课题组组会-练习 1

王程

2023 年 10 月 4 日

一 练习及结果

1. 对带源项的扩散方程 $u_t = u_{xx} + \pi^2 sin\left(\pi x\right), x \in \left[0,1\right], t \geq 0$ **满足以下初始条件** $u\left(x,0\right) = x^2 - x$**，及边界条件** $u\left(0,t\right) = u\left(1,t\right) = 0$。

(1) 求该方程的解析稳态解。

(2) 使用 FHOS 引入辅助变量，将上述方程改写成双曲方程组，考虑均匀网格（单元数：8,16,32,64, ……），时间离散方法使用显式欧拉格式，空间离散使用 DG(P0)+DGP(0) 格式，求解稳态解，并与 (1) 中的解析解进行对比，测试原始变量 u 和它在 x 方向的导数的空间精度。

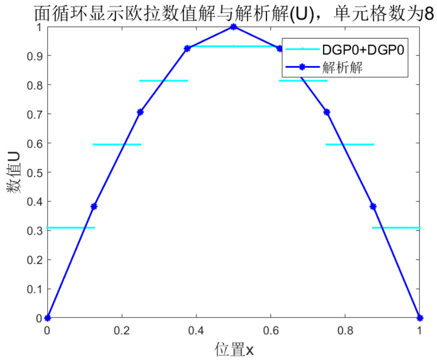
(3) 将时间离散格式改为 BDF1，使用 Jacobi 迭代法重新对以上方法进行求解，并与显式方法进行对比。

解：

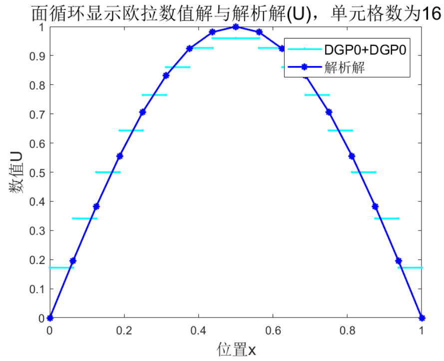
(1) 方程的解析稳态解为：$u\left(x,t\right) = sin\left(\pi x\right)$。

(2) 本题仅考虑物理时间达到稳态时的解，时间离散方法使用显式欧拉格式，空间离散使用 DG(P0) +DG(P0) 格式，采用面循环计算 RHS，最终得到变形后双曲方程组的稳态解。这里仅展示网格数为 8,16,32,64,CFL=0.01 的稳态数值解与解析解的比较图，并给出原始变量 u 和它在 x 方向的导数的空间精度比较图。

