



IEL – protokol k projektu

Tomáš, Souček
xsouce15

19. prosince 2020

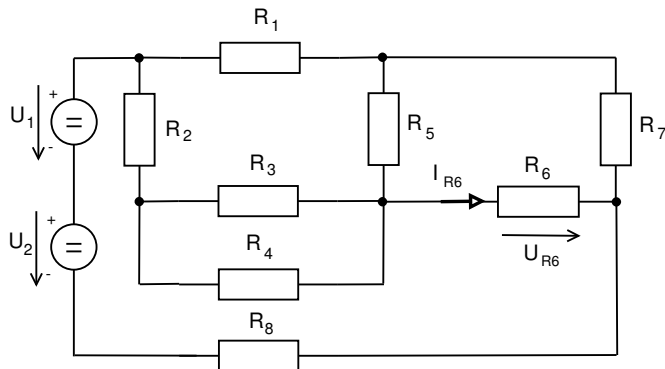
Obsah

| | | |
|---|------------------|----|
| 1 | Příklad 1 | 2 |
| 2 | Příklad 2 | 6 |
| 3 | Příklad 3 | 9 |
| 4 | Příklad 4 | 11 |
| 5 | Příklad 5 | 14 |
| 6 | Shrnutí výsledků | 15 |

Příklad 1

Stanovte napětí U_{R6} a proud I_{R6} . Použijte metodu postupného zjednodušování obvodu.

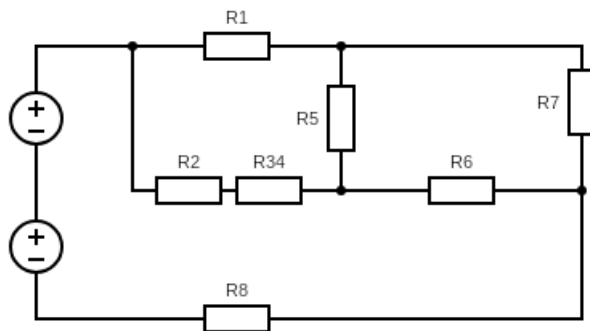
| sk. | U_1 [V] | U_2 [V] | R_1 [Ω] | R_2 [Ω] | R_3 [Ω] | R_4 [Ω] | R_5 [Ω] | R_6 [Ω] | R_7 [Ω] | R_8 [Ω] |
|-----|-----------|-----------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| E | 115 | 55 | 485 | 660 | 100 | 340 | 575 | 815 | 255 | 225 |



Pro začátek jsem si zjednodušil paralelně zapojené rezistory R_3 a R_4 do jednoho a vypočítal odpor nového rezistoru:

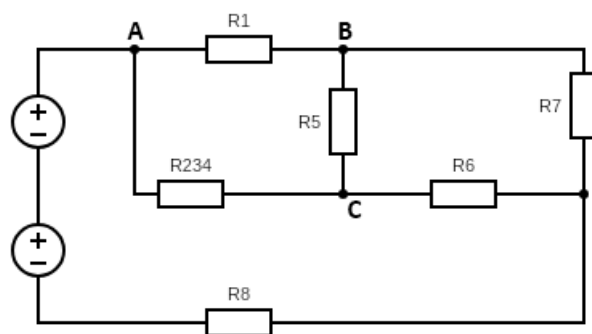
$$R_{34} = \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4}$$

$$R_{34} = \frac{100 \cdot 340}{100 + 340} = 72,2727 \Omega$$



V dalším kroku se nebízelo zjednodušení sériově zapojených rezistorů R_2 , R_{34} a zároveň jsem si vyznačil uzly, které použiji v následujícím kroku:

$$R_{234} = R_2 + R_{34} = 660 + 72,2727 = 732,2727 \Omega$$



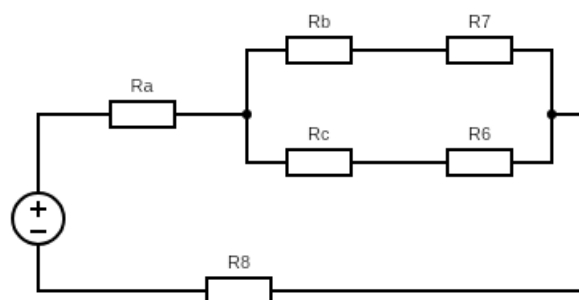
Nyní bylo pro zjednodušení potřeba využít metodu trojúhelník-hvězda. Zároveň jsem spojil zdroje napětí, jelikož byly sériově zapojené:

