信号与系统

Lecture 10

第七章:离散时间系统的时域分析

§7.1 引言

§7.3 离散时间系统的描述和模拟

内容：

典型离散信号（序列） (1)

抽样定理：连接连续与离散的桥梁 (2)

离散系统的描述方法：差分方程、模拟框图 (1)

离散系统的时域分析法：经典法，卷积法

零输入响应、单位函数响应和零状态响应 (3)

重点与难点：

常用序列之间的关系

抽样定理

离散信号的卷积和

单位函数响应

本讲内容

- 离散时间信号的描述及有关概念
  - 离散时间信号
  - 序列的分类
  - 离散信号的变换与运算
- 离散时间系统的描述和有关概念
  - 离散时间系统的线性、移不变、因果性
  - 数学描述--差分方程
  - 离散时间系统的模拟

§7.1 引言

一. 基本知识：信号的分类

$$\text{时间}\begin{cases}\text{连续}\\ \text{离散}\end{cases}\qquad\qquad \text{幅度}\begin{cases}\text{连续}\\ \text{量化}\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{模拟信号：时间、幅度均连续}\\ \text{量化信号：时间连续、幅度量化}\end{array}\right\}\text{连续时间信号}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{抽样信号：时间离散、幅度连续}\\ \text{数字信号：时间离散、幅度量化}\end{array}\right\}\text{离散时间信号}$$

连续时间信号是连续变量t的函数。

离散时间信号是离散变量n的函数（或称序列）。

系统的分类

连续时间系统：系统的输入与输出都是连续时间信号。

离散时间系统：系统的输入与输出都是离散时间信号。

线性 —— 非线性

时变 —— 非时变

因果 —— 非因果

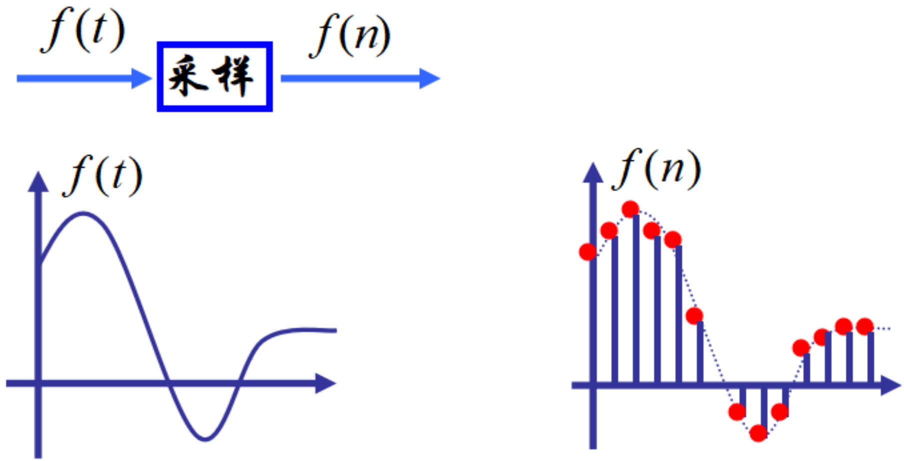
稳定 —— 非稳定

比较:

飘絮时节又逢君

▪ 单位冲激函数 ▪ 单位阶跃信号 ▪ 门函数 ▪ 信号的基本运算 ▪ 奇偶对称、周期性	▪ 单位函数 ▪ 单位阶跃序列 ▪ 矩形序列 ▪ 序列的基本运算 ▪ 奇偶对称、周期性
▪ 傅立叶变换 ▪ 拉普拉斯变换	▪ 离散序列傅立叶变换 ▪ z变换
▪ 线性时不变连续系统 ▪ 微分方程/模拟框图 ▪ 零输入/零状态响应 ▪ 单位冲激响应	▪ 线性移不变离散系统 ▪ 差分方程/模拟框图 ▪ 零输入/零状态响应 ▪ 单位函数响应
▪ 频域分析法 ▪ 复频域分析法 ▪ 卷积定理 ▪ 系统函数	▪ 频域分析法 ▪ z域分析法 ▪ 卷积定理 ▪ 系统函数

