

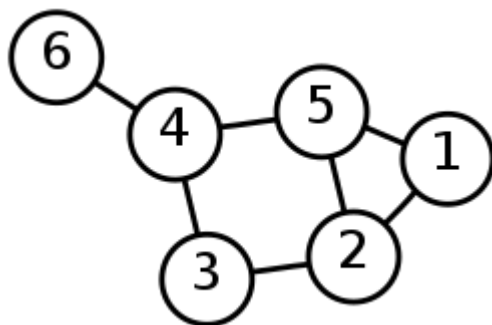
图论

研究對象為圖的數學理論

此条目可参照英语维基百科和西班牙语维基百科相应条目来扩充。

[了解更多](#)

图论（英语：Graph theory），是[组合数学](#)分支，和其他数学分支如[群论](#)、[矩阵论](#)、[拓扑学](#)有着密切关系。



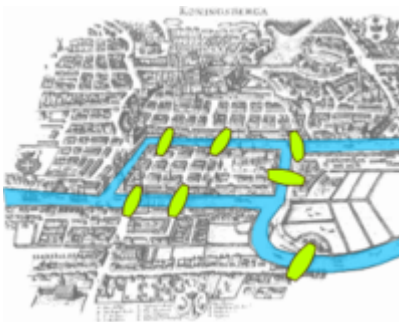
一个由6个顶点和7条边组成的图

图是图论的主要研究对象。图是由若干给定的[顶点](#)及连接两顶点的边所构成的图形，这种图形通常用来描述某些事物之间的某种特定关系。顶点用于代表事物，连接两顶点的边则用于表示两个事物间具有这种关系。

图论起源于著名的[柯尼斯堡七桥问题](#)。该问题于1736年被[欧拉](#)解决，因此普遍认为[欧拉](#)是图论的创始人。^[1]

图论的研究对象相当于一维的[单纯复形](#)^[2]。

历史



柯尼斯堡七桥问题

一般认为，[欧拉](#)于1736年出版的关于[柯尼斯堡七桥问题](#)的论文是图论领域的第一篇文章^[3]。此问题被推广为著名的欧拉路问题，亦即[一笔画问题](#)。而此论文与[范德蒙德](#)的一篇关于[骑士周游问题](#)的文章，则是继承了[莱布尼茨](#)提出的“位置分析”的方法。欧拉提出的关于凸多边形顶点数、棱数及面数之间的

关系的[欧拉公式](#)与图论有密切联系，此后又被[柯西](#)等人^{[4][5]}进一步研究推广，成了[拓扑学](#)的起源。1857年，[哈密顿](#)发明了“[环游世界游戏](#)”（icosian game），与此相关的则是另一个广为人知的图论问题“[哈密顿路径问题](#)”。

[西尔维斯特](#)于1878年发表在《[自然](#)》上的一篇论文中首次提出“图”这一名词^[6]。

欧拉的论文发表后一个多世纪，[凯莱](#)研究了在[微分学](#)中出现的一种数学分析的特殊形式，而这最终将他引向对一种特殊的被称为“[树](#)”的图的研究。由于有机化学中有许多树状结构的分子，这些研究对于理论化学有着重要意义，尤其是其中关于具有某一特定性质的[图的计数](#)问题。除凯莱的成果外，[波利亚](#)也于1935至1937年发表了一些成果，1959年，[De Bruijn](#)做了一些推广。这些研究成果奠定了图的计数理论的基础。凯莱将他关于树的研究成果与当时有关化合物的研究联系起来，而图论中有一部分术语正是来源于这种将数学与化学相联系的做法。

