

**LIGA MATEMATYCZNA**  
**im. Zdzisława Matuskiego**  
**PAŹDZIERNIK 2013**  
**SZKOŁA PONADGIMNAZJALNA**

**ZADANIE 1.**

Wyznacz wszystkie funkcje  $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  spełniające warunek  $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = x$  dla każdej liczby rzeczywistej  $x$  różnej od zera.

**ZADANIE 2.**

Na okręgu dane są punkty w kolejności  $A, B, C, D$ . Niech  $M$  będzie środkiem łuku  $AB$ . Oznaczmy punkty przecięcia cięciw  $MC$  i  $MD$  z cięciwą  $AB$ , odpowiednio,  $E$  oraz  $K$ . Wykaż, że na czworokącie  $EKDC$  można opisać okrąg.

**ZADANIE 3.**

Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x^2 - (y - z)^2 = 1 \\ y^2 - (z - x)^2 = 4 \\ z^2 - (x - y)^2 = 9. \end{cases}$$

**ZADANIE 4.**

Uzasadnij, że liczba

$$3^1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{998} + 3^{999}$$

jest podzielna przez 13.

**ZADANIE 5.**

Niech  $a, b, c$  będą liczbami nieparzystymi. Wykaż, że nie istnieje liczba całkowita  $x$  spełniająca równość

$$ax^2 + bx + c = 0.$$