# AI応用セミナー

# 第01回

# 賭け事と対数正規分布

#### 改訂履歴

日付	担当者	内容
2022/11/13	武田 守	初版
2022/11/19	武田 守	章建て、項建てを見直し

## 目次

- (1) はじめに
  - (1.1) 問題設定
  - (1.2) 前提となる主な基礎知識
- (2) 本論
  - (2.1) n 回賭け事を繰返したうち成功した回数が X の場合の所持金 y(n)
  - (2.2) n 回賭け事を繰返したうち成功した回数 X が従う確率分布
  - (2.3) n 回賭け事を繰返した結果の所持金 y(n) が従う確率分布
- (3) まとめ
- (4) 実装例

賭け事\_リスト\_1\_所持金の分布関数

賭け事\_リスト\_2\_所持金の対数の分布関数

賭け事\_リスト\_3\_成功回数の二項分布

賭け事\_リスト\_4\_成功回数の標準化

賭け事\_リスト\_5\_試行回数N、成功割合p、掛け率bの時の最終所持金y(N,p,b)

## 賭け事と対数正規分布

#### (1) はじめに

ここでは、一つの賭け事のモデルを設定し、

n 回賭け事を繰返して X 回成功した時の所持金 y(n) を、対数正規分布で計算します。

## (1.1) 問題設定

- ・初期の所持金を y(0) とします。
- ・一回の賭け事で成功する確率を  $p(0 \le p \le 1)$  とします。
- ・賭け事を n 回繰返した後の所持金を y(n) とします。
- ・毎回の賭け金は、その時点の所持金の b 倍 (0< b <1) とします。 賭けに負けた場合、掛け金を失い、勝った場合、掛け金と同額を取得するものとします。
- ・このルールで、n 回賭け事を繰返して X 回成功した時の所持金 y(n) を計算します。

### (1.2) 前提となる主な基礎知識

- 「対数関数(タイスウカンスウ、logarithm fnction)」の性質
- ・「二項分布(ニコウブ`ンプ゜、binominal distribution)」  $P(k) = {}_{n}C_{k} p^{k} (1-p)^{n-k}$
- 「標準化確率変数(ヒョウジュンカカクリッヘンスウ,standardized random variable)」Z=(X-μ)/σ
- 「標準正規分布(ヒョウジュンセイキブンプ、Standard Normal Distribution)」N(0,1)

#### 【出典・参考】

賭け事⇒「その問題 数理モデルが解決します」ベレ出版 浜田宏著 2019年 二項分布⇒ 本セミナー「第6回 数学の基礎 (3回目:統計学) (3.2.3) 二項分布」 対数正規分布⇒ 本セミナー「第6回 数学の基礎 (3回目:統計学) (3.3.2) 対数正規分布」 期待値についての公式⇒ 本セミナー「第6回 数学の基礎 (3回目:統計学) (3.4) 平均と確率変数の期待値」 分散についての公式⇒ 本セミナー「第6回 数学の基礎 (3回目:統計学) (3.5) 確率変数の分散」

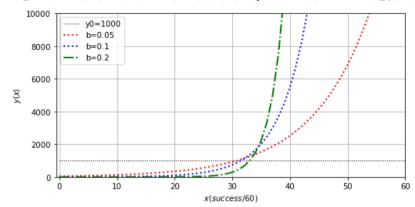
#### (2) 本論

#### (2.1) n 回賭け事を繰返したうち成功した回数が X の場合の所持金 y(n)

・上記の問題設定の下で、n 回賭け事を繰返して X 回成功した(n-X 回失敗した)時に、最終的な所持金 y(n) は次式で与えられます:

$$y(n) = y(0) \times (1 + b)^{\chi} \times (1 - b)^{n-\chi}$$
 (式2.1-1)

この式をグラフ化すると以下のようになります (y(0)=1000、n=60 でbを変えたもの):



