

Министерство образования и науки Российской Федерации  
ФГАОУ ВПО «УрФУ имени первого Президента России Б. Н. Ельцина»  
Институт радиоэлектроники и информационных технологий - РтФ  
Департамент информационных технологий и автоматики

Исследование предельных циклов нелинейной  
системы

ОТЧЕТ

по лабораторной работе

Преподаватель: Пименов Владимир Германович  
Студент: Сухоплюев Илья Владимирович  
Группа: РИ-440001

Екатеринбург  
2017

# Отчет

Работа описывает исследование параметризованной нелинейной системы на наличие предельных циклов. В ходе исследования системы, рассматриваются следующие вопросы: нахождение параметра системы, при котором наблюдается предельный цикл; поиск параметра, где наблюдается бифуркация поведения системы; исследование свойств обнаруженного предельного цикла; определение характера его устойчивости и исследование влияния разных видов запаздывания на систему (постоянное, переменное и непрерывное запаздывание). Данные задачи изучаются путем проведения численных экспериментов с помощью интерпретатора Python 3.5 и математических библиотек (numpy[1], matplotlib[2]).

# Содержание

1	Поиск предельного цикла . . . . .	4
2	Поиск точек бифуркаций . . . . .	9
3	Исследование свойств предельного цикла . . . . .	12
4	Определение устойчивости через мультиликаторы системы . .	14
5	Определение устойчивости с помощью метода Пуанкаре . . .	17
6	Влияние постоянного запаздывания . . . . .	19
6.1	Добавление запаздывания по $y_1$ в систему . . . . .	19
6.2	Влияние постоянной задержки на систему. Заключение .	24
7	Влияние переменного запаздывания . . . . .	25
8	Влияние распределенного запаздывания . . . . .	28
9	Влияние случайного шума . . . . .	31
	Заключение . . . . .	32
	Список использованных источников . . . . .	33
A	Исходный код программ . . . . .	34
A.1	Поиск предельного цикла . . . . .	34
A.2	Исследование точек бифуркации системы . . . . .	36
A.3	Исследование параметров найденного предельного цикла	38
A.4	Проверка устойчивости теоремой о мультиликаторах .	39
A.5	Проверка устойчивости цикла методом Пуанкаре . . .	41
A.6	Влияние постоянного запаздывания . . . . .	43
A.7	Влияние переменного запаздывания . . . . .	45
A.8	Влияние распределенного запаздывания . . . . .	48
A.9	Влияние случайного шума . . . . .	51
B	Дополнительные эксперименты . . . . .	53
B.1	Влияние постоянного запаздывания на вторую переменную системы . . . . .	53
B.2	Влияние переменного запаздывания на вторую переменную системы . . . . .	57
B.3	Влияние распределенного запаздывание на вторую переменную системы . . . . .	60

# 1 Поиск предельного цикла

Рассмотрим исследуемую систему (уравнение 1.1,  $\nu$  - параметр системы). Она описывается уравнением от одной фазовой переменной  $x$ . Уравнение дифференциальное, второго порядка и, в силу слагаемого  $3\dot{x}^3$ , нелинейное. Решение такого уравнения аналитическими методами является довольно сложной задачей, поэтому нашим методом исследования будет построение численных экспериментов, описывающих данную систему при определенном параметре  $\nu$ .

$$\ddot{x} + 3\dot{x}^3 - \nu\dot{x} + x = 0 \quad (1.1)$$

Однако, в таком виде уравнение 1.1 не является удобным для моделирования. Поэтому приведем его к канонической форме от двух переменных, с помощью замены 1.2, получив уравнение от двух фазовых переменных  $y_1$  и  $y_2$  (Система уравнений 1.3). В дальнейшем, мы будем пользоваться описанием нашей системы именно в таком виде.

$$\begin{cases} y_1 = x \\ y_2 = \dot{x} \end{cases} \quad (1.2)$$

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -3y_2^3 + \nu y_2 - y_1 \end{cases} \quad (1.3)$$

Преобразовав систему к удобному для нас виду, перейдем к первой части работы – нахождения такого параметра  $\nu$ , при котором наблюдается предельный цикл.

Для начала, дадим определение искомому объекту.

**Определение 1** *Предельным циклом будем называть замкнутую изолированную траекторию в фазовом пространстве, подразумевая замкнутость в смысле периодичности поведения системы.*

Таким образом, нам нужно построить фазовый портрет нашей системы, на котором нужно будет обнаружить искомую замкнутую линию. Для этого, зная зависимость значения производных от их коорди-

нат, можно с помощью функции *streamplot*[3] построить фазовый портрет (Программа 1, в качестве параметра для начала возьмем  $\nu = 1$ ).

---

### Листинг 1 Построение фазового портрета

---

```
# Подключение используемых библиотек
# В дальнейшем является постоянным и опускается в листингах
# Полный исходный код программы можно найти в приложении
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

# Параметр системы
nu = 1

# создание сетки 100x100 точек в области [-3;3]x[-3;3]
Y, X = np.mgrid[-3:3:100j, -3:3:100j]

# вычисление фазовых векторов на сетке
Y1 = Y
Y2 = -3 * Y ** 3 + nu * Y - X

# построение фазового портрета
fig0, ax0 = plt.subplots()
plt.streamplot(X, Y, Y1, Y2)

# показать построенные графики (опускается в дальнейшем)
plt.show()
```

---

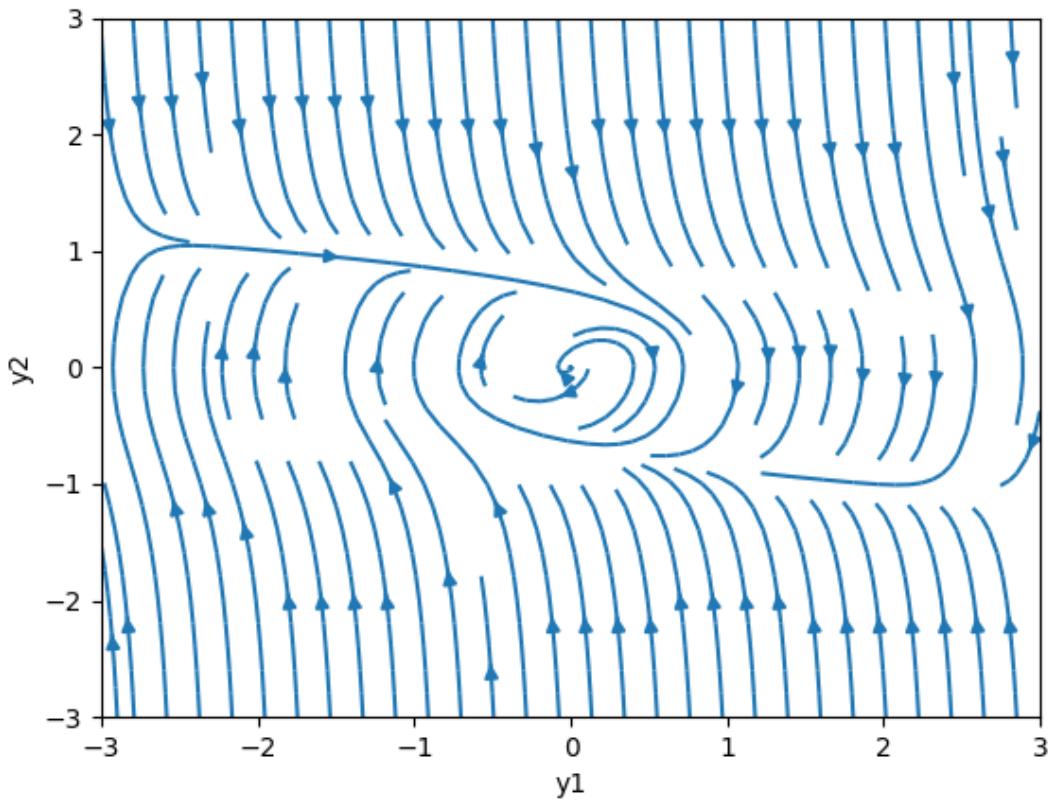


График 1.1 — Поиск предельного цикла построением фазового портрета

На графике 1.1 изображен результат работы нашей программы. В данном случае значение параметра оказалось оптимальным: можно видеть, как изоклины сходятся к наклоненному прямоугольнику в центре графика.

Теперь, чтобы убедится наверняка, что траектории сходятся вокруг этого цикла и там нет разрывов, построим две линии методом Эйлера снаружи и внутри наблюдаемого цикла (Программа 2).

---

**Листинг 2** Использование метода Эйлера для проверки предельного цикла

---

```
# функция построение кривой методом Эйлера
def line(y1_0, y2_0):
    y1 = [y1_0]
    y2 = [y2_0]
    h = 0.01 # длина шага
    for i in range(2000): # 2000 - количество итераций
        y1.append(y1[i] + h*(y2[i]))
        y2.append(y2[i] + h*(-3*y2[i] ** 3 + nu*y2[i] - y1[i]))
    # отображение кривой на графике
    ax0.plot(y1, y2)

# построение двух кривых, начинающихся внутри и
# вне предполагаемого предельного цикла
line(0.1, 0.1)
line(2, 2)
```

---

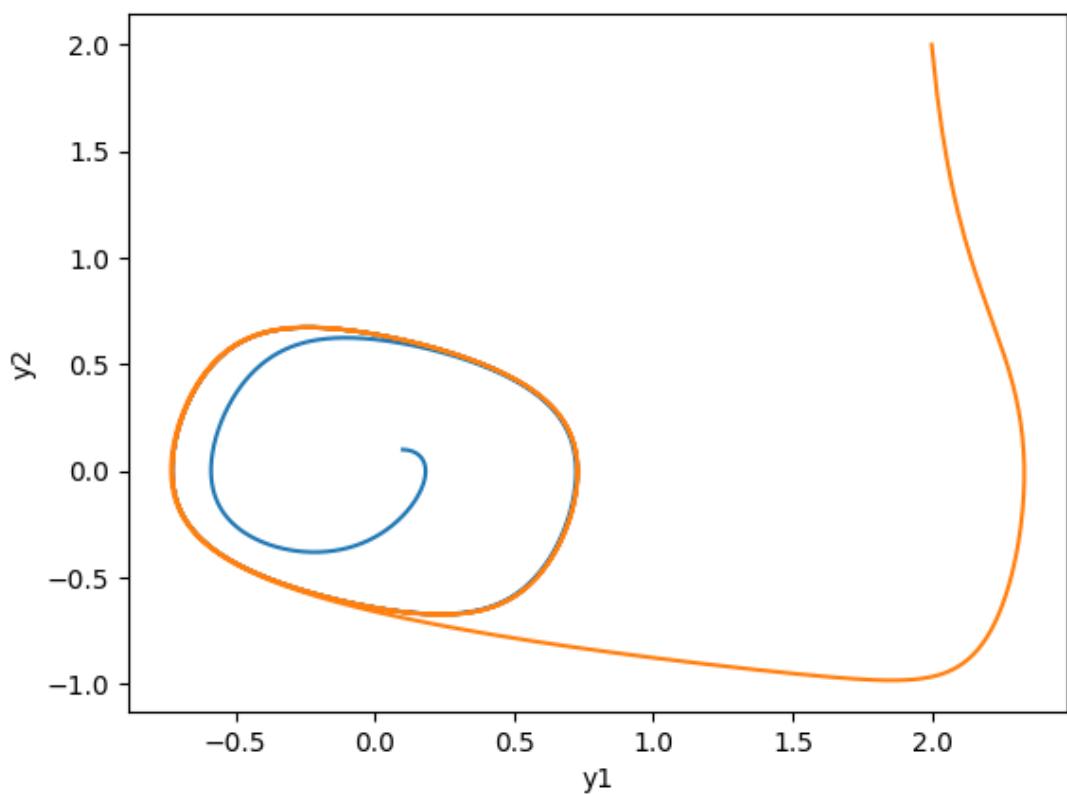


График 1.2 — Обнаружение аттрактора методом Эйлера

На рисунке 1.2 мы можем видеть две линии, начинающиеся из точек  $(0.1, 0.1)$  и  $(2, 2)$ . Эти линии сходятся сближаются к искомому предельному циклу системы.

## 2 Поиск точек бифуркаций

Найдя предельный цикл в системе 1.2, мы можем перейти к следующему этапу нашего исследования – определения всех значений параметра, при которых наблюдается данный цикл.

В силу того, что наша система рассматривается дифференциальным уравнением, поведение системы будет меняться плавно на промежутках, разделенных так называемыми, точками *бифуркации*(точки, в которых происходит изменение поведения системы).

**Определение 2** Точка бифуркации - значение параметра системы, при котором наблюдается качественное изменение поведения системы.

Чтобы нам было удобно наблюдать изменение системы от параметра без перезапуска программы, мы обернем построения в функцию и добавим в нашу программу слайдер – бегунок, которым можно будет менять значение параметра  $\nu$ .

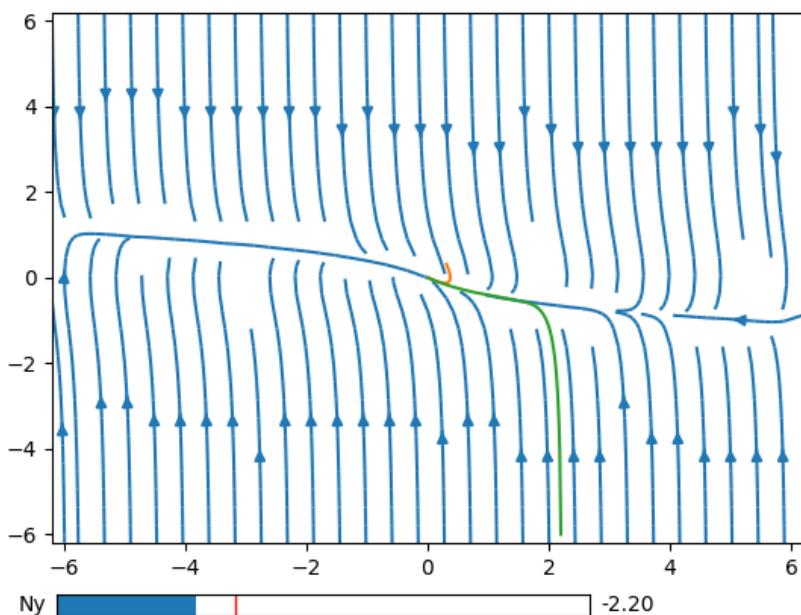


График 2.1 — Стационарная точка системы при  $\nu = -2.2$

Начиная с отрицательных значений (от -10) мы наблюдаем сильное стремление к центру координат – стационарной точки системы (График 2.1).

