

EGZAMIN WSTĘPNY Z MATEMATYKI

Zestaw składa się z 30 zadań. Zadania 1–10 oceniane będą w skali 0–2 punkty, zadania 11–30 w skali 0–4 punkty. Czas trwania egzaminu — 180 minut.

Powodzenia!

1. Obliczyć $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{1+3+5+\dots+(2n-1)}}{2n^2+n+1}$.
2. Rozwiązać nierówność $x^2 - 4x + 9 \leq \frac{18}{x+2}$.
3. Rozwiązać nierówność $\log_{0,3}(x+1) > -1$.
4. Rozwiązać nierówność $2 - |1 - 2x| > 1$.
5. Dla jakich wartości parametru $\alpha \in (0; 2\pi)$ równanie $\sin 2x = 2 \cos \alpha$ posiada rozwiązanie?
6. Obliczyć długość wektora \vec{a} , jeżeli $\vec{a} \circ \vec{b} = 7$, $\vec{a} \parallel \vec{b}$ i $\vec{b} = [3, -2, 1]$.
7. Rozwiązać nierówność $2^{x^2} < 5^x$.
8. Wykazać, że funkcja $f(x) = 3x^3 + 4x + \cos 2x$ jest rosnąca w całej swojej dziedzinie.
9. Wyznaczyć te wartości parametru k , dla których prosta $y = kx + 4$ będzie równoległa do prostej $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - t \end{cases}$.
10. Dla jakich a i b wielomian $W(x) = 12x^4 - 17x^2 + ax + b$ dzieli się bez reszty przez $2x^2 + x - 1$?
11. Dany jest trójkąt o wierzchołkach $A(1, 1)$, $B(-1, 3)$, $C(3, 7)$ i polu S . Przez wierzchołek A poprowadzić jedną z prostych, która dzieli dany trójkąt na dwa trójkąty o polach $\frac{1}{4}S$ i $\frac{3}{4}S$. Podać równanie tej prostej.
12. Znaleźć ekstrema funkcji $f(x) = (x+3)^2(x+8)^3$. Ile pierwiastków ma równanie $f(x) = 108$?
13. Dla jakiej wartości parametru a funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x \sin x}{\sqrt{x^2 + 4} - 2} & \text{dla } x \neq 0 \\ a & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

będzie funkcją ciągłą w punkcie $x = 0$?

14. Który z punktów paraboli $y = x^2$ jest położony najbliżej prostej $y = 2x - 2$?