华中科技大学计算机科学与技术学院 2021~2022 第二学期

“ 算法设计与分析 ” 考试试卷（B 卷）

考试方式 闭卷　考试日期 2022-05-08　考试时长 150 分钟

专业班级 ________　学　号 ________　姓　名 ________

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分	核对人
分值	15	8	18	14	15	12	18	100	
得分									

分　数	
评卷人	

一、简答题（每小题 5 分，共 15 分）

解答内容不得超过装订线

1. 简述贪心策略的基本思想。

要点：1）启发式策略

2）贪心选择

3）自顶向下分步实施

4）证明解是否是问题的最优解

回答不全面的扣 1-4 分

2、一差分约束系统如下，请画出该差分约束系统的约束图，并问该系统有可行解吗？

$x_1-x_2\leqslant 2$

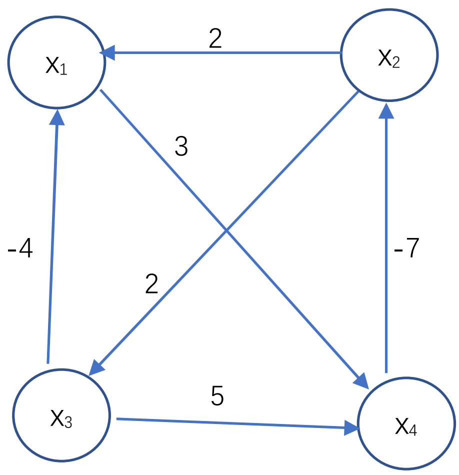
$x_1-x_3\leqslant -4$

$x_2-x_4\leqslant -7$

$x_3-x_2\leqslant 2$

$x_4-x_1\leqslant 3$

$x_4-x_3\leqslant 5$



存在负长度的环

3. 设 f(n)、g(n)都是渐近为正的函数，试证：若 $f(n)=\Omega(g(n))$，则 $g(n)=O(f(n))$。

从Ω和○的定义出发进行证明，描述要准确。

描述不准确的酌情扣 1-4 分

分　数	
评卷人	

二、（本题 8 分）求解下列递归式，要求得到的解应该是紧确的。

要求：写出计算过程。

$$T(n) = 8T(n/2) + n^3\sqrt{n}$$

令 a=8，b=2，$\log_b a=3$；

$f(n) = n^{3.5}$;

$af(n/b)=8*(n/2)^{3.5}=1/2^{0.5}*n^2$

所以存在 $c=1/2^{0.5}<1$，使得 af(n/b)<cf(n)成立。

满足主定理条件三。所以 $T(n)=\Theta(n^{3.5})$

扣分：

（1）　用主方法但没有讨论 c 的扣 3 分

（2）　最后符号不是Θ的，扣 1 分

（3）　展开化简正确的不扣分

解答内容不得超过装订线

分　数	
评卷人	

三、（本题 18 分）已知 5 个关键字的搜索概率如下表所示，求其最优二叉搜索树的代价并推导树的结构。

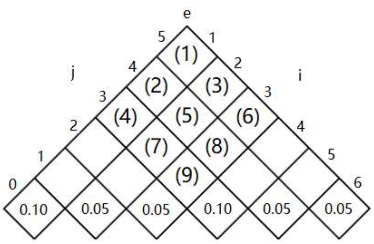
i	0	1	2	3	4	5
p_i		0.20	0.10	0.05	0.10	0.15
q_i	0.10	0.05	0.05	0.10	0.05	0.05

这里，

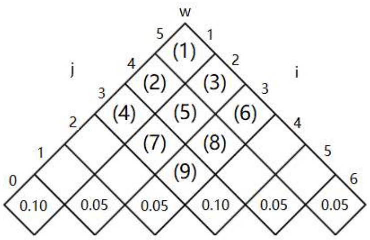
$$e[i,j]=\begin{cases} q_{i-1} & \text{if } j=i-1\,,\\ \min\limits_{i\le r\le j}\{e[i,r-1]+e[r+1,j]+w(i,j)\} & \text{if } i\le j\,.\end{cases}$$

$$w(i,j)=\sum_{l=i}^{j}p_l+\sum_{l=i-1}^{j}q_l\,.$$

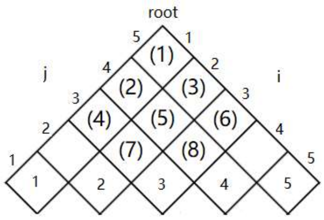
1）请就下面的表 e、w、root 填写计算结果（仅填编号(1)~(9)单元的内容），并给出 w[3,3]和 e[3,3]、w[2,4]和 e[2,4]、w[1,5]和 e[1,5]的具体计算过程。



e 表



w 表



root 表

请将以上编号(1)~(9)单元的计算结果填到下表对应的列中（9 分）。

编号	(9)	(8)	(7)	(6)	(5)	(4)	(3)	(2)	(1)
e	0.35	0.75	0.75	1.25	1.20	1.50	1.80	2.05	2.75
w	0.2	0.35	0.35	0.55	0.5	0.65	0.7	0.8	1
root	3	4	2	4	3	1	4	2	2