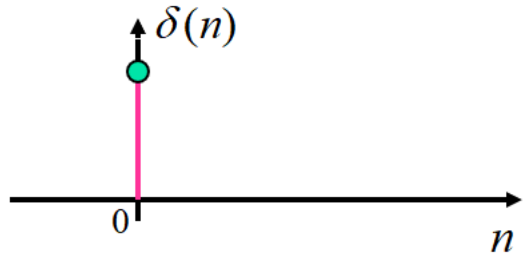
二. 离散时间信号（序列）



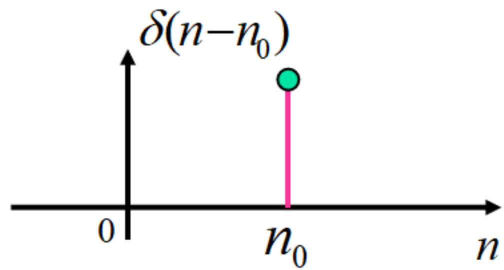
1. 几种常用的离散信号

- 单位函数

$$\delta(n)=\begin{cases}1 & (n=0)\\ 0 & (n\neq 0)\end{cases}$$



$$\delta(n-n_0)=\begin{cases}1 & (n=n_0)\\ 0 & (n\neq n_0)\end{cases}$$



冲激信号的性质

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$$

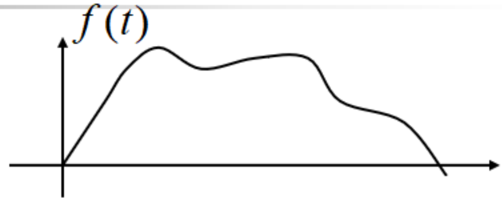
$$f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0)$$

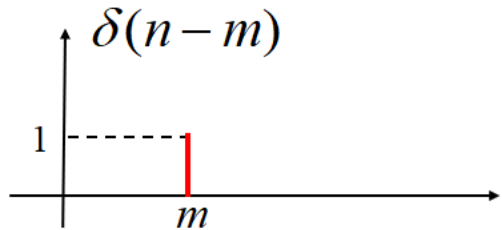
$$f(n)\delta(n) = f(0)\delta(n)$$

$$f(n)\delta(n-n_0) = f(n_0)\delta(n-n_0)$$

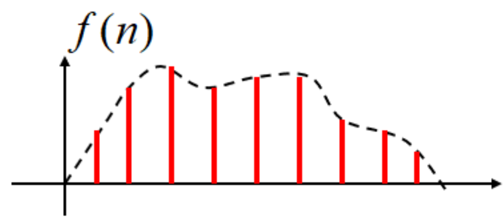
信号的分解

$$f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$



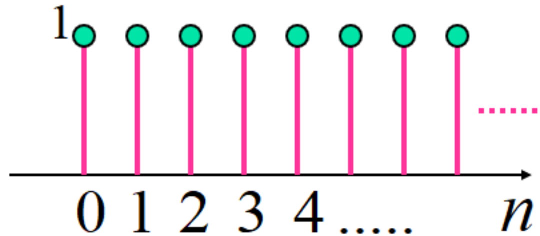


$$f(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m)\delta(n-m)$$



单位阶跃序列

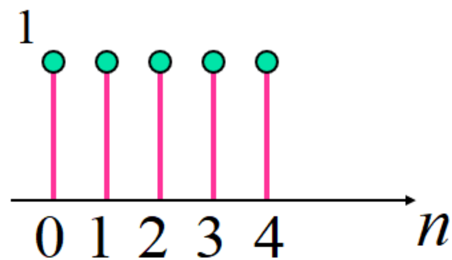
$$u(n)=\begin{cases}1 & (n\ge 0)\\ 0 & (n<0)\end{cases}$$



