课题组组会-练习 12

王程

2024 年 1 月 18 日

一　练习及结果

对于 $u = u(x)$, 考虑以下椭圆边值问题，

$$\begin{cases} -u''(x) = -10, x \in (0,1) \\ u(0) = 0 \\ u'(1) = 0 \end{cases}$$

1) 求出该问题的精确解，并做图。

2) 考虑非均匀的 3 个点组成的网格 $(x_1 = 0, x_2 = h, x_3 = 1)$, 使用二阶有限差分法，计算三个点上的数值解。

2) 考虑非均匀的 3 个点组成的网格 $(x_1 = 0, x_2 = h, x_3 = 1)$, 使用线性有限元法，计算三个点上的数值解。

解:

1) **精确解**：由于 $u''(x)=10$，所以 $u(x)$ 是一元二次多项式，假设 $u(x)=ax^2+bx+c$。

$$\begin{cases} 2a = 10 \\ 2a+b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = -10 \\ c = 0 \end{cases}$$

所以 $u(x)=5x^2-10x=5x(x-2)$. 图像如下：

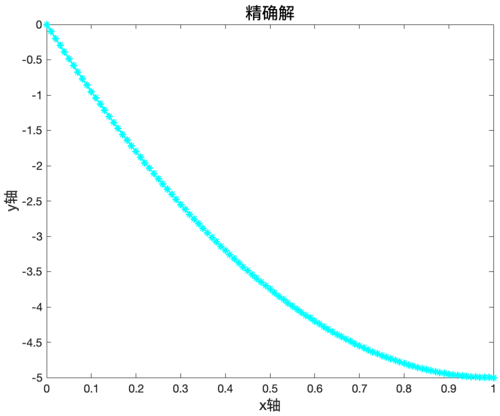

图 1: 精确解：$u(x)=5x(x-2)$

2) **二阶有限差分**:

对 $u'(1)$ 进行 2 阶单侧差分法:

$$u(h)=u(1)+u'(1)(h-1)+u''(1)\frac{(h-1)^2}{2}+o(h-1)^2 \tag{1}$$

$$u(0)=u(1)+u'(1)(-1)+u''(1)\frac{1}{2}+o\left(1^2\right) \tag{2}$$

$(2)\times(h-1)^2-(1)$

$\Rightarrow (h-1)^2u(0)-u(h)=\left[(h-1)^2-1\right]u(1)+\left[-(h-1)^2-(h-1)\right]u'(1)$, 由于 $u(0)=0, u'(1)=0$

$$u(h)+h(h-2)u(1)=0 \tag{3}$$

同理，对 2 阶导数 $u''(h)$ 进行二阶差分

$$u(1)=u(h)+u'(h)(1-h)+u''(h)\frac{(1-h)^2}{2}+o\left((1-h)^3\right) \tag{4}$$

$$u(0)=u(h)+u'(h)(-h)+u''(h)\frac{h^2}{2}+o\left((-h)^3\right) \tag{5}$$

(4)$\times\frac{1-h}{h}$+(3)
$\Rightarrow u''(h)=2u(0)\frac{1}{h}+u(1)\frac{2}{1-h}-u(h)\frac{2}{h(1-h)}+o\left(h^2\right)$，由于 $u''(h)=10,u(0)=0$

$$10(1-h)h=2hu(1)-2u(h) \tag{6}$$

由(3)和(6)知

$$\begin{cases} u(1)=-5 \\ u(h)=5h(h-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(0)=0 \\ u(1)=-5 \\ u(h)=5h(h-2) \end{cases}$$

3)FEM:
该椭圆边值问题

$$\begin{cases} -u''(x)=-10, x\in(0,1) \\ u(0)=0 \\ u'(1)=0 \end{cases}$$

等价于

$$\begin{cases} -\Delta u=-10, x\in(0,1) \\ u(0)=0 \\ u'(1)=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ 变分问题:

$$\int_0^1 -\Delta u\cdot v dx=\int_0^1 -10v dx$$

$$\int_0^1 \nabla u\cdot\nabla v dx=\int_\Gamma u'\cdot n\cdot v d\Gamma+\int_0^1 -10v dx=u'(1)v(1)-u'(0)v(0)-10\int_0^1 v dx$$

构建子空间进行离散:

$$\int_0^1 \nabla u_h\cdot\nabla v_h dx=u'(1)v_h(1)-u'(0)v_h(0)-10\int_0^1 v_h dx$$

令 $v_h=B_i$
其中

$$B_1=\begin{cases} 1-\dfrac{1}{h}x, x\in[0,h) \\ 0, x\in[h,1] \end{cases} \quad \nabla B_1=\begin{cases} -\dfrac{1}{h}, x\in[0,h) \\ 0, x\in[h,1] \end{cases}$$

$$B_2=\begin{cases}\dfrac{1}{h}x,x\in[0,h)\\ \dfrac{x-1}{h-1},x\in[h,1]\end{cases}\quad \nabla B_2=\begin{cases}\dfrac{1}{h},x\in[0,h)\\ \dfrac{1}{h-1},x\in[h,1]\end{cases}$$

$$B_3=\begin{cases}0,x\in[0,h)\\ \dfrac{x-h}{1-h},x\in[h,1]\end{cases}\quad \nabla B_3=\begin{cases}0,x\in[0,h)\\ \dfrac{1}{1-h},x\in[h,1]\end{cases}$$

令 $u_h(x)=\sum_{j=1}^{3}u_jB_j(x)$

$$\sum_{j=1}^{3}\int_0^1\nabla B_j\cdot\nabla B_i dxu_j=u'(1)B_i(1)-u'(0)B_i(0)-10\int_0^1B_i(x)dx,i=1,2,3.$$

问题变为求解线性方程组 $Ax=b$.
由于 $u(0)=0$, 所以采取划行划列法

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{h}&0&0\\0&-\frac{1}{h(h-1)}&\frac{1}{h-1}\\0&\frac{1}{h-1}&\frac{1}{1-h}\end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix}u(0)\\u(h)\\u(1)\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}0\\-5\\5(h-1)\end{pmatrix}$$

因此

$$\begin{cases}u(0)=0\\u(h)=5h(h-2)\\u(1)=-5\end{cases}$$

Remarks:
关于变分方法的另一半证明：

$$\int_\Omega-\Delta\varphi vd\Omega=0,\quad\forall v\in\mathcal{V}$$

$\Rightarrow\Delta\varphi:\Omega\to K\&\Delta\varphi\perp\mathcal{V}$ 并且 $\mathcal{V}$ 是 Ω 上函数空间的子空间。
由于

1).Ω 上的函数空间构成 Hilbert 空间.

2). 设 $\mathcal{S}=\{v_i|i\in\gamma\}$ 是 $\mathcal{V}$ 的标准正交集，$\mathcal{S}$ 也是 1）的标准正交集。由于 $\mathcal{V}$ 封闭，所以 $\mathcal{S}$ 封闭。

$\Rightarrow\Delta\varphi=\sum_{i\in\gamma}<\Delta\varphi,V_i>V_i$(泛函分析讲义 P72)。分别令 $V=V_i,i\in\gamma\Rightarrow<\Delta\varphi,V_i>=0\Rightarrow\Delta\varphi=0.$
得证.