CFD 入门练习 2

1. **对一维热传导方程** $T_t = \alpha T_{xx}$ **，** $x \in [0,1], t \geq 0$ **，满足以下初始条件** $T(x,0) = T_0 \sin(\pi x)$ **，及边界条件** $T(0,t) = T_L, T(1,t) = T_R$ **。其中** $\alpha = 0.06$ **，** $T_0 = 50$ **，** $T_L = T_R = 0$ **。**

(1)当 $\Delta x = 0.02, \Delta t = 0.002, 0.004, 0.008, 0.02$ **时，将课堂上推导的隐式数值格式编程计算，求当** $t = 10$ **时，** T **的数值解，并与解析解进行比较。**

解： 这里给出 *Matlab* 左除法与 *Thomas* 算法(追赶法)各自计算出的数值解与解析解的比较图，并且给出相对应的离散误差方差图(详细代码见附录)。

Matlab **左除法：**

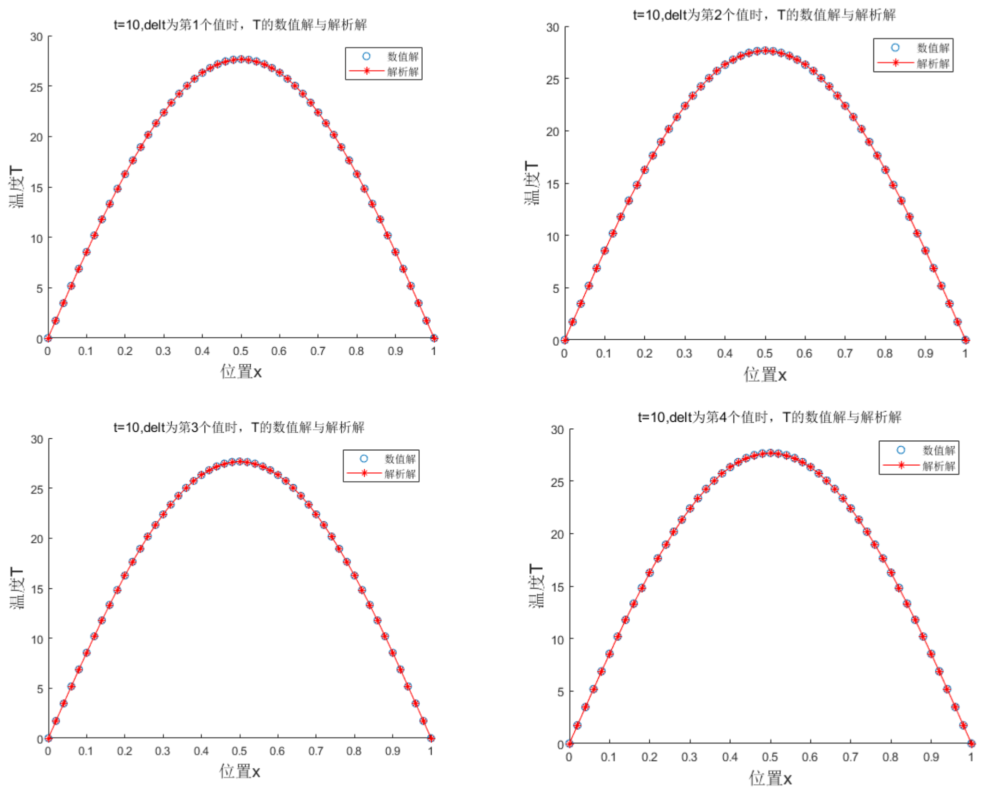

图 1： *Matlab* 左除法中关于 Δt 选取的 T 的数值解与解析解比较图

其中 Δt 依次选取 $0.002, 0.004, 0.008, 0.02$ 。下面给出离散误差方差图：

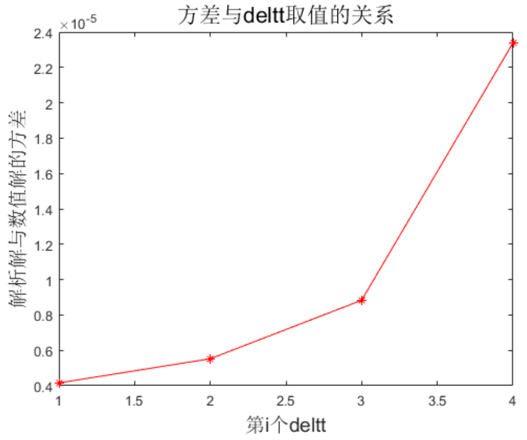

图 2： *Matlab* 左除法中关于 Δt 选取的 T 的离散方差图

Thomas **算法(追赶法)：**

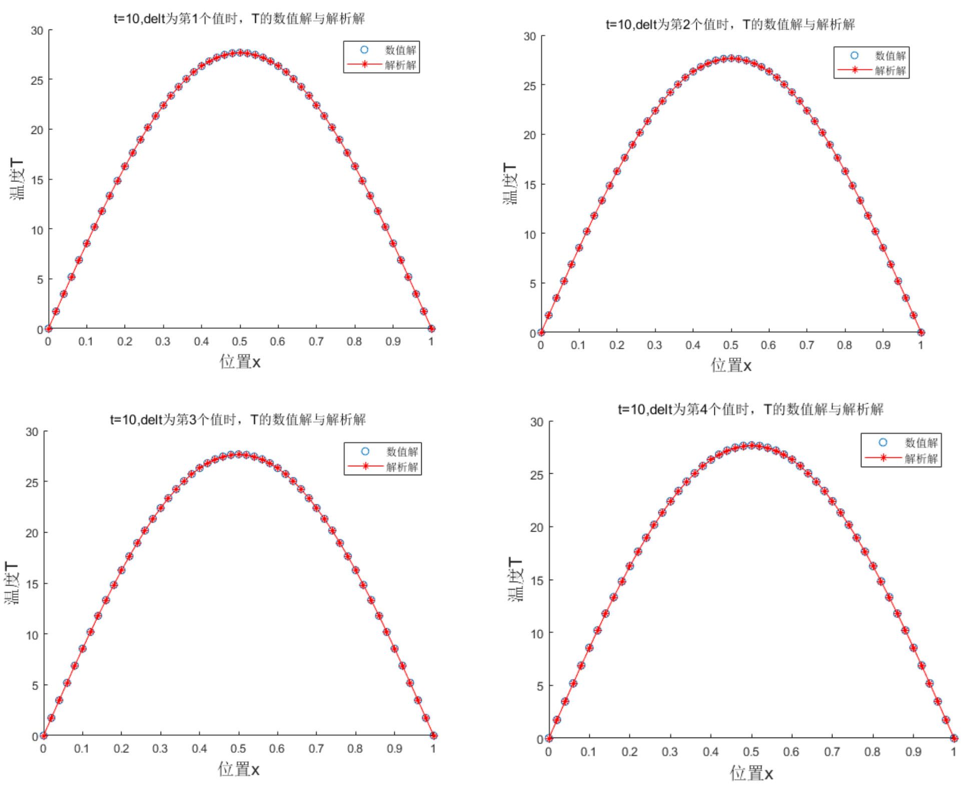

图 3： *Thomas* 算法中关于 Δt 选取的 T 的数值解与解析解比较图

其中 Δt 依次选取 $0.002, 0.004, 0.008, 0.02$ 。下面给出离散误差方差图：

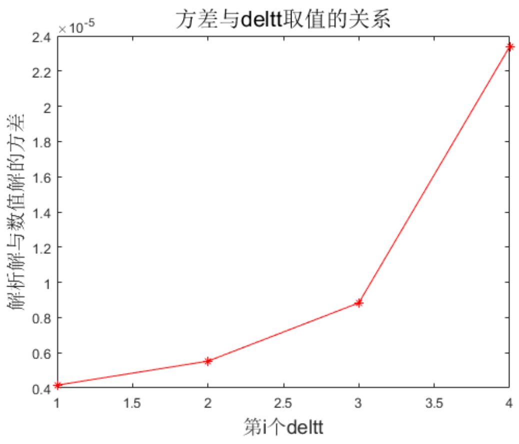

图 4： $Thomas$ 算法中关于 Δt 选取的 T 的离散方差图

