

# 课题组组会-练习 12

王程

2024 年 1 月 12 日

## 一 练习及结果

对于  $u = u(x)$ , 考虑以下椭圆边值问题,

$$\begin{cases} -u''(x) = -10, x \in (0, 1) \\ u(0) = 0 \\ u'(1) = 0 \end{cases}$$

1) 求出该问题的精确解, 并做图。

2) 考虑非均匀的 3 个点组成的网格 ( $x_1 = 0, x_2 = h, x_3 = 1$ ), 使用二阶有限差分法, 计算三个点上的数值解。

2) 考虑非均匀的 3 个点组成的网格 ( $x_1 = 0, x_2 = h, x_3 = 1$ ), 使用线性有限元法, 计算三个点上的数值解。

解:

1) 精确解: 由于  $u''(x) = 10$ , 所以  $u(x)$  是一元二次多项式, 假设  $u(x) = ax^2 + bx + c$ .

$$\begin{cases} 2a = 10 \\ 2a + b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = -10 \\ c = 0 \end{cases}$$

所以  $u(x) = 5x^2 - 10x = 5x(x - 2)$ . 图像如下:

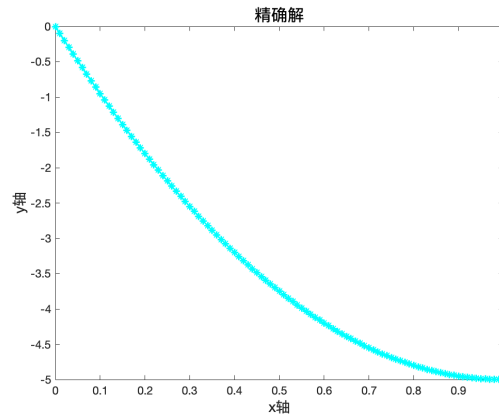


图 1: 精确解:  $u(x) = 5x(x - 2)$

2) 二阶有限差分:

对  $u'(1)$  进行 2 阶单侧差分法:

$$u(h) = u(1) + u'(1)(h-1) + u''(1) \frac{(h-1)^2}{2} + o(h-1)^2 \quad (1)$$

$$u(0) = u(1) + u'(1)(-1) + u''(1) \frac{1}{2} + o(1^2) \quad (2)$$

$$(2) \times (h-1)^2 - (1)$$

$$\Rightarrow (h-1)^2 u(0) - u(h) = \left[ (h-1)^2 - 1 \right] u(1) + \left[ -(h-1)^2 - (h-1) \right] u'(1), \text{ 由于 } u(0) = 0, u'(1) = 0$$

$$u(h) + h(h-2)u(1) = 0 \quad (3)$$

同理, 对 2 阶导数  $u''(h)$  进行二阶差分

$$u(1) = u(h) + u'(h)(1-h) + u''(h) \frac{(1-h)^2}{2} + o((1-h)^3) \quad (4)$$

$$u(0) = u(h) + u'(h)(-h) + u''(h) \frac{h^2}{2} + o((-h)^3) \quad (5)$$

$$(4) \times \frac{1-h}{h} + (3)$$

$$\Rightarrow u''(h) = 2u(0) \frac{1}{h} + u(1) \frac{2}{1-h} - u(h) \frac{2}{h(1-h)} + o(h^2), \text{ 由于 } u''(h) = 10, u(0) = 0$$

$$10(1-h)h = 2hu(1) - 2u(h) \quad (6)$$

由(3)和(6)知

$$\begin{cases} u(1) = -5 \\ u(h) = 5h(h-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(0) = 0 \\ u(1) = -5 \\ u(h) = 5h(h-2) \end{cases}$$

3)FEM:

该椭圆边值问题

$$\begin{cases} -u''(x) = -10, x \in (0, 1) \\ u(0) = 0 \\ u'(1) = 0 \end{cases}$$

等价于

$$\begin{cases} -\Delta u = -10, x \in (0, 1) \\ u(0) = 0 \\ u'(1) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$  变分问题:

$$\begin{aligned} \int_0^1 -\Delta u \cdot v dx &= \int_0^1 -10v dx \\ \int_0^1 \nabla u \cdot \nabla v dx &= \int_{\Gamma} u' \cdot n \cdot v d\Gamma + \int_0^1 -10v dx = u'(1)v(1) - u'(0)v(0) - 10 \int_0^1 v dx \end{aligned}$$

构建子空间进行离散:

$$\int_0^1 \nabla u_h \cdot \nabla v_h dx = u'(1)v_h(1) - u'(0)v_h(0) - 10 \int_0^1 v_h dx$$

令  $v_h = B_i$

其中

$$B_1 = \begin{cases} 1 - \frac{1}{h}x, x \in [0, h) \\ 0, x \in [h, 1] \end{cases} \quad \nabla B_1 = \begin{cases} -\frac{1}{h}, x \in [0, h) \\ 0, x \in [h, 1] \end{cases}$$

$$B_2 = \begin{cases} \frac{1}{h}x, x \in [0, h) \\ \frac{x-1}{h-1}, x \in [h, 1] \end{cases} \quad \nabla B_2 = \begin{cases} \frac{1}{h}, x \in [0, h) \\ \frac{1}{h-1}, x \in [h, 1] \end{cases}$$

$$B_3 = \begin{cases} 0, x \in [0, h) \\ \frac{x-h}{1-h}, x \in [h, 1] \end{cases} \quad \nabla B_3 = \begin{cases} 0, x \in [0, h) \\ \frac{1}{1-h}, x \in [h, 1] \end{cases}$$

$$\text{令 } u_h(x) = \sum_{j=1}^3 u_j B_j(x)$$

$$\sum_{j=1}^3 \int_0^1 \nabla B_j \cdot \nabla B_i dx u_j = u'(1) B_i(1) - u'(0) B_i(0) - 10 \int_0^1 B_i(x) dx, i = 1, 2, 3.$$

问题变为求解线性方程组  $Ax = b$ .

由于  $u(0) = 0$ , 所以采取划行划列法

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{h} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{h(h-1)} & \frac{1}{h-1} \\ 0 & \frac{1}{h-1} & \frac{1}{1-h} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} u(0) \\ u(h) \\ u(1) \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 5(h-1) \end{pmatrix}$$

因此

$$\begin{cases} u(0) = 0 \\ u(h) = 5h(h-2) \\ u(1) = -5 \end{cases}$$

Remarks:

关于变分方法的另一半证明:

$$\int_{\Omega} -\Delta \varphi v d\Omega = 0, \quad \forall v \in \mathcal{V}$$

$\Rightarrow \Delta \varphi : \Delta \rightarrow K \& \Delta \varphi \perp \mathcal{V}$  并且由于  $\mathcal{V}$  是  $\Omega$  上函数空间的子空间。

由于

1).  $\Omega$  上的函数空间构成 Hilbert 空间.

2).  $\mathcal{V}$  封闭

设  $\mathcal{S} = \{v_i | i \in \gamma\}$  是  $\mathcal{V}$  的标准正交集,  $\Rightarrow \Delta \varphi = \sum_{i \in \gamma} \langle \Delta \varphi, V_i \rangle V_i$

分别令  $V = V_i, i \in \gamma \Rightarrow \langle \Delta \varphi, V_i \rangle = 0 \Rightarrow \Delta \varphi = 0$ . 得证.