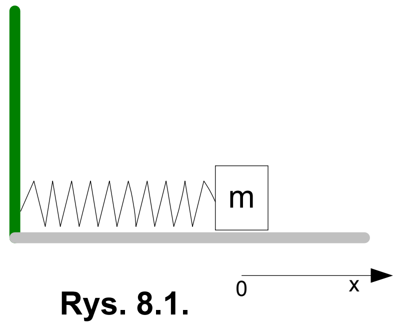
8.Dynamika ruchu drgającego i fale w ośrodkach sprężystych.

Wybór i opracowanie zadań 8.1. – 8.35. - Ryszard Twardowski
Wybór i opracowanie zadań 8.36.- 8.45 - Bogusław Kusz

8.1. W układzie przedstawionym na rysunku 8.1. masę $m = 0,01\ kg$ w chwili $t = 0$ s odchylono od położenia równowagi o $x_0 = 0,01\ m$ i nadano jej prędkość $v_0 = 0,4\ m/s$. Znaleźć zależność wychylenia, prędkości i przyspieszenia masy m od czasu. Ile wynosi okres drgań, amplituda i faza początkowa wychylenia masy m? Współczynnik sprężystości nieważkiej sprężyny $k = 10\ N/m$. Tarcie zaniedbać.



Rys. 8.1.

8.2. W stronę nieruchomej masy m przedstawionej na rysunku 8.1. porusza się z prędkością $-v$ ciało o masie m i zderza się z nią centralnie. Jak długo trwa ruch masy zamocowanej do nieważkiej sprężyny o współczynniku sprężystości k w przypadku, kiedy a) zderzenie mas jest sprężyste b) zderzenie mas jest niesprężyste, a masy trwale przylegają do siebie? Ile wynosi okres drgań w obu przypadkach? Tarcie zaniedbać.

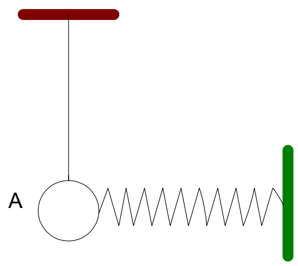
8.3. Cząstka wykonuje drgania harmoniczne. W odległościach x_1 i x_2 od położenia równowagi jej prędkości wynoszą v_1 i v_2. Znaleźć amplitudę i częstość drgań cząstki.

8.4.** Cząstka wykonuje drgania harmoniczne zgodnie z równaniem $x = A\sin(\omega_0 t)$. Obliczyć prawdopodobieństwo p znalezienia cząstki w przedziale od $A/2$ do A. Otrzymać zależność gęstości prawdopodobieństwa (dp/dx) od x.

8.5. W układzie przedstawionym na rys.8.1. masę m odciągnięto o Δx_k od położenia równowagi. Długość nieodkształconej sprężyny wynosi d. O ile przesunął się dowolny punkt sprężyny od położenia równowagi?

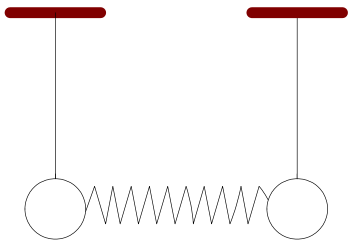
8.6.** W układzie przedstawionym na rysunku 8.1. sprężyna o masie M ma współczynnik sprężystości k. Masę m odciągnięto nieco od położenia równowagi i puszczono. Znaleźć okres drgań tego układu.

8.7*. Ile wynosi okres małych drgań kulki A w układzie złożonym z wahadła matematycznego i nieważkiej sprężyny (rys. 8.2.)? Osobno wahadło matematyczne ma okres małych drgań T_1, a kulka A podwieszona tylko do sprężyny ma okres drgań T_2.



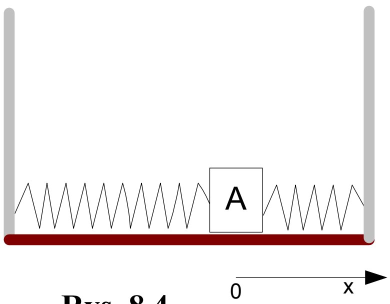
Rys. 8.2.

8.8. Dwa wahadła matematyczne o długości d i masie m każde połączono za pomocą słabej nieważkiej i nieodkształconej sprężyny o współczynniku sprężystości k (rys. 8.3.). Znaleźć okres małych drgań w przypadkach a) każde wahadło odchylono o kąt α_0 w prawo od położenia równowagi, b) pierwsze wahadło odchylono o kąt α_0 w prawo, drugie o kąt α_0 w lewo od położenia równowagi, c) odchylono tylko pierwsze wahadło o kąt α_0 w prawo od położenia równowagi. W przypadku c) oblicz odstęp czasu upływającego pomiędzy chwilami czasu, kiedy jedno wahadło przestaje drgać, a drugie wykazuje maksymalne drgania.



Rys. 8.3.

8.9. Nieważką sprężynę podzielono na dwie, tak, że stosunek ich długości wynosi $1: 2$. Następnie z tych sprężyn i ciała A zmontowano układ przedstawiony na rysunku 8.4. Obliczyć okres drgań ciała odchylonego od położenia równowagi w kierunku poziomym, jeśli wiadomo, że ciało A zamocowane do całej sprężyny wykonuje drgania o częstotliwości f. Założyć brak tarcia.



Rys. 8.4.

8.10*. Wyobraźmy sobie tunel wydrążony w Ziemi wzdłuż jej osi obrotu. W chwili $t = 0$ ciało A zaczyna spadać swobodnie z powierzchni Ziemi w głąb tunelu, a ciało B zaczyna spadać w głąb tunelu z odległości $r = R_Z/2$ od środka Ziemi. Obliczyć czas t, po którym ciała się spotkają i wskazać miejsce spotkania. Zaniedbać opór powietrza oraz założyć, że Ziemia jest jednorodną kulą o promieniu $R_Z = 6400\ km$.

8.11*. Jednorodny poziomy pręt wiszący na dwóch pionowych linach o długości b każda i uwiązanych do końców pręta, obrócono o mały kąt wokół nieruchomej pionowej osi przechodzącej przez jego środek. Obliczyć okres wahań pręta.

8.12. Wyprowadzić wzór na okres małych drgań wahadła fizycznego wychodząc a) z zasad dynamiki ruchu obrotowego, b) z zasady zachowania energii mechanicznej.

8.13. Na końcach cienkiego pręta o długości $b = 0,3\ m$ i masie $m = 0,4\ kg$ umocowano małe kule o masach $m_1 = 0,2\ kg$ i $m_2 = 0,3\ kg$. Pręt z kulami waha się wokół osi poziomej przechodzącej przez jego środek. Obliczyć okres małych wahań.

8.14*. Jednorodny pręt o długości b wykonuje małe wahania wokół poziomej osi przechodzącej przez pręt i prostopadłej do niego. Dla jakiej odległości między osią a środkiem pręta okres wahań będzie najkrótszy?

8.15*. Ciężarek zawieszony na nieważkiej sprężynie o długości $d = 10\ cm$ wykonuje drgania z dekrementem logarytmicznym $\Lambda = 2\pi$. Po skróceniu sprężyny dekrement logarytmiczny drgań wynosi $\Lambda_1 = \pi$. Obliczyć długość skróconej sprężyny.

8.16. W odstępie czasu Δt_1 energia drgań w ruchu harmonicznym słabo tłumionym zmalała *n-krotnie*. Ile razy zmaleje amplituda drgań w tym ruchu w odstępie czasu Δt_2?

8.17*. W pewnym ośrodku wahadło matematyczne drga z logarytmicznym dekrementem tłumienia $\Lambda_0 = 1,5$. Jaki będzie logarytmiczny dekrement tłumienia Λ, jeśli opór ośrodka wzrośnie $n = 2$ razy? Ile razy należy zwiększyć opór ośrodka, aby wahadło nie mogło drgać?

8.18. Znaleźć logarytmiczny dekrement tłumienia wahadła matematycznego o długości d, jeśli po czasie τ jego energia zmniejszyła się n razy.

8.19*. Małą kulkę wychylono z położenia równowagi na odległość $d = 2\ cm$ i puszczono swobodnie. Logarytmiczny dekrement tłumienia drgań kulki wynosił $\Lambda = 0,002$. Jaką drogę przebędzie kulka do chwili zatrzymania się?

8.20. W układzie pokazanym na rys. 8.1. masa m znajduje się w stanie równowagi. W chwili $t = 0$ do masy m przyłożono poziomą siłę $F = F_0 sin(\omega t)$. Znaleźć równanie opisujące wychylenie $x(t)$ masy m z położenia równowagi. Współczynnik sprężystości nieważkiej sprężyny wynosi k. Założyć brak tarcia.

