# 1 Обзор существующих методов решения задачи

## 1.1 Поверхности

Поверхность в [геометрии](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BD%D0%B0%D0%BB%D0%B8%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B0%D1%8F_%D0%B3%D0%B5%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%8F) и [топологии](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%BE%D0%BF%D0%BE%D0%BB%D0%BE%D0%B3%D0%B8%D1%8F) −двумерное [топологическое многообразие](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%BE%D0%BF%D0%BE%D0%BB%D0%BE%D0%B3%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%B5_%D0%BC%D0%BD%D0%BE%D0%B3%D0%BE%D0%BE%D0%B1%D1%80%D0%B0%D0%B7%D0%B8%D0%B5). Наиболее известными примерами поверхностей являются границы [геометрических тел](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B5%D0%BB%D0%BE_(%D0%B3%D0%B5%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%8F)) в обычном трёхмерном евклидовом пространстве.

Концепция поверхности применяется в [физике](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D0%B8%D0%B7%D0%B8%D0%BA), [инженерном деле](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%98%D0%BD%D0%B6%D0%B5%D0%BD%D0%B5%D1%80%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D0%B4%D0%B5%D0%BB%D0%BE), [компьютерной графике](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%BE%D0%BC%D0%BF%D1%8C%D1%8E%D1%82%D0%B5%D1%80%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%B3%D1%80%D0%B0%D1%84%D0%B8%D0%BA%D0%B0) и прочих областях при изучении физических объектов. Например, анализ [аэродинамических качеств](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D1%8D%D1%80%D0%BE%D0%B4%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D0%BC%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%B5_%D0%BA%D0%B0%D1%87%D0%B5%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%BE) самолёта базируется на обтекании потоком воздуха его поверхности.

Поверхность определяется как множество [точек](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%BE%D1%87%D0%BA%D0%B0_(%D0%B3%D0%B5%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%8F)), [координаты](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%BE%D0%BE%D1%80%D0%B4%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D1%82%D1%8B) которых удовлетворяют определённому виду уравнений:

Если функция (1) [непрерывна](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9D%D0%B5%D0%BF%D1%80%D0%B5%D1%80%D1%8B%D0%B2%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D1%8F) в некоторой точке и имеет в ней непрерывные частные производные, по крайней мере одна из которых не обращается в нуль, то в окрестности этой точки поверхность, заданная уравнением (1), будет правильной поверхностью[1].

Помимо указанного выше неявного способа задания, поверхность может быть определена явно, если одну из переменных, например, z, можно выразить через остальные:

Также существует [параметрический](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%B0%D1%80%D0%B0%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%B5_%D0%B7%D0%B0%D0%B4%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%B5_%D0%BF%D0%BE%D0%B2%D0%B5%D1%80%D1%85%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D0%B8) способ задания (3). В этом случае поверхность определяется системой уравнений:

Интуитивно простую поверхность можно представить как кусок [плоскости](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%BB%D0%BE%D1%81%D0%BA%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C_(%D0%B3%D0%B5%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%8F)), подвергнутый [непрерывным](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9D%D0%B5%D0%BF%D1%80%D0%B5%D1%80%D1%8B%D0%B2%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C_(%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0)) [деформациям](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B5%D1%84%D0%BE%D1%80%D0%BC%D0%B0%D1%86%D0%B8%D1%8F) ([растяжениям, сжатиям](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D1%84%D0%B8%D0%BD%D0%BD%D1%8B%D0%B5_%D0%BF%D1%80%D0%B5%D0%BE%D0%B1%D1%80%D0%B0%D0%B7%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D1%8F) и [изгибаниям](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%98%D0%B7%D0%B3%D0%B8%D0%B1)).

Более строго, простой поверхностью называется образ [гомеоморфного](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D0%BE%D0%BC%D0%BE%D1%80%D1%84%D0%B8%D0%B7%D0%BC) отображения (то есть взаимно однозначного и взаимно непрерывного отображения) внутренности единичного квадрата. Этому определению можно дать [аналитическое](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9_%D0%B0%D0%BD%D0%B0%D0%BB%D0%B8%D0%B7) выражение.

