

信号与系统

Lecture 7

第四章: 连续时间系统的频域分析

§ 4.1 引言

§ 4.2 信号通过系统的频域分析方法

§ 4.3 理想低通滤波器

§ 4.5-4.6 已学

复习

- 连续时间系统的时域分析
 - 零输入响应
 - 单位冲激响应与卷积积分
 - 零状态响应
- 连续信号的正交分解
 - 周期信号的傅里叶级数
 - 非周期信号的傅里叶变换
 - 周期信号/非周期信号的频谱
 - 傅里叶变换的基本性质

2024-4-27 信号通过系统的频域分析方法

2

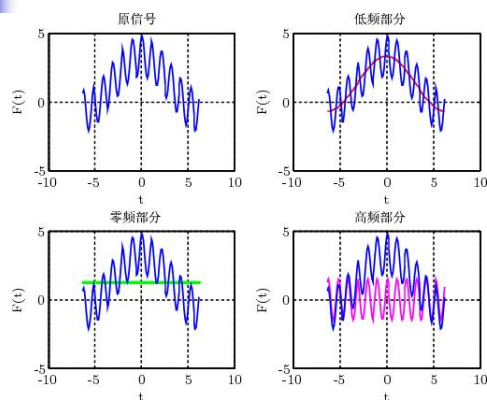
复习:

- 1、单位冲激函数的性质。
- 2、零状态响应的求解公式。
- 3、傅里叶正反变换公式，典型信号的频谱。
- 4、傅里叶变换的性质。

2024-4-27 信号通过系统的频域分析方法

3

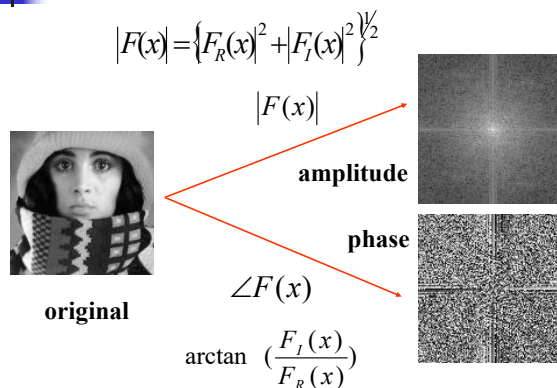
关于频谱



2024-4-27 信号通过系统的频域分析方法

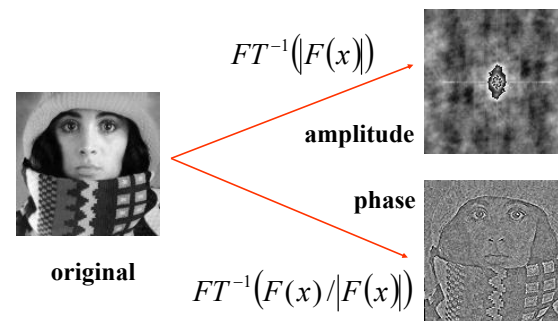
4

Amplitude and Phase



2024-4-27 信号通过系统的频域分析方法

5



2024-4-27 信号通过系统的频域分析方法

6

2024-4-27 信号通过系统的频域分析方法

7

2024-4-27 信号通过系统的频域分析方法

8

基本要求:

- 掌握系统频率响应函数的概念、线性时不变系统零状态响应的频域分析方法; (1)
- 掌握理想低通滤波器的频响特性; (1)
- 了解无失真传输的条件; (1)
- 了解调制解调、频分复用的原理和过程;

重点与难点:

- 系统的频率响应函数

2024-4-27 信号通过系统的频域分析方法

9

本讲内容

- 信号通过系统的频域分析方法
 - 在频域求解零状态响应
 - 系统的频域表征-频响
- 理想低通滤波器的频响特性

2024-4-27 信号通过系统的频域分析方法

10

§ 4.1 引言

系统响应（零状态响应）的时域求解:

1. 将激励信号分解为一系列冲激函数之和;
2. 对每个单元激励求得系统的响应（即冲激响应）;
3. 这些单元激励响应的叠加，就是系统对激励信号的总的响应（零状态响应）。

$$e(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = e(t) * \delta(t)$$

$$\downarrow \delta(t) \rightarrow h(t)$$

$$r_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau) h(t - \tau) d\tau = e(t) * h(t)$$

2024-4-27 信号通过系统的频域分析方法

11

系统响应（零状态响应）的频域求解:

1. 将激励信号分解为一系列等幅正弦函数或虚幂指数函数;
2. 求系统对等幅正弦函数所产生的响应;
 - 正弦稳态分析（电路分析）
 - LTI系统的特性（经验）
3. 这些单元激励响应的叠加，就是系统对激励信号的总的响应（零状态响应）。

2024-4-27 信号通过系统的频域分析方法

12

零状态响应：从信号分解的角度

$$e(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$\downarrow e^{j\omega t} \rightarrow H(j\omega) e^{j\omega t}$$

$$r_{zs}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E(j\omega) H(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [E(j\omega) H(j\omega)] e^{j\omega t} d\omega$$

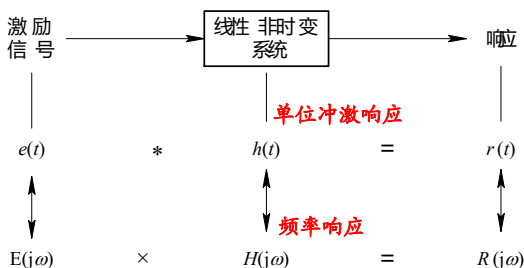
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$R(j\omega) = E(j\omega) H(j\omega)$$

2024-4-27 信号通过系统的频域分析方法

13

零状态响应：从傅里叶变换的性质来看



2024-4-27 信号通过系统的频域分析方法

14

§ 4.2 信号通过系统的频域分析方法

设 $e(t) \leftrightarrow E(j\omega)$, $r_{zs}(t) \leftrightarrow R(j\omega)$,

定义：频域的系统函数

$$H(j\omega) = \frac{R(j\omega)}{E(j\omega)} = |H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

又称为频率响应函数/频响。实际上, $h(t) \leftrightarrow H(j\omega)$



2024-4-27 信号通过系统的频域分析方法

15

频域分析法 - 研究信号的频谱通过系统后产生的变化。

频域求系统响应：

1. 将输入信号分解为正弦分量，即求频谱 $E(j\omega)$ ；
2. 求频响函数 $H(j\omega)$ ；
3. 通过公式 $R(j\omega) = E(j\omega)H(j\omega)$ 求零状态响应的频谱 $R(j\omega)$ ；
4. 由傅里叶反变换得到零状态响应 $r_{zs}(t)$ 。

频域信号处理：

系统对不同频率的等幅正弦信号的作用不同：对信号中各个频率分量的相对大小将产生不同的影响，同时对各个频率分量也会产生不同的相移。叠加后的信号波形也就不同于输入信号的波形，从而达到对信号处理的目的。

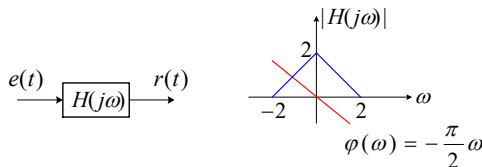
2024-4-27 信号通过系统的频域分析方法

16

例1 (P160 例题4-1) 一线性系统的频响曲线如右图所示。设激励信号为

$$e(t) = 2 + 2 \cos t + 2 \cos(2t)$$

求零状态响应。



2024-4-27 信号通过系统的频域分析方法

17

解：(1) 求输入信号的频谱。

$$e(t) = 2 + 2 \cos t + 2 \cos(2t)$$

$$E(j\omega) = 4\pi\delta(\omega) + 2\pi[\delta(\omega+1) + \delta(\omega-1)]$$

$$+ 2\pi[\delta(\omega+2) + \delta(\omega-2)]$$

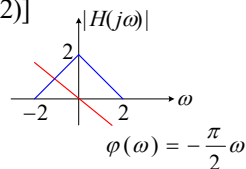
2024-4-27 信号通过系统的频域分析方法

18

(2) 求频响函数。由给出的频响曲线, 可知

$$|H(j\omega)| = (2 - |\omega|)[u(\omega + 2) - u(\omega - 2)]$$

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}\omega$$



$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

$$= \begin{cases} (2 - |\omega|)e^{-j\frac{\pi}{2}\omega}, & |\omega| < 2 \\ 0, & |\omega| \geq 2 \end{cases}$$

(3) 求响应的频谱。

$$R(j\omega) = E(j\omega)H(j\omega)$$

$$= 8\pi\delta(\omega) + 2\pi e^{j\frac{\pi}{2}}\delta(\omega + 1) + 2\pi e^{-j\frac{\pi}{2}}\delta(\omega - 1)$$

