(t)}{2}$$

## 2.性质

$$z(t) = x(t) + j\hat{x}(t)$$

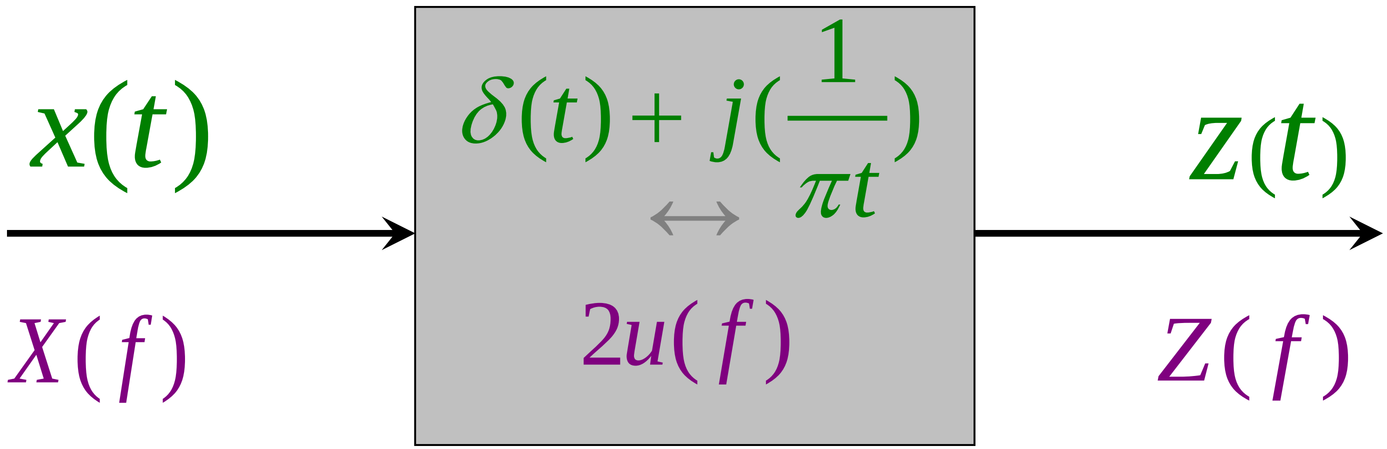
$$\delta(t) + j\left(\frac{1}{\pi t}\right) \leftrightarrow 1 + j\left[-j\,\mathrm{sgn}(f)\right] = 2u(f)$$

$$z(t) = \left[\delta(t) + j\left(\frac{1}{\pi t}\right)\right] * x(t)$$

因此，解析信号可以看作：

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} \delta(t) + j\left(\frac{1}{\pi t}\right) \\ \updownarrow \\ 2u(f) \end{array}} \longrightarrow z(t)$$

