

AI応用セミナー

第01回

賭け事

改訂履歴

日付	担当者	内容
2022/11/13	武田 守	初版
2022/11/19	武田 守	章建て、項建てを見直し

目次

- (1) はじめに
 - (1.1) 問題設定
 - (1.2) 前提となる主な基礎知識
- (2) 本論
 - (2.1) n 回賭け事を繰返したうち成功した回数が X の場合の所持金 $y(n)$
 - (2.2) n 回賭け事を繰返したうち成功した回数 X が従う確率分布
 - (2.3) n 回賭け事を繰返した結果の所持金 $y(n)$ が従う確率分布
- (3) まとめ
- (4) 実装例
 - 賭け事_リスト_1_所持金の分布関数
 - 賭け事_リスト_2_所持金の対数の分布関数
 - 賭け事_リスト_3_成功回数の二項分布
 - 賭け事_リスト_4_成功回数の標準化
 - 賭け事_リスト_5_試行回数 N 、成功割合 p 、掛け率 b の時の最終所持金 $y(N, p, b)$

賭け事

(1) はじめに

ここでは、一つの賭け事のモデルを設定し、
n 回賭け事を繰返して X 回成功した時の所持金 $y(n)$ を計算します。

(1.1) 問題設定

- ・ 初期の所持金を $y(0)$ とします。
- ・ 一回の賭け事で成功する確率を p ($0 \leq p \leq 1$) とします。
- ・ 賭け事を n 回繰返した後の所持金を $y(n)$ とします。
- ・ 毎回の賭け金は、その時点の所持金の b 倍 ($0 < b < 1$) とします。
- ・ このルールで、n 回賭け事を繰返して X 回成功した時の所持金 $y(n)$ を計算します。

(1.2) 前提となる主な基礎知識

- ・ 「対数関数 (タスクン、logarithm fnction)」の性質
- ・ 「二項分布 (ニコウブン、binominal distribution)」 $P(k) = {}_nC_k p^k (1-p)^{n-k}$
- ・ 「標準化確率変数 (ヒョウジュンカクリツヘンズ、standardized random variable)」 $Z = (X - \mu) / \sigma$
- ・ 「標準正規分布 (ヒョウジュンセイギブン、Standard Normal Distribution)」 $N(0, 1)$

【出典・参考】

賭け事⇒「その問題 数理モデルが解決します」ベレ出版 浜田宏著 2019年

二項分布⇒ 本セミナー「第6回 数学の基礎 (3回目: 統計学) (3.2.3) 二項分布」

対数正規分布⇒ 本セミナー「第6回 数学の基礎 (3回目: 統計学) (3.3.2) 対数正規分布」

期待値についての公式⇒ 本セミナー「第6回 数学の基礎 (3回目: 統計学) (3.4) 平均と確率変数の期待値」

分散についての公式⇒ 本セミナー「第6回 数学の基礎 (3回目: 統計学) (3.5) 確率変数の分散」

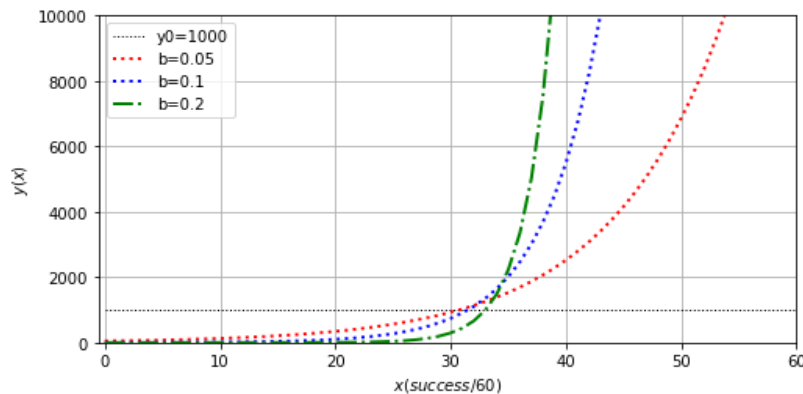
(2) 本論

(2.1) n 回賭け事を繰返したうち成功した回数が X の場合の所持金 y(n)

- ・上記の問題設定の下で、n 回賭け事を繰返して X 回成功した (n-X 回失敗した) 時に、最終的な所持金 y(n) は次式で与えられます：

$$y(n) = y(0) \times (1+b)^X \times (1-b)^{n-X} \quad (\text{式2.1-1})$$

この式をグラフ化すると以下ようになります (y(0)=1000、n=60 でbを変えたもの)：



(リスト：賭け事_リスト_1_所持金の分布関数)