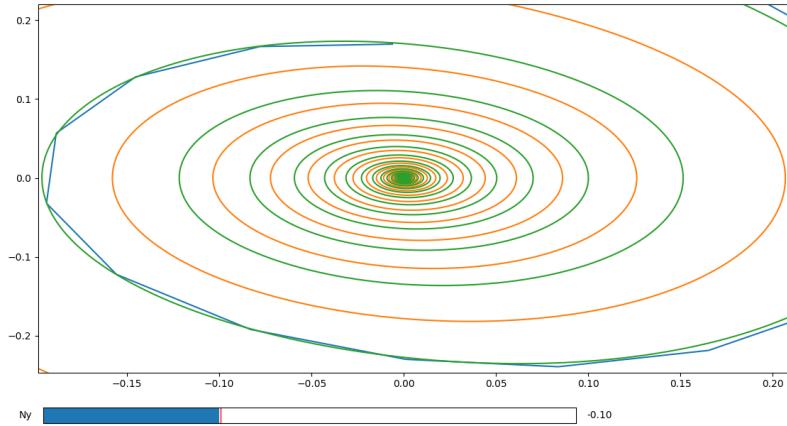


График 2.2 — Стационарная точка системы при  $\nu = -0.1$

При приближении параметра к нулю, поведение системы искривляется в овальную форму, но линии медленно сходятся к нулю (График 2.2).

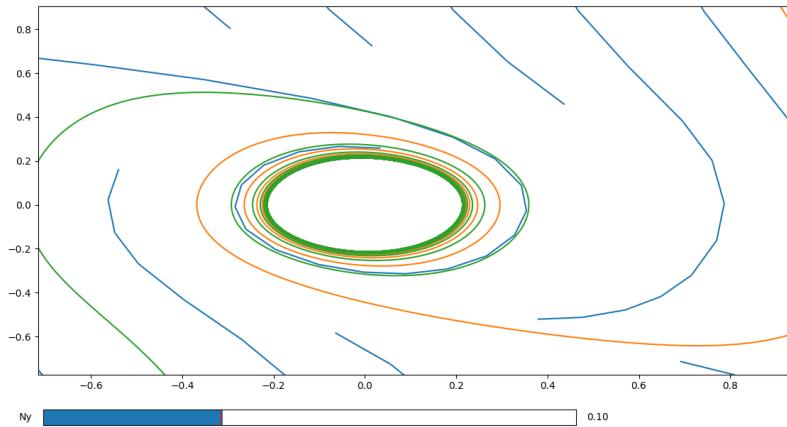


График 2.3 — Появление цикла при  $\nu = 0.1$

Как только мы переступаем нулевое значение параметра, наши траектории останавливаются значительно раньше – мы начинаем наблюдать знакомый нам предельный цикл, но в меньших размерах (График 2.3).

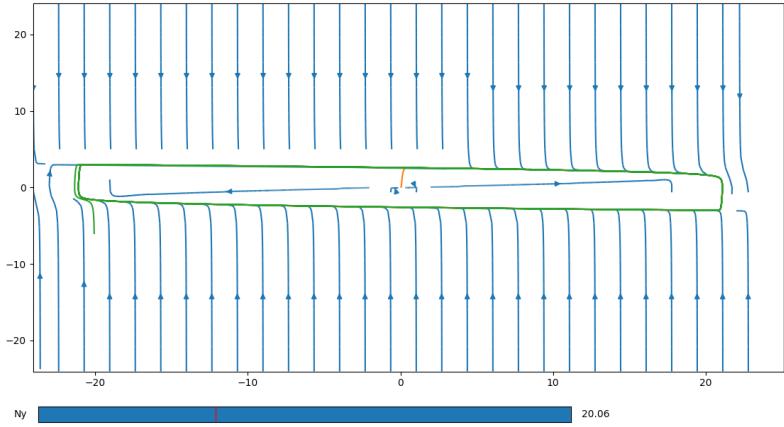


График 2.4 — Расширение предельного цикла при увеличении параметра ( $\nu = 20$ )

Увеличивая  $\nu$  дальше, остается наблюдать за ростом цикла (График 2.4).

Из полученных наблюдений можно выдвинуть гипотезу: на отрицательной полуоси исследуемая система сходится в стационарную точку; в положительной же оси наблюдается предельный цикл, который увеличивается в зависимости от параметра системы.

Стоит отметить, что наличие или отсутствие предельного цикла на границе ( $\nu = 0$ ) мы выявить не можем, так как при приближении к параметру к нулю, чтобы быть уверенным в наличии стационарной точки или цикла, приходится увеличивать точность вычислений. В конце концов, когда точность увеличить не удается, нам остается только предполагать: толи линии сошлись к циклу, толи они не достигли нуля из-за недостаточного кол-ва шагов в методе Эйлера.

С учетом этого замечания, можно выдвинуть еще одну гипотезу: так как изменение поведения в системе происходит настолько плавно, что нам не удается уловить момент, когда мы наблюдаем стационарную точку, а когда предельный цикл. То есть мы можем говорить, что наблюдается *мягкая бифуркация системы*.

### 3 Исследование свойств предельного цикла

Следующим шагом в исследовании системы станет изучение свойств нашего предельного цикла при конкретном значении параметра (возьмем  $\nu = 1$ ): нахождение его периода (от независимой переменной) и его форму. Данные свойства потребуются в следующих частях (4 и 5) для проверки характера его устойчивости.

Ставя численные эксперименты, значения могут получаться точные, но все же с погрешностью. Поэтому далее мы будем находить значение с точностью до 3-х знаков после запятой (т. е. наше значение должно расходится не более чем на  $\epsilon = 0.5 * 10^{-4}$ ).

В программе 3 строится цикл методом точечных отображений Пуанкаре: выбирается точка на оси  $0_{y_1}$ , от которой мы начинаем двигаться по траектории до тех пор, пока снова не пересечет ось. При приближении к нашему предельному циклу, точки будут сближаться все больше и больше. Таким образом будем считать траекторию предельным циклом, когда начальная и конечная точка сблизятся по обоим координатам ближе чем на  $\epsilon$ . Периодом нашего цикла будет количество затраченных шагов ( $i + 1$ ) помноженных на длину шага  $h$ . Как видно из работы программы, цикл имеет период  $\omega = 6.663$ .

Далее можно попытаться найти аналитическую форму данного цикла, но судя по графику 1.2 форма цикла не похожа на знакомые квадратичные функции и подбор аналитического вида кривой может оказаться трудной задачей. При этом мы не сможем достигнуть такой же точности, как наше поточечное решение, полученное методом Эйлера. Поэтому в следующих работах будем работать с массивами  $y_1$  и  $y_2$ , описывающие наш цикл.

---

### Листинг 3 Поиск параметров системы

---

```
eps = 0.5 * 10 ** -4
y1_0, y2_0 = 0.72424, 0 # начальная точка

y1 = [y1_0]
y2 = [y2_0]
h = 0.0001
for i in range(100000):
    # итерация метода Эйлера
    y1.append(y1[i] + h*(y2[i]))
    y2.append(y2[i] + h*(-3*y2[i] ** 3 + ny * y2[i] - y1[i]))
    # проверка прихода в туже точку с погрешностью
    if np.abs(y1_0 - y1[i+1]) < eps and
       np.abs(y2_0 - y2[i+1]) < eps:
        # вывод результатов
        print("h={h}, i={i}, h*i={period}".format(
            h=h, i=i+1, period=h*(i+1)))
        return;
# Вывод программы
# h=0.0001, i=66633, h*i=6.663300000000004
```

---

## 4 Определение устойчивости через мультипликаторы системы

В этом разделе будет проведено исследование нашего предельного цикла на асимптотическую орбитальную устойчивость. Проверку будем проводить с помощью аналога теоремы Андронова-Витта, вычислив мультипликаторы системы первого приближения вдоль исследуемого предельного цикла.

Дадим необходимые для этого определения.

**Определение 3** Система орбитально устойчива, если для его решения  $\phi(t)$  и для любого  $\epsilon > 0$  найдется постоянное число  $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ , такое, что траектория всякого решения  $X(t)$ , начинающегося в  $\delta$ -окрестности траектории  $\phi(t)$ , остается в  $\epsilon$ -окрестности траектории  $\phi(t)$  при всех  $t \geq 0$ .

**Определение 4** Система асимптотически орбитально устойчива, если для орбитального решения  $\phi(t)$  и всякого близкого к нему решения  $X(t)$  выполняется условие 4.1. То есть любая достаточно близкая траектория сходится к орбитально устойчивому решению.

$$\exists \alpha, \beta > 0 : \|\mathbf{X}(0) - \boldsymbol{\varphi}(0)\| < \delta \rightarrow \|\mathbf{X}(t) - \boldsymbol{\varphi}(t)\| \leq \alpha \|\mathbf{X}(0) - \boldsymbol{\varphi}(0)\| e^{-\beta t} \quad (4.1)$$

Из поставленных определений видна мотивация исследования решения на наличие асимптотической орбитальной устойчивости: подтвердив его, мы, увеличивая точность вычислений, можем быть уверены, что лучше приближаемся к необходимой траектории.

В этом нам поможет, аналог теоремы Андронова-Витта.

**Теорема 1 теорема Андронова-Витта.** Если имеется периодическое решение автономной системы и его система первого приближения имеет два мультипликатора, один равный единице, а второй по-модулю меньше единицы, то полученное периодическое решение асимптотически орбитально устойчиво.

Мультиликаторами называются значения величин, полученных в результате алгоритма, изученного на лекционных занятиях:

- Рассмотрим систему  $\dot{x} = F(x)$  и периодическое решение  $\eta(t)$ ;
- Выразим линеаризованную систему  $\dot{y} = F'(\eta(t))y$  вдоль данного решения;
- Вычислим ее вдоль периодического решения с н.у.  $(1, 0)$  и  $(0, 1)$ ;
- Получим матрицу монодромии  $\Phi = (\phi_1, \phi_2)$ , где  $\phi_1, \phi_2$  - решения системы полученные на предыдущем шаге.
- Собственные числа матрицы монодромии мы и будем считать мультиликаторами системы.

Осталось, провести поставленные шаги. Рассмотрим нашу систему 4.2:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 = f_1(y_1, y_2) \\ \dot{y}_2 = -3y_2^3 + \nu y_2 - y_1 = f_2(y_1, y_2) \end{cases} \quad (4.2)$$

Посчитаем Якобиан нашей системы (уравнения 4.3):

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_1} = 0; \quad \frac{\partial f_1}{\partial y_2} = 1; \quad \frac{\partial f_2}{\partial y_1} = -1; \quad \frac{\partial f_2}{\partial y_2} = -9y_2^2 + \nu; \quad (4.3)$$

И строим линеаризованную систему вдоль цикла  $\eta(t)$ :

$$\begin{cases} \dot{Y}_1 = Y_2 \\ \dot{Y}_2 = -Y_1 + (-9\eta_2^2(t) + \nu)Y_2 \end{cases} \quad (4.4)$$

В листинге 4 мы, методом Эйлера решаем полученную систему, находим матрицу монодромии и вычисляем ее Собственные числа (Eigenvalues). Как видно из вывода программы, вычисленные мультиликаторы удовлетворяют условиям рассмотренной теоремы с искомой точностью до 3-х знаков ( $8.59 \cdot 10^{-4}$  и 1), таким исследуемый цикл асимптотически орбитально устойчив.

---

#### Листинг 4 Вычисление мультиликаторов

---

```
def linear_form(y1_0, y2_0, cycle_y1, cycle_y2):  
    # Решение линеаризованной системы вдоль цикла  
    y1 = [y1_0]  
    y2 = [y2_0]  
    for i in range(len(cycle_y1)):  
        y1.append(y1[i] + h * (y2[i]))  
        y2.append(y2[i] + h * (-y1[i] +  
                               (-9*cycle_y2[i] ** 2 + ny) * y2[i]))  
    return [y1[-1], y2[-1]]  
  
cycle_y1, cycle_y2 = line(0.72424, 0) # вычисление цикла  
# решение линеаризированной системы с н. у. (1, 0) и (0, 1)  
f1 = linear_form(1, 0, cycle_y1, cycle_y2)  
f2 = linear_form(0, 1, cycle_y1, cycle_y2)  
f = np.array([ # Матрица монодромии  
    [f1[0], f2[0]],  
    [f1[1], f2[1]],  
])  
print("F-matrix:")  
print(f)  
# Вычисление собственных чисел матрицы монодромии  
p = np.linalg.eig(f)  
print("Eigenvalues:")  
print(p[0])  
# Вывод программы:  
# F-matrix:  
# [[ 8.56578243e-04 -3.73826069e-06]  
#  [ 5.05107751e-01  1.00012266e+00]]  
# Eigenvalues:  
# [ 8.58467858e-04  1.00012077e+00]
```

## 5 Определение устойчивости с помощью метода Пуанкаре

В этом разделе, рассмотрим другой метод определения асимптотической орбитальной устойчивости циклического решения, предложенный Анри Пуанкаре. Он определен только для двумерных автономных систем, что нам подходит.

