PRACA KONTROLNA nr 5

luty 2001 r

1. Posługując się odpowiednim wykresem wykazać, że równanie
$$\sqrt{x-3}+x=4$$
posiada dokładnie jedno rozwiązanie. Następnie wyznaczyć to rozwiązanie analitycznie.

2. Wiadomo, że wielomian $w(x) = 3x^3 - 5x + 1$ ma trzy pierwiastki rzeczywiste $x_1,\ x_2,\ x_3$. Nie wyznaczając tych pierwiastków obliczyć wartość wyrażenia
$$(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3).$$

3. Rzucamy jeden raz kostką, a następnie monetą tyle razy, ile oczek pokazała kostka. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że rzuty monetą dały co najmniej jednego orła.

4. Wyznaczyć równania wszystkich okręgów stycznych do obu osi układu współrzędnych oraz do prostej $3x + 4y = 12$.

5. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym dana jest odległość d środka podstawy od krawędzi bocznej oraz kąt 2α między sąsiednimi ścianami bocznymi. Obliczyć objętość ostrosłupa.

6. W trapezie równoramiennym o polu P dane są promień okręgu opisanego r oraz suma długości obu podstaw s. Obliczyć obwód tego trapezu. Podać warunki rozwiązalności zadania. Wykonać rysunek dla $P = 12$ cm^2, $r = 3$ cm i $s = 8$ cm.

7. Rozwiązać układ równań
$$\begin{cases} p\,x + y = 3p^2 - 3p - 2 \\ (p+2)x + p\,y = 4p \end{cases}$$
w zależności od parametru rzeczywistego p. Podać wszystkie rozwiązania (i odpowiadające im wartości parametru p), dla których **obie** niewiadome są liczbami całkowitymi o wartości bezwzględnej **mniejszej od** 3.

8. Odcinek $\overline{AB}$ o końcach $A(0,\frac{3}{2})$ i $B(1,y)$, $y \in [0,\frac{3}{2}]$, obraca się wokół osi Ox. Wyrazić pole powstałej powierzchni jako funkcję y i znaleźć najmniejszą wartość tego pola. Sporządzić rysunek.