(2)将课堂上的隐式格式做稳定性分析，探究稳定性条件。

解： 对于隐式格式的差分方程 $\dfrac{T_i^{n+1}-T_i^n}{\Delta t}=\alpha\dfrac{T_{i+1}^{n+1}-2T_i^{n+1}+T_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2}$ 考虑稳定性分析。由于 $\varepsilon(x,t)=\sum_{m=1}^{\frac{N}{2}}\varepsilon_m=\sum_{m=1}^{\frac{N}{2}}A_m(t)e^{ik_m x}=\sum_{m=1}^{\frac{N}{2}}e^{at}e^{ik_m x}$ ，所以有

$$\frac{e^{a(t+\Delta t)}e^{ik_m x}-e^{at}e^{ik_m x}}{\Delta t}=\frac{\alpha}{\Delta x^2}(e^{a(t+\Delta t)}e^{ik_m(x+\Delta x)}-2e^{a(t+\Delta t)}e^{ik_m x}+e^{a(t+\Delta t)}e^{ik_m(x-\Delta x)}).$$

并且 $G=\dfrac{\varepsilon_i^{n+1}}{\varepsilon_i^n}=\dfrac{e^{a(t+\Delta t)}e^{ik_m x}}{e^{at}e^{ik_m x}}=e^{a\Delta t}$,等式两边同时除以 $e^{at}e^{ik_m x}$,有

$$\frac{G-1}{\Delta t}=\frac{\alpha}{\Delta x^2}(Ge^{ik_m\Delta x}-2G+Ge^{ik_m(-\Delta x)}).$$

令 $\sigma=\dfrac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2},\theta=k_m\Delta x$，化简后得到：$1=G[1+2\sigma(1-\cos\theta)]$.如此，对于任意的 $\sigma>0$,都有 $|G|\le 1$。

