Projet Labyrinthe

Projet Maths-Info

Lucie Boucher, Colin Blake, Mayeul Hospital, Julien Berry

Résumé

Le but de ce projet est d'étudier les labyrinthes en tant qu'objets mathématiques et chercher leurs différentes propriétés.

Notations et définitions

Notations

L	Un labyrinthe
$P-L$	Un pseudo-labyrinthe
n	Largeur de L
m	Hauteur de L
M_{PL}	Nombre de murs maximal d'un pseudo-labyrinthe
M_L	Nombre de murs maximal d'un labyrinthe

Définitions

Enceinte : On considère une grille rectangulaire de taille $n*m$. Le bord de ce rectangle est appelé **enceinte**, qui délimite un espace constitué d'un ensemble de cases.

Cellule : Chaque case de la grille est appelé **cellule**. Un ensemble de cellules à l'intérieur duquel il existe toujours un chemin entre deux cellules données est appelé **connexe**.

Mur : Chaque arête de la grille excepté l'enceinte peut constituer un **mur**. Un mur sur l'arête entre deux cellules signifie que le déplacement entre ces deux cellules est impossible .

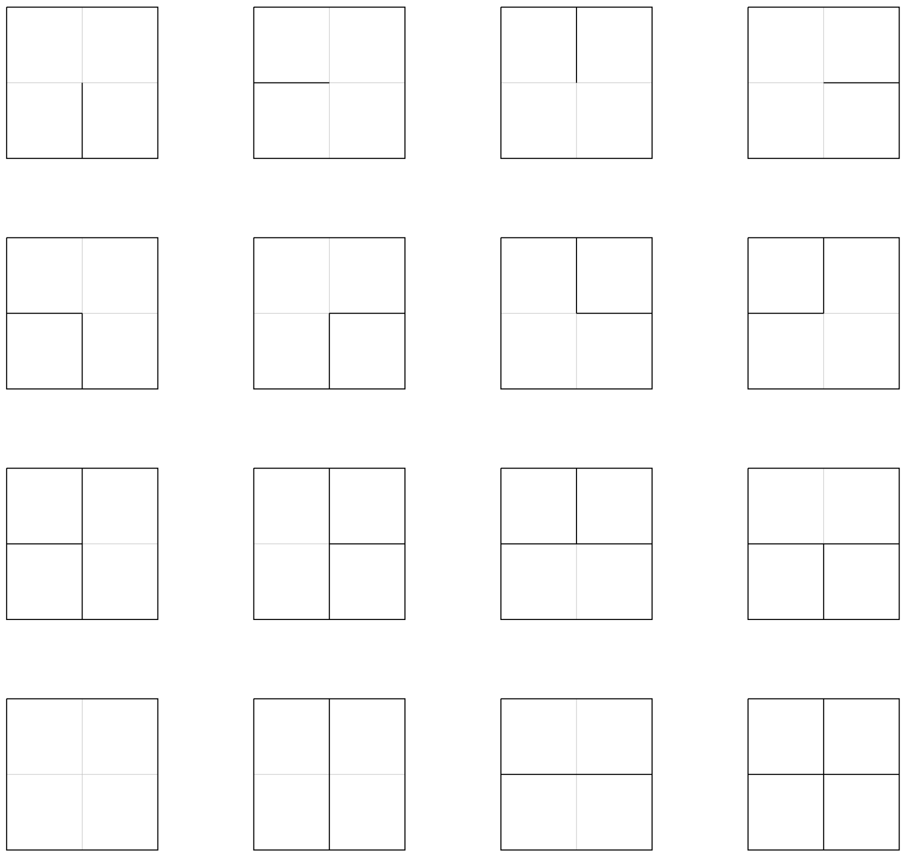
Pseudo-labyrinthe : On appelle un ensemble enceinte+murs un **pseudo-labyrinthe**.

Labyrinthe : Un pseudo-labyrinthe dont l'enceinte délimite un espace connexe, et tel que l'ajout d'un mur lui fasse perdre sa connexité est appelé **labyrinthe**.

