INSTYTUT MATEMATYKI I KRYPTOLOGII
WYDZIAŁ CYBERNETYKI
WAT

ZADANIA KONKURSOWE

MATEMATYKA

PRZYGOTOWALI

JERZY GAWINECKI, LUCJAN KOWALSKI, WOJCIECH MATUSZEWSKI, JOANNA PIASECKA

WARSZAWA 2020

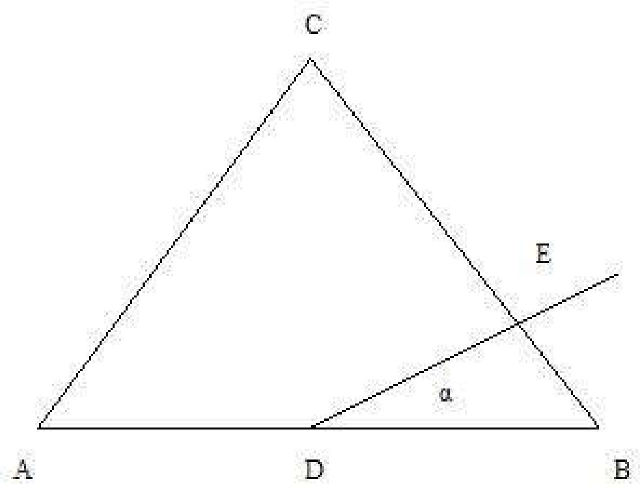
SPIS TREŚCI

PRZYKŁADOWE ZADANIA

Zadanie 1

Przez środek boku trójkąta równobocznego ABC poprowadzono prostą tworzącą z tym bokiem kąt ostry α. Wyrazić stosunek pól figur na jakie ta prosta dzieli trójkąt ABC jako funkcję kąta α.

Szkic rozwiązania.



Oznaczmy:

a - długość boku trójkąta ABC,

Pole trójkąta ABC:

$$S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Pole trójkąta DBE:

$$S_{DBE} = \frac{1}{2} \cdot |DB| \cdot |DE| \cdot \sin\alpha = \frac{a}{4} \cdot |DE| \cdot \sin\alpha \qquad (1)$$

Z twierdzenia sinusów dla trójkąta DBE:

$$\frac{|DE|}{\sin 60^O} = \frac{|DB|}{\sin(180^O - 60^O - \alpha)}$$

Stąd

$$|DE| = \frac{|DB| \cdot \sin 60^O}{\sin(120^O - \alpha)} = \frac{a\sqrt{3}}{4\sin(120^O - \alpha)} \qquad (2)$$

Wstawiając (2) do (1) otrzymamy

$$S_{DBE} = \frac{a^2\sqrt{3}\sin\alpha}{16\sin(120^O - \alpha)}$$

Pole czworokąta *ADEC*:

$$S_{ADEC} = S_{ABC} - S_{DBE} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} - S_{DBE}$$

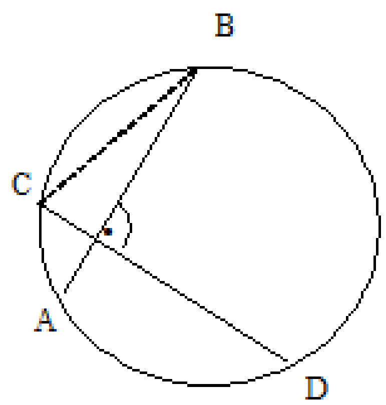
Zatem

$$\frac{S_{ADEC}}{S_{DBE}} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4} - S_{DBE}}{S_{DBE}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{16\sin(120^O - \alpha)}{a^2\sqrt{3}\sin\alpha} - 1 = \frac{4\sin(120^O - \alpha)}{\sin\alpha} - 1$$

Odp. Szukany stosunek pól ma wartość $\frac{S_{ADEC}}{S_{DBE}} = \frac{4\sin(120^O - \alpha)}{\sin\alpha} - 1$.

Zadanie 2
W okręgu o promieniu 1 poprowadzono dwie prostopadłe cięciwy AB i CD.
Wykazać, że $|AC|^2 + |BD|^2 = 4$.

Szkic rozwiązania.



Niech $|\angle ABC| = \alpha$,

wtedy $|\angle BCD| = 90^o - \alpha$

Stosujemy twierdzenie sinusów

$|AC| = 2\sin\alpha$

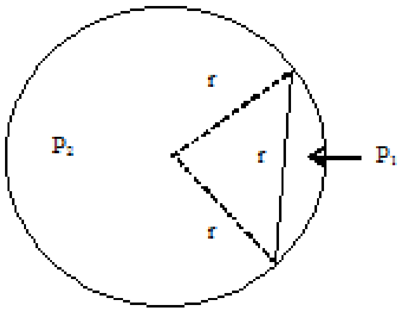
$|BD| = 2\sin(90^o - \alpha) = 2\cos\alpha$,

zatem

$|AC|^2 + |BD|^2 = (2\sin\alpha)^2 + (2\cos\alpha)^2 = 4(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 4$

Zadanie 3
Cięciwa o długości równej promieniowi koła dzieli to koło na dwie części.
Jaki jest stosunek pola większej części figury do mniejszej?