Пусть на плоскости с прямоугольной системой координат u и v задан [квадрат](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%B2%D0%B0%D0%B4%D1%80%D0%B0%D1%82), координаты внутренних точек которого удовлетворяют неравенствам 0 < u < 1, 0 < v < 1. Гомеоморфный образ квадрата в пространстве с [прямоугольной системой координат](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D1%8F%D0%BC%D0%BE%D1%83%D0%B3%D0%BE%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0_%D0%BA%D0%BE%D0%BE%D1%80%D0%B4%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D1%82) х, у, z задаётся при помощи формул х = x(u, v), у = y(u, v), z = z(u, v) ([параметрическое задание поверхности](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%B0%D1%80%D0%B0%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B5_%D0%BF%D0%BE%D0%B2%D0%B5%D1%80%D1%85%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D0%B8)). При этом от функций x(u, v), y(u, v) и z(u, v) требуется, чтобы они были [непрерывными](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9D%D0%B5%D0%BF%D1%80%D0%B5%D1%80%D1%8B%D0%B2%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D1%8F) и чтобы для различных точек (u, v) и (u', v') были различными соответствующие точки (x, у, z) и (x', у', z').

Примером простой поверхности является полусфера. Вся же [сфера](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B0) не является простой поверхностью. Это вызывает необходимость дальнейшего обобщения понятия поверхности.

Подмножество пространства, у каждой точки которого есть окрестность, являющаяся простой поверхностью, называется правильной поверхностью.

В [дифференциальной геометрии](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B8%D1%84%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%86%D0%B8%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%B3%D0%B5%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%8F) исследуемые поверхности обычно подчинены условиям, связанным с возможностью применения методов дифференциального исчисления. Как правило, это − условия гладкости поверхности, то есть существования в каждой точке поверхности определённой [касательной](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%B0%D1%81%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%BF%D1%80%D1%8F%D0%BC%D0%B0%D1%8F) плоскости, кривизны и т. д. Эти требования сводятся к тому, что функции, задающие поверхность, предполагаются однократно, дважды, трижды, а в некоторых вопросах  − неограниченное число раз [дифференцируемыми](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B8%D1%84%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%86%D0%B8%D1%80%D1%83%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D1%8F) или даже [аналитическими функциями](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BD%D0%B0%D0%BB%D0%B8%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B5_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8). При этом дополнительно накладывается условие регулярности.

Случай неявного задания. Поверхность, заданная уравнением , является гладкой регулярной поверхностью, если , функция F [непрерывно дифференцируема](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B8%D1%84%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%86%D0%B8%D1%80%D1%83%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D1%8F) в своей области определения Ω, а её частные производные одновременно не обращаются в нуль (условие правильности) на всём множестве Ω:

Случай параметрического задания. Зададим поверхность [векторным уравнением](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%92%D0%B5%D0%BA%D1%82%D0%BE%D1%80-%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D1%8F) , или, что то же самое, тремя уравнениями в координатах (3).

Эта система уравнений (3) задаёт гладкую регулярную поверхность, если выполнены условия:

* система устанавливает взаимно однозначное соответствие между образом и прообразом Ω;
* функции непрерывно дифференцируемы в Ω;
* выполнено условие не вырожденности:

Геометрически последнее условие означает, что векторы нигде не параллельны. Параметры u, v можно рассматривать как внутренние координаты точек поверхности. Фиксируя одну из координат, мы получаем два семейства координатных кривых, покрывающих поверхность координатной сеткой.

Случай явного задания. Поверхность S может быть определена как график функции z=f(x, y); тогда S является гладкой регулярной поверхностью, если функция f дифференцируема. Этот вариант можно рассматривать как частный случай параметрического задания: x=u; y=v; z=f(u, v).

## 1.2 Решение интегралов

Интеграл − одно из важнейших понятий математического анализа, которое возникает при решении задач о нахождении площади под кривой, пройденного пути при неравномерном движении, массы неоднородного тела, и тому подобных, а также в задаче о восстановлении функции по её производной (неопределённый интеграл) [2]. Упрощённо интеграл можно представить, как аналог суммы для бесконечного числа бесконечно малых слагаемых. В зависимости от пространства, на котором задана подынтегральная функция, интеграл может быть − двойной, тройной, криволинейный, поверхностный и так далее; также существуют разные подходы к определению интеграла − различают интегралы Римана, Лебега, Стилтьеса и другие [2].

Двойные интегралы − это обобщение понятия определённого интеграла для функции двух переменных, заданной как z = f (x, y).