- ・(式2.1-1)の両辺の対数を取ると、以下の関係式が得られます。

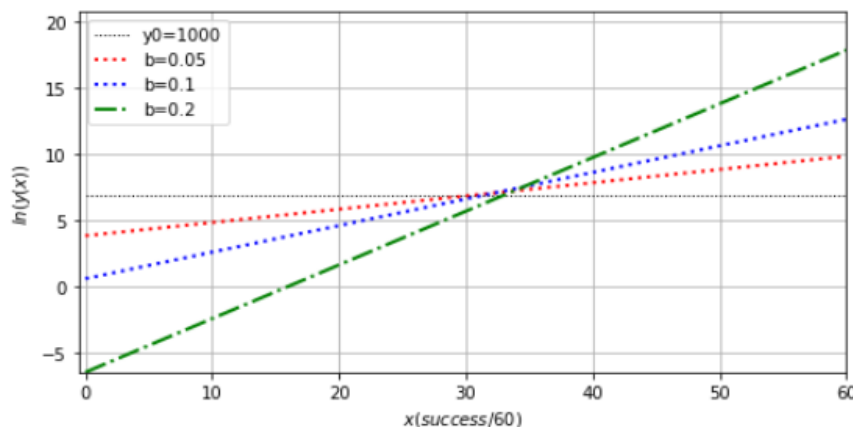
$$\begin{aligned} \ln(y(n)) &= \ln(y(0)) + X \cdot \ln(1+b) + (n-X) \cdot \ln(1-b) \\ &= X \cdot \ln\{(1+b)/(1-b)\} + \ln(y(0)) + n \cdot \ln(1-b) \\ &= \alpha X + \beta \end{aligned} \quad (\text{式2.1-2})$$

$$\begin{cases} \alpha \equiv \ln\{(1+b)/(1-b)\} \\ \beta \equiv \ln(y(0)) + n \cdot \ln(1-b) \\ \ln(a) : a \text{ の自然対数 } (\log_e(a)) \end{cases}$$

この意味するところは、以下のとおりです：

「n 回賭け事を繰返した結果の所持金 y(n) の対数 ln(y(n)) は、成功回数 X の一次変換になる。」

この式をグラフ化すると以下ようになります (y(0)=1000、n=60 でbを変えたもの)：



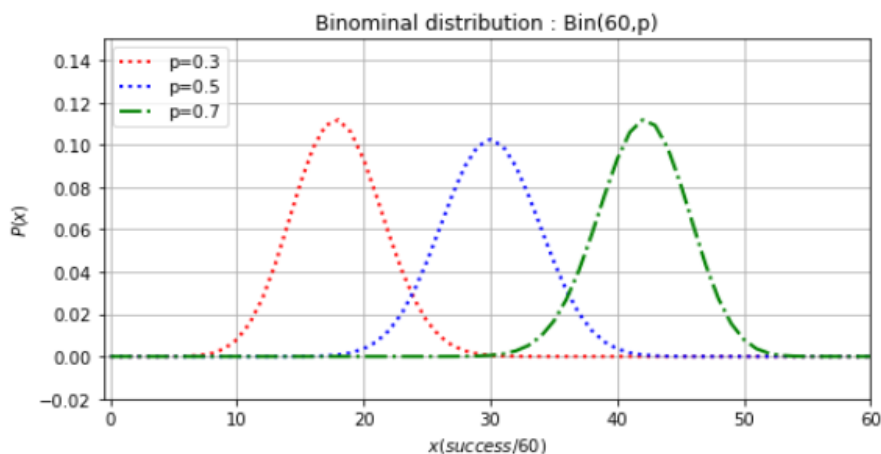
(リスト：賭け事_リスト_2_所持金の対数の分布関数)

(2.2) n 回賭け事を繰返したうち成功した回数 X が従う確率分布

- 一方、賭け事の n 回の試行で成功する回数 X は確率変数であり、X が従う確率分布は「二項分布 (binomial distribution)」になります。その確率質量関数 $P(X=x)$ 、平均 μ 、分散 V 、標準偏差 σ は次式で表されます：

$$\begin{aligned} P(X=x) &= {}_n C_x p^x (1-p)^{n-x} \\ \mu &= np \\ V &= np(1-p) \\ \sigma &= \sqrt{np(1-p)} \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} x \in \{0, 1, \dots, n\} \\ p : \text{一回の試行で成功する確率} \\ \sqrt{a} : a \text{ の平方根} \end{array} \right. \quad (\text{式2.2-1})$$

