

Praca kontrolna nr 4

W celu przybliżenia słuchaczom, jakie wymagania były stawiane ich starszym kolegom przed ponad dwudziestu laty, niniejszy zestaw zadań jest powtórzeniem pracy kontrolnej ze stycznia 1979 r.

- 11.1.** Przez środek boku trójkąta równobocznego przeprowadzono prostą, tworzącą z tym bokiem kąt ostry α i dzielącą ten trójkąt na dwie figury, których stosunek pól jest równy $1 : 7$. Obliczyć miarę kąta α .
- 11.2.** W kulę o promieniu R wpisano graniastosłup trójkątny prawidłowy o krawędzi podstawy równej promieniowi kuli. Obliczyć wysokość tego graniastosłupa.
- 11.3.** Wyznaczyć wartości parametru a , dla których funkcja

$$f(x) = \frac{ax}{1+x^2}$$

osiąga maksimum równe 2.

- 11.4.** Rozwiązać nierówność

$$\cos^2 x + \cos^3 x + \dots + \cos^{n+1} x + \dots < 1 + \cos x \quad \text{dla } x \in [0, 2\pi].$$

- 11.5.** Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$ prawdziwa jest równość

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \binom{n+1}{2} + 2 \left[\binom{n}{2} + \binom{n-1}{2} + \dots + \binom{2}{2} \right].$$

- 11.6.** Wyznaczyć równanie linii będącej zbiorem środków wszystkich okręgów stycznych do prostej $y = 0$ i jednocześnie stycznych zewnętrznie do okręgu $(x+2)^2 + y^2 = 4$. Narysować tę linię.
- 11.7.** Wyznaczyć wartości parametru m , dla których równanie $9x^2 - 3x \log_3 m + 1 = 0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2 spełniające warunek $x_1^2 + x_2^2 = 1$.
- 11.8.** Rozwiązać nierówność

$$\frac{\sqrt{30+x-x^2}}{x} < \frac{\sqrt{10}}{5}.$$