$z(t) = x(t) + j\hat{x}(t)$



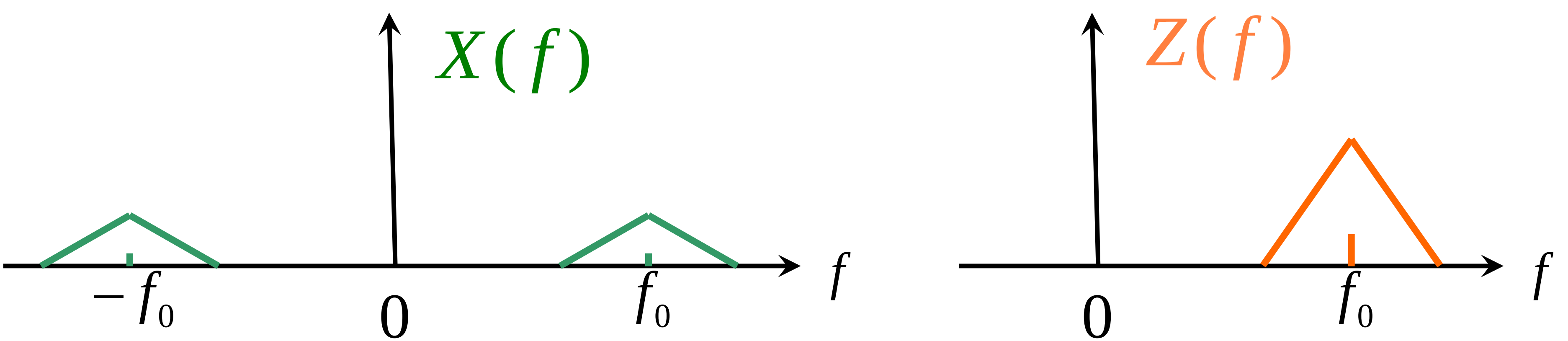

讨论： $x(t)$ 为确定信号时

（1）原信号 $x(t)$ 和解析信号 $z(t)$ 的频谱关系：

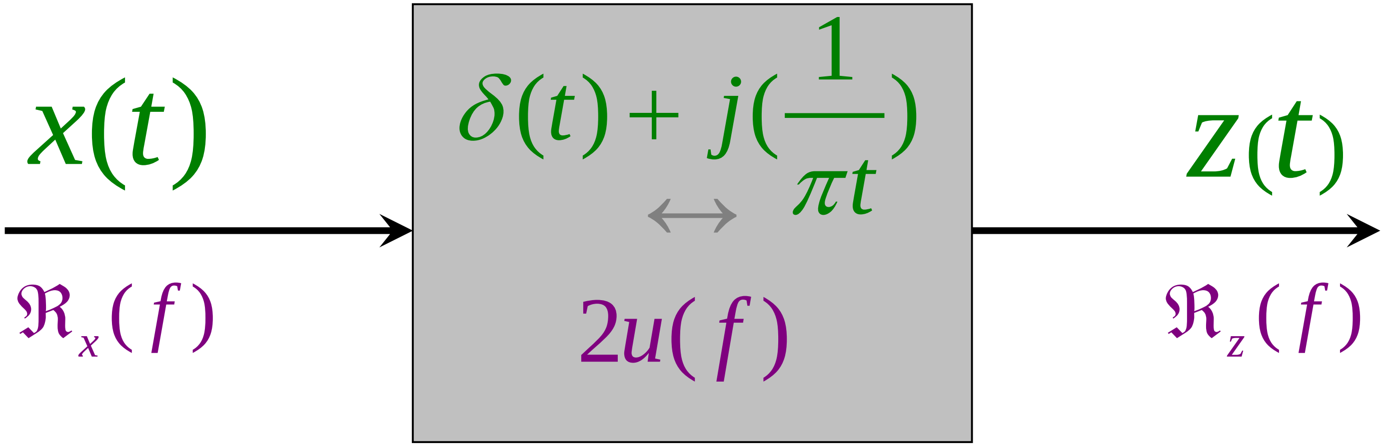
$$Z(f) = 2X(f)u(f)$$

$$Z(f) = 2X(f)u(f)$$


**(a)** $x(t)$ 为低通信号




**(b)** $x(t)$ 为带通信号




$x(t)$为随机信号时

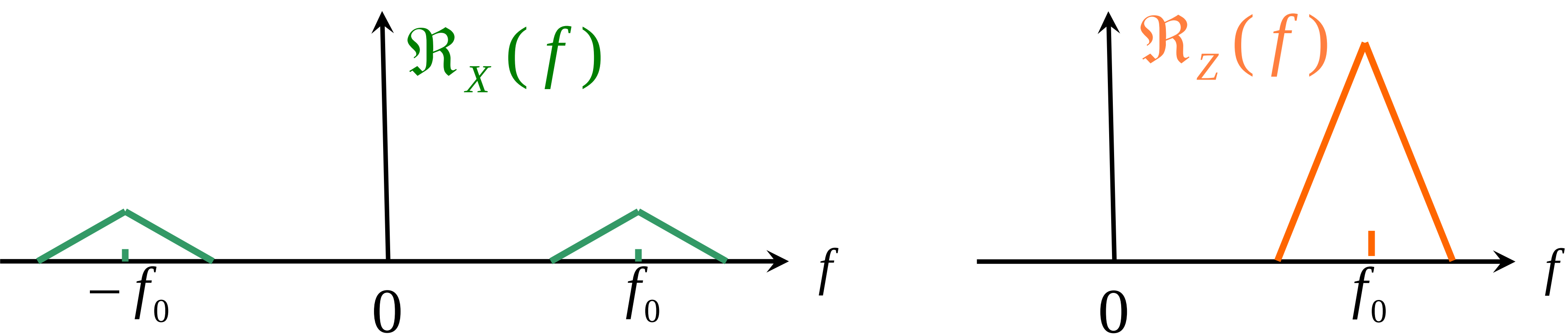
（2）原信号 $x(t)$ 和解析信号 $z(t)$ 的功率谱关系：

$$\Re_z(f)=\Re_x(f)\left|2u(f)\right|^2$$

$$=4\Re_x(f)u(f)$$

$$\Re_z(f) = 4\Re_x(f)u(f)$$


**(a)** $x(t)$ 为低通信号




**(b)** $x(t)$ 为带通信号

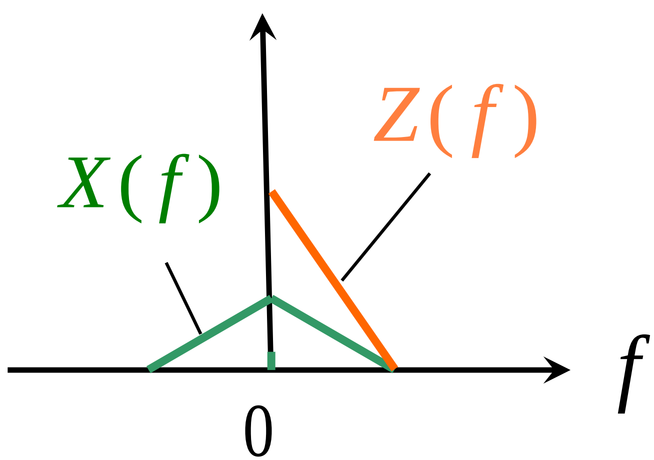
# 小结

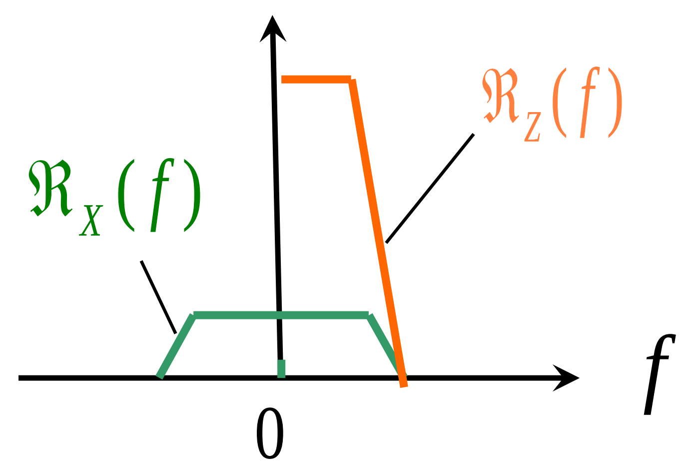
**解析信号或信号预包络** —

$$z(t) = x(t) + j\hat{x}(t)$$

