

## PRACA KONTROLNA nr 8 - POZIOM ROZSZERZONY

1. Niech  $A$  będzie wierzchołkiem kwadratu, a  $M$  środkiem przeciwległego boku. Na przekątnej kwadratu wychodzącej z wierzchołka  $A$  wybrano punkt  $P$  tak, aby  $|AP| = |MP|$ . Obliczyć, w jakim stosunku punkt  $P$  dzieli przekątną kwadratu.
2. Stosując zasadę indukcji matematycznej udowodnić nierówność

$$\binom{2n}{n} \leq \frac{4^n}{\sqrt{2n+2}}, \quad n \geq 1.$$

3. Wyznaczyć równanie okręgu o środku leżącym na prostej  $y - x = 0$  oraz stycznego do prostej  $y - 3 = 0$  i do okręgu  $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$ . Sporządzić rysunek.
4. Liczba  $-2$  jest pierwiastkiem dwukrotnym wielomianu  $w(x) = \frac{1}{2}x^3 + ax^2 + bx + c$ , a punkt  $S(-1, y_0)$  jest środkiem symetrii wykresu  $w(x)$ . Wyznaczyć  $a, b, c, y_0$  oraz trzeci pierwiastek. Sporządzić wykres  $w(x)$  w przedziale  $[-3, \frac{3}{2}]$ .
5. Wycinek koła o promieniu  $3R$  i kącie środkowym  $\alpha$  zwinięto w powierzchnię boczną stożka  $\mathcal{S}_1$ . Podobnie, wycinek koła o promieniu  $R$  i kącie środkowym  $3\alpha$  zwinięto w powierzchnię boczną stożka  $\mathcal{S}_2$ . Następnie obydwie stożki złączono podstawami tak, aby miały wspólną oś obrotu, a ich wierzchołki były skierowane w przeciwnych kierunkach. Obliczyć promień kuli wpisanej w otrzymaną bryłę. Sporządzić rysunek.
6. Podać interpretację geometryczną równania  $\sqrt{2x+4} = mx + m + 1$  z parametrem  $m$ . Graficznie i analitycznie określić, dla jakich wartości  $m$  równanie ma dwa pierwiastki  $x_1 = x_1(m)$ ,  $x_2 = x_2(m)$ . Nie korzystając z metod rachunku różniczkowego, wykazać, że funkcja  $f(m) = x_1(m) + x_2(m)$  jest malejąca oraz sporządzić jej wykres.