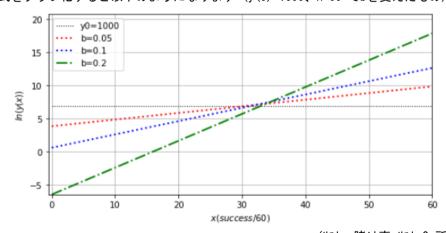
(リスト:賭け事\_リスト\_1\_所持金の分布関数)

・(式2.1-1)の両辺の対数を取ると、以下の関係式が得られます。

これの意味するところは、以下のとおりです:

「n 回賭け事を繰返した結果の所持金 y(n) の対数 In(y(n)) は、成功回数 X の一次変換になる。」

この式をグラフ化すると以下のようになります (y(0)=1000、n=60 でbを変えたもの):



(リスト:賭け事\_リスト\_2\_所持金の対数の分布関数)

#### (2.2) n 回賭け事を繰返したうち成功した回数 X が従う確率分布

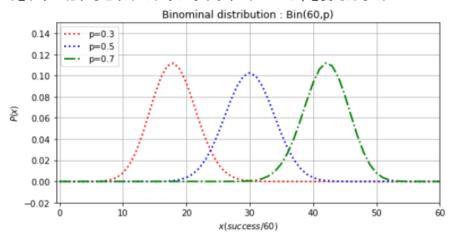
・一方、賭け事の n 回の試行で成功する回数 X は確率変数であり、

X が従う確率分布は「二項分布 (ニコウブンプ、binominal distribution)」になります。

その確率質量関数 P(X=x)、平均  $\mu$ 、分散 V、標準偏差  $\sigma$  は次式で表されます:

$$P(X=x) = {}_{n}C_{x} p^{x} (1-p)^{n-x}$$
  $\begin{cases} x \in \{0,1,...,n\} \\ p:- 回の試行で成功する確率 \\ sqrt(a):a の平方根 \end{cases}$  (式2.2-1)

この式をグラフ化すると以下のようになります (n=60 で pを変えたもの):



(リスト:賭け事\_リスト\_3\_成功回数の二項分布)

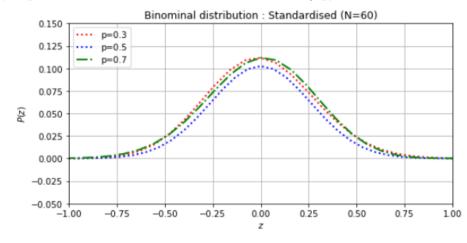
この統計諸量により、n 回の試行で成功する回数 X の標準化確率変数 Z を作成します:

$$Z = (X - \mu) / \sigma$$

$$= (X - np) / sqrt(np(1-p))$$
(\pi2. 2-2)

この標準化確率変数 Z は「二項分布に関する中心極限定理 (ド・モアブル=ラプラスの定理)」により、n⇒∞の時、標準化確率変数 Z は標準正規分布 N(0,1) に近づきます。

標準化をグラフ化すると以下のようになります (n=60 で pを変えたもの):



(リスト:賭け事\_リスト\_4\_成功回数の標準化)

確率変数 X (n 回の試行で成功する回数)は、(式2.2-2)より、

$$X = \sigma Z + \mu = \operatorname{sqrt}(\operatorname{np}(1-p))Z + \operatorname{np}$$
 (\pi 2. 2-3)

であり、Z の一次変換である X も正規分布となるので、

結局  $n\to\infty$ の時、確率変数 X は正規分布  $N(\mu,\sigma)=N(np,np(1-p))$  に近づきます。これは、上記の( $J_{A}$ ): 賭け事\_ $J_{A}$ 人3\_成功回数の二項分布)のf 7.7でも見て取れます。

AI応用セミナー (賭け事)

#### (2.3) n 回賭け事を繰返した結果の所持金 y(n) が従う確率分布

(式2.1-2) より、n 回賭け事を繰返した結果の所持金 y(n) について、

$$ln(y(n)) = \alpha X + \beta$$
 (±2.1–2)