$$R_A = \frac{R_1 \cdot R_{234}}{R_1 + R_{234} + R_5} = \frac{485 \cdot 737,2727}{1797,2727} = 198,9554 \, \Omega$$

$$R_B = \frac{R_1 \cdot R_5}{R_1 + R_{234} + R_5} = \frac{485 \cdot 575}{1797,2727} = 155,1656 \, \Omega$$

$$R_C = \frac{R_{234} \cdot R_5}{R_1 + R_{234} + R_5} = \frac{77,2727 \cdot 575}{1797,2727} = 235,8750 \, \Omega$$

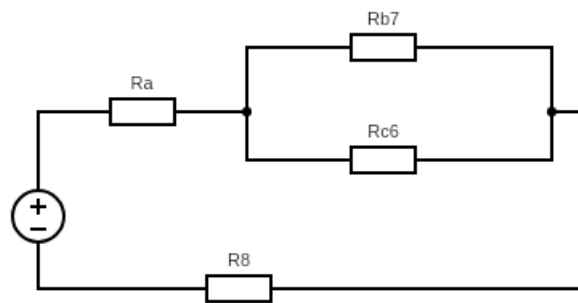
$$U_{ekv} = U_1 + U_2 = 115 + 55 = 170 \, V$$



Dále jsem pokračoval ve zjednodušení sériově zapojených rezistorů R_B, R_7 a R_C, R_6 :

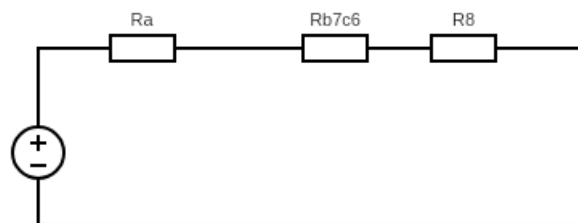
$$R_{B7} = R_B + R_7 = 155,1656 + 255 = 410,1656 \, \Omega$$

$$R_{C6} = R_C + R_6 = 235,8750 + 815 = 1050,8751 \, \Omega$$



Rezistory R_{B7} a R_{C6} jsou zapojeny paralelně, zjednoduším je:

$$R_{B7C6} = \frac{R_{B7} \cdot R_{C6}}{R_{B7} + R_{C6}} = \frac{410,1656 \cdot 1050,8751}{410,1656 + 1050,8751} = 295,0176 \, \Omega$$



Nakonec stačilo všechny rezistory sečíst do jednoho. Tohle můžu udělat, protože všechny 3 rezistory jsou sériově zapojené. Tím pádem mi vznikne nový rezistor R_{ekv} . Znáám celkový odpor i celkové napětí, tedy můžu vypočítat celkový proud pomocí Ohmova zákona:

$$R_{ekv} = R_a + R_{B7C6} + R_8 = 198,9554 + 295,01769 + 225 = 718,9731 \, \Omega$$

$$I_{ekv} = \frac{U_{ekv}}{R_{ekv}} = \frac{170}{718,9731} = 0,2364 \, A$$

Ted' mohu vypočítat požadované hodnoty U_{R_6} a I_{R_6} . Tyto hodnoty zjistím tak, že budu postupně zpětně dopočítávat všechny neznámé veličiny:

$$U_{R8} = R_{R8} \cdot I_{ekv} = 53,2008 \, V$$

$$U_A = R_A \cdot I_{ekv} = 47,0426 \, V$$

$$U_{B7C6} = R_{B7C6} \cdot I_{ekv} = 69,7564 \, V$$

Kontrola správnosti výpočtů (I. Kirchhoffův zákon):

$$U_{ekv} = U_{R8} + U_{R_{B7C6}} + U_{R_A}$$

$$U_{ekv} = 53,2008 + 47,0426 + 69,7564$$

$$U_{ekv} = 169,9998 \, V$$

$$170 \approx 169,9998$$

Dále jsem zjistil proud protékající větvěmi:

$$\begin{aligned} U_{R_{B45}} &= U_{R_{C6}} = U_{R_{B45C6}} \\ I_{R_{B7}} &= \frac{U_{R_{B7C6}}}{R_{B7}} = \frac{69,7564}{410,1656} = 0,1700 \text{ A} \\ I_{R_{C6}} &= \frac{U_{R_{B7C6}}}{R_{C6}} = \frac{69,7564}{1050,8750} = 0,0663 \text{ A} \end{aligned}$$