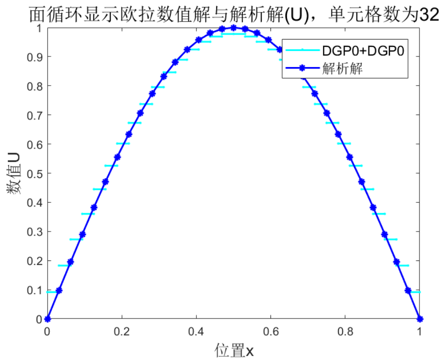
比较 u 稳态数值解和解析解：



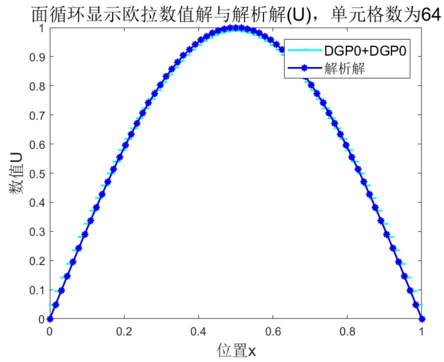
(a) 面循环 U8



(b) 面循环 U16



(c) 面循环 U32



(d) 面循环 U64

图 1: 显式欧拉面循环求得的 u 稳态解与解析解对比

u 的空间精度：

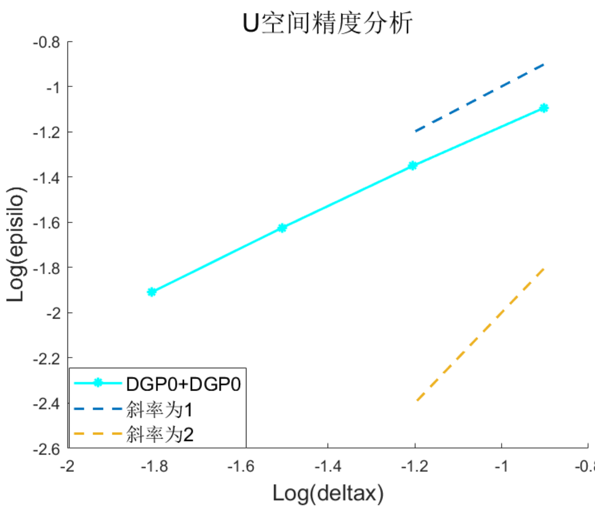
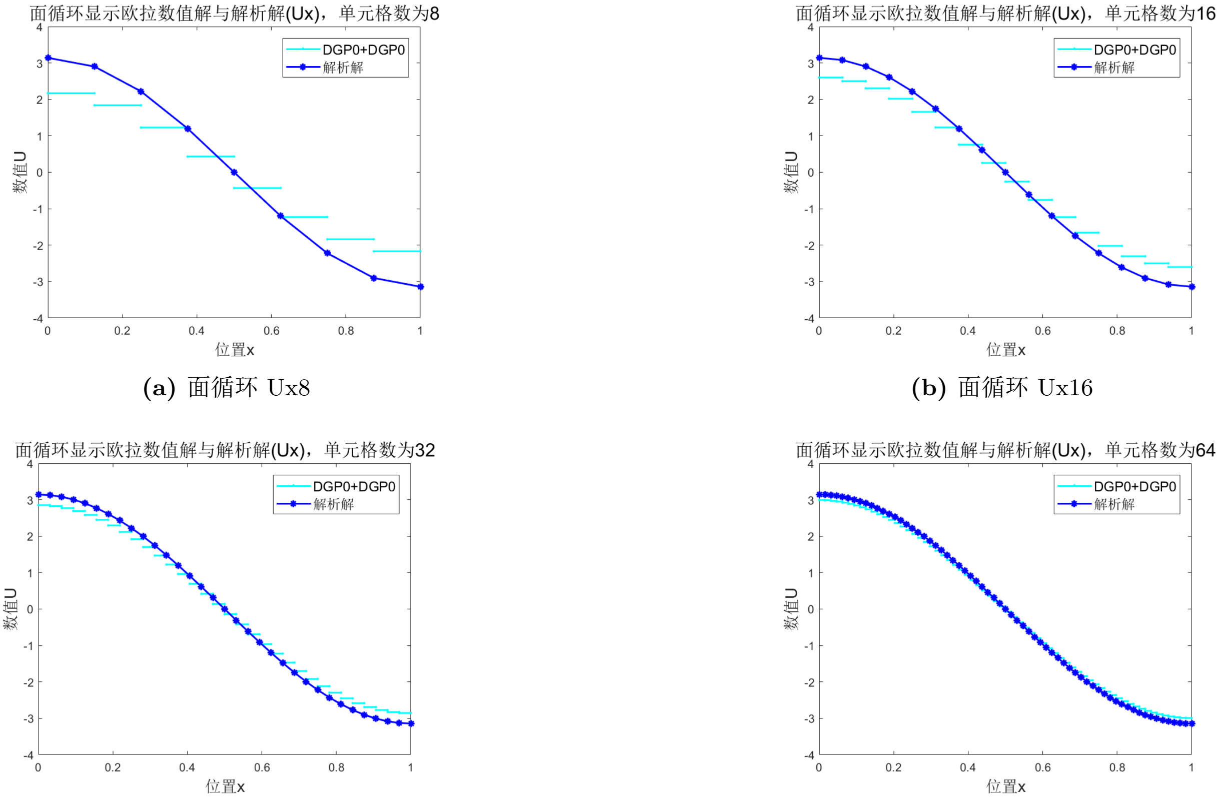