この式をグラフ化すると以下ようになります (n=60 で p を変えたもの)：



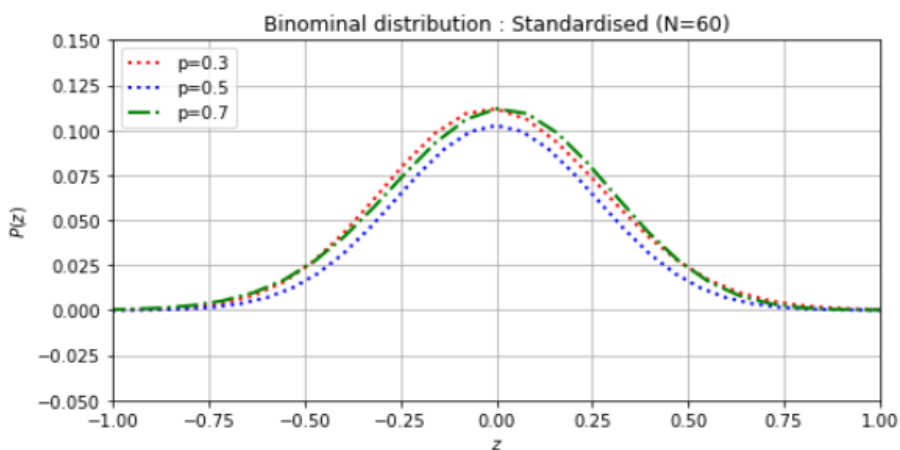
(リスト：賭け事_リスト_3_成功回数の二項分布)

この統計諸量により、n 回の試行で成功する回数 X の標準化確率変数 Z を作成します：

$$\begin{aligned} Z &= (X - \mu) / \sigma \\ &= (X - np) / \sqrt{np(1-p)} \end{aligned} \quad (\text{式2.2-2})$$

この標準化確率変数 Z は「二項分布に関する中心極限定理 (ド・モアブル＝ラプラスの定理)」により、 $n \rightarrow \infty$ の時、標準化確率変数 Z は標準正規分布 $N(0, 1)$ に近づきます。

標準化をグラフ化すると以下ようになります (n=60 で p を変えたもの)：



(リスト：賭け事_リスト_4_成功回数の標準化)

確率変数 X (n 回の試行で成功する回数) は、(式2.2-2) より、

$$X = \sigma Z + \mu = \sqrt{np(1-p)} Z + np \quad (\text{式2.2-3})$$

であり、Z の一次変換である X も正規分布となるので、

結局 $n \rightarrow \infty$ の時、確率変数 X は正規分布 $N(\mu, \sigma) = N(np, \sqrt{np(1-p)})$ に近づきます。

これは、上記の (リスト：賭け事_リスト_3_成功回数の二項分布) のグラフでも見て取れます。

(2.3) n 回賭け事を繰返した結果の所持金 $y(n)$ が従う確率分布

(式2.1-2) より、n 回賭け事を繰返した結果の所持金 $y(n)$ について、

$$\ln(y(n)) = \alpha X + \beta \quad (\text{式2.1-2})$$

となりますが、

正規分布 $N(\mu, \sigma)$ に従う X の一次変換である $\ln(y(n))$ も正規分布となります。

$\ln(y(n))$ が従う正規分布 $N(\mu', \sigma')$ の平均 μ' 、分散 $V' (= \sigma'^2)$ は、
期待値と分散についての公式、および(式2.1-2)、(式2.2-1)により

$$\begin{aligned} \mu' &= \beta + \alpha \mu = [\ln(y(0)) + n \cdot \ln(1-b)] + [\ln\{(1+b)/(1-b)\}] \times np \\ V' &= \alpha^2 V = [\ln\{(1+b)/(1-b)\}]^2 \times [np(1-p)] \end{aligned} \quad (\text{式2.3-1})$$

なる統計量 μ' 、 $V' (= \sigma'^2)$ を用いて、以下の結論を得ます：

(1) $n \Rightarrow \infty$ の時、確率変数 $\ln(y)$ ($y=y(n)$) は正規分布 $N(\mu', V')$ に近づく

$$f(\ln(y)) = 1/(\sqrt{2\pi} \sigma') \exp(-(\ln(y) - \mu')^2 / 2\sigma'^2) \quad (-\infty < \ln(y) < \infty) \quad (\text{式2.3-2})$$

