

**AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA**  
**im. Stanisława Staszica w Krakowie**  
**OLIMPIADA „O DIAMENTOWY INDEKS AGH” 2021/22**

**MATEMATYKA - ETAP I**

**ZADANIA PO 10 PUNKTÓW**

1. Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych  $a, b$  prawdziwa jest nierówność

$$a^{a-b} \geq b^{a-b}.$$

2. Długości boków trójkąta prostokątnego tworzą rosnący ciąg arytmetyczny. Wykaż, że różnicą ciągu jest długość promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.
3. Cztery kolejne liczby parzyste są pierwiastkami wielomianu o współczynnikach całkowitych. Udowodnij, że wartość tego wielomianu dla dowolnej liczby parzystej jest podzielna przez 384.
4. Udowodnij, że dla dowolnego trójkąta o długościach boków  $a, b, c$

$$2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} < \sqrt{3}(a + b + c).$$

**ZADANIA PO 20 PUNKTÓW**

5. Wyznacz zbiór wartości funkcji  $g$  danej wzorem

$$g(x) = \cos 4x + 5 \cos^2 x + \sin^2 x.$$

Dla jakich argumentów  $x$  funkcja  $g$  przyjmuje najmniejszą wartość?

6. Dana jest liczba naturalna  $k \geq 4$ . Na ile sposobów można  $k + 1$  zadań przydzielić  $k$  komputerom, tak by dokładnie jeden komputer był wolny, jeżeli
- a) zadania i komputery są rozróżnialne,
  - b) komputery są rozróżnialne, a zadania nie,
  - c) zadania są rozróżnialne, a komputery nie,
  - d) ani zadania, ani komputery nie są rozróżnialne?
7. Na płaszczyźnie dane są zbiory

$$S = \{(x, y) : \log_{|y+1|} x \leq 1\},$$

$$A_m = \{(x, y) : x^2 + y^2 - 2mx - 4y + 4 \leq 0\},$$

gdzie  $m \in \mathbb{R}$ . Narysuj zbiór  $S$ . Dla jakich liczb  $m$  zbiór  $A_m$  zawiera się w zbiorze  $S$ ?