Szkic rozwiązania.
r – promień koła,



$P_1 = \frac{1}{6}\pi r^2 - \frac{1}{4}\sqrt{3}r^2$ (pole wycinka minus pole trójkąta równobocznego),

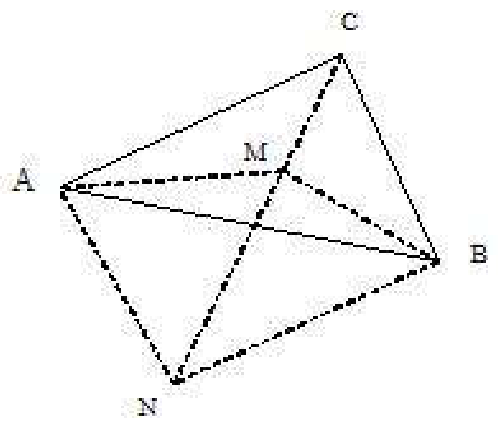
$P_2 = \pi r^2 - P_1$

$$k = \frac{P_2}{P_1} = \frac{\pi r^2 - P_1}{P_1} = \frac{\pi r^2}{\frac{1}{6}\pi r^2 - \frac{1}{4}\sqrt{3}r^2} - 1 = \frac{12\pi}{2\pi - 3\sqrt{3}} - 1,$$

Odp. Szukany stosunek pól ma wartość $k = \frac{12\pi}{2\pi - 3\sqrt{3}} - 1$.

Zadanie 4
Dany jest trójkąt ABC o polu równym 1. Z wierzchołka B opuszczamy prostopadły odcinek BM na dwusieczną kąta C. Oblicz pole trójkąta AMC.

Szkic rozwiązania.



Przez punkt B prowadzimy równoległą do prostej AC do przecięcia z dwusieczną kąta C, punkt przecięcia oznaczamy przez N.
Zatem $|\angle BNC| = |\angle ACN| = |\angle BCN|$

Trójkąt BCN jest równoramienny, stąd MB jest środkową, zatem:
PΔAMC = 0,5 PΔANC = 0,5 PΔABC = 0,5.

II sposób

$$P\Delta AMC = \frac{1}{2}|AC| \cdot |CM| \cdot \sin\left|\angle\frac{C}{2}\right|$$

lecz

$$|CM| = \cos\left|\angle\frac{C}{2}\right|$$

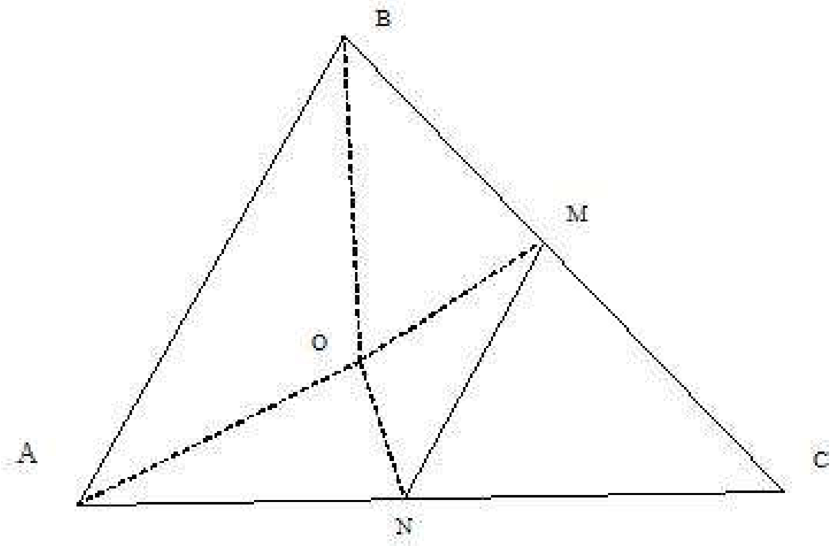
stąd

$$P\Delta AMC = \frac{1}{2}|AC| \cdot |BC| \cdot \sin\left|\angle\frac{C}{2}\right| \cdot \cos\left|\angle\frac{C}{2}\right| = \frac{1}{4}|AC| \cdot |BC| \cdot \sin|\angle C| = \frac{1}{2}P\Delta ABC = \frac{1}{2}$$

Odp. Pole trójkąta AMC jest równe 0,5.

Zadanie 5
W trójkącie ABC punkt O jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt. Punkty M i N są odpowiednio środkami boków BC i AC .
Wiadomo, że kąt AON jest prosty. Udowodnij, że kąt BOM też jest prosty.

Szkic rozwiązania.



MN||AB $\quad |\angle BAO| = |\angle OAN|$

$|\angle BAN| + |\angle MNA| = 180^o$

$\frac{1}{2}|\angle BAN| + \frac{1}{2}|\angle MNA| = 90^o$

Z założenia $\frac{1}{2}|\angle BAN| + \frac{1}{2}|\angle ONA| = 90^o = |\angle AON|$

Stąd $\frac{1}{2}|\angle MNA| = |\angle ONA|$

czyli punkt O leży na dwusiecznej kąta MNA, zatem okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do MN.