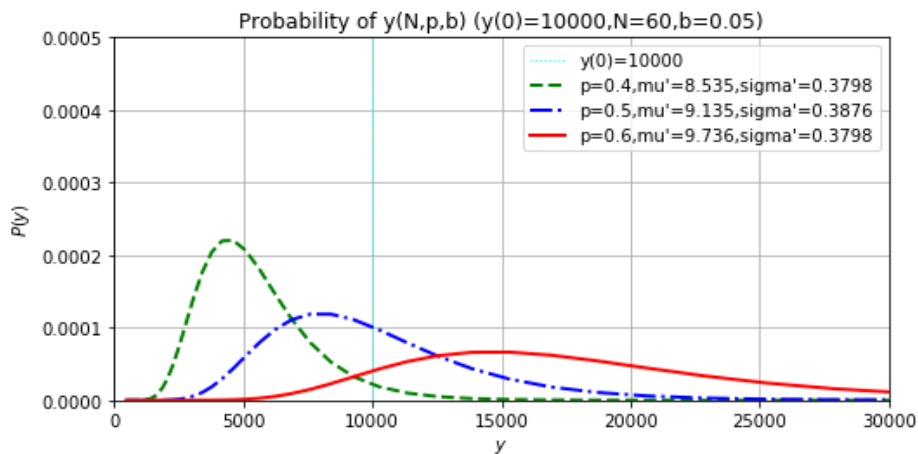
(2) $n \Rightarrow \infty$ の時、確率変数 y ($y=y(n)$) は対数正規分布 $\Lambda(\mu', V')$ に近づく

$$\begin{aligned} f(y) &= 1/(\sqrt{2\pi} \sigma' y) \exp(-(\ln(y) - \mu')^2 / 2\sigma'^2) \quad (0 < \ln(y) < \infty) \\ &= 0 \quad (\ln(y) \leq 0) \end{aligned} \quad (\text{式2.3-3})$$

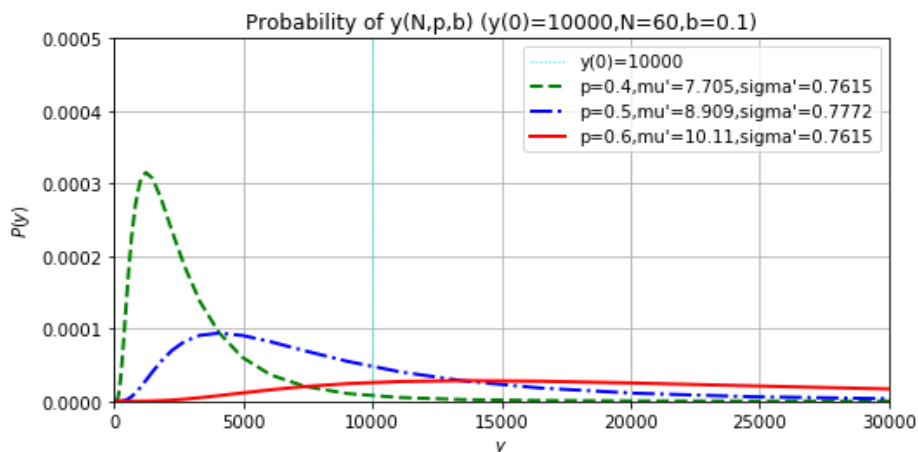
確率変数 $y(n)$ が近づく対数正規分布 $\Lambda(\mu', V')$ をグラフ化すると

以下ようになります ($y(0)=10000$, $n=60$ で b, p を変えたもの)：

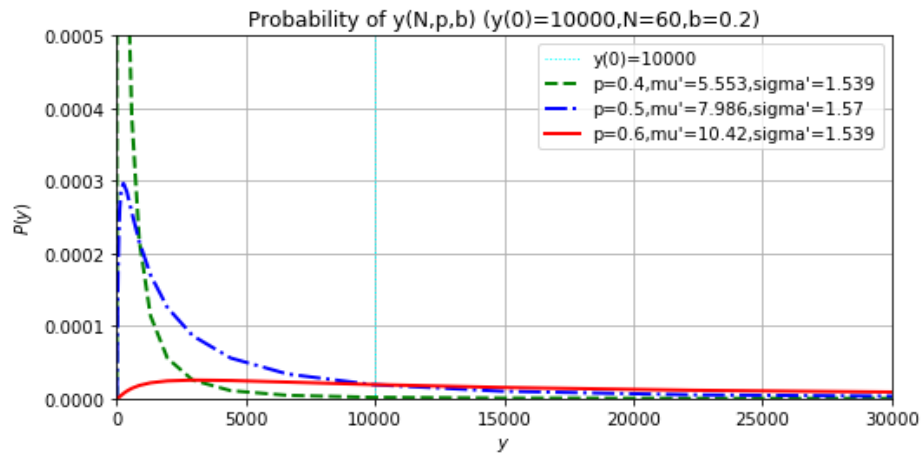
Probability of $y(N, p, b)$ ($y(0)=10000, N=60, b=0.05$)
 $\max(y(n))=186791.85894122993$



