信号与系统

Lecture 15

第八章:离散时间系统的变换域分析（续）

§8.6 离散时间系统的z变换分析法

复习

- 反z变换
- z变换与拉普拉斯变换的关系

本讲内容

- 用z变换求解差分方程
- 离散时间系统的系统函数
- 系统函数极点分布对系统时域特性的影响
  - 单位函数响应的增长/衰减特性
  - 系统的稳定性

§8.6 用单边z变换解差分方程

解差分方程的方法：

（1）时域经典法

（2）卷积和解法

（3）z变换解法

***本节给定的系统一般是因果系统，激励和响应是因果信号，所以本节只使用单边z变换，求反z变换时按因果（右边）序列来求。

复习z变换的位移特性

若x(n)分别是双边序列、单边左移序列、单边右移序列时，它们的z变换是不同的：

（1）双边序列的双边z变换

$$ZT[x(n)] = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

$$ZT[x(n-m)] = z^{-m} X(z)$$

$$ZT[x(n+m)] = z^{m} X(z)$$

（2）单边序列左移的单边z变换

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

$$ZT[x(n+m)]=\sum_{n=0}^{\infty}x(n+m)z^{-n}$$

$$=z^{m}\sum_{n=0}^{\infty}x(n+m)z^{-(n+m)}=z^{m}\sum_{k=m}^{\infty}x(k)z^{-k}$$

$$=z^{m}\left[\sum_{k=0}^{\infty}x(k)z^{-k}-\sum_{k=0}^{m-1}x(k)z^{-k}\right]$$

$$=z^{m}\left[X(z)-\sum_{k=0}^{m-1}x(k)z^{-k}\right]$$

（3）单边序列右移的单边z变换

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

$$ZT[x(n-m)]=\sum_{n=0}^{\infty}x(n-m)z^{-n}$$

$$=z^{-m}\sum_{n=0}^{\infty}x(n-m)z^{-(n-m)}=z^{-m}\sum_{k=-m}^{\infty}x(k)z^{-k}$$

$$=z^{-m}\left[\sum_{k=0}^{\infty}x(k)z^{-k}+\sum_{k=-m}^{-1}x(k)z^{-k}\right]$$

$$=z^{-m}\left[X(z)+\sum_{k=-m}^{-1}x(k)z^{-k}\right]$$

（4）对于因果序列x(n)

$$ZT[x(n-m)u(n)] = z^{-m}X(z)$$

$$ZT[x(n+m)u(n)] = z^{m}\left[X(z) - \sum_{k=0}^{m-1} x(k)z^{-k}\right]$$

例如：$ZT[x(n+1)u(n)] = z[X(z) - x(0)]$

$$ZT[x(n+2)u(n)] = z^{2}\left[X(z) - x(0) - x(1)z^{-1}\right]$$

回顾：拉普拉斯变换的时域微分特性

若 $f(t) \leftrightarrow F(s)$，则

$$\frac{df(t)}{dt} \leftrightarrow sF(s) - f(0^-)$$

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} \leftrightarrow s^2F(s) - sf(0^-) - f'(0^-)$$

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \leftrightarrow s^nF(s) - s^{n-1}f(0^-) - s^{n-2}f'(0^-) - \cdots - f^{n-1}(0^-)$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y(k+i) = \sum_{l=0}^{m} b_l e(k+l)$$

求解差分方程，要注意初始条件的给法。

$$y_{zi}(l),\quad l = 0,1,\ldots,n-1$$

零输入响应、零状态响应要分开求。

$$y(l),\quad l = 0,1,\ldots,n-1$$

可以一次求出全响应。

初始条件为：$y_{zi}(l)$，$l=0,1,\ldots,n-1$

（1） 零输入响应

齐次差分方程：$\sum_{i=0}^{n} a_i y_{zi}(k+i)=0$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i[z^i(Y_{zi}(z)-\sum_{l=0}^{i-1} y_{zi}(l)z^{-l})]=0$$

$$\sum_{i=0}^{n}[a_i z^i]Y_{zi}(z)=\sum_{i=0}^{n}[a_i(\sum_{l=0}^{i-1} y_{zi}(l)z^{-l+i})]$$

