

PRACA KONTROLNA nr 4

styczeń 2006r.

1. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 2(x - y) \\ x^3 + y^3 = 6 - (x - y) \end{cases}.$$

2. Dany jest punkt $P(3, 2)$ oraz dwie proste k i l o równaniach odpowiednio: $x + y + 4 = 0$ i $2x - 3y - 9 = 0$. Znaleźć taki punkt Q na prostej l , aby środek odcinka \overline{PQ} leżał na prostej k . Rozwiązanie zilustrować odpowiednim rysunkiem.
3. Dla jakich wartości parametru rzeczywistego $a \neq 0$ pierwiastki wielomianu $w(x) = a^2x^3 - a^2x^2 - (a^2 + 1)x + a^2 - 1$ są trzema pierwszymi wyrazami pewnego ciągu arytmetycznego? Dla każdego otrzymanego przypadku obliczyć czwarty wyraz ciągu.
4. Znaleźć liczbę trzycyfrową wiedząc, że iloraz z dzielenia tej liczby przez sumę jej cyfr jest równy 48, a różnica szukanej liczby i liczby napisanej tymi samymi cyframi, ale w odwrotnym porządku wynosi 198.
5. W okrąg wpisano trapez tak, że jedna z jego podstaw jest średnicą okręgu. Stosunek długości obwodu trapezu do sumy długości jego podstaw jest równy $\frac{3}{2}$. Obliczyć cosinus kąta ostrego w tym trapezie.
6. Na ostrosłupie prawidłowym trójkątnym opisano stożek, a na tym stożku opisano kulę. Kąt przy wierzchołku przekroju osiowego stożka jest równy α . Obliczyć stosunek objętości kuli do objętości ostrosłupa.
7. Rozwiązać nierówność

$$3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x+1} < 4^x - 5 \cdot 3^{x-\frac{1}{2}}.$$

8. Zbadać przebieg zmienności i sporządzić staranny wykres funkcji $f(x) = \frac{4-x^2}{x^2-1}$. Następnie narysować wykres funkcji $k = g(m)$, gdzie k jest liczbą pierwiastków równania $\left| \frac{4-x^2}{x^2-1} \right| = m$.
9. Ze zbioru cyfr $\{0, 1, 2, 3\}$ wylosowano dwie i odrzucono. Z otrzymanego zbioru wylosowano ze zwracaniem pięć cyfr. Jakie jest prawdopodobieństwo, że liczba utworzona z tych cyfr jest podzielna przez 3?