解析信号的**频谱**：　$Z(f) = 2X(f)u(f)$

解析信号的**功率谱**：　$\Re_z(f) = 4\Re_x(f)u(f)$

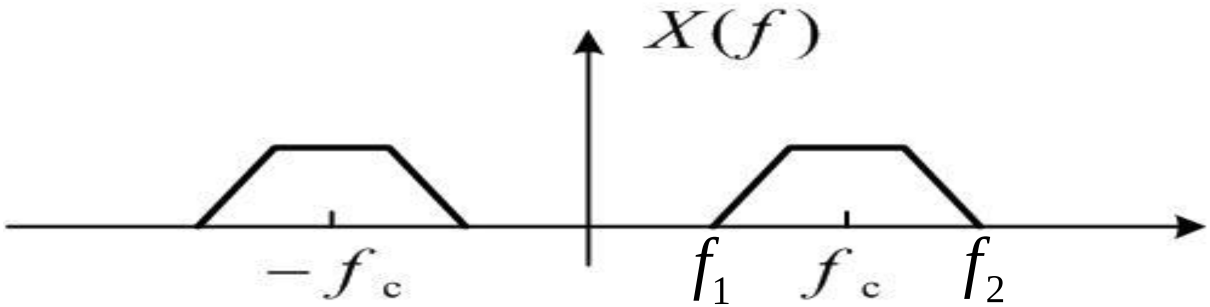


## 2.2.3 带通信号及其分量信号

**带通信号** —

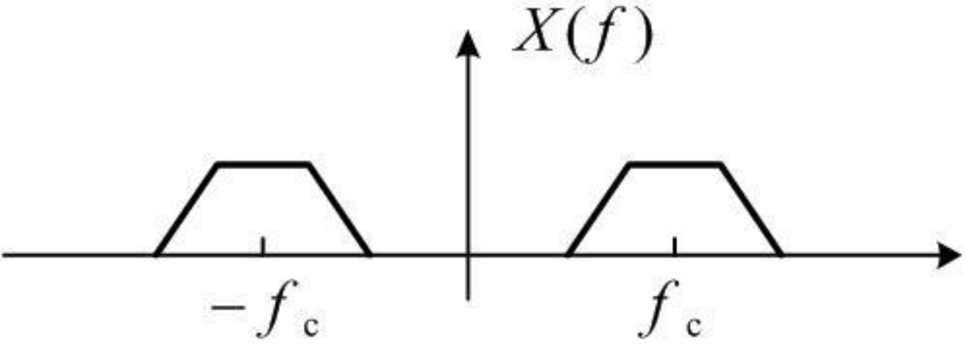
$X(f)$只在某个有限的区间$(f_1, f_2)$ 上非零。

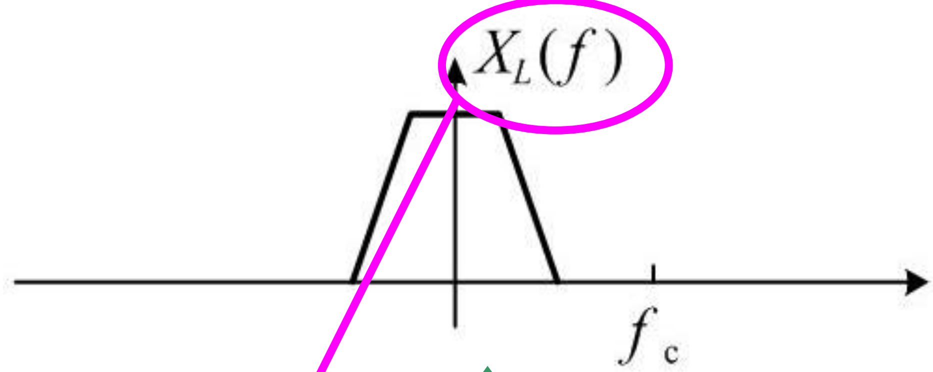


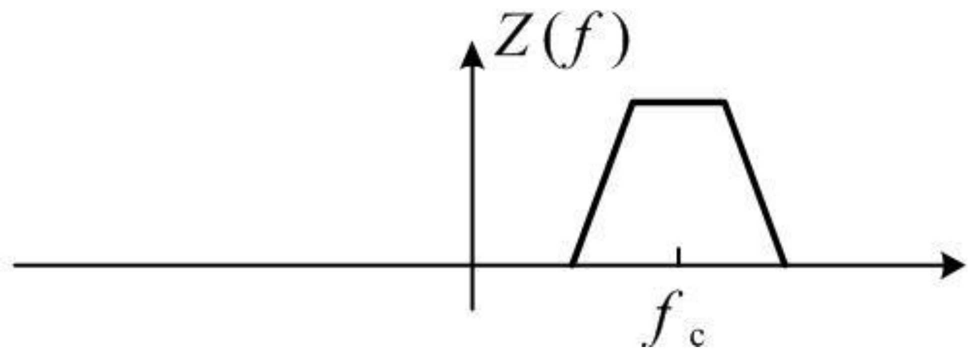

**中心频率：** $f_c$ ，通常为通信载波频率

**带宽：** $\Delta f = f_2 - f_1$

**窄带信号：** $|f_2 - f_1| << f_c$ 的带通信号。




$$X_L(f) = Z(f + f_c)$$

傅式变换对：

$$x_L(t) \Leftrightarrow X_L(f)$$

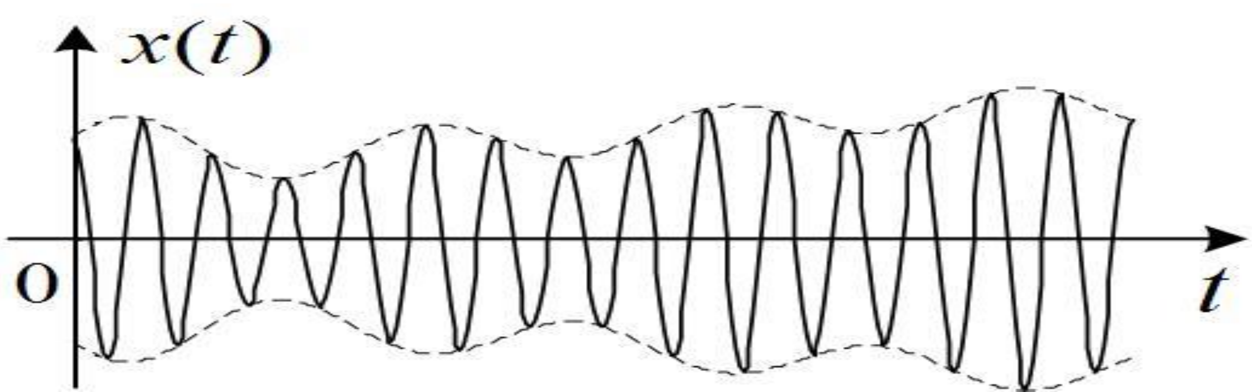
则 $x_L(t)$ 是 $x(t)$ 的等效基带信号，称为复包络。

# 带通信号的三种表达式(1)


$$x(t) = a(t) \cdot \cos[w_c t + \theta(t)]$$

—— 包络相位表达式