整理得

$$Y_{zi}(z)=\frac{\sum_{i=0}^{n}[a_i(\sum_{l=0}^{i-1} y_{zi}(l)z^{-l+i})]}{\sum_{i=0}^{n} a_i z^i}$$

(2) 零状态响应

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y(k+i) = \sum_{l=0}^{m} b_l e(k+l)$$

$$H(S) = \frac{b_m S^m + b_{m-1} S^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n S^n + a_{n-1} S^{n-1} + \cdots + a_0}$$

转移算子

由第7章我们知道：

$$y_{zs}(k) = h(k) * e(k)$$

由卷积定理，有

$$Y_{zs}(z) = H(z)E(z)$$

系统函数 H(z)

联系s域中零状态响应与激励间的运算关系称为s域系统函数，简称为系统函数。其定义如下：

$$H(s)=\frac{R_{zs}(s)}{E(s)} \qquad H(s)\Longleftrightarrow\begin{cases} h(t) \\ H(p) \\ H(j\omega) \end{cases}$$

类似地，联系z域中零状态响应与激励间的运算关系称为z域系统函数，简称为系统函数。其定义如下：

$$H(z)=\frac{R_{zs}(z)}{E(z)} \qquad H(z)\Longleftrightarrow\begin{cases} h(n) \\ H(S) \\ H(e^{j\omega}) \end{cases}$$

离散时间系统的系统函数—推导参见P375

$$H(S)=\frac{b_m S^m+b_{m-1}S^{m-1}+\cdots+b_0}{a_n S^n+a_{n-1}S^{n-1}+\cdots+a_0}$$

转移算子

$$H(z)=\frac{\sum_{l=0}^{m} b_l z^l}{\sum_{i=0}^{n} a_i z^i}=\frac{b_m z^m+b_{m-1}z^{m-1}+\cdots+b_0}{a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0}$$

系统函数

$$\sum_{i=0}^{n} a_i z^i$$

特征多项式

$$Y_{zs}(z)=H(z)E(z)=\frac{\sum_{i=0}^{m}b_i z^i}{\sum_{i=0}^{n}a_i z^i}E(z)$$

从而得到全响应的z变换：

$$Y(z)=\frac{(\sum_{i=0}^{m}b_i z^i)E(z)+\sum_{i=0}^{n}[a_i(\sum_{l=0}^{i-1}y_{zi}(l)z^{-l+i})]}{\sum_{i=0}^{n}a_i z^i}$$

初始条件为：$y(l)$，$l=0,1,\ldots,n-1$

可以通过一次z变换得到全响应。

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y(k+i) = \sum_{i=0}^{m} b_i e(k+i)$$

方程两边作单边z变换，得到

$$\sum_{i=0}^{n} a_i[z^i(Y(z)-\sum_{l=0}^{i-1} y(l)z^{-l})] = \sum_{i=0}^{m} b_i[z^i(E(z)-\sum_{l=0}^{i-1} e(l)z^{-l})]$$

