AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
im. Stanisława Staszica w Krakowie
OLIMPIADA „O DIAMENTOWY INDEKS AGH" 2016/17

MATEMATYKA - ETAP III

ZADANIA PO 10 PUNKTÓW

1. Udowodnij, że dla dowolnych dwóch dodatnich liczb rzeczywistych a, b spełniona jest nierówność
$$\sqrt{ab} \geqslant \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}.$$

2. Oblicz $\log_8 \cos \frac{11}{6}\pi - \log_8 \operatorname{tg}(-\frac{17}{3}\pi)$.

3. Funkcja f dana wzorem
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^m-1}{x-1} & \text{dla} \quad x \neq 1 \\ a_m & \text{dla} \quad x = 1 \end{cases}$$
jest ciągła w punkcie $x = 1$. Wyznacz a_2, a_6 oraz a_m dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej m.

4. Zbadaj, czy trójkąt o wierzchołkach $A = (-2, 0), B = (1, -1), C = (0, 7)$ jest ostrokątny, prostokątny, czy rozwartokątny.

ZADANIA PO 20 PUNKTÓW

5. Liczba a jest losowo wybrana spośród wszystkich siedmiocyfrowych liczb naturalnych. Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń:
A : przynajmniej jedna z cyfr $0, 1$ lub 2 występuje w zapisie liczby a;
B : kolejne cyfry liczby a opisują siedmiowyrazowy ciąg arytmetyczny;
C : kolejne cyfry liczby a opisują siedmiowyrazowy ciąg malejący.

6. W trapez prostokątny o najkrótszym boku długości a wpisany jest okrąg o promieniu $\frac{2}{3}a$. Oblicz pole trapezu i stosunek długości jego przekątnych.

7. Dany jest układ równań
$$\begin{cases} (p+2)x + 4y &= 2p+4 \\ 3x + 2y &= 4 \end{cases}.$$
a) Dla jakich p układ ma dokładnie jedno rozwiązanie (x, y)?
b) Jaką największą wartość, a jaką najmniejszą, osiąga iloczyn xy dla $p \in \langle 0; 3 \rangle$?