Записывается двойной интеграл так:

Здесь D − плоская фигура, ограниченная линиями, выражения которых (равенства) даны в задании вычисления двойного интеграла. Слева и справа − равенствами, в которых слева переменная x, а сверху и снизу − равенствами, в которых слева переменная y. Это место и далее − одно из важнейших для понимания техники вычисления двойного интеграла.

Вычислить двойной интеграл - значит найти число, равное площади упомянутой фигуры D.

Существуют следующие методы решения интегралов: метод прямоугольников (левых, правых, средних), метод трапеции, метод Симпсона.

*1.2.1* **Метод прямоугольников** − метод [численного интегрирования](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A7%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D0%B8%D0%BD%D1%82%D0%B5%D0%B3%D1%80%D0%B8%D1%80%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%B5) функции одной переменной, заключающийся в замене подынтегральной функции на многочлен нулевой степени, то есть константу, на каждом элементарном отрезке. Если рассмотреть график подынтегральной функции, то метод будет заключаться в приближённом вычислении площади под графиком суммированием площадей конечного числа прямоугольников, ширина которых будет определяться расстоянием между соответствующими соседними узлами интегрирования, а высота − значением подынтегральной функции в этих узлах. [Алгебраический порядок точности](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BB%D0%B3%D0%B5%D0%B1%D1%80%D0%B0%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9_%D0%BF%D0%BE%D1%80%D1%8F%D0%B4%D0%BE%D0%BA_%D1%82%D0%BE%D1%87%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D0%B8_%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D0%BE%D0%B3%D0%BE_%D0%BC%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4%D0%B0) равен 0. (Для формулы средних прямоугольников равен 1) [2].

Если отрезок {\displaystyle \left[a,b\right]}[a,b] является элементарным и не подвергается дальнейшему разбиению, значение интеграла можно найти по следующим формулам:

Левых прямоугольников:

{\displaystyle \int \_{a}^{b}f(x)\,dx\approx f(a)(b-a).}

Правых прямоугольников:

{\displaystyle \int \_{a}^{b}f(x)\,dx\approx f(b)(b-a).}

Средних прямоугольников:

{\displaystyle \int \_{a}^{b}f(x)\,dx\approx f\left({\frac {a+b}{2}}\right)(b-a).}

*1.2.2* **Метод трапеций** − метод [численного интегрирования](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A7%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D0%B8%D0%BD%D1%82%D0%B5%D0%B3%D1%80%D0%B8%D1%80%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%B5) функции одной переменной, заключающийся в замене на каждом элементарном отрезке подынтегральной функции на многочлен первой степени, то есть линейную функцию. Площадь под графиком функции аппроксимируется прямоугольными [трапециями](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D1%80%D0%B0%D0%BF%D0%B5%D1%86%D0%B8%D1%8F). [Алгебраический порядок точности](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BB%D0%B3%D0%B5%D0%B1%D1%80%D0%B0%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9_%D0%BF%D0%BE%D1%80%D1%8F%D0%B4%D0%BE%D0%BA_%D1%82%D0%BE%D1%87%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D0%B8_%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D0%BE%D0%B3%D0%BE_%D0%BC%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4%D0%B0) равен 1.

Если отрезок {\displaystyle \left[a,b\right]}[a,b] является элементарным и не подвергается дальнейшему разбиению, значение интеграла можно найти по формуле:

Это простое применение формулы для площади трапеции − произведение полусуммы оснований, которыми в данном случае являются значения функции в крайних точках отрезка, на высоту (длину отрезка интегрирования).

*1.2.3* **Формула Симпсона** (также [**Ньютона**](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9D%D1%8C%D1%8E%D1%82%D0%BE%D0%BD,_%D0%98%D1%81%D0%B0%D0%B0%D0%BA)−**Симпсона**) относится к приёмам [численного интегрирования](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A7%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D0%B8%D0%BD%D1%82%D0%B5%D0%B3%D1%80%D0%B8%D1%80%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%B5).