带通信号主体上是正弦波，包络随$a(t)$缓慢波动，相位随$\theta(t)$缓慢"抖动"。



由包络相位表达式到正交表达式的推导：

$$x(t) = a(t)\cdot\cos[w_c t+\theta(t)]$$

$$= a(t)\cdot\cos\left[\theta(t)\right]\cos\left(w_c t\right)-a(t)\cdot\sin\left[\theta(t)\right]\sin\left(w_c t\right)$$

$$= x_c\left(t\right)\cos\left(w_c t\right)-x_s\left(t\right)\sin\left(w_c t\right)$$

# 带通信号的三种表达式(2)

同相

正交

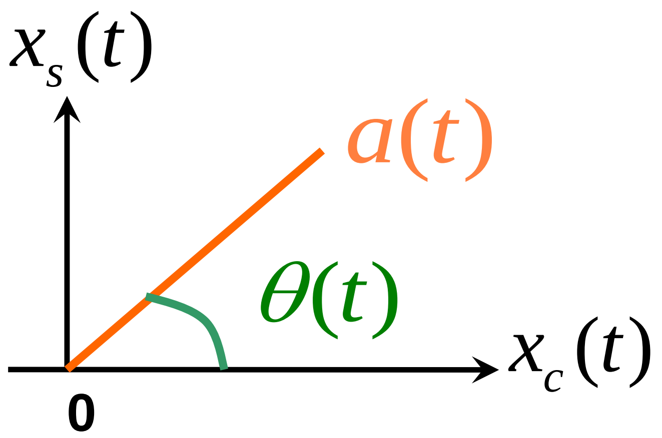
$$x(t) = x_c(t)\cdot\cos\left(w_c t\right) - x_s(t)\cdot\sin\left(w_c t\right)$$

— 正交表达式

包络分量、相位分量、同相分量、正交分量的关系:

$$x_c(t) = a(t)\cdot\cos\theta(t)\ ,\ x_s(t) = a(t)\cdot\sin\theta(t)$$

$$a(t) = \sqrt{x_c^{\ 2}(t) + x_s^{\ 2}(t)}\ ,\ \theta(t) = arctg[\frac{x_s(t)}{x_c(t)}]$$