Z drugiej strony

$|\angle ABM| + |\angle BMN| = 180^o$

stąd

$\frac{1}{2}|\angle ABM| + \frac{1}{2}|\angle BMN| = 90^o$

oraz

$|\angle OBM| + |\angle BMO| = \frac{1}{2}|\angle ABM| + \frac{1}{2}|\angle BMN|$

stąd

$|\angle OBM| + |\angle BMO| = 90^o$

zatem

$|\angle BOM| = 180^o - (|\angle OBM| + |\angle BMO|) = 90^o$

Zadanie 6

Wyznacz zbiór środków cięciw paraboli $y = 3x^2$ przechodzących przez punkt $P = (0,2)$.

Szkic rozwiązania.

Każda cięciwa paraboli przechodząca przez punkt P ma równanie

$$y = ax + 2 \quad \text{gdzie} \quad a \in R$$

Rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} y = ax + 2 \\ y = 3x^2 \end{cases}$$

otrzymujemy punkty wspólne cięciwy z parabolą:

$$\left(\frac{a - \sqrt{a^2 + 24}}{6}, \frac{a^2 - a\sqrt{a^2 + 24} + 12}{6} \right) \quad \text{oraz} \quad \left(\frac{a + \sqrt{a^2 + 24}}{6}, \frac{a^2 + a\sqrt{a^2 + 24} + 12}{6} \right)$$

Środek cięciwy ma więc współrzędne

$$\left(\frac{a}{6}, \frac{a^2 + 12}{6} \right)$$

Ponieważ

$$\frac{a^2 + 12}{6} = \frac{a^2}{6} + 2 = 6 \cdot \left(\frac{a}{6} \right)^2 + 2$$

więc szukanym zbiorem jest parabola o równaniu

$$y = 6x^2 + 2$$

Zadanie 7

Pierwiastek trójmianu $ax^2 + ax + b$ pomnożono przez pierwiastek trójmianu $ax^2 + bx + b$ i otrzymano 1. Wyznaczyć te pierwiastki.

Szkic rozwiązania.

Niech y i $z = \frac{1}{y}$ będą tymi pierwiastkami,

$y \neq 0$ z założenia.

Wtedy

$ay^2 + ay + b = 0$ i $\frac{a}{y^2} + \frac{b}{y} + b = 0$

stąd

$ay^2 + ay + b = 0$ i $by^2 + by + a = 0$

Dodając te równania stronami otrzymujemy

$(a+b)y^2+(a+b)y+a+b=0$

$(a+b)(y^2+y+1)=0$

Ponieważ drugi czynnik jest zawsze dodatni, to

$a+b=0$ czyli $b=-a$

Po podstawieniu do pierwszego równania mamy

$a(y^2+y-1)=0$

Stąd $y=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$, $z=\dfrac{1}{y}=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

Odp. Szukane pierwiastki to $y=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$, $z=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Zadanie 8

Rozwiąż równanie $x^{x^3}=3$.

Szkic rozwiązania.

Podstawiając $y=x^3$,

otrzymamy równanie $\left(y^{\frac{1}{3}}\right)^y=3$

czyli

$y^{\frac{1}{3}y}=3$

stąd $y^y=3^3$

zatem $y=3$

co oznacza, że $x=\sqrt[3]{3}$

Odp. Szukane rozwiązanie to $x=\sqrt[3]{3}$.

Zadanie 9

Rozwiąż równanie

$$(x+1)^{63}+(x+1)^{62}(x-1)+(x+1)^{61}(x-1)^2+....+(x-1)^{63}=0.$$

Szkic rozwiązania.

Mnożymy obie strony przez $(x+1)-(x-1)=2$

Wtedy rozpatrywane równanie ma postać

$$(x+1)^{64}-(x-1)4=0$$

Co jest równoważne

$$|x+1| = |x-1|$$

Zatem jedynym rozwiązaniem jest x = 0.

Odp. Szukane rozwiązanie to $x = 0$.

Zadanie 10

Rozwiąż nierówność

$$\log_{\log_x 0,5} 4 + \log_{0,5} \log_x 0,5 + 1 \le 0 .$$

Szkic rozwiązania.

Założenia

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \ne 1 \\ \log_x 0,5 > 0 \\ \log_x 0,5 \ne 1 \end{cases} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} x > 0 \\ x \ne 1 \\ 0 < x < 1 \\ x \ne 0,5 \end{cases}$$

Zatem $\qquad x \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right)$

Korzystając ze wzoru na zamianę podstawy logarytmu mamy

$$\log_{\log_x 0,5} 4 = \frac{2}{\log_2 \log_x 0,5}$$

$$\log_{0,5} \log_x 0,5 = -\log_2 \log_x 0,5$$

i rozpatrywana nierówność ma postać

$$\frac{2}{\log_2 \log_x 0,5} - \log_2 \log_x 0,5 + 1 \le 0$$

Podstawiając $\log_2 \log_x 0,5 = t$ otrzymamy

$$\frac{2}{t} - t + 1 \le 0$$

czyli $\dfrac{(t-2)(t+1)}{t} \ge 0$

stąd $t \in [-1,0) \cup [2,\infty)$

Rozpatrujemy dwa przypadki

$$-1 \le \log_2 \log_x 0,5 < 0$$

lub

$$2 \le \log_2 \log_x 0,5$$

czyli równoważnie

$x \in [0{,}25;0{,}5)$

lub

$x \in \left[\frac{1}{\sqrt[4]{2}};1\right)$

Uwzględniając założenia mamy ostatecznie $x \in [0{,}25;0{,}5) \cup \left[\frac{1}{\sqrt[4]{2}};1\right)$.

