课题组组会-练习 13

王程

2024 年 1 月 20 日

一 练习及结果

1. 令 Ω 为边长为 1 的单位矩形。如图所示，T_h 是对 Ω 的均匀三角划分。试证明对于该网格中的一个内部点，求解拉普拉斯问题时，线性有限元方法和五点差分格式是等价的。

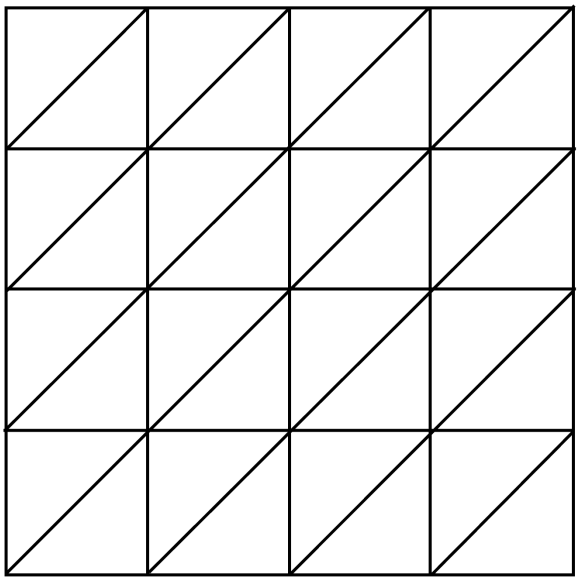


图 1: 计算网格示意图

2. 对于 $u = u(x)$, 考虑以下椭圆边值问题,

$$\begin{cases} -u''(x) = -10, x \in (0,1) \\ u(0) = 0 \\ u'(1) = 0 \end{cases}$$

试编写程序, 计算均匀网格下用线性有限元方法求其数值解, 并与精确解进行比较, 并计算精度。

解：1.

分析：证明 2 种格式等价，即证明对于 Laplace 方程：$\Delta\varphi = 0$ 两种方法解相等。

设最外围的点分别为 $ip1, \cdots, ip12$, 内部点分别为 $jp1, \cdots, jp9$(如下图所示)。并且假设 Dirichlet 边界条件：底边为 a，且逆时针分别为 a, b, c, d。

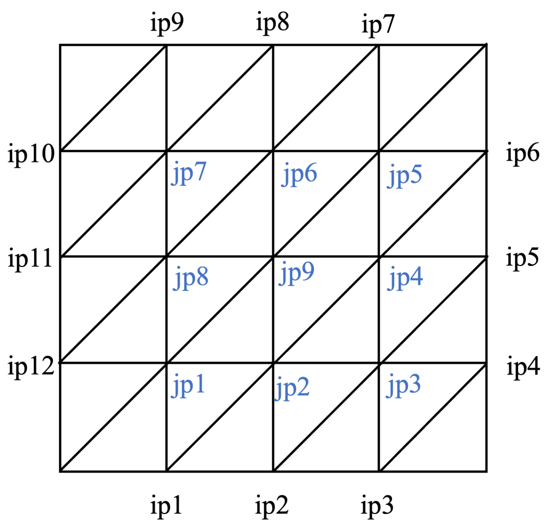


图 2: 计算网格编号图

五点差分:

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0$$
$$\Rightarrow 4\varphi_{jp7} - \varphi_{ip9} - \varphi_{jp8} - \varphi_{jp6} - \varphi_{ip10} = 0$$

其余方程同上可得，根据假设的边界条件，最终得到：

$$Ax = B$$

其中：$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & & & & & & -1 & \\ -1 & 4 & -1 & & & & & & -1 \\ & -1 & 4 & -1 & & & & & \\ & & -1 & 4 & -1 & & & & -1 \\ & & & -1 & 4 & -1 & & & \\ & & & & -1 & 4 & -1 & & -1 \\ & & & & & -1 & 4 & -1 & \\ -1 & & & & & & -1 & 4 & -1 \\ & -1 & & -1 & & -1 & & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} a+d \\ a \\ a+b \\ b \\ b+c \\ c \\ c+d \\ d \\ 0 \end{pmatrix}$, $\quad x_i = \varphi_{jpi}$.

