

PRACA KONTROLNA nr 3 -POZIOM ROZSZERZONY

1. Sporządzić wykres funkcji $f(m) = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$, gdzie x_1, x_2 są pierwiastkami równania $x^2 - 2mx + m + 2 = 0$, a m jest parametrem rzeczywistym.
2. Ala ułożyła z czterech klocków liczbę 2009. Następnie spośród tych klocków losowała ze zwracaniem cztery razy po jednym klocku. Jakie jest prawdopodobieństwo, że z otrzymanych w ten sposób cyfr można byłoby utworzyć liczbę:
 - a) podzielną przez 3?
 - b) podzielną przez 4?
3. Rozważmy funkcje $f(x) = 4^{x+1} + 4^{2x+1} + 4^{3x+1} + \dots$ oraz $g(x) = 2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} + \dots$, gdzie prawe strony wzorów określających obie funkcje są sumami wyrazów nieskończonych ciągów geometrycznych. Wykazać, że funkcja $f(x)$ jest rosnąca. Znaleźć wszystkie liczby x , dla których $f(x) = g(x)$.
4. Rozwiązać nierówność
$$\frac{\operatorname{tg} x + \sin x}{3\operatorname{tg} x - 2\sin x} \geq \cos^2 \frac{x}{2}.$$
5. Okrąg styczny do ramion paraboli $y = x^2 - 2x$ jest styczny równocześnie do osi Ox . Znaleźć równania stycznych do okręgu w punktach jego styczności z parabolą.
6. Z odcinków o długościach równych czterem najmniejszym nieparzystym liczbom pierwszym zbudowano trapez, którego pole jest liczbą wymierną. Wyznaczyć tangens kąta między przekątnymi tego trapezu.