8.21. Na podstawie wyrażenia na amplitudę wychylenia stacjonarnych drgań wymuszonych otrzymać wzór na częstość rezonansową.

8.22. Amplitudy wychylenia punktu wykonującego stacjonarne drgania wymuszone są sobie równe przy częstościach ω_1 i ω_2. Ile wynosi częstość rezonansowa?

8.23. Amplitudy prędkości punktu wykonującego stacjonarne drgania wymuszone są sobie równe przy częstościach ω_1 i ω_2. Ile wynosi częstość drgań własnych?

8.24.** Ciało o masie m wykonuje stacjonarne drgania pod wpływem siły $F = F_0 cos(\omega t)$ w ośrodku o współczynniku tłumienia β. Obliczyć średnią moc siły oporu ośrodka, częstość drgań własnych wynosi ω_0. Wykazać, że suma średniej mocy siły oporu ośrodka i średniej mocy siły F wynosi zero.

8.25*. Obliczyć średnią energię kinetyczną i średnią energię potencjalną siły sprężystości ciała o masie m wykonującego stacjonarne drgania wymuszone o równaniu $x = D cos(\omega t + \varphi)$. Częstość drgań własnych wynosi ω_0.

8.26. W pewnym ośrodku wzdłuż osi y przemieszcza się monochromatyczna harmoniczna fala płaska o długości λ. Znaleźć różnicę faz drgań cząstek ośrodka znajdujących się na równoległych płaszczyznach A i B odległych od siebie o Δy. Płaszczyzny te są prostopadłe do osi y.

8.27*. W jednorodnym ośrodku sprężystym o gęstości ρ_0 rozchodzi się fala płaska

$$s(x,t) = s_0 cos(\omega t - kx).$$

Sporządzić wykresy dla $t = \pi/\omega$

a) zależności $s(x)$, $(\partial s/\partial t)(x)$, $(\partial s/\partial x)(x)$,
b) zaznaczyć na wykresie dla $s = 0$ kierunki prędkości cząstek ośrodka dla fali podłużnej i poprzecznej,
c) zależności gęstości ośrodka $\rho(x)$ dla fali podłużnej.

8.28. Wykazać, że ogólne równanie fali płaskiej w postaci

$$s(\vec{r},t) = s_0 cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi)$$

spełnia równanie falowe.

8.29. W zamocowanej na końcach strunie o długości $b = 120\ cm$ wytworzono falę stojącą. W punktach odległych od siebie o $d_1 = 15\ cm$ i $d_2 = 5\ cm$ amplituda tej fali jest równa $A_1 = 3{,}5\ mm$. Znaleźć maksymalną amplitudę tej fali. Której harmonicznej odpowiada ta fala?

8.30. W ośrodku o gęstości ρ wytworzono mechaniczną podłużną falę stojącą. Wychylenie cząsteczek ośrodka opisane jest równaniem: $s = 2s_0 cos(kx)cos(\omega t)$. Obliczyć średnią gęstość energii kinetycznej i średnią gęstość energii potencjalnej ruchu falowego w węzłach i w strzałkach.

8.31.** W punktach Z_1 i Z_2 osi x, odległych o d od siebie, umieszczono źródła monochromatycznych płaskich fal harmonicznych o jednakowych kierunkach drgań i rozchodzących się zgodnie ze zwrotem osi x. Znaleźć średnią gęstość energii ruchu falowego w punkcie P na osi x. Założyć, że do punktu P dochodzą z obydwu źródeł fale o równaniach odpowiednio

$$s_1 = s_{01} cos(\omega_1 t - k_1 x + \varphi_1) \quad i \quad s_2 = s_{02} cos(\omega_2 t - k_2(x-d) + \varphi_2).$$

Zbadać przypadki a) fale są niespójne, b) fale są spójne. Ośrodek jest niedyspersyjny.

8.32. W trzech równoodległych punktach znajdujących się na jednej prostej dokonano pomiaru natężenia fali emitowanej przez to samo źródło punktowe. Gdzie znajduje się źródło fali, jeżeli natężenie fali w punktach skrajnych jest jednakowe, a w punkcie środkowym większe o $p = 10\%$? Odległość między punktem środkowym a punktami skrajnymi wynosi $a = 10\ m$. Przyjąć a) fale są kuliste, b) fale są koliste.

8.33. Punktowe źródło fal o mocy P znajduje się w środku walca o promieniu R i wysokości h. Przyjmując, że ścianki walca całkowicie tłumią fale, obliczyć średni strumień energii padający na boczną powierzchnię walca.

8.34. Dwa ciągi fal płaskich o długościach λ_1 i λ_2 przemieszczają się w tym samym kierunku w ośrodku dyspersyjnym o dyspersji d. Prędkość grupowa fali wypadkowej wynosi v_g. Znaleźć częstości tych fal.

8.35. W pewnym ośrodku dwie płaskie fale harmoniczne tworzą grupę opisaną równaniem:

$$s = 0{,}005 cos(20x - 6500t) cos(0{,}5x - 160t),$$

gdzie współczynniki liczbowe są wyrażone w układzie SI. Obliczyć stosunek prędkości fazowej do prędkości grupowej.

8.36. Zważyłem się na wadze sprężynowej („łazienkowej"). Podczas ważenia szalka wagi obniżyła się o *D*=1cm a waga wskazała *m*=100kg. Oblicz współczynnik sprężystości oraz energię potencjalną zgromadzoną w sprężynie.

8.37*. Podczas skoku z mostu o wysokości *H*=17m na gumie „bungee" skoczek o masie *m*=75kg osiągnął minimalną wysokość na poziomie *D*=2m nad wodą. Po ustaniu drgań o okresie T=2s skoczek swobodnie zwisał na wysokości *h*=6m. Zakładając, że tarcie występujące w układzie jest proporcjonalne do prędkości rozciągania gumy, oszacuj:
a/ energię potencjalną gumy w chwili gdy skoczek osiągnął poziom *D*,
b/ straty energii jakie nastąpiły do chwili gdy skoczek osiągnął poziom *D*,
c/ oszacuj wartość maksymalnego przyspieszenia działającego na skoczka,
d/ narysuj prawdopodobny wykres zmian położenia, prędkości i przyspieszenia skoczka w funkcji czasu.
Uwaga: długość liny wynosi *L*=10m, masę liny i opory powietrza zaniedbać, V(0)=0.

8.38. Na lince o długości *L* wisi tarcza o masie *m*. W tarczę trafia lecąca poziomo z prędkością V_0 kulka o masie *m*. Napisz równanie ruchu tarczy po zderzeniu: a/ z kulką gumową (zderzenie sprężyste), b/ z kulką plasteliny (zderzenie niesprężyste). Założenie: układ można opisać jak wahadło matematyczne a zderzenie kuli z tarczą jest zderzeniem centralnym.

8.39. Opisz ruch układu z zadania *38* wiedząc, że w układzie występuje tłumienie opisane logarytmicznym dekrementem tłumienia Λ.

8.40. Oszacować, dla jakich wartości logarytmicznego dekrementu tłumienia Λ można zastosować przybliżenie $\Lambda = \beta T \approx \beta T_0$ z błędem mniejszym niż 1%.

8.41. Płytka kwarcowa o częstotliwości drgań własnych f_0=10MHz została wzbudzona do drgań swobodnych tłumionych. Po jakim czasie energia zgromadzona w płytce zmaleje do połowy, jeśli logarytmiczny dekrement tłumienia Λ=0,001 ?

8.42. Szarpnięty przez rybę spławik (w kształcie patyka) wpadł w drgania tłumione. Po czasie $t_8=4T=4s$ (*T*-okres drgań) amplituda drgań zmalała 8 razy. Oblicz logarytmiczny dekrement tłumienia oraz częstotliwość drgań własnych spławika.

8.43. Jakie maksymalne wskazanie odczytamy z wagi sprężynowej (łazienkowej) jeśli skoczymy na jej szalkę z wysokości *h*=12cm ? Dane: *m*=100kg - masa ciała, *D*=1cm - obniżenie szalki przy statycznym obciążeniu. Masę szalki można zaniedbać.

8.44. Do jednego końca sprężyny o stałej $k=2/\sqrt{3}\ N/m$ dołączono małą kulkę o masie $m=0{,}01kg$. Trzymając sprężynę za jej drugi koniec wprawiono kulkę *m* w ruch po okręgu w płaszczyźnie poziomej z prędkością *V*=0,76m/s. Sprężyna wydłużyła się dwukrotnie. Oblicz promień toru kulki. Założenie: masa sprężyny jest do zaniedbania a jej oś porusza się pod stałym kątem do pionu.