Odp. Rozwiązaniem nierówności jest zbiór $[0{,}25;0{,}5) \cup \left[\frac{1}{\sqrt[4]{2}};1\right)$.

Zadanie 11

Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4|x-y| + 7 = 0 \\ xy = -2 \end{cases}.$$

Szkic rozwiązania.

Uwzględniając drugie równanie mamy

$$|x-y|^2 = (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 = x^2 + y^2 + 4$$

Zatem pierwsze równanie możemy zapisać jako równanie kwadratowe względem $|x-y|$:

$$|x-y|^2 - 4|x-y| + 3 = 0$$

stąd

$|x-y| = 1$ lub $|x-y| = 3$

Rozpatrując cztery przypadki

(1) $\begin{cases} x - y = 1 \\ xy = -2 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x - y = -1 \\ xy = -2 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x - y = 3 \\ xy = -2 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x - y = -3 \\ xy = -2 \end{cases}$

Otrzymujemy cztery rozwiązania (układy (1) i (2) są sprzeczne):

(3)1 $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$ (3)2 $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$

(4)1 $\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$ (4)2 $\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$

Odp. Równanie ma cztery rozwiązania (2, -1); (1, -2); (-2,1); (-1,2).

Zadanie 12

Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} xy = 15 \\ x + y + x^2 + y^2 = 42 \end{cases}$$

Szkic rozwiązania.

Równanie drugie zapisujemy w postaci

$$x + y + (x + y)^2 - 2xy = 42$$

Podstawiamy $xy = 15$ i oznaczmy $x + y = a$. Otrzymamy równanie:

$$a^2 + a - 72 = 0\,,$$

które ma dwa pierwiastki:

$$a_1 = -9,\ \ a_2 = 8\,.$$

Zatem:

$$\begin{cases} xy = 15 \\ x + y = -9 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} xy = 15 \\ x + y = 8 \end{cases}$$

Rozwiązując te układy równań otrzymamy cztery rozwiązania zadania:

$$x = (-9 - \sqrt{21})/2,\quad y = (-9 + \sqrt{21})/2$$

$$x = (-9 + \sqrt{21})/2,\quad y = (-9 - \sqrt{21})/2$$

$$x = 3,\quad y = 5$$

$$x = 5,\quad y = 3$$

Zadanie 13

Podaj wszystkie pary liczb całkowitych (x, y) spełniające układ nierówności

$$\begin{cases} y - |x^2 - 2x| \geq 0 \\ y + |x - 1| \leq 2 \end{cases}$$

Szkic rozwiązania.

Z pierwszej nierówności

$$y \geq |x^2 - 2x|$$

zatem

$$y \geq 0\,.$$

Z drugiej nierówności

$$y \leq 2\,.$$

Są więc 3 możliwości:

$$y = 0 \quad \text{lub} \quad y = 1 \quad \text{lub} \quad y = 2\,.$$

Jeżeli $y = 0$, to

$$\begin{cases} |x^2 - 2x| = 0 \\ |x-1| \leq 2 \end{cases},$$

Równanie jest spełnione przez liczby całkowite: 0 i 2. Łatwo sprawdzić, że te liczby spełniają też nierówność.
Jeżeli $y = 1$, to

$$\begin{cases} |x^2 - 2x| \leq 1 \\ |x-1| \leq 1 \end{cases}$$

Druga nierówność jest spełniona przez trzy liczby całkowite: 0, 1 i 2. Łatwo sprawdzić, że te liczby spełniają też pierwszą nierówność.
Jeżeli $y = 2$, to

$$\begin{cases} |x^2 - 2x| \leq 2 \\ |x-1| = 0 \end{cases}$$

Równanie jest spełnione przez liczbę 1. Łatwo sprawdzić, że ta liczba spełnia też nierówność.
Zatem jest 6 par spełniających warunki zadania: (0,0), (0,1), (1,1), (1,2), (2,0) i (2,1).

Zadanie 14

Dana jest funkcja

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x & x \geq 0 \\ 4 + x & x < 0 \end{cases}$$

Niech $g(x) = |f(f(x))|$.
Wykonaj wykres funkcji $g(x)$.
Jakie rozwiązania ma równanie $g(x) = 0$?

