

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
Fakulta informačních technologií

Teorie obvodů

2020/2021

Semestrální projekt - IEL

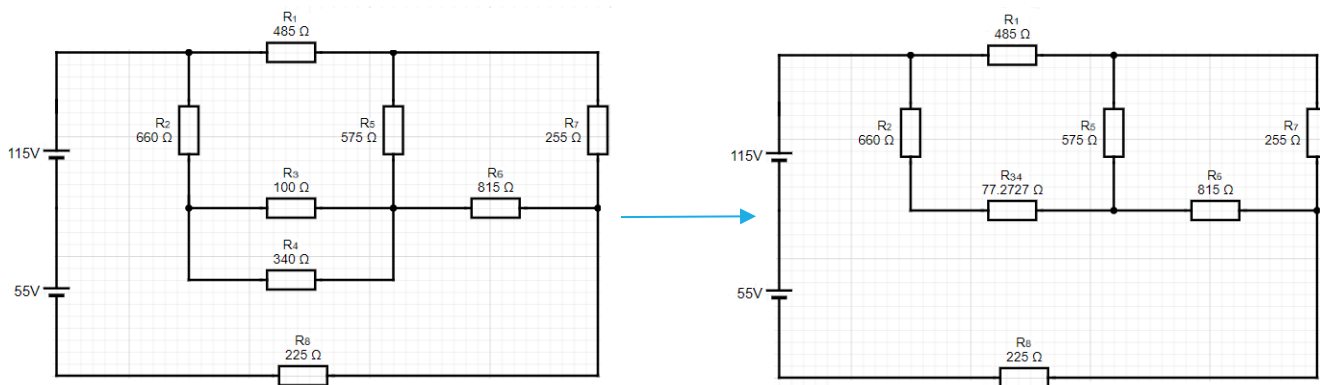
Iveta Snášelová (xsnase07)

Brno, 20.12.2020

1.příklad – skupina E

Stanovte napětí U_{R_6} a proud I_{R_6} . Použijte metodu postupného zjednodušování obvodu.

U_1 [V]	U_2 [V]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	R_4 [Ω]	R_5 [Ω]	R_6 [Ω]	R_7 [Ω]	R_8 [Ω]
115	55	485	660	100	340	575	815	255	225



Nejprve zjednodušíme zapojení R_3 a R_4 , které je paralelní.

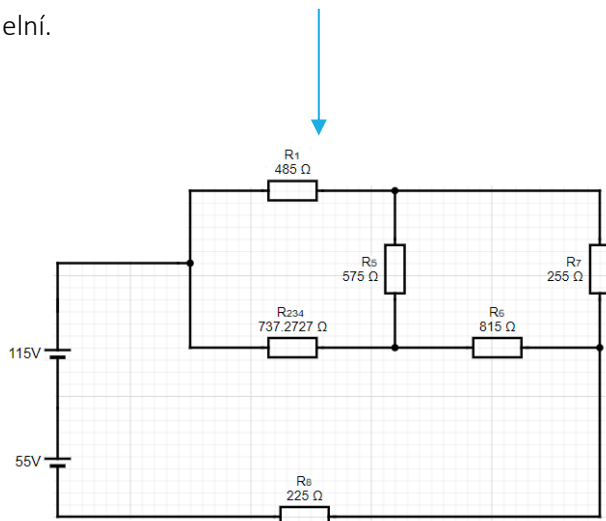
$$R_{34} = \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4} = \frac{100\Omega \cdot 340\Omega}{100\Omega + 340\Omega} = \frac{850}{11} \Omega$$

Dále můžeme zjednodušit sériové zapojení R_2 a R_{34} .

$$R_{234} = \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4} + R_2 = \frac{850\Omega}{11} + 660\Omega = \frac{8110}{11} \Omega$$

Kromě toho můžeme zjednodušit i napěťové zdroje.

