MAŁOPOLSKI KONKURS MATEMATYCZNY

Rok szkolny 2018/2019

ETAP REJONOWY — 10 grudnia 2018 roku

PRAWIDŁOWE ODPOWIEDZI
I PUNKTACJA

<table>
<tr><th>zadanie</th><th>odpowiedź</th><th>punkty</th></tr>
<tr><td>1</td><td>B</td><td>3</td></tr>
<tr><td>2</td><td>C</td><td>3</td></tr>
<tr><td>3</td><td>A</td><td>3</td></tr>
<tr><td>4</td><td>B</td><td>3</td></tr>
<tr><td>5</td><td>E</td><td>3</td></tr>
<tr><td>6</td><td>B</td><td>3</td></tr>
<tr><td>7</td><td>E</td><td>3</td></tr>
<tr><td>8</td><td>C</td><td>3</td></tr>
<tr><td>9</td><td>D</td><td>3</td></tr>
<tr><td>10</td><td>A</td><td>3</td></tr>
<tr><td>11</td><td rowspan="4">zadania otwarte</td><td>7</td></tr>
<tr><td>12</td><td>7</td></tr>
<tr><td>13</td><td>8</td></tr>
<tr><td>14</td><td>8</td></tr>
<tr><td colspan="2">maksymalna możliwa
łączna liczba punktów</td><td>60</td></tr>
</table>

Rozwiązanie zadania 11

Dane jest równanie z trzema niewiadomymi x, y, z:

$$x^2+y^2+z^2+4y+14=2x+6z.$$

Wyznacz wszystkie rozwiązania tego równania w liczbach rzeczywistych.

Pogrupujmy odpowiednio wyrazy w rozwiązywanym równaniu:

$x^2-2x+1+y^2+4y+4+z^2-6z+9=0$

Można zauważyć, że uzyskaliśmy trzy wzory skróconego mnożenia (kwadrat sumy/różnicy):

$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=0$

Kwadrat liczby rzeczywistej jest zawsze liczbą nieujemną. Suma trzech kwadratów może zatem wynosić 0 wyłącznie w sytuacji, gdy wszystkie trzy kwadraty przyjmują wartość 0.

Zatem

$$\begin{cases} x-1=0 \\ y+2=0 \\ z-3=0 \end{cases}$$

co oznacza, że równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie w liczbach rzeczywistych:

$$\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \\ z=3 \end{cases}$$

Punktacja zadania 11

0 pkt – rozwiązanie, w którym nie ma istotnego postępu
1 pkt – rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania

- uczeń pogrupował wyrazy uzyskując przynajmniej jeden wzór skróconego mnożenia (np. $x^2 - 2x + 1$)

2 pkt – został dokonany istotny postęp w rozwiązaniu zadania, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania
Przykłady:

- uczeń pogrupował wyrazy do postaci $x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 + z^2 - 6z + 9 = 0$
- uczeń w jednym przypadku potrafił poprawnie zapisać wyrażenie w postaci kwadratu sumy/różnicy (np. $(x-1)^2$) i na tym poprzestał lub popełnił błędy w zapisie pozostałych wyrażeń

3 pkt – zostały pokonane zasadnicze trudności zadania i zdający na tym poprzestał lub błędnie kontynuował rozwiązanie
Przykłady:

- uczeń w dwóch przypadkach potrafił poprawnie zapisać wyrażenie w postaci kwadratu sumy/różnicy (np. $(x-1)^2$ i $(y+2)^2$) i na tym poprzestał lub popełnił błędy w zapisie pozostałych wyrażeń

5 pkt – zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie i zdający na tym poprzestał lub błędnie kontynuował rozwiązanie
Przykłady:

- uczeń poprawnie sprowadził wyrażenie do postaci przypominającej $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 0$

6 pkt – zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, zdający doprowadził rozwiązanie do końca, jednak rozwiązanie zadania zawiera usterki, błędy rachunkowe
Przykłady:

- uczeń poprawnie rozumował, że każdy z nawiasów w wyrażeniu $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 0$ powinien mieć wartość 0 i podał rozwiązanie z drobnym błędem rachunkowym (np. $x = -1$ zamiast $x = 1$)