1 Étude théorique du problème

1.1 Dessinez tous les pseudo-labyrinthes de taille 2 x 2 (vous devez en trouver 16). Combien sont des labyrinthes ?

Après avoir cherché les pseudo-labyrinthes de taille $2 * 2$, on a obtenu les 16 $P - L$ suivants dont ceux sur la première ligne sont des Labyrinthes.



1.2 Quel est le nombre maximal de murs dans un pseudo-labyrinthe de taille $n * m$

Dans un pseudo-labyrinthe de taille $n * m$ on a m lignes de tailles n. Or dans la première ligne de $P - L$ on a $n - 1$ murs verticaux et n murs horizontaux en dessous de la ligne. On a donc $2n - 1$ murs sur une ligne. On considère désormais que cette ligne ne fait plus partie de $P - L$ et on recommence ce processus avec une nouvelle "première ligne" et ce m fois. Pour la dernière ligne, il faut ôter les n murs qui sont en fait l'enceinte.
On obtient donc :

$$M_{PL} = m * (2n - 1) - n$$

1.3 Si $m = 1$, combien existe-t-il de pseudo labyrinthe de taille $n * 1$

Pour un pseudo-labyrinthe de hauteur 1, on a $M_{PL} = n - 1$, le nombre d'arêtes verticales. On commence par chercher le nombre de $P - L$ avec 0 murs, on trouve de manière triviale qu'il y en a un unique. De même avec un mur, on trouve $n - 1$ pseudo-labyrinthes puisqu'il y a $n - 1$ positions pour placer le mur.

De manière générale, il existe $\binom{n-1}{k}$ $P - L$ à k murs.

En effet pour $k = 0$, on a $\binom{n-1}{0} = 1$ par définition, de même pour $k = 1$ on a $\binom{n-1}{1} = n - 1$.

On obtient donc un nombre de $P - L$ égal à la somme du nombre de $P - L$ à k murs pour k allant de 0 à $n - 1$.

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}$$

Ce qui est égal à 2^{n-1} par définition,

1.4 Observez les cas m = 2 et m = 3 et donnez la formule générale pour le nombre de pseudo labyrinthe de taille n x m en justifiant votre réponse.

On a déjà montré que pour $m = 1$, on a 2^{n-1} possibilités, Notons [i, j] les coordonnées d'une cellule, avec i variant de 1 à n et j variant de 1 à m, entre les cellules de coordonnée $[i, m]$ et $[i, m-1]$ il existe deux possibilités : Soit elles sont séparées par un mur, soit non. On a donc 2^n possibilités de liaison entre deux pseudo-labyrinthes de taille $n * 1$.

On a m fois 2^{n-1} combinaisons en lignes et m fois 2^2 combinaisons en colonne.
Pour $m = 2$,
on a donc $2^{n-1} * 2^{n-1} * 2^n$ possibilités,
Soit 2^{3n-2} possibilités après simplification.

Pour $m = 3$,
on a donc $2^{n-1} * 2^{n-1} * 2^{n-1} * 2^n * 2^n$ possibilités,
En posant p_2 le nombre de combinaisons pour $m = 2$, on obtient $p_2 * 2^{n-1} * 2^n$ possibilités.
Soit 2^{5n-3} possibilités après simplification.

On remarque donc une récurrence entre les éléments, si l'on note p_m le nombre de combinaisons possibles pour un labyrinthe de taille $n * m$, on a

