课题组组会-练习 9

王程

2023 年 12 月 11 日

一　练习及结果

1. 对于 $\varphi=\varphi(x,t)$ 考虑以下一维对流-扩散方程

$$\begin{cases}\varphi_t+a\varphi_x=\nu\varphi_{xx}+f(x), x\in[0,1], t\geq 0.\\ \varphi(x,0)=x^2-x\\ \varphi(0,t)=\varphi(1,t)=0\end{cases}$$

其中，$a=1,\nu=1,f(x)=\nu\pi^2 sin(\pi x)+a\pi cos(\pi x)$。

在均匀网格下，尝试在显式/隐式格式下使用 Hyperbolic DG/rDG 的方法求上述方程的稳态解，并与解析解进行比较,空间离散方式可选用 DG(P0P1)+DG(P0),DG(P0P2)+rDG(P0P1),DG(P0P2)+DG(P1)。

调整系数 a,ν, 在不同的雷诺数下进行比较数值解和解析解。

2. 考虑非稳态的一维对流-扩散方程，其中精确解为

$$\varphi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4t+1}}exp\left(-\frac{(x-at-x_0)^2}{\nu(4t+1)}\right), 0\leq x\leq 2.$$

其中，$a=10^4,\nu=0.01,x_0=0.5.$

物理时间步长设置为 10^{-9}, 在均匀网格 ($Nelem=32,64,128,256$) 下，尝试在双时间步法下使用 Hyperbolic DG/rDG 的方法求上述方程在 t=10^{-6} 时刻的数值解，并与解析解进行比较。

解：1.

a). 为对比 Explicit 与 Implicit 方法的不同，考虑在不同空间离散格式下固定雷诺数为 1：$a=1,\nu=1$，对比 Explicit 与 Implicit 方法的数值解：

表 1: DG(P0P1)+DG(P0) Explicit 与 Implicit 数值解对比

$Re=\frac{\lvert a\rvert}{\nu}=1: a=1,\nu=1$				
Nelement	8	16	32	64
Explicit $CFL_\tau=0.01, tol=10^{-8}$				
$L_2 errors-U$	0.0629	0.0327	0.0167	0.0084
$L_2 errors-U_x$	0.2563	0.1272	0.0634	0.0317
$Matlab$ 运行时间 (s)	1.2203	1.774	4.404	12.701
Implicit $CFL_\tau=100, tol=10^{-8}$				
$L_2 errors-U$	0.0540	0.0321	0.0167	0.0084
$L_2 errors-U_x$	0.2625	0.1274	0.0634	0.0317
$Matlab$ 运行时间 (s)	0.762	0.909	0.812	0.890

表 2: DG(P0P2)+DG(P1) Explicit 与 Implicit 数值解对比

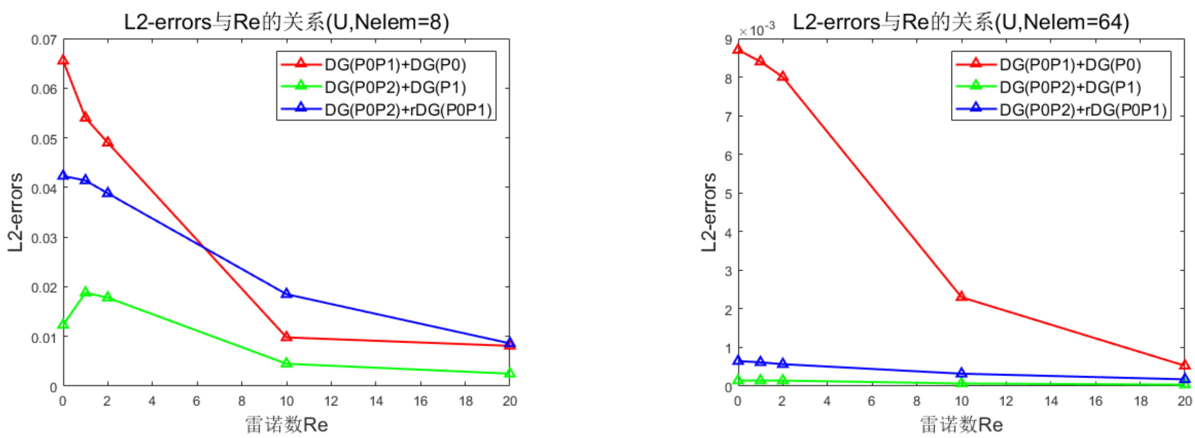
$Re=\frac{\lvert a\rvert}{\nu}=1: a=1,\nu=1$				
Nelement	8	16	32	64
Explicit $CFL_\tau=0.01, tol=10^{-8}$				
$L_2 errors-U$	0.0092	0.0023	5.83×10^{-4}	1.60×10^{-4}
$L_2 errors-U_x$	0.0311	0.0078	0.0020	5.86×10^{-4}
$Matlab$ 运行时间 (s)	1.116	1.388	2.959	8.147
Implicit $CFL_\tau=100, tol=10^{-8}$				
$L_2 errors-U$	0.0188	0.0031	5.92×10^{-4}	1.43×10^{-4}
$L_2 errors-U_x$	0.0602	0.0101	0.002	4.85×10^{-4}
$Matlab$ 运行时间 (s)	0.774	0.918	0.970	1.086

