20. Model atomu wodoru według Bohra.

Wybór i opracowanie zadań – Jadwiga Mechlińska-Drewko.
Więcej zadań na ten temat znajdziesz w II części skryptu.

20.1.
Opierając się na teorii Bohra znaleźć:
a/ promień n-tej orbity elektronu w atomie wodoru,
b/ prędkość elektronu na tej orbicie,
c/ jego całkowitą energię na n-tej orbicie.

20.2.
Wyznaczyć długość fali promieniowania emitowanego przez atom wodoru przy przejściu elektronu z orbity n na orbitę k.

20.3.
Przejście elektronu z n-tej orbity na orbitę k=1 zachodzi z emisją fotonu o długości λ=1,026 10^{-7}m. Znaleźć promień n-tej orbity.

20.4.
Znaleźć dla dwóch pierwszych orbit atomu wodoru wartość siły przyciągania kulombowskiego między elektronem i jądrem oraz natężenie pola elektrycznego wytworzonego przez jądro w odległości równej promieniowi pierwszej i drugiej orbity.

20.5.
Ile razy zwiększy się promień orbity elektronu w atomie wodoru będącego w stanie podstawowym (n=1) przy wzbudzeniu go kwantem o energii E_v=12,09 eV ?

20.6.
W atomie wodoru elektron przeskakuje z drugiej orbity na pierwszą. Wyznaczyć zmianę wartości pędu elektronu oraz zmianę jego energii kinetycznej przy tym przeskoku.

20.7.
Seria linii wodorowych z zakresu światła widzialnego (tzw. seria Balmera) powstaje przy przejściu elektronu z wyższych orbit na drugą. Znaleźć granice serii Balmera.

20.8.
Wykazać, że częstotliwość fali świetlnej emitowanej przez atom wodoru przy przejściu elektronu z $n+1$ na n-tą orbitę dąży, przy dużych n, do częstotliwości obiegu elektronu na n-tej orbicie.

20.9.
Obliczyć minimalne liniowe rozmiary pozytonium oraz jego energię jonizacji. Pozytonium jest układem złożonym z pozytonu i elektronu krążących wokół wspólnego środka masy.

20.10.
Obliczyć wartość orbitalnego momentu magnetycznego elektronu w atomie wodoru w stanie podstawowym.

Rozwiązania:

20.1.R.
Korzystając z równań:

$$mV_n r_n = n\frac{h}{2\pi} \quad i \quad \frac{mV_n^2}{r_n} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r_n^2},$$

gdzie:
m- masa elektronu,
r_n- promień n-tej orbity,
V_n- prędkość elektronu na n-tej orbicie,
h- stała Plancka,
e- ładunek elektronu,
ε_0- przenikalność elektryczna próżni,

wyznaczamy:

$$r_n = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m e^2} n^2 \qquad i \qquad V_n = \frac{e^2}{2\varepsilon_0 h}\frac{1}{n}.$$

Całkowita energia elektronu jest sumą energii kinetycznej $E_{kn} = \frac{mV_n^2}{2}$

i energii potencjalnej oddziaływania elektronu z jądrem $E_{pn} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r_n}$ czyli

$$E_n = E_{kn} + E_{pn} = -\frac{me^4}{8\pi\varepsilon_0^2 h^2}\frac{1}{n^2} = -\frac{Rhc}{n^2}, \quad gdzie \quad R = \frac{me^4}{8\pi\varepsilon_0^2 h^3 c} = 1{,}09\cdot 10^7 m^{-1}.$$

R - stała Rydberga.

20.2.R.

$$h\upsilon = h\frac{c}{\lambda} = E_n - E_k = -\frac{Rhc}{n^2} + \frac{Rhc}{k^2}.$$

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(-\frac{1}{n^2} + \frac{1}{k^2}\right) = R\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right).$$

20.3.R.
Z poprzednich zadań mamy zależności:

$$(1) \quad \frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$(2) \quad r_n = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m e^2} n^2.$$

Po wstawieniu n^2 wyznaczonego z równania (1) do równania (2) mamy:

$$r_n = \frac{\varepsilon_0 h^2 \lambda R k^2}{\pi m e^2 (\lambda R - k^2)} = 4{,}75\cdot 10^{-10} m..$$

20.4.R.
Ponieważ

$$F_n = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r_n^2} \quad \text{oraz} \quad r_n = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m e^2}n^2 \quad \text{to} \quad F_n = \frac{\pi m^2 e^6}{4h^4\varepsilon_0^3}\frac{1}{n^4} \quad .$$

Natężenie pola elektrycznego $E = \frac{F}{q} = \frac{F}{|e|}$.

Wynik obliczeń:

$$F_1 = 8{,}22\cdot 10^{-8}\,N, \quad E_1 = 5{,}13\cdot 10^{11}\frac{V}{m} \quad oraz \quad F_2 = \frac{F_1}{2^4}, \quad E_2 = \frac{E_1}{2^4} \quad .$$

20.5.R.
W wodorze, przy przejściu elektronu z orbity *n*-tej na pierwszą orbitę następuje emisja kwantu o energii:

$$E_\upsilon = h\upsilon = E_n - E_1 = -\frac{Rhc}{n^2} + \frac{Rhc}{1^2}.$$

Znając wartość energii kwantu można wyznaczyć wartość n : $n = \sqrt{\frac{Rhc}{Rhc - E_\upsilon}} = 3$.