Kontrola (II. Kirchoffův zákon):

$$\begin{aligned} I_{ekv} - I_{R_{B7}} - I_{R_{C6}} &= 0 \\ 0,2364 - 0,1700 - 0,0663 &\approx 0 \end{aligned}$$

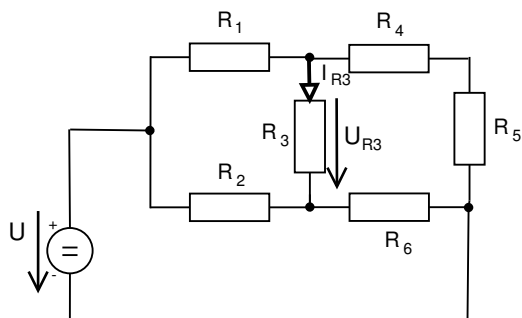
Hledané U_{R_6} a I_{R_6} zjistím z následujících rovnic:

$$\begin{aligned} U_{R_6} &= I_{R_{C6}} \cdot R_6 = 0,0663 \cdot 815 = \mathbf{54,0991 \text{ V}} \\ I_{R_6} &= U_{R_6} \cdot R_6 = \frac{54,0991}{815} = \mathbf{0,0663 \text{ A}} \end{aligned}$$

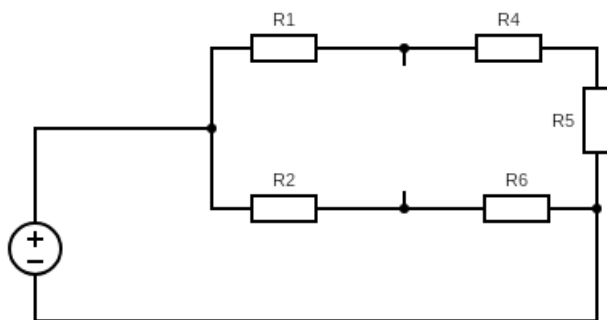
Příklad 2

Stanovte napětí U_{R3} a proud I_{R3} . Použijte metodu Théveninovy věty.

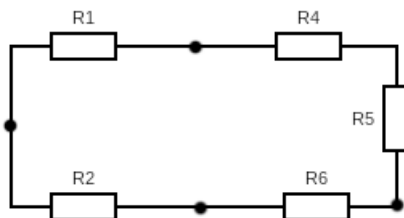
| sk. | U [V] | R_1 [Ω] | R_2 [Ω] | R_3 [Ω] | R_4 [Ω] | R_5 [Ω] | R_6 [Ω] |
|-----|---------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| E | 250 | 150 | 335 | 625 | 245 | 600 | 150 |



Obvod jsem dle zadání řešil Théveninovou větou. Nejdříve jsem si překreslil obvod bez rezistoru R_3 a postupným zjednodušováním jsem si vypočítal R_{i_i} :



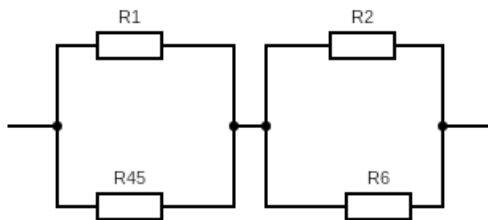
Následně jsem nahradil zdroj zkratem:



Rezistory R_4 a R_5 jsou zapojené sériově - zjednodušil jsem je tedy na výsledný rezistor R_{45} . Dále jsem si schéma překreslil do tvaru, aby bylo lépe poznat zapojení:

$$R_{45} = R_4 + R_5$$

$$R_{45} = 245 + 600 = 845 \, \Omega$$



Paralelně zapojené rezistory R_1 a R_{45} jsem si zjednodušil do R_{145} a to samé provedl s rezistory R_2 a R_6 :

$$R_{145} = \frac{R_1 \cdot R_{45}}{R_1 + R_{45}} = \frac{150 \cdot 845}{150 + 845} = 127,3869 \, \Omega$$