Szkic rozwiązania.
Zauważmy, że

$$f(x) = 4 - |x|$$

stąd

$$g(x) = \big|4 - |4 - |x|\,|\big|$$

Wykonując kolejno wykresy funkcji

a) $g_1(x) = |x|$

b) $g_2(x) = -|x|$

c) $g_3(x) = 4 - |x|$

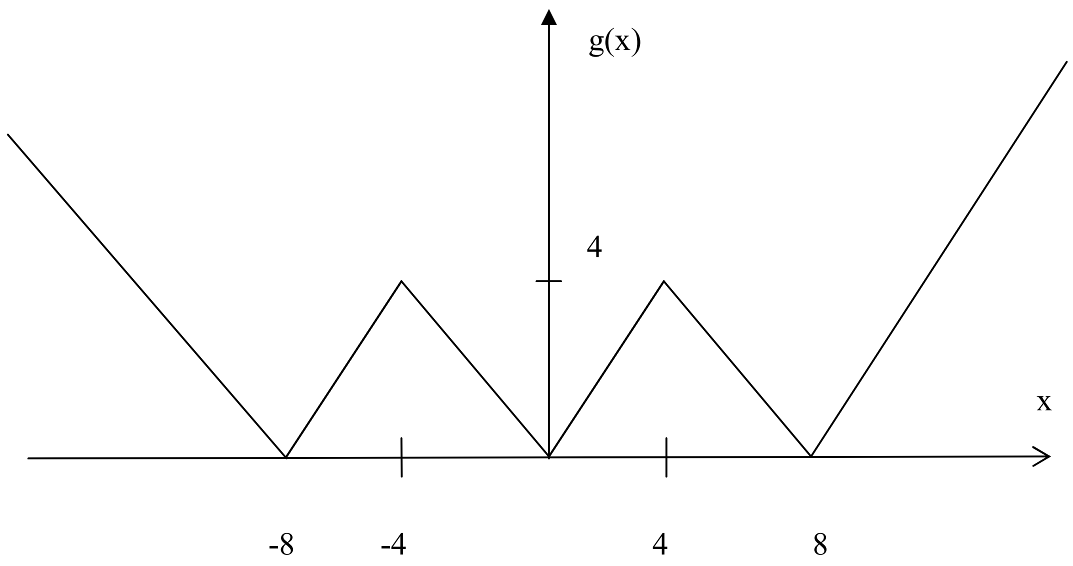
d) $g_4(x) = |4 - |x||$

e) $g_5(x) = -|4 - |x||$

f) $g_6(x) = 4 - |4 - |x||$

g) $g_7(x) = |4 - |4 - |x|||$

otrzymamy wykres



Rozwiązaniem równania $g(x) = 0$ są miejsca zerowe tej funkcji, tzn.
$x_1 = -8$; $x_2 = 0$; $x_3 = 8$.

Zadanie 15

Dana jest taka funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2 + bx + c$, że równanie $f(x) = x$ nie ma rozwiązań rzeczywistych. Udowodnij, że równanie $f(f(x)) = x$ też nie ma rozwiązań rzeczywistych.

Szkic rozwiązania.
Jeśli równanie $f(x) = x$ nie ma rozwiązań, to oznacza, że parabola będąca wykresem funkcji $y = f(x)$ leży powyżej lub poniżej prostej $y = x$.

Pokażemy, że wtedy również wykres funkcji $y = f(f(x))$ leży powyżej lub poniżej prostej $y = x$ co oznacza, że równanie $f(f(x)) = x$ nie ma rozwiązań.
Niech dla każdego x zachodzi $f(x) > x$ ($y = f(x)$ leży powyżej prostej $y = x$).
Podstawiając do tej nierówności $f(x)$ zamiast x otrzymamy

$$f(f(x)) > f(x) > x$$

Co z przechodniości relacji nierówności daje

$$f(f(x)) > x$$

i oznacza, że wykres funkcji $y = f(f(x))$ leży powyżej prostej $y = x$.
Analogicznie można rozpatrzeć drugi przypadek.

Zadanie 16
Dana jest funkcja

$$f(x) = \frac{1}{x-1}, \qquad x \neq 1$$

Dla jakich x jest spełniona nierówność

$$f(f(x)) \geq f(x)$$

Szkic rozwiązania.

$$f(f(x)) = \frac{1}{\frac{1}{x-1} - 1} = \frac{x-1}{2-x}, \qquad x \neq 2$$

Trzeba więc rozwiązać nierówność

$$\frac{x-1}{2-x} \geq \frac{1}{x-1}$$

równoważną nierówności

$$\frac{x^2 - x - 1}{(2-x)(x-1)} \geq 0$$

Stąd dostaniemy odpowiedź:

$$x \in \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}; 1\right) \cup \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}; 2\right)$$

Zadanie 17
W ciągu geometrycznym suma wyrazów pierwszego i drugiego wynosi 108 a suma wyrazów drugiego i trzeciego 135. Wyznacz trzy początkowe wyrazy tego ciągu.

Szkic rozwiązania.
q – iloraz
a_1 –pierwszy wyraz ciągu
Musi być spełniony układ równań

$$\begin{cases} a_1 + a_1 q = 108 \\ a_1 q + a_1 q^2 = 135 \end{cases}$$

czyli

$$\begin{cases} a_1(1+q) = 108 \\ a_1 q(1+q) = 135 \end{cases}$$

stąd

$q = \frac{5}{4}; \qquad a_1 = 48$

oraz $a_2 = 60; \qquad a_3 = 75$

Odp. Trzy początkowe wyrazy ciągu to: 48, 60, 75.

Zadanie 18

Dla jakich *m* liczby *x*, *y*, *z* spełniające układ równań

$$\begin{cases} x + y + z = m + 4 \\ 2x - y + 2z = 2m + 2 \\ 3x + 2y - 3z = 1 - 2m \end{cases}$$

tworzą ciąg geometryczny?

Szkic rozwiązania.