线性有限元方法:

$$Ax = B$$

$$a_{ij} = \int_{\Omega} \nabla B_i \cdot \nabla B_j d\Omega = \sum_{\Omega_e \in Th} a\left(i, j, ie\right)$$

$$a\left(i, j, ie\right) = \frac{1}{2D}\left(a_i a_j + b_i b_j\right) = \frac{1}{2D}\left(\left(y_j - y_k\right)\left(y_k - y_i\right) + \left(x_j - x_k\right)\left(x_k - x_i\right)\right)$$

由于是均匀三角划分，因此设横坐标相同的两个相邻网格点之间的距离为 h，则 $D = h^2$

对 a_{ii} **而言**:$a\left(i, i, ie\right) = \frac{1}{2D}\left[\left(y_j - y_k\right)^2 + \left(x_j - x_k\right)^2\right] = \frac{d_{jk}^2}{2h^2} = \frac{8h^2}{2h^2} = 4$

对 $a_{ij}\left(i \neq j\right)$ **而言**:

若 jpi 与 jpj 横纵坐标中有一个相等，$a_{ij} = \frac{1}{2h^2}\left(-h^2\right) \times 2 = -1 = a_{ji}$(前提是 jpi 与 jpj 可直接相连)

若 jpi 与 jpj 横纵坐标都不相等，$a_{ij} = 0$

$\Rightarrow$ 线性有限元方法的 A 与五点差分的 A 相同，但由于 jpi 都是内点，因此 $B = 0$. 最终得到:

$$Ax = B$$

其中: $$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & & & & & & -1 & \\ -1 & 4 & -1 & & & & & & -1 \\ & -1 & 4 & -1 & & & & & \\ & & -1 & 4 & -1 & & & & -1 \\ & & & -1 & 4 & -1 & & & \\ & & & & -1 & 4 & -1 & & -1 \\ & & & & & -1 & 4 & -1 & \\ -1 & & & & & & -1 & 4 & -1 \\ & -1 & & -1 & & -1 & & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_i = \varphi_{jpi}.$$

综上，我们得到如下结论:

1). 只有在 $jp9$ 点，两种格式等价。当然，若均匀划分再细化，两种格式在内部点 (周围邻居没有边界点) 处等价。

2). 如果 Dirichlet 边界值都为 0，即 $a = b = c = d = 0$，两种格式在内部点处等价。

解：2.

考虑在单元数为 8,16,32,64 的情况下，将数值解 u, u_x 与精确解进行比较。

u:

这里仅展示单元数为 8 的情况下数值解与精确解的比较图 (数值解图像即为 u 离散后的 1 次分段线性函数)：

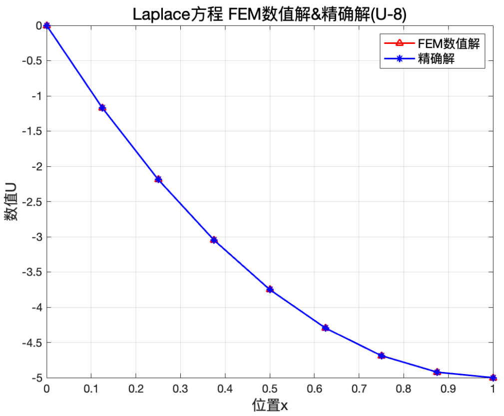


图 3: u 数值解与精确解比较图

此外，给出相应的数据与精度分析图：

表 1: FEM 下数值解与精确解对比 (u)

Nelement	8	16	32	64
$L_2 errors - U$	0.0143	0.0036	8.9148e-4	2.2287e-4
$Order$	–	2	2	2