**Теорема 2** *Теорема Пуанкаре. периодическое решение системы будет асимптотически орбитально устойчивым тогда и только тогда, когда интеграл дивергенции вдоль решения будет меньше нуля.*

Таким образом, нам остается лишь взять вычисленные в уравнении 4.3 производные, составляющие дивергенцию системы. После чего вычислить интеграл (возьмем метод прямоугольников). Программа 5 производит данное вычисление, и результат подтверждает полученный в предыдущей работе результат: предельный цикл удовлетворяет критерию Пуанкаре, значит асимптотически орбитально устойчив.

---

### Листинг 5 Вычисление интеграла от дивергенции системы

---

```
def integral_from_div(cycle_y1, cycle_y2):  
    """  
        Вычисление интеграла от дивергенции системы  
        вдоль цикла  
    """  
  
    sum = 0  
    for j in range(len(cycle_y1)):  
        sum += -9 * cycle_y2[j] ** 2 + ny  
    sum *= h  
    return sum  
  
# Основная программа  
cycle_y1, cycle_y2 = line(0.724197, 0)  
s = integral_from_div(cycle_y1, cycle_y2)  
print("Integral of the divergence: {}".format(s))  
# Вывод программы:  
# Integral of the divergence: -7.059887304427718
```

---

## 6 Влияние постоянного запаздывания

С этой главы мы познакомимся с *функциональными дифференциальными уравнениями (ФДУ)*, а точнее с системами в которых присутствует элемент запаздывания и как он влияет на поведение исследуемой системы.

**Определение 5** *Функциональным дифференциальным уравнением с постоянным запаздыванием, мы будем называть уравнение вида 6.1.*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, x_t(t - \tau)) \\ x(0) = x_0 \\ x_{t_0}(\cdot) = \{y_0(t); t \in [\tau; 0]\} \end{cases} \quad (6.1)$$

Посмотрев на него, можно выделить основные особенности от обычных дифференциальных уравнений, помимо зависимости от  $t$  и  $x$ , у нас появляется зависимость от значения фазовой переменной в момент  $x_t(t - \tau)$  (Здесь и далее,  $x_t$  - *функция предыстории*, описывающая значения фазовой переменной на интервале  $[t - \tau; t]$ ). Так же, чтобы получить однозначное решение системы 6.1, понадобилось задать предысторию до момента  $t_0 = 0$  (третье равенство системы).

### 6.1 Добавление запаздывания по $y_1$ в систему

Проведем первый эксперимент с постоянным запаздыванием. Для этого, введем в нашу систему слагаемое  $\alpha * y_1(t - \tau)$  (Ур. 6.2) При параметре  $\alpha = 0$  оно не влияет на систему, следовательно мы будем наблюдать наш предельный цикл. Постепенно изменяя этот параметр мы будем наблюдать на изменения характера системы.

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 + \alpha * y_1(t - \tau) \\ \dot{y}_2 = -3y_2^3 + \nu y_2 - y_1 \end{cases} \quad (6.2)$$

В программе ?? показано основное изменения нашего эксперимента. Теперь во входные параметры мы уже передаем не одну точку, а

массив размера  $\text{len}(y1\_0)$ , и при вычислении следующего шага в методе Эйлера, мы обращаемся к  $(i - \text{len}(y1\_0) + 1)$ -му элементу массива.

В эксперименте рассматриваются два начальных условия: система находилась в точке  $(0.1, 0.1)$  в 100 первых итерациях, и в точке  $(2, 2)$  в 100 последних итерациях.

Также стоит отметить, модернизацию нашей программы в техническом виде, с помощью слайдера оказалось неудобным отлаживать подбор необходимого параметра. Поэтому, чтобы упростить эксперименты и не перезапускать программу, вместо слайдера был поставлен TextBox - поле для ввода текста, куда мы можем ввести любое, необходимое нам, значение (пересчет графика произойдет при нажатии на клавишу Enter). При желании, с подробностями использования этого виджета можно ознакомиться в приложении.

Сразу стоит отметить, что из-за внесения задержки, система начиная приобретать непредсказуемый характер. В некоторых случаях это вызывало переполнение переменных, что мешало пронаблюдать эксперимент.

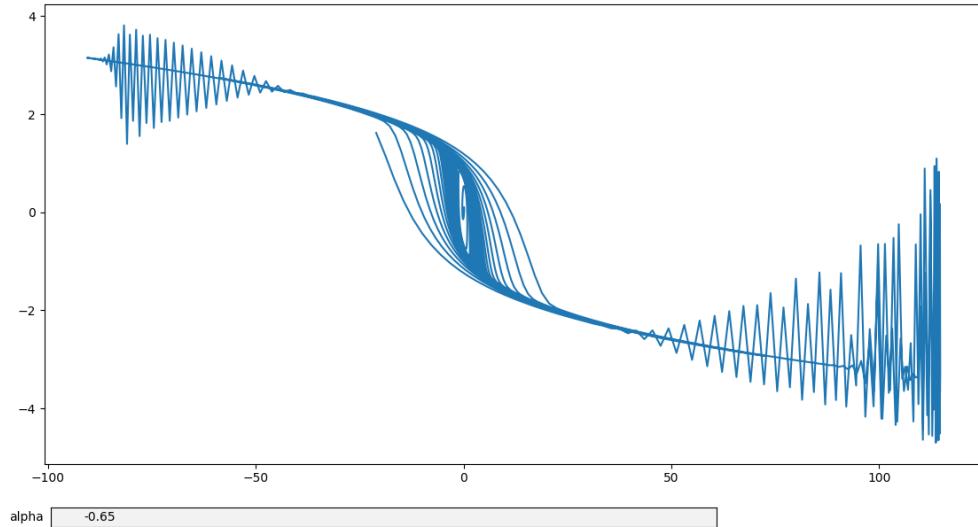


График 6.1 — ( $\alpha = -0.65$ ) Решение от точки  $(0.1, 0.1)$  хаотично расходится от центра. Решение от точки  $(2, 2)$  не смогло построится

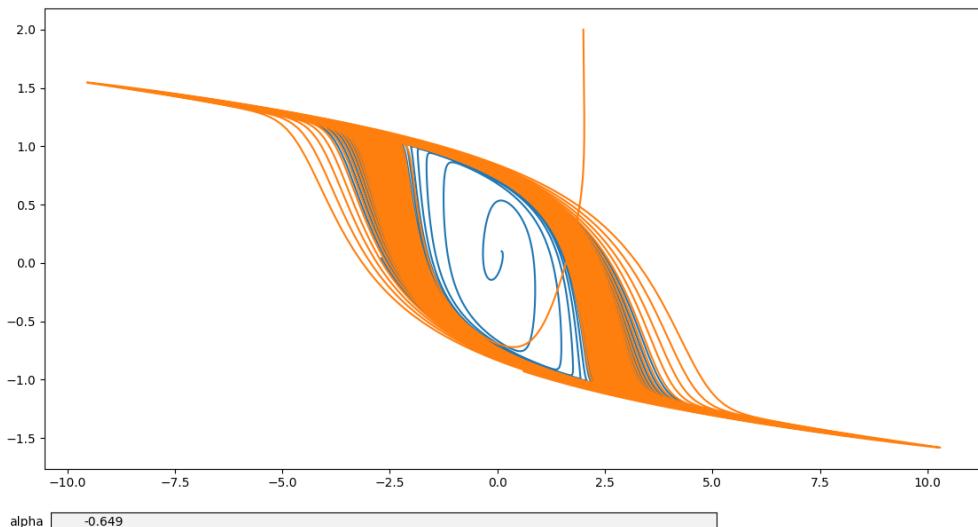


График 6.2 — ( $\alpha = -0.649$ ) Оба решения построились. Отчетливо наблюдается жесткость системы, цикл сохранился, но об изолированности говорить не приходится

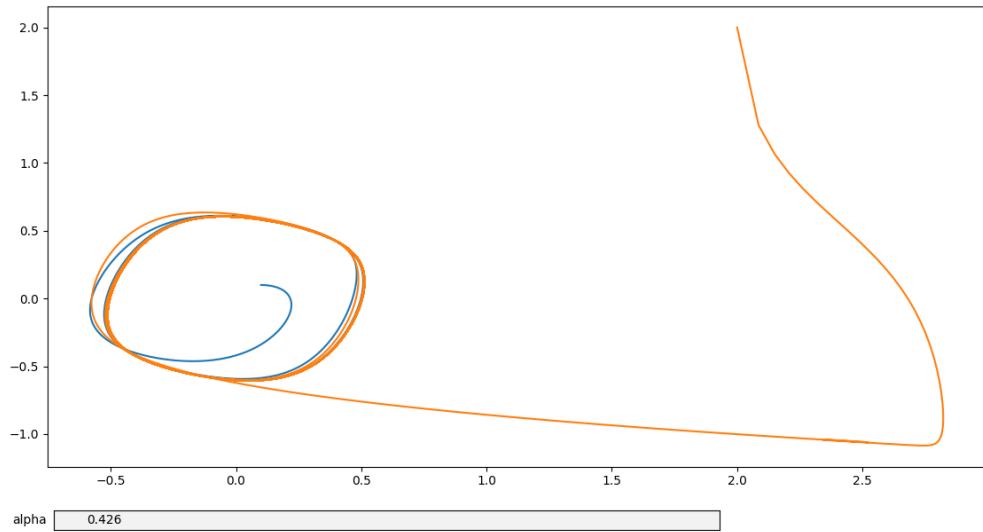


График 6.3 — ( $\alpha = 0.426$ ) Решение все еще сходится к циклу, но постепенно разбалтывается

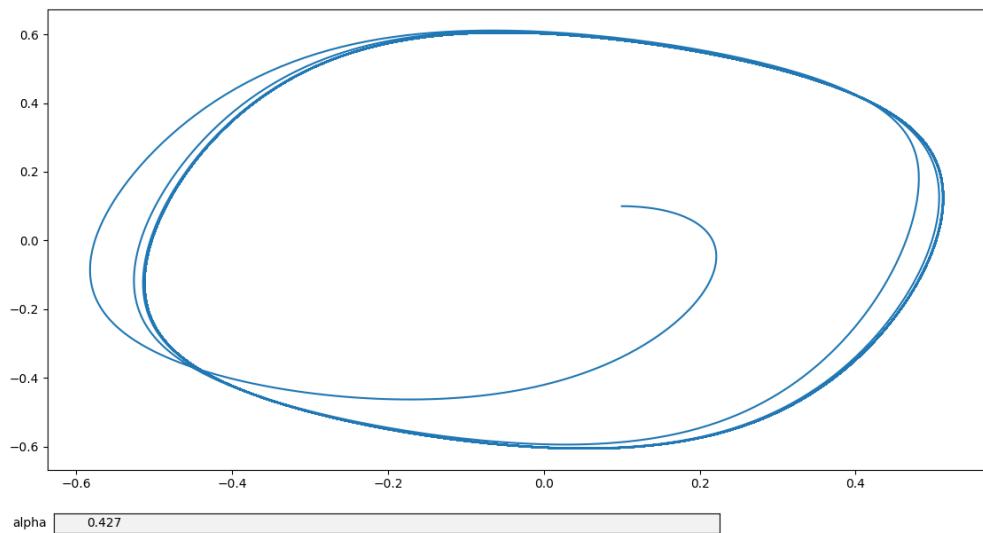


График 6.4 — ( $\alpha = 0.427$ ) Второе решение перестало моделироваться.  
Первое все еще сходится к циклу

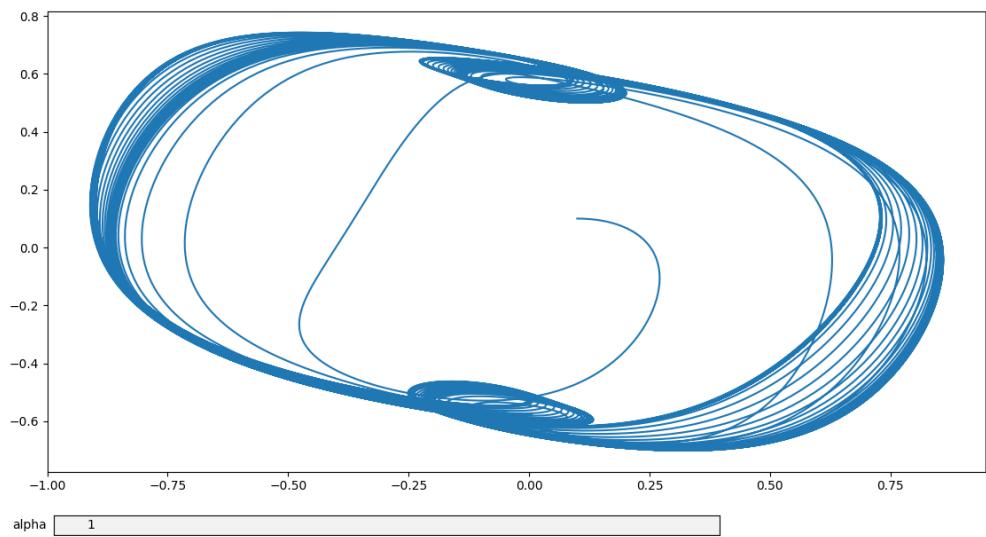


График 6.5 — ( $\alpha = 1$ ) У первого решения появляются две петельки и траектория становится более хаотична

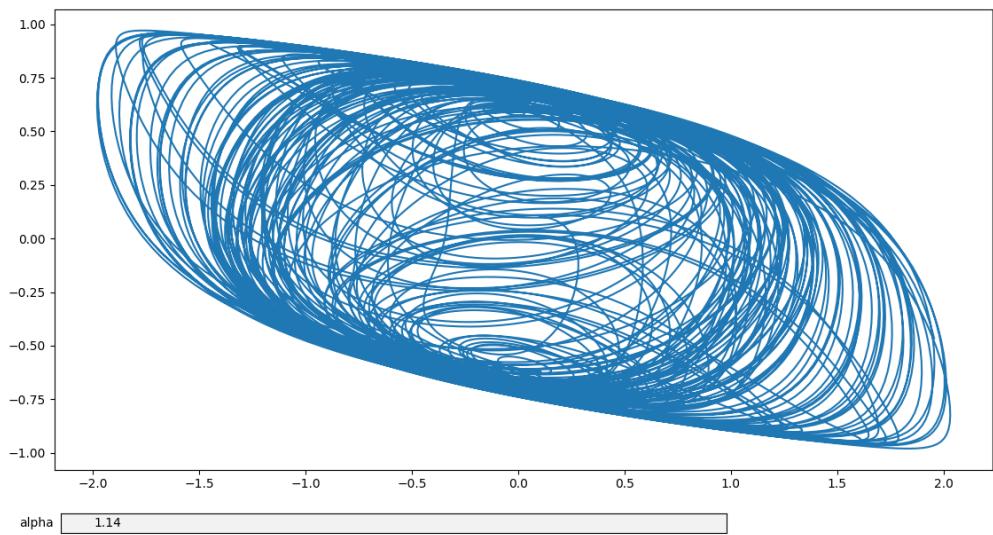


График 6.6 — ( $\alpha = 1.24$ ) Первое решение хаотично изменяется в пределах цикла

## **6.2 Влияние постоянной задержки на систему. Заключение**

Проведя эксперименты выше (6.1 и ??), не удавалось сильно изменить параметр  $\alpha$ : сразу же начинали расходиться решения (или решение); проявлялось, своего рода, хаотичное поведение; исчезали циклы. Таким образом можно убедится в том, как сильно изменяет поведение системы даже самая простая, в плане понимания, задержка.