综上，该隐式方程对于 σ 的限制为 $\sigma>0$ (显然成立)。

(3)针对 $Crank-Nicolson$ 格式，重复实现以上步骤。

解： 这里仅给出 $Thomas$ 算法计算 $Crank-Nicolson$ 格式的结果(代码见附录)：

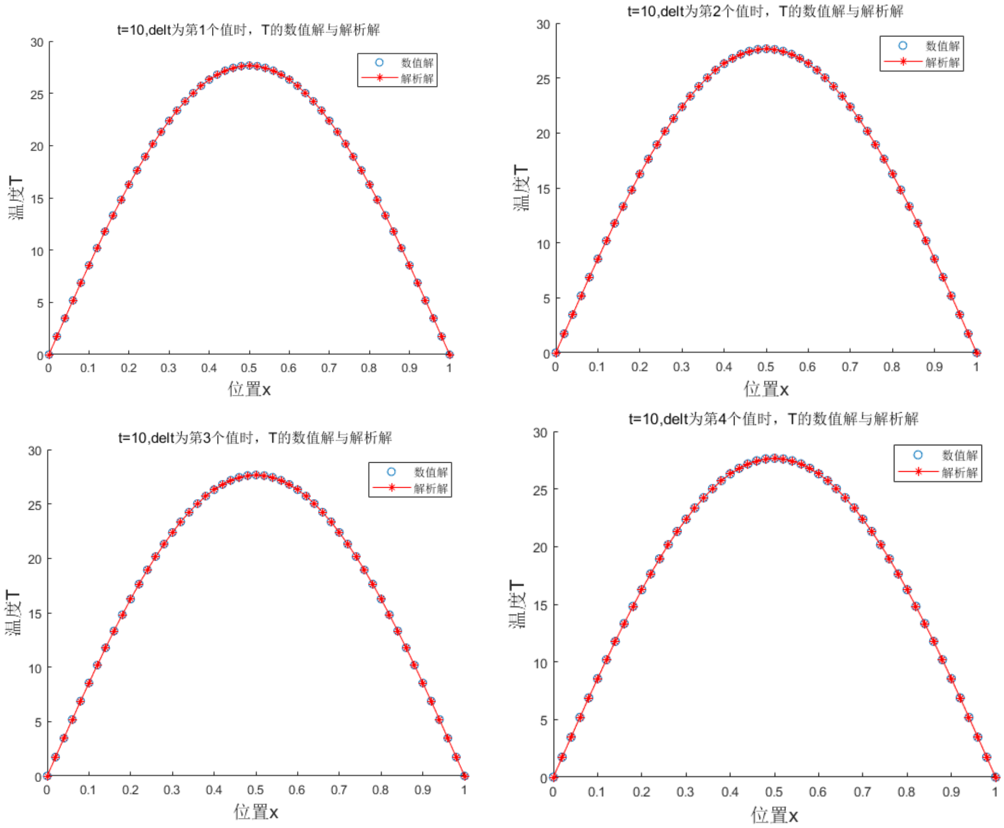

图 5： *Crank – Nicolson* 格式中关于 Δt 选取的 T 的数值解与解析解比较图

其中 Δt 依次选取 $0.002, 0.004, 0.008, 0.02$ 。下面给出离散误差方差图：

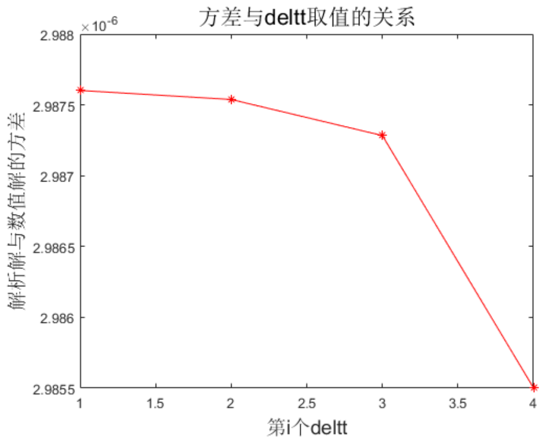

图 6： *Crank – Nicolson* 格式中关于 Δt 选取的 T 的离散方差图

附录

Q1 中的代码（*Matlab* 左除法与 *Thomas* 算法(追赶法)）

Matlab 左除法

```
clc
clear all
close all
%% Pre-processing
afa=0.006;
T0=50;TL=0;TR=0;N=4;% if you want to change the numeric value and number of deltt, you just need to change N and deltt
deltx=0.02;deltt=[0.002,0.004,0.008,0.02];
endx=1;endt=10;
numberx=endx/deltx+1;
Tcurrent=zeros(1,numberx-2);
Tnext=zeros(1,numberx-2)';
Tnumsolution=zeros(1,numberx);
Texasolution=zeros(1,numberx);
Var=zeros(1,N);
for time=1:1:N
numbert=endt/deltt(time)+1;
sita=afa*deltt(time)/deltx^2;
A1=sparse(1:numberx-2,1:numberx-2,1+2*sita,numberx-2,numberx-2);
A2=sparse(1:numberx-3,2:numberx-2,-sita,numberx-2,numberx-2);
A=A1+A2+A2';
%% solve the question
%initial    condition set up