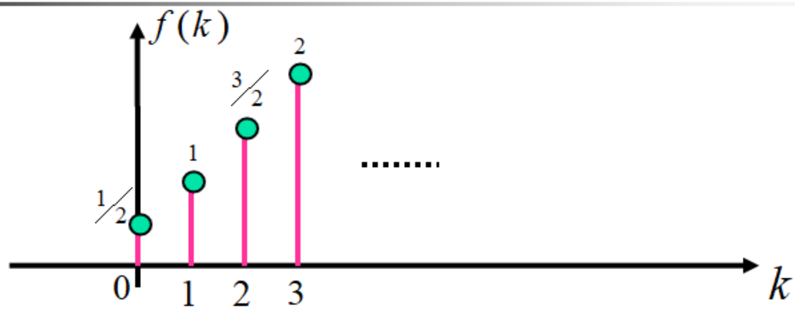
矩形序列

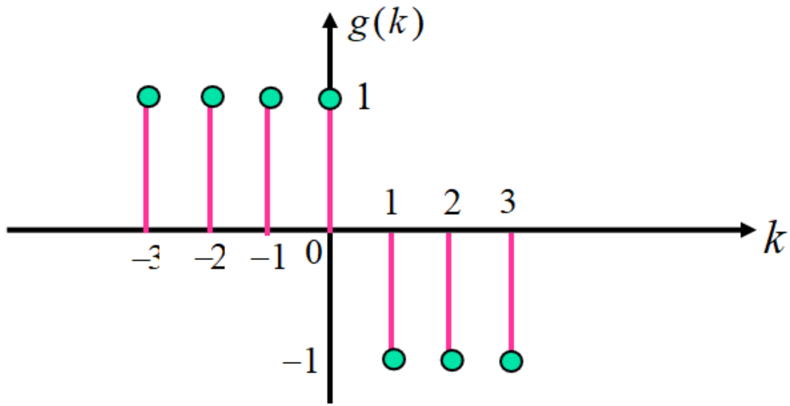
$$G_N(n)=\begin{cases}1 & (0\le n\le N-1)\\ 0 & (n<0\text{ 或 }n\ge N)\end{cases}$$