表 3: DG(P0P2)+rDG(P0P1) Explicit 与 Implicit 数值解对比

$Re = \frac{\lvert a \rvert}{\nu} = 1 : a = 1, \nu = 1$	$\omega_0 = 1, \omega_1 = 1, \omega_2 = 1, \omega_b = 0$			
Nelement	8	16	32	64
Explicit $CFL_\tau = 0.01, tol = 10^{-8}$				
$L_2 errors - U$	0.0315	0.0106	0.0026	6.32×10^{-4}
$L_2 errors - U_x$	0.0694	0.0148	0.003	6.95×10^{-4}
$Matlab$ 运行时间 (s)	0.978	1.635	3.209	9.406
Implicit $CFL_\tau = 100, tol = 10^{-8}$				
$L_2 errors - U$	0.0414	0.0111	0.0026	6.16×10^{-4}
$L_2 errors - U_x$	0.0747	0.0157	0.003	6.10×10^{-4}
$Matlab$ 运行时间 (s)	0.748	0.771	0.806	0.95

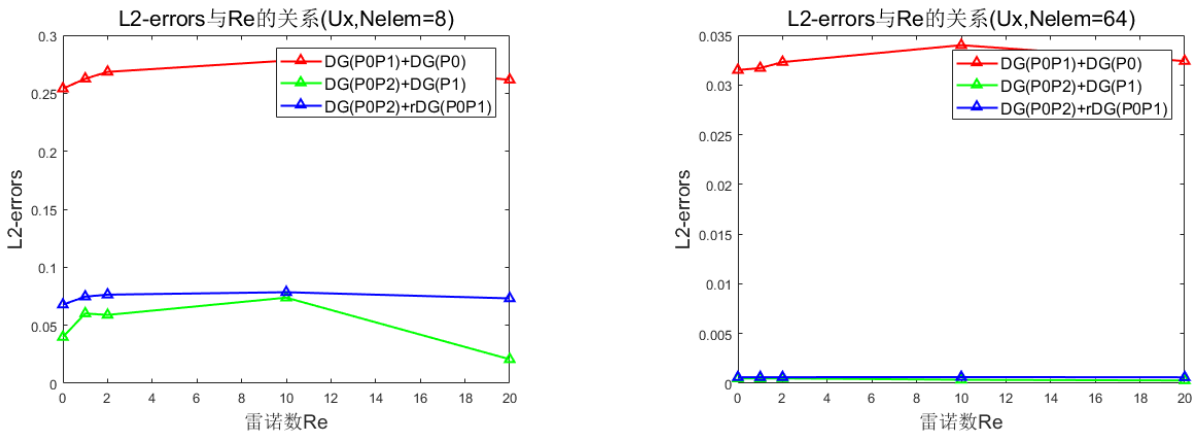
观察表 1，表 2 和表 3，可以发现 Explicit 与 Implicit 最主要的区别是运行时间，两者的 $L_2 errors$ 差别不大。

b). 调整系数 a, ν, 考虑雷诺数为 0,1,2,10,20 时数值解与解析解的 L_2 误差，绘制成下图 (仅展示 Implicit,Nelem=8,64 的情况)：



(a) U(Nelem=8)　　**(b)** U(Nelem=64)

图 1: $L_2 errors - U$ 和 Re 的关系



(a) Ux(Nelem=8) **(b)** Ux(Nelem=64)

图 2: $L_2errors - U_x$ 和 Re 的关系

观察图 1 和图 2,可以很明显的发现 $L_2errors-U$ 会随着雷诺数 Re 的增大而减小,而 $L_2errors-U_x$ 对雷诺数的变化并不敏感。

解:2.