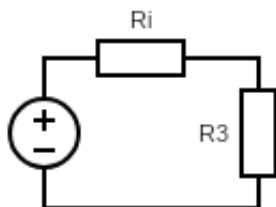
$$R_{26} = \frac{R_2 \cdot R_6}{R_2 + R_6} = \frac{335 \cdot 150}{335 + 150} = 103,6084 \, \Omega$$



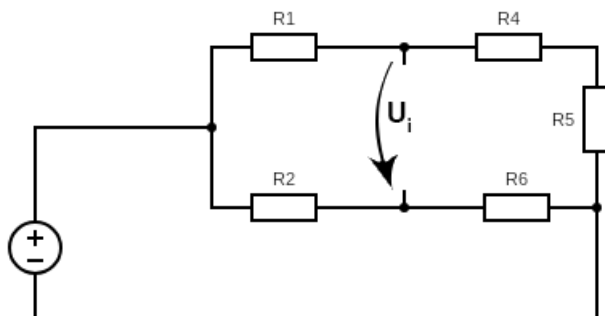
Nyní už jen stačilo zapojit rezistory R_{145} a R_{26} sériově a následně je zapojit do okruhu s R_3 :

$$R_i = R_{145} + R_{26} = 127,3869 + 103,6084$$

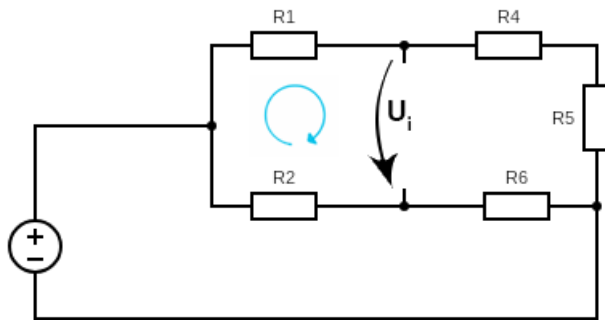
$$R_i = 230,9951 \, \Omega$$



Ve chvíli, kdy jsem znal R_i , byla potřeba zjistit napětí U_i na hledaném rezistoru. Viz schéma



Pro výpočet napětí jsem si vytvořil smyčku, pomocí které jsem dopočítal potřebné hodnoty:



Vznikla mi tedy rovnice:

$$U_{R1} + U_i - U_{R2} = 0$$

Abych mohl vypočítat U_i musel jsem si nejdříve vypočítat U_{R1} a U_{R2} . Pro výpočet jsem zvolil metodu napěťového děliče:

$$U_{R1} = U \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_{45}} = 250 \cdot \frac{150}{150 + 845} = 37,6884 \text{ V}$$

$$U_{R2} = U \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_6} = 250 \cdot \frac{335}{335 + 150} = 172,6804 \text{ V}$$

Z rovnice smyčky jsem si vyjádřil hledané U_i a zároveň doplnil známé hodnoty:

$$U_i = U_{R2} - U_{R1}$$

$$U_i = 172,6804 - 37,6884 = 134,992 \text{ V}$$

Pro výpočet proudu v maximálně zjednodušeném obvodu jsem použil vzorec:

$$I_{R3} = \frac{U_i}{R_i + R_3}$$

$$I_{R3} = \frac{134,992}{230,9951 + 625} = \mathbf{0,1577 \text{ A}}$$

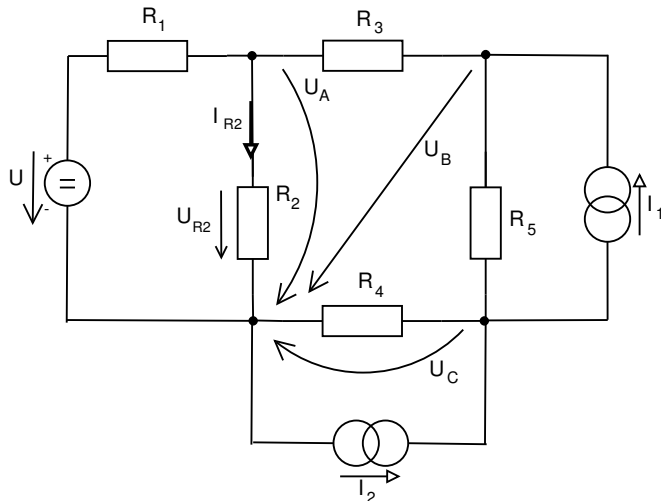
Ve chvíli kdy jsem znal I_{R3} a R_3 , dalo se lehce vypočítat U_{R3} pomocí Ohmova zákona:

$$U_{R3} = I_{R3} \cdot R_3 = 0,1577 \cdot 652 = \mathbf{98,5635 \text{ V}}$$

Příklad 3

Stanovte napětí U_{R2} a proud I_{R2} . Použijte metodu uzlových napětí (U_A, U_B, U_C).

| sk. | U [V] | I_1 [A] | I_2 [A] | R_1 [Ω] | R_2 [Ω] | R_3 [Ω] | R_4 [Ω] | R_5 [Ω] |
|-----|---------|-----------|-----------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| C | 110 | 0.85 | 0.75 | 44 | 31 | 56 | 20 | 30 |



Na základě metody uzlových napětí si sestavím rovnice proudů (II. Kirchhoffův zákon). Zvnikli mi 3 rovnice se 3 neznámými, tj. s neznámými proudy U_A, U_B, U_C . Neznámá napětí vypočítám, a poté dopočítám proud I_{R4} a napětí U_{R4} :

$$I_{R1} + I_{R3} - I_{R2} = 0$$

$$I_1 - I_{R3} - I_{R5} = 0$$

$$I_2 + I_{R5} - I_{R4} - I_1 = 0$$

Z výše uvedených rovnic jsem si vyjádřil jednotlivé proudy:

$$I_{R1} = \frac{U - U_A}{R_1}$$

$$I_{R2} = \frac{U_A}{R_2}$$

$$I_{R3} = \frac{U_B - U_A}{R_3}$$

$$I_{R4} = \frac{U_C}{R_4}$$

$$I_{R5} = \frac{U_B - U_C}{R_5}$$

Do původní rovnice jsem si dosadil jednotlivé vyjádřené proudy:

$$\frac{U - U_A}{R_1} + \frac{U_B - U_A}{R_3} - \frac{U_A}{R_2} = 0$$

$$I_1 - \frac{U_B - U_A}{R_3} - \frac{U_B - U_C}{R_5} = 0$$

$$I_2 + \frac{U_B - U_C}{R_5} - \frac{U_C}{R_4} - I_1 = 0$$

Dosadil jsem do všech tří rovnic známé hodnoty:

$$\frac{110 - U_A}{44} + \frac{U_B - U_A}{56} - \frac{U_A}{31} = 0$$

$$0,85 - \frac{U_B - U_A}{56} - \frac{U_B - U_C}{30} = 0$$

$$0,75 + \frac{U_B - U_C}{30} - \frac{U_C}{20} - 0,85 = 0$$

Nyní jsem si rovnici mírně upravil. Zbavil jsem se zlomků a převedl rovnici do tvaru, aby se dala vyjádřit v matici:

$$1391 \cdot U_A - 341 \cdot U_B + 0 \cdot U_C = 47740$$

$$15 \cdot U_A - 43 \cdot U_B + 28 \cdot U_C = -714$$

$$0 \cdot U_A + 2 \cdot U_B - 5 \cdot U_C = 6$$

Nyní jsem si rovnice převedl do matice:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1391 & -341 & 0 & 47740 \\ 15 & -43 & 28 & -714 \\ 0 & 2 & -5 & 6 \end{array} \right)$$

Upravil matici tak, aby vznikla jednotková matice vlevo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 44,7393 \\ 0 & 1 & 0 & 36.0577 \\ 0 & 0 & 1 & 15,7998 \end{array} \right)$$

