信号与系统

Lecture 9

第五章:连续时间系统的复频域分析（续）

§5.6 拉普拉斯变换的基本性质

§5.7 线性系统的拉普拉斯变换分析法

§5.9 线性系统的模拟

傅氏变换的基本性质

性质名称	时域	频域
线性	$a_1 f_1(t)+a_2 f_2(t)$	$a_1 F_1(\mathrm{j}\omega)+a_2 F_2(\mathrm{j}\omega)$
时移	$f(t-t_0)$	$F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}$
频移	$f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}$	$F(\mathrm{j}(\omega-\omega_0))$
调制	$f(t)\cos\omega_0 t$	$\frac{1}{2}[F(\mathrm{j}(\omega-\omega_0))+F(\mathrm{j}(\omega+\omega_0))]$
	$f(t)\sin\omega_0 t$	$\frac{1}{2\mathrm{j}}[F(\mathrm{j}(\omega-\omega_0))-F(\mathrm{j}(\omega+\omega_0))]$
尺度变换	$f(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}F\left(\mathrm{j}\frac{\omega}{a}\right)$
对称性	$F(\mathrm{j}t)$	$2\pi f(-\omega)$
卷积	$f_1(t)*f_2(t)$	$F_1(\mathrm{j}\omega)\cdot F_2(\mathrm{j}\omega)$
相乘	$f_1(t)\cdot f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi}F_1(\mathrm{j}\omega)*F_2(\mathrm{j}\omega)$
时域微分	$\frac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n}$	$(\mathrm{j}\omega)^n F(\mathrm{j}\omega)$
时域积分	$\int_{-\infty}^{t} f(x)\mathrm{d}x$	$\pi F(0)\delta(\omega)+\frac{F(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{j}\omega}$
频域微分	$(-\mathrm{j}t)^n f(t)$	$\frac{\mathrm{d}^n F(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{d}\omega^n}$
频域积分	$\pi f(0)\delta(t)+\frac{f(t)}{-\mathrm{j}t}$	$\int_{-\infty}^{\omega} F(\mathrm{j}\eta)\,\mathrm{d}\eta$
帕塞瓦尔等式	$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lvert F(\mathrm{j}\omega)\rvert^2\,\mathrm{d}\omega$

拉氏变换的基本性质

序号	性质名称	信　号	拉普拉斯变换
0	定义	$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)e^{st}\,ds,\ t\geq 0$	$F(s)=\int_{0_-}^{\infty}f(t)e^{-st}dt,\ \sigma>\sigma_0$
1	线性	$a_1f_1(t)+a_2f_2(t)$	$a_1F_1(s)+a_2F_2(s),\ \sigma>\max(\sigma_1,\sigma_2)$
2	尺度变换	$f(at),\ a>0$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right),\ \sigma>a\sigma_0$
3	时移	$f(t-t_0)\varepsilon(t-t_0),\ t_0>0$	$e^{-st_0}F(s),\ \sigma>\sigma_0$
4	复频移	$e^{s_a t}f(t)$	$F(s-s_a),\ \sigma>\sigma_a+\sigma_0$
5	时域微分	$f^{(1)}(t)=\frac{df(t)}{dt}$	$sF(s)-f(0^-),\ \sigma>\sigma_0$
		$f^{(n)}(t)=\frac{d^nf(t)}{dt^n}$	$s^nF(s)-\sum_{m=0}^{n-1}s^{n-1-m}f^{(m)}(0^-)$
6	时域积分	$\left(\int_{0_-}^{t}\right)^n f(\tau)\,d\tau$	$\frac{1}{s^n}F(s),\ \sigma>\max(\sigma_0,\ 0)$
		$f^{(-1)}(t)=\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\,d\tau$	$\frac{1}{s}F(s)+\frac{1}{s}f^{(-1)}(0^-)$
		$f^{(-n)}(t)=\left(\int_{-\infty}^{t}\right)^n f(\tau)\,d\tau$	$\frac{1}{s^n}F(s)+\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{s^{n-m+1}}f^{(-m)}(0^-)$
7	时域卷积	$f_1(t)*f_2(t)$ $f_1(t)$、$f_2(t)$为因果信号	$F_1(s)F_2(s),\ \sigma>\max(\sigma_1,\sigma_2)$
8	时域相乘	$f_1(t)f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}F_1(\lambda)F_2(s-\lambda)\,d\lambda$ $\sigma>\sigma_1+\sigma_2,\ \sigma_1<c<\sigma-\sigma_2$
9	S 域微分	$(-t)^nf(t)$	$F^{(n)}(s),\ \sigma>\sigma_0$
10	S 域积分	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_{s}^{\infty}F(\lambda)\,d\lambda,\ \sigma>\sigma_0$
11	初值定理	$f(0^+)=\lim_{s\to\infty}sF(s)$	
12	终值定理	$f(\infty)=\lim_{s\to 0}sF(s)$，$s=0$ 在收敛域内	