对于非稳态的一维对流-扩散方程，由于其精确解为:

$$\varphi\left(x,t\right)=\frac{1}{\sqrt{4t+1}}exp\left(-\frac{\left(x-at-x_0\right)^2}{\nu\left(4t+1\right)}\right),0\le x\le 2.$$

当 t$\to\infty$ 时，$\varphi\to$ 0. 因此，实际考虑的方程为

$$\begin{cases}\varphi_t+a\varphi_x=\nu\varphi_{xx},x\in\left[0,2\right],t\ge 0.\\ \varphi\left(x,0\right)=exp\left(-\frac{\left(x-x_0\right)^2}{\nu}\right)\\ \varphi\left(0,t\right)=\varphi\left(1,t\right)=0\end{cases}$$

仅考虑 Implicit, 对该方程进行求解，得到如下表格:

表 4: Implicit 数值解与解析解对比

$Re=\frac{\lvert a\rvert}{\nu}=10^6: a=10^4, \nu=0.01, x_0=0.5$	$CFL_\tau=10^6, tol=10^{-5}$			
Nelement(Implicit)	32	64	128	256
DG(P0P1)+DG(P0)				
$L_2errors-U$	0.8834	0.8830	0.8830	0.8830
$L_2errors-U_x$	4.5617	4.3956	4.3668	4.3601
$Matlab$ 运行时间 (s)	5.942	10.444	20.205	46.048
DG(P0P2)+DG(P1)				
$L_2errors-U$	0.8833	0.8832	0.8830	0.8830
$L_2errors-U_x$	4.4851	4.4337	4.3795	4.3629
$Matlab$ 运行时间 (s)	6.287	20.087	84.785	429.929
DG(P0P2)+rDG(P0P1)	$\omega_0=1,\omega_1=1,\omega_2=1,\omega_b=0$			
$L_2errors-U$	0.8832	0.8830	0.8830	0.8830
$L_2errors-U_x$	4.4539	4.3620	4.3578	4.3578
$Matlab$ 运行时间 (s)	5.896	13.474	21.430	35.701

观察表 4，可以发现:

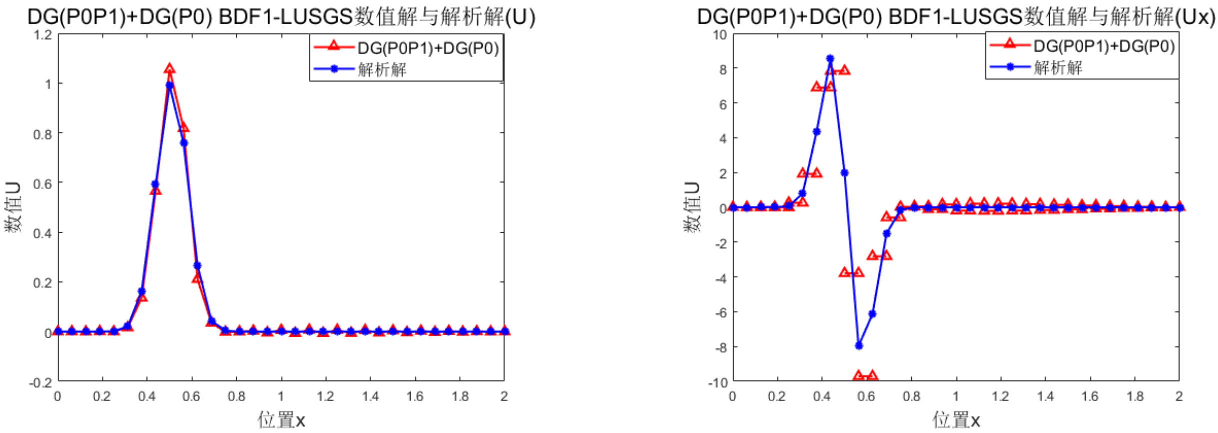
1). 在非稳态问题中，CFL 足够大时，隐式格式所需要的时间也不短 (部分原因是 Matlab 处理循环较慢)，这也侧面凸显出相较于显示格式，隐式格式在缩短运行时间方面有着巨大优势。

2).rDG 的优点。

3). 上述三种空间离散格式，当 Nelem 达到 32 即以上，$L_2errors-U$ 和 $L_2errors-U_x$ 不随网格的加密而减小。

下面展示上述三种空间离散格式下的数值解与解析解比较图 (Nelem=32):