$$p_m = p_{m-1} * 2^{n-1} * 2^n = p_{m-1} * 2^{2n-1}$$

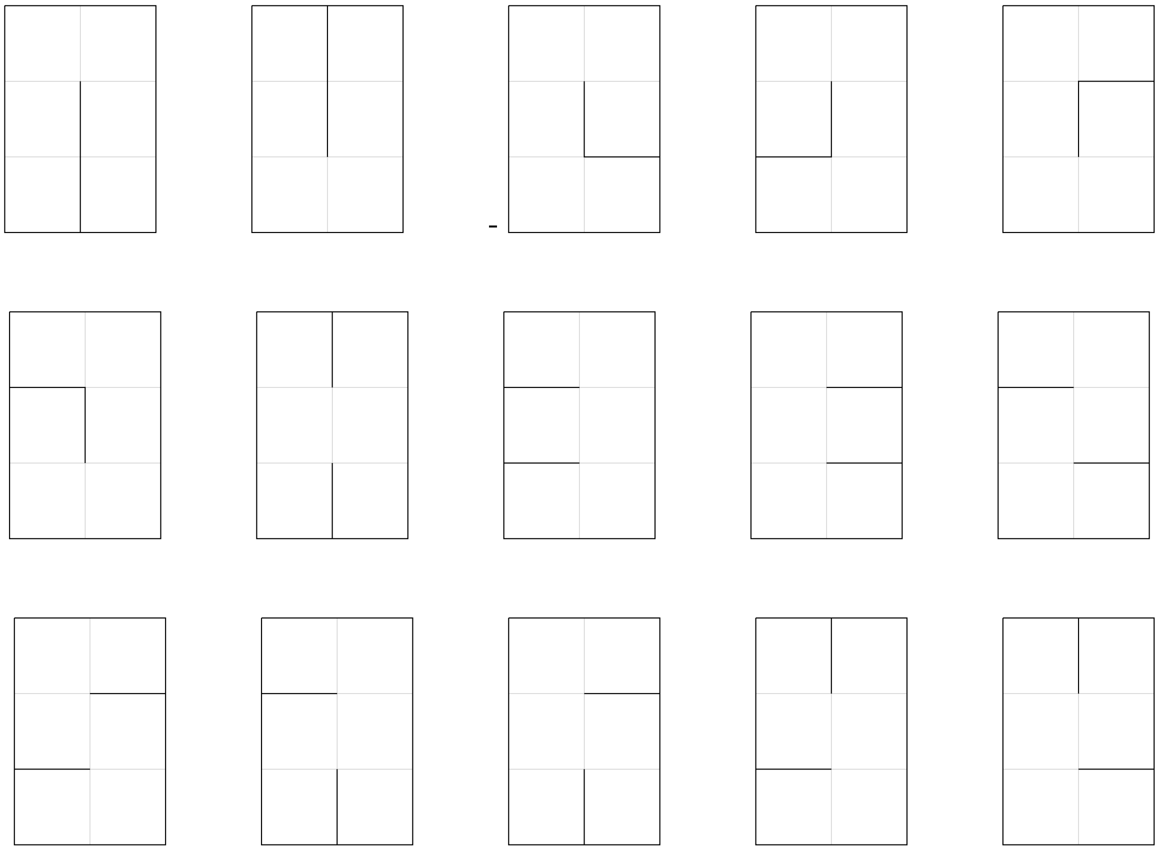
ce qui modélise une suite géométrique de raison 2^{2n-1} avec n fixé.

Soit u_m cette suite géométrique, on a $u_1 = 2^{n-1}$ d'après la question 1.3. Le terme général de la suite est donc, pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
u_m &= u_1 * (2^{2n-1})^{m-1} \\
u_m &= 2^{n-1} * (2^{2n-1})^{m-1} \\
u_m &= 2^{n-1} * 2^{(2n-1)*(m-1)} \\
u_m &= 2^{(n-1)+(m-1)*(2n-1)} \\
u_m &= 2^{(2nm-n-m)} \\
u_m &= 2^{m(2n-1)-n}
\end{aligned}$$

On a donc $2^{m(2n-1)-n}$ pseudo-labyrinthes de taille $n * m$

1.5 Dessinez tous les labyrinthes de taille 3 x 2. Vous devez en trouver 15.



1.6 En comptant les murs de chacun de ces labyrinthes, que remarquez-vous ?

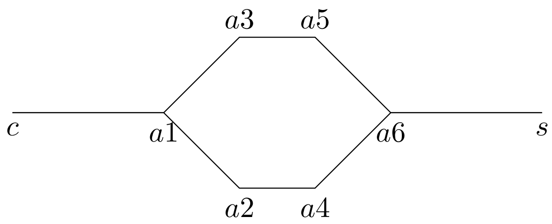
On remarque qu'ils ont deux murs chacun et cinq bordures qui ne sont pas des murs.