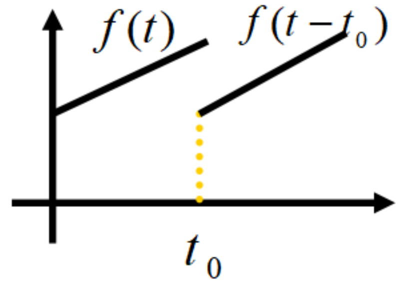
重点

- 拉普拉斯变换的基本性质
  - 时移特性
  - 时域的微分和积分特性
  - 卷积定理
  - 初值和终值定理

时移

设 $f(t) \leftrightarrow F(s)$, 则

$$f(t-t_0)u(t-t_0) \leftrightarrow e^{-st_0}F(s) \quad t_0 > 0$$

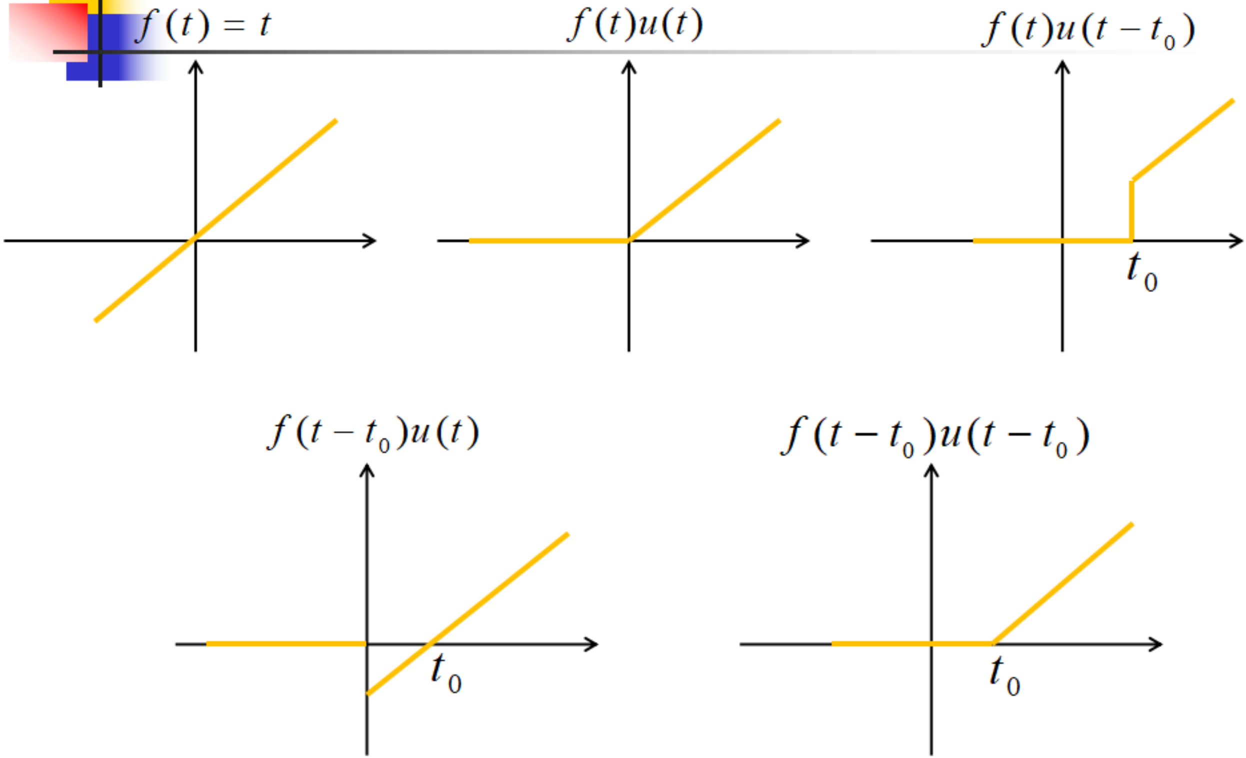


傅里叶变换的时移性质

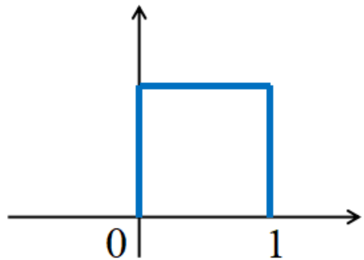
若 : $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$