8.45. Pewną falę opisano równaniem: $s(x,t) = 10^{-6}\sin(2040\pi\, t - 6\pi x)$. Co można wywnioskować z tego opisu? Uwaga: wielkości w równaniu podane są w układzie SI.

8.46. Opisz równaniem mechaniczną falę poprzeczną poruszającą się w kierunku ($-\infty$) osi y o amplitudzie A, długości fali λ i prędkości V.

8.47. Jakie fale stojące można wzbudzić w następujących układach:
a/ pręt metalowy o długości L zamocowany na jednym końcu,
b/ pręt metalowy o długości L zamocowany na obu końcach,
c/ pręt metalowy o długości L zamocowany w punkcie odległym o $0{,}25L$ od końca,
d/ w pustej szklance o wysokości H,
e/ w rurce plastikowej o długości L.

8.48. Wiszący most w Tacoma (US) zniszczył w 1940 roku wiatr o prędkości około 70km/h wiejący prostopadle do linii mostu. Wiatr spowodował powstanie drgań rezonansowych całego mostu o amplitudzie rzędu metrów. Naszkicuj prawdopodobny kształt mostu tuż przed całkowitym zniszczeniem.
Uwaga: przyjąć, że most wiszący to zamocowana na końcach, wisząca na linach jezdnia o długości około 2000m szerokości 20m i grubości 3m.

8.49. Prędkość fazowa fal powierzchniowych na wodzie silnie zależy od mechanizmu ich przemieszczania. Gdy decyduje o tym napięcie powierzchniowe (dla fal krótkich λ<2cm), ich prędkość wyraża się wzorem: $V_f = \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda}}$ gdzie σ jest napięciem powierzchniowym wody. Kiedy siła ciężkości jest główną przyczyną rozchodzenia się fal na wodzie ich prędkość można opisać wzorem: $V_f = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$ gdzie g- przyspieszenie ziemskie. Ile wynosi prędkość grupowa fal krótkich i długich w stosunku do ich prędkości fazowych ?

8.50. Grupa fal wywołana przez przepływającą motorówkę porusza się z prędkością 1m/s. Znaleźć średnią prędkość fazową i długość fal w tej grupie?

Rozwiązania

8.1.R. Równanie ruchu masy m ma postać:

$$(1) \qquad ma = F_s,$$

gdzie:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} \equiv \ddot{x}, \quad F_s = -kx.$$

Porządkując równanie (1) otrzymamy równanie ruchu harmonicznego prostego

$$(2) \qquad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}.$$

Szukamy nietrywialnego rozwiązania równania (2) w postaci $x = Ce^{rt}$ ($C \neq 0$). Obliczając drugą pochodną względem czasu z tak zapostulowanego rozwiązania i wstawiając do równania (2) otrzymamy:

$$Ce^{rt}(r^2 + \omega_0^2) = 0$$

skąd mamy równanie charakterystyczne

$$(3) \qquad r^2 + \omega_0^2 = 0.$$

Równanie (3) posiada dwa pierwiastki:

$$r_1 = i\omega_0 \qquad \text{oraz} \quad r_2 = -i\omega_0, \qquad \text{gdzie} \quad i = \sqrt{-1}.$$

Tak, więc równanie (2) ma dwa liniowo niezależne rozwiązania:

$$x_1 = C_1 e^{i\omega_0 t}, \quad x_2 = C_2 e^{-i\omega_0 t},$$

gdzie C_1 i C_2 są stałymi. Rozwiązanie ogólne równania (2) jest kombinacją liniową tych rozwiązań

$$(4) \qquad x = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t}$$

Równanie (4) zazwyczaj przedstawia się w postaci trygonometrycznej korzystając z wzorów Eulera

$$x = C_1[\cos(\omega_0 t) + i\sin(\omega_0 t)] + C_2[\cos(\omega_0 t) - i\sin(\omega_0 t)] = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t),$$
$$\text{gdzie: } A = C_1 + C_2, \quad B = i(C_1 - C_2).$$

Stałe A i B znajdujemy z warunków początkowych: $x(t=0) = x_0$, $v(t=0) = \dot{x}(t=0) = v_0$

$$x_0 = A\cos(\omega_0 0) + B\sin(\omega_0 0) = A$$

$$v_0 = -A\omega_0 \sin(\omega_0 0) + B\omega_0 \cos(\omega_0 0) = B\omega_0 \Rightarrow B = \frac{v_0}{\omega_0}.$$

Zależność wychylenia masy m od czasu przedstawia się, więc następująco:

$$(5) \qquad x = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t).$$

Równanie (5) można przedstawić w postaci np. kosinusowej

$$(6) \qquad x = D\cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad \text{gdzie} \quad D = (x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2})^{1/2},$$

$$\cos(\varphi_0) = \frac{x_0}{D}, \qquad \sin(\varphi_0) = -\frac{v_0}{\omega_0 D}, \qquad \text{lub} \qquad \mathrm{tg}(\varphi_0) = -\frac{v_0}{\omega_0 x_0},$$

co łatwo pokazać przez sprawdzenie.
Na podstawie równań (6) uzyskamy $D = 0{,}016$ m i $\varphi_0 = -0{,}902$ radianów. Okres drgań wynosi

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

i po wstawieniu danych liczbowych T = 0,2 s.
Na podstawie równań (6) otrzymamy zależność prędkości v i przyspieszenia a masy m od czasu

$$v = -D\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = D\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi/2),$$
$$a = -D\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = D\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi).$$

8.2.R.

a) Zderzenie sprężyste

W przypadku tego zderzenia ciało uderzające zatrzyma się, a ciało zamocowane do sprężyny zacznie ruch, w którym jego wychylenie można opisać równaniem (patrz zad.8.1.)

$$(1) \qquad x = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t), \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

W przyjętym na rysunku 8.1. układzie współrzędnych warunki początkowe tego ruch można zapisać $x_0 = 0$ i $v_0 = -v$. Wykorzystując równanie (1) i warunki początkowe otrzymujemy stałe A i B

$$0 = A\cos(\omega_0 0) + B\sin(\omega_0 0), \ \Rightarrow \qquad A = 0,$$

$$-v = -A\omega_0 \sin(\omega_0 0) + B\omega_0 \cos(\omega_0 0), \qquad \Rightarrow \qquad B = -\frac{v}{\omega_0},$$

czyli

$$x = -\frac{v}{\omega_0}\sin(\omega_0 t).$$

Ruch masy zamocowanej do sprężyny nie będzie ruchem okresowym i będzie trwał do chwili jej powrotu do położenia równowagi. Czas trwania tego ruchu t_1 można obliczyć z równania

$$\omega_0 t_1 = \pi \qquad \Rightarrow t_1 = \frac{\pi}{\omega_0} = \pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

W chwili t_1 masa zamocowana do sprężyny zatrzyma się przekazując swój pęd do drugiej masy, która zacznie oddalać się od niej z prędkością v.

b) Zderzenie niesprężyste

W tym przypadku masa uderzająca przylgnie do masy zamocowanej do sprężyny. Wspólną prędkość mas v_0 można obliczyć z zasady zachowania pędu. W przyjętym układzie współrzędnych

$$-mv = 2mv_0, \qquad \Rightarrow v_0 = -\frac{v}{2}.$$

Rozpocznie się ruch harmoniczny prosty z warunkami początkowymi $x_0 = 0$, $v_0 = -v/2$ i z częstością $\omega_0 = (k/2m)^{1/2}$. Ruch ten będzie trwał nieskończenie długo (zaniedbaliśmy tarcie), a jego okres wyraża się wzorem:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{k}}.$$

8.3.R.

$$A = \sqrt{\frac{v_1^2 x_2^2 - v_2^2 x_1^2}{v_1^2 - v_2^2}}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{v_1^2 - v_2^2}{x_2^2 - x_1^2}}.$$

8.4.R. W ciągu okresu drgań T cząstka przebywa w przedziale od –A do A. W przedziale od ½A do A cząstka przebywa w ciągu czasu $\Delta t = 2(t_A - t_{(1/2)A})$, gdzie $t_{(1/2)A}$ i t_A wyznaczymy z równania ruchu cząstki

$$\frac{1}{2}A = A\sin(\omega_0 t_{(1/2)A}), \qquad \Rightarrow t_{(1/2)A} = \frac{\arcsin(1/2)}{\omega_0},$$

$$A = A\sin(\omega_0 t_A), \qquad \Rightarrow t_A = \frac{\arcsin(1)}{\omega_0},$$

$$(1) \qquad \Delta t = \frac{2[\arcsin(1) - \arcsin(1/2)]}{\omega_0}.$$

Szukane prawdopodobieństwo p określić można z relacji

$$(2) \qquad p = \frac{\Delta t}{T} = \frac{\omega_0 \Delta t}{2\pi} = \frac{\arcsin(1) - \arcsin(1/2)}{\pi} = \frac{1}{3}.$$

Gęstość prawdopodobieństwa $\rho = dp/dx$ można obliczyć korzystając z równania (2)

$$\Delta p = \frac{\arcsin(\frac{x+\Delta x}{A}) - \arcsin(\frac{x}{A})}{\pi} = \frac{\Delta x}{\pi A}\frac{\arcsin(\frac{x+\Delta x}{A}) - \arcsin(\frac{x}{A})}{\frac{\Delta x}{A}}, \qquad \Rightarrow$$

$$(3) \qquad \frac{\Delta p}{\Delta x} = \frac{1}{\pi A}\frac{\arcsin(\frac{x+\Delta x}{A}) - \arcsin(\frac{x}{A})}{\frac{\Delta x}{A}},$$

przechodząc w równaniu (3) do granicy $\Delta x \to 0$ otrzymamy:

$$\rho(x) = \frac{dp}{dx} = \frac{1}{\pi\sqrt{A^2 - x^2}}.$$

Poleca się czytelnikowi naszkicować wykres tej funkcji.

