

CFD 入门练习 1

楼嘉霖

苏州大学数学科学学院

2023 年 4 月 21 日

1. 判断以下偏微分方程的类型（双曲、抛物或椭圆）。

$$(1) \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad \alpha > 0$$

$$(2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$$

$$(3) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad c > 0$$

$$(4) \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad c > 0$$

2. 用泰勒展开推导不均匀网格下 $f'(x)$ 的二阶精度中心差分公式。

$$(x_{i+1} - x_i = \Delta x^+, x_i - x_{i-1} = \Delta x^-)$$

3. 对一维热传导方程 $T_t = \alpha T_{xx}, x \in [0, 1], t \geq 0$, 满足以下初始条件 $T(x, 0) = T_0 \sin(\pi x)$, 及边界条件 $T(0, t) = T_L, T(1, t) = T_R$ 。其中 $\alpha = 0.06, T_0 = 50, T_L = T_R = 0$ 。

(1) 求出该方程的解析解 $T(x, t)$ 。

(2) 当 $\Delta x = 0.02, \Delta t = 0.002$ 时, 将课堂上推导的显式数值格式编程计算, 求当 $t = 10$ 时, T 的数值解, 并于解析解进行比较。

(3) 保持 Δx 不变, 尝试放大 Δt , 观察数值解的变化。