整理得 $$Y(z)=\frac{N(z)}{\sum_{i=0}^{n} a_i z^i}$$

$$Y(z)=\frac{N(z)}{\sum_{i=0}^{n}a_i z^i}$$ ，其中

$$N(z)=\sum_{i=0}^{m}b_i[z^i(E(z)-\sum_{l=0}^{i-1}e(l)z^{-l})]$$

$$+\sum_{i=0}^{n}[a_i(\sum_{l=0}^{i-1}y(l)z^{-l+i})]$$

例1（例题8-13）激励为单位阶跃序列，系统为

$$y(k+2)-5y(k+1)+6y(k)=e(k+1)+e(k)$$

初始条件为：（1） $y_{zi}(0)=0, y_{zi}(1)=0$

（2） $y(0)=0, y(1)=0$

求系统分别在两种初始条件下的响应。

解:(1)已知零输入响应的初始条件为0，因此 $y_{zi}(k)=0$，所以系统的响应是零状态响应。

系统的系统函数为

$$H(z)=\frac{z+1}{z^2-5z+6}$$

而 $E(z)=\dfrac{z}{z-1}$，故

$$Y(z)=E(z)H(z)=\frac{z(z+1)}{(z-1)(z^2-5z+6)}$$

$$=\frac{z}{z-1}-3\frac{z}{z-2}+2\frac{z}{z-3}$$

对此式作z反变换，得到

$$y(k)=(1-3\times2^k+2\times3^k)u(k)$$

$$y(k+2)-5y(k+1)+6y(k)=e(k+1)+e(k)$$

$$y(0)=0, y(1)=0 \qquad E(z)=\frac{z}{z-1}$$

(2)给出的是全响应的初始条件为0。在方程两边作z变换，得

$$z^2[Y(z)-y(0)-y(1)z^{-1}]-5z[Y(z)-y(0)]+6Y(z)$$

$$=z[E(z)-e(0)]+E(z)$$

整理得

$$(z^2-5z+6)Y(z)=z(\frac{z}{z-1}-1)+\frac{z}{z-1}$$

$$(z^2-5z+6)Y(z)=z\left(\frac{z}{z-1}-1\right)+\frac{z}{z-1}$$

$$Y(z)=\frac{2z}{(z-1)(z-2)(z-3)}=\frac{z}{z-1}-2\frac{z}{z-2}+\frac{z}{z-3}$$

$$\therefore y(k)=(1-2\times 2^k+3^k)u(k)$$

二、系统函数零极点分布对系统特性的影响

- 极点分布决定系统单位函数响应的模式
  （增长，衰减）
- 极点分布决定系统稳定性
  （前提：因果系统）
- 零极点分布决定系统频响特性

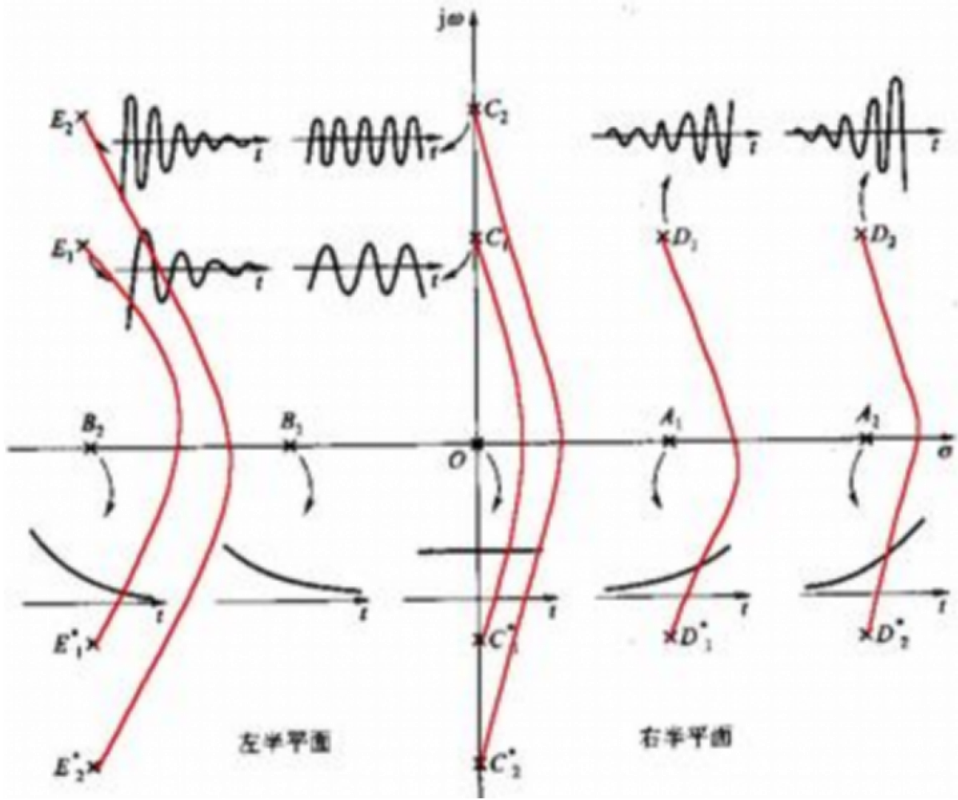
（1）极点分布对系统单位函数响应模式的影响

$$h(n) = ZT^{-1}[H(z)] = ZT^{-1}\left[G\frac{\prod_{r=0}^{M}(1 - z_r z^{-1})}{\prod_{k=0}^{N}(1 - p_k z^{-1})} \right]$$