8.5.R. Przyjmując początek osi x w punkcie zamocowania sprężyny do ściany otrzymamy

$$\Delta x = \Delta x_k \frac{x}{d}.$$

8.6*.R. Wskazówka. Każdy element dM sprężyny o długości d wykonuje ruch harmoniczny z częstością ω_0. Energię kinetyczną takiego fragmentu można zapisać

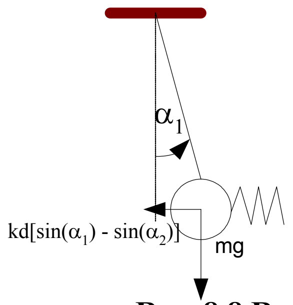
$$dE_k = \frac{1}{2}dMv^2, \qquad dM = \frac{M}{d}dx, \quad v = -(\Delta x_k \frac{x}{d})\omega_0 \sin(\omega_0 t) \qquad \text{(patrz zad.8.5.).}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m + M/3}{k}}.$$

8.7.R.

$$T = \frac{T_1 T_2}{\sqrt{T_1^2 + T_2^2}}.$$

8.8.R. Dla małych kątów suma momentów siły ciężkości i siły sprężystości względem osi obrotu dla lewego wahadła wynosi (patrz rys. 8.8.R.):



Rys. 8.8.R.

$$M_1 = -mgd\sin(\alpha_1) - k[d\sin(\alpha_1) - d\sin(\alpha_2)]d\cos(\alpha_1) \cong -mgd\alpha_1 - kd^2(\alpha_1 - \alpha_2).$$

Stąd równanie ruchu obrotowego tego wahadła ma postać

$$I\varepsilon_1 = M_1, \qquad \Rightarrow md^2\ddot{\alpha}_1 = -mgd\alpha_1 - kd^2(\alpha_1 - \alpha_2) \qquad \Rightarrow \ddot{\alpha}_1 + \frac{g}{d}\alpha_1 + \frac{k}{m}(\alpha_1 - \alpha_2) = 0.$$

Podobnie otrzymamy dla drugiego wahadła i będziemy mieli układ równań

$$(1) \qquad \ddot{\alpha}_1 + \frac{g}{d}\alpha_1 + \frac{k}{m}(\alpha_1 - \alpha_2) = 0,$$

$$(2) \qquad \ddot{\alpha}_2 + \frac{g}{d}\alpha_2 + \frac{k}{m}(\alpha_2 - \alpha_1) = 0.$$

Oznaczając $\alpha_1 + \alpha_2 = \beta$ i $\alpha_1 - \alpha_2 = \gamma$ oraz dodając lub odejmując stronami równania (1) i (2) dostaniemy

$$(3) \qquad \ddot{\beta} + \omega_m^2\beta = 0, \quad \omega_m^2 = \frac{g}{d},$$

$$(4) \qquad \ddot{\gamma} + \omega_s^2\gamma = 0, \quad \omega_s^2 = \frac{g}{d} + \frac{2k}{m}.$$

Widzimy więc, że β i γ spełniają równanie ruchu harmonicznego prostego. Ogólne rozwiązania dla β i γ można przedstawić w postaci trygonometrycznej (patrz zad.8.1.)

$$(5) \qquad \alpha_1 + \alpha_2 = A\cos(\omega_m t) + B\sin(\omega_m t),$$

$$(6) \qquad \alpha_1 - \alpha_2 = C\cos(\omega_s t) + D\sin(\omega_s t).$$

Założenia zadania sugerują następujące warunki początkowe: $\alpha_1(t = 0) = \alpha_{10}$, $\alpha_2(t = 0) = \alpha_{20}$, $\dot{\alpha}_1(t = 0) = 0$ i $\dot{\alpha}_2(t = 0) = 0$. Z równań (5), (6) i warunków początkowych mamy

$$(7) \qquad \alpha_1 + \alpha_2 = (\alpha_{10} + \alpha_{20})\cos(\omega_m t),$$

$$(8) \qquad \alpha_1 - \alpha_2 = (\alpha_{10} - \alpha_{20})\cos(\omega_s t).$$

Układ równań (7) i (8) pozwala obliczyć α_1 i α_2

$$(9) \qquad \alpha_1 = \frac{\alpha_{10} + \alpha_{20}}{2}\cos(\omega_m t) + \frac{\alpha_{10} - \alpha_{20}}{2}\cos(\omega_s t),$$

$$(10) \qquad \alpha_2 = \frac{\alpha_{10} + \alpha_{20}}{2}\cos(\omega_m t) - \frac{\alpha_{10} - \alpha_{20}}{2}\cos(\omega_s t).$$

Możemy przedyskutować teraz poszczególne przypadki.

a) Tu $\alpha_{10} = \alpha_0$ i $\alpha_{20} = \alpha_0$, więc z (9) i (10) mamy

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_0 \cos(\omega_m t).$$

Sprężyna nie wpływa na ruch wahadeł matematycznych.

b) Tu $\alpha_{10} = \alpha_0$ i $\alpha_{20} = -\alpha_0$, więc z (9) i (10) mamy

$$\alpha_1 = \alpha_0 \cos(\omega_s t),$$
$$\alpha_2 = -\alpha_0 \cos(\omega_s t).$$

Sprężyna jest odkształcona, więc wpływa na ruch wahadeł, które drgają w przeciwfazie z częstością

$$\omega_s = \sqrt{\frac{g}{d} + \frac{2k}{m}},$$

jednak wpływ ten jest niewielki, ponieważ sprężyna jest słaba i częstość drgań wahadeł jest bliska ω_m.

c) $\alpha_{10} = \alpha_0$ i $\alpha_{20} = 0$, więc z (9) i (10) otrzymamy

$$(11) \qquad \alpha_1 = \frac{\alpha_0}{2}\cos(\omega_m t) + \frac{\alpha_0}{2}\cos(\omega_s t),$$

$$(12) \qquad \alpha_2 = \frac{\alpha_0}{2}\cos(\omega_m t) - \frac{\alpha_0}{2}\cos(\omega_s t).$$

Mamy tu do czynienia ze zjawiskiem dudnień, gdyż częstości ω_m i ω_s niewiele się różnią od siebie (sprężyna jest słaba), aby to uwidocznić wygodnie jest przedstawić równania (11) i (12) w postaci

$$(13) \qquad \alpha_1 = \alpha_0 \cos(\frac{\omega_s - \omega_m}{2} t) \cos(\frac{\omega_s + \omega_m}{2} t),$$

$$(14) \qquad \alpha_2 = \alpha_0 \sin(\frac{\omega_s - \omega_m}{2} t) \sin(\frac{\omega_s + \omega_m}{2} t).$$

Częstość ω_s (równanie(4)) można przedstawić w formie

$$\omega_s = \sqrt{\frac{g}{d} + \frac{2k}{m}} = \omega_m \sqrt{1 + \frac{2k}{m\omega_m^2}} \cong \omega_m + \frac{k}{m\omega_m},$$

ponieważ $\frac{2k}{m\omega_m^2}$ << 1 (sprężyna jest słaba), wtedy równania (13) i (14) przyjmą postać

$$\alpha_1 \cong \alpha_0 \cos(\frac{k}{2m\omega_m} t) \cos(\omega_m t) = A_1(t) \cos(\omega_m t), \qquad A_1(t) = \alpha_0 \cos(\frac{k}{2m\omega_m} t),$$
$$\alpha_2 \cong \alpha_0 \sin(\frac{k}{2m\omega_m} t) \sin(\omega_m t) = A_2(t) \sin(\omega_m t), \qquad A_2(t) = \alpha_0 \sin(\frac{k}{2m\omega_m} t).$$

Moduły $A_1(t)$ i $A_2(t)$ są wolno zmiennymi w czasie amplitudami kątowymi odchyleń wahadeł od położenia równowagi. Okres dudnień T_d określimy z równania

$$\frac{k}{2m\omega_m}(t + T_d) - \frac{k}{2m\omega_m} t = \pi, \qquad \Rightarrow T_d = \frac{2\pi m\omega_m}{k} = \frac{2\pi m}{k}\sqrt{\frac{g}{d}},$$

gdyż okres funkcji |cos(x)| wynosi π. Odstęp czasu T_{12} pomiędzy maksymalnymi drganiami poszczególnych wahadeł wynosi

$$T_{12} = \frac{T_d}{2} = \frac{\pi m}{k}\sqrt{\frac{g}{d}}.$$

8.9.R.

$$T = \frac{\sqrt{2}}{3f}.$$

8.10.R. Wskazówka: udowodnić, że ruch każdego z ciał jest ruchem harmonicznym. Otrzymać można wtedy odpowiedź:

$$t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{R_Z}{g}} \cong 21 \text{ minut},$$

a miejscem spotkania jest środek Ziemi.