## 7 Влияние переменного запаздывания

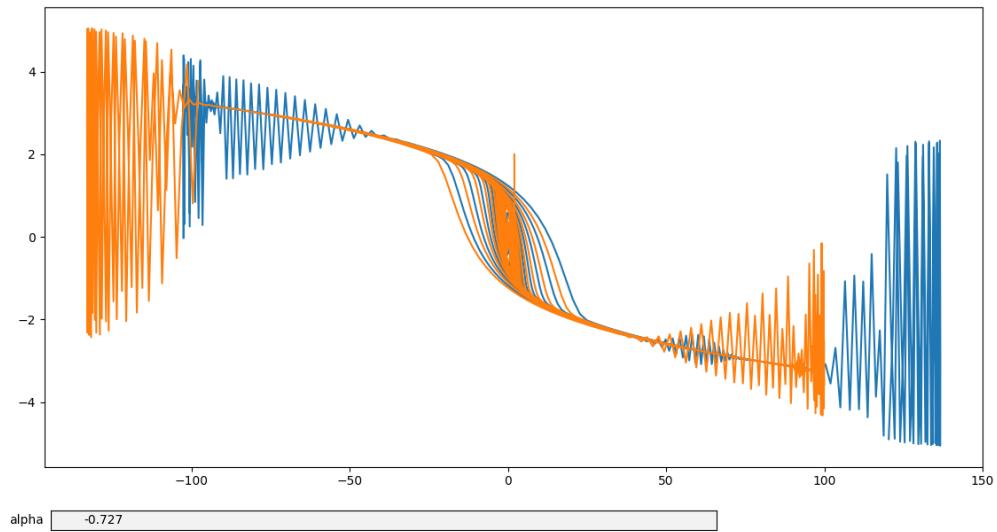


График 7.1 — ( $\alpha = -0.727$ )

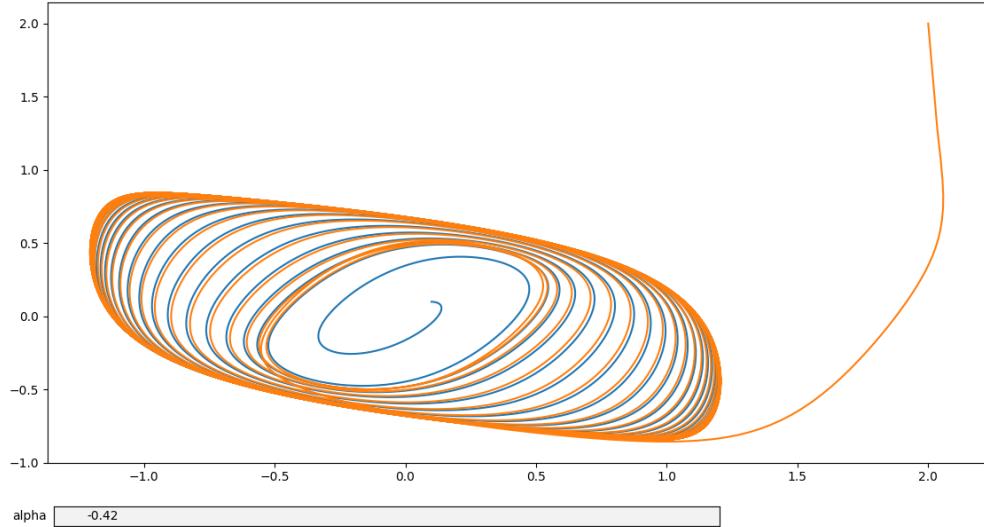


График 7.2 — ( $\alpha = -0.42$ )

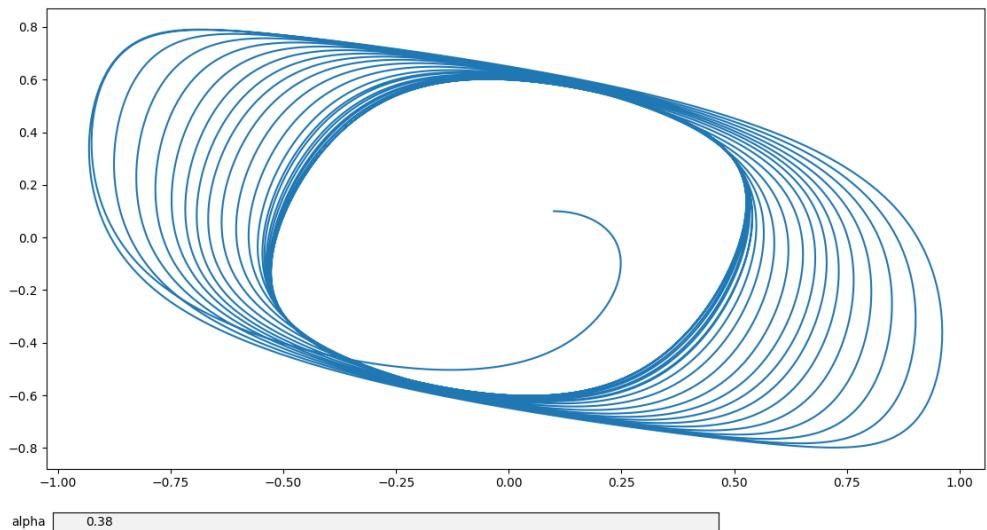


График 7.3 — ( $\alpha = 0.38$ )

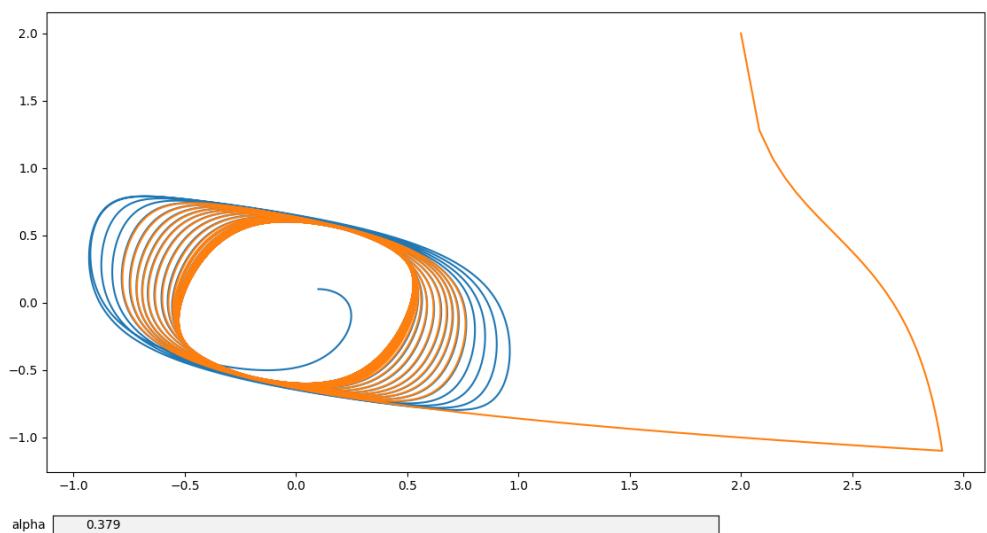


График 7.4 — ( $\alpha = 0.379$ )

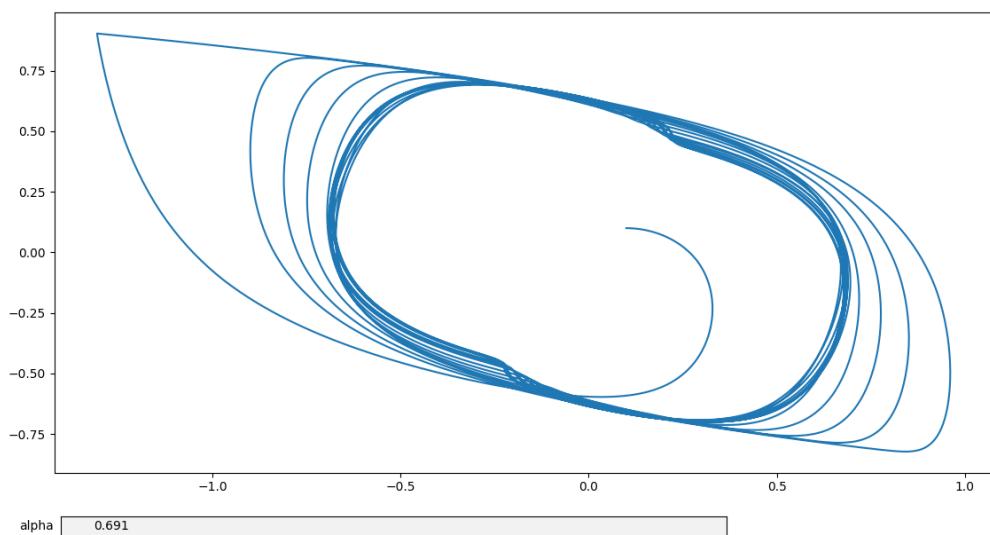


График 7.5 — ( $\alpha = 0.691$ )

## 8 Влияние распределенного запаздывания

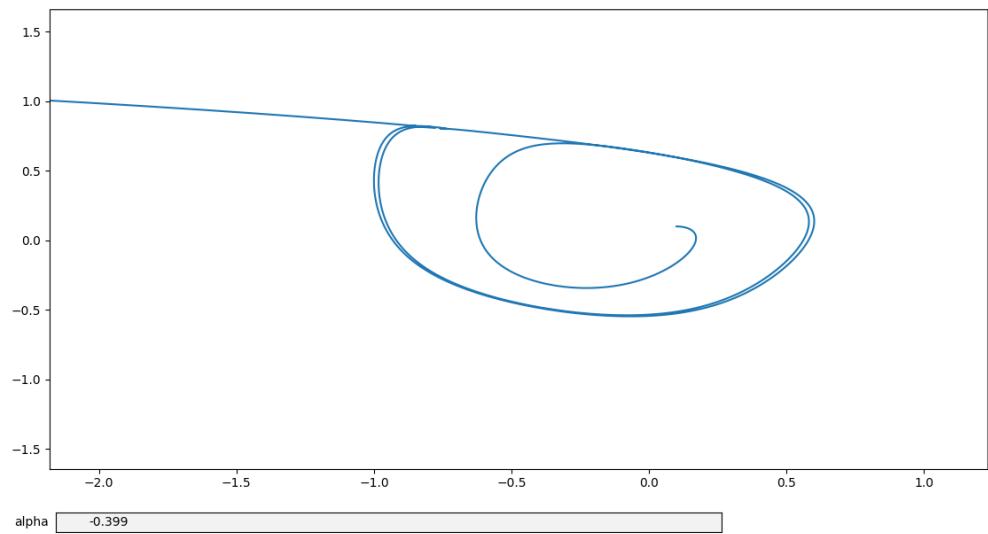


График 8.1 — ( $\alpha = -0.399$ )

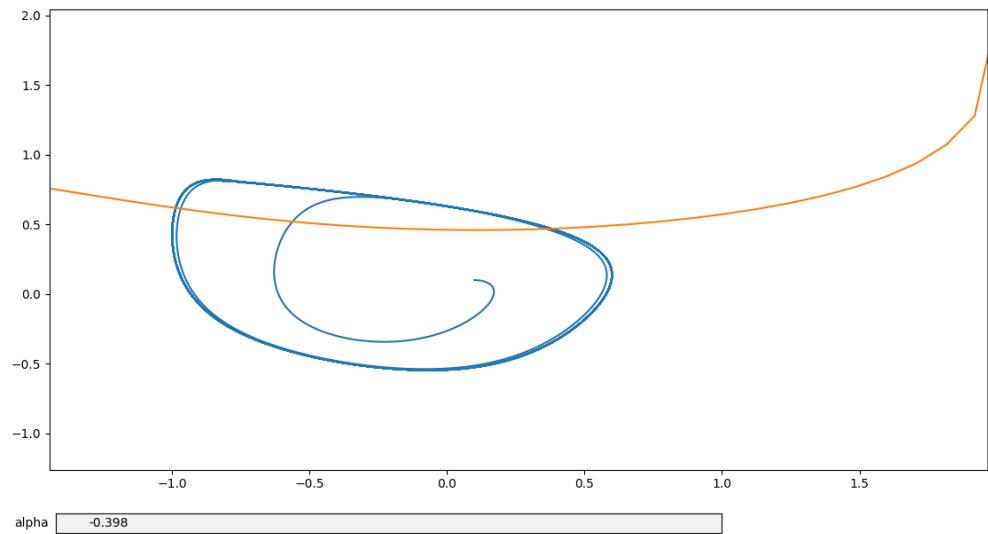


График 8.2 — ( $\alpha = -0.398$ )

