

<i>Rodzaj dokumentu:</i>	<b>Zasady oceniania rozwiązań zadań</b>
<i>Egzamin:</i>	<b>Egzamin maturalny</b>
<i>Przedmiot:</i>	<b>Matematyka</b>
<i>Poziom:</i>	<b>Poziom rozszerzony</b>
<i>Formy arkusza:</i>	MMAP-R0-100, MMAP-R0-200, MMAP-R0-300, MMAP-R0-400, MMAP-R0-600, MMAP-R0-700, MMAP-R0-Q00, MMAP-R0-Z00
<i>Termin egzaminu:</i>	2 czerwca 2023 r.

### Uwagi ogólne:

1. Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.
2. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej  $(n - 1)$  punktów (gdzie  $n$  jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

### Zadanie 1. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024 <sup>1</sup>	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: I.R1) stosuje wzór na zamianę podstawy logarytmu.

### Zasady oceniania

2 pkt – poprawne obliczenie  $a - b$ : 2023.

1 pkt – obliczenie  $a$ :  $a = 45^2$

ALBO

– obliczenie  $b$ :  $b = 2$ .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

### Przykładowe pełne rozwiązanie

Obliczamy  $a$ :

$$a = 4^{\log_2 45} = (2^2)^{\log_2 45} = 2^{\log_2 45^2} = 45^2 = 2025$$

Stosujemy wzór na zamianę podstawy logarytmu i obliczamy  $b$ :

$$b = \frac{\log_3 2023}{\log_9 2023} = \frac{\log_3 2023}{\frac{\log_3 2023}{\log_3 9}} = \log_3 9 = 2$$

Zatem  $a - b = 2023$ .

<sup>1</sup>Rozporządzenie Ministra Edukacji i Nauki z dnia 10 czerwca 2022 r. w sprawie wymagań egzaminacyjnych dla egzaminu maturalnego przeprowadzanego w roku szkolnym 2022/2023 i 2023/2024 ([Dz.U. poz. 1246](#)).

**Zadanie 2. (0–3)**

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: XI.R1) oblicza liczbę możliwych sytuacji, spełniających określone kryteria, z wykorzystaniem reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) oraz wzorów na liczbę: permutacji, kombinacji i wariacji, również w przypadkach wymagających rozważenia złożonego modelu zliczania elementów.

**Zasady oceniania**

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik:  $n = 9$ .

2 pkt – zapisanie równania z niewiadomą  $n$ , które wynika z warunków zadania, np.

$$n! = 12 \cdot (n - 2)! \cdot 3!.$$

1 pkt – zapisanie, że liczba wszystkich sposobów ustawienia  $n$  osób w kolejce jest równa  $n!$

ALBO

– zapisanie, że trzy kolejne miejsca spośród  $n$  miejsc można wybrać na  $n - 3$  sposoby (lub na  $\binom{n}{n-3}$  sposoby),

ALBO

– potraktowanie Ani i jej dwóch znajomych jak jednej osoby i zapisanie, że liczba ustawień tych  $n - 2$  osób jest równa  $(n - 2)!$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Przykładowe pełne rozwiązanie**

Liczba wszystkich sposobów ustawienia  $n$  osób w kolejce jest równa  $n!$ .

Liczbę wszystkich tych ciągów, w których Ania i jej dwóch znajomych zajmują trzy sąsiednie miejsca, możemy obliczyć, traktując Anię i jej dwóch znajomych jak „jedną osobę”.

W rezultacie mamy ustawić ciąg złożony z  $n - 2$  osób, co można zrobić na  $(n - 2)!$  sposobów. Na ustalonych trzech miejscach Anię i jej dwóch znajomych możemy ustawić na  $3!$  sposobów, więc liczba wszystkich tych ciągów, w których Ania i jej dwóch znajomych zajmują trzy kolejne miejsca jest równa  $(n - 2)! \cdot 3!$ .

Z warunków zadania wynika równanie

$$n! = 12 \cdot (n - 2)! \cdot 3!$$

Stąd, po podzieleniu obu stron tego równania przez  $(n - 2)!$ , otrzymujemy:

$$n(n - 1) = 12 \cdot 6$$

$$n^2 - n - 72 = 0$$

$$(n - 9)(n + 8) = 0$$

Ponieważ  $n$  jest liczbą całkowitą dodatnią, więc  $n + 8 > 0$ . Zatem  $n - 9 = 0$ , czyli  $n = 9$ .

**Uwaga.**

Liczbę wszystkich ciągów, w których Ania i jej dwóch znajomych zajmują trzy kolejne miejsca, możemy obliczyć też w następujący sposób.

Trzy kolejne miejsca spośród  $n$  miejsc możemy wybrać na  $n - 2$  sposoby. Na wybranych trzech miejscach Anię i jej dwóch znajomych możemy ustawić na  $3!$  sposobów, a na pozostałych  $n - 3$  miejscach możemy pozostałe osoby ustawić na  $(n - 3)!$  sposobów. Zatem liczba szukanych ciągów jest równa  $(n - 2) \cdot 3! \cdot (n - 3)! = (n - 2)! \cdot 3!$

**Zadanie 3. (0–3)**

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: XII.R2) stosuje schemat Bernoullego.

**Zasady oceniania**

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: 0,97 .

2 pkt – poprawne zastosowanie wzoru na prawdopodobieństwo uzyskania  $k$  sukcesów w  $n$  próbach Bernoullego i zapisanie prawdopodobieństwa w postaci

$$P(A) = \binom{7}{0} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^0 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^7 + \binom{7}{1} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^1 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^6 + \binom{7}{2} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^5 .$$

1 pkt – ustalenie i zapisanie liczby prób ( $n$ ), liczby sukcesów ( $k$ ), prawdopodobieństwa sukcesu ( $p$ ) i porażki ( $q$ ) w pojedynczej próbie w schemacie Bernoullego:  $n = 7$ ,

$$k \leq 2, p = \frac{1}{10}, q = \frac{9}{10} .$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Uwaga:**

Jeżeli zdający poprawnie zapisze  $P(S_7^0) = \binom{7}{0} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^0 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^7$ ,  $P(S_7^1) = \binom{7}{1} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^1 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^6$ ,

oraz  $P(S_7^2) = \binom{7}{2} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^5$ , ale z dalszego rozwiązania nie wynika, że

$P(A) = P(S_7^0) + P(S_7^1) + P(S_7^2)$ , to otrzymuje co najwyżej **1 punkt** za rozwiązanie.

**Przykładowe pełne rozwiązanie**

Określamy prawdopodobieństwo sukcesu ( $p$ ) i porażki ( $q$ ):  $p = \frac{1}{10}$ ,  $q = 1 - p = \frac{9}{10}$ .

Niech  $S_7^k$  oznacza zdarzenie polegające na wystąpieniu awarii w godzinach porannych dokładnie w  $k$  dniach spośród siedmiu rozpatrywanych ( $k \in \{0, 1, 2\}$ ).

Obliczamy prawdopodobieństwo  $P$  wystąpienia awarii w godzinach porannych w co najwyżej dwóch dniach spośród siedmiu:

$$\begin{aligned}
 P(A) &= P(S_7^0) + P(S_7^1) + P(S_7^2) = \\
 &= \binom{7}{0} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^0 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^7 + \binom{7}{1} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^1 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^6 + \binom{7}{2} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^5 = \\
 &= \frac{9^7 + 7 \cdot 9^6 + 21 \cdot 9^5}{10^7} = \frac{9^5 \cdot 165}{10^7} = \frac{9\,743\,085}{10\,000\,000} \approx 0,97
 \end{aligned}$$

#### Zadanie 4. (0–3)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 3. Dobieranie argumentów do uzasadnienia poprawności rozwiązywania problemów, tworzenie ciągu argumentów, gwarantujących poprawność rozwiązania i skuteczność w poszukiwaniu rozwiązań zagadnienia.	Zdający: XIII.R2) stosuje definicję pochodnej funkcji, podaje interpretację geometryczną pochodnej; XIII.R3) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu.