となりますが、

正規分布 $N(\mu, \sigma)$  に従う X の一次変換である In(y(n)) も正規分布となります。

 $\ln(y(n))$  が従う正規分布 $N(\mu',\sigma')$  の平均 $\mu'$ 、分散 $V'(=\sigma'^2)$  は、

期待値と分散についての公式、および(式2.1-2)、(式2.2-1)により

$$\mu' = \beta + \alpha \mu = [\ln(y(0)) + n*\ln(1-b)] + [\ln\{(1+b)/(1-b)\}] \times np$$
 (式2.3-1)  
 $V' = \alpha^2 V = [\ln\{(1+b)/(1-b)\}]^2 \times [np(1-p)]$ 

なる統計量 $\mu'$ 、 $V'(=\sigma'^2)$  を用いて、以下の結論を得ます:

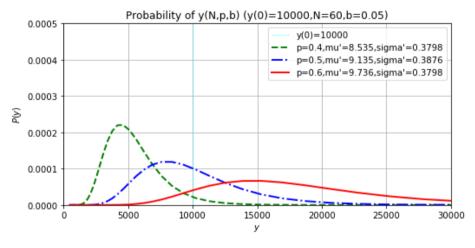
(1) 
$$n \Rightarrow \infty$$
の時、確率変数  $\ln(y)$   $(y=y(n))$  は正規分布  $N(\mu', V')$  に近づく 
$$f(\ln(y)) = 1/(\sqrt{2\pi}\sigma') \exp(-(\ln(y)-\mu')^2/2\sigma'^2) \qquad (-\infty < \ln(y) < \infty) \qquad (式2.3-2)$$

(2) n⇒∞の時、確率変数 y (y=y(n)) は対数正規分布 Λ(μ', V') に近づく

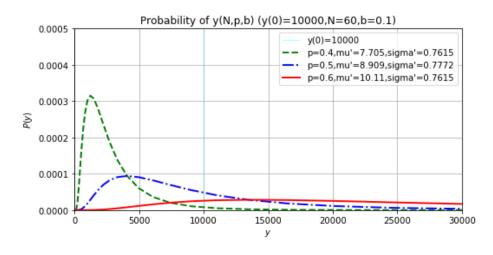
f(y) = 
$$1/(\sqrt{2\pi} \sigma' y) \exp(-(\ln(y) - \mu')^2/2 \sigma'^2)$$
 (0= 0 (ln(y)≤0)

確率変数 y(n) が近づく対数正規分布  $\Lambda(\mu', V')$ をグラフ化すると以下のようになります (y(0)=10000, n=60 で b,p を変えたもの):

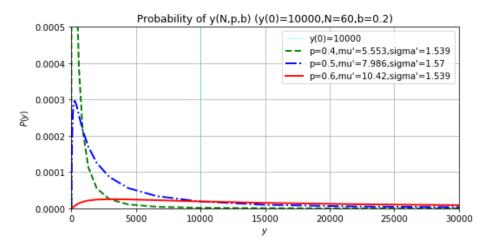
Probability of y(N,p,b) (y(0)=10000,N=60,b=0.05) max(y(n))=186791.85894122993



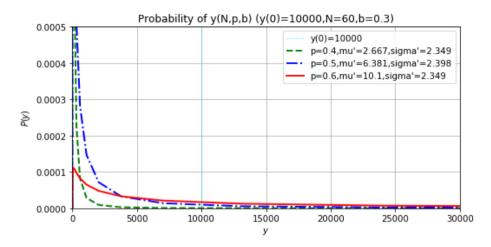
Probability of y(N,p,b) (y(0)=10000,N=60,b=0.1) max(y(n))=3044816.3954141955



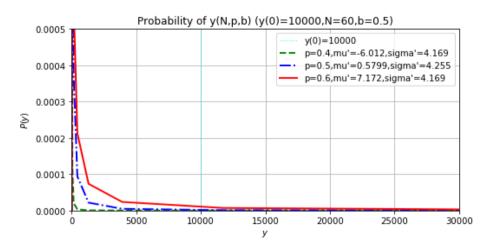
Probability of y(N,p,b) (y(0)=10000,N=60,b=0.2) max(y(n))=563475143.5316666