$$U_V = U_1 + U_2 = 115V + 55V = 170V$$

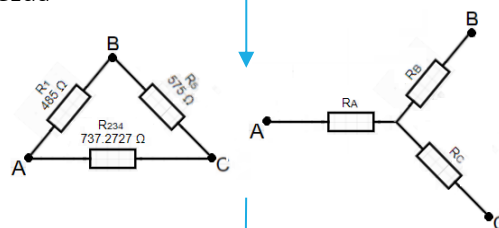


Na další zjednodušování použijeme metodu trojúhelník - hvězda

$$R_A = \frac{R_1 \cdot R_{234}}{R_1 + R_5 + R_{234}} = \frac{485\Omega \cdot \frac{8110}{11}\Omega}{485\Omega + 575\Omega + \frac{8110}{11}\Omega} = 198.9554881 \Omega$$

$$R_B = \frac{R_1 \cdot R_5}{R_1 + R_5 + R_{234}} = \frac{485\Omega \cdot 575\Omega}{485\Omega + 575\Omega + \frac{8110}{11}\Omega} = 155.165655 \Omega$$

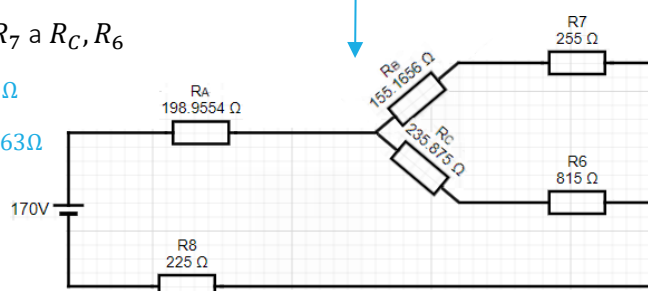
$$R_C = \frac{R_5 \cdot R_{234}}{R_1 + R_5 + R_{234}} = \frac{575\Omega \cdot \frac{8110}{11}\Omega}{485\Omega + 575\Omega + \frac{8110}{11}\Omega} = 235.8750632 \Omega$$

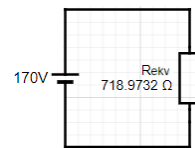
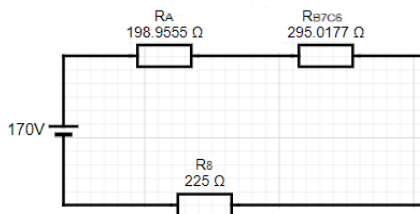
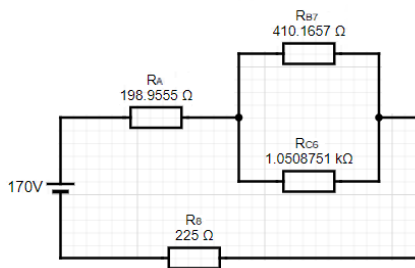


A zároveň spojíme sériově zapojené rezistory R_B, R_7 a R_C, R_6

$$R_{B7} = R_B + R_7 = 155.165655\Omega + 255\Omega = 410.165655\Omega$$

$$R_{C6} = R_C + R_6 = 235.8750632\Omega + 815\Omega = 1050.875063\Omega$$





Nejprve R_{B7}, R_{C6} spojíme paralelně.

$$R_{B7C6} = \frac{R_{B7} \cdot R_{C6}}{R_{B7} + R_{C6}} = \frac{410.165655\Omega \cdot 1050.875063\Omega}{410.165655\Omega + 1050.875063\Omega} = 295.0176906\Omega$$

A R_{EKV} získáme zapojením všech rezistorů sériově.

$$R_{EKV} = R_A + R_B + R_{B7C6} = 198.9554881\Omega + 225\Omega + 295.0176906\Omega = 718.9731787\Omega$$

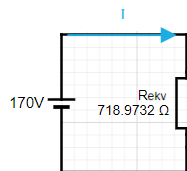
A teď budeme obvod skládat zpět a vyjadřovat vzorečky pro napětí a proud.

Pokud se vracíme do paralelního zapojení, tak rezistory budou mít různé proudy a pokud do sériového, tak rezistory budou mít různá napětí.

