

## 课题组组会-练习 2

楼嘉霖

苏州大学数学科学学院

2023 年 10 月 7 日

1. 已知方程组  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ , 其中  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{20 \times 20}$ , 定义为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1/2 & -1/4 & & & \\ -1/2 & 3 & -1/2 & -1/4 & & \\ -1/4 & -1/2 & 3 & -1/2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & -1/4 \\ & & -1/4 & 1/2 & 3 & 1/2 \\ & & & -1/4 & -1/2 & 3 \end{bmatrix}.$$

试通过迭代法求解此方程组, 认识迭代法收敛的含义以及迭代初值和方程组系数矩阵性质对收敛速度的影响。

实验要求:

(1) 选取不同的初始向量  $\mathbf{x}^{(0)}$  和不同的方程组右端项向量  $\mathbf{b}$ , 给定迭代误差要求, 用雅克比迭代法和高斯-赛德尔迭代法计算, 观测得到的迭代向量序列是否收敛? 若收敛, 记录迭代次数, 分析计算结果并得出你的结论;

(2) 取定右端向量  $\mathbf{b}$  和初始向量  $\mathbf{x}^{(0)}$ , 将  $\mathbf{A}$  的主对角线元素成倍增长若干次, 非主对角线元素不变, 每次用雅克比迭代法计算, 要求迭代误差满足  $\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\|_{\infty} < 10^{-5}$ , 比较收敛速度, 分析现象, 并得出你的结论。

(3) 取定右端向量  $\mathbf{b}$  和初始向量  $\mathbf{x}^{(0)}$ , 分别使用 a) 高斯-赛德尔迭代, b) 对称高斯-赛德尔迭代, c) 对以上两种方法分别加上松弛因子  $\omega$  进行求解, 比较收敛速度, 分析现象, 得出结论。

2. 对带源项的扩散方程  $u_t = u_{xx} + \pi^2 \sin(\pi x), x \in [0, 1], t \geq 0$ , 满足以下初始条件  $u(x, 0) = x^2 - x$ , 及边界条件  $u(0, t) = u(1, t) = 0$ 。

在练习 1 的基础上, 空间离散使用 DG(P0)+DG(P0) 格式, 时间离散格式使用 BDF1, 使用 LU-SGS 方法在均匀网格下进行求解。