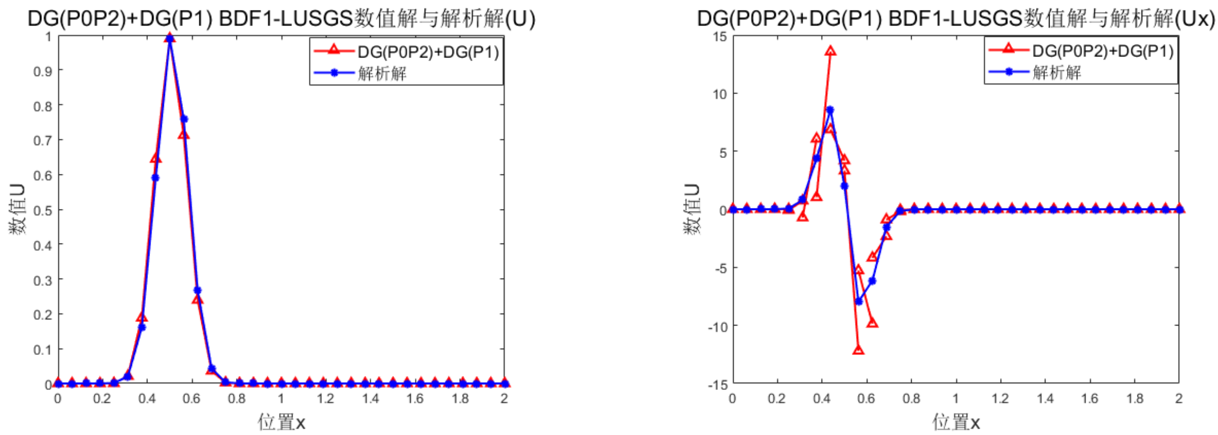
DG(P0P1)+DG(P0)



(a) U(Nelem=32) **(b)** Ux(Nelem=32)

图 3: DG(P0P1)+DG(P0) 数值解与解析解比较图

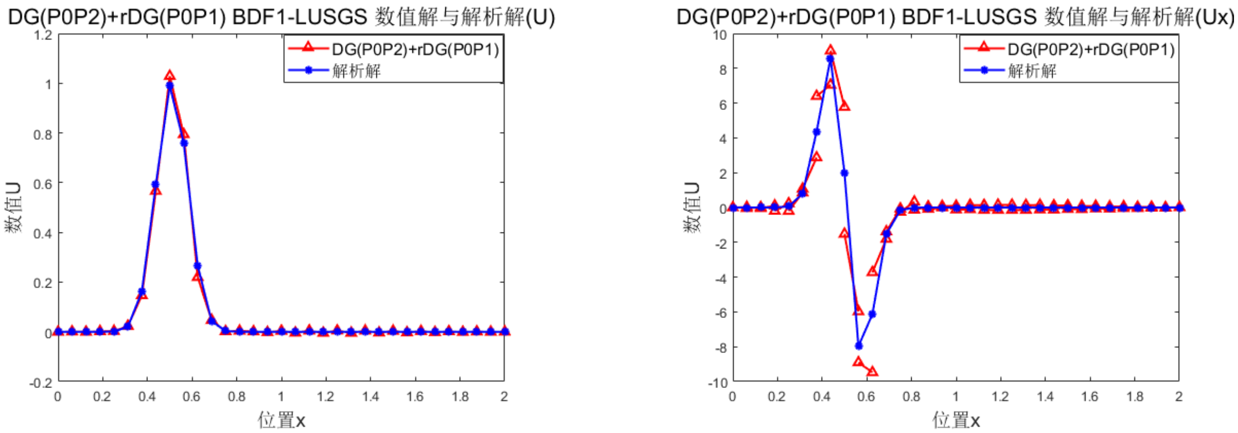
DG(P0P2)+DG(P1)



(a) U(Nelem=32) **(b)** Ux(Nelem=32)

图 4: DG(P0P2)+DG(P1) 数值解与解析解比较图

DG(P0P2)+rDG(P0P1)



(a) U(Nelem=32)　　**(b)** Ux(Nelem=32)

图 **5:** DG(P0P2)+rDG(P0P1) 数值解与解析解比较图

二 附录

2.1 代码 (仅展示部分，详细见 Github)

