

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
im. Stanisława Staszica w Krakowie
OLIMPIADA „O DIAMENTOWY INDEKS AGH” 2022/23

MATEMATYKA - ETAP II

ZADANIA PO 10 PUNKTÓW

1. Udowodnij, że istnieje tylko jedna trójka liczb pierwszych, które są trzema kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego o różnicy 2.
2. Najkrótszy bok trapezu prostokątnego opisanego na okręgu o promieniu r ma długość $\frac{5}{3}r$. Oblicz pole trapezu.
3. Dwa miasta A i B są odległe od siebie o 960 km. Z tych miast wyjechały naprzeciw siebie dwa pociągi, przy czym pociąg z miasta B wyjechał 2 godziny później i jechał z prędkością o 20 km/godz. większą niż pociąg z miasta A . Pociągi te minęły się dokładnie w połowie drogi. Podaj prędkość pociągu, który wyruszył z miasta A .
4. Spośród wierzchołów n -kąta foremnego losujemy trzy. Oblicz prawdopodobieństwo p_n wylosowania wierzchołków trójkąta prostokątnego. Zbadaj, czy ciąg (p_n) ma granicę.

ZADANIA PO 20 PUNKTÓW

5. Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi ostrosłupa prawidłowego czworokątnego wpisanego w sferę o promieniu R , który ma największą objętość.
6. Znajdź wszystkie pierwiastki równania

$$3^{\cos^2 2x} + 3^{\sin^2 2x} = 4,$$

które spełniają nierówność

$$\log_x(x+2) < 2.$$

7. Wielomian P dany wzorem

$$P(x) = x^3 + mx + 162$$

ma pierwiastek wielokrotny. Uzasadnij, że nie jest to jedyny pierwiastek tego wielomianu. Wykaż, że $P(-\sqrt[6]{9})$ jest liczbą całkowitą.