

设  $G = (V, E)$  是一个连通图,  $T$  是  $G$  的任意一棵最小生成树。我们需要构造一个边的“有效排序”, 使得 Kruskal 算法在应用该排序时能输出  $T$ 。

1. **构造特殊的边排序策略:** 我们对图  $G$  中所有的边  $E$  进行排序, 遵循以下规则:

- (a) 首先, 按照所有边 (无论是否在  $T$  中) 的费用  $c_e$  递增的顺序进行排序。
- (b) 对于费用相同的边:
  - 如果边  $e$  属于  $T$  (即  $e \in T$ ), 则将其排在所有与它费用相同但不属于  $T$  的边之前。
  - 在满足上述条件的情况下, 费用相同且都属于  $T$  的边, 以及费用相同且都不属于  $T$  的边, 它们各自内部的相对顺序可以任意。

这个排序是一个“有效排序”, 因为它确保了边的费用序列是非降的。

2. **运行 Kruskal 算法:** 使用这个特殊构造的边排序, 运行 Kruskal 算法。Kruskal 算法会依次考虑排序后的每条边, 如果添加这条边不会形成环, 则将其加入到当前正在构建的森林中。

3. **证明输出结果为  $T$ :** 我们来证明 Kruskal 算法将最终构建出树  $T$ 。

- 考虑 Kruskal 算法在遍历排序后的边列表时。当它遇到任何一条边  $e$  时, 如果  $e \in T$ , 由于我们的排序策略, 它将优先于所有与它费用相同但不在  $T$  中的边被考虑。
- **关键性质:** 最小生成树  $T$  中的任何一条边都不会与  $T$  中已有的其他边形成环。这是因为如果  $T$  中的某条边  $(u, v)$  与  $T$  中其余边形成环, 那么移除  $(u, v)$  并用环中另一条连接  $u, v$  的边  $(x, y)$  替换, 如果  $c_{x,y} \leq c_{u,v}$ , 则可以得到一个总费用更小或相等的生成树, 这与  $T$  是最小生成树的假设矛盾 (除非  $T$  不唯一)。但更普遍地, Kruskal 算法的正确性依赖于它只添加不会形成环的边。
- 因此, 当 Kruskal 算法处理到  $T$  中的边时, 它总能将其加入到正在构建的森林中, 因为这些边本身不会形成环, 且它们在同费用边中具有优先权。
- Kruskal 算法会持续添加边, 直到形成一个包含  $n - 1$  条边的连通无环图, 即一棵生成树。由于我们优先选择了  $T$  中的边, 并且  $T$  本身就是一棵包含  $n - 1$  条边的生成树, Kruskal 算法在选择了所有  $T$  中的边后, 将停止并输出  $T$ 。即使存在其他与  $T$  中边费用相同的边, 因为  $T$  已经构成一棵树, 再添加其他边会形成环, Kruskal 算法不会选择它们。

综上所述, 通过构造一个适当的有效边排序, 我们可以确保 Kruskal 算法的输出恰好是任意给定的最小生成树  $T$ 。这表明 Kruskal 算法可以“找到”图  $G$  的所有最小生成树 (通过不同的有效排序)。