Nonstable-problem-Advection-Diffusion-Eq-Implicit-DGP0P1plusDGP0

```
clc
clear all
close all
% Preproceeding
%Some basic paramater
Unit=32;%单元个数
nu=0.01;a=10^4;x0=0.5;
Lr=1/max(2*pi,abs(a)/nu);Tr=Lr^2/nu;abslambda=sqrt(nu/Tr);A1=[abslambda+abs(a),0;0,abslambda];A=[a,-nu;-1/Tr,0];B1=1;
deltat=10^(-9);
CFLtau=10^6;
endtau=10;%伪时间阈值
endt=10^(-6);
tol=10^(-5);%跳出循环条件
belta=0;%网格扰动系数
endx=2;deltax=endx/Unit;numberx=endx/deltax+1;
Vcurrent=zeros(2,numberx-1);
Vn=zeros(2,numberx-1);
Vm=zeros(2,numberx-1);
Vm1=zeros(2,numberx-1);
dimention=2;
%LHS
LHS1=zeros(dimention*Unit,dimention*Unit);
LHS2=zeros(dimention*Unit,dimention*Unit);
LHS3=zeros(dimention*Unit,dimention*Unit);
%RHS
R=zeros(dimention*Unit,1);
Rd=zeros(dimention*Unit,1);
Rb=zeros(dimention*Unit,1);
Fn=zeros(2,numberx);
%记录内点位置，上下浮动不超过 belta
Grid=zeros(1,numberx);
Deltax=zeros(1,Unit);
for i=2:numberx-1
Grid(1,i)=(i-1)*deltax+(2*rand(1)-1)*belta*deltax;
```

```
end
Grid(1,numberx)=endx;
%记录每个单元的区间长度
for i=2:numberx
Deltax(i-1)=Grid(1,i)-Grid(1,i-1);
end

%伪时间上的 local time stepping
deltatau=zeros(1,numberx-1);%伪时间变量
for i=1:numberx-1
deltatau(i)=CFLtau*(Grid(1,i+1)-Grid(1,i))/(abslambda+abs(a));%伪时间变量
end

%计算 order
Acc=zeros(3,4);a1=[1/(2*32),1/(2*64),1/(2*128),1/(2*256)];a2=[1/(2*32)
    ,1/(2*64)];
%记录每个物理时间步上的伪时间终止时刻
n=zeros(1,floor(endt/deltat));
%solve the exasolution
Uexasolution=zeros(2,numberx); Vnumsolution=zeros(2,numberx-1);
for k=1:numberx
Uexasolution(1,k)=1/sqrt(4*endt+1)*exp(-(Grid(k)-a*endt-x0)^2/(nu*(4*
    endt+1)));
Uexasolution(2,k)=1/sqrt(4*endt+1)*exp(-(Grid(k)-a*endt-x0)^2/(nu*(4*
    endt+1)))*(-2*(Grid(k)-a*endt-x0)/(nu*(4*endt+1)));
end

%
%构建 LHS
%Mtau/deltatau
for i=1:Unit
LHS1(dimention*(i-1)+1,dimention*(i-1)+1)=Deltax(i)/deltatau(i);
LHS1(dimention*(i-1)+2,dimention*(i-1)+2)=(Deltax(i)/12+1/Deltax(i))/
    deltatau(i);
end
%Rdomain
for i=1:Unit
LHS2(dimention*(i-1)+2,dimention*(i-1)+2)=(1/Tr+nu)/Deltax(i);
LHS2(dimention*(i-1)+2,dimention*(i-1)+1)=-a;
end
```

```
%Rboundary
for  iface=2:numberx-1
ieL=iface-1;
ieR=iface;
CL=[B1,1/2;0,B1/Deltax(ieL)];
CR=[B1,-1/2;0,B1/Deltax(ieR)];
%diag
LHS3(dimention*(ieL-1)+1:dimention*ieL,dimention*(ieL-1)+1:dimention*ieL)=LHS3(dimention*(ieL-1)+1:dimention*ieL,dimention*(ieL-1)+1:dimention*ieL)+0.5*CL'*(A+A1)*CL;