# 复包络的性质

由 $X_L(f) = Z(f + f_c)$

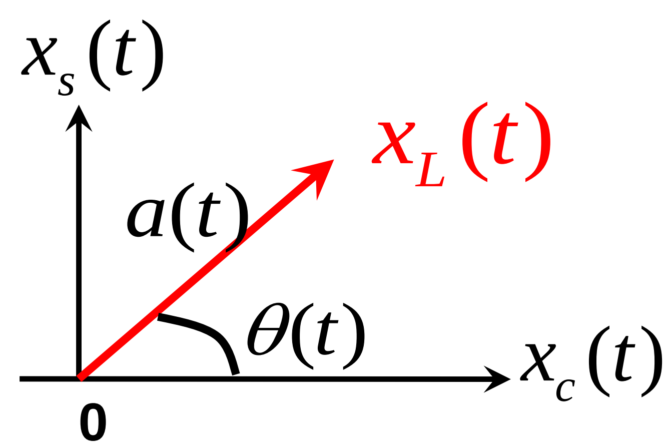
$$\Rightarrow \quad x_L(t) = z(t)e^{-j2\pi f_c t}$$

$$z(t) = x(t) + j\hat{x}(t)$$

则复包络 $x_L(t)$ 为复信号。

可推得它与包络、相位、同相、正交分量的关系：（推导过程见下页）

$$\boxed{\begin{aligned} x_L(t) &= x_c(t) + jx_s(t) \\ &= a(t)e^{j\theta(t)} \end{aligned}}$$



$$x(t) = a(t)\cdot\cos[w_c t + \theta(t)]$$

$$\text{有}\,\hat{x}(t) = a(t)\cdot\sin[w_c t + \theta(t)]$$

$$\rightarrow z(t) = x(t) + j\hat{x}(t)$$

$$= a(t)e^{j\left[w_c t + \theta(t)\right]}$$

$$\therefore x_L(t) = z(t)e^{-jw_c t} = a(t)e^{j\left[w_c t + \theta(t)\right]}e^{-jw_c t}$$