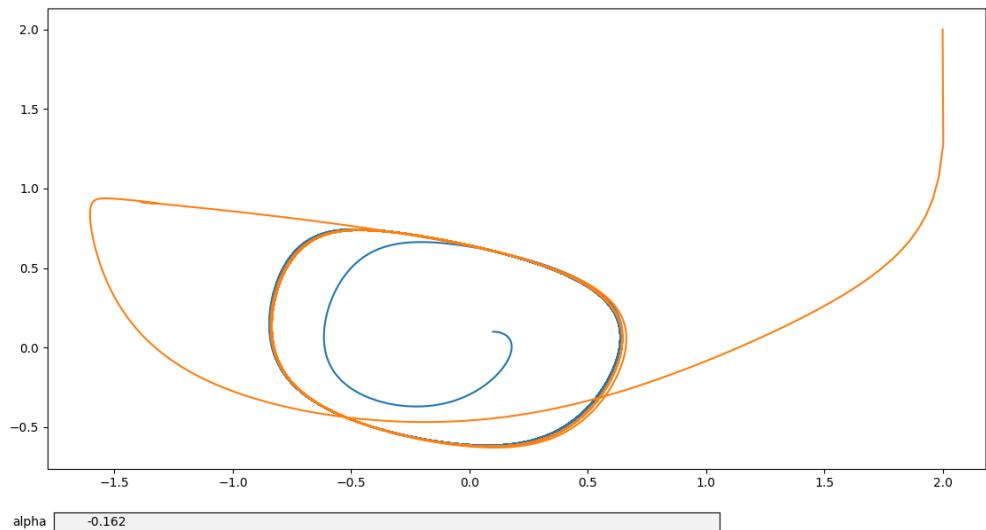


График 8.3 — ( $\alpha = -0.162$ )

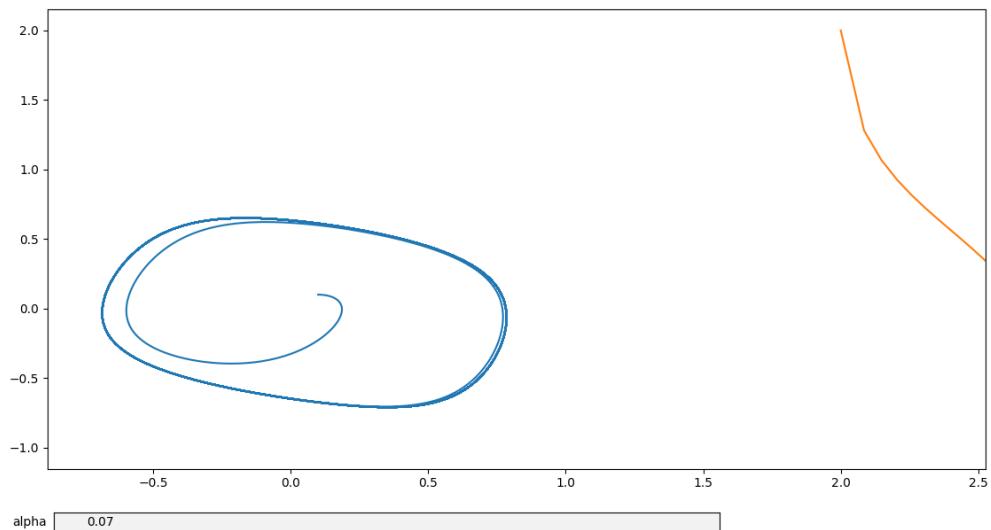


График 8.4 — ( $\alpha = 0.07$ )

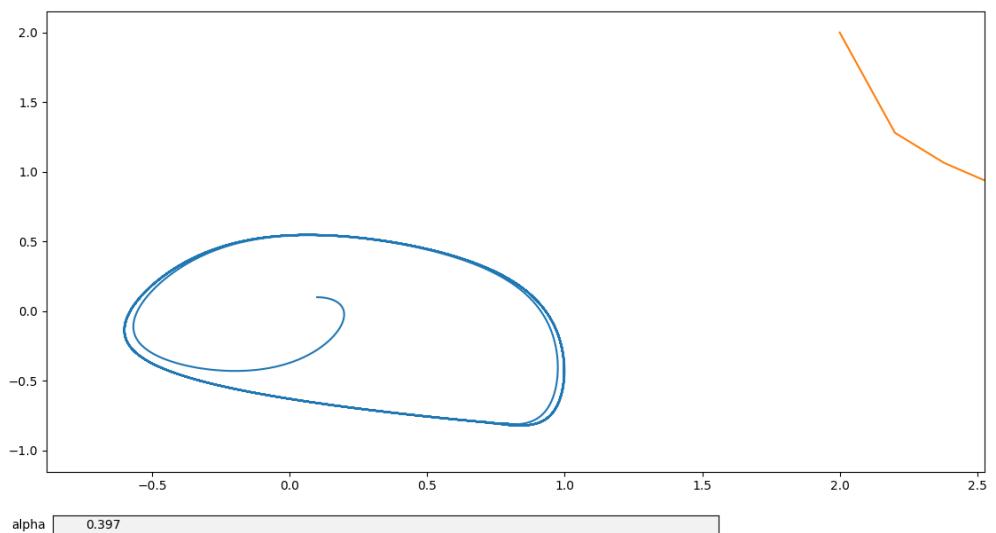


График 8.5 — ( $\alpha = 0.397$ )

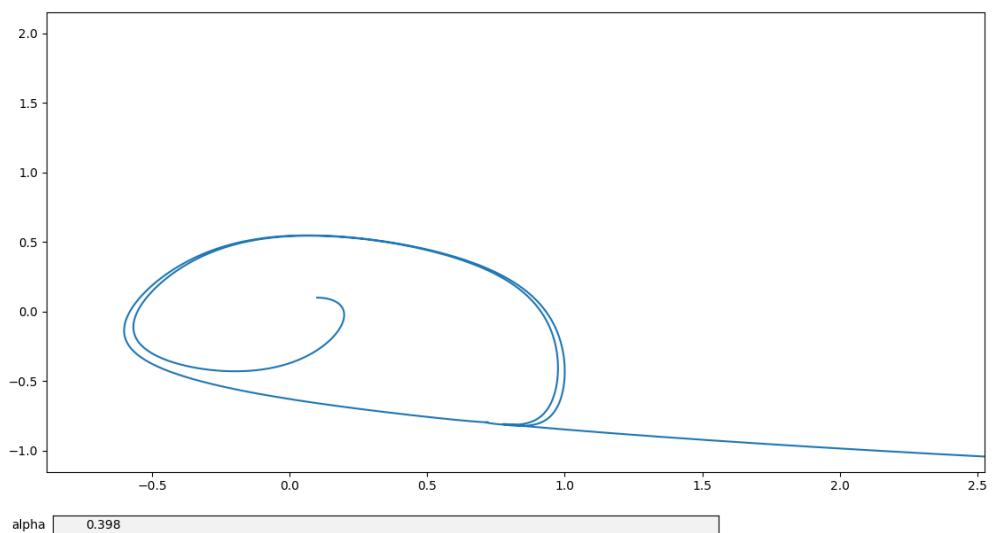


График 8.6 — ( $\alpha = 0.398$ )

## 9 Влияние случайного шума

## **Заключение**

Заключение будет, когда все закончится.

## **Список использованных источников**

1. Numpy - библиотека для научных вычислений на языке Python. — <http://www.numpy.org/>.
2. Matplotlib - библиотека для визуализации данных. — <http://matplotlib.org/>.
3. Функция streamplot. — [http://matplotlib.org/examples/images\\_contours\\_and\\_fields/streamplot\\_demo\\_features.html](http://matplotlib.org/examples/images_contours_and_fields/streamplot_demo_features.html).

## Приложение А Исходный код программ

### A.1 Поиск предельного цикла

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

# Параметр системы
nu = 1

# создание сетки 100x100 точек в области [-3;3]x[-3;3]
Y, X = np.mgrid[-3:3:100j, -3:3:100j]

# вычисление фазовых векторов на сетке
Y1 = Y
Y2 = -3 * Y ** 3 + nu * Y - X

# построение фазового портрета
fig, ax = plt.subplots()
plt.streamplot(X, Y, Y1, Y2)

# подпись осей на графике
ax.set_xlabel("y1")
ax.set_ylabel("y2")

# функция построение кривой методом Эйлера
def line(y1_0, y2_0):
    y1 = [y1_0]
    y2 = [y2_0]
    h = 0.01 # длина шага
    for i in range(2000): # 2000 - количество итераций
        y1.append(y1[i] + h*(y2[i]))
        y2.append(y2[i] +
                  h * (-3*y2[i] ** 3 + nu*y2[i] - y1[i]))
```

```
# отображение кривой на графике
ax.plot(y1, y2)

# построение двух кривых, начинающихся внутри и
# вне предположенного предельного цикла
line(0.1, 0.1)
line(2, 2)

# показать построенные графики
plt.show()
```

## A.2 Исследование точек бифуркации системы

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.widgets import Slider, Button

ny0 = 0 # Первоначальное значения параметра

fig, ax = plt.subplots()
plt.subplots_adjust(bottom=0.15)

# подпись осей на графике
ax.set_xlabel("y1")
ax.set_ylabel("y2")

# функция построение кривой методом Эйлера
def line(y1_0, y2_0, ny):
    y1 = [y1_0]
    y2 = [y2_0]
    h = 0.003
    for i in range(50000):
        y1.append(y1[i] + h * (y2[i]))
        y2.append(y2[i] +
                  h * (-3*y2[i] ** 3 + ny * y2[i] - y1[i]))
    ax.plot(y1, y2)

def streamplot(ny):
    # увеличиваем параметры сетки в зависимости от модуля ny
    b = (4 + np.abs(ny)) # границы сетки
    c = (100 + np.abs(ny)) * 1j # число точек разбиения
    Y, X = np.mgrid[-b:b:c, -b:b:c]
    Y1 = Y
    Y2 = -3 * Y ** 3 + ny * Y - X
    ax.streamplot(X, Y, Y1, Y2)
```

```

# перерисовка графика в зависимости от параметра
# выводится фазовый портрет и две линии
def update_plot(ny):
    ax.cla()
    streamplot(ny)
    line(1. / (np.abs(ny) + 1), 1. / (np.abs(ny) + 1), ny)
    line(-ny, -6, ny)
    fig.canvas.draw_idle()

# Слайдер - чтобы менять параметр без перезапуска программы
axfreq = plt.axes([0.13, 0.05, 0.55, 0.03])
slider = Slider(axfreq, 'Ny', -10.0, 20.0, valinit=ny0)
slider.on_changed(update_plot)

step = 0.1 # шаг изменения параметра по нажатии клавиши
def _keyboard_handler(event):
    # выход при нажатии escape
    if event.key == 'escape':
        plt.close('all')
    # уменьшение параметра при нажатии стрелки "вниз"
    elif event.key == 'down':
        slider.set_val(slider.val - step)
    # увеличение параметра при нажатии стрелки "вверх"
    elif event.key == 'up':
        slider.set_val(slider.val + step)

fig.canvas.mpl_connect('key_press_event', _keyboard_handler)

update_plot(ny0)
plt.show()

```

### A.3 Исследование параметров найденного предельного цикла

```
import numpy as np

ny = 1

y1_0 = 0.72424
y2_0 = 0

y1 = [y1_0]
y2 = [y2_0]
eps = 0.5 * 10 ** -4

# метод Эйлера с большей точностью
h = 0.0001
for i in range(100000):
    y1.append(y1[i] + h*(y2[i]))
    y2.append(y2[i] +
               h * (-3*y2[i] ** 3 + ny * y2[i] - y1[i]))
    # считаем цикл завершенным, когда покоординатно
    # приблизились к начальной точке ближе, чем на eps
    if (np.abs(y1_0 - y1[i+1]) < eps and
        np.abs(y2_0 - y2[i+1]) < eps):
        print("h={h}, i={i}, h*i={period}".format(
            h=h, i=i+1, period=h*(i+1)))
    )
    break
```

#### A.4 Проверка устойчивости теоремой о мультипликаторах

```
import numpy as np

ny = 1      # Параметр системы
h = 0.0001 # Общий шаг метода Эйлера

def line(y1_0, y2_0):
    """
    Вычисление системы методом Эйлера от точки (y1_0, y2_0)
    за счет правильно подобранных в прошлой работе координат
    функция вычислит близкую к предельному циклу траекторию
    """
    y1 = [y1_0]
    y2 = [y2_0]
    eps = 0.5 * 10 ** -4
    for i in range(100000):
        y1.append(y1[i] + h * y2[i])
        y2.append(y2[i] +
                  h*(-3*y2[i] ** 3 + ny * y2[i] - y1[i]))
        if (np.abs(y1_0 - y1[i+1]) < eps and
            np.abs(y2_0 - y2[i+1]) < eps):
            return (y1, y2)
    raise Exception("Cycle not found")

def linear_form(y1_0, y2_0, cycle_y1, cycle_y2):
    """
    Решение линеаризованной системы вдоль цикла
    """
    y1 = [y1_0]
    y2 = [y2_0]
    for i in range(len(cycle_y1)):
```

```

y1.append(y1[i] + h * (y2[i]))
y2.append(y2[i] + h * (-y1[i] +
(-9*cycle_y2[i] ** 2 + ny) * y2[i]))
return [y1[-1], y2[-1]]

# Начало программы
# вычисление поточечного описания предельного цикла
cycle_y1, cycle_y2 = line(0.72424, 0)

# решение линеаризированной системы
# с начальными условиями (1, 0) и (0, 1)
f1 = linear_form(1, 0, cycle_y1, cycle_y2)
f2 = linear_form(0, 1, cycle_y1, cycle_y2)

# Матрица монодромии
f = np.array([
    [f1[0], f2[0]],
    [f1[1], f2[1]],
])
print("F-matrix:")
print(f)

# Вычисление собственных чисел матрицы монодромии
p = np.linalg.eig(f)
print("Eigenvalues:")
print(p[0])