#### Zasady oceniania

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik:  $x_0 = 2$  oraz  $y = 17x - 16$ .

2 pkt – obliczenie odciętej  $x_0$  punktu  $P$  i wyznaczenie pochodnej funkcji  $f$ :  $x_0 = 2$  oraz  $f'(x) = 6x^2 - 8x + 9$ .

1 pkt – obliczenie odciętej  $x_0$  punktu  $P$ :  $x_0 = 2$

ALBO

– wyznaczenie pochodnej funkcji  $f$ :  $f'(x) = 6x^2 - 8x + 9$ .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

#### Przykładowe pełne rozwiązanie

Obliczamy odcięta  $x_0$  punktu  $P$ :

$$18 = 2x_0^3 - 4x_0^2 + 9x_0$$

$$2x_0^3 - 4x_0^2 + 9x_0 - 18 = 0$$

$$2x_0^2(x_0 - 2) + 9(x_0 - 2) = 0$$

$$(2x_0^2 + 9)(x_0 - 2) = 0$$

$$2x_0^2 + 9 = 0 \quad \text{lub} \quad x_0 - 2 = 0$$

Ponieważ  $2x_0^2 + 9 > 0$  dla każdej liczby rzeczywistej  $x_0$ , więc  $x_0 = 2$ .

Wyznaczamy pochodną funkcji  $f$ :

$$f'(x) = 6x^2 - 8x + 9$$

Wyznaczamy równanie kierunkowe stycznej do wykresu funkcji  $f$  w punkcie  $P$ . Obliczamy współczynnik kierunkowy  $a$  w równaniu stycznej:

$$a = f'(2) = 17$$

Obliczamy współczynnik  $b$  w równaniu stycznej:

$$18 = 17 \cdot 2 + b$$

$$b = -16$$

Styczna ma równanie  $y = 17x - 16$ .

### Zadanie 5. (0–3)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkietapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: II.R1) znajduje pierwiastki całkowite i wymierne wielomianu o współczynnikach całkowitych. III.R1) rozwiązuje nierówności wielomianowe typu: $W(x) > 0$ , $W(x) \geq 0$ , $W(x) < 0$ , $W(x) \leq 0$ dla wielomianów doprowadzonych do postaci iloczynowej lub takich, które dają się doprowadzić do postaci iloczynowej metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias lub metodą grupowania.

### Zasady oceniania

3 pkt – spełnienie kryterium oceniania za 2 punkty i uzasadnienie prawdziwości nierówności  $\frac{(a-2)^2(a+4)}{a} \geq 0$  lub  $(a-2)^2(a+4) \geq 0$ , lub  $a(a-2)^2(a+4) \geq 0$  z powołaniem się na założenie (dla sposobu I)

ALBO

– spełnienie kryterium oceniania za 2 punkty i przekształcenie nierówności

$$\frac{a^2 + \frac{8}{a} + \frac{8}{a}}{3} \geq \sqrt[3]{a^2 \cdot \frac{8}{a} \cdot \frac{8}{a}} \text{ do postaci tezy (dla sposobu II),}$$

ALBO

– spełnienie kryterium oceniania za 2 punkty oraz obliczenie  $f(2)$ :  $f(2) = 12$  (dla sposobu III).

2 pkt – przekształcenie nierówności  $a^2 + \frac{16}{a} \geq 12$  do postaci  $\frac{(a-2)^2(a+4)}{a} \geq 0$  lub  $(a-2)^2(a+4) \geq 0$ , lub  $a(a-2)^2(a+4) \geq 0$  (dla sposobu I)

ALBO

– spełnienie kryterium oceniania za 1 punkt oraz zapisanie wielomianu  $a^3 - 12a + 16$  w postaci  $(a-2)^2(a+4)$  (dla sposobu I),

ALBO

– zapisanie, że dla każdego  $a > 0$  liczby  $a^2$ ,  $\frac{8}{a}$ ,  $\frac{8}{a}$  są dodatnie oraz zapisanie nierówności między średnimi arytmetyczną i geometryczną liczb dodatnich  $a^2$ ,  $\frac{8}{a}$ ,  $\frac{8}{a}$ :

$$\frac{a^2 + \frac{8}{a} + \frac{8}{a}}{3} \geq \sqrt[3]{a^2 \cdot \frac{8}{a} \cdot \frac{8}{a}} \text{ (dla sposobu II),}$$

ALBO

– obliczenie miejsca zerowego pochodnej funkcji  $f$  oraz wyznaczenie w przedziale  $(0, +\infty)$  argumentu, dla którego funkcja osiąga w tym przedziale wartość najmniejszą (wraz z uzasadnieniem):  $a = 2$  (dla sposobu III).

1 pkt – przekształcenie nierówności  $a^2 + \frac{16}{a} \geq 12$  do postaci  $\frac{a^3 - 12a + 16}{a} \geq 0$  lub  $a^3 - 12a + 16 \geq 0$ , lub  $a(a^3 - 12a + 16) \geq 0$  (dla sposobu I)



ALBO

- zapisanie, że dla każdego  $a > 0$  liczby  $a^2, \frac{8}{a}, \frac{8}{a}$  są dodatnie (dla sposobu II),

ALBO

- obliczenie pochodnej funkcji  $f$  określonej wzorem  $f(a) = a^2 + \frac{16}{a}$  dla  $a > 0$  (lub w szerszym zakresie), np.  $f'(a) = 2a - \frac{16}{a^2}$  (dla sposobu III).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano nieprawidłową metodę, albo brak rozwiązania.

**Uwaga:**

Jeśli zdający opiera swoje rozwiązanie na nierówności między średnimi (sposób III) i stosuje nierówność między średnimi liczb  $a^2, \frac{8}{a}, \frac{8}{a}$  bez zapisania, że liczby te są dodatnie, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.

## Przykładowe pełne rozwiązania

### Sposób I

Przekształcamy nierówność  $a^2 + \frac{16}{a} \geq 12$ :

$$\frac{a^3}{a} + \frac{16}{a} - \frac{12a}{a} \geq 0$$

$$\frac{a^3 - 12a + 16}{a} \geq 0$$

$$a(a^3 - 12a + 16) \geq 0 \quad \text{dla} \quad a \neq 0$$

Zauważamy, że pierwiastkiem wielomianu  $W(a) = a^3 - 12a + 16$  jest liczba 2. Stąd  $W(a) = (a - 2)(a^2 + 2a - 8)$ . Ponieważ pierwiastkami trójmianu kwadratowego  $a^2 + 2a - 8$  są liczby 2 i (-4), więc  $W(a) = (a - 2)^2(a + 4)$ . Zatem nierówność  $a(a^3 - 12a + 16) \geq 0$  można równoważnie zapisać w postaci

$$a(a - 2)^2(a + 4) \geq 0$$

Dla każdej liczby dodatniej  $a$  wyrażenie  $(a - 2)^2$  jest liczbą nieujemną, natomiast wyrażenie  $(a + 4)$  jest liczbą dodatnią. Zatem dla każdej liczby dodatniej  $a$  wyrażenie  $a(a - 2)^2(a + 4)$  jest nieujemne jako iloczyn liczb nieujemnych. Oznacza to, że nierówność  $a^2 + \frac{16}{a} \geq 12$  jest prawdziwa dla każdej liczby dodatniej  $a$ . To należało wykazać.