Probability of y(N,p,b) (y(0)=10000,N=60,b=0.3) max(y(n))=68643771727.44704



Probability of y(N,p,b) (y(0)=10000,N=60,b=0.5) max(y(n))=367684687169330.2



(リスト:賭け事\_リスト\_5\_試行回数N、成功割合p、掛け率bの時の最終所持金y(N,p,b))

- ・「(2.3) n 回賭け事を繰返した結果の所持金 y(n) が従う確率分布」のグラフから 読みとれることは幾つかあります。
  - (1) 成功確率 p が同じでも、掛け率 b を大きくとるほど、元金が無くなる傾向にある。
  - (2) 掛け率 b が同じでも、成功確率 p が小さいほど、元金が無くなる傾向にある。

等々・・・・

### (3) 乗算過程

・上記の問題設定の(式2.1-1)のように、試行回数 n における確率変数の値 y(n) が、

一つ前の試行回数 n-1 における確率変数の値 y(n-1) により、次の漸化式で与えられるとき、

これを乗算過程と言います:

$$y(n) = \eta(n-1) \times y(n-1)$$
、  $y(0) = y0$   $\eta(n) : (\etaはギリシア文字イータ)$ 

この漸化式は、以下のようになります。

$$y(n) = \eta(n-1) \times \eta(n-2) \times \cdot \cdot \cdot \times \eta(0) \times y0$$

$$= y0 \times \prod_{k=0}^{n-1} \eta(k)$$

$$\therefore$$

$$\ln(y(n)) = \ln(y0) + \sum_{k=0}^{n-1} \ln(\eta(k))$$

上記の問題設定の(式2.1-1)の場合、

$$\eta (k) = (1 + b) (賭けに勝った場合)$$

$$= (1 - b) (賭けに負けた場合)$$

であり、試行回数 n のうち勝った回数を X とすると(式2.1-1)が得られます:

$$y(n) = y(0) \times (1 + b)^{\chi} \times (1 - b)^{n-\chi}$$

### (4) まとめ

・この問題と解のように、

確率分布を持った変数(上記例では「n 回賭け事を繰返した時の成功回数 X」)と紐づく変数(上記例では「最終的な所持金 y(n)」)の取り得る値の分布を求める問題は少なからず有ります。

