PRACA KONTROLNA nr 5

luty 2006r.

1. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości 6 i 8 cm. W trójkąt ten wpisano kwadrat tak, że dwa jego wierzchołki leżą na przeciwprostokątnej, a dwa pozostałe na przyprostokątnych. Obliczyć pola figur, na jakie brzeg kwadratu dzieli dany trójkąt.

2. Niech A będzie zbiorem tych punktów x osi liczbowej, których suma odległości od punktów -1 i 5 jest mniejsza od 12, a $B = \{x \in R \ : \ \sqrt{x^2 - 25} - x < 1\}$. Znaleźć i zaznaczyć na osi liczbowej zbiory A, B oraz $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

3. Wykazać, że liczba $x = \sqrt[3]{2\sqrt{6} + 4} - \sqrt[3]{2\sqrt{6} - 4}$ jest niewymierna.

   Wskazówka: obliczyć x^3.

4. Wyznaczyć zbiór wszystkich wartości parametru m, dla których równanie
$$\cos x = \frac{3m}{m^2 - 4}$$
   ma rozwiązanie w przedziale $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$. Obliczyć $\operatorname{ctg} x$ dla całkowitych m z tego zbioru.

5. W ostrosłupie prawidłowym sześciokątnym przekrój o najmniejszym polu płaszczyzną zawierającą wysokość ostrosłupa jest trójkątem równobocznym o boku $2a$. Obliczyć cosinus kąta dwuściennego między ścianami bocznymi tego ostrosłupa.

6. Dane jest półkole o średnicy AB i promieniu długości $|AO| = r$. Na promieniu AO jako na średnicy wewnątrz danego półkola zakreślono półokrąg. Na większym półokręgu obrano punkt P i połączono go z punktami A i B. Odcinek AP przecina mniejszy półokrąg w punkcie C. Obliczyć długość odcinka AP, jeżeli wiadomo, że $|CP| + |PB| = 1$. Przeprowadzić analizę dla jakich wartości r zadanie ma rozwiązanie.

7. Zbadać monotoniczność ciągu $a_n = \frac{n-2}{\sqrt{n^2+1}}$. Obliczyć granicę tego ciągu, a następnie znaleźć wszystkie jego wyrazy odległe od granicy co najmniej o $\frac{1}{10}$.

8. Wykazać, że pole trójkąta ograniczonego styczną do wykresu funkcji $y = \frac{2x-3}{x-2}$ i jego asymptotami jest stałe. Sporządzić rysunek.

9. Rozwiązać układ równań
$$\begin{cases} \log_{(x-y)}[8(x+y)] & = & -2 \\ (x+y)^{\log_4(x-y)} & = & \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$