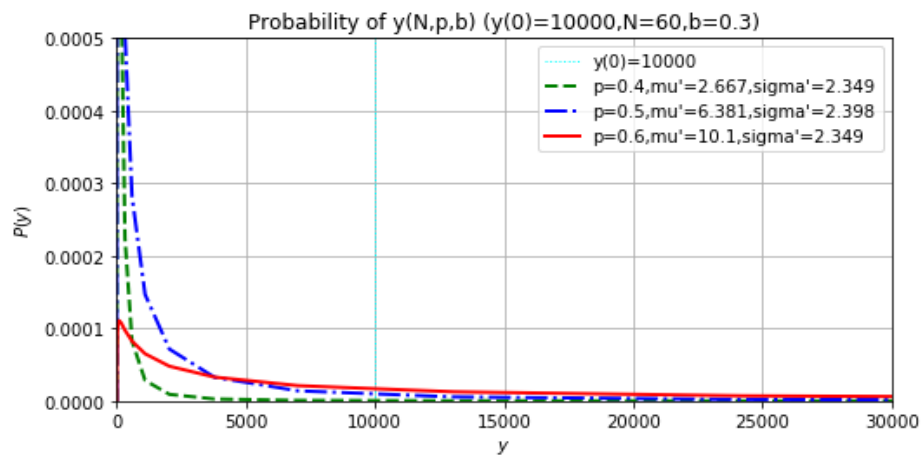
Probability of $y(N, p, b)$ ($y(0)=10000, N=60, b=0.1$)
 $\max(y(n))=3044816.3954141955$



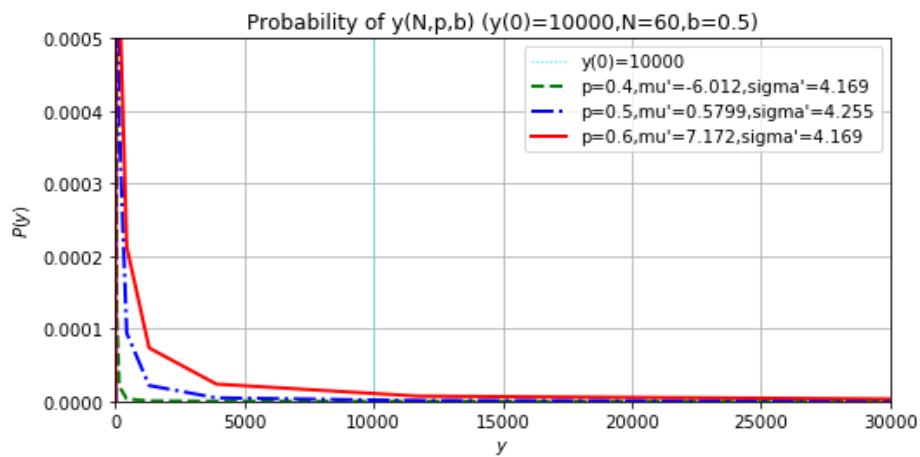
Probability of $y(N,p,b)$ ($y(0)=10000, N=60, b=0.2$)
 $\max(y(n))=563475143.5316666$



Probability of $y(N,p,b)$ ($y(0)=10000, N=60, b=0.3$)
 $\max(y(n))=68643771727.44704$



Probability of $y(N,p,b)$ ($y(0)=10000, N=60, b=0.5$)
 $\max(y(n))=367684687169330.2$



(リスト：賭け事_リスト_5_試行回数 N 、成功割合 p 、掛け率 b の時の最終所持金 $y(N, p, b)$)

(3) まとめ

- ・「(2.3) n 回賭け事を繰返した結果の所持金 $y(n)$ が従う確率分布」のグラフから読みとれることは幾つかあります。
 - (1) 成功確率 p が同じでも、掛け率 b を大きくとるほど、元金が無くなる傾向にある。
 - (2) 掛け率 b が同じでも、成功確率 p が小さいほど、元金が無くなる傾向にある。
 - 等々
- ・この問題と解のように、
確率分布を持った変数（上記例では「 n 回賭け事を繰返した時の成功回数 X 」）と紐づく変数（上記例では「最終的な所持金 $y(n)$ 」）の取り得る値の分布を求める問題は少なからず有ります。
本例が参考になれば幸いです。