$$=u(n)-u(n-N)$$



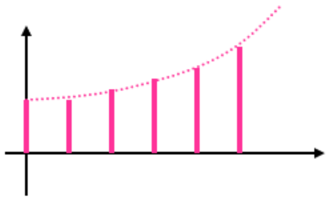
练习：写出图示序列的函数表达式。



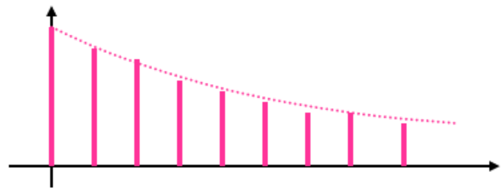


指数序列 $f(n)=a^n u(n)$

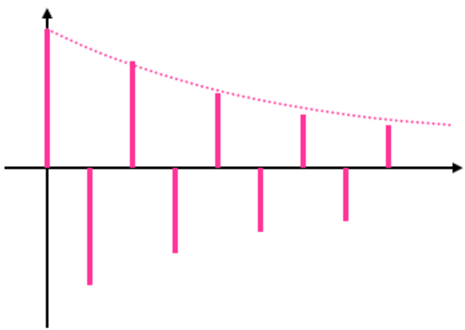
$a>1$



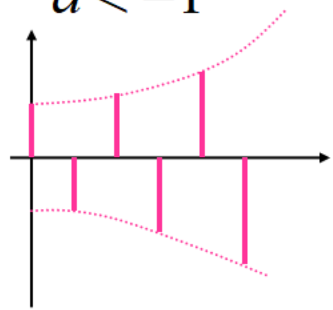
$0<a<1$



$-1<a<0$



$a<-1$

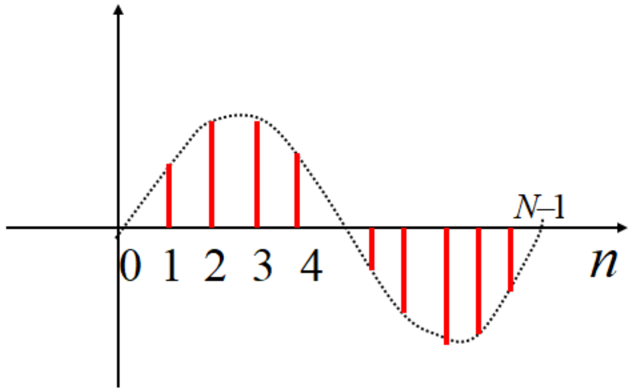


- 正弦序列

$t = nT_s$

$$f(t) = A\sin\Omega_0 t$$

$$\boxed{\begin{aligned} f(n) &= A\sin(\Omega_0 nT_s) \\ &= A\sin(n\omega_0) \end{aligned}}$$



- 复指数序列

$$f(n) = e^{jn\omega_0} = \cos(n\omega_0) + j\sin(n\omega_0)$$

2. 序列的分类

(1) 双边无限序列：f(n)对所有的n取值。

若f(n)=f(-n) ——偶对称

f(n)=－f(-n)——奇对称

f(n)=f(n+N)——周期序列 N为某整数

(2) 有限序列：f(n)只在 $n_1 < n < n_2$ 时有值。

(3) 单边序列：右边序列、左边序列

(4) 有始序列(因果序列，右边序列)：若当n<0时，f(n)=0。

例1 判断下列序列是否为周期序列。

$$1.x(n)=A\cos(\frac{3\pi}{7}n-\frac{\pi}{8})$$

$$2.x(n)=e^{j(\frac{n}{8}-\pi)}$$

$$解:1.\because x(n+N)=A\cos[\frac{3\pi}{7}(n+N)-\frac{\pi}{8}]$$

$$=A\cos(\frac{3\pi}{7}n+\frac{3\pi}{7}N-\frac{\pi}{8})$$

若 $\frac{3\pi}{7}N$ 是 2π 的整数倍，则 $x(n+N)=x(n)$.

满足此条件的最小的 $N=14$.

$x(n)=A\sin(n\omega_0+N\omega_0+\varphi)$，周期为$N=\dfrac{2\pi}{\omega_0}$

$a.$当$N=\dfrac{2\pi}{\omega_0}$为实整数时，如$N=10$，该序列是周期为$\dfrac{2\pi}{\omega_0}$的周期序列。

$b.$若$N=\dfrac{2\pi}{\omega_0}\neq$整数$=$有理数，如$N=7.5$

$N'=N\times 2=15$，则正弦序列仍是周期序列，

但周期大于$\dfrac{2\pi}{\omega_0}$.

$c.$若$N=$无理数，如$N=6\sqrt{2}$，此时为非周期序列.

$$2.x(n+N)=e^{j(\frac{n}{8}+\frac{N}{8}-\pi)}=e^{j(\frac{n}{8}-\pi)}e^{j\frac{N}{8}}$$

$$=x(n)e^{j\frac{N}{8}}$$

$$\text{若}x(n+N)=x(n),\text{则}e^{j\frac{N}{8}}=1,\frac{N}{8}=2k\pi$$

不是周期序列。

3. 离散信号的变换和运算

变换和运算	表达式
信号左移	$y(k) = f(k+n)$
信号右移	$y(k) = f(k-n)$
信号反转	$y(k) = y(-k)$
信号相加	$y(k) = f_1(k) + f_2(k)$
信号相乘	$y(k) = f_1(k) f_2(k)$