k=1;
for x=deltx:deltx:endx-deltx
                T=T0*sin(pi*x);Tcurrent(1,k)=T;k=k+1;
end
k=k-1;

%solve(左除)
for n=2:1:numbert
     f=Tcurrent';f(1,1)=Tcurrent(1,1)+sita*TL;f(numberx-2,1)=Tcurrent(1,numberx-2)+sita*TR;
     Tnext=A\f;Tcurrent=Tnext';
end

for j=2:numberx-1
     Tnumsolution(1,j)=Tcurrent(1,j-1);
```

```
end
Tnumsolution(1,1)=TL;Tnumsolution(1,numberx)=TR;

%% post-processing
%calculate the exact value
p=2;
for x=deltx:deltx:endx-deltx
    T=T0*sin(pi*x)*exp((-afa*(pi)^2)*endt);Texasolution(1,p)=T;p=p+1;
end
Texasolution(1,1)=TL;Texasolution(1,p)=TR;

%figure
x=0:deltx:endx;
figure
scatter(x,Tnumsolution)
hold on
plot(x,Texasolution,'-r*')
legend('数值解','解析解')
xlabel('位置 x','fontsize',14)
ylabel('温度 T','fontsize',14)
titleName=strcat('t=10,delt 为第',num2str(time),'个值时， T 的数值解与解析解');
title(titleName)
hold off
%calculate the variance
B=Texasolution-Tnumsolution;
Var(time)=var(B);
end
figure
time=1:N;
plot(time,Var,'-r*')
xlabel('第 i 个 deltt','fontsize',14)
ylabel('解析解与数值解的方差','fontsize',14)
title('方差与 deltt 取值的关系','fontsize',16)
```