```

## A.5 Проверка устойчивости цикла методом Пуанкаре

```
import numpy as np

ny = 1      # Параметр системы
h = 0.0001 # шаг метода Эйлера
            # и основание прямоугольников при интегрировании

def line(y1_0, y2_0):
    """
    Вычисление системы методом Эйлера от точки (y1_0, y2_0)
    за счет правильно подобранных в предыдущей работе координат
    функция вычислит близкую к предельному циклу траекторию
    """
    y1 = [y1_0]
    y2 = [y2_0]
    eps = 0.5 * 10 ** -4
    for i in range(100000):
        y1.append(y1[i] + h * (y2[i]))
        y2.append(y2[i] +
                   h*(-3*y2[i] ** 3 + ny * y2[i] - y1[i]))
        if (np.abs(y1_0 - y1[i + 1]) < eps and
            np.abs(y2_0 - y2[i + 1]) < eps):
            return (y1, y2)

    raise Exception("Cycle not found")

def integral_from_div(cycle_y1, cycle_y2):
    """
    Вычисление интеграла от дивергенции системы
    вдоль цикла
    """
    pass
```

```
sum = 0
for j in range(len(cycle_y1)):
    sum += -9 * cycle_y2[j] ** 2 + ny
sum *= h
return sum

# Основная программа
cycle_y1, cycle_y2 = line(0.72424, 0)
s = integral_from_div(cycle_y1, cycle_y2)
print("Integral of the divergence: {}".format(s))
```

## A.6 Влияние постоянного запаздывания

```
# Лаб. работа 6: влияние постоянного запаздывания на систему
import copy
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.widgets import TextBox

figure, ax = plt.subplots()
plt.subplots_adjust(bottom=0.15)
# подпись осей на графике
ax.set_xlabel("y1")
ax.set_ylabel("y2")

ny = 1
alpha0 = 0.01

def line(y1_0, y2_0, alpha):
    # решение задачи методом Эйлера
    y1 = copy.deepcopy(y1_0)
    y2 = copy.deepcopy(y2_0)
    h = 0.03
    for i in range(len(y1_0)-1, 20000):
        # Запаздывание влияет на y1
        y1.append(y1[i] + h * (y2[i] +
                               alpha * y1[i - len(y1_0) + 1]))
        y2.append(y2[i] +
                  h * (-3*y2[i] ** 3 + ny * y2[i] - y1[i]))

    # Запаздывание влияет на y2
    # y1.append(y1[i] + h * (y2[i]))
    # y2.append(y2[i] +
    #           h * (-3*y2[i] ** 3 + ny * y2[i] - y1[i] +
```

```

#           alpha * y1[i - len(y1_0) + 1]))
ax.plot(y1, y2)

def update_plot(strAlpha):
    # перерисовка графика в зависимости от параметра
    alpha = float(strAlpha)
    ax.cla()
    line(
        [0.1 for a in range(100)],
        [0.1 for a in range(100)],
        alpha)
    line(
        [2 for a in range(100)],
        [2 for a in range(100)],
        alpha)
    figure.canvas.draw_idle()

axfreq = plt.axes([0.13, 0.05, 0.55, 0.03])
textBox = TextBox(axfreq, 'alpha', initial=str(alpha0))
textBox.on_submit(update_plot)

def _keyboard_handler(event):
    # выход при нажатии escape
    if event.key == 'escape':
        plt.close('all')

figure.canvas.mpl_connect('key_press_event', _keyboard_handler)

update_plot(alpha0)
plt.show()

```

## A.7 Влияние переменного запаздывания

```
# Лаб. работа 7: влияние переменного запаздывания на систему
import copy
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.widgets import TextBox

figure, ax = plt.subplots()
plt.subplots_adjust(bottom=0.15)
# подпись осей на графике
ax.set_xlabel("y1")
ax.set_ylabel("y2")

ny = 1
alpha0 = 0.01

N = 100
tao = 3
h = tao / N
T = 200

def line(y1_0, y2_0, alpha):
    # решение задачи методом Эйлера
    y1 = copy.deepcopy(y1_0)
    y2 = copy.deepcopy(y2_0)
    for i in range(len(y1_0)-1, int(T / h)):
        # Запаздывание влияет на y1
        y1.append(y1[i] + h * (y2[i] +
                               alpha * y1[i - int(N * np.sin(2*i*h/T))]))
    y2.append(y2[i] +
              h * (-3*y2[i] ** 3 + ny * y2[i] - y1[i]))
```

```

# Запаздывание влияет на y2
# y1.append(y1[i] + h * (y2[i]))
# y2.append(y2[i] +
#           h * (-3*y2[i] ** 3 + ny * y2[i] - y1[i] +
#                 alpha * y1[i - int(N * np.sin(2*i*h/T))]))
ax.plot(y1, y2)

def update_plot(strAlpha):
    # перерисовка графика в зависимости от параметра
    alpha = float(strAlpha)
    ax.cla()
    line(
        [0.1 for a in range(N)],
        [0.1 for a in range(N)],
        alpha)
    line(
        [2 for a in range(N)],
        [2 for a in range(N)],
        alpha)
    figure.canvas.draw_idle()

axfreq = plt.axes([0.13, 0.05, 0.55, 0.03])
textBox = TextBox(axfreq, 'alpha', initial=str(alpha0))
textBox.on_submit(update_plot)

def _keyboard_handler(event):
    # выход при нажатии escape
    if event.key == 'escape':
        plt.close('all')

```

```
figure.canvas.mpl_connect('key_press_event', _keyboard_handler)

update_plot(alpha0)
plt.show()
```

## A.8 Влияние расспределенного запаздывания

```
# Лаб. работа 7: влияние переменного запаздывания на систему
import copy
from functools import reduce
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.widgets import TextBox

figure, ax = plt.subplots()
plt.subplots_adjust(bottom=0.15)
# подпись осей на графике
ax.set_xlabel("y1")
ax.set_ylabel("y2")

ny = 1
alpha0 = 0.01

N = 100
tao = 3
h = tao / N
T = 200

def line(y1_0, y2_0, alpha):
    # решение задачи методом Эйлера
    y1 = copy.deepcopy(y1_0)
    y2 = copy.deepcopy(y2_0)
    _integral = lambda i, y1: h*reduce(lambda sum, x: sum + x ** 2, y1)
    integral = _integral(len(y1_0)-1, y1)
    try:
        for i in range(len(y1_0)-1, int(T / h)):
            # Запаздывание влияет на y1
```

```

        y1.append(y1[i] + h * (y2[i] +
                               alpha * integral))
        y2.append(y2[i] +
                  h * (-3*y2[i] ** 3 + ny * y2[i] - y1[i]))

# Запаздывание влияет на y2
# y1.append(y1[i] + h * (y2[i]))
# y2.append(y2[i] +
#           h * (-3*y2[i] ** 3 + ny * y2[i] - y1[i] +
#                 alpha * integral))

integral -= h * y1[i-N+1] ** 2
integral += h * y1[i] ** 2
finally:
    minlen = min(len(y1), len(y2))
    ax.plot(y1[0:minlen], y2[0:minlen])

def update_plot(strAlpha):
    # перерисовка графика в зависимости от параметра
    alpha = float(strAlpha)
    ax.cla()
    line(
        [0.1 for a in range(N)],
        [0.1 for a in range(N)],
        alpha)
    line(
        [2 for a in range(N)],
        [2 for a in range(N)],
        alpha)
    figure.canvas.draw_idle()

```

```
axfreq = plt.axes([0.13, 0.05, 0.55, 0.03])
textBox = TextBox(axfreq, 'alpha', initial=str(alpha0))
textBox.on_submit(update_plot)

def _keyboard_handler(event):
    # выход при нажатии escape
    if event.key == 'escape':
        plt.close('all')

figure.canvas.mpl_connect('key_press_event', _keyboard_handler)

update_plot(alpha0)
plt.show()
```

## A.9 Влияние случайного шума

```
# Лаб. работа 9: влияние случайной помехи на систему
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.widgets import TextBox

figure, ax = plt.subplots()
plt.subplots_adjust(bottom=0.15)
# подпись осей на графике
ax.set_xlabel("y1")
ax.set_ylabel("y2")

ny = 1
sigma0 = 0

def line(y1_0, y2_0, sigma):
    # решение задачи методом Эйлера
    y1 = [y1_0]
    y2 = [y2_0]
    h = 0.03
    for i in range(20000):
        # y1.append(y1[i] + h * (y2[i]) +
        #             np.sqrt(h) * sigma * np.random.randn())
        # y2.append(y2[i] + h * (-3*y2[i] ** 3 +
        #                         ny * y2[i] - y1[i]))
        y1.append(y1[i] + h * (y2[i]))
        y2.append(y2[i] + h * (-3*y2[i] ** 3 +
                               ny * y2[i] - y1[i]) +
                  np.sqrt(h) * sigma * np.random.randn())
    ax.plot(y1, y2)
```

```

def update_plot(strSigma):
    # перерисовка графика в зависимости от параметра
    sigma = float(strSigma)
    ax.cla()
    _y = lambda a0: a0 + sigma * np.random.randn()
    line(_y(0.1), _y(0.1), sigma)
    line(_y(2), _y(2), sigma)
    figure.canvas.draw_idle()

axfreq = plt.axes([0.13, 0.05, 0.55, 0.03])
textBox = TextBox(axfreq, 'sigma', initial=str(sigma0))
textBox.on_submit(update_plot)

def _keyboard_handler(event):
    # выход при нажатии escape
    if event.key == 'escape':
        plt.close('all')

figure.canvas.mpl_connect('key_press_event', _keyboard_handler)

update_plot(sigma0)
plt.show()

```

## Приложение Б Дополнительные эксперименты

В данном приложении собраны численные эксперименты, которые не вошли в основное содержание отчета, чтобы не загромождать изложение материала, но тем не менее не стали менее важными в контексте проведенных лабораторных работ.

### Б.1 Влияние постоянного запаздывания на вторую переменную системы

В данном эксперименте мы добавляем постоянное запаздывание ко второй переменной системы, получая уравнение Б.1. Начальные значения решений и метод аналогичны разделу 6.

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -3y_2^3 + \nu y_2 - y_1 + \alpha * y_1(t - \tau) \end{cases} \quad (\text{Б.1})$$

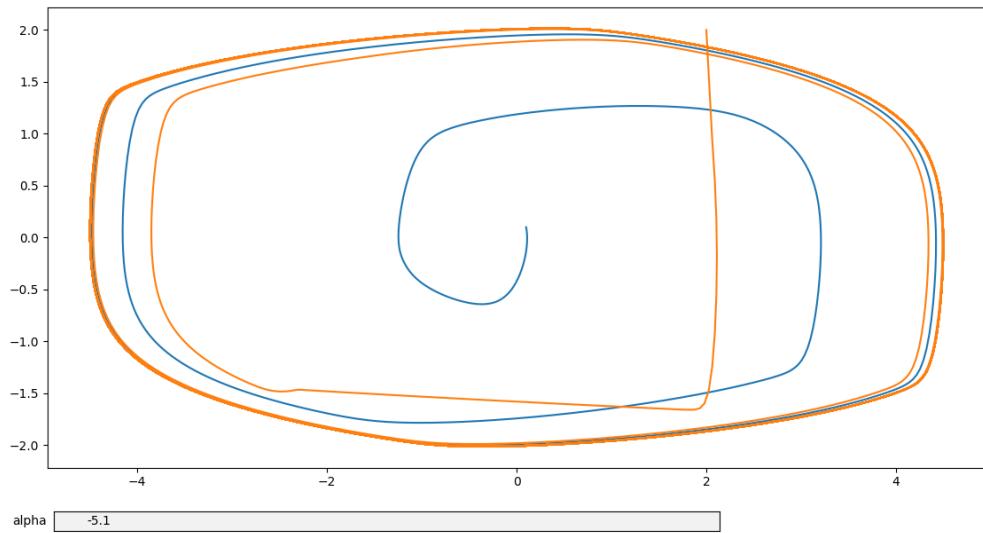


График Б.1 — ( $\alpha = -5.1$ ) При отрицательном параметре изменяется форма цикла. Можно предполагать, что предельность данного цикла остается