则 : $f(t-t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0}F(j\omega)$

说明：对于有始函数，$f(t-t_0)u(t-t_0) = f(t-t_0), \quad t_0 > 0$


$f(t)=t$
$f(t)u(t)$
$f(t)u(t-t_0)$
t_0
$f(t-t_0)u(t)$
t_0
$f(t-t_0)u(t-t_0)$
t_0

思考：如下门函数的拉普拉斯变换是什么？

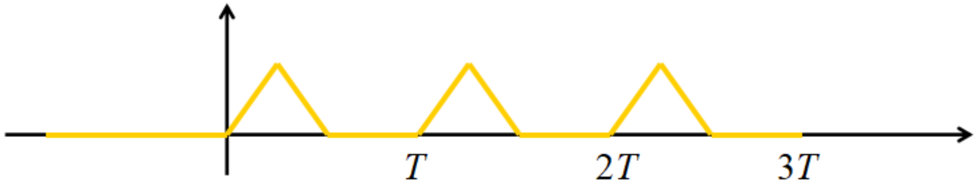


$$f(t)=u(t)-u(t-1)$$

$$F(s)=?$$

时移特性的应用 P223

有始周期函数：t>0时呈现周期性，t<0时函数值为零。



$$f(t)=f_1(t)+f_2(t)+f_3(t)+\ldots$$

$$=f_1(t)+f_1(t-T)u(t-T)+f_1(t-2T)u(t-2T)+\ldots$$

有始周期函数的拉氏变换定理：若有始周期函数$f(t)$的第一个周期的拉氏变换为$F_1(s)$，则函数$f(t)$的拉氏变换为

$$F(s)=\frac{F_1(s)}{1-e^{-sT}}$$

$$f_1(t) \overset{LT}{\Leftrightarrow} F_1(s)$$

第一周期的拉氏变换

$$f_1(t-nT)u(t-nT) \Leftrightarrow e^{-snT}F_1(s)$$

利用时移特性

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(t-nT)u(t-nT) \Leftrightarrow F_1(s)\sum_{n=0}^{\infty} e^{-snT} = \frac{F_1(s)}{1-e^{-sT}}$$

利用无穷递减等比级数求和

时域微分积分

1. 时域微分特性

若 $f(t) \leftrightarrow F(s)$, 则

$$\frac{df(t)}{dt} \leftrightarrow sF(s) - f(0^-)$$

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} \leftrightarrow s^2F(s) - sf(0^-) - f'(0^-)$$

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \leftrightarrow s^nF(s) - s^{n-1}f(0^-) - s^{n-2}f'(0^-) - \cdots - f^{n-1}(0^-)$$

2. 时域积分特性

$f(t) \leftrightarrow F(s)$ ，则

$$\int_0^t f(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{F(s)}{s}$$

0^-

$$\int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{F(s)}{s} + \frac{\int_{-\infty}^{0} f(\tau)d\tau}{s}$$

$$\int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{F(j\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)$$

卷积定理

设 $f_i(t) \leftrightarrow F_i(s)$ ，则

$$f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(s)F_2(s)$$

$$f_1(t)f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi j}F_1(s) * F_2(s)$$

其中 $F_1(s) * F_2(s) = \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F_1(z)F_2(s-z)dz$