Jelikož ze zadání víme, že potřebujeme znát pouze napětí a proud rezistoru R_6 , není třeba vyjadřovat vzorečky o ostatních rezistorů.

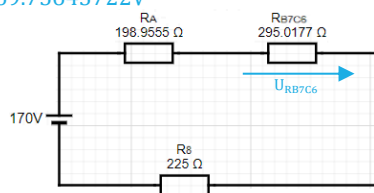
Nejprve si vyjádříme celkový proud obvodu.

$$I = \frac{U_V}{R_{ekv}} = \frac{170V}{718.9731787\Omega} = 0.2364483197A$$



Poté vypočítáme napětí U_{RB7C6} .

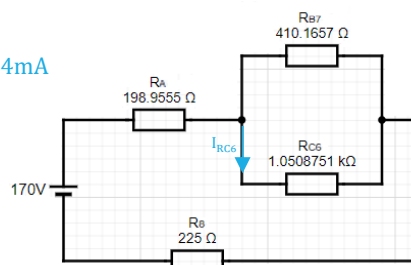
$$U_{RB7C6} = I \cdot R_{B7C6} = 0.2364483197A \cdot 295.0176906\Omega = 69.75643722V$$



A už máme vše potřebné k vypočítání I_6 .

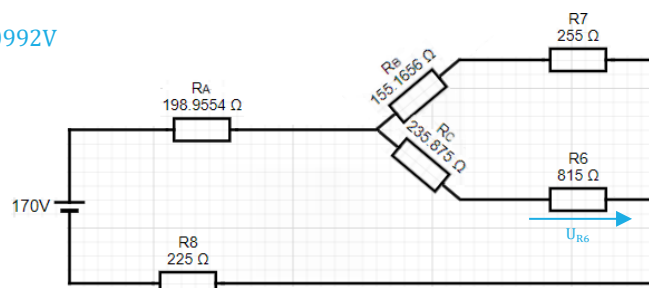
Proudy v rezistorech R_6 i R_C jsou stejné, jelikož jsou rezistory zapojené sériově a proto $I_6 = I_{RC6}$.

$$I_{RC6} = I_{R6} = \frac{U_{RB7C6}}{R_{C6}} = \frac{69.75643722V}{1050.875063\Omega} \doteq 0.0664A = 66.4mA$$



A jako poslední nám zbývá vypočítat napětí U_{R6} .

$$U_{R6} = I_{R6} \cdot R_6 = 0.06637938198\text{A} \cdot 815\Omega \doteq 54.0992\text{V}$$



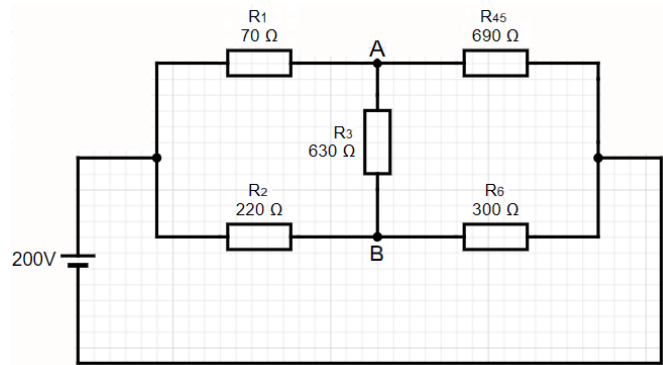
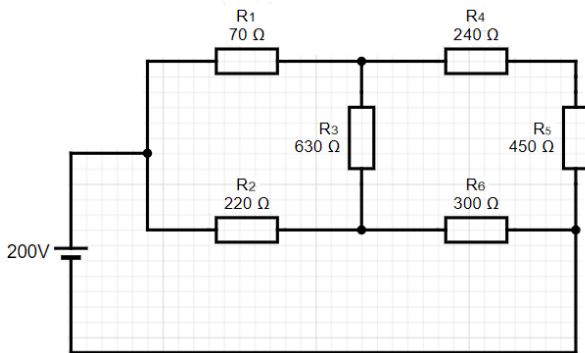
Vypočítali jsme tedy:

U_{R6}	I_{R6}
54.0992V	66.4mA

2.příklad – skupina C

Stanovte napětí U_{R_3} a proud I_{R_3} . Použijte metodu Théveninovy věty.