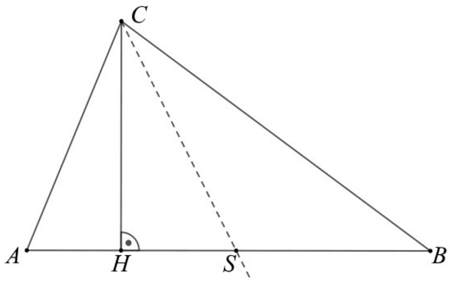
7 pkt – zadanie zostało rozwiązane bezbłędnie

Uwaga:

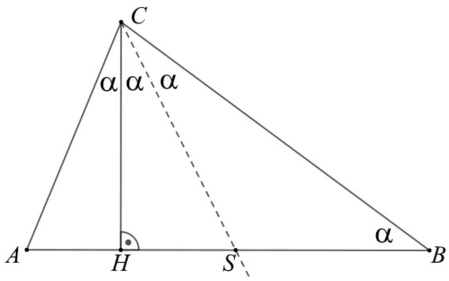
- za każde inne niż przedstawione poprawne rozwiązanie uczeń otrzymuje maksymalną liczbę punktów

Rozwiązanie zadania 12

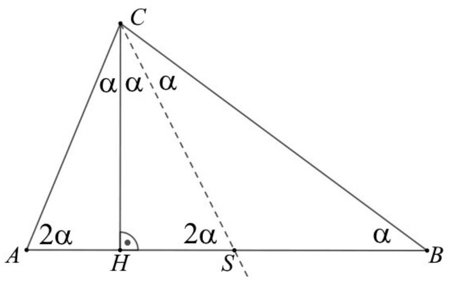
Dany jest trójkąt ABC. Wysokość CH dzieli kąt $\angle ACB$ w taki sposób, że $\angle HCB = 2\angle ACH$ (rysunek). Dwusieczna kąta $\angle HCB$ przecina bok AB w punkcie S i trójkąt BCS jest równoramienny. Wykaż, że S jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC.



Oznaczmy miarę kąta $\angle ACH = \alpha$.
Wtedy zgodnie z treścią zadania mamy $\angle HCS = \angle SCB = \alpha$.
Trójkąt BCS jest równoramienny, a kąt $\angle BSC$ jest rozwarty, więc $\angle SCB = \angle CBS = \alpha$.



Z sumy kątów trójkąta BCS uzyskujemy, że $\angle BSC = 180° - 2\alpha$, więc $\angle CSH = 2\alpha$ (kąty przyległe).
Zauważmy, że trójkąty AHC i SHC są przystające (mają wspólny bok CH i odpowiednio równe kąty przy tym boku), więc również $\angle HAC = 2\alpha$.



Z sumy kątów trójkąta ABC uzyskujemy, że $\alpha = 30°$ czyli trójkąt ASC jest równoboczny. Zatem $SA = SB = SC$, czyli S jest środkiem okręgu opisanego na ABC.

Punktacja zadania 12

0 pkt – rozwiązanie, w którym nie ma istotnego postępu
1 pkt – rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania

- uczeń zauważył trzy równe kąty przy wierzchołku C lub zauważył dwa równe kąty w trójkącie BCS

2 pkt – został dokonany istotny postęp w rozwiązaniu zadania, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania
Przykłady:

- uczeń zauważył trzy równe kąty przy wierzchołku C oraz zauważył dwa równe kąty w trójkącie BCS

3 pkt – zostały pokonane zasadnicze trudności zadania i zdający na tym poprzestał lub błędnie kontynuował rozwiązanie
Przykłady:

- uczeń powiązał miarę kąta $\angle BSC$ z miarą dowolnego z trzech równych kątów przy wierzchołku C

5 pkt – zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie i zdający na tym poprzestał lub błędnie kontynuował rozwiązanie
Przykłady:

- uczeń powiązał miarę kąta $\angle CSH$ z miarą dowolnego z trzech równych kątów przy wierzchołku C

6 pkt – zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, zdający doprowadził rozwiązanie do końca, jednak rozwiązanie zadania zawiera usterki, błędy rachunkowe
Przykłady:

- uczeń ustalił miary kątów trójkąta ABC lub zauważył, że trójkąt ASC jest równoboczny

7 pkt – zadanie zostało rozwiązane bezbłędnie

Uwaga:

- za każde inne niż przedstawione poprawne rozwiązanie uczeń otrzymuje maksymalną liczbę punktów

Rozwiązanie zadania 13

Do budowy pewnego urządzenia używa się odlanych z metalu sześcianów o krawędziach 1 cm, 2 cm i 3 cm. Każdy sześcian pokryty jest cienką warstwą specjalnej farby. Wiadomo, że metal i farba użyte do produkcji najmniejszego sześcianu kosztują 10 zł, a metal i farba zużyte do produkcji największego sześcianu kosztują 252 zł. Ile kosztują materiały potrzebne do produkcji średniego sześcianu?