初值和终值定理

1. 初值定理：若 $f(t)$ 及其导数存在拉氏变换，且 $f(t) \leftrightarrow F(s)$ ，则

$$f(0^+) = \lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

2. 终值定理：若 $f(t)$ 及其导数可以进行拉氏变换且 $\lim_{t\to\infty} f(t)$ 存在，则

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

练习1：求下列信号的拉普拉斯变换。

(1) $e^{-2t}u(t-1)$ (2) $e^{-2(t-1)}u(t)$

(3) $e^{-2(t-1)}u(t-1)$ (4) $(t-1)e^{-2(t-1)}u(t-1)$

答案：

(1) $\dfrac{e^{-(s+2)}}{s+2}$ (2) $\dfrac{e^{2}}{s+2}$

(3) $\dfrac{e^{-s}}{s+2}$ (4) $\dfrac{e^{-s}}{(s+2)^{2}}$

练习2：求下列信号的拉普拉斯反变换。

(1) $\dfrac{1+e^{-s}+e^{-2s}}{s+1}$ (2) $\dfrac{2+e^{-(s-1)}}{(s-1)^2+4}$

(3) $\left(\dfrac{1-e^{-s}}{s}\right)^2$

答案：

(1) $e^{-t}u(t)+e^{-(t-1)}u(t-1)+e^{-(t-2)}u(t-2)$

(2) $e^{t}\sin(2t)u(t)+\dfrac{1}{2}e^{t}\sin[2(t-1)]u(t-1)$

(3) $tu(t)-2(t-1)u(t-1)+(t-2)u(t-2)$

§5.7 线性系统的拉普拉斯变换分析法

1. 用变换的观点求响应

- 可以一次得到全响应
- 也可以分别求零输入/零状态响应

2. 系统的复频域表征函数：系统函数

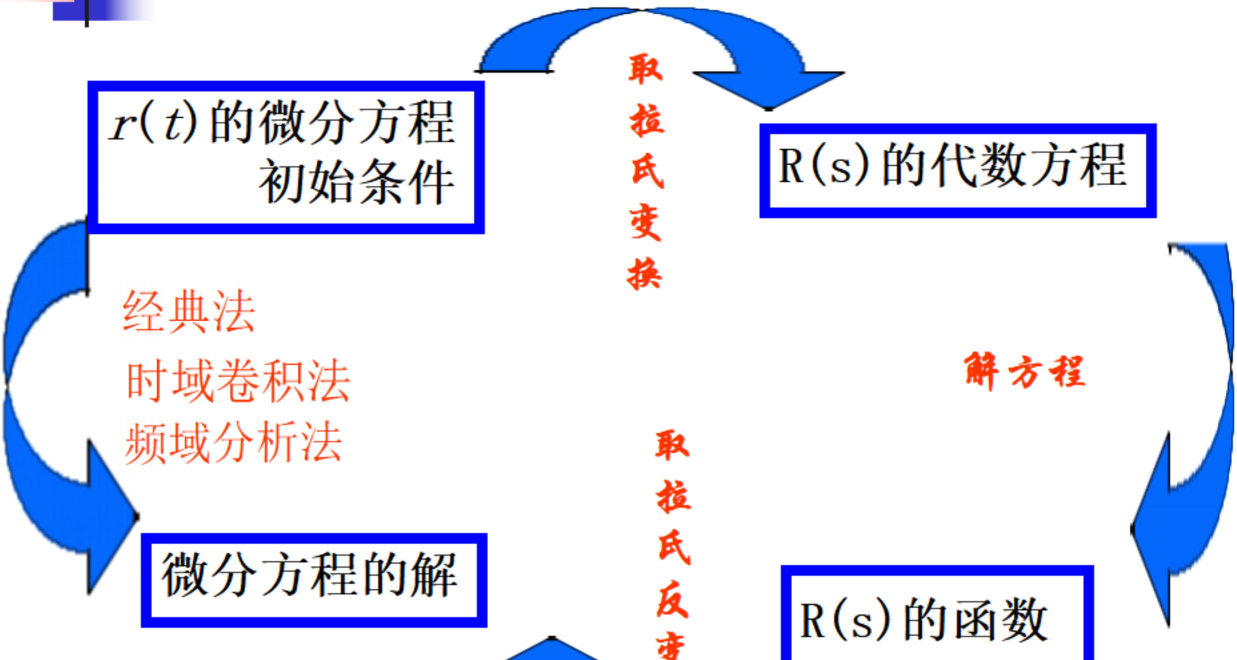
$$\longrightarrow \boxed{\text{LTI}} \longrightarrow$$