信号累加 $y(k)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i)$

向前差分 $y(k)=\Delta f(k)=f(k+1)-f(k)$

向后差分 $y(k)=\nabla f(k)=f(k)-f(k-1)$

信号卷积 $y(k)=f_1(k)*f_2(k)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} f_1(i)f_2(k-i)$

§7.3 离散时间系统的描述与模拟

- 线性移不变离散时间系统
- 离散时间系统的数学模型—差分方程
- 离散时间系统的模拟框图

一. 线性移不变离散时间系统

1. 线性： 若$T[x_1(n)] = y_1(n)$, $T[x_2(n)] = y_2(n)$

则$T[ax_1(n) + bx_2(n)]$

$$= aT[x_1(n)] + bT[x_2(n)] = ay_1(n) + by_2(n)$$

当初始条件不为零时，如果满足(1)分解性；(2)零输入线性,零状态线性。则也称此系统是线性的。

2. 移不变（时不变）：

若$T[x(n)] = y(n)$，则$T[x(n-k)] = y(n-k)$

例2 判断下列系统是否为线性，移不变。

$$1.\ y(n)=2x(n)+3$$

$$2.\ y(n)=x(n)\sin(\frac{2\pi}{7}n+\frac{\pi}{6})$$

答案：

1. 非线性，移不变
2. 线性，移变

例3 判断下列系统是否为线性，移不变的。

$$1.\ y(n) = 0.5x(n) + 0.25nx(n-1)$$

$$2.\ y(n) = 0.5x(n) + 0.25x(n-1)$$

$$3.\ y(n) = 0.5x^2(n) + 0.25nx(n-1)$$

$$4.\ y(n) = 0.5x^2(n) + 0.25x(n-1)$$

二. 离散时间系统的数学描述—差分方程

离散时间系统用差分方程来描述。

差分方程表示了离散序列中相邻几个数据点之间的数学关系。

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n+k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n+r)$$

差分方程的阶:为响应的自变量的序号最高值与最低值之差。

差分方程中序列的自变量n不一定表示时间。

在描述实际的连续时间系统的微分方程中，激励函数导数的阶数m一般常小于响应函数导数的阶数n。

在描述实际的离散时间系统的差分方程中，一般不出现m>n的情况。例如若有

$$i(k) = e(k+1) + e(k)$$

则说明现在的响应决定于未来的激励。

在描述因果离散时间系统的差分方程中，激励函数的最高序号不能大于响应函数的最高序号。

例4 如果在第n个月初向银行存款$x(n)$元，月息为a，每月利息不取出，试用差分方程写出第n月初的本利和$y(n)$。

解：设第n个月初的本利$y(n)$包括下列三个方面：

(1) 第$(n-1)$个月的本金$y(n-1)$

(2) 第$(n-1)$个月的利息$ay(n-1)$

(3) 第n个月的新增存款$x(n)$

故 $y(n)=(1+a)y(n-1)+x(n)$

即 $y(n)-(1+a)y(n-1)=x(n)$

例5 假定每对大兔子每月可以生育一对小兔子，小兔子一个月后长成大兔子。若第一个月只有一对新生小兔子，问第n个月兔子对的数目是多少？（假设兔子不会死亡。）

解:令y(n)表示第n个月兔子对的数目。已知y(0)=0, y(1)=1, 显然：y(2)=1, y(3)=2, y(4)=3, y(5)=5, …

在第n个月时，应有y(n-1)对大兔子，还有y(n-2)对小兔子，于是可以得到如下的方程：

$$y(n)=y(n-1)+y(n-2)$$

$$y(n)-y(n-1)-y(n-2)=0$$

三. 离散时间系统的模拟

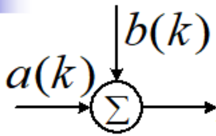
离散系统的数学模型

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n+k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n+r)$$