(4) 実装例

(リスト: 賭け事_リスト_1_所持金の分布関数)

```
#####
# 賭け事_リスト_1_所持金の分布関数
#####
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
%matplotlib inline

# 所持金の分布関数
#  $0 \leq y_0$ 
#  $1 \leq X \leq n$ 
#  $0 \leq b \leq 1$ 
def f_GetShojikin(y0, b, n, xlist):
    ylist = []
    for x in xlist:
        y = y0 * (1.0 + b)**x * (1.0 - b)**(n - x)
        ylist.append( y )
    return ylist

# データとグリッド
y0 = 1000 # 初期の所持金
xn = 60 # 賭け回数
xlist = []
ylist0 = []
for ii in range(xn+1):
    xlist.append(ii)
    ylist0.append(y0)

# 所持金の分布
label0 = 'y0={0}'.format(y0)

b1 = 0.05 # 賭け金のその時点の所持金に対する割合
label1 = 'b={0}'.format(b1)
ylist1 = f_GetShojikin(y0, b1, xn, xlist)

b2 = 0.1 # 賭け金のその時点の所持金に対する割合
label2 = 'b={0}'.format(b2)
ylist2 = f_GetShojikin(y0, b2, xn, xlist)

b3 = 0.2 # 賭け金のその時点の所持金に対する割合
label3 = 'b={0}'.format(b3)
ylist3 = f_GetShojikin(y0, b3, xn, xlist)

# グラフ描画
xlabel = '$x$ (success/{0})$'.format(xn)
ylabel = '$y(x)$'

plt.figure(figsize=(8,4))
plt.plot( xlist, ylist0, 'k:', linewidth=1, label=label0 )
plt.plot( xlist, ylist1, 'r:', linewidth=2, label=label1 )
plt.plot( xlist, ylist2, 'b:', linewidth=2, label=label2 )
plt.plot( xlist, ylist3, 'g-', linewidth=2, label=label3 )
plt.legend(loc='upper left')
plt.ylim(-0.1, y0*10)
plt.xlim(-0.5, xn)
plt.xlabel(xlabel)
plt.ylabel(ylabel)
plt.grid(True)
plt.show()
```


(リスト: 賭け事_リスト_2_所持金の対数の分布関数)

```
#####
# 賭け事_リスト_2_所持金の対数の分布関数
#####
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
%matplotlib inline

# 所持金の対数の分布関数
#  $0 \leq y_0$ 
#  $1 \leq X \leq n$ 
#  $0 \leq b \leq 1$ 
def f_GetLnShojikin(y0, b, n, xlist):
    alpha = np.log((1.0 + b) / (1.0 - b))
    beta = np.log(y0) + n * np.log(1.0 - b)
    lnylist = []
    for x in xlist:
        lny = alpha * x + beta
        lnylist.append(lny)
    return alpha, beta, lnylist

# データとグリッド
y0 = 1000 # 初期の所持金
xn = 60 # 賭け回数
xlist = []
lnylist0 = []
lny0 = np.log(y0)
for ii in range(xn+1):
    xlist.append(ii)
    lnylist0.append(lny0)

# 所持金の分布
label0 = 'y0={0}'.format(y0)

b1 = 0.05 # 賭け金のその時点の所持金に対する割合
label1 = 'b={0}'.format(b1)
alpha, beta, lnylist1 = f_GetLnShojikin(y0, b1, xn, xlist)
betaMin = beta

b2 = 0.1 # 賭け金のその時点の所持金に対する割合
label2 = 'b={0}'.format(b2)
alpha, beta, lnylist2 = f_GetLnShojikin(y0, b2, xn, xlist)
if betaMin > beta:
    betaMin = beta

b3 = 0.2 # 賭け金のその時点の所持金に対する割合
label3 = 'b={0}'.format(b3)
alpha, beta, lnylist3 = f_GetLnShojikin(y0, b3, xn, xlist)
if betaMin > beta:
    betaMin = beta

# グラフ描画
xlabel = '$x$ (success/{0})$'.format(xn)
ylabel = '$\ln(y(x))$'
plt.figure(figsize=(8, 4))
plt.plot(xlist, lnylist0, 'k:', linewidth=1, label=label0)
plt.plot(xlist, lnylist1, 'r:', linewidth=2, label=label1)
plt.plot(xlist, lnylist2, 'b:', linewidth=2, label=label2)
plt.plot(xlist, lnylist3, 'g-.', linewidth=2, label=label3)
plt.legend(loc='upper left')
plt.ylim(betaMin, 3*lny0)
plt.xlim(-0.5, xn)
plt.xlabel(xlabel)
plt.ylabel(ylabel)
plt.grid(True)
plt.show()
```