图 2: 面循环下 u 空间精度

比较 u_x 稳态数值解和解析解：



(a) 面循环 Ux8

(b) 面循环 Ux16

(c) 面循环 Ux32

(d) 面循环 Ux64

图 3: 显式欧拉面循环求得的 u_x 稳态解与解析解对比

u_x 的空间精度：

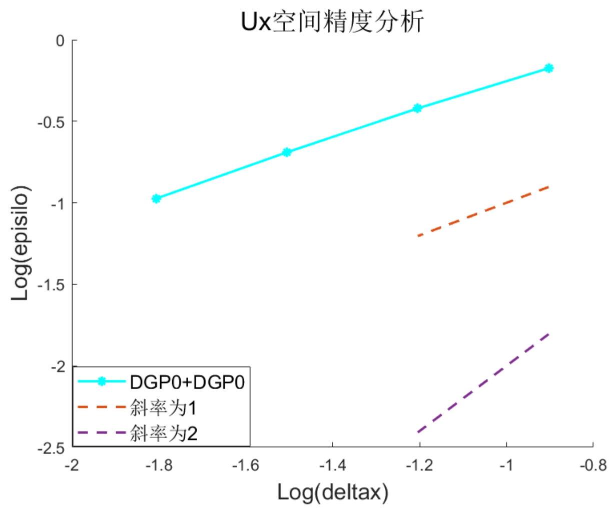
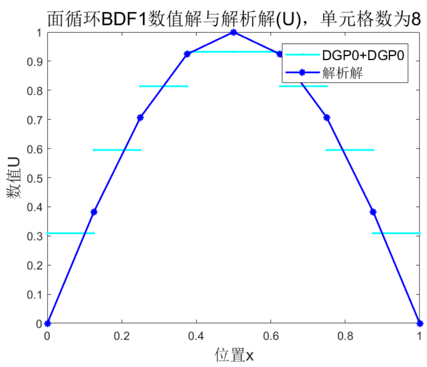


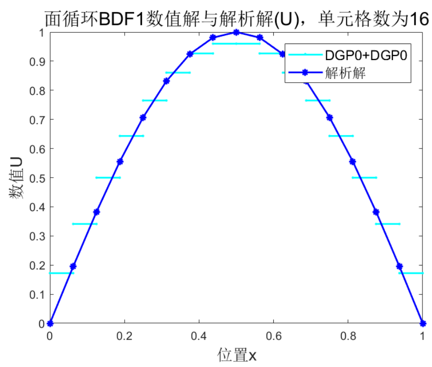
图 4: 面循环下 u_x 空间精度

(3) 将时间离散格式改为 BDF1，使用 Jacobi 迭代法重新对该方程的 DG(P0)+DG(P0) 格式进行求解，采用面循环计算 RHS，最终得到变形后双曲方程组的稳态解。这里仅展示网格数为 8,16,32,64,CFL=0.01 的稳态数值解与解析解的比较图，并给出原始变量 u 和 u_x 的空间精度图。

