第一周第二次答案

1-2.1

解:

(a)

$$f(t)=\begin{cases}1+\frac{1}{2}t, & -2\le t\le 0\\ 1-\frac{1}{2}t, & 0\le t\le 2\\ 0, & 其他\end{cases}$$

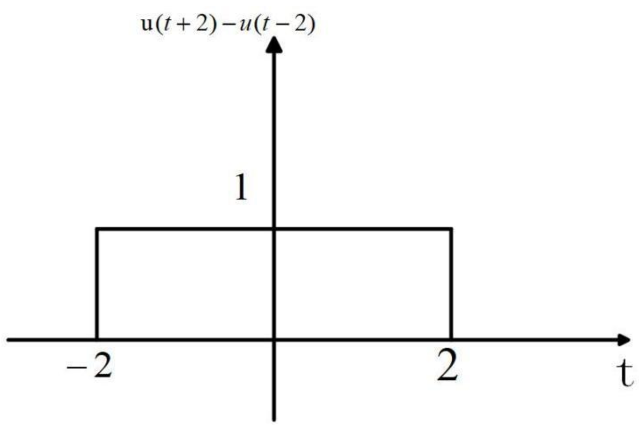
我们可以合并$[-2,0]$和$[0,2]$两个区间的表达式，得到:

$$f(t)=\begin{cases}1-\frac{1}{2}|t|, & -2\le t\le 2\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$u(t+2)-u(t-2)=\begin{cases}1, & -2\le t\le 2\\ 0, & 其他\end{cases}$$

使用单位阶跃信号来表示$f(t)$的取值范围，$f(t)$仅在[-2,2]上有值，因此可以用

$u(t+2)-u(t-2)$表示，如图所示:



$$f(t)=\left(1-\frac{1}{2}|t|\right)[u(t+2)-u(t-2)]$$

(b)

$$f(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & 0\leqslant t<1\\ 2, & 1\leqslant t<2\\ 3, & t\geqslant 2\end{cases}$$

$$u(t)-u(t-1)=\begin{cases}1,\ 0<t\leq 1\\ 0, \qquad 其他\end{cases}$$

$$2[u(t-1)-u(t-2)]=\begin{cases}2,\ 1<t\leq 2\\ 0, \qquad 其他\end{cases}$$

$$3u(t-2)=\begin{cases}3,\ t>2\\ 0, \qquad 其他\end{cases}$$

$$f(t)=[u(t)-u(t-1)]+2[u(t-1)-u(t-2)]+3u(t-2)$$
$$=u(t)+u(t-1)+u(t-2)$$

(c)

$$f(t)=\begin{cases}Esin\left(\frac{\pi}{T}t\right), & 0\leq t\leq T\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$u(t)-u(t-T)=\begin{cases}1,\ 0\leq t\leq T\\ 0, \qquad 其他\end{cases}$$

$$f(t)=Esin\left(\frac{\pi}{T}t\right)[u(t)-u(t-T)]$$

1-2.2

解:

（1）$\delta(t-t_0)$仅在$t=t_0$处有值，其他处为 0，因此

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)u(t-\frac{t_0}{2})dt$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)u(t_0-\frac{t_0}{2})dt$$
$$=u(\frac{t_0}{2})\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)dt$$

$= u(\frac{t_0}{2})$

因此，$t_0 \geq 0$ 时，$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)u(t-\frac{t_0}{2})dt = 1$

$t_0 < 0$ 时，$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)u(t-\frac{t_0}{2})dt = 0$

（2）$\delta(t+2)$仅在$t=-2$ 处有值，其他处为 0，因此

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} (e^{-t}+t)\delta(t+2)dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (e^{2}-2)\delta(t+2)dt \\
&= (e^{2}-2)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t+2)dt \\
&= e^{2}-2
\end{aligned}
$$

（3）$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}[\delta(t)-\delta(t-t_0)]dt$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}\delta(t)dt - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}\delta(t-t_0)dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega 0}\delta(t)dt - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t_0}\delta(t-t_0)dt \\
&= e^{-j\omega 0}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt - e^{-j\omega t_0}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)dt \\
&= 1 - e^{-j\omega t_0}
\end{aligned}
$$

1-2.3

解:

设激励信号$e_1(t)$，$e_2(t)$，

$e_1(t)$的响应信号为$r_1(t)$，$e_2(t)$的响应信号为$r_2(t)$

若$C_1e_1(t)+C_2e_2(t)$响应信号为$C_1r_1(t)+C_2r_2(t)$，则该系统为线性的，否则为非线性的。(C_1，C_2为任意常数)

令$e_2(t)=e_1(t-t_0)$，t_0为常数

若$e_2(t)$的响应信号$r_2(t)=r_1(t-t_0)$，则该系统是时不变的，否则为时变的。

若系统t_1时刻的输出取决于$t_2(t_1<t_2)$时刻的输入，则该系统是非因果的，否则为因果的。

（1）$e_1(t)$的响应信号为$r_1(t)=e_1(t)u(t)$，$e_2(t)$的响应信号为$r_2(t)=e_2(t)u(t)$，

$C_1e_1(t)+C_2e_2(t)$响应信号为：

$[C_1e_1(t)+C_2e_2(t)]u(t)=C_1e_1(t)u(t)+C_2e_2(t)u(t)=C_1r_1(t)+C_2r_2(t)$，

所以该系统是线性的。

$e_2(t)$的响应信号为$r_2(t)=e_2(t)u(t)=e_1(t-t_0)u(t)\neq r_1(t-t_0)$，

$r_1(t-t_0)=e_1(t-t_0)u(t-t_0)$，

所以该系统是时变的。

由$r(t)=e(t)u(t)$可知，响应只与激励的当前值有关（即输出只与当前输入有关），所以系统是因果的。

（2）$e_1(t)$的响应信号为$r_1(t)=e_1(1-t)$，$e_2(t)$的响应信号为$r_2(t)=e_2(1-t)$，

$C_1e_1(t)+C_2e_2(t)$响应信号为：

$$C_1e_1(1-t)+C_2e_2(1-t)=C_1r_1(t)+C_2r_2(t),$$

所以该系统是线性的。

$e_2(t)$的响应信号为$r_2(t)=e_2(1-t)=e_1(1-t-t_0)\neq r_1(t-t_0)$，

$r_1(t-t_0)=e_1(1-t+t_0)$，

所以该系统是时变的。

由$r(t)=e(1-t)$可知，当 $1-t>t$时，即$t<\frac{1}{2}$时，

该系统 t 时刻输出取决于 $1-t$时刻的输入，而 $1-t>t$，所以系统是非因果的。

（3）$e_1(t)$的响应信号为$r_1(t)=e_1{}^2(t)$，$e_2(t)$的响应信号为$r_2(t)=e_2{}^2(t)$，

$C_1e_1(t)+C_2e_2(t)$响应信号为：

$$[C_1(t)e_1(t)+C_2e_2(t)]^2\neq C_1r_1(t)+C_2r_2(t),$$

所以该系统是非线性的。

$e_2(t)$的响应信号为$r_2(t)=e_2{}^2(t)=e_1{}^2(t-t_0)=r_1(t-t_0)$，

$r_1(t-t_0)=e_1{}^2(t-t_0)$，

所以该系统是时不变的。

由$r(t)=e^2(t)$可知，响应只与激励的当前值有关（即输出只与当前输入有关），所以系统是因果的。

（4）$e_1(t)$的响应信号为$r_1(t)=\int_{-\infty}^{5t}e_1(\tau)d\tau$，$e_2(t)$的响应信号为$r_2(t)=\int_{-\infty}^{5t}e_2(\tau)d\tau$，

$C_1e_1(t)+C_2e_2(t)$响应信号为：

$$\int_{-\infty}^{5t}[C_1e_1(\tau)+C_2e_2(\tau)]d\tau=C_1r_1(t)+C_2r_2(t),$$

所以该系统是线性的。

$e_2(t)$ 的 响 应 信 号 为 $r_2(t)=\int_{-\infty}^{5t}e_2(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{5t}e_1(\tau-t_0)d\tau \xrightarrow{x=\tau-t_0}\int_{-\infty}^{5t-t_0}e_1(x)dx\neq r_1(t-t_0)$，

$r_1(t-t_0)=\int_{-\infty}^{5(t-t_0)}e_1(\tau)d\tau$，

所以该系统是时变的。

由$r(t)=\int_{-\infty}^{5t}e(\tau)d\tau$可知，当 $5t>t$时，即$t>0$，该系统t时刻输出取决于$(-\infty,5t]$时间段的输入，而$(t,5t]$时间段大于 t，所以系统是非因果的。