[四色问题](#)可谓是图论研究史上最著名也是产生成果最多的问题之一：“是否任何一幅画在平面上的地图都可以用四种颜色染色，使得任意两个相邻的区域不同色？”这一问题由[法兰西斯·古德里](#)于1852年提出，而最早的文字记载则出现在[德摩根](#)于1852年写给哈密顿的一封信上。包括[凯莱](#)、[肯普](#)等在内的许多人都曾给出过错误的证明。[泰特](#)（Peter Guthrie Tait）、[希伍德](#)（Percy John Heawood）、[拉姆齐](#)和[Hadwige](#)（Hugo Hadwiger）对此问题的研究与推广引发了对嵌入具有不同[亏格](#)的曲面的图的着色问题的研究。一百多年后，四色问题仍未解决。1969年，[Heinrich Heesch](#)发表了一个用计算机解决此问题的方法。1976年，[阿佩尔](#)（Kenneth Appel）和[沃夫冈·哈肯](#)（Wolfgang Haken）借助计算机给出了一个证明，此方法按某些性质将所有地图分为1936类并利用计算机一一验证了它们可以用四种颜色染色。但此方法由于过于复杂，在当时未被广泛接受。

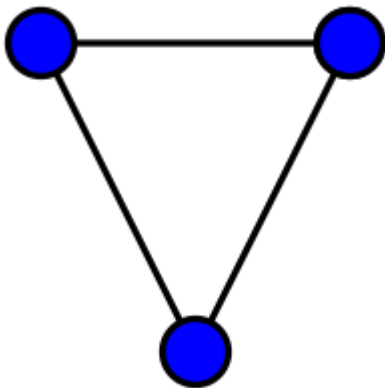
1860年之1930年间，[若当](#)、[库拉托夫斯基](#)和[惠特尼](#)从之前独立于图论发展的拓扑学中吸取大量内容进入图论，而现代代数方法的使用更让图论与拓扑走上共同发展的道路。其中应用代数较早者如物理学家[基尔霍夫](#)于1845年发表的[基尔霍夫电路定律](#)。

图论中概率方法的引入，尤其是[埃尔德什](#)和[Alfréd Rényi](#)关于随机图连通的渐进概率的研究使得图论产生了新的分支[随机图论](#)。

定义

图论中有许多定义，以下是一些与之相关最基本的定义。

无向图



有三个边和三个顶点的图。

图论中，**图**是有序对 $G = (V, E)$ ，其中 V 是点集； $E \subseteq \{\{x, y\} : (x, y) \in V^2, x \neq y\}$ 是边集，由所有无序顶点对构成（换句话说，边连接了顶点对）。对于一个边 $\{x, y\}$ ，顶点 x, y 被称作是边的端点，边则被称为连接了此两个点。

为了避免歧异，上述的定义被更精准地称作无向简单图。

事实上可以推广为更一般的定义：**图**是有序三元组 $G = (V, E, \phi)$ ，其中 V 是点集； E 是边集（此时 E 不再如前面限定是该集合的子集）；而 $\phi : E \rightarrow \{\{x, y\} : (x, y) \in V^2\}$ 将每个边映射到一个无序顶点对（于是边连接了顶点对）。此时的定义就允许自环、重边的出现，其中自环是两端点相同的边，重边是两个或多个连接相同端点的边。

为了避免歧异，上述的定义被更精准地称作无向图。

V, E 的元素个数通常都是有限的；并且如果个数是无限的，有许多著名的性质都发生变化，甚至不再正确。此外， V 通常不被接受是空集合，而 E 则被接受为空集合。以下再给出一些图论中的定义：图的阶是其顶点个数 $|V|$ ，图的边数是 $|E|$ ，顶点的度所有边的端点中此顶点出现的次数（自环会被算两次）。

图论问题

图的计数

子图相关问题

子图同构问题：给定两个图 G 和 H ，问 G 中是否存在一个子图与 H 同构。这是一个NP完全问题。

- 哈密顿回路问题**可视为一个子图同构问题，即给定一个 n 个顶点的图，问是否存在一个子图与具有 n 个顶点的圈同构。

一类相关的常见问题要求在给定图中寻找符合某些条件的最大子图，其中有很多是NP完全的，如：

- **分团问题**：在给定图中寻找最大的**团**（NP完全）。

类似地，有些问题要求寻找符合某些条件的最大导出子图，如：

- **最大独立集问题**：在给定图中寻找最大的无边的导出子图，亦即**独立集**（NP完全）。

平面图判定：判定给定的图是否是平面图（此问题与子图的关系，参见**库拉托夫斯基定理**）

一个尚未解决的与子图相关的猜想，**重构猜想**（Reconstruction conjecture）：一个 n 阶图是否能够由其所有 $n-1$ 阶导出子图唯一确定？