Thomas 算法(追赶法)

```
clc
clear all
close all
%% Pre-processing
afa=0.006;
T0=50;TL=0;TR=0;N=4;% if you want to change the numeric value and number of
deltt, you just need to change N and deltt
deltx=0.02;deltt=[0.002,0.004,0.008,0.02];
endx=1;endt=10;
numberx=endx/deltx+1;
Tcurrent=zeros(1,numberx-2);
Tnext=zeros(1,numberx-2)';
Tnumsolution=zeros(1,numberx);
Texasolution=zeros(1,numberx);
Var=zeros(1,N);
Y=zeros(1,numberx-2)';
for time=1:1:N
numbert=endt/deltt(time)+1;
sita=afa*deltt(time)/deltx^2;
B=ones(1,numberx-2)*(1+2*sita);A=ones(1,numberx-3)*(-sita);C=ones(1,numberx-
3)*(-sita);U=zeros(1,numberx-2);L=zeros(1,numberx-3);
U(1,1)=1+2*sita;
for i=1:numberx-3
    L(1,i)=A(1,i)/U(1,i);
    U(1,i+1)=B(1,i+1)-L(1,i)*C(1,i);
end
%% solve the question
%initial    condition set up
k=1;
for x=deltx:deltx:endx-deltx
            T=T0*sin(pi*x);Tcurrent(1,k)=T;k=k+1;
end
k=k-1;

%solve(Thomas)
for n=2:1:numbert
    f=Tcurrent';f(1,1)=Tcurrent(1,1)+sita*TL;f(numberx-2,1)=Tcurrent(1,numberx-
2)+sita*TR;
    Y(1,1)=f(1,1);
    for i=2:numberx-2
        Y(i,1)=f(i,1)-L(1,i-1)*Y(i-1,1);
    end
    Tnext(numberx-2,1)=Y(numberx-2,1)/U(1,numberx-2);
```

```
    for i=numberx-3:(-1):1
        Tnext(i,1)=(Y(i,1)-C(1,i)*Tnext(i+1,1))/U(1,i);
    end
    Tcurrent=Tnext';
end

for j=2:numberx-1
    Tnumsolution(1,j)=Tcurrent(1,j-1);
end
Tnumsolution(1,1)=TL;Tnumsolution(1,numberx)=TR;

%% post-processing
%calculate the exact value
p=2;
for x=deltx:deltx:endx-deltx
    T=T0*sin(pi*x)*exp((-afa*(pi)^2)*endt);Texasolution(1,p)=T;p=p+1;
end
Texasolution(1,1)=TL;Texasolution(1,p)=TR;

%figure
x=0:deltx:endx;
figure
scatter(x,Tnumsolution)
hold on
plot(x,Texasolution,'-r*')
legend('数值解','解析解')
xlabel('位置 x','fontsize',14)
ylabel('温度 T','fontsize',14)
titleName=strcat('t=10,delt 为第',num2str(time),'个值时， T 的数值解与解析解');
title(titleName)
hold off
%calculate the variance
Discreteerror=Texasolution-Tnumsolution;
Var(time)=var(Discreteerror);
end
figure
time=1:N;
plot(time,Var,'-r*')
xlabel('第 i 个 deltt','fontsize',14)
ylabel('解析解与数值解的方差','fontsize',14)
title('方差与 deltt 取值的关系','fontsize',16)
```