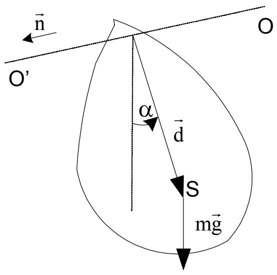
8.11.R.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{b}{3g}}.$$

8.12.R.

a) Równanie opisujące ruch obrotowy wahadła względem poziomej osi obrotu OO' (patrz rys.8.12.R.) ma postać:

$$(1) \qquad I\vec{\varepsilon} = \vec{M},$$



Rys. 8.12.R.

gdzie: I – moment bezwładności bryły względem osi OO', $\vec{\varepsilon}$ - wektor przyspieszenia kątowego, $\vec{M}$ - wektor momentu siły ciężkości względem osi OO'. Rozpisując

$$\vec{M} = \vec{d} \times m\vec{g} = -mgd\sin(\alpha)\vec{n}, \;\; \vec{\varepsilon} = \ddot{\alpha}\,\vec{n}, \qquad |\vec{n}| = 1,$$

gdzie d jest odległością środka masy od osi obrotu. Na podstawie równania (1) mamy

$$I\,\ddot{\alpha}\,\vec{n} = -mgd\sin(\alpha)\vec{n}.$$

Porządkując to równanie i stosując przybliżenie $\sin(\alpha) \cong \alpha$ dostaniemy

$$(2) \qquad \ddot{\alpha} + \frac{mgd}{I}\alpha = 0.$$

Równanie (2) jest równaniem ruchu harmonicznego prostego o kołowej częstości drgań

$$(3) \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{I}} \quad \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}.$$

b) Z zasady zachowania energii mechanicznej mamy

$$\frac{1}{2}I\omega^2 + mgd[1 - \cos(\alpha)] = \text{const.}.$$

Różniczkując powyższe równanie względem czasu i porządkując otrzymamy równanie (2) i (3).

8.13.R.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{b}{6g}\frac{m + 3m_1 + 3m_2}{m_2 - m_1}} \cong 1{,}9\text{s}, \qquad \text{(patrz zad.8.12.).}$$

8.14.R. Wskazówka: wykorzystując wzór na okres drgań wahadła fizycznego i twierdzenie Steinera otrzymuje się $d = b/(2\sqrt{3})$.

8.15.R. Dekrement logarytmiczny drgań wyraża się wzorem

$$(1) \qquad \Lambda = \beta T_t = \frac{2\pi\beta}{\omega_t} = \frac{2\pi\beta}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{2\pi\frac{\beta}{\omega_0}}{\sqrt{1 - (\frac{\beta}{\omega_0})^2}},$$

gdzie: β - współczynnik tłumienia, T_t – okres drgań tłumionych, ω_t – częstość drgań tłumionych, ω_0 - częstość drgań własnych. Kiedy sprężyna zostanie skrócona do długości x to jej częstość drgań własnych zmieni się, ponieważ zmieni się jej współczynnik sprężystości do wielkości $k_1 = kd/x$, gdzie k jest współczynnikiem sprężystości całej sprężyny, a d długością całej sprężyny. Wobec tego zmieni się częstość drgań własnych ω_1

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m}} = \sqrt{\frac{kd}{mx}} = \omega_0\sqrt{\frac{d}{x}}.$$

Dekrement logarytmiczny drgań skróconej sprężyny Λ_1 można wyrazić wtedy wzorem

$$(2) \qquad \Lambda_1 = \frac{2\pi\frac{\beta}{\omega_1}}{\sqrt{1 - (\frac{\beta}{\omega_1})^2}} = \frac{2\pi\frac{\beta}{\omega_0}\sqrt{\frac{x}{d}}}{\sqrt{1 - (\frac{\beta}{\omega_0})^2\frac{x}{d}}}.$$

Dalej dzieląc stronami równania (1) i (2) oraz obliczając β/ω_0 z równania (1) otrzymamy

$$x = d\frac{\Lambda_1^2}{\Lambda^2}\frac{4\pi^2 + \Lambda^2}{4\pi^2 + \Lambda_1^2} = 4\text{cm}.$$

8.16.R. W odstępie czasu Δt_2 amplituda drgań zmalała $n^{\Delta t_2/2\Delta t_1}$ razy.

8.17.R. Dekrement logarytmiczny drgań Λ_0 można wyrazić wzorem

$$(1)\qquad \Lambda_0 = \frac{2\pi\frac{\beta}{\omega_0}}{\sqrt{1-(\frac{\beta}{\omega_0})^2}},$$

(patrz zad.8.15.). Kiedy opór ośrodka wzrośnie n razy to współczynnik tłumienia też wzrośnie n razy. Szukany dekrement można wobec tego zapisać

$$(2)\qquad \Lambda = \frac{2\pi n\frac{\beta}{\omega_0}}{\sqrt{1-(\frac{\beta}{\omega_0})^2 n^2}} = n\Lambda_0\sqrt{\frac{1-(\frac{\beta}{\omega_0})^2}{1-(\frac{\beta}{\omega_0})^2 n^2}}.$$

Z równania (1) znajdujemy β/ω_0

$$(3)\qquad \frac{\beta}{\omega_0} = \frac{\Lambda_0}{\sqrt{4\pi^2+\Lambda_0^2}}$$

i podstawiając do równania (2) otrzymamy

$$\Lambda = \frac{2\pi n\Lambda_0}{\sqrt{4\pi^2-\Lambda_0^2(n^2-1)}} = 3{,}3.$$

Oscylacje tłumione zachodzą przy spełnionym warunku $\beta < \omega_0$. Jeśli opór ośrodka wzrośnie m razy, tak, aby był spełniony warunek $m\beta \geq \omega_0$ to wahadło nie będzie mogło drgać. Na podstawie równania (3) otrzymamy

$$m \geq \frac{\omega_0}{\beta} = \frac{\sqrt{4\pi^2+\Lambda_0^2}}{\Lambda_0} = 4{,}3.$$

8.18.R. Logarytmiczny dekrement tłumienia wahadła wynosi

$$\Lambda = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{4g\tau^2}{d\ln^2 n}-1}}.$$

8.19.R. Wskazówka. Oblicz drogę kulki s jako granicę sumy wartości bezwzględnych ekstremalnych wychyleń kulki z położenia równowagi.

$$s = d\frac{1+e^{-\Lambda/2}}{1-e^{-\Lambda/2}} \cong \frac{4d}{\Lambda} = 40\,\text{m}.$$

8.20.R. Równanie dynamiki dla masy m ma postać

$$m\ddot{x} = -kx + F_0 \sin(\omega t).$$

Po uporządkowaniu otrzymamy

$$(1) \qquad \ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\sin(\omega t), \qquad\qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m}.$$

Rozwiązania ogólnego równania (1) szukamy w postaci sumy rozwiązania ogólnego równania jednorodnego $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ i odgadniętego rozwiązania szczególnego równania (1). Rozwiązanie szczególne x_s postulujemy w formie

$$(2) \qquad x_s = A_s \cos(\omega t) + B_s \sin(\omega t),$$

a rozwiązanie ogólne równania jednorodnego (patrz zad.8.1.)

$$(3) \qquad x_1 = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t).$$

Stałe A_s i B_s znajdziemy kładąc równanie (2) do równania (1) i grupując razem wyrazy z sinusem i cosinusem. Otrzymamy:

$$(4) \qquad A_s(\omega_0^2 - \omega^2)\cos(\omega t) + [B_s(\omega_0^2 - \omega^2) - \frac{F_0}{m}]\sin(\omega t) = 0,$$

$$\Rightarrow \qquad A_s = 0 \qquad\qquad \text{i} \qquad B_s = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)},$$

ponieważ równanie (4) powinno być spełnione w dowolnej chwili czasu t. Rozwiązanie ogólne przedstawia się więc następująco:

$$(5) \qquad x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\sin(\omega t).$$

Stałe A i B znajdujemy z warunków początkowych $x(t = 0) = 0$ i $v(t = 0) = 0$. Korzystając dwukrotnie z równania (5) otrzymamy

$$A = 0 \qquad\qquad \text{i} \qquad B = -\frac{F_0\omega}{m\omega_0(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

Ostatecznie równanie opisujące wychylenie masy m z położenia równowagi ma postać

$$x(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}[\sin(\omega t) - \frac{\omega}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)].$$

Zaleca się czytelnikowi przeprowadzenie dyskusji powyższego wyrażenia.