(4) 求响应的时域表达式。

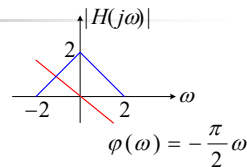
$$\begin{aligned} r(t) &= 4 + e^{j\frac{\pi}{2}}e^{-jt} + e^{-j\frac{\pi}{2}}e^{jt} \\ &= 4 + e^{-j(t-\frac{\pi}{2})} + e^{j(t-\frac{\pi}{2})} \\ &= 4 + 2\cos(t - \frac{\pi}{2}) = 4 + 2\sin t \end{aligned}$$

分析:

$$e(t) = 2 + 2\cos t + 2\cos(2t)$$

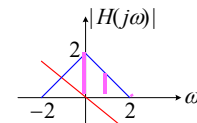
$$r(t) = 4 + 2\cos(t - \frac{\pi}{2})$$

可见, 经过系统后, 二次谐波被滤除, 直流分量放大2倍, 基波产生了相移。



问题:

此题还有没有其他求解方法?



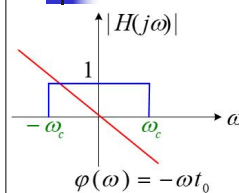
§ 4.3 理想低通滤波器

- 滤波器是一种选频装置, 可以使信号中特定频率成分通过, 而极大地衰减其他频率成分。
- 所谓理想滤波器, 是指能使通带内信号的幅值和相位都不失真, 阻带内的频率成分都衰减为零的滤波器。
- 理想滤波器是不存在的, 实际滤波器幅频特性中通带和阻带间没有严格界限, 存在过渡带。

本节主要内容:

- 理想低通滤波器的频响特性
- 理想低通滤波器的单位冲激响应
- 理想低通滤波器的单位阶跃响应

一. 理想低通滤波器的频响



$$H(j\omega) = e^{-j\omega t_0}, \quad |\omega| < \omega_c \quad (\text{截止频率})$$

或

$$H(j\omega) = e^{-j\omega t_0} [u(\omega + \omega_c) - u(\omega - \omega_c)]$$

更一般地:

$$H(j\omega) = K e^{-j\omega t_0}, \quad |\omega| < \omega_c$$

特性:

- 1、对于激励信号中低于截止频率 ω_c 的各分量, 一致均匀地通过, 在时间上延迟同一段时间 t_0 。
- 2、对于高于截止频率 ω_c 的各分量, 则一律不能通过。

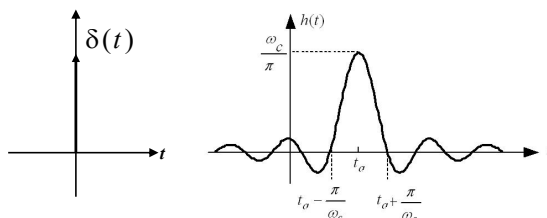
思考:

参照理想低通滤波器的频响曲线, 请画出理想高通、理想带通、理想全通滤波器的频响曲线, 写出频响函数表达式。

二. 理想低通滤波器的单位冲激响应

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j\omega t_0} e^{j\omega t} d\omega$$

$$= \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}[\omega_c(t - t_0)]$$

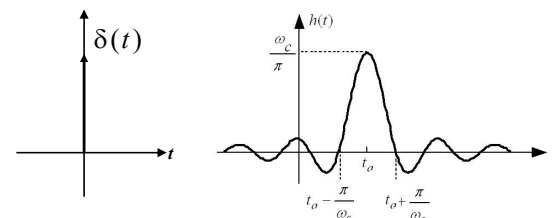


a. 波形发生了失真。

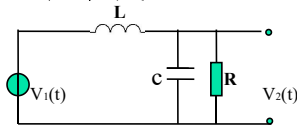
$$\lim_{\omega_c \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{\omega_c \rightarrow \infty} \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}[\omega_c(t - t_0)] = \delta(t - t_0)$$

b. $h(t)$ 的主峰发生在 $t=t_0$ 处。

c. 系统违背了因果律, 因此在物理上是无法实现的。

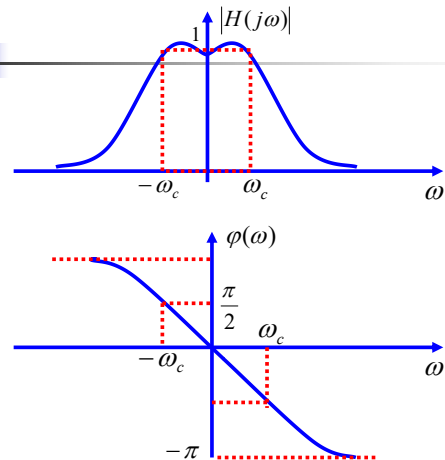


理想低通滤波器在物理上是无法实现的, 但是, 传输特性接近理想特性的网络却不难构成。如:



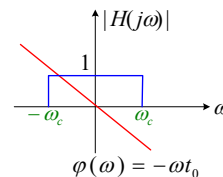
$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\left\{ \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 \right]^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 \right\}^{1/2}}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan \left[\frac{\frac{\omega}{\omega_c}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2} \right]$$

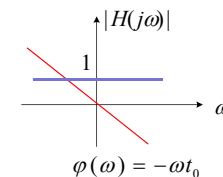


思考: § 4.8

• 信号通过系统不产生失真的条件是什么?



$$H(j\omega) = e^{-j\omega t_0}, \quad |\omega| < \omega_c$$



$$H(j\omega) = e^{-j\omega t_0}$$

三. 单位阶跃响应

$$r_u(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t \frac{\sin \omega_c(\tau - t_0)}{\pi(\tau - t_0)} d\tau$$

$$\text{令: } x = \omega_c(\tau - t_0), dx = \omega_c d\tau, d\tau = \frac{dx}{\omega_c}$$

$$r_u(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\omega_c(t-t_0)} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\infty}^0 \frac{\sin x}{x} dx + \int_0^{\omega_c(t-t_0)} \frac{\sin x}{x} dx \right]$$

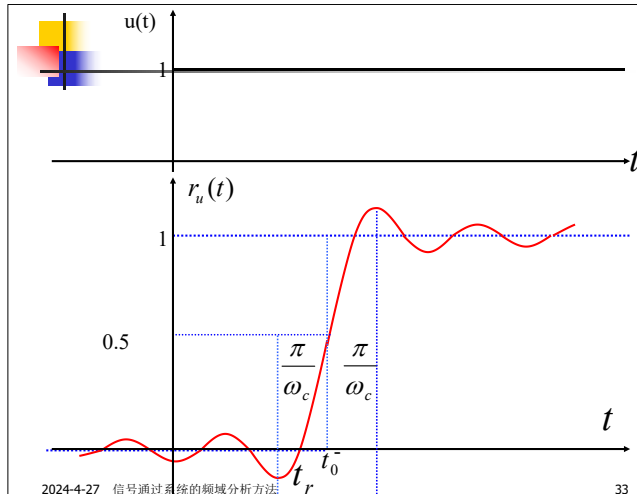
$$\int_{-\infty}^0 \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \dots (1)$$

定义如下的正弦积分函数:

$$\text{Si}(y) = \int_0^y \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^y \text{Sa}(x) dx \dots (2)$$

将 (1) (2) 代入, 得到

$$r_u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si}[\omega_c(t - t_0)]$$



说明:

a. 波形产生了失真;

$$\omega_c \rightarrow \infty, r_u(t) \rightarrow u(t - t_0)$$

b. 响应出现的时间比激励滞后 t_0 ;

c. 输出电压的前沿是倾斜的, 说明电压的建立需要一段时间。此时间与通带成反比: $t_r = \frac{2\pi}{\omega_c}$

d. 系统违背了因果律, 因此在物理上是无法实现的。

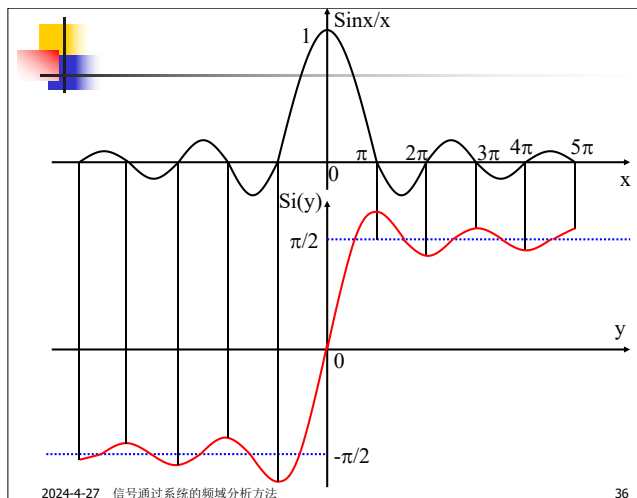
正弦积分

1. $\text{Sa}(x)$ 在 $\pm n\pi$ 为零, $\text{Si}(y)$ 在 $\pm n\pi$ 取极值。

2. $\text{Si}(y)$ 为奇函数, 即 $\text{Si}(y) = -\text{Si}(-y)$

3. $\text{Si}(0) = 0, \text{Si}(\infty) = \frac{\pi}{2}, \text{Si}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$