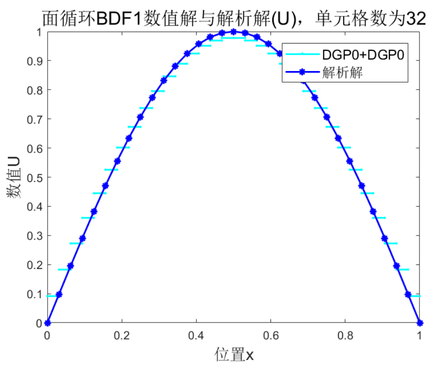
比较 u 稳态数值解和解析解：



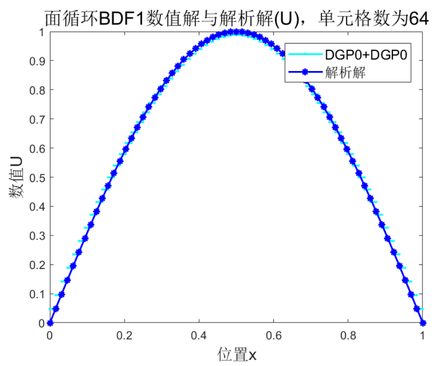
(a) 面循环 U8



(b) 面循环 U16



(c) 面循环 U32



(d) 面循环 U64

图 5: BDF1 面循环求得的 u 稳态解与解析解对比

u 的空间精度：

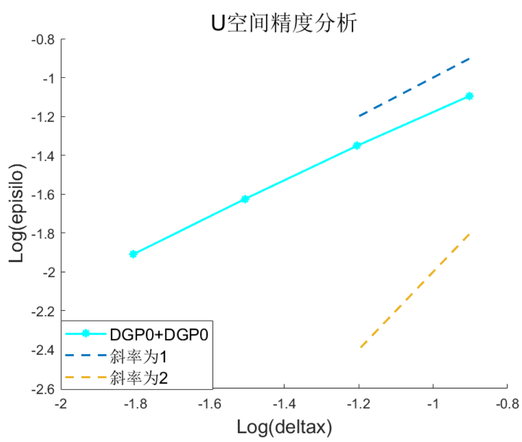
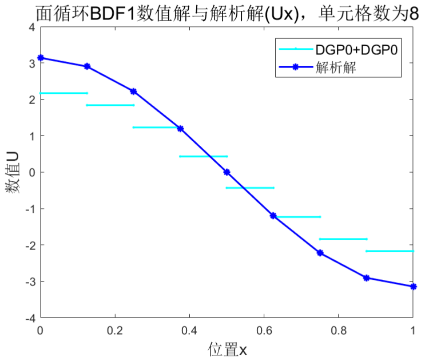
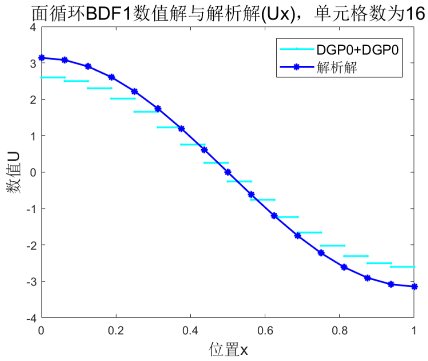


图 6: BDF1 面循环下 u 空间精度

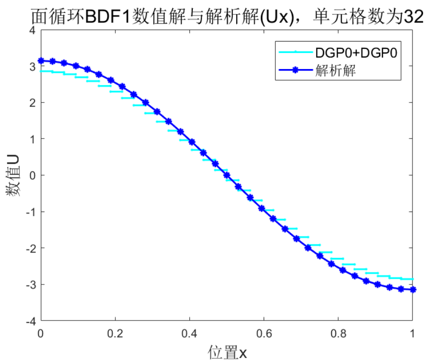
比较 u_x 稳态数值解和解析解：



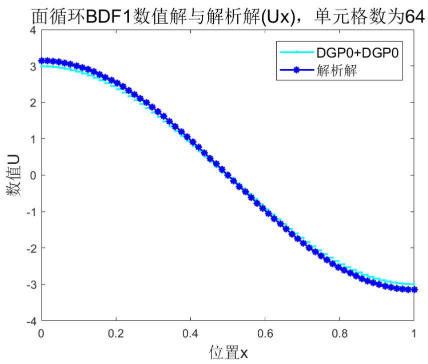
(a) 面循环 Ux8



(b) 面循环 Ux16



(c) 面循环 Ux32



(d) 面循环 Ux64

图 7: BDF1 面循环求得的 u_x 稳态解与解析解对比

u_x 的空间精度：

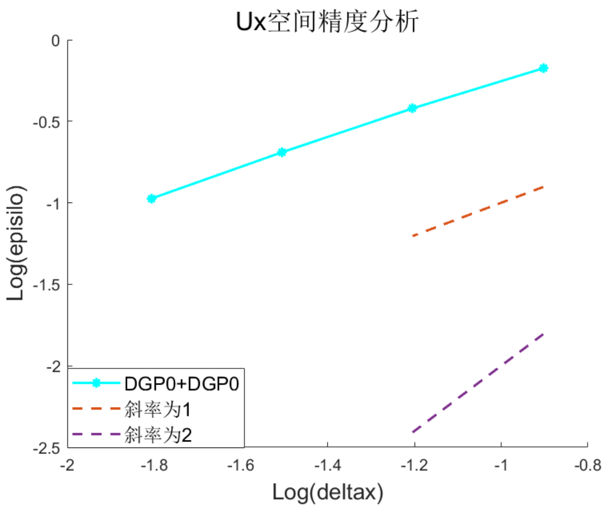


图 8: BDF1 面循环下 u_x 空间精度

二　附录 (代码)