染色

- **点色数**（Chromatic number）
- **边色数**（Chromatic index）
- **色多项式**

许多问题与将图以特定方式**染色**有关，如：

- **四色问题**
- **完美图问题**（strong perfect graph theorem）
- 列表染色问题，列表边染色问题
- **曲面染色**

路径问题

- **柯尼斯堡七桥问题**
- **哈密顿回路问题**
- **最小生成树问题**
- **中国邮路问题**
- **最短路问题**
- **斯坦纳树**
- **旅行商问题**（NP困难）

网络流与匹配

- **最大流问题**，**最小割问题**，**最大流最小割定理**
- **最小费用最大流问题**

- [二分图](#)及任意图上的[最大匹配](#)
- 带权二分图的最大权匹配

覆盖问题

- 最大团
- 最大独立集
- [最小覆盖集](#)
- 最小支配集

重要的算法

- [戴克斯特拉算法](#)(D.A)
- [克鲁斯卡尔算法](#)(K.A)
- [普里姆算法](#)(P.A)
- [拓扑排序算法](#)(TSA)
- [关键路径算法](#)(CPA)
- [广度优先搜索算法](#)(BFS)
- [深度优先搜索算法](#)(DFS)

参见

- [组合数学](#)
- [三间小屋问题](#)

注释

- 卜月华; 吴建专; 顾国华; 殷翔, 《图论及其应用》 第一版, 东南大学出版社: 1-2, 2007
- Alexander Grigor'yan, Yuri Muranov, Shing-Tung Yau, [Graphs associated with simplicial complexes](https://web.archive.org/web/20220613003947/https://www.math.uni-bielefeld.de/~grigor/cubic.pdf) (<https://web.archive.org/web/20220613003947/https://www.math.uni-bielefeld.de/~grigor/cubic.pdf>) (PDF, 2012年9月 [2018-05-24], ([原始内容](https://www.math.uni-bielefeld.de/~grigor/cubic.pdf) (<https://www.math.uni-bielefeld.de/~grigor/cubic.pdf>) (PDF)存档于2022-06-13)
- Biggs, N.; Lloyd, E.; Wilson, R., Graph Theory, 1736–1936, Oxford University Press, 1986

4. Cauchy, A. L., Recherche sur les polyèdres - premier mémoire, Journal de l'École polytechnique, 1813,, 9 (Cahier 16): 66–86.
5. L'Huillier, S.-A.-J., Mémoire sur la polyèdrométrie, Annales de Mathématiques, 1812–1813, **3**: 169–189.
6. Sylvester, James Joseph. [Chemistry and Algebra](https://archive.org/stream/nature15unkngoog#page/n312/mode/1up) (<https://archive.org/stream/nature15unkngoog#page/n312/mode/1up>) . Nature. 1878, **17**: 284. doi:10.1038/017284a0 (<https://dx.doi.org/10.1038%2F017284a0>) .