Obie strony równania pierwszego mnożymy przez -2 i dodajemy otrzymane równanie do równania drugiego. Otrzymujemy:

$$y = 2.$$

Wstawiając $y = 2$ do równań pierwszego i trzeciego otrzymamy:

$$x = \frac{m+3}{6}, \quad z = \frac{5m+9}{6}.$$

Aby liczby *x*, *y*, *z* tworzyły ciąg geometryczny musi być

$$xz = y^2$$

czyli

$$5m^2 + 24m + 27 = 144$$

Stąd dostajemy odpowiedź: $m = -7{,}8$ lub $m = 3$.

Zadanie 19

Logarytmy dziesiętne trzech liczb tworzą ciąg arytmetyczny rosnący. Suma odwrotności tych liczb jest równa 39, a suma kwadratów ich odwrotności jest równa 819. Co to za liczby?

Szkic rozwiązania.

Oznaczmy szukane liczby: *x*, *y*, *z*.

Z warunków zadania wynika układ równań:

$$\begin{cases} \log y = (\log x + \log z)/2 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 39 \\ \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{1}{z^2} = 819 \end{cases}$$

Niech $a = \frac{1}{x},\ b = \frac{1}{y},\ c = \frac{1}{z}$. Wtedy:

$$\begin{cases} b^2 = ac \\ a + b + c = 39 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 819 \end{cases}$$

Stąd

$$a = 3,\ b = 9,\ c = 27 \quad \text{lub} \quad a = 27\ b = 9,\ c = 3$$

a w konsekwencji

$$x = 1/3,\ y = 1/9,\ z = 1/27 \quad \text{lub} \quad x = 1/27,\ y = 1/9,\ z = 1/3$$

Ciąg x, y, z ma być rosnący, zatem odpowiedź:

$$x = 1/27,\ y = 1/9,\ z = 1/3$$

Zadanie 20

Wyznacz wszystkie liczby naturalne n dla których liczba $n^3 + 1$ jest potęgą liczby 3. Przyjmujemy, że 0 nie jest liczbą naturalną.

Szkic rozwiązania.
Szukamy liczb naturalnych n spełniających równość

$$n^3 + 1 = 3^k$$

dla pewnej liczby naturalnej k.
lecz

$$n^3 + 1 = (n+1)(n^2 - n + 1)$$

zatem

$$n + 1 = 3^r; \quad n^2 - n + 1 = 3^s \qquad r, s \in N.$$

Stąd n nie dzieli się przez 3 (bo daje resztę 1).
Zauważmy, że

$$3n = (n+1)^2 - (n^2 - n + 1) = 3^{2r} - 3^s$$

stąd

$$n = 3^{2r-1} - 3^{s-1}$$

co jest możliwe tylko wtedy, gdy s = 1 (bo n nie dzieli się przez 3)
zatem

$$n^2 - n + 1 = 3$$

czyli $n^2 - n - 2 = 0$

stąd

$n_1 = 2; \quad n_2 = -1$

Drugi pierwiastek odrzucamy, bo nie jest liczbą naturalną.

Odp. Tylko liczba 2 spełnia przedstawiony warunek.

Zadanie 21

Gdy w pewnej liczbie naturalnej zmieniono kolejność cyfr to otrzymano liczbę trzy razy mniejszą od danej liczby.

Udowodnić, że tak otrzymana liczba dzieli się przez 27.

Szkic rozwiązania.

a – dana liczba,

$\underline{a}$ – liczba uzyskana po przestawieniu cyfr,

Zatem

(*) a = 3$\underline{a}$

czyli a jest podzielna przez 3, stąd suma jej cyfr jest podzielna przez 3.

Ponieważ przestawianie cyfr nie zmienia ich sumy, to liczba $\underline{a}$ też jest podzielna przez 3, czyli można ją przedstawić w postaci

$$\underline{a} = 3n$$

gdzie *n* jest pewną liczbą naturalną

i po podstawieniu do (*) otrzymamy

$$a = 3(3n) = 9n$$

co oznacza, że a jest podzielna przez 9.

Zatem suma jej cyfr jest podzielna przez 9 i liczba $\underline{a}$ też jest podzielna przez 9, czyli można ją przedstawić w postaci

$$\underline{a} = 9m$$

gdzie *m* jest pewną liczbą naturalną

i po podstawieniu do (*) otrzymamy

$$a = 3(9m) = 27m$$

co oznacza, że a jest podzielna przez 27.

Co należało wykazać.

Zadanie 22

Wyznacz takie liczby naturalne x, y, że $x^2 + x + 1$ jest potęgą liczby y o wykładniku naturalnym, oraz $y^2 + y + 1$ jest potęgą liczby x o wykładniku naturalnym.

Szkic rozwiązania.

1) Jeśli $x = y$ to $x^2 + x + 1 = x^n$
   zatem prawa strona dzieli się przez x więc i lewa strona powinna dzielić się przez x.
   Jest to możliwe tylko dla $x = 1$, lecz to prowadzi do sprzeczności $3 = 1$.