给出 w[3,3]和 e[3,3]、w[2,4]和 e[2,4]、w[1,5]和 e[1,5]的计算过程（6 分）

（1）w[3,3]：W[3,3]=p3+q2+q3=0.2

（2）e[3,3]：

e[3,3]=min{e[3,2] + e[4,3]}+w[3,3] = 0.05+0.1+0.2 = 0.35

（3）w[2,4]：w[2,4]=w[2,3]+p4+q4=0.5

（4）e[2,4]：

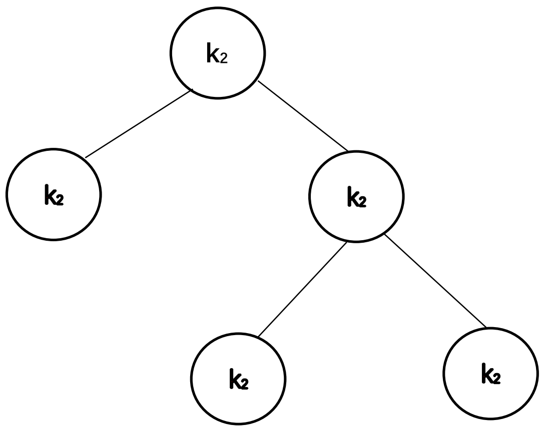
e[2,4]=min{e[2,1]+e[3,4], e[2,2]+e[4,4], e[2,3],e[5,4]} + w[2,4]=1.2

（5）w[1,5]：　　w[1,5]=w[1,4]+p5+q5=1.00

（6）e[1,5]：

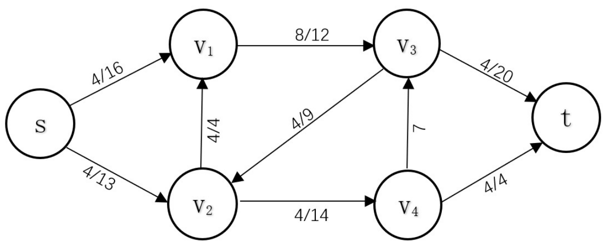
e[1,5]=min{e[1,0]+e[2,5], e[1,1]+e[3,5], e[1,2]+e[4,5], e[1,3]+e[5,5], e[1,4]+e[6,5]} + w[1,5] = 2.75

2）推导并画出该最优二叉搜索树（3 分）：



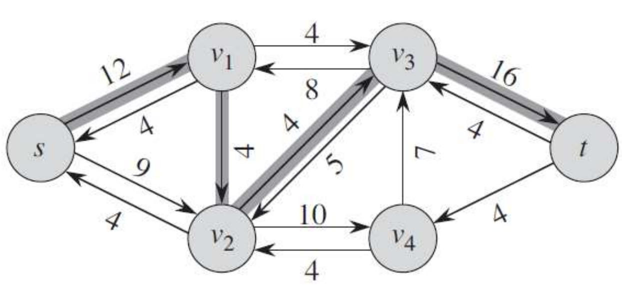
分　数	
评卷人	

四、（本题 14 分）用 Ford-Fulkerson 算法求某个流网络 G 的最大流时，某次迭代后得到的流 f 如图所示，边(u,v)上标注的数字含义是：f(u,v)/c(u,v)。



流网络 G 和它当前的流 f

1）请画出由流 f 所诱导的图 G 的残存网络 G_f，并在其中找出一条增广路径 p（9 分）。

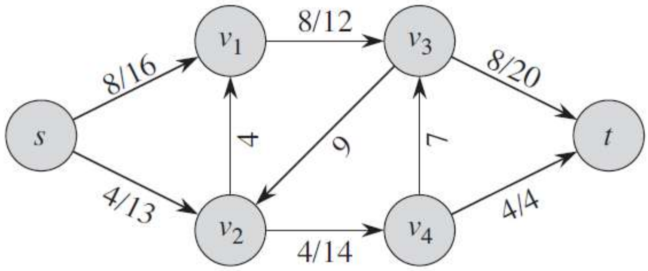


增广路径 p：<u>　s v1 v2 v3 t　　　　</u>(其它路径也可以)

解答内容不得超过装订线

p 的残存容量 $c_f(p)$ = <u>4</u>（如果是其它路径，$c_f(p)$需具体确定）

2）请画出用 p 所定义的 G_f 中流 f_p 增加 f 的流量后得到的 G 上的新流（4 分）。



分　数	
评卷人	

五、（本题 15 分）设在多间教室里安排 n 个活动，每个活动都有一个开始时间 s 和结束时间 t，活动 i 的活动时间是$[s_i, t_i)$，1≤i≤n。任意活动都可以在任意教室进行，但任何时间任何两个活动不能在同一间教室里同时进行。现在希望使用最少的教室完成所有活动。请设计一个低时间复杂度的算法求每个活动的安排（即在哪个教室进行）。请给出算法的描述，并分析你所设计的算法的时间复杂度。