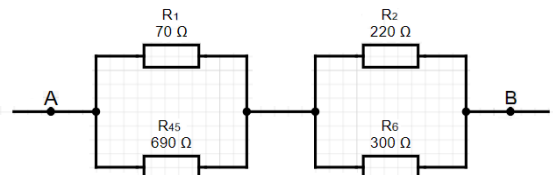
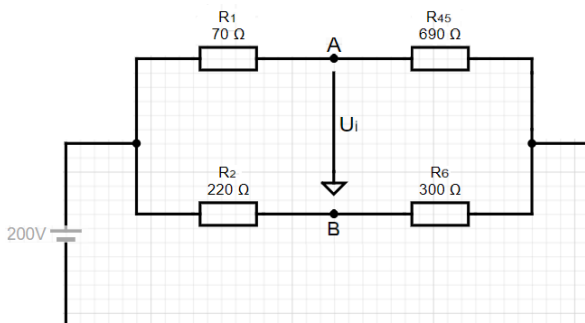
U [V]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	R_4 [Ω]	R_5 [Ω]	R_6 [Ω]
200	70	220	630	240	450	300



Nejprve spojíme rezistory R_4 a R_5 , aby se nám s obvodem lépe pracovalo a označíme uzly u R_3 . R_4 a R_5 jsou zapojeny sériově.

$$R_{45} = R_4 + R_5 = 240\Omega + 450\Omega = 690\Omega$$

Ted' můžeme skratovat zdroj a upravit si obvod do podoby, ze které půjde zapojení lépe vidět.



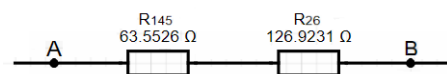
Můžeme spojit rezistory R_1 , R_{45} a R_2 , R_6 , které jsou zapojeny paralelně.

$$R_{145} = \frac{R_1 \cdot R_{45}}{R_1 + R_{45}} = \frac{70\Omega \cdot 690\Omega}{70\Omega + 690\Omega} = \frac{2415}{38}\Omega$$

$$R_{26} = \frac{R_2 \cdot R_6}{R_2 + R_6} = \frac{220\Omega \cdot 300\Omega}{220\Omega + 300\Omega} = \frac{1650}{13}\Omega$$

A abychom náhradní odpor R_i stačí už jen rezistory spojit sériově.

$$R_i = R_{145} + R_{26} = \frac{2415}{38}\Omega + \frac{1650}{13}\Omega = 190.4757085\Omega$$



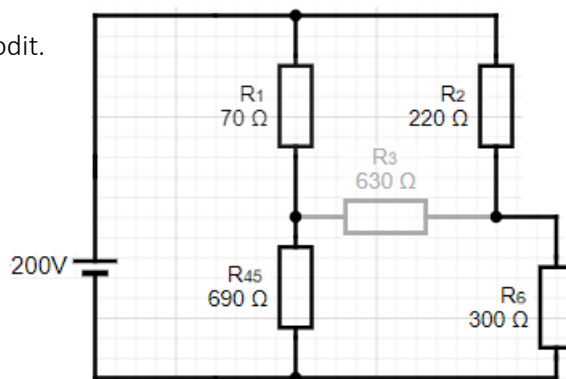
K vyjádření U_{R3} a I_{R3} nám chybí ještě U_i , které lze vypočítat pomocí napětí U_{R1} , U_{R2} a ty můžeme dopočítat pomocí děliče napětí.

