Q:将 C-N 的隐式格式做稳定性分析，探究稳定性条件。

解：对于 **C-N** 隐式格式的差分方程

$$\frac{T_i^{n+1}-T_i^n}{\Delta t}=\alpha\frac{\frac{T_{i+1}^{n+1}+T_{i+1}^n}{2}-2(\frac{T_i^{n+1}+T_i^n}{2})+\frac{T_{i-1}^{n+1}+T_{i-1}^n}{2}}{\Delta x^2},$$

由于 $\varepsilon(x,t)=\sum_{m=1}^{\frac{N}{2}}\varepsilon_m=\sum_{m=1}^{\frac{N}{2}}A_m(t)e^{ik_mx}=\sum_{m=1}^{\frac{N}{2}}e^{at}e^{ik_mx}$，所以有

$$\frac{e^{a(t+\Delta t)}e^{ik_mx}-e^{at}e^{ik_mx}}{\Delta t}=$$

$$\frac{\alpha}{2\Delta x^2}(e^{a(t+\Delta t)}e^{ik_m(x+\Delta x)}+e^{at}e^{ik_m(x+\Delta x)}-2(e^{a(t+\Delta t)}e^{ik_mx}+e^{at}e^{ik_mx})+e^{a(t+\Delta t)}e^{ik_m(x-\Delta x)}+e^{at}e^{ik_m(x-\Delta x)}).$$

并且 $G=\frac{\varepsilon_i^{n+1}}{\varepsilon_i^n}=\frac{e^{a(t+\Delta t)}e^{ik_mx}}{e^{at}e^{ik_mx}}=e^{a\Delta t}$,等式两边同时除以 $e^{at}e^{ik_mx}$,有

$$\frac{G-1}{\Delta t}=\frac{\alpha}{2\Delta x^2}(Ge^{ik_m\Delta x}+e^{ik_m\Delta x}-2(G+1)+Ge^{ik_m(-\Delta x)}+e^{ik_m(-\Delta x)}).$$

令 $\sigma=\frac{\alpha\Delta t}{2\Delta x^2},\theta=k_m\Delta x$，由于 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta,\cos\theta=1-2\sin^2(\frac{\theta}{2})$。化简后得到：$G=\frac{1-4\sigma\sin^2(\frac{\theta}{2})}{1+4\sigma\sin^2(\frac{\theta}{2})}$.如此，对于任意的 $\sigma>0$,都有 $|G|\le 1$。

综上，该隐式方程对于 σ 的限制为 $\sigma>0$(显然成立)。