时域 $h(t)$

频域 $H(j\omega)$

复频域 ？

1. 用拉氏变换求解微分方程的一般步骤



可以是零输入/零状态响应，
也可以是全响应

例1. 求下列系统的响应。

$$\frac{d^2r(t)}{dt^2}+3\frac{dr(t)}{dt}+2r(t)=e(t)$$

$$e(t)=u(t),\quad r(0)=1,r'(0)=2$$

解：设 $r(t)\leftrightarrow R(s)$,$e(t)\leftrightarrow E(s)$，两边同时作拉普拉斯变换：

$$[s^2R(s)-sr(0^-)-r'(0^-)]+3[sR(s)-r(0^-)]+2R(s)=E(s)$$

$$\Rightarrow R(s)=\frac{\frac{1}{s}+s+5}{s^2+3s+2}=\frac{1}{2}\frac{1}{s}+3\frac{1}{s+1}-\frac{5}{2}\frac{1}{s+2}$$

$$\Rightarrow r(t)=\frac{1}{2}u(t)+3e^{-t}u(t)-\frac{5}{2}e^{-2t}u(t)$$

一个有趣的现象

$$\frac{d^2 r(t)}{dt^2} + 3\frac{dr(t)}{dt} + 2r(t) = e(t)$$

已知激励，求零状态响应。

$$[s^2 R_{zs}(s) - s r_{zs}(0^-) - r_{zs}'(0^-)] + 3[sR_{zs}(s) - r_{zs}(0^-)] + 2R_{zs}(s) = E(s)$$

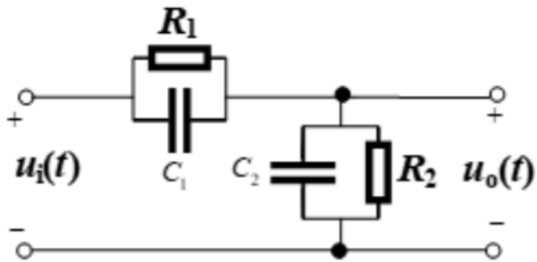
$$\Rightarrow R_{zs}(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} E(s)$$

这个系统的转移算子是

$$H(p) = \frac{1}{p^2 + 3p + 2}$$

补充：电路的s域模型

列写微分方程取拉氏变换的方法分析电路比较方便，但是当电路结构复杂时（支路和结点较多），列写微分方程比较烦琐，可考虑简化。



模仿正弦稳态分析中的相量法，先对元件进行变换，再把变换后的s域电压/电流用kvl/kcl联系起来。

为此，给出s域元件模型。

R、L、C元件的时域关系为：

$$u_R(t) = R i_R(t) \quad \Longrightarrow \quad U_R(s) = RI_R(s)$$

$$u_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} \quad \Longrightarrow \quad U_L(s) = sLI_L(s) - Li_L(0)$$

$$u_C(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C(\tau)d\tau \quad \Longrightarrow \quad U_C(s) = \frac{1}{sC}I_C(s) + \frac{1}{s}u_C(0)$$

s域元件模型

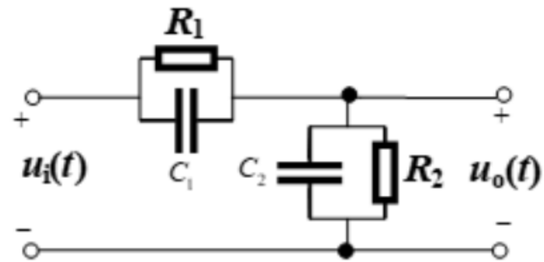
$$U_R(s) = RI_R(s) \qquad I_R(s) = \frac{1}{R}U_R(s)$$

$$U_L(s) = sLI_L(s) \qquad I_L(s) = \frac{1}{sL}U_L(s)$$

$$U_C(s) = \frac{1}{sC}I_C(s) \qquad I_C(s) = sCU_C(s)$$

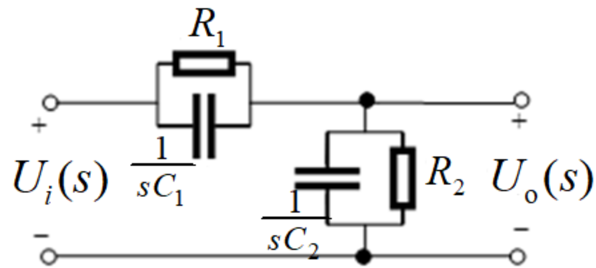
宽带分压器电路如右图所示。试求系统函数(电压传输比)。

$$H(s)=\frac{U_o(s)}{U_i(s)}$$



$$H(s)=\frac{U_o(s)}{U_i(s)}$$

$$=\frac{\dfrac{\frac{R_2}{sC_2}}{R_2+\frac{1}{sC_2}}}{\dfrac{\frac{R_1}{sC_1}}{R_1+\frac{1}{sC_1}}+\dfrac{\frac{R_2}{sC_2}}{R_2+\frac{1}{sC_2}}}$$