Obvod si překreslíme a pak už je snadné napětí odvodit.

$$U_{R1} = U \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_{45}} = \frac{70\Omega}{70\Omega + 690\Omega} = \frac{350}{19}\Omega$$

$$U_{R2} = U \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_6} = \frac{220\Omega}{220\Omega + 300\Omega} = \frac{1100}{13}\Omega$$

$$U_i = U_{R2} - U_{R1} = \frac{1100}{13}\Omega - \frac{350}{19}\Omega = \frac{16350}{247}\Omega$$



A už jen dopočítat U_{R3} a I_{R3} .

$$I_{R3} = \frac{U_i}{R_1 + R_3} = \frac{\frac{16350}{247}\Omega}{190.4757085\Omega + 630\Omega} \doteq 0.0807A = 80.69mA$$

$$U_{R3} = R_3 \cdot I_{R3} = 630\Omega \cdot 0.08067799119A \doteq 50.8271V$$

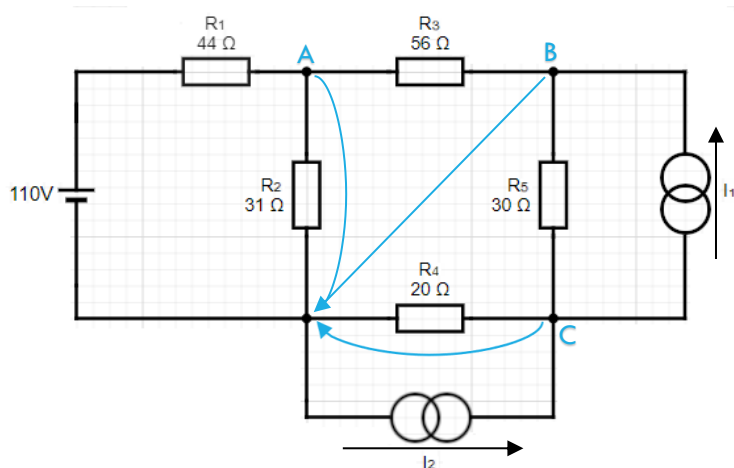
Vypočítali jsme tedy:

U_{R3}	I_{R3}
50.8217V	80.69mA

3.příklad – skupina C

Stanovte napětí U_{R2} a proud I_{R2} . Použijte metodu uzlových napětí (U_A, U_B, U_C)

U [V]	I_1 [A]	I_2 [A]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	R_4 [Ω]	R_5 [Ω]	R_6 [Ω]
110	0.85	0.75	44	31	56	20	30	300



Nejprve obecné rovnice uzlů:

$$\begin{aligned} \text{A: } I_{R1} - I_{R3} - I_{R2} &= 0 \\ \text{B: } I_1 + I_{R3} - I_{R5} &= 0 \\ \text{C: } I_{R5} + I_{R4} + I_2 - I_1 &= 0 \end{aligned}$$

Ted' si musíme vyjádřit $I_{R1}, I_{R2}, I_{R3}, I_{R4}, I_{R5}$.

1. Z uzlu A

$$\begin{aligned} R_1 \cdot I_{R1} - U + U_A &= 0 \quad \rightarrow \quad I_{R1} = \frac{U - U_A}{R_1} \\ R_3 \cdot I_{R3} + U_3 - U_A &= 0 \quad \rightarrow \quad I_{R3} = \frac{U_A - U_B}{R_3} \\ R_2 \cdot I_{R2} - U_A &= 0 \quad \rightarrow \quad I_{R2} = \frac{U_A}{R_2} \end{aligned}$$

2. Z uzlu B

$$R_5 \cdot I_{R5} + U_C - U_B = 0 \quad \rightarrow \quad I_{R5} = \frac{U_B - U_C}{R_5}$$

3. Z uzlu C

$$R_4 \cdot I_{R4} + U_C = 0 \quad \rightarrow \quad I_{R4} = \frac{-U_C}{R_4}$$

Dosadíme do obecných rovnic:

$$\begin{aligned} \text{A: } \frac{U - U_A}{R_1} - \frac{U_A - U_B}{R_3} - \frac{U_A}{R_2} &= 0 \\ \text{B: } I_1 + \frac{U_A - U_B}{R_3} - \frac{U_B - U_C}{R_5} &= 0 \\ \text{C: } \frac{U_B - U_C}{R_5} - \frac{U_C}{R_4} + I_2 - I_1 &= 0 \end{aligned}$$

