

**AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA**  
**im. Stanisława Staszica w Krakowie**  
**OLIMPIADA „O DIAMENTOWY INDEKS AGH” 2014/15**

**MATEMATYKA - ETAP III**

**ZADANIA PO 10 PUNKTÓW**

1. Znajdź wszystkie liczby naturalne mniejsze niż 7, przez które podzielna jest liczba

$$L = 3^{2016} + 4.$$

2. Rozwiąż równanie

$$2 \cos^3 x + 5 \sin^2 x - 11 \cos x - 9 = 0.$$

3. Oblicz pole równoległoboku zbudowanego na wektorach  $\vec{u} = [3, -4]$  i  $\vec{v} = [4, 4]$ .

4. Rozwiąż nierówność

$$25 \cdot 0,04^x - 0,2^{x^2-2} \leq 0.$$

**ZADANIA PO 20 PUNKTÓW**

5. Wartość funkcji  $g$  w punkcie  $m$  jest równa sumie pierwiastków równania

$$|mx^2 - 2x| = m,$$

przy czym każdy pierwiastek jest w tej sumie uwzględniany tylko raz niezależnie od jego krotności. Znajdź funkcję  $g : m \rightarrow g(m)$  i naszkicuj jej wykres.

6. Ze zbioru  $\{1, 2, \dots, n\}$  losujemy kolejno bez zwracania  $k$  liczb, otrzymując ciąg  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ . Wiedząc, że  $3 \leq k \leq n$ , oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń:

A -  $a_k$  jest największą liczbą wśród wylosowanych;

B -  $a_k$  jest podzielna przez 3;

C -  $a_1 + a_2 + \dots + a_k > \frac{1}{2}k(k+1)$ .

7. Wyznacz wysokość stożka o najmniejszej objętości opisanego na kuli o promieniu  $R = 2$  cm.