

PRACA KONTROLNA nr 3 -POZIOM ROZSZERZONY

1. Stosując zasadę indukcji matematycznej, udowodnić prawdziwość wzoru

$$\binom{3}{2} + \binom{5}{2} + \dots + \binom{2n+1}{2} = \frac{n(n+1)(4n+5)}{6} \quad \text{dla } n \geq 1.$$

2. Wojtuś wylosował jedną monetę ze skarbonki zawierającej 3 złotówki, 4 dwuzłotówki i 3 pięciozłotówki. Następnie, w zależności od wyniku pierwszego losowania, wylosował jeszcze trzy monety, gdy za pierwszym razem otrzymał złotówkę, dwie monety, gdy pierwsza była dwuzłotówką oraz jedną monetę, gdy w pierwszym losowaniu dostał pięciozłotówkę. Obliczyć prawdopodobieństwo, że, postępując w ten sposób, zgromadził łącznie co najmniej 8 złotych.
3. Jednym z wierzchołków kwadratu jest punkt $A(2, 2)$, a środkiem jednego z przeciwległych boków jest punkt $M(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. Wyznaczyć współrzędne pozostałych wierzchołków oraz równanie okręgu opisanego na tym kwadracie.
4. Rozwiązać nierówność

$$\frac{1}{\sqrt{3^{x+1}} - 2} \geq \frac{1}{4 - (\sqrt{3})^{x+2}}.$$

5. W ostrosłup prawidłowy trójkątny wpisano walec, którego podstawa leży na podstawie ostrosłupa. Średnica podstawy walca jest równa jego wysokości. Znaleźć tangens kąta nachylenia krawędzi bocznej ostrosłupa do podstawy, dla którego stosunek objętości walca do objętości ostrosłupa jest największy. Podać ten największy stosunek w procentach.
6. Długości boków trapezu opisanego na okręgu o promieniu R tworzą ciąg arytmetyczny, przy czym najkrótszy bok ma długość $\frac{3}{4}R$. Obliczyć długości obu podstaw trapezu oraz cosinus kąta pomiędzy przekątnymi. Sporządzić rysunek przyjmując $R = 2$ cm.