

## PRACA KONTROLNA nr 6 - POZIOM ROZSZERZONY

1. Jest pięć biletów po 1 złoty, trzy bilety po 3 złote i dwa bilety po 5 złotych. Wybrano losowo trzy bilety. Obliczyć prawdopodobieństwo, że: a) przynajmniej dwa z tych biletów mają jednakową wartość; b) wybrane bilety mają łączną wartość 7 złotych.
2. Korzystając z zasady indukcji matematycznej udowodnić, że nierówność

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

jest prawdziwa dla dowolnej liczby naturalnej  $n$ .

3. Dwie osoby rzucają na przemian monetą. Wygrywa ta osoba, która pierwsza wyrzuci orła. Obliczyć, ile wynoszą prawdopodobieństwa wygranej dla każdego z graczy. Następnie obliczyć prawdopodobieństwa wygranej obu graczy, gdy rozgrywka została zmieniona w następujący sposób: pierwszy gracz rzuca jeden raz monetą, a potem gracze rzucają monetą po dwa razy (zaczynając od drugiego gracza), aż do pierwszego wyrzucenia orła.
4. Ze zbioru liczb naturalnych  $n$  spełniających warunek  $\frac{1}{\log n} + \frac{1}{1-\log n} > 1$  losujemy kolejno bez zwracania dwie liczby i tworzymy z nich liczbę dwucyfrową, w której cyfrą dziesiątek jest pierwsza z wylosowanych liczb. Sprawdzić niezależność zdarzeń: A - utworzona liczba jest parzysta, B - utworzona liczba jest podzielna przez 3.
5. Obliczyć, ile liczb mniejszych od 100 nie jest podzielnych przez 2, 3, 5 ani przez 7. Udowodnić, że wszystkie te liczby oprócz 1 są pierwsze. Ile jest liczb pierwszych mniejszych od 100?
6. Dla każdej drużyny piłkarskiej biorącej udział w Euro 2012 eksperci wyznaczyli współczynnik  $p$  oznaczający prawdopodobieństwo, że Polska pokona tę drużynę. Drużyny podzielono na cztery koszyki. Z każdego koszyka do każdej grupy zostanie wylosowana jedna drużyna, tak że po zakończeniu losowania powstaną cztery grupy po cztery drużyny. Polska znajduje się w koszyku A. Pozostałe koszyki to:  
B: Niemcy ( $p = 0,2$ ), Włochy ( $p = 0,2$ ), Anglia ( $p = 0,4$ ), Rosja ( $p = 0,5$ );  
C: Chorwacja ( $p = 0,6$ ), Grecja ( $p = 0,6$ ), Portugalia ( $p = 0,4$ ), Szwecja ( $p = 0,6$ );  
D: Dania ( $p = 0,4$ ), Francja ( $p = 0,4$ ), Czechy ( $p = 0,6$ ), Irlandia ( $p = 0,5$ ).
  - a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że do grupy z Polską trafią przynajmniej dwie drużyny, których  $p$  jest większe lub równe 0,5?
  - b) Gospodarz Euro 2012, Polska, ma prawo do następującej modyfikacji: z losowo wybranego koszyka zostaną wylosowane do grupy z nią dwie drużyny, a z innego losowo wybranego koszyka nie będzie losowana żadna. Czy Polsce opłaca się skorzystać z tego prawa, jeśli chce powiększyć prawdopodobieństwo zdarzenia z punktu a)?