第五周第一次作业答案

5-1.1

解:

（1）

可知$f(t)=\sin(\omega t)\left[u(t)-u\left(t-\frac{T}{2}\right)\right]$

$$=\sin(\omega t)u(t)-\sin(\omega t)u(t-\frac{T}{2})$$

$$=\sin(\omega t)\,u(t)+\sin(\omega t-\pi)\,u\left(t-\frac{T}{2}\right)$$

$$=\sin(\omega t)u(t)+\sin[\omega(t-\frac{T}{2})]u(t-\frac{T}{2})$$

易知上式可借助延时定理

由于$\mathcal{L}[\sin(\omega t)u(t)]=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$，所以根据延时定理可得:

$$\mathcal{L}[\sin[\omega(t-\frac{T}{2})]u(t-\frac{T}{2})]=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}e^{-s\frac{T}{2}}$$

因此，$\mathcal{L}[f(t)]=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}(1+e^{-s\frac{T}{2}})$。

（2）

可将$f(t)$展开为

$$f(t)=\sin(\omega t+\varphi)=\sin(\omega t)\cos\varphi+\cos(\omega t)\sin\varphi$$

易知上式无法应用延时定理，由于

$$\mathcal{L}[\sin(\omega t)]=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$
$$\mathcal{L}[\cos(\omega t)]=\frac{s}{s^2+\omega^2}$$

因此，$\mathcal{L}[f(t)]=\frac{\omega\cos\varphi}{s^2+\omega^2}+\frac{s\sin\varphi}{s^2+\omega^2}=\frac{\omega\cos\varphi+s\sin\varphi}{s^2+\omega^2}$。

5-1.2

解:

$t=0^{-}$时，电路已进入稳定状态，此时R被短路，故全部电压加在r两端，$i_L(0_-)=\frac{E}{r}$;

$t=0^{+}$时，打开开关，r两端的电压等于电源E加上R两端的电压。

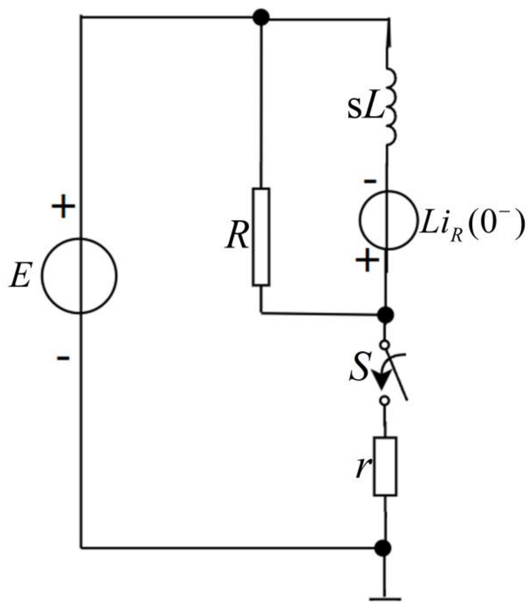
解法一:（s 域角度）

首先写出 RLC 电路中各电路器件的s域表达，设$i_L(t)$为电路电流，则其在 s 域上的表达式为$I_L(s)$，$U_R(s)$、$U_L(s)$分别为R、L上的电压。

$$U_R(s)=RI_L(s)$$

$$U_L(s)=sLI_L(s)-Li_L(0^{-})$$

根据上式可以画出其在 s 域上的电路图，如下图所示:



易知

$$I_L(s)=\frac{Li_L(0^{-})}{sL+R}=\frac{\frac{E}{r}}{s+\frac{R}{L}}$$

可得$i_L(t)=\frac{E}{r}e^{-\frac{R}{L}t}u(t)$，

因此

$$\begin{aligned} v_r(t)=E+Ri_L(t)&=E+\frac{ER}{r}e^{-\frac{R}{L}t}u(t)\\ &=E(1+\frac{R}{r}e^{-\frac{R}{L}t})u(t)\end{aligned}$$