$$= ZT^{-1}\left[A_0 + \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k z}{z - p_k} \right]$$

$$= A_0 \delta(n) + \sum_{k=1}^{N} A_k (p_k)^n u(n)$$

H(s)极点与单位冲激响应模式的关系



小结：

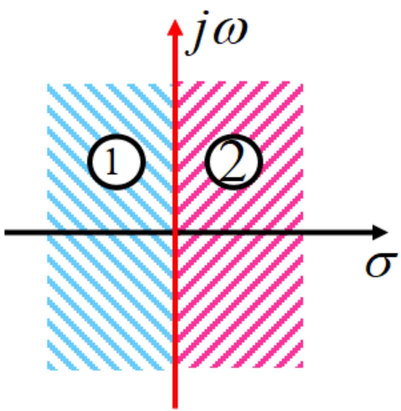
- H(s)在左半平面的极点　对应h(t)中的暂态分量。
- H(s)在虚轴上的单极点　对应h(t)中的稳态分量。
- H(s)在虚轴上二阶或更高阶极点及右半平面的极点对应h(t)中随时间的增长而增长的分量。

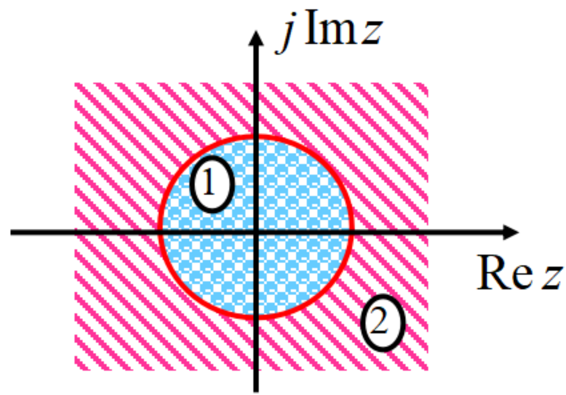
s平面到z平面的映射

设 $s=\sigma+j\omega \qquad z=re^{j\theta}$

$$z=e^{sT}=e^{(\sigma+j\omega)T}=e^{\sigma T}e^{j\omega T}$$

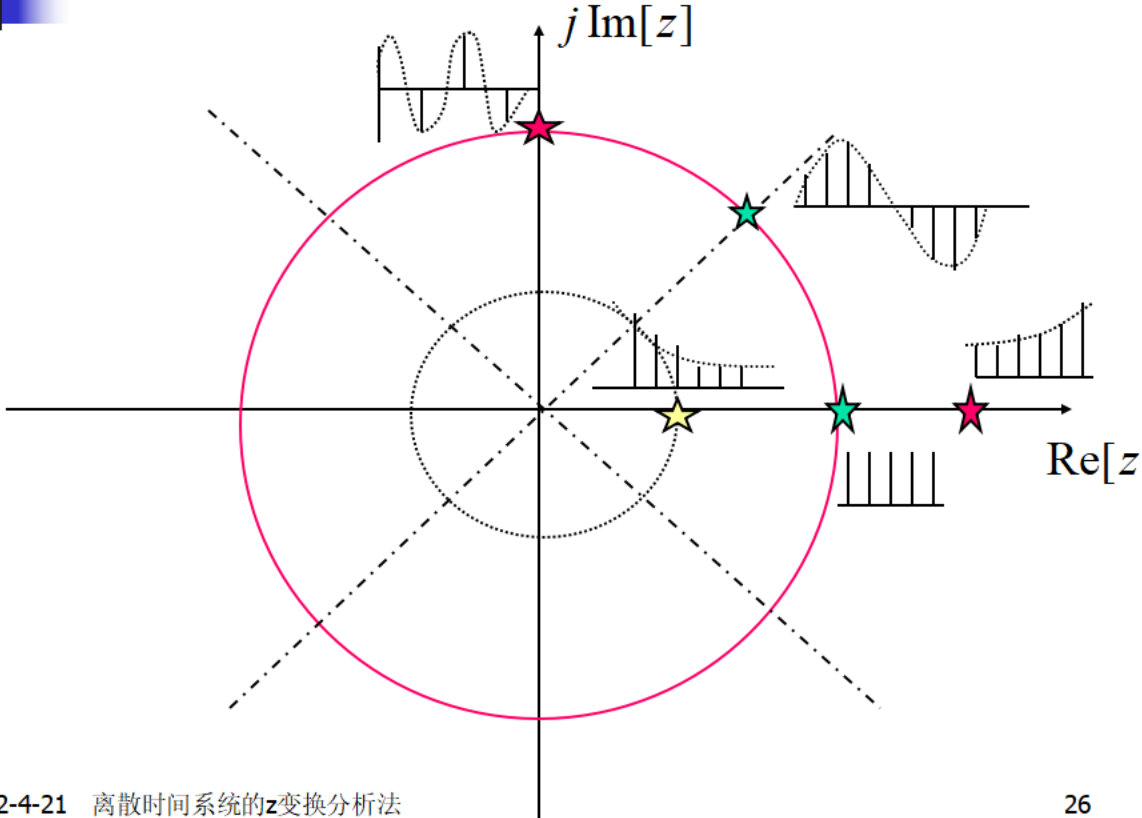
则 $|z|=r=e^{\sigma T} \qquad \theta=\omega T$





极点分布对h(n)的影响

- 图7－19



（2）极点分布对系统稳定性的影响

<table>
<tr><td rowspan="2">因果</td><td colspan="2">响应不早于激励</td><td>激励最高序号不大于响应最高序号</td></tr>
<tr><td colspan="2">$h(t)=0,\quad t<0$</td><td>$h(n)=0,\quad n<0$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">稳定</td><td colspan="2">$\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|<\infty$</td><td>$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|h(n)\right|<\infty$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">因果系统</td><td>$\int_{0}^{\infty}|h(t)|<\infty$</td><td>$\sum_{n=0}^{\infty}\left|h(n)\right|<\infty$</td></tr>