8.21.R. Korzystamy z wzoru na amplitudę wychylenia D drgań wymuszonych o częstości ω

$$(1)\qquad D(\omega)=\frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}},$$

gdzie: F_0 – amplituda siły wymuszającej, m – masa ciała, ω_0 – częstość drgań własnych i β - współczynnik tłumienia. Należy znaleźć maksimum tej wielkości. W tym celu znajdziemy minimum funkcji pomocniczej g(ω)

$$g(\omega)=(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2.$$

Obliczamy pochodną

$$\frac{dg(\omega)}{d\omega}=-4\omega(\omega_0^2-\omega^2+2\beta^2)$$

i po przyrównaniu jej do zera sprawdzamy, że dla

$$\omega\equiv\omega_r=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}$$

amplituda D ma maksimum rezonansowe (pod warunkiem $\beta<\omega_0/\sqrt{2}$).

8.22.R.

$$\omega_r=\sqrt{\frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{2}}.$$

8.23.R. Biorąc pod uwagę równanie na wychylenie np. w postaci

$$x=D(\omega)\cos(\omega t+\varphi),\qquad\Rightarrow\qquad v\equiv\dot{x}=-D(\omega)\omega\sin(\omega t+\varphi),$$

mamy amplitudę prędkości C(ω)

$$C(\omega)=D(\omega)\omega=\frac{F_0\omega}{m\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}.$$

Z treści zadania wynika, że $C(\omega_1)=C(\omega_2)$, skąd

$$\frac{F_0\omega_1}{m\sqrt{(\omega_0^2-\omega_1^2)^2+4\beta^2\omega_1^2}}=\frac{F_0\omega_2}{m\sqrt{(\omega_0^2-\omega_2^2)^2+4\beta^2\omega_2^2}}$$

i po kilku przekształceniach otrzymamy $\omega_0=\sqrt{\omega_1\omega_2}$.

8.24.R. Odpowiedź częściowa: średnia moc siły oporu ośrodka wynosi

$$\overline{P}_{F_t} = -\frac{F_0^2 \beta \omega^2}{m[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2]}.$$

8.25.R. Ponieważ

$$E_p = \frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2 \qquad \Rightarrow \qquad \overline{E}_p = \frac{1}{2} m\omega_0^2 \frac{1}{T} \int_t^{t+T} x^2 dt,$$

a

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} x^2 dt = \frac{D^2}{T} \int_t^{t+T} \cos^2(\omega t + \varphi) dt = \frac{D^2}{2},$$

to

$$\overline{E}_p = \frac{1}{4} m\omega_0^2 D^2.$$

Podobnie

$$E_k = \frac{1}{2} mv^2 \quad \Rightarrow \quad \overline{E}_k = \frac{1}{2} m \frac{1}{T} \int_t^{t+T} v^2 dt, \text{ gdzie } v = -D\omega \sin(\omega t + \varphi).$$

Ostatecznie otrzymamy

$$\overline{E}_k = \frac{1}{4} m\omega^2 D^2.$$

8.26.R. Załóżmy, że źródło fali znajduje się w początku układu współrzędnych. Równanie fali opisujące wychylenie s_A cząstek na płaszczyźnie A znajdującej się w odległości y od źródła ma wtedy postać:

$$(1) \qquad s_A = s_0 \cos(\omega t - ky + \varphi) = s_0 \cos(\Phi_A),$$

a wychylenie s_B cząstek na płaszczyźnie B

$$(2) \qquad s_B = s_0 \cos[\omega t - k(y + \Delta y) + \varphi] = s_0 \cos(\Phi_B),$$

gdzie: s_0 – amplituda fali, ω - częstość fali, k – wartość wektora falowego. Szukana różnica faz $\Delta\Phi = \Phi_B - \Phi_A$ wynosi:

$$\Delta\Phi = -k\Delta y = -\frac{2\pi}{\lambda} \Delta y,$$

co oznacza, że drgania cząstek w płaszczyźnie B są opóźnione w fazie względem drgań cząstek w płaszczyźnie A o $2\pi\Delta y/\lambda$ radianów.

8.27.R. Odpowiedź częściowa. Gęstość ośrodka można obliczyć z definicji

$$\rho(x,t) = \frac{\Delta m}{A[x + \Delta x + s(x+\Delta x, t) - x - s(x,t)]} \cong \frac{\Delta m}{A\Delta x(1 + \frac{\partial s}{\partial x})} \cong \rho_0[1 - s_0 k \sin(\omega t - kx)],$$

gdzie skorzystano z szeregu Taylora i założono małe odkształcenie ośrodka.

8.28.R. Wskazówka: Przedstawić wektory $\vec{k}$ i $\vec{r}$ w formie

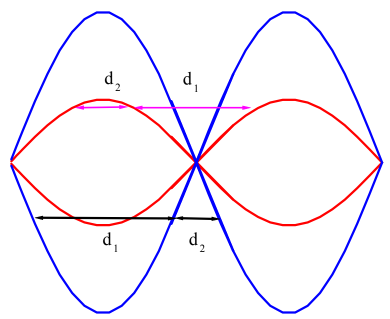
$$\vec{k} = k_x\vec{e}_x + k_y\vec{e}_y + k_z\vec{e}_z \qquad \text{i} \qquad \vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z.$$

8.29.R. Na strunie musi znajdować się całkowita liczba połówek długości fali (struna zamocowana na końcach). Z treści zadania i z rysunku **8.29.R.** wynika, że $d_1 + d_2 = \lambda/2$, skąd $\lambda = 2(d_1 + d_2)$. Maksymalną amplitudę A_0 obliczymy z wyrażenia

$$A_1 = A_{01}|\sin(kx_1)| \quad \Rightarrow \quad A_{01} = \frac{A_1}{\left|\sin(\frac{2\pi}{2(d_1+d_2)}\frac{d_1}{2})\right|} = 3{,}8\text{mm}$$

lub

$$A_1 = A_{02}|\sin(kx_2)| \quad \Rightarrow \quad A_{02} = \frac{A_1}{\left|\sin(\frac{2\pi}{2(d_1+d_2)}\frac{d_2}{2})\right|} = 9{,}1\text{mm},$$



Rys.8.29.R.

ponieważ $x_1 = d_1/2$, a $x_2 = d_2/2$. Fala stojąca odpowiada n-tej harmonicznej, gdzie $n = b/(\lambda/2) = b/(d_1 + d_2) = 6$.

8.30.R. Średnią energię kinetyczną policzymy korzystając z wzoru

$$\bar{\varepsilon}_k \equiv \frac{1}{T}\int_t^{t+T}\varepsilon_k dt = \frac{1}{T}\int_t^{t+T}[\frac{1}{2}\rho(\frac{\partial s}{\partial t})^2]dt = 2\rho s_0^2\omega^2\cos^2(kx)\frac{1}{T}\int_t^{t+T}\sin^2(\omega t)dt = \rho s_0^2\omega^2\cos^2(kx).$$

Analogicznie policzymy średnią energię potencjalną

$$\overline{\varepsilon}_p \equiv \frac{1}{T}\int_t^{t+T}\varepsilon_p dt = \frac{1}{T}\int_t^{t+T}[\frac{1}{2}\rho\frac{\omega^2}{k^2}(\frac{\partial s}{\partial x})^2]dt = \rho s_0^2\omega^2\sin^2(kx).$$

Węzły: w węzłach kx = (2m + 1)π/2, gdzie m jest liczbą całkowitą, więc

$$\overline{\varepsilon}_k = 0 \quad \text{i} \qquad \overline{\varepsilon}_p = \rho s_0^2\omega^2.$$

Strzałki: w strzałkach kx = mπ, więc

$$\overline{\varepsilon}_p = 0 \quad \text{i} \qquad \overline{\varepsilon}_k = \rho s_0^2\omega^2.$$