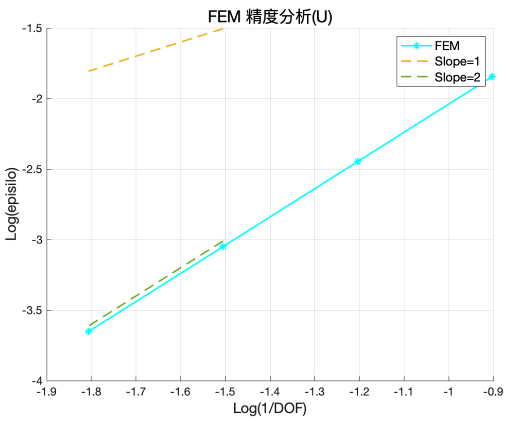


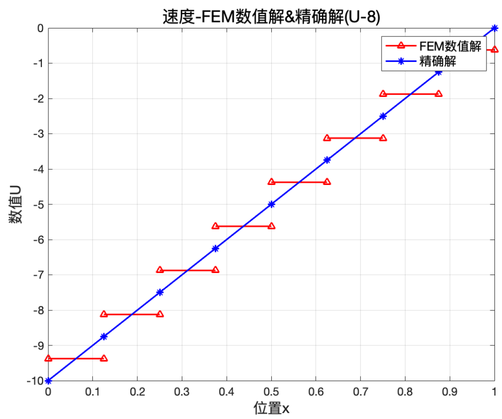
图 4: u 精度分析

u_x:

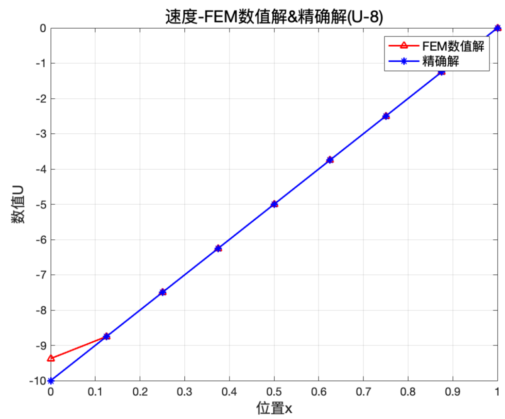
这里 u_x 是 Potenti equation 1 维情况下的 V。由于 u 是 1 次函数，因此每个单元中的 u_x 是常数。均匀网格下，节点处的 u_x 可以用左右单元 u_x 的算数平均值表示。L-boundary 的值取第一个单元的 u_x，R-boundary 的值取 0(已给边界条件)。

考虑用 1 次函数替代常值表示单元内部的 u_x(这样节点处的 u_x 就是左右单元的算数平均值，并且直观上 1 次多项式精度会比 0 次多项式高。)

这里展示单元数为 8 的情况下 0 次与 1 次分段数值解与精确解的比较图:



(a) u_x(0 次分段函数)



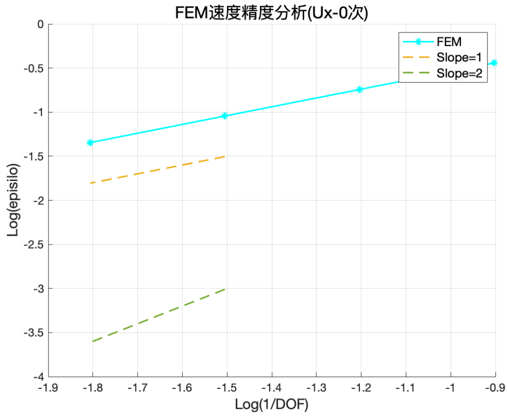
(b) u_x(1 次分段函数)

图 5: u_x 数值解与精确解比较图

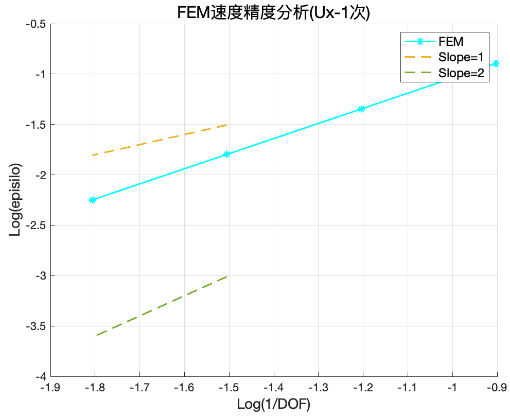
此外，给出与相应的数据与精度分析图:

表 2: FEM 下数值解与精确解对比 (u_x)

Nelement	8	16	32	64
$Pd = 0$				
$L_2 errors - U_x$	0.3608	0.1804	0.0902	0.0451
$Order$	–	1	1	1
$Pd = 1$				
$L_2 errors - U_x$	0.1276	0.0451	0.0159	0.0056
$Order$	–	1.5	1.5	1.5



(a) u_x(0 次分段函数)



(b) u_x(1 次分段函数)

图 6: u_x 精度分析