1.7 Soit L un labyrinthe, on suppose que la sortie s se trouve dans la cellule en haut à gauche. Prouvez que si je choisis une cellule c quelconque de L, alors il existe un unique chemin qui va de c à s sans passer plus d'une fois sur chacune des cases (il faut prouver que ce chemin existe et qu'il est unique).

Considérons un labyrinthe L qui est par définition connexe

Premièrement démontrons par l'absurde qu'un labyrinthe est acyclique. En effet, supposons qu'un labyrinthe soit cyclique, alors on peut rajouter un mur dans ce cycle sans enlever la possibilité d'aller d'une cellule du cycle à une autre, on serait alors encore une fois en présence d'un labyrinthe. Par définition du labyrinthe, l'ajout d'un mur est censé faire perdre sa connexité à un labyrinthe, on est donc en présence d'une contradiction. Un labyrinthe ne peut donc pas être cyclique.

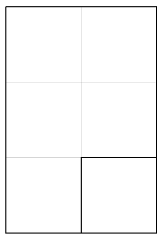
Un labyrinthe étant connexe, il existe au moins un chemin de c à s,
Démontrons par l'absurde qu'il existe un unique chemin élémentaire de c à s.
Supposons qu'il existe ρ et ρ' : deux chemins élémentaire de c à s tel que $\rho \neq \rho'$.
Posons $a1$ $a2$ $a3$ $a4$ $a5$ $a6$ des cellules de L, ρ passe par $a2$ et $a4$ tandis que ρ' passe par $a3$ et $a5$
On a $a3 \neq a2$ et $a4 \neq a5$



ρ et ρ' sont donc bien diffèrent entre $a1$ et $a6$. Ainsi L est cyclique et ne répond donc plus à la définition du labyrinthe. Il existe donc bien un unique chemin élémentaire de c à s dans L.

1.8 En utilisant le résultat précédent, il est possible de prouver que pour un labyrinthe de taille n x m, il existe exactement n x m - 1 bordures entre cellules qui ne sont pas des murs (on ne vous demande pas la preuve). Un pseudo-labyrinthe possédant le "bon" nombre de murs est-il toujours un labyrinthe ? Conjecturez des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un pseudo-labyrinthe soit un labyrinthe.

Il suffit de donner un contre exemple simple pour montrer qu'un pseudo-labyrinthe qui possède le bon nombre de murs n'est pas obligatoirement un labyrinthe. Considérons les pseudo-labyrinthes de taille 2 x 3, il faut que $(2 * 3 - 1) = 5$ bordures entre cellules ne soient pas des murs pour qu'il puisse être un labyrinthe.
Prenons le pseudo-labyrinthe suivant :



Si l'on part du coin en bas à droite, il est impossible de se déplacer vers une autre cellule, et il est impossible d'accéder à cette cellule depuis une autre. Ce pseudo-labyrinthe n'est donc pas un labyrinthe, pourtant il contient bel et bien le bon nombre de murs.
Nous avons donc montré qu'un pseudo-labyrinthe possédant le bon nombre de murs n'est pas toujours un labyrinthe.
On suppose qu'il suffise de montrer que le pseudo-labyrinthe respecte le bon nombre de murs et qu'il soit acyclique pour montrer qu'il est un labyrinthe.
D'après la question 7, on sait qu'un labyrinthe est nécessairement acyclique.
On pense que les conditions sont suffisantes car le bon nombre de mur et l'acyclicité du pseudo-labyrinthe assurent sa connexité, et l'ajout d'un mur la ferait perdre. On respecte donc bien la définition d'un labyrinthe.