8.31.R. Załóżmy, że źródło Z_1 jest umieszczone w początku układu współrzędnych, a punkt P w odległości x od początku osi x. Fale docierające do punktu P mają wtedy postać:

$$(1) \qquad s_1 = s_{01}\cos(\omega_1 t - k_1 x + \varphi_1) = s_{01}\cos(\Phi_1),$$

$$(2) \qquad s_2 = s_{02}\cos(\omega_2 t - k_2(x-d) + \varphi_2) = s_{02}\cos(\Phi_2).$$

Fala wypadkowa $s = s_1 + s_2$. Gęstość energii całkowitej można znaleźć z wyrażenia

$$(3) \qquad \varepsilon = \frac{1}{2}\rho[(\frac{\partial(s_1+s_2)}{\partial t})^2 + v_f^2(\frac{\partial(s_1+s_2)}{\partial x})^2] = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \rho\frac{\partial(s_1)}{\partial t}\frac{\partial(s_2)}{\partial t} + \rho v_f^2\frac{\partial(s_1)}{\partial x}\frac{\partial(s_2)}{\partial x},$$

gdzie

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2}\rho[(\frac{\partial s_1}{\partial t})^2 + v_f^2(\frac{\partial s_1}{\partial x})^2] \quad \text{i} \qquad \varepsilon_2 = \frac{1}{2}\rho[(\frac{\partial s_2}{\partial t})^2 + v_f^2(\frac{\partial s_2}{\partial x})^2]$$

Po obliczeniu pochodnych cząstkowych w równaniu (3) otrzymamy

$$(4) \qquad \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 2\rho s_{01}s_{02}\omega_1\omega_2\sin(\Phi_1)\sin(\Phi_2).$$

Wyrażenie (4) przekształcimy do dogodniejszej postaci

$$(5) \qquad \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \rho s_{01}s_{02}\omega_1\omega_2[\cos(\Phi_1 - \Phi_2) - \cos(\Phi_1 + \Phi_2)],$$

$$(6) \qquad \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 2\sqrt{\overline{\varepsilon}_1\overline{\varepsilon}_2}[\cos(\Phi_1 - \Phi_2) - \cos(\Phi_1 + \Phi_2)],$$

$$\text{gdzie} \quad \overline{\varepsilon}_1 = \frac{1}{2}\rho s_{01}^2\omega_1^2 \qquad \text{i} \qquad \overline{\varepsilon}_2 = \frac{1}{2}\rho s_{02}^2\omega_2^2$$

Z równania (6) obliczamy średnią gęstość energii

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2 + 2\sqrt{\bar{\varepsilon}_1\bar{\varepsilon}_2}\left[\frac{1}{T_1}\int_t^{t+T_1}\cos(\Phi_1 - \Phi_2)dt - \frac{1}{T_2}\int_t^{t+T_2}\cos(\Phi_1 + \Phi_2)dt\right],$$

$$(7) \qquad \bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2 + 2\sqrt{\bar{\varepsilon}_1\bar{\varepsilon}_2}\,\frac{1}{T_1}\int_t^{t+T_1}\cos(\Phi_1 - \Phi_2)dt,$$

ponieważ całka z sumą faz daje wartość zero. Trzeci wyraz po prawej stronie równania (7) nazywa się wyrazem interferencyjnym.

a) Fale są niespójne. W tym przypadku całka w równaniu (7) jest równa zeru i otrzymujemy wynik mówiący o prostym sumowaniu się średnich gęstości energii

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2.$$

b) Fale są spójne. Różnica faz w równaniu (7) nie zależy od czasu ($\omega_1 = \omega_2$ i różnica faz początkowych φ_1 - φ_2 nie zależy od czasu). Otrzymamy wynik ($k_1 = k_2 = k$)

$$(8) \qquad \bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2 + 2\sqrt{\bar{\varepsilon}_1\bar{\varepsilon}_2}\cos(kd + \varphi_2 - \varphi_1].$$

W tym przypadku, jak widać, zachodzi zjawisko interferencji fal. Średnia czasowa gęstości energii oscyluje między

$$\bar{\varepsilon}_{min} = \bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2 - 2\sqrt{\bar{\varepsilon}_1\bar{\varepsilon}_2}, \qquad a \qquad \bar{\varepsilon}_{max} = \bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2 + 2\sqrt{\bar{\varepsilon}_1\bar{\varepsilon}_2}$$

w zależności od wartości argumentu funkcji cosinus w równaniu (8).

8.32.R. a) W odległości $\frac{a}{\sqrt{p}} = 31{,}6$ m od punktu środkowego.

b) W odległości $\frac{a}{\sqrt{p^2 + 2p}} = 21{,}8$ m od punktu środkowego.

8.33.R.

$$\bar{\Phi} = \frac{P}{\sqrt{1 + (\frac{2R}{h})^2}}.$$

8.34.R. Korzystamy z relacji między prędkością grupową v_g i fazową v_f

$$v_g = v_f - \lambda\frac{dv_f}{d\lambda} = v_f - \lambda d \quad \Rightarrow \quad v_{f1} = v_g + \lambda_1 d, \qquad \text{ale} \quad v_{f1} = \frac{\omega_1\lambda_1}{2\pi}, \text{więc}$$

$$\omega_1 = 2\pi(\frac{v_g}{\lambda_1} + d).$$

Analogicznie

$$\omega_2 = 2\pi(\frac{v_g}{\lambda_2} + d).$$

8.35.R.

$$\frac{v_f}{v_g} = \frac{65}{64}.$$

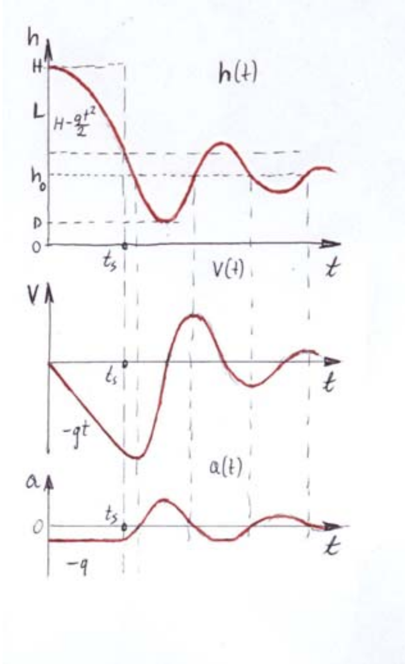
8.36.R.

Stojąc w bezruchu na wadze po pewnym czasie otrzymałem stabilne wskazanie. Oznacza to, że siła sprężystości F_s zrównoważyła siłę ciężkości Q czyli:

$$F_s = kD = Q = mg \quad dlatego \quad k = \frac{mg}{D} = 10^5 \frac{N}{m}.$$

$$E_p = \frac{kx^2}{2} = 5J.$$

8.37.R.



$$a/ \quad mg = k(H - h - L) \quad \Rightarrow \quad k = 750\frac{N}{m},$$

$$E_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{k(H - D - L)^2}{2} = 9375J.$$

$b/ \quad \Delta E = mg(H - D) - E_p = 1875J$,

c/ $\quad a \approx 5g$,

d/ ...

8.38.R.

a/ prawo zachowania pędu i energii przy zderzeniu sprężystym: $\vec{p_k} + \vec{p_T} = \vec{p_k}' + \vec{p_T}'$ *oraz* $E_k + E_T = E_k' + E_T'$.

Z powyższych praw wynika, że po zderzeniu kulka chwilowo się zatrzyma i następnie zacznie spadać swobodnie natomiast tarcza tuż po uderzeniu zacznie poruszać się poziomo z prędkością V_0. Od tego momentu tarcza będzie się poruszać ruchem harmonicznym opisany równaniem: $x(t) = A\sin(\omega_0 t - \varphi)$.

Z warunków początkowych tego ruchu wynika:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}},$$

$$x(0) = 0 = A\sin(\omega_0 0 - \varphi) = A\sin(-\varphi) \quad czyli \quad \varphi = 0$$

$$V(t) = \frac{dx}{dt} = A\omega_0 \cos(\omega_0 t - \varphi) \quad \Rightarrow \quad V(0) = A\omega_0 \cos(-\varphi) = V_0 \quad czyli \quad A = \frac{V_0}{\omega_0}.$$

Pełny opis ruchu: $x(t)=\frac{V_0}{\omega_0}\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right)$. Uwaga: początek osi X znajduje się w tarczy a jej kierunek jest zgodny z kierunkiem V_0.

b/ zastosować prawo zachowania pędu dla tego przypadku a reszta jak w punkcie *a*.

8.39.R.