Wprowadźmy oznaczenia:
m – koszt 1 cm^3 metalu
f – koszt 1 cm^2 farby
Mały sześcian ma objętość 1 cm^3 i pole powierzchni 6 cm^2.
Średni sześcian ma objętość 8 cm^3 i pole powierzchni 24 cm^2
Duży sześcian ma objętość 27 cm^3 i pole powierzchni 54 cm^2
Można więc zapisać dwa równania wyznaczające koszty materiałów do produkcji małego i dużego sześcianu:

$$\begin{cases} m + 6f = 10 \\ 27m + 54f = 252 \end{cases}$$

Po rozwiązaniu układu równań uzyskujemy

$$\begin{cases} m = 9 \\ f = \dfrac{1}{6} \end{cases}$$

To pozwala obliczyć koszt materiałów do produkcji średniego sześcianu:
$8m + 24f = 72 + 4 = 76$
Zatem materiały potrzebne do produkcji średniego sześcianu kosztują 76 złotych.

Punktacja zadania 13

0 pkt – rozwiązanie, w którym nie ma istotnego postępu
1 pkt – rozwiązanie, w którym postęp jest minimalny, ale prowadzący do całkowitego rozwiązania zadania

- uczeń zastosował poprawny sposób wyznaczania kosztu materiałów do produkcji co najmniej jednego rodzaju sześcianu ale przy polu lub objętości popełnił konsekwentnie przenoszone dalej błędy rachunkowe

2 pkt – rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania

- uczeń obliczył pola powierzchni i objętości poszczególnych sześcianów i na tym poprzestał

3 pkt – został dokonany istotny postęp w rozwiązaniu zadania, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania
Przykłady:

- uczeń poprawnie zapisał równanie wyznaczające koszty materiałów do produkcji co najmniej jednego rodzaju sześcianu
- uczeń zasosował poprawne sposoby wyznaczania kosztu materiałów do produkcji małego i dużego sześcianu, ale przy polu lub objętości popełnił konsekwentnie przenoszone dalej błędy rachunkowe

4 pkt – zostały pokonane zasadnicze trudności zadania i zdający na tym poprzestał lub błędnie kontynuował rozwiązanie
Przykłady:

- uczeń ułożył dwa poprawne równania wyznaczające koszty materiałów do produkcji małego i dużego sześcianu
- uczeń poprawnie rozwiązał ułożony układ równań, ale sam układ równań zawiera konsekwencje błędów rachunkowych (przy obliczaniu początkowego pola lub objętości)

6 pkt – zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie i zdający na tym poprzestał lub błędnie kontynuował rozwiązanie albo rozwiązanie zawiera błędy rachunkowe
Przykłady:

- uczeń poprawnie rozwiązał układ równań
- uczeń zastosował poprawną metodę rozwiązywania układu równań z drobnym błędem rachunkowym (np. pomyłka w mnożeniu), uzyskał sensowne fizycznie wyniki i konsekwentnie z ich użyciem obliczył koszt materiałów dla średniego sześcianu

7 pkt – zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, zdający doprowadził rozwiązanie do końca, jednak rozwiązanie zadania zawiera usterki, błędy rachunkowe
Przykłady:

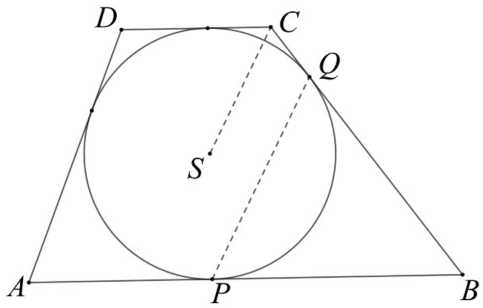
- uczeń poprawnie podał wzór na obliczenie kosztów produkcji średniego sześcianu i podstawił otrzymane wyniki
- uczeń poprawnie rozwiązał układ równań i oblicza koszt średniego sześcianu, ale do obliczeń przyjął dziesiętne przybliżenie ułamka $\frac{1}{6}$