Inna realizacja rozkładu wielomianu  $a^3 - 12a + 16$  na czynniki:

$$\begin{aligned} a^3 - 12a + 16 &= a^3 - 16a + 4a + 16 = a(a^2 - 16) + 4(a + 4) = \\ &= a(a - 4)(a + 4) + 4(a + 4) = (a + 4)[a(a - 4) + 4] = \\ &= (a + 4)(a^2 - 4a + 4) = (a + 4)(a - 2)^2 \end{aligned}$$

### Sposób II

Dla każdego  $a > 0$  liczby  $a^2, \frac{8}{a}, \frac{8}{a}$  są dodatnie. Korzystamy z nierówności między średnimi arytmetyczną i geometryczną liczb  $a^2, \frac{8}{a}, \frac{8}{a}$  i otrzymujemy:

$$\frac{a^2 + \frac{8}{a} + \frac{8}{a}}{3} \geq \sqrt[3]{a^2 \cdot \frac{8}{a} \cdot \frac{8}{a}}$$

$$\frac{a^2 + \frac{16}{a}}{3} \geq \sqrt[3]{64}$$

$$a^2 + \frac{16}{a} \geq 12$$

To należało wykazać.

*Sposób III*

Niech  $f$  będzie funkcją określoną wzorem  $f(a) = a^2 + \frac{16}{a}$  dla każdej liczby rzeczywistej  $a > 0$ .

Obliczamy pochodną funkcji  $f$ :

$$f'(a) = 2a - \frac{16}{a^2} = \frac{2a^3 - 16}{a^2}$$

Obliczamy miejsca zerowe pochodnej funkcji  $f$ :

$$\frac{2a^3 - 16}{a^2} = 0$$

$$2a^3 - 16 = 0$$

$$a = 2$$

Ponieważ  $f'(a) > 0$  dla  $a \in (2, +\infty)$  oraz  $f'(a) < 0$  dla  $a \in (0, 2)$ , więc funkcja  $f$  jest malejąca w przedziale  $(0, 2]$  oraz jest rosnąca w przedziale  $[2, +\infty)$ .

Zatem dla argumentu  $a = 2$  funkcja przyjmuje wartość najmniejszą równą

$$f(2) = 2^2 + \frac{16}{2} = 12. \text{ Stąd } f(a) \geq 12 \text{ dla każdej liczby dodatniej } a.$$

To oznacza, że nierówność  $a^2 + \frac{16}{a} \geq 12$  jest prawdziwa dla każdego  $a > 0$ .

### Zadanie 6. (0–3)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkietapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: VIII.1) wyznacza promienie i średnice okręgów, długości cięciw okręgów oraz odcinków stycznych, w tym z wykorzystaniem twierdzenia Pitagorasa.

#### Zasady oceniania

3 pkt – spełnienie kryterium oceniania za 2 punkty oraz uzasadnienie, że  $|AC| = |BC|$ .

2 pkt – wyznaczenie długości odcinków  $AP$ ,  $AQ$ ,  $BD$ ,  $CD$ ,  $CQ$  w zależności od tej samej zmiennej, np.  $|AP| = 5x$ ,  $|AQ| = 5x$ ,  $|BD| = x$ ,  $|CD| = 2x$ ,  $|CQ| = 2x$ .

1 pkt – zapisanie równości wynikającej z twierdzenia o odcinkach stycznych:  $|BD| = |BP|$  (lub  $|AP| = |AQ|$ , lub  $|CQ| = |CD|$ ).

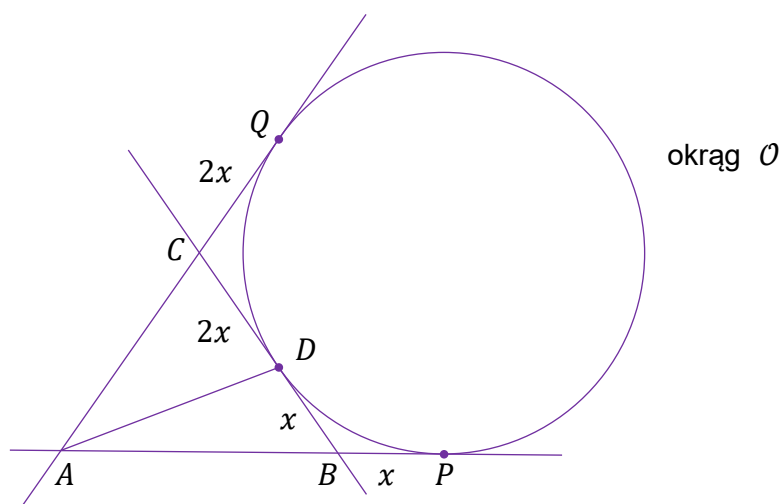
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

#### Przykładowe pełne rozwiązanie

Niech  $|BP| = x$ .

Z twierdzenia o odcinkach stycznych wnioskujemy, że  $|BD| = |BP| = x$ .

Z założenia  $|CD| = 2 \cdot |BD|$  otrzymujemy  $|CD| = 2x$ . Z twierdzenia o odcinkach stycznych wnioskujemy, że  $|CQ| = |CD| = 2x$  (zobacz rysunek).



Ponieważ  $|AQ| = 5 \cdot |BP|$ , więc  $|AQ| = 5x$ . Ponownie z twierdzenia o odcinkach stycznych wnioskujemy, że  $|AP| = |AQ| = 5x$ .

Zatem  $|AC| = |AQ| - |CQ| = 5x - 2x = 3x$  oraz  $|BC| = |BD| + |CD| = x + 2x = 3x$ .

Wobec tego  $|AC| = |BC|$ , więc trójkąt  $ABC$  jest równoramienny. To należało wykazać.

**Zadanie 7. (0–4)**

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: VI.R2) rozpoznaje zbieżne szeregi geometryczne i oblicza ich sumę.

**Zasady oceniania**

4 pkt – poprawne wyznaczenie wszystkich wartości zmiennej  $x$ , dla których suma szeregu istnieje ( $x \in (-\infty, -2) \cup (4, +\infty)$ ) oraz poprawne wyznaczenie wszystkich wartości zmiennej  $x$ , dla których suma jest równa  $\frac{15}{2}$ :  $x = 6$ .

3 pkt – wyznaczenie zbioru wszystkich wartości  $x$ , dla których istnieje skończona suma szeregu ( $x \in (-\infty, -2) \cup (4, +\infty)$ ) oraz zastosowanie wzoru na sumę szeregu geometrycznego, wyznaczenie tej sumy i zapisanie równania z niewiadomą  $x$ :

$$\frac{2x}{1 - \left(-\frac{3}{x-1}\right)} = \frac{15}{2}$$

ALBO

– zapisanie warunku zbieżności szeregu ( $|q| < 1$ ) oraz zastosowanie wzoru na sumę szeregu geometrycznego, wyznaczenie tej sumy, zapisanie równania z niewiadomą  $x$  ( $\frac{2x}{1 - \left(-\frac{3}{x-1}\right)} = \frac{15}{2}$ ) i rozwiązanie tego równania:  $x = -\frac{5}{4}$ ,  $x = 6$ .

2 pkt – wyznaczenie zbioru wszystkich wartości  $x$ , dla których istnieje skończona suma szeregu:  $x \in (-\infty, -2) \cup (4, +\infty)$

ALBO

– zapisanie warunku zbieżności szeregu ( $|q| < 1$ ) oraz zastosowanie wzoru na sumę szeregu geometrycznego, wyznaczenie tej sumy i zapisanie równania z niewiadomą  $x$ :

$$\frac{2x}{1 - \left(-\frac{3}{x-1}\right)} = \frac{15}{2}$$

1 pkt – zapisanie ilorazu:  $q = -\frac{3}{x-1}$ .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Uwagi:**

1. Jeśli zdający rozwiąże odpowiednie równanie i zapisze:  $x = -\frac{5}{4}$   $\vee$   $x = 6$ , a następnie obliczy iloraz szeregu dla każdej z wyznaczonych wartości zmiennych i na tej podstawie dokona właściwego wyboru rozwiązania, to otrzymuje **4 punkty**.
2. Jeśli zdający rozwiąże zadanie bez rozważenia warunku  $|q| < 1$ , to może otrzymać maksymalnie **2 punkty**.
3. Jeśli zdający zapisze poprawny warunek zbieżności szeregu:  $\left| -\frac{3}{x-1} \right| < 1$ , ale popełni błąd przy wyznaczaniu przedziału zbieżności i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać **3 punkty**.

