

LIGA MATEMATYCZNA
PAŹDZIERNIK 2011
SZKOŁA PONADGIMNAZJALNA

ZADANIE 1.

Znajdź wszystkie funkcje $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takie, że

$$xf(x) - f(1-x) = 2$$

dla każdej liczby rzeczywistej x .

ZADANIE 2.

W ostrokątnym trójkącie ABC poprowadzono wysokości AD i CE . Znajdź miarę kąta przy wierzchołku B , jeżeli wiadomo, że $|AC| = 2|DE|$.

ZADANIE 3.

Znajdź wszystkie liczby trzycyfrowe n takie, że

$$\frac{f(n)}{n} = 1,$$

gdzie $f(n)$ oznacza sumę cyfr liczby n , iloczynu jej cyfr oraz trzech iloczynów różnych par cyfr liczby n .

ZADANIE 4.

Dana jest liczba rzeczywista b , gdzie $b \notin \{-1, 0, 1\}$. Definiujemy liczby a_n w następujący sposób:

$$\begin{cases} a_1 = \frac{b-1}{b+1} \\ a_{n+1} = \frac{a_n-1}{a_n+1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Oblicz b wiedząc, że $a_{2011} = 2011$.

ZADANIE 5.

Oblicz

$$\frac{1}{2\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{100\sqrt{99} + 99\sqrt{100}}.$$