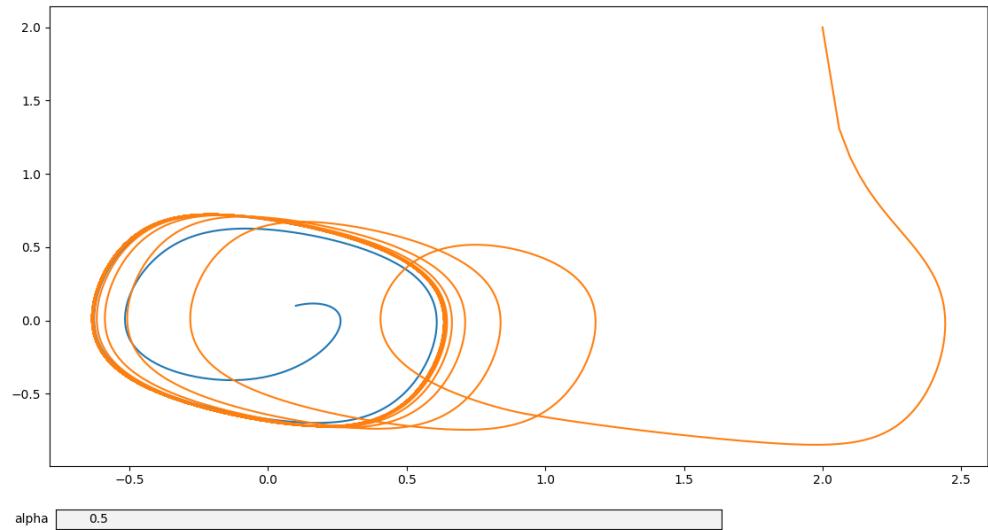


График Б.2 — ( $\alpha = 0.5$ ) Цикл начинает раскручиваться в правую сторону

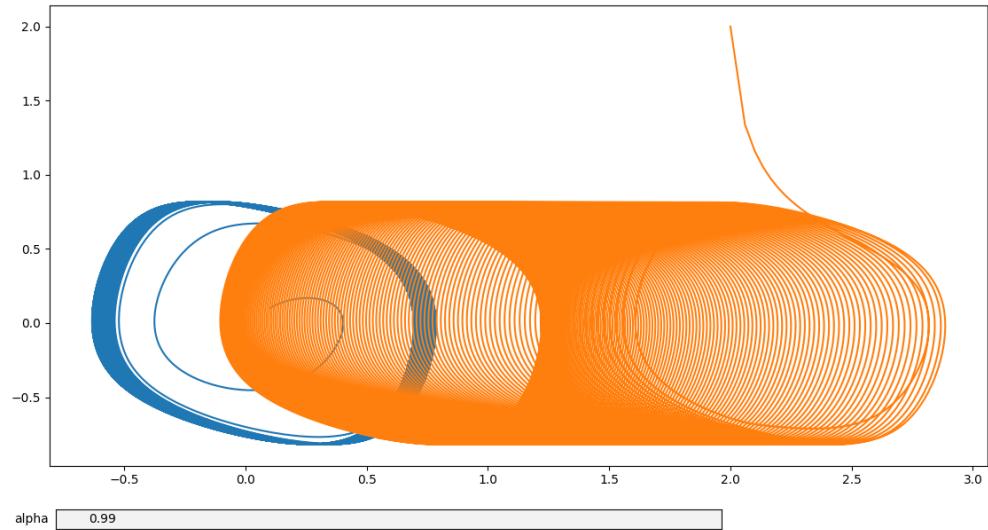


График Б.3 — ( $\alpha = 0.99$ ) Наблюдается очень плотная спираль

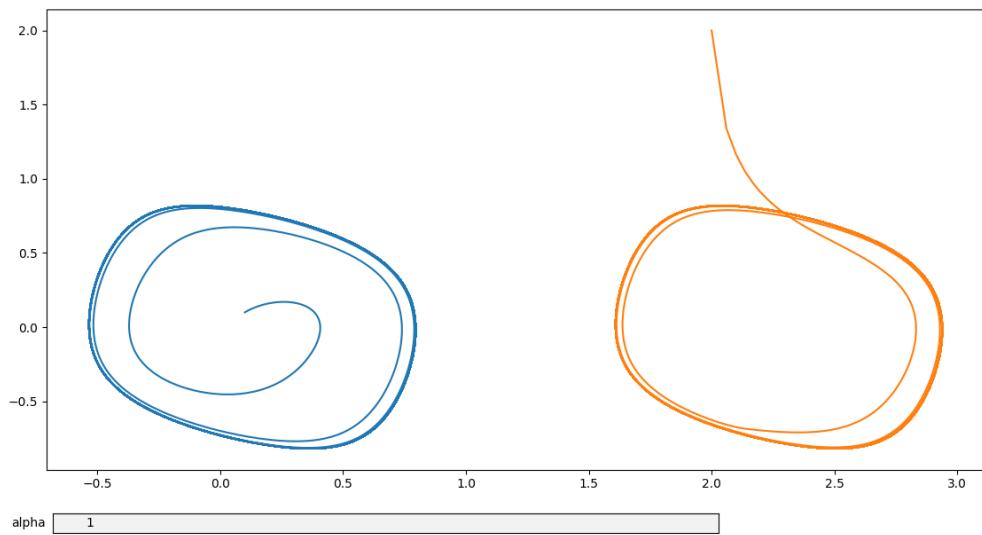


График Б.4 — ( $\alpha = 1$ ) Потенциальная точка бифуркации. Два решения сошлись к двум разным циклам

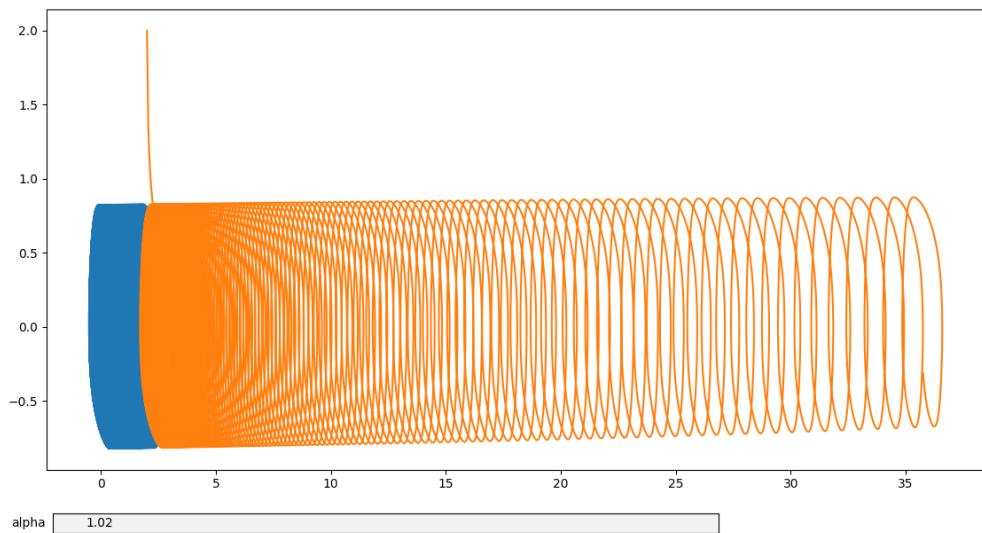


График Б.5 — ( $\alpha = 1.02$ ) Даже небольшое увеличение  $\alpha$  изменило систему

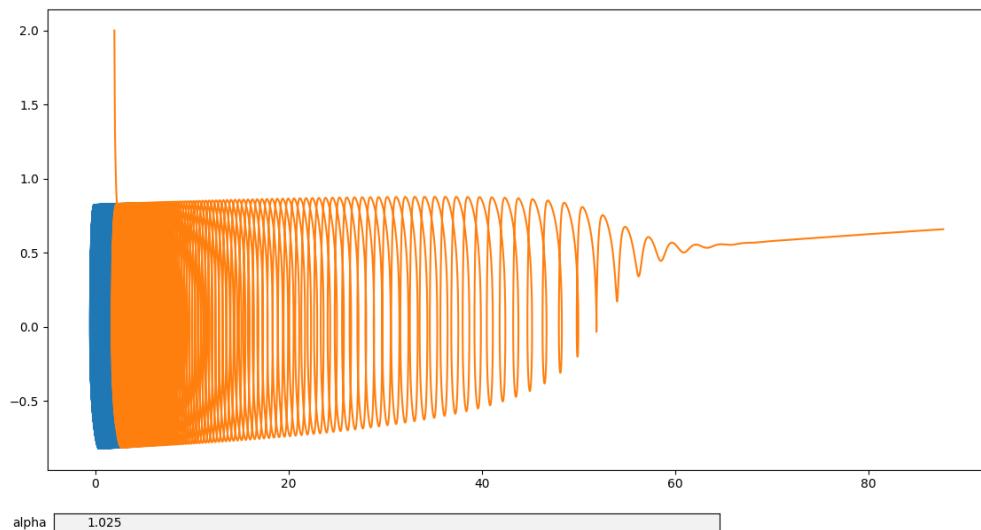


График Б.6 — ( $\alpha = 1.025$ ) Решение начинает увеличиваться по  $y_1$

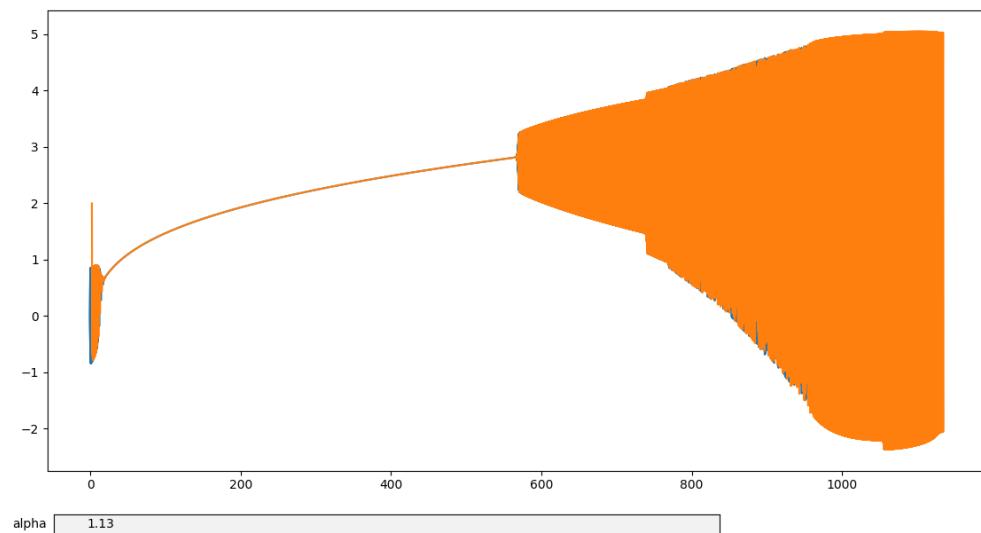


График Б.7 — ( $\alpha = 1.13$ ) В интервале от 600 до 1000 наблюдаются резкие колебания

Дальнейшее увеличение  $\alpha$  приводили к резкому увеличению значения координат, из-за чего вызывались ошибки в моделирующей системе.

## Б.2 Влияние переменного запаздывания на вторую переменную системы

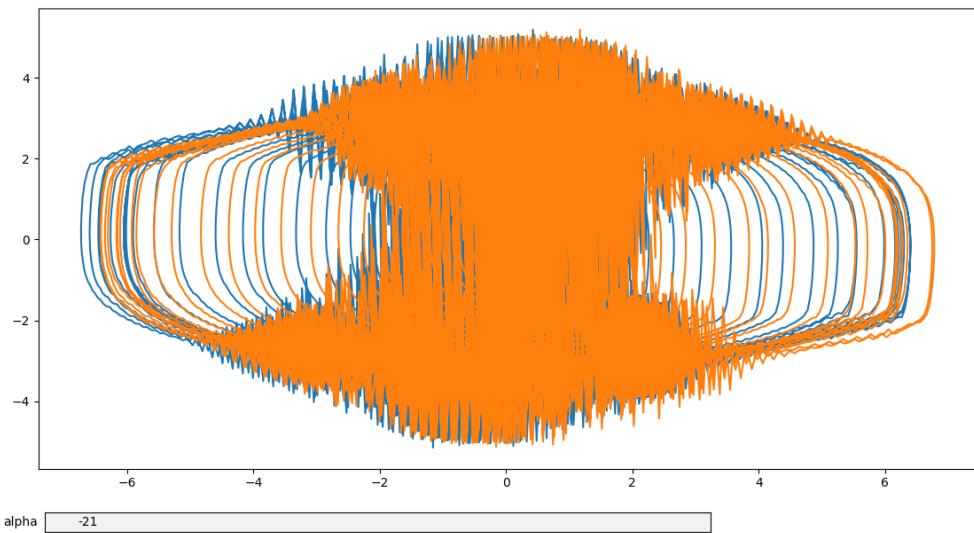


График Б.8 — ( $\alpha = -21$ )

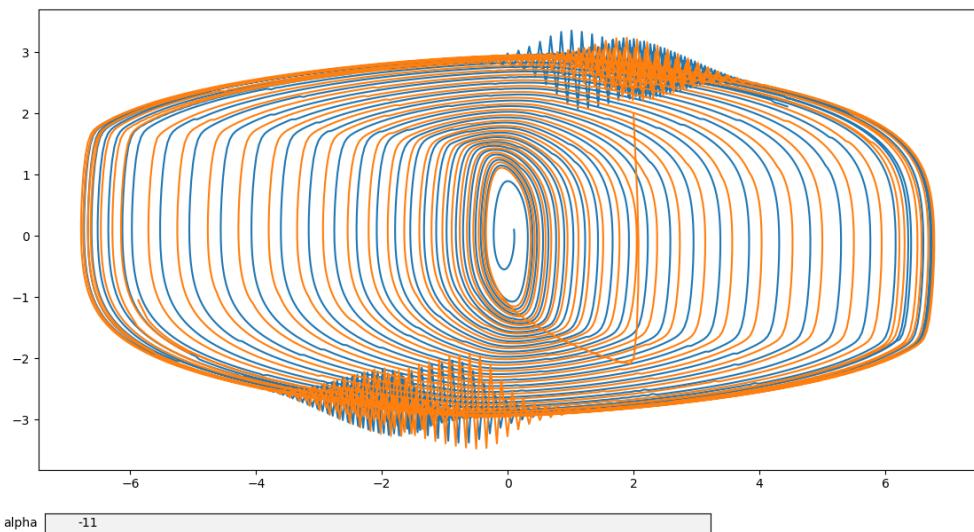


График Б.9 — ( $\alpha = -11$ )