Ruch harmoniczny tłumiony opisuje równanie:

$x(t)=Ae^{-\beta t}\sin(\omega t-\varphi)$, gdzie: $\Lambda=\beta T$ *i* $\omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$.

Z warunków zadania wynika:

$$\omega_0=\sqrt{\frac{g}{l}},$$

$$x(0)=0=Ae^{-\beta 0}\sin(\omega\ 0-\varphi)=A\sin(-\varphi)=0, \quad czyli \quad \varphi=0$$

$$V(t)=\frac{dx}{dt}=A\omega e^{-\beta t}\cos(\omega t-\varphi)-A\beta e^{-\beta t}\sin(\omega t-\varphi) \ \Rightarrow\ V(0)=A\omega=V_0 \quad czyli \quad A=\frac{V_0}{\omega}.$$

Równanie ruchu dla układu z zadania ma postać:

$$x(t)=\frac{V_0}{\omega}e^{-\Lambda\frac{t}{T}}\sin(\omega t).$$

8.40.R.

$$\Lambda=\beta T,$$

$$\omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2} \quad\Rightarrow\quad \frac{2\pi}{T}=\sqrt{\frac{4\pi^2}{T_0^2}-\beta^2}, \quad ,$$

$$\beta=\frac{\Lambda}{T}=\frac{\Lambda}{2\pi}\sqrt{\frac{4\pi^2}{T_0^2}-\beta^2} \quad\Rightarrow\quad \beta=\frac{\Lambda}{T_0}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\Lambda^2}{4\pi^2}}}$$

$$\Lambda=\beta T_0\sqrt{1+\frac{\Lambda^2}{4\pi^2}}\approx\beta T_0\left(1-\frac{\Lambda^2}{8\pi^2}\right).$$

Z ostatniego równania wynika, że $\Lambda=\beta T_0$ będzie dobrym przybliżeniem gdy:

$\frac{\Lambda^2}{8\pi^2}\le 0{,}01, \quad czyli \quad \Lambda\le 0{,}9.$ W takim przypadku mówimy o słabo tłumionych drganiach.

8.41.R.

Na mocy poprzedniego zadania możemy napisać: $\Lambda=\beta T=\beta T_0$.

Ponieważ

$E\propto A^2$ *i* $A(t)=A_0e^{-\beta t}$ *to* $E(t)=E_0e^{-2\beta t}$.

Dla warunków z zadania: $E(t_x)=\frac{1}{2}E_0=E_0e^{-2\beta t_x}$ *czyli* $t_x=\frac{\ln 2}{2\Lambda f_0}=3{,}47\cdot 10^{-5}\,s.$

8.42.R.

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t} \quad to \quad A(t_8) = \frac{1}{8} A_0 = A_0 e^{-\beta t_8} \quad czyli \quad \beta = \frac{\ln 8}{t_8} \quad i \quad \Lambda = \beta T = \frac{\ln 8\, T}{t_8} = 0{,}52.$$

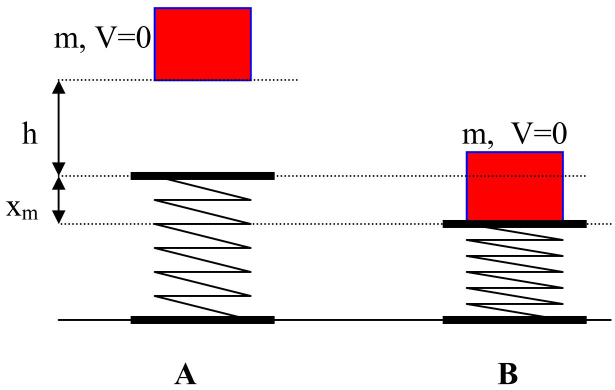
$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\omega^2 + \beta^2} = \sqrt{\omega^2 + \frac{\Lambda^2}{T^2}} = 6{,}32\frac{1}{s} \quad \Rightarrow \quad f_0 \approx 1Hz.$$

8.43.R.

Wskazówka:

1.zastosować prawo zachowania energii dla stanu układu A i B (rys),

2. znaleźć pierwiastki równania kwadratowego i wybrać odpowiednie rozwiązanie.



Wynik:

Maksymalne ściśnięcie sprężyny

$$x_m = D\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{D}}\right) = 6cm\,.$$

Chwilowe wskazanie $m_{maks.}$=600kg.

Uwaga: w rzeczywistych wagach wielkość przemieszczenia szalki jest ograniczona konstrukcyjnie.

8.44.R.

Wynik: $R = 0{,}1m.$

8.45.R.

Ogólny opis tej fali będzie następujący: $s(x,t) = A\sin(\omega t - kx).$ Jest to równanie fali płaskiej, poruszającej się wzdłuż osi X o zwrocie $(+\infty)$.

Parametry fali:

amplituda fali A=10^{-6}m,

częstość fali ω=2040 π s^{-1},

częstotliwość fali $f = \frac{\omega}{2\pi} \approx 1020Hz$,

długość wektora falowego k=6π m^{-1},

długość fali $\lambda = \frac{2\pi}{k} = 0{,}33m$,

prędkość fali (fazowa) $V = \frac{\omega}{k} = \lambda f = 340\frac{m}{s}$,

prędkość drobin ośrodka:

$$V_d = \frac{\partial s}{\partial t} = A\omega \cos(\omega t - kx) \quad czyli \quad V_{\max.} = A\omega = 0{,}0204\pi \frac{m}{s} = 0{,}064\frac{m}{s},$$

przyspieszenie drobin ośrodka:

$$a_d = \frac{\partial s^2}{\partial^2 t} = -A\omega^2 \sin(\omega t - kx) \quad czyli \quad a_{\max.} = A\omega^2 = 410\frac{m}{s^2},$$

względne odkształcenie ośrodka:

$$\frac{\partial s}{\partial x} = -Ak\cos(\omega t - kx) \quad czyli \quad \frac{\partial s}{\partial x}_{\max.} = Ak = 2{,}18\cdot 10^{-3}.$$

8.46.R.
Może to być równanie:

$$z(y,t) = A\sin\left(\frac{2\pi V}{\lambda}t + \frac{2\pi}{\lambda}y\right).$$

47.R.
Najbardziej prawdopodobne wzbudzenia fal stojących:

a/fala poprzeczna lub podłużna o długości $\lambda = \frac{4}{2n-1}L \quad gdzie \quad n = 1,2,3....$

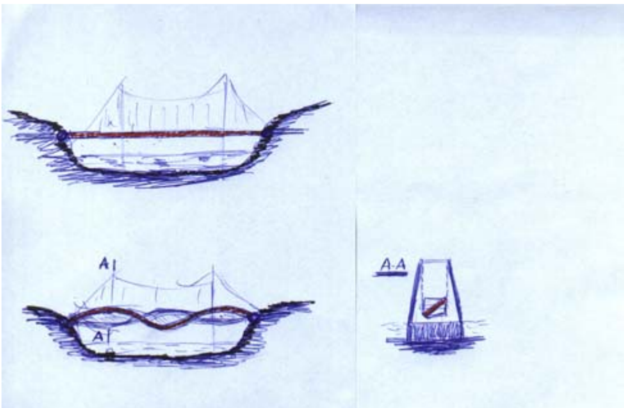
b/fala poprzeczna lub podłużna o długości $\lambda = \frac{2}{n}L \quad gdzie \quad n = 1,2,3....$

c/fala poprzeczna lub podłużna o długości $\lambda = \frac{1}{2n-1}L \quad gdzie \quad n = 1,2,3....$

d/fala podłużna o długości $\lambda = \frac{4}{2n-1}H \quad gdzie \quad n = 1,2,3....$

e/fala podłużna o długości $\lambda = \frac{2}{n}L \quad gdzie \quad n = 1,2,3....$

8.48.R.



Więcej ciekawych informacji na ten temat można znaleźć w sieci.

8.49.R.

Korzystając z zależności $V_g = V_f - \lambda\frac{dV_f}{d\lambda}$ otrzymamy:

$$V_g = \frac{3}{2}V_f \quad dla \quad \lambda < 2cm \quad oraz \quad V_g = \frac{1}{2}V_f \quad dla \quad \lambda > 2cm.$$

8.50.R.
Długości wygenerowanych w ten sposób fal są rzędu metrów. Są to fale długie, dla których mamy (patrz zadanie 8.49.) $V_f = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$ oraz $V_f = 2V_g$.

Odpowiedź: $V_f = 2\frac{m}{s}$, $\lambda = 2{,}5m$.

Uwaga: rezultatem związku $V_f > V_g$ jest zjawisko powstawania fal na końcu paczki falowej, przesuwania się ich do początku paczki i zaniku w obszarze czoła tej paczki.