2) Jeśli $x \neq y$ to możemy założyć, że y < x.
   Wtedy $x^2 > y^2 + y + 1$, stąd x może być tylko w pierwszej potędze, tzn. $y^2 + y + 1 = x$,
   wtedy
   $\left(y^2 + y + 1\right)^2 + \left(y^2 + y + 1\right) + 1 = y^m$
   stąd
   $y^4 + 2y^3 + y^2 + 3y + 3 = y^m$
   Prawa strona dzieli się przez y więc i lewa strona powinna dzielić się przez y.
   Zatem y jest dzielnikiem liczby 3, lecz ani $y = 3$, ani $y = 1$ nie spełnia tej równości.

Odp. Żadna para liczb naturalnych nie spełnia warunków zadania.

Zadanie 23
Podaj wszystkie pary liczb całkowitych (x, y) spełniające równanie

$$(x + y - 2)(x - y - 2) - 5 = 0$$

Szkic rozwiązania.
Mamy:

$$(x + y - 2)(x - y - 2) = 5$$

Oba czynniki są liczbami całkowitymi, więc są 4 możliwości:

$$\begin{cases} x + y - 2 = -1 \\ x - y - 2 = -5 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x + y - 2 = -5 \\ x - y - 2 = -1 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x + y - 2 = 1 \\ x - y - 2 = 5 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x + y - 2 = 5 \\ x - y - 2 = 1 \end{cases}$$

Rozwiązując powyższe układy równań otrzymamy odpowiedź. Szukane pary to $(-1, 2),\ (-1, -2),\ (3, 0),\ (3, 4)$.

Zadanie 24
Iloczyn dwóch liczb naturalnych jest równy 2700, a ich największy wspólny dzielnik to 6. Co to za liczby?

Szkic rozwiązania.
Oznaczmy szukane liczby: x oraz y.
Zapiszmy:

$$x = 6m, \quad y = 6n \quad \text{gdzie} \quad m, n \in N$$

Zatem

$$6m \cdot 6n = 2700$$

Stąd

$$m \cdot n = 75$$

Jest 6 możliwości:

$$m = 1,\ n = 75 \quad \text{lub} \quad m = 3,\ n = 25 \quad \text{lub} \quad m = 5,\ n = 15 \quad \text{lub}$$

$$m = 15,\ n = 5 \quad \text{lub} \quad m = 25,\ n = 3 \quad \text{lub} \quad m = 75,\ n = 1$$

Liczby m oraz n nie mogą mieć wspólnego dzielnika większego niż 1, gdyż wtedy liczby x oraz y miałyby wspólny dzielnik większy niż 6. Zatem przypadki

$$m = 5,\ n = 15 \quad \text{oraz} \quad m = 15,\ n = 5$$

odpadają. Z pozostałych przypadków wynika, że szukane liczby to 6 i 450 lub 28 i 150.

Zadanie 25

Suma dwóch liczb naturalnych jest równa 504, a największy wspólny dzielnik tych liczb to 36. Co to za liczby?

Szkic rozwiązania.
Oznaczmy szukane liczby: x oraz y.
Zapiszmy:

$$x = 36m, \quad y = 36n \quad \text{gdzie} \quad m, n \in N$$

Zatem

$$36m + 36n = 504$$

Stąd

$$m + n = 14$$

Liczby m oraz n nie mogą mieć wspólnego dzielnika większego niż 1, gdyż wtedy liczby x oraz y miałyby wspólny dzielnik większy niż 36. Zatem możliwe przypadki to:

$$m = 1,\ n = 13 \quad \text{lub} \quad m = 3,\ n = 11 \quad \text{lub} \quad m = 5,\ n = 9 \quad \text{lub}$$

$$m = 9,\ n = 5 \quad \text{lub} \quad m = 11,\ n = 3 \quad \text{lub} \quad m = 13,\ n = 1$$

Stąd znajdujemy 3 pary liczb spełniających warunki zadania:
36 i 468 lub 108 i 396 lub 180 i 324.

Zadanie 26

Iloczyn trzech liczb pierwszych jest 5 razy większy od sumy tych liczb. Co to za liczby?

Szkic rozwiązania.
Oznaczmy szukane liczby: x, y oraz z.
Zatem

$$xyz = 5(x + y + z)$$

Prawa strona równania jest podzielna przez 5, więc lewa też. Jest ona iloczynem liczb pierwszych, więc jedna z liczb x, y, z jest równa 5. Załóżmy, że $x = 5$. Wtedy:

$$5yz = 5(5 + y + z)$$

Z tego równania wyznaczamy y:

$$y = 1 + \frac{6}{z - 1}$$

$\dfrac{6}{z-1}$ musi być liczbą pierwszą, zatem

$$z = 2 \quad \text{lub} \quad z = 3 \quad \text{lub} \quad z = 7$$

Jeżeli $z = 2$, to $y = 7$, jeżeli $z = 3$, to $y = 4$ - to nie jest liczba pierwsza, a jeżeli $z = 7$, to $y = 2$.

Odpowiedź: Te liczby to 2, 5 i 7.

Zadanie 27

Okno ma kształt prostokąta na którego górnej podstawie dobudowano półkole. Obwód okna wynosi 5m. Jaka powinna być szerokość okna, by jego powierzchnia była największa?

Szkic rozwiązania.

Oznaczmy:

x - szerokość okna,

y - wysokość części prostokątnej.