BDF1 main

```
clc
clear all
close all
%Unit=64;CFL=0.01;endtau=1;endx=1;deltax=endx/Unit;numberx=endx/deltax+1;
tol=10^(-10);
nu=1;Lr=1/(2*pi);Tr=Lr^2/nu;
abslambda=sqrt(nu/Tr);deltatau=CFL*deltax/abslambda;%伪时间变量
B1=1;
C=[B1,0;0,B1/deltax];Mtau=[deltax,0;0,1/deltax];%此为推导出的 U=CV 中的 C
A=[abslambda,0;0,abslambda];
Uexasolution=zeros(2,numberx);
%后处理预设的量
Unumsolution1=zeros(1,2);
Unumsolution2=zeros(2,numberx-1);
%计算空间精度所预设的量
Acc=zeros(3,4);a1=[1/8,1/16,1/32,1/64];a2=[1/8,1/16];
%x=0;
for k=1:numberx
Uexasolution(1,k)=sin(pi*x);
Uexasolution(2,k)=pi*cos(pi*x);
x=x+deltax;
end

[UDGP0plusDGP0,endtau0plus0]=subDGP0plusDGP0(Unit,CFL,endtau);

%figure
x=0*deltax:deltax:1*deltax;
Unumsolution1(1,1)=UDGP0plusDGP0(1,1);Unumsolution1(1,2)=UDGP0plusDGP0
    (1,1);
plot(x,Unumsolution1,'-c.','linewidth',1.5);hold on
H1=plot(x,Unumsolution1,'-c.','linewidth',1.5);hold on
for i=2:numberx-1
x=(i-1)*deltax:deltax:i*deltax;
Unumsolution1(1,1)=UDGP0plusDGP0(1,i);Unumsolution1(1,2)=UDGP0plusDGP0
    (1,i);
plot(x,Unumsolution1,'-c.','linewidth',1.5)
end
```

```
%plot the exact
y=0:deltax:endx;
plot(y,Uexasolution(1,:),'-b*','linewidth',1.5)
H2=plot(y,Uexasolution(1,:),'-b*','linewidth',1.5);hold on
lgd=legend([H1,H2],'DGP0+DGP0','解析解');
lgd.FontSize=12;
xlabel('位置x','fontsize',14)
ylabel('数值U','fontsize',14)
title('面循环BDF1数值解与解析解(U), 单元格数为64','fontsize',16)
hold off

%plot the ux
%DGP0plusDGP0
figure
x=0*deltax:deltax:1*deltax;
Unumsolution1(1,1)=UDGP0plusDGP0(2,1);Unumsolution1(1,2)=UDGP0plusDGP0
    (2,1);
plot(x,Unumsolution1,'-c.','linewidth',1.5);hold on
H1=plot(x,Unumsolution1,'-c.','linewidth',1.5);hold on
for i=2:numberx-1
x=(i-1)*deltax:deltax:i*deltax;
Unumsolution1(1,1)=UDGP0plusDGP0(2,i);Unumsolution1(1,2)=UDGP0plusDGP0
    (2,i);
plot(x,Unumsolution1,'-c.','linewidth',1.5)
end

%exact
y=0:deltax:endx;
plot(y,Uexasolution(2,:),'-b*','linewidth',1.5)
H2=plot(y,Uexasolution(2,:),'-b*','linewidth',1.5);hold on
lgd=legend([H1,H2],'DGP0+DGP0','解析解');
lgd.FontSize=12;
xlabel('位置x','fontsize',14)
ylabel('数值U','fontsize',14)
title('面循环BDF1数值解与解析解(Ux), 单元格数为64','fontsize',16)
hold off

%determine the accuracy of space U
Acc(1,1)=AccuracyU(8,subDGP0plusDGP0(8,CFL,endtau));
```

```
Acc(1,2)=AccuracyU(16,subDGP0plusDGP0(16,CFL,endtau));
Acc(1,3)=AccuracyU(32,subDGP0plusDGP0(32,CFL,endtau));
Acc(1,4)=AccuracyU(64,subDGP0plusDGP0(64,CFL,endtau));

figure
hold on
plot(log10(a1),log10(Acc(1,:)),'-c*','linewidth',1.5)
H1=plot(log10(a1),log10(Acc(1,:)),'-c*','linewidth',1.5);

H2=plot(log10(a2),1*log10(a2),'--','linewidth',1.5);
plot(log10(a2),2*log10(a2),'--','linewidth',1.5)
H3=plot(log10(a2),2*log10(a2),'--','linewidth',1.5);
lgd=legend([H1,H2,H3],'DGP0+DGP0','斜率为1','斜率为2');
lgd.FontSize=12;
xlabel('Log(deltax)','fontsize',14)
ylabel('Log(episilo)','fontsize',14)
title('U空间精度分析','fontsize',16)

%determine the accuracy of space Ux
%DGP0
Acc(1,1)=AccuracyUx(8,subDGP0plusDGP0(8,CFL,endtau));
Acc(1,2)=AccuracyUx(16,subDGP0plusDGP0(16,CFL,endtau));
Acc(1,3)=AccuracyUx(32,subDGP0plusDGP0(32,CFL,endtau));
Acc(1,4)=AccuracyUx(64,subDGP0plusDGP0(64,CFL,endtau));

figure
hold on
plot(log10(a1),log10(Acc(1,:)),'-c*','linewidth',1.5)
H1=plot(log10(a1),log10(Acc(1,:)),'-c*','linewidth',1.5);

plot(log10(a2),1*log10(a2),'--','linewidth',1.5)
H2=plot(log10(a2),1*log10(a2),'--','linewidth',1.5);
plot(log10(a2),2*log10(a2),'--','linewidth',1.5)
H3=plot(log10(a2),2*log10(a2),'--','linewidth',1.5);
lgd=legend([H1,H2,H3],'DGP0+DGP0','斜率为1','斜率为2');
lgd.FontSize=12;
xlabel('Log(deltax)','fontsize',14)
ylabel('Log(episilo)','fontsize',14)
title('Ux空间精度分析','fontsize',16)
```