<tr><td>系统函数H(s)的所有极点全部位于s平面的左半开平面</td><td>?</td></tr>
</table>

在判别因果系统的稳定性时，在s域是看H(s)的极点是否全部落于s平面的左半开平面，而在z域则是看H(z)的极点是否全部落于z平面的单位圆内。

但是对于非因果系统，收敛区并不是在圆外区域，极点不限于单位圆内。

例2 已知系统函数如下，试说明分别在(1)(2)两种情况下系统的稳定性：

$$H(z)=\frac{-9.5z}{(z-0.5)(z-10)}$$

$$(1)\left|z\right|>10 \qquad (2)0.5<\left|z\right|<10$$

解：(1) 由收敛区可以看出系统为因果系统。

$$z_1=0.5 \quad z_2=10 \quad \left|z_2\right|>1$$

存在极点位于单位圆外，所以不稳定。实际上

$$H(z)=\frac{z}{z-0.5}-\frac{z}{z-10}$$

$$\Rightarrow h(n)=[(0.5)^n-(10)^n]u(n)$$

不是绝对可和的。

$$H(z)=\frac{-9.5z}{(z-0.5)(z-10)} \qquad (2)0.5<|z|<10$$

（2）由收敛区可以看出此时系统是非因果系统。

$$H(z)=\frac{z}{z-0.5}-\frac{z}{z-10} \qquad 0.5\le|z|\le 10$$

$$\Rightarrow h(n)=(0.5)^n u(n)+\underline{(10)^n u(-n-1)}$$

$$10^{-\infty}$$

是绝对可和的，因此该非因果系统是稳定的。

例3 已知某因果系统的系统函数如下：

$$H(z)=\frac{z^2+z}{z^2-z+1}$$

试说明该系统是否稳定。

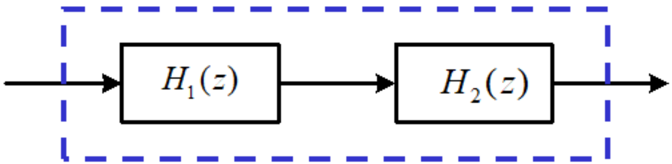
解：

$$H(z)=\frac{z^2+z}{(z-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2})(z-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2})}$$