Elektron w procesie opisanym w zadaniu został wzbudzony na poziom trzeci.

Ponieważ : $r_n = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m e^2}n^2$ i $r_n = r_1 n^2$ to $\frac{r_n}{r_1} = n^2$ *i* $\frac{r_3}{r_1} = 3^2 = 9$.

20.6.R.

Z postulatu Bohra wynika: $2\pi m V_n r_n = nh$ *i* $p_n = \frac{nh}{2\pi r_n}$.

Ponieważ $r_n = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m e^2}n^2$ to $p_n = \frac{me^2}{2\varepsilon_0 h}\frac{1}{n}$ *oraz* $E_{kn} = \frac{p_n^2}{2m} = \frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2 n^2}$.

Z powyższych zależności wynika, że:

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \frac{me^2}{2\varepsilon_0 h}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{me^2}{4\varepsilon_0 h} \quad oraz \quad \Delta E = E_1 - E_2 = \frac{3me^4}{32\varepsilon_0^2 h^2}.$$

20.7.R.
Przy przejściu elektronu z n-tej orbity na *k*-tą następuje emisja światła o długości spełniającej równanie $\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right)$. Dla serii Balmera *k*=2.

Przy przejściu z *n*=3 na *k*=2 nastąpi emisja kwantu o najmniejszej energii (i największej długości fali) w serii Balmera. Jest to długofalowa granica serii przy czym:

$$\frac{1}{\lambda_{\max.}} = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) = \frac{5}{36}R \quad czyli \quad \lambda_{\max} = 660nm.$$

Krótkofalowa granica odpowiada przejściu z $n = \infty$ na *k*=2 i wynosi $\lambda_{\min.} = \frac{4}{R} = 367nm$.

20.8.R.

Ponieważ $r_n = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m e^2} n^2$ *i* $V_n = \frac{e^2}{2\varepsilon_0 h}\frac{1}{n}$ częstotliwość obiegu elektronu w atomie wodoru jest równa: $\upsilon_n = \frac{V_n}{2\pi r_n} = \frac{me^4}{4\varepsilon_0^2 h^3}\cdot\frac{1}{n^3}$ $R = \frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^3 c}$.

Przy przejściu elektronu z orbity *n+1* na orbitę *n* następuje emisja kwantu o energii:

$$E_\upsilon = h\upsilon = E_{n+1} - E_n = -\frac{Rhc}{(n+1)^2} + \frac{Rhc}{n^2} \quad czyli \quad \upsilon = Rc\left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right] = Rc\frac{n^2 + 2n + 1 - n^2}{(n+1)^2 n^2}$$

Dla n>>1 częstotliwość kwantu dąży do wartości $\upsilon_n = \frac{2Rc}{n^3}$ co jest równe częstotliwości obiegu elektronu.

20.9.R.

Pozyton jest cząstką o masie równej masie elektronu. Ładunek pozytonu jest równy co do wartości bezwzględnej ładunkowi elektronu i wynosi $1{,}6\cdot10^{-19}$C.
Uwzględniając ruch elektronu i pozytonu wokół wspólnego środka masy wprowadzamy masę zredukowaną μ układu elektron-pozyton:

$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_e} + \frac{1}{m_p}$ gdzie m_e i m_p odpowiednio masy elektronu i pozytonu.

Korzystając z układu równań:

$$2\pi\,\mu\,V_n r_n = n\,h$$

i

$$\frac{\mu V_n^2}{r_n} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n^2}\ ,$$

przyjmując, że $m_e = m_p = m$ wyznaczamy

$$r_n = \frac{2\varepsilon_0 h^2}{\pi m e^2} n^2 .$$

Minimalne rozmiary pozytonium określa promień pierwszej orbity: $r_1 = \frac{2\varepsilon_0 h^2}{\pi m e^2}$.

Energia wiązania pozytonium wynosi:

$$E_w = E_k + E_p = \frac{\mu V_n^2}{2} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n} = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_n} = -\frac{me^4}{16\varepsilon_0^2 h^2 n^2}$$

Energia jonizacji z poziomu pierwszego $E_j = \frac{me^4}{16\varepsilon_0^2 h^2} = 6{,}8eV$.

20.10.R.

Moment magnetyczny obwodu z prądem

$\mu = IS$

I natężenie prądu jaki daje ruch elektronu po orbicie kołowej,

S powierzchnia obejmowaną przez ten obwód z prądem.

$I = \frac{e}{T_n}$ $\quad T_n$ –okres obiegu elektronu na n-tej orbicie

$T_n = \frac{2\pi\ r_n}{V_n} \qquad S = \pi\ r_n^2$

$$\mu_n = \frac{eV_n}{2\pi\ r_n} \pi\ r_n^2$$

$$\mu_n = \frac{eV_n r_n}{2}$$

$$\mu_n = \frac{eh}{4\pi\ m} n = \mu_B n$$

μ_B=0,93 $\cdot 10^{-23}$J/T -magneton Bohra.