Výsledné hodnoty napětí jsou tedy:

$$U_A = 44,7393 \text{ V}$$

$$U_B = 36.0577 \text{ V}$$

$$U_C = 15,7998 \text{ V}$$

Měl jsem zjistit napětí a proud na rezistoru R_2 a vím, že uzel U_A obsahuje pouze rezistor R_2 , z toho tedy vyplývá, že $U_A = U_{R2}$. Proud procházející rezistorem R_2 jsem vypočítal pomocí Ohmova zákona:

$$I_{R2} = \frac{U_{R2}}{R_2} = \frac{44,7393}{31} = 1,4432 \text{ A}$$

Výsledky tedy jsou:

$$I_{R2} = \mathbf{1,4432 \text{ A}}$$

$$U_{R2} = \mathbf{44,7393 \text{ V}}$$

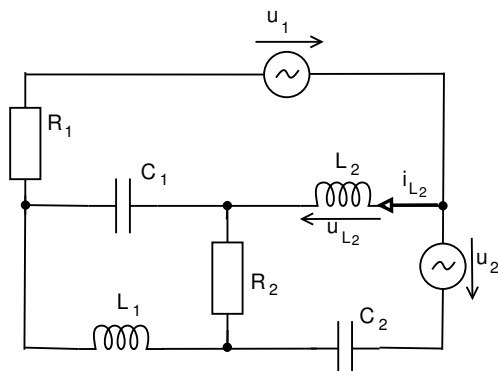
Příklad 4

Pro napájecí napětí platí: $u_1 = U_1 \cdot \sin(2\pi ft)$, $u_2 = U_2 \cdot \sin(2\pi ft)$.

Ve vztahu pro napětí $u_{L_2} = U_{L_2} \cdot \sin(2\pi ft + \varphi_{L_2})$ určete $|U_{L_2}|$ a φ_{L_2} . Použijte metodu smyčkových proudů.

Pozn: Pomocné směry šipek napájecích zdrojů platí pro speciální časový okamžik ($t = \frac{\pi}{2\omega}$).

| sk. | U_1 [V] | U_2 [V] | R_1 [Ω] | R_2 [Ω] | L_1 [mH] | L_2 [mH] | C_1 [μ F] | C_2 [μ F] | f [Hz] |
|-----|-----------|-----------|--------------------|--------------------|------------|------------|------------------|------------------|----------|
| E | 50 | 30 | 14 | 13 | 130 | 60 | 100 | 65 | 90 |



$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 2 \cdot \pi \cdot 90 = 180 \cdot \pi = 565,4866 \text{ Rad}$$

$$L_1 = 0,13 \text{ H}$$

$$L_2 = 0,06 \text{ H}$$

$$C_1 = 0,0001 \text{ F}$$

$$C_2 = 0,000065 \text{ F}$$

Nyní jsem mohl dopočítat reaktance:

$$X_{C_1} = \frac{1}{\omega \cdot C_1} = \frac{1}{565,4866 \cdot 0,0001} = 17,6838 \Omega$$

$$X_{C_2} = \frac{1}{\omega \cdot C_2} = \frac{1}{565,4866 \cdot 0,000065} = 27,2059 \Omega$$

$$X_{L_1} = \omega \cdot L_1 = 565,4866 \cdot 0,13 = 73,5132 \Omega$$

$$X_{L_2} = \omega \cdot L_2 = 565,4866 \cdot 0,06 = 33,9291 \Omega$$

Následně dopočítat impedance cívek a kondenzátorů:

$$Z_{C_1} = -j \cdot X_{C_1} = -17,6838j$$

$$Z_{C_2} = -j \cdot X_{C_2} = -27,2059j$$

$$Z_{L_1} = j \cdot X_{L_1} = 73,5132j$$

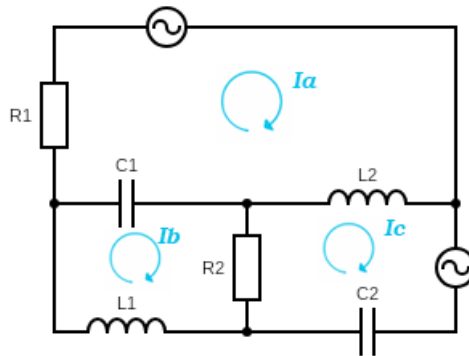
$$Z_{L_2} = j \cdot X_{L_2} = 33,9291j$$

