AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
im. Stanisława Staszica w Krakowie
OLIMPIADA „O DIAMENTOWY INDEKS AGH" 2009/10

MATEMATYKA - ETAP I

ZADANIA PO 10 PUNKTÓW

1. Na półsferze o promieniu R leżą dwa styczne do siebie okręgi o promieniu r. Wyznacz największą odległość między dwoma punktami należącymi do tych okręgów.

2. Rozwiąż nierówność
$$\sqrt{x^2+2x+1}-2x>0.$$

3. Kran A napełnia basen wodą w ciągu 10 godzin, a kran B w ciągu 15 godzin. W ciągu ilu godzin napełniony zostanie basen, jeżeli oba krany będą działać jednocześnie?

4. Znajdź wszystkie rozwiązania równania
$$4\cos 2x\sin 2x+1=0$$
należące do przedziału $(-\pi;\pi)$.

ZADANIA PO 20 PUNKTÓW

5. Wyznacz zbiory $A\cap B$ oraz $A\setminus B$, gdzie
$$A=\{x\in\mathbb{R}: x^4+x^3-3x^2-x+2\geq 0\},$$
$$B=\{x\in\mathbb{R}: \log_{0,5}(x+3)\geq\log_{0,5}(6-2x)\}.$$

6. Oblicz pole trójkąta, mając dane dwie proste $4x+5y+17=0$ i $x-3y=0$, zawierające środkowe trójkąta, oraz jeden jego wierzchołek $A=(-1,-6)$.

7. Ile jest równań postaci
$$x^2-px+q=0,$$
które mają dwa pierwiastki mniejsze od 7, przy czym liczby p i q są całkowite i dodatnie.