

PRACA KONTROLNA nr 6 - POZIOM ROZSZERZONY

1. Rozwiązać nierówność $\frac{x}{\sqrt{x^3 - 2x + 1}} \geq \frac{1}{\sqrt{x + 3}}$.

2. Narysować staranny wykres funkcji

$$f(x) = \frac{\sin 2x - |\sin x|}{\sin x}.$$

Następnie w przedziale $[0, \pi]$ wyznaczyć rozwiązania nierówności

$$f(x) < 2(\sqrt{2} - 1) \cos^2 x$$

3. Rozwiązać nierówność

$$1 + \frac{\log_2 x}{1 + \log_2 x} + \left(\frac{\log_2 x}{1 + \log_2 x} \right)^2 + \dots \geq 2 \log_2 x,$$

której lewa strona jest sumą nieskończonego szeregu geometrycznego.

4. Objętość stożka jest 4 razy mniejsza niż objętość opisanej na nim kuli. Wyznaczyć stosunek pola powierzchni całkowitej stożka do pola powierzchni kuli oraz kąt, pod jakim tworząca stożka jest widoczna ze środka kuli.
5. Promień światła przechodzi przez punkt $A(1, 1)$, odbija się od prostej o równaniu $y = x - 2$ (zgodnie z zasadą mówiącą, że kąt padania jest równy kątowi odbicia) i przechodzi przez punkt $B(4, 6)$. Wyznaczyć współrzędne punktu odbicia P oraz równania prostych, po których biegnie promień przed i po odbiciu.
6. Na boku BC trójkąta równobocznego obrano punkt D tak, że promień okręgu wpisanego w trójkąt ADC jest dwa razy mniejszy niż promień okręgu wpisanego w trójkąt ABD . W jakim stosunku punkt D dzieli bok BC ?