

PRACA KONTROLNA nr 7 - POZIOM ROZSZERZONY

1. Turysta zabłądził w lesie zajmującym obszar (w km)

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2y + 3, -2y \leq x \leq y\}.$$

Wskazać mu najkrótszą drogę wyjścia z lasu, jeśli znajduje się w punkcie $P\left(-\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right)$. Ile minut będzie trwała wędrówka, jeśli idzie z prędkością 4 km/h?

2. Korzystając z zasady indukcji matematycznej, udowodnić prawdziwość nierówności

$$1^5 + 2^5 + \dots + n^5 < \frac{n^3(n+1)^3}{6}, \quad n \geq 1.$$

3. Kubuś zaobserwował, że w pewnej chwili w trzypiętrowej kamienicy po drugiej stronie ulicy pali się światło w 10 oknach. Na każdej kondygnacji kamienicy znajdują się 4 okna. Zakładamy, że okna zapalają się i gasną losowo. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że zarówno na drugim jak i na trzecim piętrze kamienicy świecą się co najmniej dwa okna. **Wsk.** Skorzystać ze wzoru $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

4. Podstawą graniastosłupa prostego o wysokości $h = 2$ jest trójkąt, w którym tangens kąta przy wierzchołku A wynosi $-\sqrt{2}$. Przekątne e, f sąsiednich ścian bocznych, wychodzące z wierzchołka A , są do siebie prostopadłe, a liczby h, e, f są kolejnymi wyrazami pewnego ciągu geometrycznego. Obliczyć objętość graniastosłupa.

5. Znaleźć dziedzinę i zbiór wartości funkcji

$$f(x) = \sqrt{\log_2 \frac{1}{\cos x + \sqrt{3} \sin x}}.$$

6. Kąt płaski przy wierzchołku D ostrosłupa prawidłowego trójkątnego o podstawie ABC jest równy α . Na krawędzi BD wybrano punkt E tak, że $\triangle ACE$ jest trójkątem równobocznym. Znaleźć stosunek $k(\alpha)$ objętości ostrosłupa $ABCE$ do objętości ostrosłupa $ACED$ w zależności od kąta α . Sporządzić wykres funkcji $k(\alpha)$.

Rozwiązania (rękopis) zadań z wybranego poziomu prosimy nadsyłać do 18 marca 2017 r. na adres:

**Wydział Matematyki
Politechniki Wrocławskiej,
ul. Wybrzeże Wyspiańskiego 27,
50-370 WROCŁAW.**

Na kopercie prosimy koniecznie zaznaczyć wybrany poziom! (np. poziom podstawowy lub rozszerzony). Do rozwiązań należy dołączyć zaadresowaną do siebie kopertę zwrotną z naklejonym znaczkiem, odpowiednim do wagi listu (**od 1.01.2017 nowe ceny znaczków!**). Prace nie spełniające podanych warunków nie będą poprawiane ani odsyłane.