4. Jeżeli zdający popełni błąd przy wyznaczaniu ilorazu ciągu, który będzie wyrażeniem wymiernym zmiennej  $x$ , np. zapisze, że  $q = -\frac{3x}{x-1}$ , i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać maksymalnie **2 punkty**.
5. Jeśli zdający zapisze dany szereg jako sumę dwóch szeregów postaci  $2x + \frac{18x}{(x-1)^2} + \frac{172x}{(x-1)^4} + \dots$  oraz  $-\frac{6x}{x-1} - \frac{54x}{(x-1)^3} - \frac{516x}{(x-1)^5} - \dots$  bez odpowiedniego komentarza i rozwiąże zadanie konsekwentnie do końca, obliczając sumę dwóch szeregów, to może otrzymać maksymalnie **3 punkty**.

### Przykładowe pełne rozwiązanie

Pierwszy wyraz i iloraz tego szeregu są równe, odpowiednio,  $a_1 = 2x$  oraz  $q = -\frac{3}{x-1}$ . Ponieważ  $x \neq 1$  i  $x \neq 0$ , to szereg ten jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy  $\left| -\frac{3}{x-1} \right| < 1$ , czyli  $|x-1| > 3$ . Stąd  $x \in (-\infty, -2) \cup (4, +\infty)$ .  
Wtedy suma  $S$  tego szeregu jest skończona i równa

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{2x}{1 - \left(-\frac{3}{x-1}\right)} = \frac{2x(x-1)}{x+2}$$

Rozwiązujemy równanie  $\frac{2x(x-1)}{x+2} = \frac{15}{2}$  w zbiorze  $(-\infty, -2) \cup (4, +\infty)$ :

$$\frac{2x(x-1)}{x+2} = \frac{15}{2}$$

$$4x(x-1) = 15(x+2)$$

$$4x^2 - 19x - 30 = 0$$

$$x = -\frac{5}{4} \notin (-\infty, -2) \cup (4, +\infty) \quad \text{lub} \quad x = 6 \in (-\infty, -2) \cup (4, +\infty)$$

Zatem  $x = 6$ .

**Zadanie 8. (0–4)**

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymagania ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 2. Używanie języka matematycznego do tworzenia tekstów matematycznych, w tym do opisu prowadzonych rozumowań i uzasadniania wniosków, a także do przedstawiania danych. IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: VII.R6) rozwiązuje równania trygonometryczne o stopniu trudności nie większym niż w przykładzie $4 \cos 2x \cos 5x = 2 \cos 7x + 1$ .

**Zasady oceniania**

4 pkt – poprawne metoda rozwiązania równania i poprawny wynik:  $-\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, -\frac{5\pi}{12}, -\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}$ .

3 pkt – rozwiązanie równania  $\sin(5x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$  (lub równania  $\cos x = \cos\left(5x + \frac{\pi}{2}\right)$ )

w zbiorze liczb rzeczywistych:  $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$  lub  $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3}$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z}$

ALBO

– przekształcenie równania do alternatywy elementarnych równań trygonometrycznych i rozwiązanie jednego z tych równań w zbiorze  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ,

ALBO

– przekształcenie równania do alternatywy elementarnych równań trygonometrycznych i rozwiązanie wszystkich równań tej alternatywy w zbiorze  $\mathbb{R}$ .

2 pkt – równoważne przekształcenie równania do postaci, która jest równością sinusów lub cosinusów, np.  $\sin(5x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ ,  $\cos x = \cos\left(5x + \frac{\pi}{2}\right)$

ALBO

– zastosowanie wzoru na sumę sinusów lub na sumę cosinusów i przekształcenie równania do postaci alternatywy elementarnych równań trygonometrycznych, np.  
 $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$  lub  $\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$ ,  $\cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = 0$  lub  $\cos\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = 0$ .

1 pkt – zastosowanie wzoru redukcyjnego i przekształcenie równania do postaci, w której występuje tylko jedna funkcja trygonometryczna, np.  $\sin(5x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$ ,  
 $\cos\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right) + \cos x = 0$ .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Przykładowe pełne rozwiązania****Sposób I (równość sinusów)**

Zapisujemy równanie w postaci równoważnej, w której występuje tylko jedna funkcja trygonometryczna zmiennej  $x$ :

$$\sin(5x) + \cos x = 0$$

$$\sin(5x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$$

$$\sin(5x) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Ponieważ funkcja sinus jest nieparzysta, więc

$$\sin(5x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Stąd

$$5x = x - \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{lub} \quad 5x = \pi - \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2k\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \quad \text{lub} \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3}$$

gdzie  $k \in \mathbb{Z}$ .

Wyznaczamy rozwiązania równania  $\sin(5x) + \cos x = 0$  w zbiorze  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ :

$$-\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, -\frac{5\pi}{12}, -\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}$$

### Sposób II (poprzez sumę sinusów)

Zapisujemy równanie w postaci równoważnej, w której występuje tylko jedna funkcja trygonometryczna zmiennej  $x$ :

$$\sin(5x) + \cos x = 0$$

$$\sin(5x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$$

Korzystamy ze wzoru na sumę sinusów i otrzymujemy

$$2 \sin\left(\frac{5x + \frac{\pi}{2} - x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{5x - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{2}\right) = 0$$

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \quad \text{lub} \quad \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$2x + \frac{\pi}{4} = k\pi \quad \text{lub} \quad 3x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \quad \text{lub} \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3}$$

gdzie  $k \in \mathbb{Z}$ .

Wyznaczamy rozwiązania równania  $\sin(5x) + \cos x = 0$  w zbiorze  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ :

$$-\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, -\frac{5\pi}{12}, -\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}$$



**Zadanie 9. (0–4)**

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 3. Dobieranie argumentów do uzasadnienia poprawności rozwiązywania problemów, tworzenie ciągu argumentów, gwarantujących poprawność rozwiązania i skuteczność w poszukiwaniu rozwiązań zagadnienia. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: VIII.5) stosuje własności kątów wpisanych i środkowych. IX.4) posługuje się równaniem okręgu $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ .

**Zasady oceniania (dla sposobu I)**

4 pkt – poprawna metoda rozwiązania i poprawny wynik:  $P = 20$ .

3 pkt – obliczenie wysokości  $CD$  trójkąta  $ABC$ :  $|CD| = 4$ .

2 pkt – obliczenie (podanie) długości odcinków  $AD$  i  $BD$ :  $|AD| = 8$  oraz  $|DB| = 2$ .

1 pkt – zapisanie, że bok  $AB$  trójkąta  $ABC$  jest średnicą danego okręgu

$ALBO$

– zapisanie, że środek  $S = (1, 2)$  danego okręgu leży na prostej o równaniu

$$4x - 3y + 2 = 0.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Zasady oceniania (dla sposobu II)**

4 pkt – poprawna metoda rozwiązania i poprawny wynik:  $P = 20$ .

3 pkt – obliczenie współrzędnych wierzchołka  $C$  trójkąta  $ABC$ :  $C = (6, 2)$  lub  $C = \left(-\frac{2}{5}, \frac{34}{5}\right)$ .

2 pkt – obliczenie współrzędnych punktu  $D$ :  $D = \left(\frac{14}{5}, \frac{22}{5}\right)$ .

1 pkt – obliczenie współrzędnych punktów  $A$  i  $B$ , np.  $A = (-2, -2)$  i  $B = (4, 6)$ .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę albo brak rozwiązania.

**Uwaga:**

Jeśli zdający popełnia w rozwiązaniu błąd merytoryczny albo błędnie odgaduje np. długości odcinków  $AD$  i  $BD$ , to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.