$$= a(t)e^{j\theta(t)} = x_c(t) + jx_s(t)$$

$$x_c(t) = a(t)\cdot\cos\theta(t) \quad , \quad x_s(t) = a(t)\cdot\sin\theta(t)$$

$$\because x_L(t) = z(t)e^{-jw_c t}$$

$$\therefore z(t) = x_L(t)e^{jw_c t}$$

由$z(t) = x(t) + j\hat{x}(t)$

$$\rightarrow x(t) + j\hat{x}(t) = x_L(t)e^{jw_c t}$$

两边取实部可得：

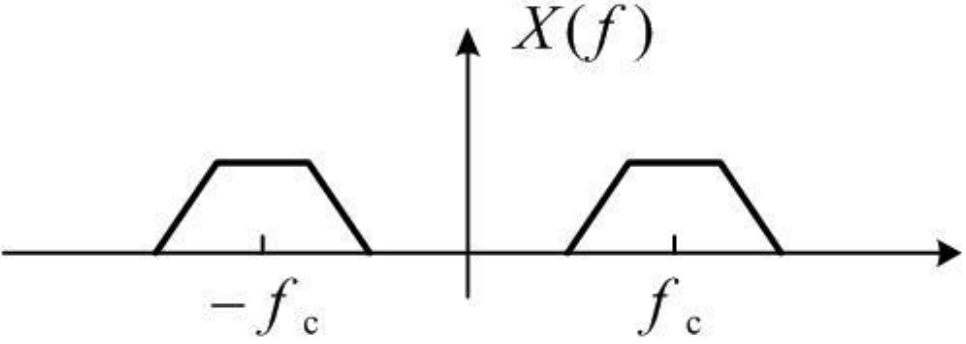
$$x(t) = \mathrm{Re}[x_L(t)e^{j2\pi f_c t}]$$

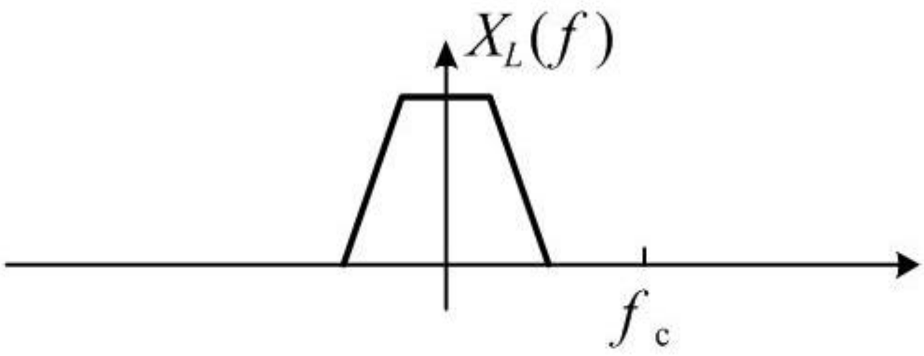
# 带通信号的三种表达式(3)

复包络

$$x(t)=\mathrm{Re}[x_L(t)e^{j2\pi f_c t}]$$

—— 复包络表达式




带通信号本质含两个要素：

复包络 $x_L(t)$ 与载频 $f_c$

## 复包络 $x_L(t)$ 和带通信号 $x(t)$ 的关系：

两者之间的时域关系：

$$x(t) = \mathrm{Re}\left[ x_L(t) e^{j2\pi f_c t} \right]$$

两者之间的频谱关系：

$$X(f) = \frac{1}{2}\left[ X_L(f - f_c) + X_L^*(-f - f_c) \right]$$

两者之间的功率谱关系：

$$\Re_x(f) = \frac{1}{4}\left[ \Re_{x_L}(f - f_c) + \Re_{x_L}(-f - f_c) \right]$$

★ 带通信号与其复包络的频谱关系

$$X(f)=\frac{1}{2}\left[X_L(f-f_c)+X_L{}^*(-f-f_c)\right]$$

证明:

$$x(t)=\mathrm{Re}[x_L(t)e^{j2\pi f_c t}]$$

$$=\frac{1}{2}x_L(t)e^{j2\pi f_c t}+\frac{1}{2}x_L^*(t)e^{-j2\pi f_c t}$$

$$\rightarrow X(f)=\frac{1}{2}F\left[x_L(t)e^{j2\pi f_c t}\right]+\frac{1}{2}F\left[x_L^*(t)e^{-j2\pi f_c t}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[X_L(f-f_c)+X_L{}^*(-f-f_c)\right]$$

