

PRACA KONTROLNA nr 7

kwiecień 2003r

1. Dwa punkty poruszają się ruchem jednostajnym po okręgu w tym samym kierunku, przy czym jeden z nich wyprzedza drugi co 44 sekund. Jeżeli zmienić kierunek ruchu jednego z tych punktów, to będą się one spotykać co 8 sekund. Obliczyć stosunek prędkości tych punktów.

2. Dla jakich wartości parametru p nierówność

$$\frac{2px^2 + 2px + 1}{x^2 + x + 2 - p^2} \geq 2$$

jest spełniona dla każdej liczby rzeczywistej x ?

3. W równoległoboku dane są kąt ostry α , dłuższa przekątna d oraz różnica boków r . Obliczyć pole równoległoboku.

4. Naczynie w kształcie półkuli o promieniu R ma trzy nóżki w kształcie kulek o promieniu r , $4r < R$, przymocowanych do naczynia w ten sposób, że ich środki tworzą trójkąt równoboczny, a naczynie postawione na płaskiej powierzchni dotyka ją w jednym punkcie. Obliczyć wzajemną odległość punktów przymocowania kulek. Wykonać odpowiednie rysunki.

5. Posługując się rachunkiem różniczkowym określić liczbę rozwiązań równania

$$2x^3 + 1 = 6|x| - 6x^2.$$

6. **Nie** stosując zasady indukcji matematycznej wykazać, że jeżeli $n \geq 2$ jest liczbą naturalną, to $\frac{n^n - 1}{n - 1}$ jest nieparzystą liczbą naturalną.

7. Rozwiązać równanie

$$\frac{8}{3} (\sin^2 x + \sin^4 x + \dots) = 4 - 2 \cos x + 3 \cos^2 x - \frac{9}{2} \cos^3 x + \dots$$

8. Rozważmy rodzinę prostych normalnych (tj. prostopadłych do stycznych w punktach styczności) do paraboli o równaniu $2y = x^2$. Znaleźć równanie krzywej utworzonej ze środków odcinków tych normalnych zawartych pomiędzy osią rzędną i wyznaczającymi je punktami paraboli. Sporządzić rysunek.