**Przykładowe pełne rozwiązania***Sposób I*

Ponieważ prosta o równaniu  $4x - 3y + 2 = 0$  przechodzi przez środek  $S = (1, 2)$  danego okręgu, więc bok  $AB$  jest średnicą tego okręgu. Zatem  $|AB| = 10$ . Wysokość  $CD$  dzieli bok  $AB$  tak, że  $|AD| = 4|DB|$ . Stąd i z  $|AD| + |DB| = 10$  wynika, że  $|AD| = 8$  oraz  $|DB| = 2$ . Ponieważ kąt  $ACB$  jest kątem wpisanym w okrąg, opartym na średnicy, więc jest kątem prostym. Wysokość opuszczona z wierzchołka kąta prostego dzieli przeciwprostokątną  $AB$  tak, że  $|CD| = \sqrt{|AD| \cdot |DB|} = \sqrt{8 \cdot 2} = 4$ . Zatem pole  $P$  trójkąta  $ABC$  jest równe

$$P = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |CD| = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4 = 20$$

### Sposób II

Ponieważ prosta o równaniu  $4x - 3y + 2 = 0$  przechodzi przez środek  $S = (1, 2)$  danego okręgu, więc bok  $AB$  jest średnicą tego okręgu. Obliczamy współrzędne punktów  $A$  i  $B$ , rozwiązując układ równań:  $4x - 3y + 2 = 0$  i  $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$ .

Z pierwszego z równań układu wyznaczamy  $x$ :  $x = \frac{3y-2}{4}$  i podstawiamy do drugiego z równań układu, otrzymując kolejno:

$$\left(\frac{3y-2}{4} - 1\right)^2 + (y-2)^2 = 25$$

$$\left(\frac{3y-6}{4}\right)^2 + (y-2)^2 = 25$$

$$\frac{9}{16}(y-2)^2 + (y-2)^2 = 25$$

$$(y-2)^2 = 16$$

$$|y-2| = 4$$

$$y = -2 \quad \text{lub} \quad y = 6$$

Gdy  $y = -2$ , to  $x = -2$ . Gdy  $y = 6$ , to  $x = 4$ .

Ze względu na symetrię, możemy przyjąć, że  $A = (-2, -2)$  i  $B = (4, 6)$ . Wtedy  $|AB| = 10$ .

Ponieważ  $\overrightarrow{AD} = \frac{4}{5} \cdot \overrightarrow{AB}$ , więc  $\overrightarrow{AD} = \frac{4}{5} \cdot [6, 8] = \left[\frac{24}{5}, \frac{32}{5}\right]$ . Stąd wynika, że  $D = \left(\frac{14}{5}, \frac{22}{5}\right)$ .

Wyznaczamy równanie prostej, która zawiera wysokość  $CD$  trójkąta  $ABC$ :  $y = ax + b$

Prosta ta jest prostopadła do prostej  $4x - 3y + 2 = 0$ , więc  $\frac{4}{3} \cdot a = -1$ . Stąd  $a = -\frac{3}{4}$ .

Wykorzystując współrzędne punktu  $D$ , otrzymujemy  $\frac{22}{5} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{14}{5} + b$ , czyli  $b = \frac{13}{2}$ .

Wyznaczamy współrzędne punktu  $C$ , rozwiązując układ równań

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{13}{2} \quad \text{i} \quad (x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$$

Otrzymujemy

$$(x-1)^2 + \left(-\frac{3}{4}x + \frac{13}{2} - 2\right)^2 = 25$$

$$(x-1)^2 + \left(-\frac{3}{4}x + \frac{9}{2}\right)^2 = 25$$

$$x^2 - 2x + 1 + \frac{9}{16}x^2 - \frac{27}{4}x + \frac{81}{4} - 25 = 0$$

$$5x^2 - 28x - 12 = 0$$

$$(x-6)(5x+2) = 0$$

$$x = 6 \quad \text{lub} \quad x = -\frac{2}{5}$$

Stąd  $C = (6, 2)$  lub  $C = \left(-\frac{2}{5}, \frac{34}{5}\right)$ .

Obliczamy wysokość trójkąta  $ABC$ .

Dla  $C = (6, 2)$  otrzymujemy  $|DC| = \sqrt{\left(6 - \frac{14}{5}\right)^2 + \left(2 - \frac{22}{5}\right)^2} = 4$ .

Dla  $C = \left(-\frac{2}{5}, \frac{34}{5}\right)$  otrzymujemy  $|DC| = \sqrt{\left(-\frac{2}{5} - \frac{14}{5}\right)^2 + \left(\frac{34}{5} - \frac{22}{5}\right)^2} = 4$ .

Zatem pole  $P$  trójkąta  $ABC$  jest równe

$$P = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |CD| = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4 = 20$$

### Uwaga:

Przyjmując  $A = (4, 6)$  i  $B = (-2, -2)$ , otrzymujemy  $D = \left(-\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}\right)$ . Wtedy prosta, która zawiera wysokość  $CD$  trójkąta  $ABC$ , ma równanie  $y = -\frac{3}{4}x - 1$ . Współrzędne punktu  $C$  obliczamy, rozwiązując układ równań:  $y = -\frac{3}{4}x - 1$  i  $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$ .

Otrzymujemy:  $C = (-4, 2)$  lub  $C = \left(\frac{12}{5}, -\frac{14}{5}\right)$ . Dla obu tych przypadków  $|CD| = 4$  i pole  $P = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4 = 20$ .

### Zadanie 10. (0–5)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych. 3. Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu.	Zdający: III.R5) analizuje równania i nierówności liniowe z parametrami oraz równania i nierówności kwadratowe z parametrami, w szczególności wyznacza liczbę rozwiązań w zależności od parametrów, podaje warunki, przy których rozwiązania mają żadaną własność, i wyznacza rozwiązania w zależności od parametrów.

#### Zasady oceniania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

**Pierwszy etap** polega na rozwiązaniu warunku  $\Delta > 0$ . Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

1 pkt – poprawne rozwiązanie warunku  $\Delta > 0$ :  $m \in \left(-\infty, \frac{1}{9}\right) \cup (1, +\infty)$ .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Drugi etap** polega na wyznaczeniu wszystkich wartości parametru  $m$ , dla których jest spełniony warunek  $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} < 1$ .

Podział punktów za drugi etap rozwiązania:

3 pkt – wyznaczenie tych wszystkich wartości  $m$ , dla których spełniony jest warunek

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} < 1: m \in (-4 - 2\sqrt{6}, 0) \cup (0, -4 + 2\sqrt{6}).$$

2 pkt – zapisanie nierówności z jedną niewiadomą  $m$ , która odpowiada warunkowi

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} < 1, \text{ np. } \frac{\left(\frac{m+1}{m}\right)^2 - 2 \cdot \frac{(-2m+3)}{m}}{\left(\frac{-2m+3}{m}\right)^2} < 1.$$

1 pkt – przekształcenie wyrażenia  $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} < 1$  do postaci pozwalającej na bezpośrednie

zastosowanie wzorów Viète’a, np.  $\frac{(x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2}{(x_1x_2)^2} < 1$  (lub innej równoważnej, ale

zawierającej jedynie zmienne  $x_1 + x_2$  oraz  $x_1x_2$ ).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Trzeci etap** polega na wyznaczeniu wszystkich wartości parametru  $m$ , dla których spełnione są jednocześnie warunki:  $\Delta > 0$  i  $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} < 1$ .

Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

1 pkt – poprawne wyznaczenie wszystkich wartości  $m$ , dla których  $\Delta > 0$  i  $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} < 1$ :

$$m \in (-4 - 2\sqrt{6}, 0) \cup \left(0, \frac{1}{9}\right).$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Uwagi:**

1. Jeżeli zdający rozwiązuje warunek  $\Delta \geq 0$  (zamiast  $\Delta > 0$ ), to za I etap rozwiązania otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeżeli zdający w II etapie rozwiązania rozważa niepoprawną nierówność wymierną i rozwiązanie tej nierówności jest zbiorem rozłącznym ze zbiorem rozwiązań nierówności z I etapu, to zdający otrzymuje **0 punktów** za III etap.
3. Jeżeli w rozwiązaniu zdającego nie ma zapisu  $m \neq 0$  albo  $m \neq \frac{3}{2}$ , albo zdający nie uwzględni w rozwiązaniu warunku  $m \neq 0$ , albo  $m \neq \frac{3}{2}$ , to zdający może otrzymać co najwyżej **4 punkty** za całe rozwiązanie.

**Przykładowe pełne rozwiązanie**

Równanie  $mx^2 - (m+1)x - 2m + 3 = 0$  ma dokładnie dwa różne rozwiązania rzeczywiste wtedy i tylko wtedy, gdy  $m \neq 0$  i wyróżnik  $\Delta$  trójmianu kwadratowego  $mx^2 - (m+1)x - 2m + 3$  jest dodatni.

**I etap**

Rozwiązujemy warunek  $\Delta > 0$ :

$$[-(m+1)]^2 - 4m \cdot (-2m+3) > 0$$

$$9m^2 - 10m + 1 > 0$$

$$(m-1)(9m-1) > 0$$

$$m \in \left(-\infty, \frac{1}{9}\right) \cup (1, +\infty)$$

Zatem równanie  $mx^2 - (m+1)x - 2m + 3 = 0$  ma dokładnie dwa różne rozwiązania rzeczywiste, gdy  $m \in (-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{1}{9}\right) \cup (1, +\infty)$ .

**II etap**

Wyznamy wszystkie wartości  $m$ , dla których jest spełniony warunek:  $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} < 1$ .

Przekształcamy nierówność  $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} < 1$  do postaci, która pozwoli na bezpośrednie zastosowanie wzorów Viète'a:

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{(x_1 x_2)^2} < 1$$

$$\frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{(x_1 x_2)^2} < 1$$

Stąd, po zastosowaniu wzorów Viète'a, otrzymujemy:

$$\frac{\left(\frac{m+1}{m}\right)^2 - 2 \cdot \frac{(-2m+3)}{m}}{\left(\frac{-2m+3}{m}\right)^2} < 1$$

i dalej

$$\left(\frac{m+1}{m}\right)^2 - 2 \cdot \frac{(-2m+3)}{m} < \left(\frac{-2m+3}{m}\right)^2 \quad \text{i} \quad m \neq 0 \quad \text{i} \quad m \neq \frac{3}{2}$$

$$(m+1)^2 - 2m(-2m+3) < (-2m+3)^2 \quad \text{i} \quad m \neq 0 \quad \text{i} \quad m \neq \frac{3}{2}$$

$$m^2 + 8m - 8 < 0 \quad \text{i} \quad m \neq 0 \quad \text{i} \quad m \neq \frac{3}{2}$$

$$m \in (-4 - 2\sqrt{6}, -4 + 2\sqrt{6}) \quad \text{i} \quad m \neq 0 \quad \text{i} \quad m \neq \frac{3}{2}$$

Zatem warunek  $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} < 1$  jest spełniony tylko dla  $m \in (-4 - 2\sqrt{6}, 0) \cup (0, -4 + 2\sqrt{6})$ .

### III etap

Wyznaczamy te wszystkie wartości  $m$ , które jednocześnie spełniają warunki:  $m \neq 0$  i

$m \in (-\infty, \frac{1}{9}) \cup (1, +\infty)$  i  $m \in (-4 - 2\sqrt{6}, -4 + 2\sqrt{6})$  i  $m \neq \frac{3}{2}$ :

$$m \in (-4 - 2\sqrt{6}, 0) \cup \left(0, \frac{1}{9}\right)$$

**Zadanie 11. (0–5)**

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: VI.6) wykorzystuje własności ciągów, w tym arytmetycznych i geometrycznych, do rozwiązywania zadań, również osadzonych w kontekście praktycznym.

**Zasady oceniania**

5 pkt – obliczenie  $a$ ,  $b$  oraz  $c$ :  $a = 1$  i  $b = 3$  i  $c = 9$ .

4 pkt – rozwiązanie równania z jedną niewiadomą, np.  $a = -\frac{49}{2}$  oraz  $a = 1$ ,  $q = 3$  oraz  $q = \frac{4}{7}$ .

3 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą, np.  $\left(\frac{2}{3}a + \frac{7}{3}\right)^2 = a\left(\frac{2}{3}a + \frac{25}{3}\right)$ ,

$$4 \cdot \frac{6}{q^2 - q} \cdot q = 2 \cdot \frac{6}{q^2 - q} + \frac{6}{q^2 - q} \cdot q^2 + 1.$$

2 pkt – wykorzystanie związku między wyrazami ciągu arytmetycznego oraz związku między wyrazami ciągu geometrycznego i zapisanie układu warunków z trzema

niewiadomymi prowadzącego do rozwiązania zadania, np.  $b^2 = ac$  i  $2b = \frac{2a+c+1}{2}$

$$\text{i } c - b = 6$$

ALBO

– zapisanie wyrazów ciągu geometrycznego za pomocą jednej zmiennej/niewiadomej,

$$\text{np. } \left(a, \frac{2}{3}a + \frac{7}{3}, \frac{2}{3}a + \frac{25}{3}\right),$$

ALBO

– zapisanie wyrazów ciągu arytmetycznego za pomocą jednej zmiennej/niewiadomej,

$$\text{np. } \left(\frac{b^2}{b+6}, 2b, b+6\right),$$

ALBO

– wykorzystanie związku między wyrazami ciągu arytmetycznego oraz związku między wyrazami ciągu geometrycznego i zapisanie układu warunków z dwiema niewiadomymi prowadzącego do rozwiązania zadania, np.

$$2aq = \frac{2a+aq^2+1}{2} \text{ i } aq^2 - aq = 6.$$

1 pkt – wykorzystanie własności ciągu arytmetycznego i zapisanie równania  $2b = \frac{2a+c+1}{2}$

ALBO

– wykorzystanie własności ciągu arytmetycznego i zapisanie równania

$$2b = \frac{2a+b+6+1}{2},$$

ALBO

– wykorzystanie własności ciągu geometrycznego i zapisanie równania  $b^2 = ac$ ,

ALBO

– wykorzystanie własności ciągu geometrycznego i zapisanie równania  $aq^2 - aq = 6$ .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

## Przykładowe pełne rozwiązania

### Sposób I

Z warunku  $c - b = 6$  wyznaczamy  $c$ :  $c = b + 6$ .

Zatem ciąg  $(2a, 2b, b + 7)$  jest arytmetyczny. Korzystamy z własności ciągu arytmetycznego i otrzymujemy  $2b = \frac{2a+b+7}{2}$ . Stąd  $4b = 2a + b + 7$ , czyli  $b = \frac{2}{3}a + \frac{7}{3}$ .

Z zależności  $c = b + 6$  oraz  $b = \frac{2}{3}a + \frac{7}{3}$  otrzymujemy  $c = \frac{2}{3}a + \frac{25}{3}$ . Zatem ciąg  $(a, \frac{2}{3}a + \frac{7}{3}, \frac{2}{3}a + \frac{25}{3})$  jest geometryczny.

Korzystamy z własności ciągu geometrycznego i otrzymujemy

$$\left(\frac{2}{3}a + \frac{7}{3}\right)^2 = a \cdot \left(\frac{2}{3}a + \frac{25}{3}\right) \quad / \cdot 9$$

$$(2a + 7)^2 = a \cdot (6a + 25)$$

$$0 = 2a^2 + 47a - 49$$

$$\Delta = 47^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-49) = 2601, \quad \sqrt{\Delta} = 51$$

$$a = -\frac{47}{2} \quad \text{lub} \quad a = 1$$

Ponieważ wszystkie wyrazy ciągu  $(a, b, c)$  są dodatnie, więc  $a = 1$ .