BDF1 function DG(P0)+DG(P0)

```
function [Unumsolution,n]=subDGP0plusDGP0(Unit,CFL,endtau)
%Some basic paramater
endx=1;deltax=endx/Unit;numberx=endx/deltax+1;
tol=10^(-10);
nu=1;Lr=1/(2*pi);Tr=Lr^2/nu;
abslambda=sqrt(nu/Tr);deltatau=CFL*deltax/abslambda;%伪时间变量
B1=1;
C=[B1,0;0,B1/deltax];Mtau=[deltax,0;0,1/deltax];%此为推导出的 U=CV 中的 C
A=[abslambda,0;0,abslambda];
R=zeros(2*Unit,1);
Rd=zeros(2,numberx-1);
Rb=zeros(2,numberx-1);
Fn=zeros(2,numberx);

%构建 LHS
%Mtau/deltatau
LHS1=sparse(1:2:2*Unit-1,1:2:2*Unit-1,deltax/deltatau,2*Unit,2*Unit);
LHS1=LHS1+sparse(2:2:2*Unit,2:2:2*Unit,1/(deltax*deltatau),2*Unit,2*Unit
    );
%Rdomain
LHS2=-sparse(2:2:2*Unit,2:2:2*Unit,-1/(Tr*deltax),2*Unit,2*Unit);
%Rboundary
LHS3=zeros(2*Unit,2*Unit);
for iface=2:numberx-1
ieL=iface-1;
ieR=iface;
%diag
LHS3(2*ieL-1:2*ieL,2*ieL-1:2*ieL)=LHS3(2*ieL-1:2*ieL,2*ieL-1:2*ieL)+C'*[
    abslambda/2,-nu/(2*deltax);-1/(2*Tr),abslambda/(2*deltax)];
LHS3(2*ieR-1:2*ieR,2*ieR-1:2*ieR)=LHS3(2*ieR-1:2*ieR,2*ieR-1:2*ieR)-C
    '*[-abslambda/2,-nu/(2*deltax);-1/(2*Tr),-abslambda/(2*deltax)];
%upper
LHS3(2*ieL-1:2*ieL,2*ieR-1:2*ieR)=LHS3(2*ieL-1:2*ieL,2*ieR-1:2*ieR)+C
    '*[-abslambda/2,-nu/(2*deltax);-1/(2*Tr),-abslambda/(2*deltax)];
%lower
LHS3(2*ieR-1:2*ieR,2*ieL-1:2*ieL)=LHS3(2*ieR-1:2*ieR,2*ieL-1:2*ieL)-C'*[
    abslambda/2,-nu/(2*deltax);-1/(2*Tr),abslambda/(2*deltax)];
end
```

```
LHS3(2*1-1:2*1,2*1-1:2*1)=LHS3(2*1-1:2*1,2*1-1:2*1)-C'*([abslambda/2,-nu/2;-1/(2*Tr),abslambda/2]*[0,0;0,1]+[-abslambda/2,-nu/2;-1/(2*Tr),-abslambda/2])*C;
LHS3(2*(numberx-1)-1:2*(numberx-1),2*(numberx-1)-1:2*(numberx-1))=LHS3(2*(numberx-1)-1:2*(numberx-1),2*(numberx-1)-1:2*(numberx-1))+C'*([abslambda/2,-nu/2;-1/(2*Tr),abslambda/2]+[-abslambda/2,-nu/2;-1/(2*Tr),-abslambda/2]*[0,0;0,1])*C;

LHS=LHS1+LHS2+LHS3;

%取出我们所需要的 D
D=zeros(2*Unit,2*Unit);
for iface=2:numberx
ieL=iface-1;
D(2*ieL-1:2*ieL,2*ieL-1:2*ieL)=LHS(2*ieL-1:2*ieL,2*ieL-1:2*ieL);
end
%为循环所预设的一些量
Ucurrent=zeros(2,numberx-1);
Unext=zeros(2*Unit,1);
%initial condition set up
x=0;
for k=1:numberx-1
Ucurrent(1,k)=(x+deltax/2)^2-(x+deltax/2);
Ucurrent(2,k)=(2*(x+deltax/2)-1)*deltax;
x=x+deltax;
end

%Rdomain
x=0;
for k=1:numberx-1
Rd(1,k)=pi*(cos(pi*x)-cos(pi*(x+deltax)));
Rd(2,k)=-Ucurrent(2,k)/(Tr*deltax);
x=x+deltax;
end
%Rboundary