临界稳定

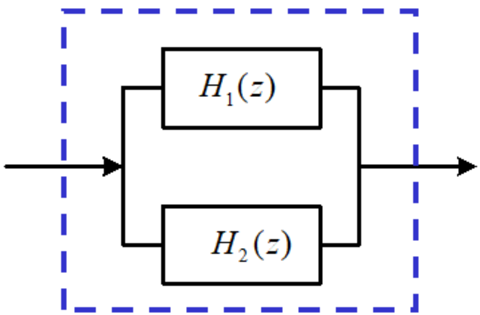
$$p_1=\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\quad p_2=\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\qquad \left|p_{1,2}\right|=1$$

补充：混合系统



$$H(z) = H_1(z)H_2(z)$$

$$h(k) = h_1(k) * h_2(k)$$



$$H(z) = H_1(z) + H_2(z)$$

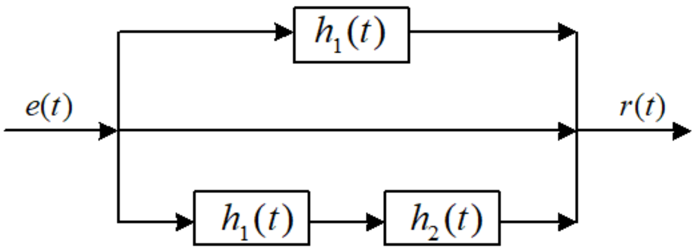
$$h(k) = h_1(k) + h_2(k)$$

练习：

1. 下图所示的系统中，各子系统的单位冲激响应分别为：

$$h_1(t)=\delta(t-1),\ \ h_2(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-3)$$

试求整个系统的单位冲激响应和单位阶跃响应。



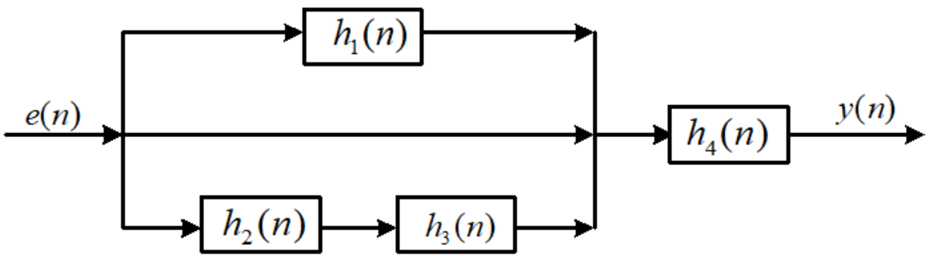
答案： $$h(t)=\delta(t)+\delta(t-1)+\varepsilon(t-1)-\varepsilon(t-4)$$

$$g(t)=\varepsilon(t)+\varepsilon(t-1)+(t-1)\varepsilon(t-1)-(t-4)\varepsilon(t-4)$$

2. 下图所示的系统中，各子系统的单位函数响应分别为：

$$h_1(n)=2^n\varepsilon(n),\ h_2(n)=\delta(n-1),\ h_3(n)=3^n\varepsilon(n),\ h_4(n)=\varepsilon(n)$$

试求整个系统的单位函数响应，并判定系统是否稳定。



答案：

$$h(n)=2^{n+1}\varepsilon(n)+\frac{1}{2}(3^n-1)\varepsilon(n-1)$$

不是绝对可和，故系统不稳定。

小结

(1)用z变换求离散系统的响应，跟初始条件的给法有关。

(2)根据系统函数的极点分布可以判断因果系统的稳定性。

(3)混合系统的系统函数与单位函数响应。

课外作业

复习:8.6；预习:8.7—8.8

作业:8.17(3)，8.18(5)