Upravíme:

$$\begin{array}{lclcl} \text{A: } U_A \cdot (-R_2 \cdot R_3 - R_1 \cdot R_2 - R_1 \cdot R_3) + U_B \cdot (R_1 \cdot R_2) & + U_C \cdot (0) & = & -R_2 \cdot R_3 \cdot U \\ \text{B: } U_A \cdot (R_5) & + U_B \cdot (-R_5 - R_3) + U_C \cdot (R_3) & = & -R_3 \cdot R_5 \cdot I_1 \\ \text{C: } U_A \cdot (0) & + U_B \cdot (R_4) + U_C \cdot (-R_4 - R_5) & = & R_4 \cdot R_5 \cdot (I_1 - I_2) \end{array}$$

Vytvoříme matici:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -R_2 \cdot R_3 - R_1 \cdot R_2 - R_1 \cdot R_3 & R_1 \cdot R_2 & 0 & -R_2 \cdot R_3 \cdot U \\ R_5 & -R_5 - R_3 & R_3 & -R_3 \cdot R_5 \cdot I_1 \\ 0 & R_4 - R_4 & -R_5 & R_4 \cdot R_5 \cdot (I_1 - I_2) \end{array} \right)$$

Dosadíme hodnoty a vypočítáme U_A, U_B, U_C :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -5564 & 1364 & 0 & -190960 \\ 30 & -86 & 56 & -1428 \\ 0 & 20 & -50 & 60 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -5564 & 1364 & 0 & -190960 \\ 0 & -\frac{109396}{1391} & 56 & -\frac{3418548}{1391} \\ 0 & 0 & -\frac{139710}{3907} & -\frac{2207400}{3907} \end{array} \right)$$

$$U_C = \frac{73580}{4657} V$$

$$U_B = \frac{197921}{4657} V$$

$$U_A = \frac{208351}{4657} V$$

K výpočtu I_{R2} a U_{R2} potřebujeme pouze U_A .

Můžeme dosadit do rovnic:

$$I_{R2} = \frac{U_A}{R_2} = \frac{\frac{208351}{4657} V}{31 \Omega} \doteq 1,4432 A$$

$$U_{R2} = I_{R2} \cdot R_2 = 1.443203779 A \cdot 31 \Omega \doteq 44.7393 V$$

Vypočítali jsme:

U_{R2}	I_{R2}
44.7393V	1.4432A

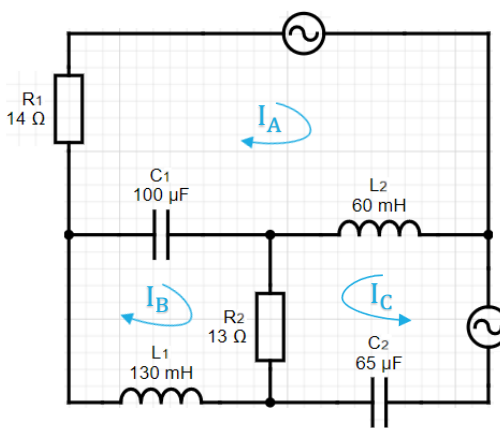
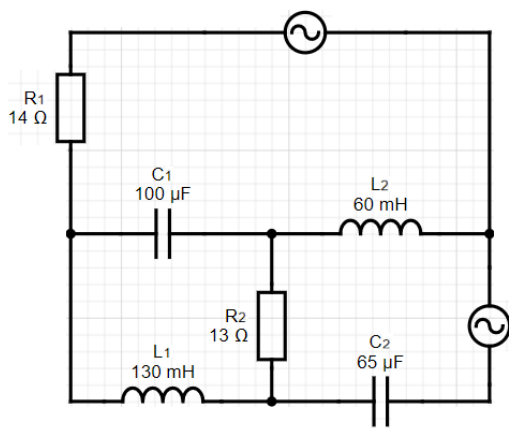
4.příklad – skupina C

Pro napájecí napětí platí: $u_1 = U_1 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$.