Суть метода заключается в приближении подынтегральной функции на отрезке {\displaystyle [a,b]}[a,b] [интерполяционным многочленом](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%98%D0%BD%D1%82%D0%B5%D1%80%D0%BF%D0%BE%D0%BB%D1%8F%D1%86%D0%B8%D0%BE%D0%BD%D0%BD%D1%8B%D0%B5_%D1%84%D0%BE%D1%80%D0%BC%D1%83%D0%BB%D1%8B) второй степени {\displaystyle p\_{2}(x)}, то есть приближение графика функции на отрезке параболой. Метод Симпсона имеет [порядок погрешности](https://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D0%BE%D1%80%D1%8F%D0%B4%D0%BE%D0%BA_%D0%BF%D0%BE%D0%B3%D1%80%D0%B5%D1%88%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D0%B8&action=edit&redlink=1) 4 и [алгебраический порядок точности](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BB%D0%B3%D0%B5%D0%B1%D1%80%D0%B0%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9_%D0%BF%D0%BE%D1%80%D1%8F%D0%B4%D0%BE%D0%BA_%D1%82%D0%BE%D1%87%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D0%B8_%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D0%BE%D0%B3%D0%BE_%D0%BC%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4%D0%B0) 3.

Формулой Симпсона называется интеграл от интерполяционного многочлена второй степени на отрезке [a, b]:

где f(a), f ((a + b) / 2) и f(b) − значения функции в соответствующих точках (на концах отрезка и в его середине).

Рассмотрим вопросы численного нахождения двойного интеграла по прямоугольной области [a.b] [c,d]:

Рассмотрим два способа вывода аналога формулы прямоугольников для численного решения данного интеграла (13).

*1.2.4* **Вывод с помощью одномерных интегралов:**

Так как мы уже знаем формулы прямоугольников для интегралов от функций одной переменной, то удобно представить двойной интеграл через два интеграла, каждый из которых будет вычисляться от функции одной переменной и может быть численно найден с помощью уже известной нам одномерной формулы прямоугольников. С этой целью введем вспомогательную функцию g(x) [3]:

Каждый из интегралов

можно вычислить с помощью формул численного интегрирования для одномерных интегралов.

Воспользуемся формулой прямоугольников (7) и начнем с На отрезке [c, d] введем равномерную сетку с шагом

Тогда для рассматриваемого интеграла (13) составная формула прямоугольников будет иметь вид:

Для численного нахождения интеграла по переменной x на отрезке [a, b] введем равномерную сетку с шагом :

на которой для интеграла получим формулу прямоугольников:

Объединяя формулы по каждому направлению, получим составную формулу прямоугольников для двойного интеграла [3]:

## 2.1 Постановка задачи

Необходимо разработать распределенное компонентное приложение подготовки данных для обработки и отображения поверхности.

Вид поверхности: . Значения коэффициентов пределы интегрирования *Xнач = -40, Xкон = 40, Yнач = -80, Xнач = 80;* метод численного интегрирования – метод правых прямоугольников. В программе предусмотреть возможность отображения поверхности, расчет площади заданной поверхности в заданных пределах, анализ влияния распараллеливания выполнения расчета площади на время.

Проверить результат нахождения площади и построения поверхности в математическом пакете, используя стандартные функции, и сравнить результаты.

## 2.2 Построение функциональной модели

Для выполнения поставленной задачи, программа должна реализовывать следующий функционал:

* расчет площади заданной поверхности заданным численным методом (метод правых прямоугольников)
* построение графика поверхности
* исследование эффективности распараллеливания вычисления площади поверхности заданным численным методом

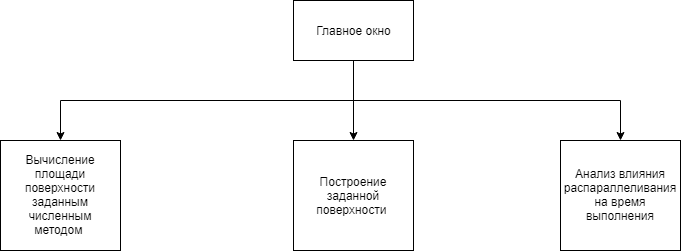


Рисунок 2.1 – Структурная схема программы

Excel, просмотр статистических данных

Приложение представляет собой комплекс модулей для расчета площади, отображения поверхности и анализа влияния распараллеливания подсчета площади. При этом под анализом будет пониматься наглядное сравнение погрешности вычисления и затраченного времени на выполнение задачи.

Модули комплексного приложения для решения задачи (Приложение А):

* главный модуль
* математический модуль
* графический модуль

Главный модуль − главное приложение WPF, в котором будет осуществляться управление комплексом, отображение результатов вычислений и анализа.

Математический модуль − класс, в котором находятся функции для вычисления площади заданной поверхности по варианту.

Графический модуль − PYTHON приложение, которое читает координаты из сформированного файла и строит по ним графическое отображение поверхности.