LHS3(dimention*(ieR-1)+1:dimention*ieR,dimention*(ieR-1)+1:dimention*ieR)=LHS3(dimention*(ieR-1)+1:dimention*ieR,dimention*(ieR-1)+1:dimention*ieR)-0.5*CR'*(A-A1)*CR;
%upper
LHS3(dimention*(ieL-1)+1:dimention*ieL,dimention*(ieR-1)+1:dimention*ieR)=LHS3(dimention*(ieL-1)+1:dimention*ieL,dimention*(ieR-1)+1:dimention*ieR)+0.5*CL'*(A-A1)*CR;
%lower
LHS3(dimention*(ieR-1)+1:dimention*ieR,dimention*(ieL-1)+1:dimention*ieL)=LHS3(dimention*(ieR-1)+1:dimention*ieR,dimention*(ieL-1)+1:dimention*ieL)-0.5*CR'*(A+A1)*CL;
end

%边界：左
iface=1;
ieR=iface;
CR=[B1,-1/2;0,B1/Deltax(ieR)];
LHS3(dimention*(ieR-1)+1:dimention*ieR,dimention*(ieR-1)+1:dimention*ieR)=LHS3(dimention*(ieR-1)+1:dimention*ieR,dimention*(ieR-1)+1:dimention*ieR)-CR'*(0.5*(A+A1)*[0,0;0,1]*CR+0.5*(A-A1)*CR);
%边界：右
iface=numberx;
ieL=iface-1;
CL=[B1,1/2;0,B1/Deltax(ieL)];
LHS3(dimention*(ieL-1)+1:dimention*ieL,dimention*(ieL-1)+1:dimention*ieL)=LHS3(dimention*(ieL-1)+1:dimention*ieL,dimention*(ieL-1)+1:dimention*ieL)+CL'*(0.5*(A+A1)+0.5*(A-A1)*[0,0;0,1])*CL;

%组装 LHS
```

```
LHS=LHS1+LHS2+LHS3;

%Mt/deltat
for i=1:Unit
LHS(dimention*(i-1)+1,dimention*(i-1)+1)=LHS(dimention*(i-1)+1,dimention
    *(i-1)+1)+Deltax(i)/deltat;
LHS(dimention*(i-1)+2,dimention*(i-1)+2)=LHS(dimention*(i-1)+2,dimention
    *(i-1)+2)+(Deltax(i)/12)/deltat;
end


%initial condition set up
for k=1:numberx-1
%利用 Gauss 积分计算 Vcurrent
t=[-sqrt(15)/5,0,sqrt(15)/5];
W=[5/9,8/9,5/9];
xci=(Grid(k+1)+Grid(k))/2;
for ig=1:3
xig=Deltax(k)/2*t(ig)+xci;
const=W(ig)*0.5*Deltax(k);
Vcurrent(1,k)=Vcurrent(1,k)+const*exp(-(xig-x0)^2/nu);
Vcurrent(2,k)=Vcurrent(2,k)+const*exp(-(xig-x0)^2/nu)*(-2*(xig-x0)/nu);
end
Vcurrent(1,k)=Vcurrent(1,k)/Deltax(k);


end
%对 t=0 时刻赋值
Vn=Vcurrent;
i=1;
for itime=0:deltat:endt
Vm=Vn;
for itau=0:min(deltatau):endtau
%组装 RHS
%利用 Gauss 积分计算 Rdomain
t=[-sqrt(15)/5,0,sqrt(15)/5];
W=[5/9,8/9,5/9];
for ie=1:Unit
xci=(Grid(ie+1)+Grid(ie))/2;
for ig=1:3
```

```
xig=Deltax(ie)/2*t(ig)+xci;
B2g=(xig-xci)/Deltax(ie);
varphig=Vm(1,ie)+B2g*Vm(2,ie);
Vg=Vm(2,ie)/Deltax(ie);
S1g=0;
S2g=-Vg/Tr;
F1g=a*varphig-nu*Vg;
F2g=-varphig/Tr;
const=W(ig)*0.5*Deltax(ie);
Rd(2*(ie-1)+1)=Rd(2*(ie-1)+1)+S1g*const;
Rd(2*(ie-1)+2)=Rd(2*(ie-1)+2)+(S1g*B2g+S2g/Deltax(ie)+F1g/Deltax(ie))*
    const;


end
end



%Rboundary
for iface=2:numberx-1
ieL=iface-1;
ieR=iface;
B2L=1/2;
B2R=-1/2;
varphiL=Vm(1,ieL)+B2L*Vm(2,ieL);
varphiR=Vm(1,ieR)+B2R*Vm(2,ieR);
VL=Vm(2,ieL)/Deltax(ieL);