(リスト: 賭け事_リスト_3_成功回数の二項分布)

```
#####
# 賭け事_リスト_3_成功回数の二項分布 (P=0.3/0.5/0.7)
#####
import numpy as np
import math
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
%matplotlib inline

# 二項分布の確率質量関数
def fBinominal(n, p, k):
    return fCombinaton(n, k) * ((p)**k) * ((1-p)**(n-k))

# 組合せ nCr
def fCombinaton(n, r):
    return math.factorial(n) // ¥
        (math.factorial(n - r) * math.factorial(r))

# パラメータに応じた分布計算
xn = 60      # 賭け回数
xlist = range(xn+1)

# p1
p1 = 0.3
label1 = 'p={0}'.format(p1)
plist1 = []
for x in xlist:
    plist1.append( fBinominal(xn, p1, x) )

# p2
p2 = 0.5
label2 = 'p={0}'.format(p2)
plist2 = []
for x in xlist:
    plist2.append( fBinominal(xn, p2, x) )

# p3
p3 = 0.7
label3 = 'p={0}'.format(p3)
plist3 = []
for x in xlist:
    plist3.append( fBinominal(xn, p3, x) )

# グラフ描画
xlabel = '$x$ (success/{0})$'.format(xn)
ylabel = '$P(x)$'
title = 'Binominal distribution : Bin({0},p)'.format(xn)

plt.figure(figsize=(8,4))
plt.plot( xlist, plist1, 'r:', linewidth=2, label=label1 )
plt.plot( xlist, plist2, 'b:', linewidth=2, label=label2 )
plt.plot( xlist, plist3, 'g-', linewidth=2, label=label3 )
plt.title(title)
plt.legend(loc='upper left')
plt.ylim(-0.02, 0.15)
plt.xlim(-0.5, xn)
plt.xlabel(xlabel)
plt.ylabel(ylabel)
plt.grid(True)
plt.show()
```

(リスト: 賭け事_リスト_4_成功回数の標準化)

```
#####
# 賭け事_リスト_4_成功回数の標準化
#####
import numpy as np
import math
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
%matplotlib inline

# 二項分布の確率質量関数
def fBinominal(n, p, k):
    return fCombinaton(n, k) * ((p)**k) * ((1-p)**(n-k))

# 組合せ nCr
def fCombinaton(n, r):
    return math.factorial(n) // ¥
        (math.factorial(n - r) * math.factorial(r))

# 標準化確率変数 Z の分布
def fStdNormalDist(xlist, xn, p):
    mu = xn * p
    sigma = xn * p * (1.0 - p)
    zlist = []
    plist = []
    for x in xlist:
        z = (x - mu) / sigma
        zlist.append( z )
        plist.append( fBinominal(xn, p, x) )
    return zlist, plist

# パラメータに応じた分布計算
xn = 60      # 賭け回数
xlist = range(xn+1)

# p1
p1 = 0.3
label1 = 'p={0}'.format(p1)
zlist1, plist1 = fStdNormalDist(xlist, xn, p1)

# p2
p2 = 0.5
label2 = 'p={0}'.format(p2)
zlist2, plist2 = fStdNormalDist(xlist, xn, p2)

# p3
p3 = 0.7
label3 = 'p={0}'.format(p3)
zlist3, plist3 = fStdNormalDist(xlist, xn, p3)

# グラフ描画
xlabel = '$z$'.format(xn)
ylabel = '$P(z)$'
title = 'Binominal distribution : Standardised (N={0})'.format(xn)

plt.figure(figsize=(8, 4))
plt.plot( zlist1, plist1, 'r:', linewidth=2, label=label1 )
plt.plot( zlist2, plist2, 'b:', linewidth=2, label=label2 )
plt.plot( zlist3, plist3, 'g-', linewidth=2, label=label3 )
plt.title(title)
plt.legend(loc='upper left')
plt.ylim(-0.05, 0.15)
plt.xlim(-1.0, 1.0)
plt.xlabel(xlabel)
plt.ylabel(ylabel)
plt.grid(True)
plt.show()
```