Wtedy  $b = \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{7}{3} = 3$  i  $c = 3 + 6 = 9$ . Stąd  $(a, b, c) = (1, 3, 9)$

i  $(2a, 2b, c + 1) = (2, 6, 10)$ .

Ciąg  $(1, 3, 9)$  ma wszystkie wyrazy dodatnie i jest geometryczny (o ilorazie 3), ciąg  $(2, 6, 10)$  jest arytmetyczny (o różnicy 4).

Zatem ostatecznie  $a = 1$ ,  $b = 3$  oraz  $c = 9$ .

### Sposób II

Ciąg  $(a, b, c)$  jest geometryczny, więc ze wzoru ogólnego ciągu geometrycznego otrzymujemy  $b = aq$  oraz  $c = aq^2$ . Z warunku  $c - b = 6$  otrzymujemy  $aq^2 - aq = 6$ . Stąd  $aq(q - 1) = 6$ .

Z warunków zadania  $a \neq 0$ . Gdyby  $q = 0$  lub  $q = 1$ , to równanie  $aq(q - 1) = 6$  byłoby sprzeczne. Zatem  $q \neq 0$  oraz  $q \neq 1$ . Wtedy  $a = \frac{6}{q^2 - q}$ .

Ciąg  $(2a, 2b, c + 1)$  jest arytmetyczny, więc korzystamy z własności ciągu arytmetycznego i otrzymujemy  $2aq = \frac{2a + aq^2 + 1}{2}$ , czyli  $4aq = 2a + aq^2 + 1$ .

Wykorzystując związki  $a = \frac{6}{q^2 - q}$  i  $4aq = 2a + aq^2 + 1$ , otrzymujemy

$$4 \cdot \frac{6}{q^2 - q} \cdot q = 2 \cdot \frac{6}{q^2 - q} + \frac{6}{q^2 - q} \cdot q^2 + 1$$

Stąd dalej otrzymujemy:

$$\frac{24q}{q^2 - q} = \frac{12}{q^2 - q} + \frac{6q^2}{q^2 - q} + 1$$

$$24q = 12 + 6q^2 + q^2 - q$$

$$7q^2 - 25q + 12 = 0$$



$$(q - 3)(7q - 4) = 0$$

$$q = 3 \quad \text{lub} \quad q = \frac{4}{7}$$

Gdy  $q = \frac{4}{7}$ , to wtedy  $a = \frac{6}{\left(\frac{4}{7}\right)^2 - \frac{4}{7}} < 0$ , więc dla tej wartości  $q$  warunki zadania nie są spełnione.

Gdy  $q = 3$ , to wtedy  $a = \frac{6}{3^2 - 3} = 1$ ,  $b = 3$  i  $c = 9$ .

Ciąg  $(1, 3, 9)$  ma wszystkie wyrazy dodatnie i jest geometryczny (o ilorazie 3), ciąg  $(2, 6, 10)$  jest arytmetyczny (o różnicy 4).

Zatem ostatecznie  $a = 1$ ,  $b = 3$  oraz  $c = 9$ .

**Uwaga:**

Jeżeli zdający nie odrzuci ujemnego rozwiązania  $a = -\frac{49}{2}$  i w konsekwencji poda dwie trójki liczb  $a$ ,  $b$  i  $c$ , to może otrzymać co najwyżej **4 punkty**.

## Zadanie 12. (0–5)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: VIII.R1) stosuje własności czworokątów wpisanych w okrąg i opisanych na okręgu.

### Zasady oceniania

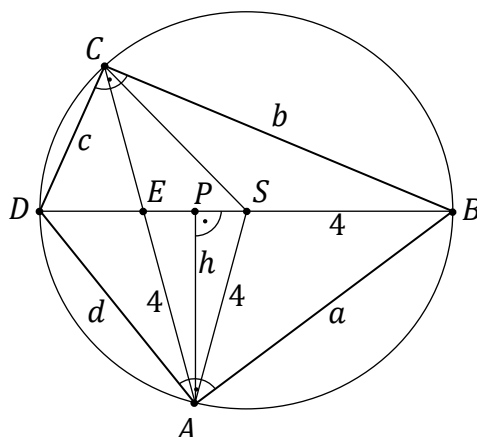
- 5 pkt – poprawna metoda rozwiązania oraz poprawny wynik:  $|AB| = 2\sqrt{10}$ ,  $|BC| = 3\sqrt{6}$ ,  
 $|CD| = \sqrt{10}$ ,  $|AD| = 2\sqrt{6}$ .
- 4 pkt – obliczenie długości boków  $AB$  i  $AD$ :  $|AB| = 2\sqrt{10}$  i  $|AD| = 2\sqrt{6}$  oraz spełnienie jednego z poniższych kryteriów I–III:  
 I. obliczenie długości odcinka  $CE$ :  $|CE| = 3$ ,  
 II. wyznaczenie skali podobieństwa trójkątów  $DEC$  i  $AEB$ :  $\frac{1}{2}$ ,  
 III. obliczenie długości jednego z boków tego czworokąta i zapisanie wyrażenia arytmetycznego opisującego długości pozostałych boków w zależności od długości tego obliczonego boku.
- 3 pkt – obliczenie długości boków  $AB$  i  $AD$ :  $|AB| = 2\sqrt{10}$  i  $|AD| = 2\sqrt{6}$ .
- 2 pkt – obliczenie wysokości  $AP$  trójkąta  $ASE$ :  $|AP| = \sqrt{15}$   
 ALBO  
 – obliczenie długości odcinka  $CE$ :  $|CE| = 3$ ,  
 ALBO  
 – wyznaczenie skali podobieństwa trójkątów  $DEC$  i  $AEB$ :  $\frac{1}{2}$ ,  
 ALBO  
 – obliczenie długości odcinków  $DE$ ,  $BE$ ,  $AE$ :  $|DE| = 2$ ,  $|BE| = 6$  i  $|AE| = 4$  oraz zapisanie układu równań prowadzącego do wyznaczenia długości boków  $a$  oraz  $d$ :  
 $a^2 + d^2 = 8^2$ ,  $a^2 = 6^2 + 4^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \cos \beta$  oraz  
 $d^2 = 2^2 + 4^2 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \cos(180^\circ - \beta)$ .
- 1 pkt – obliczenie długości odcinków  $DE$ ,  $BE$  oraz  $AE$ :  $|DE| = 2$ ,  $|BE| = 6$  oraz  $|AE| = 4$   
 ALBO  
 – zapisanie, że trójkąty  $DEC$  oraz  $AEB$  (albo trójkąty  $BEC$  oraz  $AED$ ) są podobne,  
 ALBO  
 – zapisanie równości wynikającej z twierdzenia o odcinkach siecznych:  
 $|AE| \cdot |CE| = |BE| \cdot |DE|$ .
- 0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

### Uwaga:

Jeśli zdający zapisze, że  $|DE| = 1$  i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty**.

**Przykładowe pełne rozwiązanie**

Ponieważ trójkąty  $ABD$  i  $BCD$  są prostokątne, to ich wspólna przeciwprostokątna  $BD$  jest średnicą okręgu opisanego na czworokącie  $ABCD$ . Zatem  $|BD| = 8$ . Stąd i z warunków  $|BE| = 3 \cdot |DE|$  oraz  $|BD| = 2 \cdot |AE|$  otrzymujemy  $|DE| = 2$ ,  $|BE| = 6$  i  $|AE| = 4$ . Oznaczmy przez  $S$  środek okręgu opisanego na czworokącie  $ABCD$ . Prowadzimy wysokość  $AP$  trójkąta  $ASE$  i przyjmijmy pozostałe oznaczenia jak na rysunku.