本例が参考になれば幸いです。

#### (5) 実装例

#### (リスト:賭け事\_リスト\_1\_所持金の分布関数)

```
#**************
# 賭け事_リスト_1_所持金の分布関数
#************************************
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
%matplotlib inline
# 所持金の分布関数
\# 0 \leq y0
# 1 ≦ X ≦ n
\# 0 \leq b \leq 1
def f_GetShojikin(y0, b, n, xlist):
   ylist = []
   for x in xlist:
       y = y0 * (1.0 + b)**x * (1.0 - b)**(n - x)
       ylist.append( y )
   return ylist
# データとグリッド
y0 = 1000 # 初期の所持金
xn = 60
           # 賭け回数
xlist = []
ylist0 = []
for ii in range(xn+1):
   xlist.append(ii)
   ylist0.append(y0)
# 所持金の分布
label0 = y0=\{0\}'. format(y0)
b1 = 0.05
             # 賭け金のその時点の所持金に対する割合
label1 = b=\{0\}. format(b1)
ylist1 = f_GetShojikin(y0, b1, xn, xlist)
b2 = 0.1
             # 賭け金のその時点の所持金に対する割合
label2 = b=\{0\} format (b2)
ylist2 = f_GetShojikin(y0, b2, xn, xlist)
b3 = 0.2
             # 賭け金のその時点の所持金に対する割合
label3 = b=\{0\} format (b3)
ylist3 = f_GetShojikin(y0, b3, xn, xlist)
# グラフ描画
xlabel = '$x (success/{0})$'.format(xn)
ylabel = '$y(x)$'
plt.figure(figsize=(8,4))
plt.plot(xlist, ylist0, 'k:', linewidth=1, label=label0)
plt.plot(xlist, ylist1, 'r:', linewidth=2, label=label1)
plt.plot(xlist, ylist2, 'b:', linewidth=2, label=label2)
plt.plot(xlist, ylist3, 'g-.', linewidth=2, label=label3)
plt.legend(loc='upper left')
plt.ylim(-0.1, y0*10)
plt.xlim(-0.5, xn)
plt.xlabel(xlabel)
plt.ylabel(ylabel)
plt.grid(True)
plt.show()
```

```
# 賭け事_リスト_2_所持金の対数の分布関数
#************************************
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
%matplotlib inline
# 所持金の対数の分布関数
\# 0 \leq y0
# 1 ≦ X ≦ n
\# 0 \leq b \leq 1
def f_GetLnShojikin(y0, b, n, xlist):
    alpha = np. log((1.0 + b) / (1.0 - b))
   beta = np. log(y0) + n * np. log(1.0 - b)
    Inylist = []
    for x in xlist:
       Iny = alpha * x + beta
       Inylist.append( Iny )
    return alpha, beta, Inylist
# データとグリッド
y0 = 1000 # 初期の所持金
xn = 60
           # 賭け回数
xlist = []
Inylist0 = []
lny0 = np. log(y0)
for ii in range(xn+1):
   xlist.append(ii)
    Inylist0. append (Iny0)
# 所持金の分布
label0 = 'y0=\{0\}'. format(y0)
b1 = 0.05
            # 賭け金のその時点の所持金に対する割合
|abe|1 = 'b={0}'. format(b1)
alpha, beta, Inylist1 = f_GetLnShojikin(y0, b1, xn, xlist)
betaMin = beta
b2 = 0.1
             # 賭け金のその時点の所持金に対する割合
label2 = b=\{0\}. format(b2)
alpha, beta, Inylist2 = f_GetLnShojikin(y0, b2, xn, xlist)
if betaMin > beta:
   betaMin = beta
b3 = 0.2
             # 賭け金のその時点の所持金に対する割合
label3 = b=\{0\}. format(b3)
alpha, beta, Inylist3 = f_GetLnShojikin(y0, b3, xn, xlist)
if betaMin > beta:
   betaMin = beta
# グラフ描画
xlabel = '$x (success/{0})$'.format(xn)
ylabel = '$ln(y(x))$'
plt.figure(figsize=(8,4))
plt.plot(xlist, InylistO, 'k:', linewidth=1, label=labelO)
plt.plot(xlist, lnylist1, 'r:', linewidth=2, label=label1)
plt.plot(xlist, Inylist2, 'b:', linewidth=2, label=label2)
plt.plot(xlist, lnylist3, 'g-.', linewidth=2, label=label3)
plt.legend(loc='upper left')
plt.ylim(betaMin, 3*Iny0)
plt.xlim(-0.5, xn)
plt.xlabel(xlabel)