VR=Vm(2,ieR)/Deltax(ieR);

Fn(:,iface)=0.5*([a*varphiL-nu*VL;-varphiL/Tr]+[a*varphiR-nu*VR;-varphiR
    /Tr])-0.5*A1*([varphiR;VR]-[varphiL;VL]);
Rb(2*(ieL-1)+1)=Rb(2*(ieL-1)+1)-Fn(1,iface);
Rb(2*(ieL-1)+2)=Rb(2*(ieL-1)+2)-Fn(1,iface)*B2L-Fn(2,iface)/Deltax(ieL);
% Rb(dimention*(ieL-1)+3)=Rb(dimention*(ieL-1)+3)-Fn(1,iface)*B3L-
    Fn(2,iface)*B2L/Deltax(ieL);
Rb(2*(ieR-1)+1)=Rb(2*(ieR-1)+1)+Fn(1,iface);
Rb(2*(ieR-1)+2)=Rb(2*(ieR-1)+2)+Fn(1,iface)*B2R+Fn(2,iface)/Deltax(ieR);
% Rb(dimention*(ieR-1)+3)=Rb(dimention*(ieR-
    1)+3)+Fn(1,iface)*B3R+Fn(2,iface)*B2R/Deltax(ieR);
```

```
end
%边界：左
iface=1;
ieR=iface;
B2R=-1/2;
varphiR=Vm(1,ieR)+B2R*Vm(2,ieR);
VR=Vm(2,ieR)/Deltax(ieR);
Fn(:,iface)=0.5*([-nu*VR;0]+[a*varphiR-nu*VR;-varphiR/Tr])-0.5*A1*([
    varphiR;VR]-[0;VR]);
Rb(2*(ieR-1)+1)=Rb(2*(ieR-1)+1)+Fn(1,iface);
Rb(2*(ieR-1)+2)=Rb(2*(ieR-1)+2)+Fn(1,iface)*B2R+Fn(2,iface)/Deltax(ieR);
%Rb(dimention*(ieR-1)+3)=Rb(dimention*(ieR-
    1)+3)+Fn(1,iface)*B3R+Fn(2,iface)*B2R/Deltax(ieR);

%边界：右
iface=numberx;
ieL=iface-1;
B2L=1/2;
varphiL=Vm(1,ieL)+B2L*Vm(2,ieL);
VL=Vm(2,ieL)/Deltax(ieL);
Fn(:,iface)=0.5*([a*varphiL-nu*VL;-varphiL/Tr]+[-nu*VL;0])-0.5*A1*([0;VL
    ]-[varphiL;VL]);
Rb(2*(ieL-1)+1)=Rb(2*(ieL-1)+1)-Fn(1,iface);
Rb(2*(ieL-1)+2)=Rb(2*(ieL-1)+2)-Fn(1,iface)*B2L-Fn(2,iface)/Deltax(ieL);
%Rb(dimention*(ieL-1)+3)=Rb(dimention*(ieL-1)+3)-Fn(1,iface)*B3L-
    Fn(2,iface)*B2L/Deltax(ieL);

%R 组装
R=Rd+Rb;

for k=1:Unit
Mt=[Deltax(k),0;0,Deltax(k)/12];
R(2*k-1:2*k,1)=R(2*k-1:2*k,1)-Mt*(Vm(:,k)-Vn(:,k))/deltat;
end

X=LUSGS(LHS,R,Unit);
if max(abs(X))<tol&&itau>=min(deltatau)
break;
end
for k=1:Unit
```

```
Vm1(:,k)=Vm(:,k)+X(2*k-1:2*k,1);
end

Vm=Vm1;
Rd=zeros(dimention*Unit,1);
Rb=zeros(dimention*Unit,1);

end
n(i)=itau;i=i+1;
Vn=Vm1;
end

Vnumsolution=Vn;

%figure
k=1;
x=Grid(k):1*(Grid(k+1)-Grid(k)):Grid(k+1);
xci=(Grid(k+1)+Grid(k))/2;
p=@(x)Vnumsolution(1,k)+Vnumsolution(2,k)*(x-xci)/Deltax(k);
y=p(x);
plot(x,y,'-r^','linewidth',1.5);hold on
H1=plot(x,y,'-r^','linewidth',1.5);hold on

for k=2:numberx-1
x=Grid(k):1*(Grid(k+1)-Grid(k)):Grid(k+1);
xci=(Grid(k+1)+Grid(k))/2;
p=@(x)Vnumsolution(1,k)+Vnumsolution(2,k)*(x-xci)/Deltax(k);
y=p(x);
plot(x,y,'-r^','linewidth',1.5);
end

%plot the exact
plot(Grid,Uexasolution(1,:),'-b*','linewidth',1.5)
H2=plot(Grid,Uexasolution(1,:),'-b*','linewidth',1.5);hold on