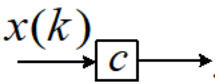
基本运算：相加，系数乘，时延

1. 离散时间系统的基本单元符号



$$y(k)=a(k)+b(k)$$

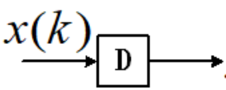
加法器



$$y(k)=cx(k)$$

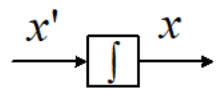
乘法器

连续时间系统：



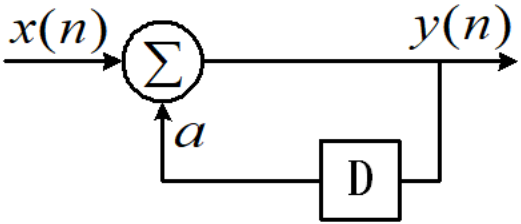
$$y(k)=x(k-1)$$

延时器

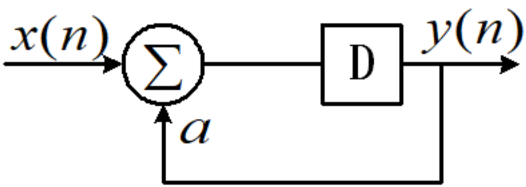


积分器

2. 一阶离散时间系统的模拟框图



$$y(n)-ay(n-1)=x(n)$$



$$y(n+1)-ay(n)=x(n)$$

3. n阶离散时间系统的模拟框图

n阶线性常系数差分方程可以表示为：

$$y(k+n)+a_{n-1}y(k+n-1)+\cdots+a_0y(k)$$
$$=b_me(k+m)+b_{m-1}e(k+m-1)+\cdots+b_0e(k)$$

引入辅助函数 $q(k)$ ，令

$$q(k+n)+a_{n-1}q(k+n-1)+\cdots+a_0q(k)=e(k)$$

$$y(k)=b_mq(k+m)+b_{m-1}q(k+m-1)+\cdots+b_0q(k)$$

与n阶微分方程类似，可以画出n阶差分方程的模拟框图。

例6 画出下列系统的模拟框图。

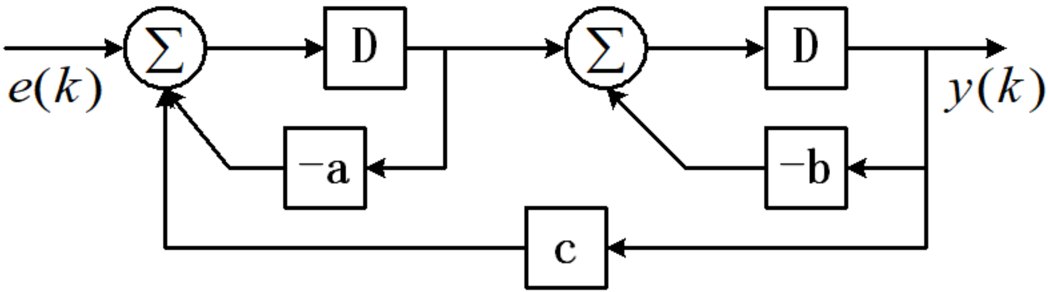
$$(1)\, y(k+1)+2y(k)+3y(k-1)=e(k)$$

$$(2)\, y(k+1)+2y(k)+3y(k-1)=e(k+1)$$

$$(3)\, y(k+1)+2y(k)+3y(k-1)=e(k-1)$$

$$(4)\, y(k+2)+2y(k+1)+3y(k)=e(k+1)$$

例7 列出图示系统的差分方程，指出其阶次。



答案：

$$y(k+2)+(a+b)y(k+1)+(ab-c)y(k)=e(k)$$

小结

- 典型离散时间序列
- 线性移不变离散时间系统
- 差分方程
- 离散时间系统的模拟框图

课外作业

阅读：7.1,7.3节；预习：7.2节

作业： 7.13 7.15