plt.ylabel(ylabel)
plt.grid(True)
plt.show()
```

```
# 賭け事_リスト_3_成功回数の二項分布(P=0.3/0.5/0.7)
import numpy as np
import math
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
%matplotlib inline
# 二項分布の確率質量関数
def fBinominal(n, p, k):
    return fCombinaton(n, k) * ((p)**k) * ((1-p)**(n-k))
# 組合せ nCr
def fCombinaton(n, r):
    return math.factorial(n) // ¥
          (math. factorial(n - r) * math. factorial(r))
# パラメータに応じた分布計算
xn = 60
          # 賭け回数
xlist = range(xn+1)
# p1
p1 = 0.3
label1 = p=\{0\}. format(p1)
plist1 = []
for x in xlist:
   plist1.append(fBinominal(xn, p1, x))
# p2
p2 = 0.5
label2 = p=\{0\}. format(p2)
plist2 = []
for x in xlist:
   plist2.append(fBinominal(xn, p2, x))
# p3
p3 = 0.7
label3 = 'p=\{0\}'. format(p3)
plist3 = []
for x in xlist:
   plist3.append(fBinominal(xn, p3, x))
# グラフ描画
xlabel = 'x (success/{0})', format(xn)
ylabel = '$P(x)$'
title = 'Binominal distribution : Bin({0},p)'.format(xn)
plt.figure(figsize=(8,4))
plt.plot(xlist, plist1, 'r:', linewidth=2, label=label1)
plt.plot(xlist, plist2, 'b:', linewidth=2, label=label2)
plt.plot(xlist, plist3, 'g-.', linewidth=2, label=label3)
plt.title(title)
plt.legend(loc='upper left')
plt.ylim(-0.02, 0.15)
plt.xlim(-0.5, xn)
plt.xlabel(xlabel)
plt.ylabel(ylabel)
plt.grid(True)
plt.show()
```

```
#*****************
# 賭け事_リスト_4_成功回数の標準化
import numpy as np
import math
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
%matplotlib inline
# 二項分布の確率質量関数
def fBinominal(n, p, k):
    return fCombinaton(n, k) * ((p)**k) * ((1-p)**(n-k))
# 組合せ nCr
def fCombinaton(n, r):
    return math.factorial(n) // ¥
          (math. factorial(n - r) * math. factorial(r))
# 標準化確率変数 Z の分布
def fStdNormalDist(xlist, xn, p):
   mu = xn * p
   sigma = xn * p * (1.0 - p)
   zlist = []
   plist = []
    for x in xlist:
       z = (x - mu) / sigma
       zlist.append( z )
       plist.append( fBinominal(xn, p, x) )
    return zlist, plist
# パラメータに応じた分布計算
xn = 60
          # 賭け回数
xlist = range(xn+1)
# p1
p1 = 0.3
label1 = p=\{0\}. format(p1)
zlist1, plist1 = fStdNormalDist(xlist, xn, p1)
# p2
p2 = 0.5
label2 = 'p=\{0\}'. format (p2)
zlist2, plist2 = fStdNormalDist(xlist, xn, p2)
# p3
p3 = 0.7
label3 = p=\{0\} format (p3)
zlist3, plist3 = fStdNormalDist(xlist, xn, p3)
# グラフ描画
xlabel = '$z$'.format(xn)
ylabel = '$P(z)$'
title = 'Binominal distribution : Standardised (N=\{0\})'.format(xn)
plt.figure(figsize=(8,4))
plt.plot(zlist1, plist1, 'r:', linewidth=2, label=label1)
plt.plot(zlist2, plist2, 'b:', linewidth=2, label=label2)
plt.plot(zlist3, plist3, 'g-.', linewidth=2, label=label3)
plt.title(title)
plt.legend(loc='upper left')
plt.ylim(-0.05, 0.15)
plt.xlim(-1.0, 1.0)
plt.xlabel(xlabel)
plt.ylabel(ylabel)
plt.grid(True)
plt.show()
```

```
# 賭け事_リスト_5_試行回数N、成功割合p、掛け率bの時の最終所持金y(N,p,b)
import numpy as np
import math
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
%matplotlib inline
# 対数正規分布関数 (y(0), N, p, b を指定)
def getLambdaList(xlist, y0, xN, p, b):
   # In(y)が従う正規分布N(μ', σ')を算出
   alpha = np. log((1.0 + b) / (1.0 - b))