2. 系统函数 H(s)

联系s域中零状态响应与激励间的运算关系称为s域系统函数，简称为系统函数或系统转移函数H(s)。其定义如下：

$$H(s)=\frac{R_{zs}(s)}{E(s)}$$

$$H(j\omega)\Longleftrightarrow h(t)\Longleftrightarrow H(s)\Longleftrightarrow H(p)$$

$$r''(t)+5r'(t)+4r(t)=2e'(t)+e(t)$$

$$H(s)=?$$

2. 系统函数 H(s)

系统函数H(s)是系统的复频域表征函数。

$$H(s)=\frac{R_{zs}(s)}{E(s)} \Rightarrow R_{zs}(s)=E(s)H(s)$$

$$H(s) \begin{cases} \Rightarrow h(t) & \text{系统的时域特性：因果性、稳定性} \\ \Rightarrow H(j\omega) & \text{系统的滤波特性、频响曲线} \end{cases}$$

例5-14（P261） 已知输入 $e(t)=e^{-t}u(t)$, 初始条件为 $r(0)=2, r'(0)=1$，系统转移函数为:

$$H(s)=\frac{s+5}{s^2+5s+6}$$

求系统的响应r(t), 并标出受迫分量与自然分量；瞬态分量与稳态分量。

解：(1)求零输入响应。由系统转移函数的表达式可知系统的特征方程为

$$s^2+5s+6=0$$

有两个单根：$s_1=-2, s_2=-3$

所以

$$r_{zi}(t) = K_1 e^{-2t} + K_2 e^{-3t}$$

其中的待定系数由初始条件确定：

$$r(0) = K_1 + K_2 = 2$$

$$r'(0) = (-2K_1) + (-3K_2) = 1$$

得 $K_1 = 7, K_2 = -5$． 所以

$$r_{zi}(t) = \underbrace{7e^{-2t} - 5e^{-3t}}_{\text{自然分量}}$$

(2) 求零状态响应。因为$e(t)=e^{-t}u(t)$，故 $E(s)=\dfrac{1}{s+1}$

$$R_{zs}(s)=H(s)E(s)=\frac{s+5}{s^2+5s+6}\frac{1}{s+1}$$

$$=\frac{2}{s+1}-\frac{3}{s+2}+\frac{1}{s+3}$$

故 $r_{zs}(t)=\underbrace{2e^{-t}u(t)}_{\text{受迫分量}}-\underbrace{3e^{-2t}u(t)+e^{-3t}}_{\text{自然分量}}u(t)$

$$r(t)=\underbrace{2e^{-t}u(t)}_{\text{受迫分量}}+(\underbrace{4e^{-2t}-4e^{-3t}}_{\text{自然分量}})u(t)$$

瞬态分量

§5.9 线性系统的模拟

连续时间系统的数学模型

$$\frac{d^n r(t)}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}r(t)}{dt^{n-1}}+\ldots+a_{n-1}\frac{dr(t)}{dt}+a_n r(t)$$

$$=b_0\frac{d^m e(t)}{dt^m}+b_1\frac{d^{m-1}e(t)}{dt^{m-1}}+\ldots+b_{m-1}\frac{de(t)}{dt}+b_m e(t)$$

基本运算：相加，系数乘，各阶导数

1. 基本单元符号

$a(t),\ b(t) \to \Sigma \to y(t)=a(t)+b(t)$

加法器

$A(s),\ B(s) \to \Sigma \to Y(s)=A(s)+B(s)$

加法器

$x(t) \to \boxed{c} \to y(t)=cx(t)$

标量乘法器

$X(s) \to \boxed{c} \to Y(s)=cX(s)$

标量乘法器

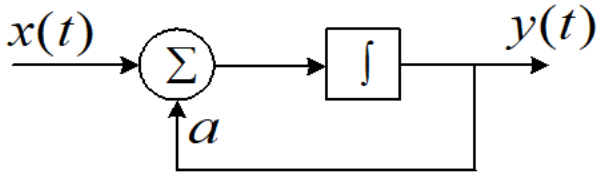
$x(t) \to \boxed{\int} \to y(t)=\int_0^t x(\tau)d\tau$