Smyčky jsem si určil tak, jak jsou na obrázku níže a podle nich sestavil rovnice pro proudy I_A , I_B , I_C :

$$I_A \cdot R_1 + U_1 + Z_{L_2} \cdot (I_A - I_C) + Z_{C_1} \cdot (I_A - I_B) = 0$$

$$I_B \cdot Z_{L_1} + Z_{C_1} \cdot (I_B - I_A) + R_2 \cdot (I_B - I_C) = 0$$

$$I_C \cdot Z_{C_2} + R_2 \cdot (I_C - I_B) + Z_{L_2} \cdot (I_C - I_A) + U_2 = 0$$



Rovnice jsem si upravil - vytknul I_A , I_B , I_C a hodnoty napětí U_1 a U_2 přesunul na pravé strany rovnic. Následně jsem si rovnice převedl do matice:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} R_1 + Z_{L_2} + Z_{C_1} & -Z_{C_1} & Z_{L_2} & -U_1 \\ -Z_{C_1} & Z_{L_1} + Z_{C_1} + R_2 & -R_2 & 0 \\ -Z_{L_2} & -R_2 & Z_{C_2} + R_2 + Z_{L_2} & -U_2 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 14 + 16,2453j & 17,6838j & -33,9291j & -50 \\ 17,6838j & 13 + 55,8294j & -13 & 0 \\ -33,9291j & -13 & 13 + 6,7232j & -30 \end{array} \right)$$

po úpravách jsem dostal matici:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0,8401 + 0,8787j \\ 0 & 1 & 0 & 0,1434 - 0,4404j \\ 0 & 0 & 1 & 0,8395 - 1,3181j \end{array} \right)$$

Výsledné hodnoty proudů jsou tedy:

$$I_A = 0,8401 + 0,8787j$$

$$I_B = 0,1434 - 0,4404j$$

$$I_C = 0,8395 - 1,3181j$$

Dopočítal jsem si proud procházející L_2 :

$$I_{L_2} = I_A - I_C = 0,0006 - 0,4421j \text{ A}$$

Napětí $|U_{C_2}|$ jsem dopočítal pomocí Ohmova zákona:

$$U_{L_2} = Z_{L_2} \cdot I_{L_2} = 0,2035 - 15,0001j \text{ V}$$

$$|U_{L_2}| = \sqrt{Re(u_{C_2})^2 + Im(u_{C_2})^2} = \mathbf{15,0014 \text{ V}}$$

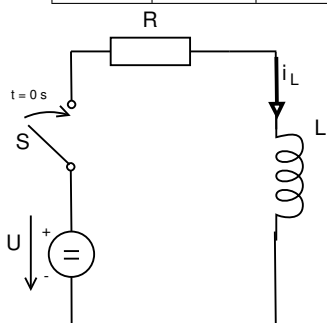
$$\varphi_{L_2} = \arctan \frac{Im(u_{L_2})}{Re(u_{L_2})} = \arctan \frac{15,0001}{0,2035} = \mathbf{1,557 \text{ rad} = 89,222^\circ}$$

Příklad 5

V obvodu na obrázku níže v čase $t = 0[\text{s}]$ sepne spínač S . Sestavte diferenciální rovnici popisující chování obvodu na obrázku, dále ji upravte dosazením hodnot parametrů. Vypočítejte analytické řešení $i_L = f(t)$. Proveďte kontrolu výpočtu dosazením do sestavené diferenciální rovnice.

Pozn: Pomocné směry šipek napájecích zdrojů platí pro speciální časový okamžik ($t = \frac{\pi}{2\omega}$).

| sk. | U [V] | L [H] | R [Ω] | $i_L(0)$ [A] |
|-----|---------|---------|------------------|--------------|
| F | 22 | 30 | 15 | 10 |



Shrnutí výsledků

| Příklad | Skupina | Výsledky | |
|---------|---------|---------------------------|-------------------------------|
| 1 | E | $U_{R6} = 54,0992 \Omega$ | $I_{R6} = 0,0663 A$ |
| 2 | E | $U_{R3} = 98,5636 \Omega$ | $I_{R3} = 0,1577 A$ |
| 3 | C | $U_{R2} = 44,7393 V$ | $I_{R2} = 1,4432 A$ |
| 4 | E | $ U_{L2} = 15,0014 V$ | $\varphi_{L2} = 89,222^\circ$ |
| 5 | F | $i_L =$ | |