算法 **1.**（**1**）将所有的活动按照开始时间的非降次序排序，开始时间相同的按结束时间非降排序。（**2**）首先为第一个活动分配一间教室，记录其结束时间。（**3**）再后对剩下的活动依次遍历：对当前活动 **i**，依次检查已经安排过活动的教室，若某间教室最后一个活动结束时间早于活动 **i** 的开始时间，则将 **i** 安排在该教室进行，并修改该教室的活动结束时间为 **i** 的结束时间。否则若所有教室最后一个活动与 **i** 冲突，则为 **i** 安排一间新的教室，并记录该教室的活动结束时间。

时间复杂度：$\mathbf{O(n^2)}$

算法 2. 维护两个教室列表：第一个列表 P 包含当前活动时间 t 正在被使用的教室（即存在活动 i，使得 $s_i \le t < f_i$）；另一个列表 Q 是 t 时刻空闲的教室。

当 t 是一个活动的开始时间，活动进入一个空闲的教室，并将此教室从空闲列表移到忙碌列表；当 t 是一个活动的结束时间，将活动的教室从忙碌列表移到空闲列表。将 n 个活动的开始时间和结束时间共 2n 个一起排序。然后对排好序的 2n 个时间依次进行扫描。若当前时间是一个活动的开始时间，则从 Q 表中摘除一个教室，把该教室加到 P 表中，并记录活动在该教室进行。若当前时间是一个活动的结束时间，则将其所在教室从 P 表中摘除并加入到 Q 表中。

为了避免使用更多的教室，应尽量取已经被某活动用过的教室:将新近从 P 表中摘除的教室加到 Q 表的表头，以便下次先用曾被用过的教室。

时间复杂度：O(n+nlogn).

计分：算法 1 不超过 13 分，算法 2 不超过 15 分。

算法描述 10 分，算法分析 5 分。描述要准确，否则酌情扣分。

分　数	
评卷人	

六、（本题 **12** 分）给定一个大小为 **n** 的整数数组，请设计最快的算法判断该数组里面整数是否互不相同。描述你的算法的设计思想，并分析算法的时间复杂度。

算法 1：双重循环，对每个数扫描整个数组，看存不存在与它相同的其它元素。时间复杂度 $O(n^2)$。

算法 2：排序，排序后相同的元素挨在一起，对排序后的序列的每个元素（最后一个元素除外）判断是否等于下一个元素。时间复杂度 $O(n\log n)$.

算法 3：如果 n 比较小，可以采用计数法判定一个整数出现的次数。时间复杂度 $O(n)$。

计分：算法 1，得分不超过 8 分。算法 2，得分不超过 10 分。在算法 1 和算法 2 的基础上如果讨论了算法 3，加 2-3 分。

算法描述要准确，分析要正确。否则适当扣分。

分　数	
评卷人	

一、七、（本题 **18** 分）设一个 **n** 个结点的二叉树 **tree** 的中序遍历序列为 **[1,2,⋯,n]**，其中数字 **1,2,⋯,n** 为结点编号。每个结点都有一个分数（均为正整数），记第 **i** 个结点的分数为 d_i。另外，**tree** 及它的每个子树 **subtree** 都有一个加分，加分的计算方法如下：树（或子树）的根的分数+左子树的加分×右子树的加分。若某个子树为空，规定其加分为 **1**；叶子结点的加分就是叶子结点本身的分数，不考虑它的空子树。试求一棵中序遍历序列为**[1,2,⋯,n]**且加分最高的二叉树 **tree**。

设计一个求解上述问题的动态规划算法。1）说明该问题满足最优子结构性，2）列出状态转移方程，3）写出算法的伪代码描述。

解答内容不得超过装订线

（1）反证：（剪切-粘贴）

若最高加分二叉树的左/右子树不是最高加分子树，可用最高加分子树替代，从而证明原树不是最优的，产生矛盾。所以最高加分二叉树的左/右子树必须是最高加分子树。满足最优子结构性。

（2）另 c[i,j]表示中序遍历序列为[i,j]的二叉树的最高加分。

$$c[i,j]=\begin{cases}1 & i>j\\ di & i=j\\ \max_{i\le k\le j}\{d_k+c[i,k-1]\bullet c[k+1,j]\} & ,i<j\end{cases}$$

(3) 伪代码描述。

另 root[i,j] = $\max_k$.

要求给出计算 c[i,j]和 root[i,j]的过程，并输出 root。

没有输出 root 的视情况扣 2-3 分