积分器

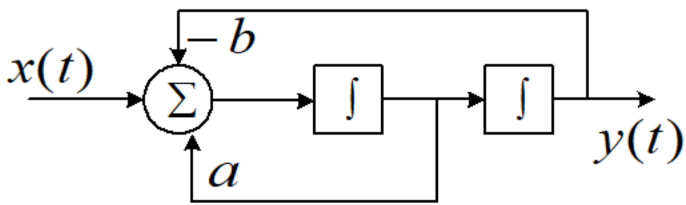
$X(s) \to \boxed{\frac{1}{s}} \to Y(s)=\dfrac{X(s)}{s}$

积分器

2. 连续时间系统的直接模拟框图

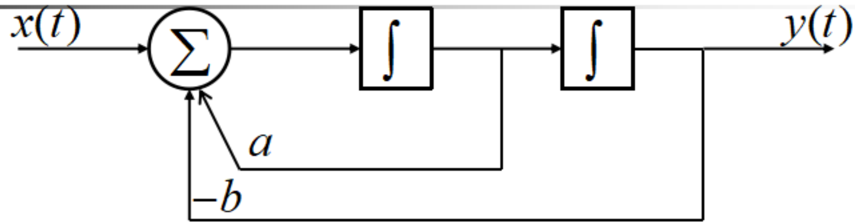


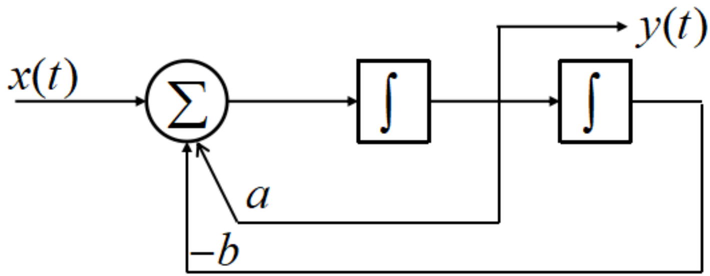
$$y'(t) - ay(t) = x(t)$$

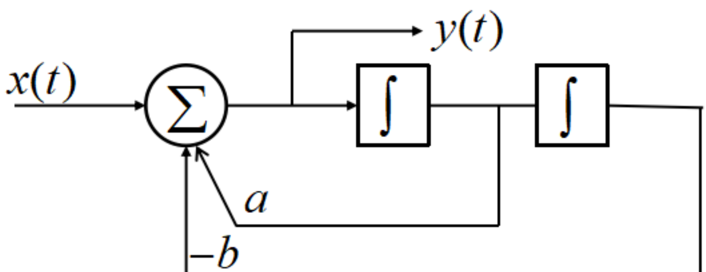


$$y''(t) - ay'(t) + by(t) = x(t)$$

$$y''(t) - ay'(t) + by(t) = x(t)$$







例3 画如下方程的模拟框图。

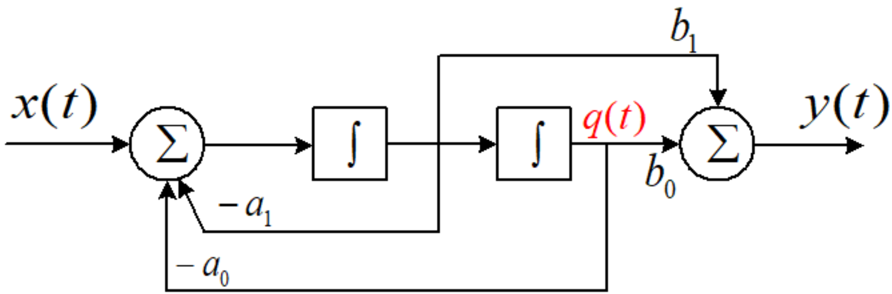
$$y''(t)+a_1y'(t)+a_0y(t)=b_1x'(t)+b_0x(t)$$

方法：引入一个新的函数 $q(t)$ 。令

$$q''(t)+a_1q'(t)+a_0q(t)=x(t)$$

将上式代入方程，可求得

$$y(t)=b_1q'(t)+b_0q(t)$$



小结

- 拉普拉斯变换的性质要熟记
- 拉普拉斯变换法可一次性地得到系统的全解。
- 线性系统的模拟框图与微分方程的相互转换。

课外作业

阅读:5.7，5.9；预习:7.1，7.3

作业:5.15(1)　5.24　5.30(2)