**Zestaw 25**

# KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Udowodnij, że jeżeli liczby  całkowite $a, b, c, d$ spełniają warunek

$$a^2+b^2 = c^2 + d^2$$

to liczba $a + b + c + d$ jest liczbą parzystą.

2. Udowodnij, że wszystkie liczby postaci 10017, 100117, 1001117,… są podzielne przez 53.

3. Punkt $S$ leży wewnątrz sześciokąta foremnego $ABCDEF$. Udowodnić, że suma pól trójkątów $ABS$, $CDS$, $EFS$ jest równa połowie pola sześciokąta $ABCDEF$.

# KLASY TRZECIE

1. Udowodnij, że zbiór $S = \{6n + 3 : n \in N\}$, gdzie $N$ jest zbiorem wszystkich liczb naturalnych, zawiera nieskończenie wiele kwadratów liczb całkowitych.

2. Sfera $S_1$ jest wpisana w sześcian, sfera $S_2$ jest styczna do wszystkich krawędzi tego sześcianu, a sfera $S_3$ jest opisana na tym sześcianie. Sprawdź, czy pola tych sfer tworzą ciąg geometryczny lub arytmetyczny.

2. Wykaż, że niezależnie od wartości parametru $m$ równanie

$$x^3 - (m + 1)x^2 + (m + 3)x - 3 = 0$$

ma pierwiastek całkowity. Dla jakich $m$ wszystkie pierwiastki rzeczywiste tego równania są całkowite?

*Rozwiązania należy oddać p. Jarosławowi Szczepaniakowi do piątku 1 kwietnia do godziny 15.00 lub przesłać na adres jareksz@interia.pl do soboty 2 kwietnia do północy.*