for iface=2:numberx-1
ieL=iface-1;
ieR=iface;
Fn(:,iface)=0.5*([-nu*Ucurrent(2,ieL)/deltax;-Ucurrent(1,ieL)/Tr]+[-nu*Ucurrent(2,ieR)/deltax;-Ucurrent(1,ieR)/Tr])-0.5*A*([Ucurrent(1,ieR);
```

```
    Ucurrent(2,ieR)/deltax]-[Ucurrent(1,ieL);Ucurrent(2,ieL)/deltax]);
Rb(:,ieL)=Rb(:,ieL)-C'*Fn(:,iface);
Rb(:,ieR)=Rb(:,ieR)+C'*Fn(:,iface);
end
Fn(:,1)=0.5*([-nu*Ucurrent(2,1)/deltax;0]+[-nu*Ucurrent(2,1)/deltax;-
    Ucurrent(1,1)/Tr])-0.5*A*([Ucurrent(1,1);Ucurrent(2,1)/deltax]-[0;
    Ucurrent(2,1)/deltax]);
Fn(:,numberx)=0.5*([-nu*Ucurrent(2,numberx-1)/deltax;-Ucurrent(1,numberx
    -1)/Tr]+[-nu*Ucurrent(2,numberx-1)/deltax;0])-0.5*A*([0;Ucurrent(2,
    numberx-1)/deltax]-[Ucurrent(1,numberx-1);Ucurrent(2,numberx-1)/
    deltax]);
Rb(:,1)=Rb(:,1)+C'*Fn(:,1);
Rb(:,numberx-1)=Rb(:,numberx-1)-C'*Fn(:,numberx);

%R 组装
for k=1:numberx-1
R(2*k-1:2*k,1)=Rd(:,k)+Rb(:,k);
end
%进行必要的向量等价转变
for k=1:numberx-1
Unext(2*k-1:2*k,1)=Ucurrent(:,k);
end
%循环迭代
for n=deltatau:deltatau:endtau
X=D\R;
if max(X)<tol
break
end
Unext=Unext+X;
Rd=zeros(2,numberx-1);
Rb=zeros(2,numberx-1);
for k=1:numberx-1
Ucurrent(:,k)=Unext(2*k-1:2*k,1);
end
%Rdomain
x=0;
for k=1:numberx-1
Rd(1,k)=pi*(cos(pi*x)-cos(pi*(x+deltax)));
Rd(2,k)=-Ucurrent(2,k)/(Tr*deltax);
x=x+deltax;
```

```
end
%Rboundary
for iface=2:numberx-1
ieL=iface-1;
ieR=iface;
Fn(:,iface)=0.5*([-nu*Ucurrent(2,ieL)/deltax;-Ucurrent(1,ieL)/Tr]+[-nu*Ucurrent(2,ieR)/deltax;-Ucurrent(1,ieR)/Tr])-0.5*A*([Ucurrent(1,ieR);Ucurrent(2,ieR)/deltax]-[Ucurrent(1,ieL);Ucurrent(2,ieL)/deltax]);
Rb(:,ieL)=Rb(:,ieL)-C'*Fn(:,iface);
Rb(:,ieR)=Rb(:,ieR)+C'*Fn(:,iface);
end
Fn(:,1)=0.5*([-nu*Ucurrent(2,1)/deltax;0]+[-nu*Ucurrent(2,1)/deltax;-Ucurrent(1,1)/Tr])-0.5*A*([Ucurrent(1,1);Ucurrent(2,1)/deltax]-[0;Ucurrent(2,1)/deltax]);
Fn(:,numberx)=0.5*([-nu*Ucurrent(2,numberx-1)/deltax;-Ucurrent(1,numberx-1)/Tr]+[-nu*Ucurrent(2,numberx-1)/deltax;0])-0.5*A*([0;Ucurrent(2,numberx-1)/deltax]-[Ucurrent(1,numberx-1);Ucurrent(2,numberx-1)/deltax]);
Rb(:,1)=Rb(:,1)+C'*Fn(:,1);
Rb(:,numberx-1)=Rb(:,numberx-1)-C'*Fn(:,numberx);

%R 组装
for k=1:numberx-1
R(2*k-1:2*k,1)=Rd(:,k)+Rb(:,k);
end

for k=1:numberx-1
Unext(2*k-1:2*k,1)=Ucurrent(:,k);
end
end
Unumsolution(1,:)=Ucurrent(1,:);Unumsolution(2,:)=Ucurrent(2,:)/deltax;
end
```