Ve vztahu pro napětí $u_{L2} = U_{L2} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t + \varphi_{L2})$ určete $|U_{L2}|$ a φ_{L2} .

Použijte metodu smyčkových proudů.

U_1 [V]	U_2 [V]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	L_1 [mH]	L_2 [mH]	C_1 [μ F]	C_2 [μ F]	f [Hz]
50	30	14	13	130	60	100	65	90



Určili jsme si smyčky a podle nich vytvoříme rovnice.

$$I_A: R_1 \cdot I_A + U_1 + Z_{L2} \cdot (I_A + I_C) + Z_{C1} \cdot (I_A - I_B) = 0$$

$$I_B: Z_{C1} \cdot (I_B - I_A) + R_2 \cdot (I_B + I_C) + Z_{L1} \cdot I_B = 0$$

$$I_C: Z_{L2} \cdot (I_C + I_A) + R_2 \cdot (I_C + I_B) + Z_{C2} \cdot I_C - U_2 = 0$$

Vypočítáme si $\omega, Z_{L1}, Z_{L2}, Z_{C1}, Z_{C2}$.

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 2 \cdot \pi \cdot 90 \text{ Hz} = 565.4866776 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$Z_{L1} = j \cdot \omega \cdot L_1 = 73.51327j$$

$$Z_{L2} = j \cdot \omega \cdot L_2 = 33.9292j$$

$$Z_{C1} = -j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C_1} = -17.6745j$$

$$Z_{C2} = -j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C_2} = -27.191548j$$

Pomocí Cramerova pravidla poté celou rovnici vyřešíme:

$$|A| = \begin{vmatrix} R_1 + Z_{L2} + Z_{C1} & -Z_{C1} & Z_{L2} \\ -Z_{C1} & Z_{C1} + R_2 + Z_{L1} & R_2 \\ Z_{L2} & R_2 & Z_{L2} + R_2 + Z_{L2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 14 + 16.2547j & 17.6745j & 33.9292j \\ 17.6745j & 13 + 55.8388j & 13 \\ 33.9292j & 13 & 13 + 6.7377j \end{vmatrix}$$

$$|A| = -15055.4616706 + 71659.3758207j$$

$$|A_1| = 75648.2285268 - 47014.058j$$

$$I_A = \frac{|A_1|}{|A|} = -0.8407575 - 0.879023j$$

$$|A_2| = -29404.7232945 - 16904.888j$$

$$I_B = \frac{|A_2|}{|A|} = -0.1433663 + 0.4404611j$$

$$|A_3| = -107125.940411 + 40357.184j$$

$$I_C = \frac{|A_3|}{|A|} = 0.8401763 + 1.3184136j$$

Ted' můžeme dopočítat U_{L2}

$$U_{L2} = Z_{L2} \cdot (I_A + I_C) \doteq -14.9082 - 0.0197j$$

$$|U_{L2}| = \sqrt{(-14.9082)^2 + (-0.0197)^2} \doteq 14.9082V$$

$$\varphi_{L2} = \arctan \frac{\text{Im}(U_{L2})}{\text{Re}(U_{L2})} = 0.0013 \text{ rad (III.kvadrant)}$$

$$\varphi_{L2} = 0.0013 \text{ rad} + \pi = 3.1429 \text{ rad (I.kvadrant)}$$

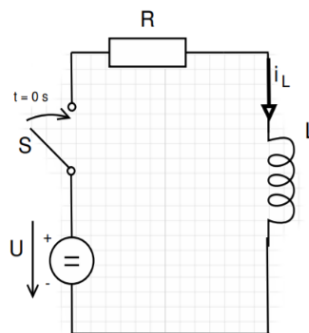
Vypočítali jsme:

$ U_{L2} $	φ_{L2}
14.9082V	3.1429 rad

5.příklad – skupina D

V obvodu na obrázku níže v čase $t = 0[s]$ sepne spínač S. Sestavte diferenciální rovnici popisující chování obvodu na obrázku, dále ji upravte dosazením hodnot parametrů. Vypočítejte analytické řešení $i_L = f(t)$. Proveďte kontrolu výpočtu dosazením do sestavené diferenciální rovnice.

