POLITECHNIKA GDAŃSKA Gdańsk, 29.06.1999 r.

EGZAMIN WSTĘPNY Z MATEMATYKI

Egzamin składa się z 30 zadań. Zadania 1–10 oceniane będą w skali 0–2 punkty, zadania 11–30 w skali 0–4 punkty. Czas trwania egzaminu — 240 minut.

Powodzenia!

1. Znaleźć wszystkie rozwiązania równania $81x^4 - 72x^2 = -16$.
2. Zbiory A, B i $A \cup B$ mają odpowiednio 1999, 2049 i 3998 elementów. Ile elementów mają odpowiednio zbiory $A - B$ i $A \cap B$?
3. Jeden metr ma 1000000 mikronów, a 100000000 angstremów to jeden centymetr. Ile angstremów ma jeden mikron?
4. Rozwiązać równanie $\log_2(-2)^{5n} = n^2 + 4$, w którym n jest liczbą naturalną.
5. Obliczyć $\binom{n}{5}$, jeśli wiadomo, że $\binom{n}{3} = \binom{n}{4}$.
6. Rozwiązać nierówność $|x - 1| \leqslant \dfrac{x}{3} + 1$.
7. Dana jest funkcja $f(x) = (x-1)^2$. Na osobnych rysunkach naszkicować wykresy funkcji: (a) $y = f(x)$; (b) $y = f(-x)$; (c) $y = f(x+1) - 2$.
8. Rozwiązać nierówność $x + 3 \leqslant \dfrac{10}{x}$.
9. Dla jakich wartości x istnieje trójkąt o bokach długości 1, 2, $\log x$?
10. W trójkącie naprzeciw boku długości $3\sqrt{2}$ leży kąt miary 45°. Wyznaczyć promień okręgu opisanego na tym trójkącie.
11. Mamy dwa naczynia, z których jedno zawiera 10 litrów wody, a drugie 10 litrów soku. Połowę wody przelewamy do soku, mieszamy, a następnie połowę roztworu przelewamy z powrotem do wody. Obliczyć procentowe stężenia otrzymanych roztworów.
12. Punkty $A(-1,0)$, $B(3,2)$ i $C(5,-2)$ są wierzchołkami trójkąta. Pokazać, że jest to trójkąt równoramienny. Napisać równanie osi symetrii tego trójkąta.
13. Doprowadzić do najprostszej postaci wyrażenie $\dfrac{x+2+\sqrt{x^2-4}}{x+2-\sqrt{x^2-4}} + \dfrac{x+2-\sqrt{x^2-4}}{x+2+\sqrt{x^2-4}}$.
14. W obszar między trzema wzajemnie stycznymi okręgami o promieniu R wpisano okrąg. Znaleźć promień r tego okręgu.
15. Funkcję $f(x) = x^5 - 9x^3 - 27x^2 + 243$ zapisać w postaci iloczynowej i następnie rozwiązać nierówność $f(x) > 0$.