u 空间精度分析

```
function A=AccuracyU(Unit,Unumsolution)
%deltx=1/Unit;endx=1;
numberx=endx/deltx+1;
%calculate the accuracy of space DGp0+DGP0
I1=0;t=[-1/sqrt(5),0,1/sqrt(5)];W=[5/9,8/9,5/9];
k=1;%determine the correctness of the program
for x=0:deltx:endx-deltx
for i=1:3
xi=deltx/2*t(i)+0.5*(2*x+deltx);
for m=1:numberx-1
if xi>(m-1)*deltx&&xi<m*deltx
fi=(sin(pi*xi)-Unumsolution(1,m))^2;k=k+1;
end
end
I1=I1+W(i)*fi;
end
end
I1=I1*0.5*deltx;
A=sqrt(I1);
end
```

u_x 空间精度分析

```
function A1=AccuracyUx(Unit,Unumsolution)
%deltx=1/Unit;endx=1;
numberx=endx/deltx+1;
%calculate the accuracy of space
I2=0;t=[-1/sqrt(5),0,1/sqrt(5)];W=[5/9,8/9,5/9];
k=1;%determine the correctness of the program
for x=0:deltx:endx-deltx
for i=1:3
xi=deltx/2*t(i)+0.5*(2*x+deltx);
for m=1:numberx-1
if xi>(m-1)*deltx&&xi<m*deltx
fi=(pi*cos(pi*xi)-Unumsolution(2,m))^2;k=k+1;
end
end
I2=I2+W(i)*fi;
end
end
I2=I2*0.5*deltx;
A1=sqrt(I2);
end
```