U [V]	L [H]	R [Ω]	$i_L(0)$ [A]
25	5	25	12



1. $i_L = \frac{u_R}{R}$
2. $u_R + u_L - U = 0$
3. $i_L' = \frac{u_L}{L}, i_L(0) = i_L P$

Dosadíme 2. do 3. a pak za $u_R = i_L \cdot R$

$$i_L' = \frac{U - u_R}{L} \rightarrow i_L' = \frac{U - i_L \cdot R}{L} \rightarrow i_L' - \frac{U}{L} + \frac{i_L \cdot R}{L} = 0$$

Vyjádříme λ

$$\lambda + \frac{R}{L} = 0 \rightarrow \lambda + \frac{25}{5} = 0 \rightarrow \lambda = -5$$

A můžeme ji dosadit:

$$i_L = k(t) \cdot e^{\lambda t} \rightarrow i_L = k(t) \cdot e^{-5t}$$

Předpokládáme, že řešení by mělo vypadat:

$$i_L'(t) = k'(t) \cdot e^{-5t} + k(t) \cdot (e^{-5t})'$$

A zderivujeme:

$$i_L'(t) = e^{-5t}(k'(t) + (-5 \cdot k(t)))$$

Dosadíme do původní rovnice:

$$i_L' - \frac{U}{L} + \frac{i_L \cdot R}{L} = 0$$

$$e^{-5t}(k'(t) - 5 \cdot k(t)) - \frac{25V}{5H} + \frac{k(t) \cdot e^{-5t} \cdot 25\Omega}{5H} = 0$$

$$e^{-5t} \cdot k'(t) = 5$$

$$k'(t) = 5 \cdot e^{5t}$$

Zintegrujeme:

$$k(t) = \int 5 \cdot e^{5t} dt$$

$$k(t) = 5 \int e^{5t} dt$$

$$k(t) = 5 \int e^a \frac{da}{5}$$

$$k(t) = 5 \cdot \frac{1}{5} \int e^a da$$

$$k(t) = e^a + c$$

$$k(t) = e^{5t} + c$$

Dosadíme do původní rovnice:

$$i_L = k(t) \cdot e^{-5t} \rightarrow i_L = k(t) = (e^{5t} + c) \cdot e^{-5t}$$

Dosadíme z počáteční podmínky:

$$i_L(0) = i_L P \rightarrow t = 0$$

$$i_L(0) = (e^{5 \cdot 0} + c) \cdot e^{-5 \cdot 0}$$

$$i_L(0) = 1 + c$$

$$12 = 1 + c$$

$$c = 11$$

Vyšlo nám:

$i_L(t)$	$1 + 11e^{-5t}$
----------	-----------------

Ještě provedeme zkoušku:

$$i_L(t) = 1 + 11 \cdot e^{-5t}$$

$$i'_L(t) = 0 + 11 \cdot e^{-5t} \cdot (-5)$$

$$i'_L(t) = -55e^{-5t}$$

$$i'_L - \frac{U}{L} + \frac{i_L \cdot R}{L} = 0$$

$$i'_L - 5 + i_L \cdot 5 = 0$$

$$i'_L + i_L \cdot 5 = 5$$

$$-55e^{-5t} + 5 \cdot (1 + 11 \cdot e^{-5t}) = 5$$

$$0 = 0 \rightarrow \text{vyšla}$$

Výsledky

Příklad	Skupina	Výsledek	
1	E	$U_{R6} = 54.0992V$	$I_{R6} = 66.4mA$
2	C	$U_{R3} = 50.8217V$	$I_{R3} = 80.69mA$
3	C	$U_{R2} = 44.7393V$	$I_{R2} = 1.4432A$
4	E	$ U_{L2} = 14.9082V$	$\varphi_{L2} = 3.1429 \text{ rad}$
5	D	$i_L(t) = 1 + 11e^{-5t}$	Zkouška v pořádku