8 pkt – zadanie zostało rozwiązane bezbłędnie
Uwaga:

- za każde inne niż przedstawione poprawne rozwiązanie uczeń otrzymuje maksymalną liczbę punktów

Rozwiązanie zadania 14

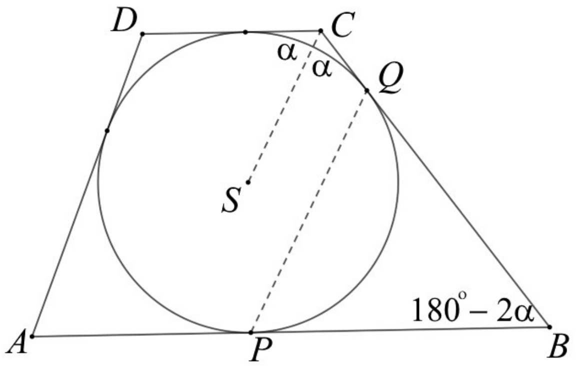
Na okręgu o środku S opisano trapez $ABCD$. Podstawa AB jest styczna do okręgu w punkcie P, a ramię BC w punkcie Q (rysunek). Wykaż, że odcinki PQ oraz CS są równoległe.



Oznaczmy kąt trapezu przy wierzchołku C jako $2a$.

Z własności trapezu kąt przy wierzchołku B jako kąt przy tym samym ramieniu ma miarę $180° - 2\alpha$.

Środek okręgu wpisanego w wielokąt leży na przecięciu dwusiecznych, więc półprosta CS dzieli kąt o wierzchołku C na dwa kąty o równych miarach (α i α).



Styczne do okręgu wpisanego poprowadzone z punktu B wyznaczają na okręgu punkty P i Q. Z własności stycznych odcinki BQ i BP są równej długości, czyli trójkąt PBQ jest równoramienny. Z sumy jego kątów możemy obliczyć, że kąty przy wierzchołkach P i Q mają miarę α.

Odcinki PQ i CS są nachylone pod kątem α do prostej BC (kąty odpowiadające). Zatem również $PQ \parallel CS$.

Punktacja zadania 14

0 pkt – rozwiązanie, w którym nie ma istotnego postępu
1 pkt – rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania
Przykłady

- uczeń zauważył, że suma kątów przy wierzchołkach B i C to $180°$
- uczeń zauważył, że CS jest dwusieczną kąta przy wierzchołku C
- uczeń zauważył równość odcinków BP i BQ

2 pkt – został dokonany istotny postęp w rozwiązaniu zadania, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania
Przykłady:

- uczeń zauważył dwa z faktów podanych w przykładach punktacji za 1 pkt

4 pkt – zostały pokonane zasadnicze trudności zadania i zdający na tym poprzestał lub błędnie kontynuował rozwiązanie
Przykłady:

- uczeń zauważył, że suma kątów przy wierzchołkach B i C to $180°$, że CS jest dwusieczną kąta przy wierzchołku C i że odcinki BP i BQ są równej długości
- uczeń korzysta z własności np. promieni poprowadzonych do punktu styczności i zapisuje zależności, które prowadzą do ustalenia zależności między miarami kątów PQB i SCB

5 pkt – zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie i zdający na tym poprzestał lub błędnie kontynuował rozwiązanie albo rozwiązanie zawiera błędy rachunkowe
Przykłady:

- uczeń dodatkowo zauważył , że trójkąt PBQ jest równoramienny i zauważył zależności między jego kątami
- uczeń ustalił zależność między miarami kątów PQB i SCB

7 pkt – zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, zdający doprowadził rozwiązanie prawie do końca lub doprowadził je do końca popełniając drobny błąd rachunkowy itp.
Przykłady:

- uczeń zauważył, że kąty PQB i SCB są równe i na tym poprzestał

8 pkt – zadanie zostało rozwiązane bezbłędnie

Uwaga:

- za każde inne niż przedstawione poprawne rozwiązanie uczeń otrzymuje maksymalną liczbę punktów