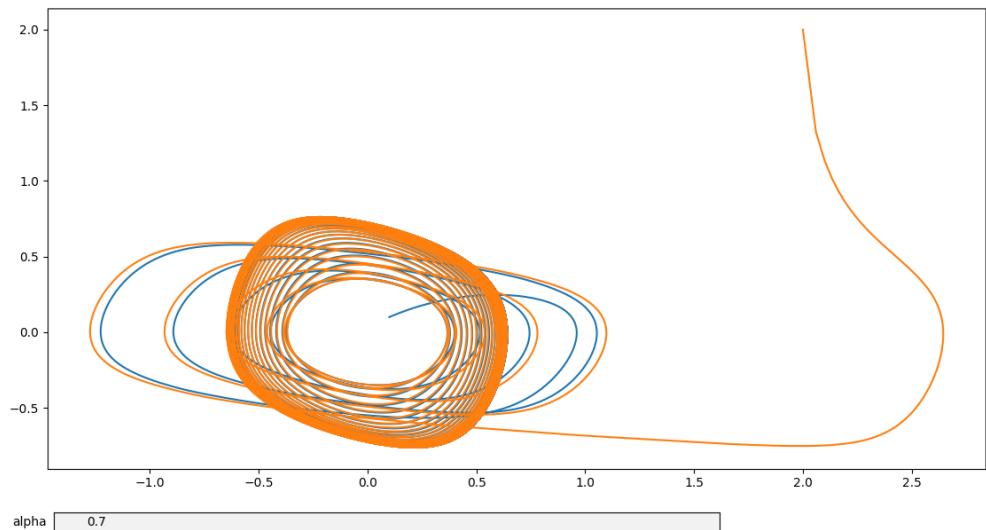


График Б.10 — ( $\alpha = 0.7$ )

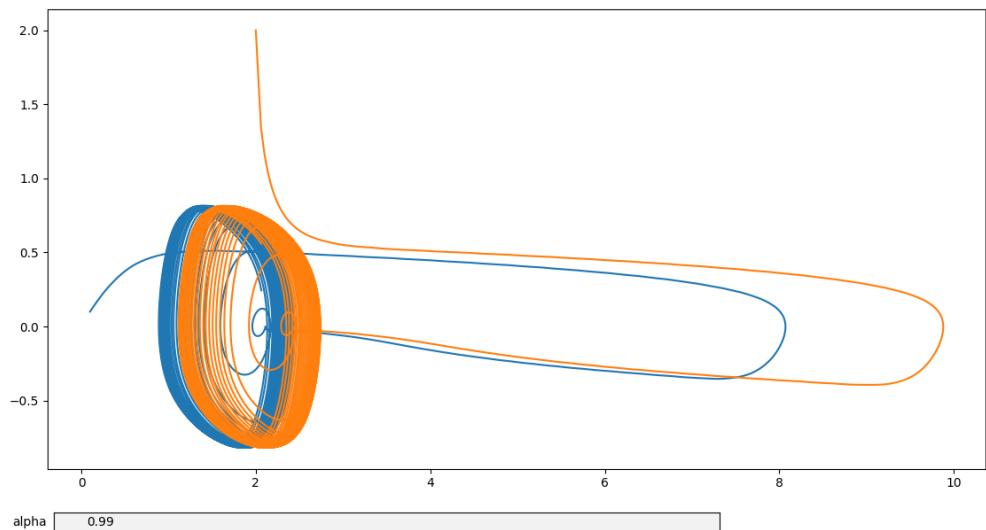


График Б.11 — ( $\alpha = 0.99$ )

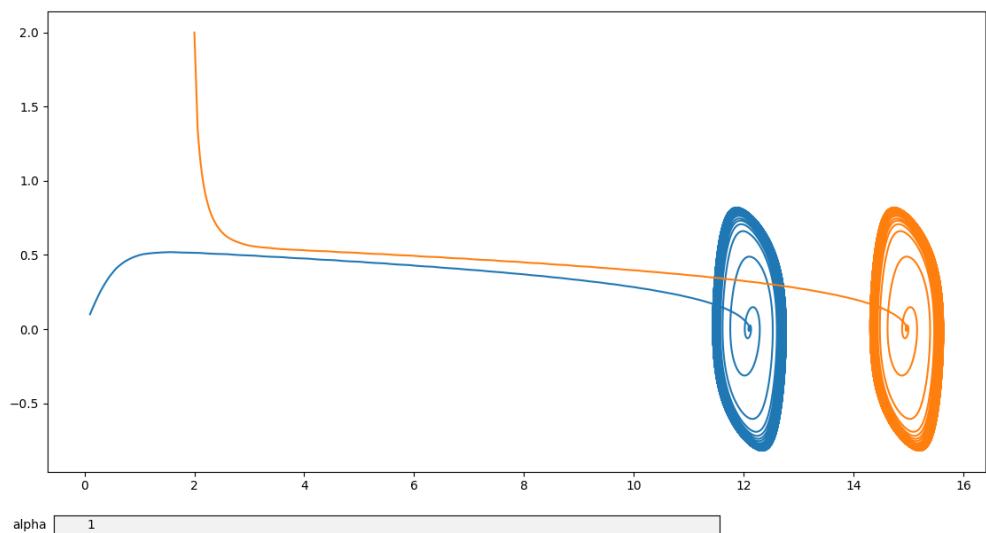


График Б.12 — ( $\alpha = 1$ )

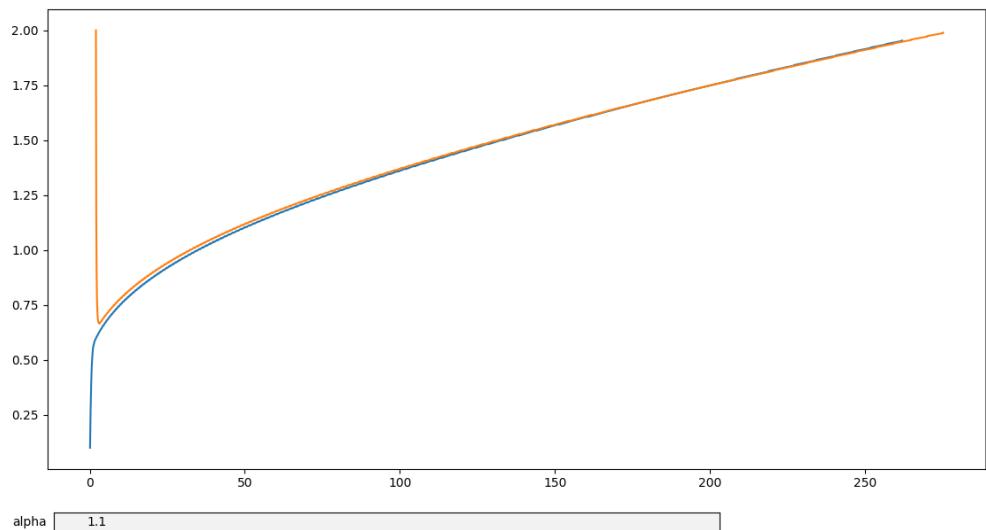


График Б.13 — ( $\alpha = 1.1$ )

### Б.3 Влияние распределенного запаздывание на вторую переменную системы

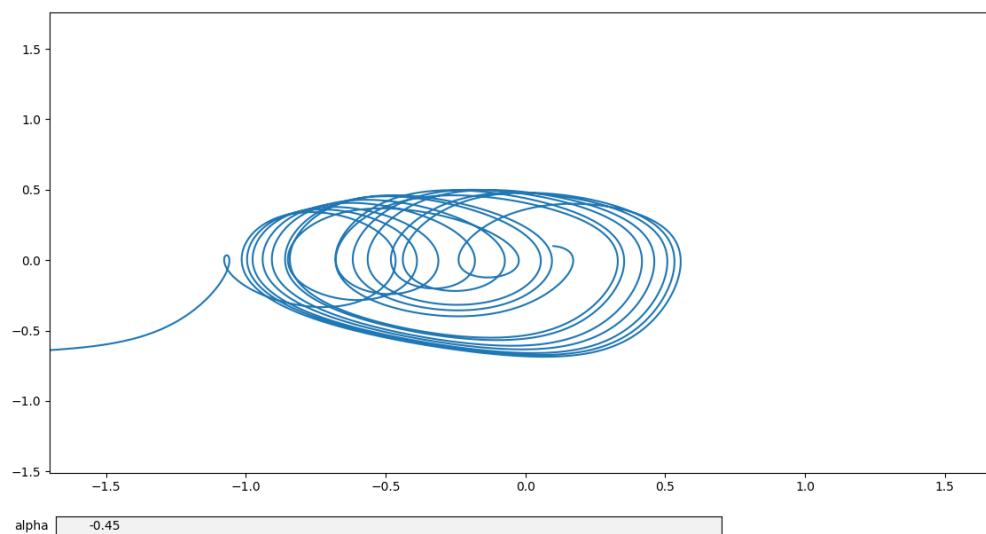


График Б.14 — ( $\alpha = -0.45$ )

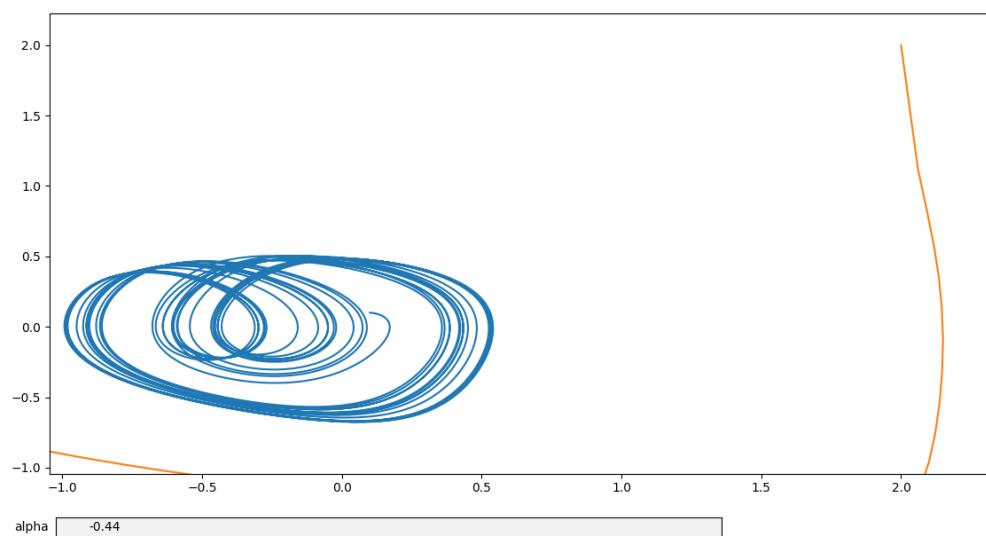


График Б.15 — ( $\alpha = -0.44$ )

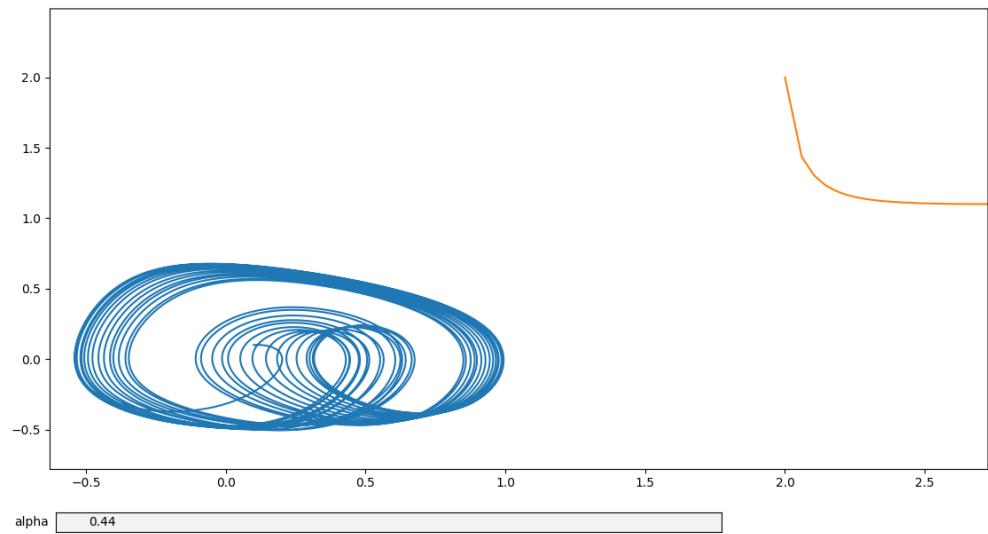


График Б.16 — ( $\alpha = 0.44$ )

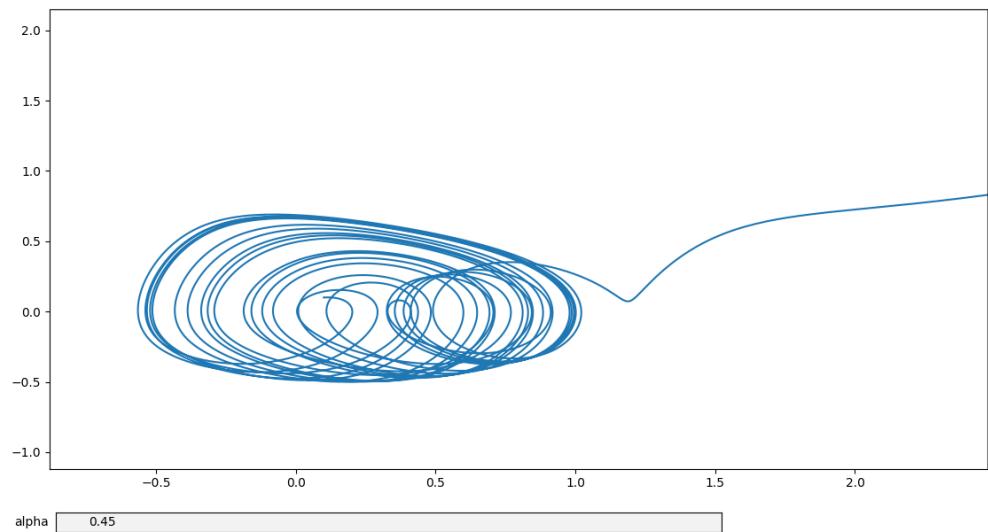


График Б.17 — ( $\alpha = 0.45$ )