   beta = np. log(y0) + xN * np. log(1.0 - b)
   mu = xN * p
   sigma = np. sqrt(xN * p * (1.0 - p))
   mudash = beta + alpha * mu
   sigmadash = alpha * sigma
   # yが従う対数正規分布\Lambda(\mu',\sigma')を算出
   pynList = []
   ynList = []
   ynMax = 0.0
   pi2root= np. sqrt (2 * np. pi)
   for x in xlist:
       yn = y0 * ((1.0 + b)**x) * ((1.0 - b)**(xN- x))
       ynList.append(yn)
       if( ynMax < yn ):</pre>
          ynMax = yn
       Inyn = np. log(yn)
       if Invn <= 0:
          pynList. append (0.0)
       else:
          pynList.append(
              1 / (pi2root * sigmadash * yn) 
              * np. \exp(-(\ln yn - mudash)**2 / (2 * sigmadash**2)))
   return pynList, ynList, ynMax, mudash, sigmadash
# N回試行時のy(n)の分布関数 (y(0), N, b を指定)
def showDistribution(xList, y0, xN, b):
   # 初期の所持金のグラフ
   ynList0 = [y0, y0]
   pynList0 = [0.0, 1.0]
   label0 = "y(0) = \{0\}". format (y0)
   # p1
   p1 = 0.4
   pynList1, ynList1, ynMax1, mudash1, sigmadash1 = getLambdaList(xList, y0, xN, p1, b)
   label1 = "p=\{0\}, mu' = \{1:4,4\}, sigma' = \{2:4,4\}". format(p1, mudash1, sigmadash1)
   # p2
   p2 = 0.5
   pynList2, ynList2, ynMax2, mudash2, sigmadash2 = getLambdaList(xList, y0, xN, p2, b)
   label2 = "p=\{0\}, mu' = \{1:4.4\}, sigma' = \{2:4.4\}". format(p2, mudash2, sigmadash2)
   # p3
   pynList3, ynList3, ynMax3, mudash3, sigmadash3 = getLambdaList(xList, y0, xN, p3, b)
   label3 = "p=\{0\}, mu' =\{1:4.4\}, sigma' =\{2:4.4\}". format(p3, mudash3, sigmadash3)
   # y(n)の最大値とパラメータを表示
```

```
ynMax = ynMax1
    if( ynMax < ynMax2 ):</pre>
       ynMax = ynMax2
    if( ynMax < ynMax3 ):</pre>
       ynMax = ynMax3
    rangeY = y0*3
   # 文言表示
   print('Probability of y(N, p, b) (y(0) = \{0\}, N = \{1\}, b = \{2:3.3\})'.format(y0, xN, b))
   print("max(y(n))={0}".format(ynMax))
   # グラフ描画
   xlabel = '$y$'
   ylabel = 'P(y)'
   title = 'Probability of y (N, p, b) (y(0) = \{0\}, N = \{1\}, b = \{2:3.3\})'. format (y(0, x(0), x(0), b))
   plt. figure (figsize=(8, 4))
   plt.plot(ynList0, pynList0, color='cyan', linestyle='dotted', linewidth=1, label=label0)
   plt.plot(ynList1, pynList1, color='green', linestyle='dashed', linewidth=2, label=label1)
   plt.plot(ynList2, pynList2, color='blue', linestyle='dashdot', linewidth=2, label=label2)
   plt.plot( ynList3, pynList3, color='red', linestyle='solid', linewidth=2, label=label3 )
   plt.title(title)
   plt.legend(loc='upper right')
   plt.xlim(-5, rangeY)
   plt.ylim(-0.00, 0.0005)
   plt. xlabel(xlabel)
   plt.ylabel(ylabel)
   plt.grid(True)
   plt.show()
# パラメータに応じた分布計算
y0 = 10000 # 初期の所持金
xN = 60
            # 賭け回数
xList = []
for x in range (xN+1):
   xList.append(x)
b = 0.05 # 賭け金の所持金に対する割合
showDistribution(xList, y0, xN, b)
b = 0.1 # 賭け金の所持金に対する割合
showDistribution(xList, y0, xN, b)
b = 0.2 # 賭け金の所持金に対する割合
showDistribution(xList, y0, xN, b)
b = 0.3 # 賭け金の所持金に対する割合
showDistribution(xList, y0, xN, b)
b = 0.5 # 賭け金の所持金に対する割合
showDistribution(xList, y0, xN, b)
```