(リスト: 賭け事_リスト_5_試行回数N、成功割合p、掛け率bの時の最終所持金y(N, p, b))

```
#####
# 賭け事_リスト_5_試行回数N、成功割合p、掛け率bの時の最終所持金y(N, p, b)
#####
import numpy as np
import math
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
%matplotlib inline

#=====
# 対数正規分布関数 (y(0), N, p, b を指定)
#=====
def getLambdaList(xlist, y0, xN, p, b):

    # ln(y)が従う正規分布N( $\mu'$ ,  $\sigma'$ )を算出
    alpha = np.log((1.0 + b) / (1.0 - b))
    beta = np.log(y0) + xN * np.log(1.0 - b)
    mu = xN * p
    sigma = np.sqrt(xN * p * (1.0 - p))
    mudash = beta + alpha * mu
    sigmadash = alpha * sigma

    # yが従う対数正規分布 $\Lambda(\mu', \sigma')$ を算出
    pynList = []
    ynList = []
    ynMax = 0.0
    pi2root = np.sqrt(2 * np.pi)

    for x in xlist:
        yn = y0 * ((1.0 + b)**x) * ((1.0 - b)**(xN - x))
        ynList.append(yn)
        if (ynMax < yn):
            ynMax = yn

        lnyn = np.log(yn)
        if lnyn <= 0:
            pynList.append(0.0)
        else:
            pynList.append(
                1 / (pi2root * sigmadash * yn) *
                np.exp(-(lnyn - mudash)**2 / (2 * sigmadash**2))
            )
    return pynList, ynList, ynMax, mudash, sigmadash

#=====
# N回試行時のy(n)の分布関数 (y(0), N, b を指定)
#=====
def showDistribution(xList, y0, xN, b):
    # 初期の所持金のグラフ
    ynList0 = [y0, y0]
    pynList0 = [0.0, 1.0]
    label0 = "y(0)={0}".format(y0)

    # p1
    p1 = 0.4
    pynList1, ynList1, ynMax1, mudash1, sigmadash1 = getLambdaList(xList, y0, xN, p1, b)
    label1 = "p={0}, mu'={1:4.4}, sigma'={2:4.4}".format(p1, mudash1, sigmadash1)

    # p2
    p2 = 0.5
    pynList2, ynList2, ynMax2, mudash2, sigmadash2 = getLambdaList(xList, y0, xN, p2, b)
    label2 = "p={0}, mu'={1:4.4}, sigma'={2:4.4}".format(p2, mudash2, sigmadash2)

    # p3
    p3 = 0.6
    pynList3, ynList3, ynMax3, mudash3, sigmadash3 = getLambdaList(xList, y0, xN, p3, b)
    label3 = "p={0}, mu'={1:4.4}, sigma'={2:4.4}".format(p3, mudash3, sigmadash3)

    # y(n)の最大値とパラメータを表示
```

```

ynMax = ynMax1
if( ynMax < ynMax2 ):
    ynMax = ynMax2
if( ynMax < ynMax3 ):
    ynMax = ynMax3
rangeY = y0*3

# 文言表示
print( 'Probability of y(N,p,b) (y(0)={0}, N={1}, b={2:3.3})'.format(y0, xN, b))
print( "max(y(n))={0}".format(ynMax))

# グラフ描画
xlabel = '$y$'
ylabel = '$P(y)$'
title = 'Probability of y(N,p,b) (y(0)={0}, N={1}, b={2:3.3})'.format(y0, xN, b)

plt.figure(figsize=(8,4))
plt.plot( ynList0, pynList0, color='cyan', linestyle='dotted', linewidth=1, label=label0 )
plt.plot( ynList1, pynList1, color='green', linestyle='dashed', linewidth=2, label=label1 )
plt.plot( ynList2, pynList2, color='blue', linestyle='dashdot', linewidth=2, label=label2 )
plt.plot( ynList3, pynList3, color='red', linestyle='solid', linewidth=2, label=label3 )

plt.title(title)
plt.legend(loc='upper right')
plt.xlim(-5, rangeY)
plt.ylim(-0.005, 0.0005)
plt.xlabel(xlabel)
plt.ylabel(ylabel)
plt.grid(True)
plt.show()

#=====
# パラメータに応じた分布計算
#=====
y0 = 10000 # 初期の所持金
xN = 60    # 賭け回数
xList = []
for x in range(xN+1):
    xList.append(x)

b = 0.05 # 賭け金の所持金に対する割合
showDistribution(xList, y0, xN, b)

b = 0.1 # 賭け金の所持金に対する割合
showDistribution(xList, y0, xN, b)

b = 0.2 # 賭け金の所持金に対する割合
showDistribution(xList, y0, xN, b)

b = 0.3 # 賭け金の所持金に対する割合
showDistribution(xList, y0, xN, b)

b = 0.5 # 賭け金の所持金に対する割合
showDistribution(xList, y0, xN, b)

```