## 2.2.4 频谱搬移

频带通信中，核心是**频谱搬移**。

**1. 发送过程（调制）** —— 由低频分量形成 $x(t)$

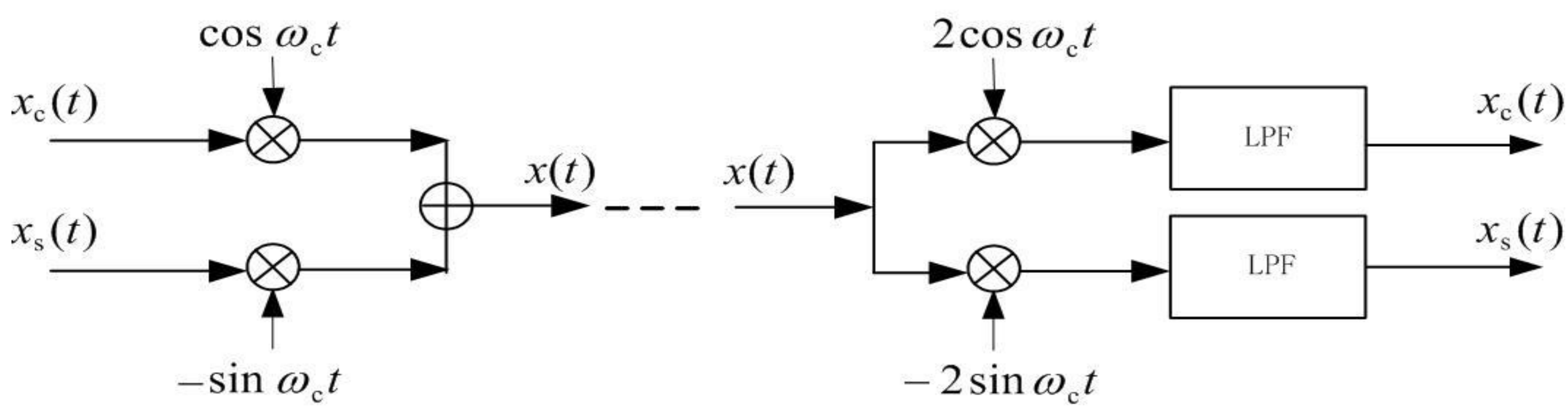
$$x(t)=x_c(t)\cos\left(2\pi f_c t\right)-x_s(t)\sin\left(2\pi f_c t\right)$$

**2. 接收过程(解调)** —— 由带通信号取出 $x_c(t)$ 与 $x_s(t)$

$$x_c(t)=LPF\left\{x(t)\times 2\cos\left(2\pi f_c t\right)\right\}$$

（推导过程见下两页）

$$x_s(t)=LPF\left\{-x(t)\times 2\sin\left(2\pi f_c t\right)\right\}$$



$$x_c(t) = LPF\left\{x(t)\times 2\cos\left(2\pi f_c t\right)\right\}$$

$$x_s(t) = LPF\left\{-x(t)\times 2\sin\left(2\pi f_c t\right)\right\}$$

$$x(t) = x_c(t)\cos\left(w_c t\right) - x_s(t)\sin\left(w_c t\right)$$

$$\because\ x(t)\times 2\cos\left(2\pi f_c t\right)$$

$$= x_c(t)2\cos^2\left(w_c t\right) - x_s(t)2\sin\left(w_c t\right)\cos\left(w_c t\right)$$

$$= x_c(t)\left(1+\cos\left(2w_c t\right)\right) - x_s(t)\sin\left(2w_c t\right)$$

$$\rightarrow LPF\left\{x(t)\times 2\cos\left(2\pi f_c t\right)\right\} = x_c(t)$$