4. 在 $y = 0$ 附近, $\text{Si}(y)$ 近似于直线。



§ 4.4 系统的物理可实现性/佩利-维纳准则

时域：因果性

$$t < 0, \quad h(t) = 0$$

频域：佩利-维纳准则

(1) 能量可积: $\int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega < \infty$

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln |H(j\omega)||}{1 + \omega^2} d\omega < \infty$

(1) 佩利-维纳准则只是物理可实现系统的必要条件, 而不是充分条件。

(2) 由佩利-维纳准则可以推出以下结论: 对物理可实现的系统来说,

a. 幅度函数 $|H(j\omega)|$ 在某些离散频率处可以是零, 但在有限频带内不能为零。

b. 频响的衰减速率有限制, 应不大于指数衰减速度。

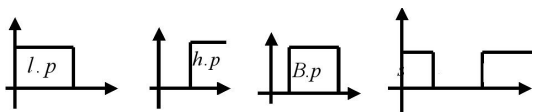
高斯幅频特性是否物理可实现?

$$|H(j\omega)| = e^{-\omega^2}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln |H(j\omega)||}{1 + \omega^2} d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln(e^{-\omega^2})|}{1 + \omega^2} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2}{1 + \omega^2} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\omega^2 + 1}\right) d\omega = \lim_{B \rightarrow \infty} \left(\omega - \operatorname{tg}^{-1} \omega\right) \Big|_{-B}^B \\ &= \lim_{B \rightarrow \infty} 2(B - \operatorname{tg}^{-1} B) = 2 \left(\lim_{B \rightarrow \infty} B - \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

发散的, 物理不可实现

以下系统在物理上都是不能实现的:



理想滤波器具有非因果无穷的冲击响应和不连续的频率特性, 要用稳定的LTI系统来实现这样的特性是不可能的。

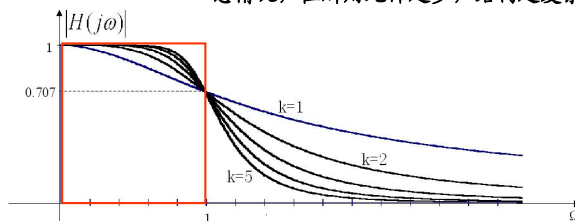
工程上是用有限冲激响应的因果LTI系统或具有连续频率特性的LTI系统来逼近理想特性。在满足一定的误差要求的情况下用可实现函数来逼近理想滤波特性。

巴特沃斯 (Butterworth) 滤波器:

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + B_k \Omega^{2k}}, \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_c}$$

B_k 由通带边界衰减量的要求确定, 一般取 3dB。

k 称为滤波器的阶数, k 越大越接近于理想情况, 但所用元件越多, 结构越复杂。

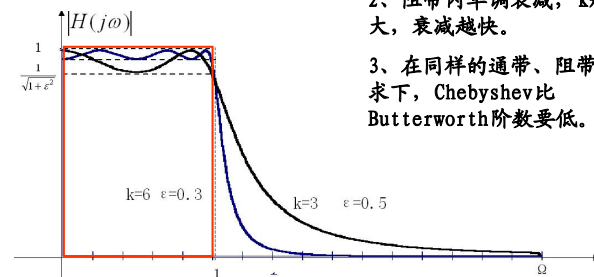


切比雪夫 (Chebyshev) 滤波器:

1、通带内等波纹起伏, k 越大, 起伏越多。

2、阻带内单调衰减, k 越大, 衰减越快。

3、在同样的通带、阻带要求下, Chebyshev 比 Butterworth 阶数要低。





小结

- 求解系统响应的频域分析方法
- 系统的频响函数及其物理意义
- 理想低通滤波器的频响，单位冲激响应
- 调制解调，频分复用
- 信号通过系统不产生失真的条件

课外作业

阅读: 4.1-4.3; 预习: 5.1 - 5.5

作业: 4.5, 4.6