Ponieważ  $|AE| = 4 = |AS|$ , więc trójkąt  $ASE$  jest równoramienny. Zatem spodek  $P$  wysokości trójkąta  $ASE$  jest środkiem podstawy  $ES$  tego trójkąta. Stąd wynika, że  $|EP| = |PS| = 1$ .

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta  $ASP$  otrzymujemy

$$|AS|^2 = |AP|^2 + |PS|^2$$

$$4^2 = h^2 + 1^2$$

$$h^2 = 15$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów  $ABP$  i  $ADP$  otrzymujemy

$$|AB|^2 = |AP|^2 + |PB|^2 \quad \text{oraz} \quad |AD|^2 = |AP|^2 + |PD|^2$$

$$a^2 = h^2 + 5^2 \quad \text{oraz} \quad d^2 = h^2 + 3^2$$

$$a^2 = 15 + 25 \quad \text{oraz} \quad d^2 = 15 + 9$$

$$a = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \quad \text{oraz} \quad d = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

Kąty  $DCA$  i  $ABD$  są równe, gdyż są to kąty wpisane oparte na tym samym łuku  $AD$ . Kąty  $DEC$  i  $BEA$  są równe, gdyż są to kąty wierzchołkowe. Zatem trójkąty  $DEC$  i  $BEA$  są podobne (cecha  $kkk$ ). Wynika stąd, że

$$\frac{|CD|}{|DE|} = \frac{|AB|}{|AE|}$$

$$\frac{c}{2} = \frac{2\sqrt{10}}{4}$$

$$c = \sqrt{10}$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta  $BCD$  otrzymujemy

$$|BD|^2 = |CD|^2 + |BC|^2$$

$$8^2 = c^2 + b^2$$

$$64 = (\sqrt{10})^2 + b^2$$

$$b = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$$

**Uwagi:**

1. Długości boków  $CD$  i  $BC$  można obliczyć, wykorzystując twierdzenie o odcinkach siecznych. Wynika z niego, że  $|AE| \cdot |CE| = |BE| \cdot |DE|$ , więc  $|CE| = 3$ . Ponieważ

$\cos \angle AEP = \frac{|EP|}{|AE|} = \frac{1}{4}$ , to z twierdzenia cosinusów wynika, że

$$|CD|^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{4} = 10 \quad \text{oraz} \quad |BC|^2 = 6^2 + 3^2 + 2 \cdot 6 \cdot 3 \cdot \frac{1}{4} = 54.$$

2. Po wyznaczeniu odcinków  $|DE| = 2$ ,  $|BE| = 6$  i  $|AE| = 4$  można wyznaczyć długości boków  $a$  oraz  $d$ , korzystając z twierdzenia cosinusów. Przyjmując  $\beta = \angle AEB$ , możemy zapisać układ trzech równań:  $a^2 + d^2 = 8^2$ ,  $a^2 = 6^2 + 4^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \cos \beta$  oraz

$$d^2 = 2^2 + 4^2 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \cos(180^\circ - \beta). \quad \text{Wtedy} \quad \cos \beta = \frac{1}{4} \quad \text{oraz} \quad a = 2\sqrt{10} \quad \text{i} \quad d = 2\sqrt{6}.$$

**Zadanie 13. (0–6)**

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymagania ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 3. Dobieranie argumentów do uzasadnienia poprawności rozwiązywania problemów, tworzenie ciągu argumentów, gwarantujących poprawność rozwiązania i skuteczność w poszukiwaniu rozwiązań zagadnienia. III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: XIII.R5) rozwiązuje zadania optymalizacyjne z zastosowaniem pochodnej.

**Zasady oceniania**

6 pkt – poprawne wyznaczenie wzoru funkcji  $V(h)$  oraz jej dziedziny, oraz wyznaczenie wysokości graniastosłupa o największej objętości wraz z uzasadnieniem.

5 pkt – obliczenie miejsca zerowego pochodnej funkcji  $V$ :  $h = \frac{\sqrt{3}}{3}d$ .

4 pkt – wyznaczenie pochodnej funkcji  $V$ , np.  $V'(h) = 2(d^2 - 3h^2)$ .

3 pkt – wyznaczenie dziedziny funkcji  $V(h)$ :  $(0, d)$ .

2 pkt – wyznaczenie objętości  $V$  graniastosłupa jako funkcji jego wysokości, np.

$$V(h) = 2(d^2 - h^2) \cdot h.$$

1 pkt – wyznaczenie długości krawędzi podstawy w zależności od wysokości graniastosłupa:

$$a = \sqrt{2} \cdot \sqrt{d^2 - h^2}.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Przykładowe pełne rozwiązanie**

Oznaczmy przez  $a$  długość krawędzi podstawy graniastosłupa, natomiast przez  $h$  – wysokość tego graniastosłupa.

a)

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta  $ODH$  i otrzymujemy:

$$d^2 = h^2 + |OD|^2$$

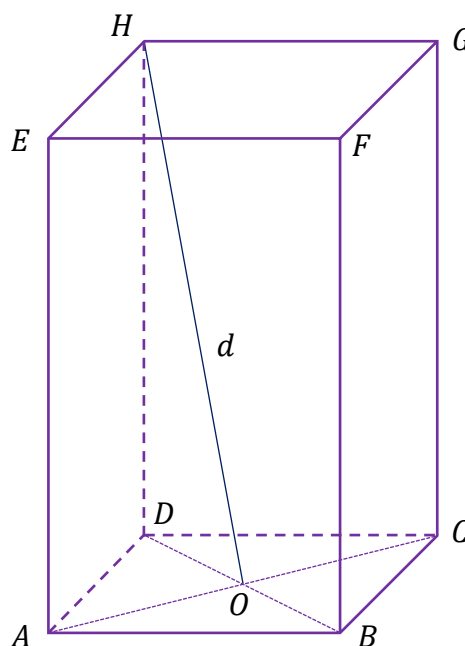
$$|OD| = \sqrt{d^2 - h^2}$$

Ponieważ  $|OD| = \frac{1}{2}|BD| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ , więc  $\frac{a\sqrt{2}}{2} = \sqrt{d^2 - h^2}$ .

Stąd  $a = \sqrt{2} \cdot \sqrt{d^2 - h^2}$  i  $h \in (0, d)$ .

Pole  $P_p$  podstawy graniastosłupa jest równe

$$P_p = \left(\sqrt{2} \cdot \sqrt{d^2 - h^2}\right)^2 = 2(d^2 - h^2)$$



Wyznaczamy objętość graniastosłupa jako funkcję zmiennej  $h$ :

$$V(h) = 2(d^2 - h^2) \cdot h = 2(d^2h - h^3) \text{ dla } 0 < h < d.$$

b)

Wyznaczamy pochodną funkcji  $V$ :

$$V'(h) = 2(d^2 - 3h^2)$$

Obliczamy miejsce zerowe pochodnej funkcji  $V$ :

$$V'(h) = 0$$

$$2(d^2 - 3h^2) = 0 \quad \text{ i } \quad h \in (0, d)$$

$$h = \frac{d}{\sqrt{3}}$$

Ponieważ  $V'(h) > 0$  dla  $h \in \left(0, \frac{d}{\sqrt{3}}\right)$  oraz  $V'(h) < 0$  dla  $h \in \left(\frac{d}{\sqrt{3}}, d\right)$ , więc funkcja  $V$  jest rosnąca w przedziale  $\left(0, \frac{d}{\sqrt{3}}\right]$  oraz malejąca w przedziale  $\left[\frac{d}{\sqrt{3}}, d\right)$ . Zatem funkcja  $V$  osiąga wartość największą dla  $h = \frac{d}{\sqrt{3}}$ .

Spośród rozważanych graniastosłupów największą objętość ma graniastosłup o wysokości  $h = \frac{d}{\sqrt{3}}$ .