解法二（时域角度）：

可直接列出微分方程：

$$L\frac{di_L(t)}{dt}+Ri_L(t)=0$$

对上式进行拉氏变换，可得

$$L[sI_L(s)-i_L(0_-)]+RI_L(s)=0$$

解得

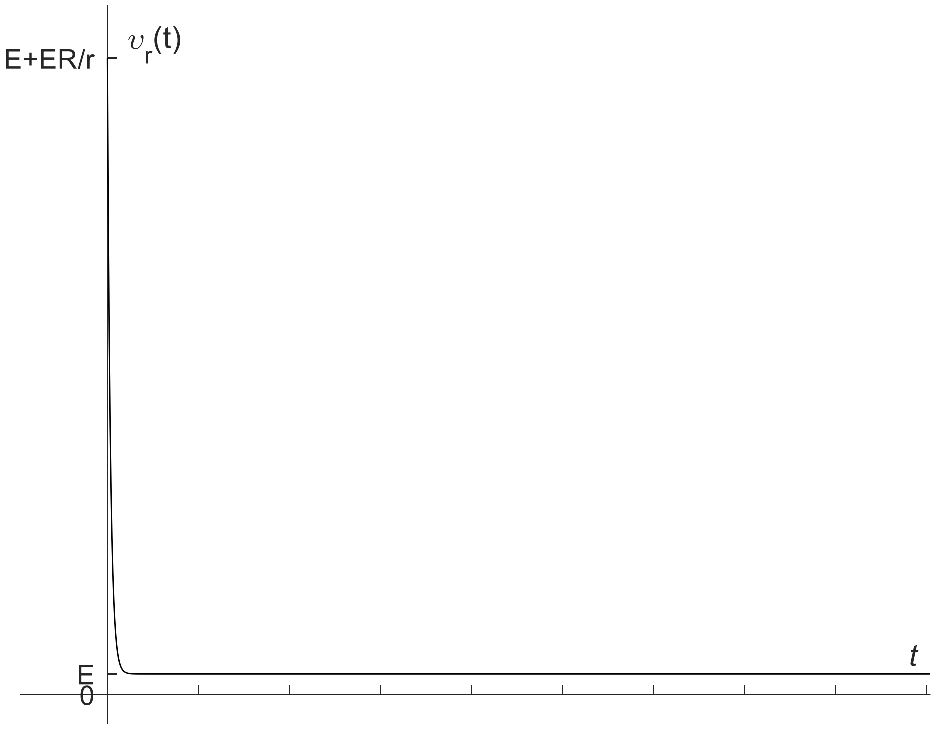
$$I_L(s)=\frac{Li_L(0_-)}{Ls+R}=\frac{\frac{LE}{r}}{Ls+R}=\frac{\frac{E}{r}}{s+\frac{R}{L}}$$

可得$i_L(t)=\frac{E}{r}e^{-\frac{R}{L}t}u(t)$，

因此

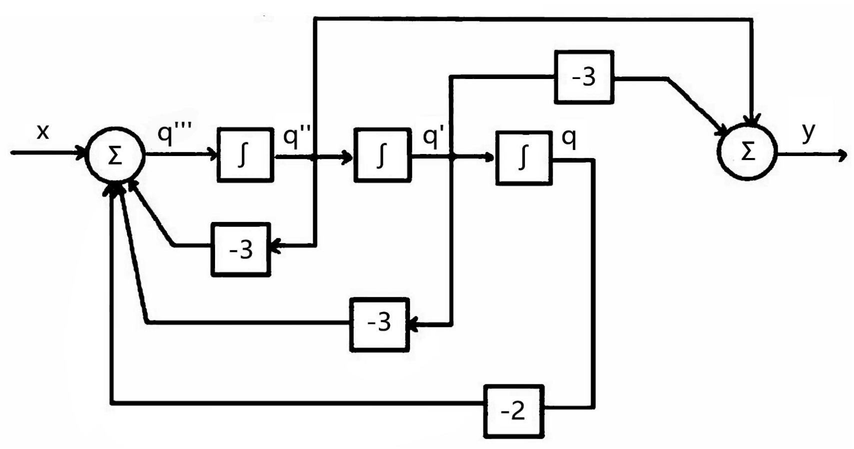
$$\begin{aligned} v_r(t)=E+Ri_L(t)&=E+\frac{ER}{r}e^{-\frac{R}{L}t}u(t)\\ &=E(1+\frac{R}{r}e^{-\frac{R}{L}t})u(t)\end{aligned}$$

根据上式可画出$v_r(t)$的波形图，如下图所示：



可知R越大，在$t=0$时刻$v_r(t)$的值越大，但$v_r(t)$衰减越快。

5-1.3
解：
系统直接模拟框图如下：



5-1.4
解：
a对应的系统函数为

$$H_1(s)=\frac{s^2+3s+2}{s^2+2s+1}=\frac{s+2}{s+1}=1+\frac{1}{s+1}$$

b对应的系统函数为

$$H_2(s)=\frac{s+1}{s^2+2s+1}+1=1+\frac{1}{s+1}$$

易知a和b对应的是同一系统