1. Partition Matrices

$$\beta = (X'X)^{-1}X'y \qquad X = [X_1 \;\; X_2] \qquad X' = \begin{bmatrix} X_1' \\ X_2' \end{bmatrix} \qquad X'y = \begin{bmatrix} X_1'y \\ X_2'y \end{bmatrix}$$

$$X'X = \begin{bmatrix} X_1'X_1 & X_1'X_2 \\ X_2'X_2 & X_2'X_2 \end{bmatrix}$$

$$(X'X)^{-1}X'y = \begin{bmatrix} [X_1'X_1 - X_1'X_2(X_2'X_2)^{-1}X_2'X_1]^{-1} & -[X_1'X_1 - X_1'X_2(X_2'X_2)^{-1}X_2'X_1]^{-1}X'X_2(X_2'X_2)^{-1} \\ -[X_2'X_2 - X_2'X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1'X_2]^{-1}X_2'X_1(X_1'X_1)^{-1} & [X_2'X_2 - X_2'X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1'X_2]^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1'y \\ X_2'y \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [X_1'X_1 - X_1'X_2(X_2'X_2)^{-1}X_2'X_1]^{-1}X_1'y - [X_1'X_1 - X_1'X_2(X_2'X_2)^{-1}X_2'X_1]^{-1}X_1'X_2(X_2'X_2)^{-1}X_2'y$$

$$\Rightarrow [X_1'X_1 - X_1'\underbrace{X_2(X_2'X_2)^{-1}X_2'}_{P_2}X_1]^{-1}[X_1' - X_1'\underbrace{X_2(X_2'X_2)^{-1}X_2'}_{P_2}]y$$

$$\Rightarrow [X_1'X_1 - X_1'P_2X_1]^{-1}[X_1' - X_1'P_2]y$$

$$\Rightarrow [X_1'X_1[1-P_2]]^{-1}[X_1' - X_1P_2]y$$

$$\Rightarrow (X_1'X_1M_2)^{-1}[X_1' - X_1'P_2]y = \beta_1$$

$$(X_1'X_1M_2)^{-1}X_1'(1-P_2)y = \beta_1$$

$$\therefore \beta_1 = (X_1'X_1M_2)^{-1}X_1'M_2y$$

Sujeeth Shetty

$$\Rightarrow -[X_2'X_2 - X_2'X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1X_2]^{-1} X_2'X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1'y + [X_2'X_2 - X_2'X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1'X_2]^{-1} X_2'y$$

$$\Rightarrow [X_2'X_2 - X_2'X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1X_2]^{-1} [-(X_2'X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1') + X_2']y$$

$$\Rightarrow [X_2'X_2 - X_2'P_1X_2]^{-1} [X_2' - X_2'P_1]y$$

$$\Rightarrow (X_2'X_2[1-P_1])^{-1} X_2'[1-P_1]y$$

$$\beta_2 = [X_2'X_2M_1]^{-1} X_2'M_1y$$