Q3 中的代码（*Thomas* 算法(追赶法)）

```
clc
clear all
close all
%% Pre-processing
afa=0.006;
T0=50;TL=0;TR=0;N=4;% if you want to change the numeric value and number of
deltt, you just need to change N and deltt
deltx=0.02;deltt=[0.002,0.004,0.008,0.02];
endx=1;endt=10;
numberx=endx/deltx+1;
Tcurrent=zeros(1,numberx-2);
Tnext=zeros(1,numberx-2)';
Tnumsolution=zeros(1,numberx);
Texasolution=zeros(1,numberx);
Var=zeros(1,N);
Y=zeros(1,numberx-2)';
f=zeros(1,numberx-2)';
for time=1:1:N
numbert=endt/deltt(time)+1;
sita=afa*deltt(time)/(2*deltx^2);
B=ones(1,numberx-2)*(-(1+2*sita));A=ones(1,numberx-
3)*(sita);C=ones(1,numberx-3)*(sita);U=zeros(1,numberx-2);L=zeros(1,numberx-3);
U(1,1)=-(1+2*sita);
for i=1:numberx-3
    L(1,i)=A(1,i)/U(1,i);
    U(1,i+1)=B(1,i+1)-L(1,i)*C(1,i);
end
%% solve the question
%initial    condition set up
k=1;
for x=deltx:deltx:endx-deltx
            T=T0*sin(pi*x);Tcurrent(1,k)=T;k=k+1;
end
k=k-1;

%solve(Thomas)
for n=2:1:numbert
    for k=2:numberx-3
        f(k,1)=-Tcurrent(1,k)-sita*(Tcurrent(1,k+1)-2*Tcurrent(1,k)+Tcurrent(1,k-
1));
    end
    f(1,1)=-Tcurrent(1,1)-sita*(Tcurrent(1,2)-2*Tcurrent(1,1)+TL)-sita*TL;
```

```
    f(numberx-2,1)=-Tcurrent(1,numberx-2)-sita*(TR-2*Tcurrent(1,numberx-
2)+Tcurrent(1,numberx-3))-sita*TR;
    Y(1,1)=f(1,1);
    for i=2:numberx-2
        Y(i,1)=f(i,1)-L(1,i-1)*Y(i-1,1);
    end
    Tnext(numberx-2,1)=Y(numberx-2,1)/U(1,numberx-2);
    for i=numberx-3:(-1):1
        Tnext(i,1)=(Y(i,1)-C(1,i)*Tnext(i+1,1))/U(1,i);
    end
    Tcurrent=Tnext';
end

for j=2:numberx-1
    Tnumsolution(1,j)=Tcurrent(1,j-1);
end
Tnumsolution(1,1)=TL;Tnumsolution(1,numberx)=TR;

%% post-processing
%calculate the exact value
p=2;
for x=deltx:deltx:endx-deltx
    T=T0*sin(pi*x)*exp((-afa*(pi)^2)*endt);Texasolution(1,p)=T;p=p+1;
end
Texasolution(1,1)=TL;Texasolution(1,p)=TR;

%figure
x=0:deltx:endx;
figure
scatter(x,Tnumsolution)
hold on
plot(x,Texasolution,'-r*')
legend('数值解','解析解')
xlabel('位置 x','fontsize',14)
ylabel('温度 T','fontsize',14)
titleName=strcat('t=10,delt 为第',num2str(time),'个值时， T 的数值解与解析解');
title(titleName)
hold off
%calculate the variance
Discreteerror=Texasolution-Tnumsolution;
Var(time)=var(Discreteerror);
end
figure
time=1:N;
```

```
plot(time,Var,'-r*')
xlabel('第 i 个 deltt','fontsize',14)
ylabel('解析解与数值解的方差','fontsize',14)
title('方差与 deltt 取值的关系','fontsize',16)
```