

## PRACA KONTROLNA nr 4 - POZIOM ROZSZERZONY

1. Punkty  $A(0, 1)$ ,  $B(4, 3)$  są dwoma kolejnymi wierzchołkami równoległoboku  $ABCD$ , a  $S(2, 3)$  punktem przecięcia przekątnych. Posługując się rachunkiem wektorowym, wyznaczyć pozostałe wierzchołki równoległoboku oraz wierzchołki równoległoboku  $A'B'C'D'$  otrzymanego przez obrót  $ABCD$  o kąt  $90^\circ$  wokół punktu  $(0, 0)$  w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Sprawdzić, że  $A'B'C'D'$  jest obrazem  $ABCD$  w przekształceniu  $T_2 \circ O \circ T_1$ , gdzie  $T_1$  jest przesunięciem o wektor  $[0, 1]$ ,  $O$  - obrotem o kąt  $90^\circ$  wokół punktu  $(0, 0)$  w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, a  $T_2$  - przesunięciem o wektor  $[1, 0]$ .

2. Narysować wykres funkcji

$$f(x) = 1 - \frac{2^x}{3^x - 2^x} + \left( \frac{2^x}{3^x - 2^x} \right)^2 - \dots$$

i uzasadnić, że przyjmuje ona wyłącznie wartości większe niż  $\frac{1}{2}$ .

3. Niech  $f(x) = \begin{cases} |2^x - 1| & \text{dla } x \leq 1, \\ \log_{\frac{1}{2}} \left( x - \frac{1}{2} \right) & \text{dla } x > 1. \end{cases}$

a) Narysować wykres funkcji  $f$  i na jego podstawie wyznaczyć zbiór wartości funkcji.

b) Obliczyć  $f \left( \log_{\frac{1}{2}} \left( \sqrt{2} - \frac{1}{2} \right) \right)$  oraz  $f \left( 2^{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \right)$ .

c) Rozwiązać nierówność  $f(x) \leq \frac{1}{2}$  i zaznaczyć na osi  $0x$  zbiór rozwiązań.

4. Punkt  $C(0, 0)$  jest wierzchołkiem trójkąta równoramiennego, w którym środkowa podstawy  $AB$  i wysokość poprowadzona z jednego z wierzchołków  $A, B$  przecinają się w punkcie  $S(2, 1)$ . Pole trójkąta  $ABS$  jest dwa razy mniejsze niż pole trójkąta  $ABC$ . Wyznaczyć współrzędne wierzchołków  $A, B$  oraz równanie okręgu opisanego na trójkącie  $ABC$ .
5. W ośmiościan foremny wpisano dwa sześciany. Wierzchołki pierwszego z nich leżą na krawędziach ośmiościanu, a wierzchołki drugiego - na wysokościach ścian bocznych. Obliczyć stosunek objętości tych sześcianów.
6. Prostokąt o bokach  $a$  i  $2a$  obraca się wokół przekątnej. Obliczyć pole powierzchni całkowitej i objętość otrzymanej bryły.

---

Rozwiązania (rękopis) zadań z wybranego poziomu prosimy nadsyłać do **18 grudnia 2019r.** na adres:

Wydział Matematyki  
Politechnika Wrocławska  
Wybrzeże Wyspiańskiego 27  
50-370 WROCŁAW.

Na kopercie prosimy **koniecznie** zaznaczyć **wybrany poziom!** (np. **poziom podstawowy lub rozszerzony**). Do rozwiązań należy dołączyć zaadresowaną do siebie kopertę zwrotną z naklejonym znaczkiem, odpowiednim do wagi listu. Prace niespełniające podanych warunków nie będą poprawiane ani odsyłane.

**Uwaga.** Wysyłając nam rozwiązania zadań uczestnik Kursu udostępnia Politechnice Wrocławskiej swoje **dane osobowe**, które przetwarzamy **wyłącznie** w zakresie niezbędnym do jego prowadzenia (odesłanie zadań, prowadzenie statystyki). Szczegółowe informacje o przetwarzaniu przez nas danych osobowych są dostępne na stronie internetowej Kursu.

Adres internetowy Kursu: <http://www.im.pwr.edu.pl/kurs>