$$x_c(t) = LPF\left\{x(t)\times 2\cos\left(2\pi f_c t\right)\right\}$$

$$x_s(t) = LPF\left\{-x(t)\times 2\sin\left(2\pi f_c t\right)\right\}$$

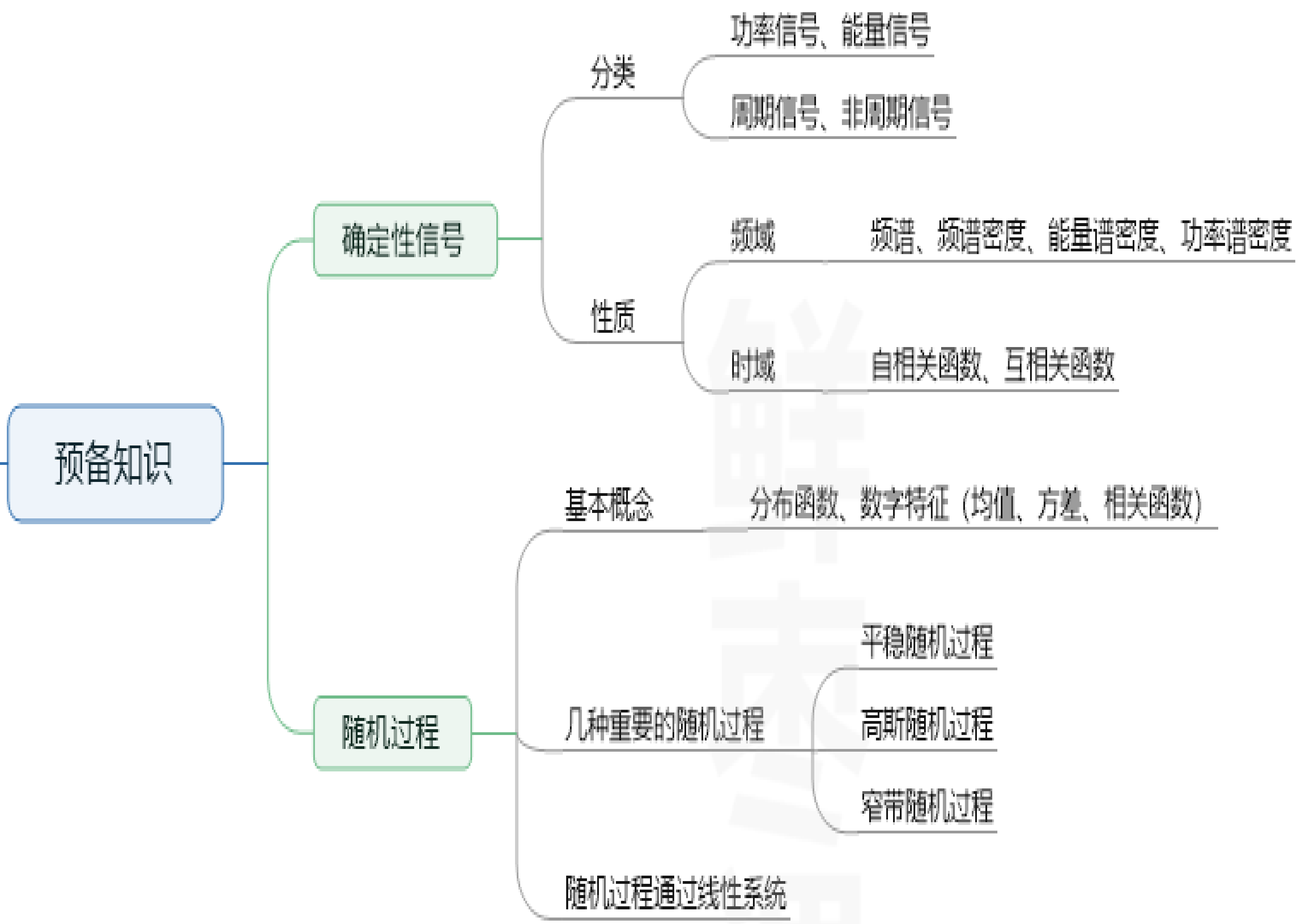
$$x(t) = x_c(t)\cos\left(w_c t\right) - x_s(t)\sin\left(w_c t\right)$$

$$\because -x(t)\times 2\sin\left(2\pi f_c t\right)$$

$$= -x_c(t)2\cos\left(w_c t\right)\sin\left(w_c t\right) + x_s(t)2\sin^2\left(w_c t\right)$$

$$= -x_c(t)\sin\left(2w_c t\right) + x_s(t)\left(1-\cos\left(2w_c t\right)\right)$$

$$\rightarrow LPF\left\{-x(t)\times 2\sin\left(2\pi f_c t\right)\right\} \quad = x_s(t)$$



预备知识
确定性信号
分类
功率信号、能量信号
周期信号、非周期信号
性质
频域
频谱、频谱密度、能量谱密度、功率谱密度
时域
自相关函数、互相关函数
随机过程
基本概念
分布函数、数字特征（均值、方差、相关函数）
几种重要的随机过程
平稳随机过程
高斯随机过程
窄带随机过程
随机过程通过线性系统