lgd=legend([H1,H2],'DG(P0P1)+DG(P0)','解析解');
lgd.FontSize=12;
xlabel('位置x','fontsize',14)
ylabel('数值U','fontsize',14)
title('DG(P0P1)+DG(P0) BDF1-LUSGS数值解与解析解(U)','fontsize',16)
hold off
```

```
%Ux
figure
k=1;
x=Grid(k):1*(Grid(k+1)-Grid(k)):Grid(k+1);
%p=@(x)Unumsolution(2,k)/Deltax(k);
y=[Vnumsolution(2,k)/Deltax(k),Vnumsolution(2,k)/Deltax(k)];
plot(x,y,'-r^','linewidth',1.5);hold on
H1=plot(x,y,'-r^','linewidth',1.5);hold on
for k=2:numberx-1
x=Grid(k):1*(Grid(k+1)-Grid(k)):Grid(k+1);
%p=@(x)Unumsolution(2,k)/Deltax(k);
y=[Vnumsolution(2,k)/Deltax(k),Vnumsolution(2,k)/Deltax(k)];
plot(x,y,'-r^','linewidth',1.5);
end

%exact
plot(Grid,Uexasolution(2,:),'-b*','linewidth',1.5)
H2=plot(Grid,Uexasolution(2,:),'-b*','linewidth',1.5);hold on
lgd=legend([H1,H2],'DG(P0P1)+DG(P0)','解析解');
lgd.FontSize=12;
xlabel('位置x','fontsize',14)
ylabel('数值U','fontsize',14)
title('DG(P0P1)+DG(P0) BDF1-LUSGS数值解与解析解(Ux)','fontsize',16)
hold off

%计算 L2 误差
[Acc(1,1),Acc(2,1)]=Accuracy(32);
[Acc(1,2),Acc(2,2)]=Accuracy(64);
[Acc(1,3),Acc(2,3)]=Accuracy(128);
[Acc(1,4),Acc(2,4)]=Accuracy(256);

%计算 order
accuracyU=zeros(1,3);
accuracyUx=zeros(1,3);
for k=1:3
accuracyU(k)=(log10(Acc(1,k+1))-log10(Acc(1,k)))./(log10(a1(1,k+1))-
    log10(a1(1,k)));
end
for k=1:3
```

```
accuracyUx(k)=(log10(Acc(2,k+1))-log10(Acc(2,k)))./(log10(a1(1,k+1))-
    log10(a1(1,k)));
end

%U 精度
figure
hold on
plot(log10(a1),log10(Acc(1,:)),'-c*','linewidth',1.5)
H1=plot(log10(a1),log10(Acc(1,:)),'-c*','linewidth',1.5);

H2=plot(log10(a2),1*log10(a2),'--','linewidth',1.5);
plot(log10(a2),2*log10(a2),'--','linewidth',1.5)
H3=plot(log10(a2),2*log10(a2),'--','linewidth',1.5);
lgd=legend([H1,H2,H3],'DG(P0P1)+DG(P0)','Slope=1','Slope=2');
lgd.FontSize=12;
xlabel('Log(1/DOF)','fontsize',14)
ylabel('Log(episilo)','fontsize',14)
title('DG(P0P1)+DG(P0)精度分析(U)','fontsize',16)

%Ux 精度
figure
hold on
plot(log10(a1),log10(Acc(2,:)),'-c*','linewidth',1.5)
H1=plot(log10(a1),log10(Acc(2,:)),'-c*','linewidth',1.5);

H2=plot(log10(a2),1*log10(a2),'--','linewidth',1.5);
plot(log10(a2),2*log10(a2),'--','linewidth',1.5)
H3=plot(log10(a2),2*log10(a2),'--','linewidth',1.5);
lgd=legend([H1,H2,H3],'DG(P0P1)+DG(P0)','Slope=1','Slope=2');
lgd.FontSize=12;
xlabel('Log(1/DOF)','fontsize',14)
ylabel('Log(episilo)','fontsize',14)
title('DG(P0P1)+DG(P0)精度分析(Ux)','fontsize',16)
```