参考文献

- [Berge, Claude](#), Théorie des graphes et ses applications, Collection Universitaire de Mathématiques **II**, Paris: Dunod, 1958. English edition, Wiley 1961; Methuen & Co, New York 1962; Russian, Moscow 1961; Spanish, Mexico 1962; Roumanian, Bucharest 1969; Chinese, Shanghai 1963; Second printing of the 1962 first English edition, Dover, New York 2001.
- Biggs, N.; Lloyd, E.; Wilson, R., Graph Theory, 1736–1936, Oxford University Press, 1986.
- Bondy, J.A.; Murty, U.S.R., Graph Theory, Springer, 2008, [ISBN 978-1-84628-969-9](#).
- Bondy, Riordan, O.M, Mathematical results on scale-free random graphs in "Handbook of Graphs and Networks" (S. Bornholdt and H.G. Schuster (eds)), Wiley VCH, Weinheim, 1st ed., 2003.
- [Chartrand, Gary](#), Introductory Graph Theory, Dover, 1985, [ISBN 0-486-24775-9](#).
- Gibbons, Alan, Algorithmic Graph Theory, [Cambridge University Press](#), 1985.
- Reuven Cohen, Shlomo Havlin, Complex Networks: Structure, Robustness and Function, Cambridge University Press, 2010
- [Golumbic, Martin](#), Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs, [Academic Press](#), 1980.
- [Harary, Frank](#), Graph Theory, Reading, MA: Addison-Wesley, 1969.
- [Harary, Frank](#); Palmer, Edgar M., Graphical Enumeration, New York, NY: Academic Press, 1973.
- Mahadev, N.V.R.; Peled, Uri N., Threshold Graphs and Related Topics, [North-Holland](#), 1995.
- Mark Newman, Networks: An Introduction, Oxford University Press, 2010.

外部链接

线上图书资料

- [Graph Theory with Applications](https://web.archive.org/web/20120616164929/http://www.math.jussieu.fr/~jabondy/books/gtwa/gtwa.html) (<https://web.archive.org/web/20120616164929/http://www.math.jussieu.fr/~jabondy/books/gtwa/gtwa.html>) (1976) by Bondy and Murty

- [Phase Transitions in Combinatorial Optimization Problems, Section 3: Introduction to Graphs](http://arxiv.org/pdf/cond-mat/0602129) (<http://arxiv.org/pdf/cond-mat/0602129>) (2006) by Hartmann and Weigt
- [Digraphs: Theory Algorithms and Applications](http://www.cs.rhul.ac.uk/books/dbook/) (<http://www.cs.rhul.ac.uk/books/dbook/>) (页面存档备份 (<https://web.archive.org/web/20110826005638/http://www.cs.rhul.ac.uk/books/dbook/>) , 存于互联网档案馆) 2007 by Jorgen Bang-Jensen and Gregory Gutin
- [Graph Theory](http://diestel-graph-theory.com/index.html), by Reinhard Diestel (<http://diestel-graph-theory.com/index.html>) (页面存档备份 (<https://web.archive.org/web/20120208160447/http://diestel-graph-theory.com/index.html>) , 存于互联网档案馆)

其他相关资料

- Hazewinkel, Michiel (编), [Graph theory](http://www.encyclopediaofmath.org/index.php?title=p/g045010) (<http://www.encyclopediaofmath.org/index.php?title=p/g045010>) , 数学百科全书, Springer, 2001, ISBN 978-1-55608-010-4
- [Graph theory tutorial](http://www.utm.edu/departments/math/graph/) (<http://www.utm.edu/departments/math/graph/>) (页面存档备份 (<https://web.archive.org/web/20120116185332/http://www.utm.edu/departments/math/graph/>) , 存于互联网档案馆)
- [A searchable database of small connected graphs](http://www.gfredericks.com/main/sandbox/graphs) (<http://www.gfredericks.com/main/sandbox/graphs>)
- [Image gallery: graphs](https://web.archive.org/web/20060206155001/http://www.nd.edu/~networks/gallery.htm) (<https://web.archive.org/web/20060206155001/http://www.nd.edu/~networks/gallery.htm>)
- [Concise, annotated list of graph theory resources for researchers](https://web.archive.org/web/20190713044422/http://www.babelgraph.org/links.html) (<https://web.archive.org/web/20190713044422/http://www.babelgraph.org/links.html>)
- [rocs](http://www.kde.org/applications/education/rocs/) (<http://www.kde.org/applications/education/rocs/>) (页面存档备份 (<https://web.archive.org/web/20120111113948/http://www.kde.org/applications/education/rocs/>) , 存于互联网档案馆) — a graph theory IDE
- [Graph Theory Software](http://graphtheorysoftware.com/) (<http://graphtheorysoftware.com/>) (页面存档备份 (<https://web.archive.org/web/20130313205057/http://graphtheorysoftware.com/>) , 存于互联网档案馆)