

EGZAMIN WSTĘPNY Z MATEMATYKI

Egzamin składa się z 30 zadań. Zadania 1–10 oceniane będą w skali 0–2 punkty, zadania 11–30 w skali 0–4 punkty. Czas trwania egzaminu — 240 minut.

Powodzenia!

1. Syn jest o 30 lat młodszy od ojca. 5 lat temu ojciec był 7 razy starszy od syna. W którym roku urodził się syn?
2. Znaleźć pola kwadratów, których dwoma wierzchołkami są punkty $(-1, 1)$ i $(2, 1)$.
3. Podać przykład ciągu niemonotonicznego, którego granicą jest liczba 2.
4. Dla jakich parametrów a dziedziną funkcji $y = \sqrt{ax^2 + x + a}$ jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych?
5. Rozwiązać równanie $\log_2 x \cdot \log_x 4 = 2$.
6. Obliczyć sumę współczynników wielomianu $w(x) = (x^2 + 2x - 1)^{10} - 20x - 3$.
7. Obliczyć granicę $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! + n!}{(n+2)! - (n+1)!}$.
8. Napisać równanie prostej zawierającej tę cięciwę okręgu $x^2 - 4x + y^2 + 2y + 1 = 0$, którą punkt $A(1, -\frac{1}{2})$ dzieli na dwie równe części.
9. Obliczyć $f'(0)$, jeśli $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$.
10. Obliczyć $\sin \frac{13}{12}\pi$.
11. Rozwiązać układ równań $\begin{cases} y = |x| \\ |x+y| = 2 \end{cases}$. Podać ilustrację graficzną tego układu.
12. Znaleźć resztę z dzielenia wielomianu $x^{1997} - x^{1996} + 2$ przez $x^3 - x$.
13. Dla jakiego m równanie $|x^2 - 2| = \log_{\frac{1}{2}} m$ ma dokładnie 4 pierwiastki?
14. Rozwiązać równanie $|x - 3|^{x^2 - 4x + 3} = 1$.
15. Rozwiązać nierówność $x + 1 \leq \sqrt{3 + x}$.
16. Rozwiązać równanie $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \frac{1}{x}$.
17. Niech S_n oznacza sumę n początkowych wyrazów ciągu $a_n = \frac{2^n + 3^n}{6^n}$. Obliczyć $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.