Zatem:

$$x + 2y + \pi x / 2 = 5 \qquad (1)$$

Powierzchnia okna

$$P = xy + \pi x^2 / 8 \qquad (2)$$

przy czym $x \in (0;\ 10/(2+\pi))$.

Wyznaczając z (1) y i wstawiając do (2) dostaniemy:

$$P = \left(-\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\right)x^2 + \frac{5}{2}x$$

Największa wartość pola P jest przyjmowana dla $x = 10/(4+\pi)$.

Zadanie 28

Dysponujemy taką liczbą jednakowych monet, że można nimi wszystkimi wypełnić trójkąt równoboczny lub kwadrat. Liczba monet w boku kwadratu jest o 14 mniejsza niż liczba monet w boku trójkąta. Iloma monetami dysponujemy?

Szkic rozwiązania.

W trójkącie:

w pierwszym rzędzie jest 1 moneta

w drugim rzędzie są 2 monety

....

w ostatnim *k*-tym rzędzie jest *k* monet.

Łączna liczba monet:

$$1 + 2 + ... + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

Oznaczmy liczbę rzędów w kwadracie literą *n*. Liczba monet w kwadracie to n^2.

Z warunków zadania mamy:

$$\begin{cases} n = k - 14 \\ n^2 = \dfrac{k(k+1)}{2} \end{cases}$$

Ten układ ma 2 rozwiązania:

$$k = 8,\ n = -6 \quad \text{lub} \quad k = 49,\ n = 35$$

Liczba monet nie może być ujemna, zatem $k = 49,\ n = 35$.
Stąd obliczamy, że monet jest 1225.

Zadanie 29

Przejazd łódką 20 km w dół rzeki i z powrotem trwał 7 godzin. Równocześnie z łódką z tego samego miejsca wypłynęła tratwa, którą spotkano w drodze powrotnej w odległości 12 km od miejsca wyruszenia. Oblicz prędkość wody.

Szkic rozwiązania.
Oznaczmy:
    x - prędkość wody w km/h,
    y - prędkość łódki względem płynącej wody.
Wówczas:
    $x + y$ - prędkość łódki gdy płynie z prądem,
    $y - x$ - prędkość łódki gdy płynie pod prąd.

Czas płynięcia łódką w dół rzeki: $\dfrac{20}{x+y}$.

Czas płynięcia łódką 20 km w górę rzeki: $\dfrac{20}{y-x}$.

Czas płynięcia łódką 8 km w górę rzeki: $\dfrac{8}{y-x}$.

Czas płynięcia 12 km tratwą: $\dfrac{12}{x}$.

Zatem:

$$\begin{cases} \dfrac{20}{x+y} + \dfrac{20}{y-x} = 7 \\ \dfrac{20}{x+y} + \dfrac{8}{y-x} = \dfrac{12}{x} \end{cases}$$

Rozwiązując powyższy układ równań otrzymamy: $x = 3,\ y = 7$.
Prędkość wody wynosi 3 km/h.

Zadanie 30

Na drodze 36m przednie koło ciągnika wykonało o 6 obrotów więcej niż tylne. Gdyby obwód każdego koła zwiększyć o 1m, to na tej samej drodze przednie koło wykonałoby o 3 obroty więcej niż koło tylne. Oblicz obwody kół.

Szkic rozwiązania.
Oznaczmy:

x - obwód przedniego koła,
y - obwód tylnego koła ($y > x$).

Z warunków zadania mamy:

$$\begin{cases} \dfrac{36}{x} = \dfrac{36}{y} + 6 \\ \dfrac{36}{x+1} = \dfrac{36}{y+1} + 3 \end{cases}$$

Stąd:

$$\begin{cases} xy + 6x - 6y = 0 \\ xy + 13x - 11y + 1 = 0 \end{cases}$$

Odejmując od równania pierwszego równanie drugie otrzymamy:

$$y = 1{,}4x + 0{,}2$$

Podstawiając wyznaczony y do równania pierwszego (w ostatnim układzie) dostajemy:

$$7x^2 - 11x - 6 = 0$$

Jednym z pierwiastków tego równania jest $-3/7$. Ten pierwiastek odrzucamy (obwód koła nie może być liczbą ujemną). Drugim pierwiastkiem jest $x = 2$. Wtedy $y = 3$. Są to obwody kół w metrach.

Zadanie 31

Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = \binom{n}{2}$ dla $n = 2,3,4,...$ Oblicz granicę:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_{n+3}}$$

Szkic rozwiązania
Obliczamy:

$$a_{2n} = \binom{2n}{2} = \frac{(2n)!}{2!(2n-2)!} = \frac{(2n-1)\,2n}{2} = 4n^2 + 2n$$

$$a_{n+3} = \binom{n+3}{2} = \frac{(n+3)!}{2!(n+1)!} = \frac{(n+2)(n+3)}{2} = \frac{n^2+5n+6}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}}{a_{n+3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{8n^2+4n}{n^2+5n+6}=\lim_{n\to\infty}\frac{8n^2+4n}{n^2+5n+6}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(8+\frac{4}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{5}{n}+\frac{6}{n^2}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{8+\frac{4}{n}}{1+\frac{5}{n}+\frac{6}{n^2}}=8$$

Zadanie 32

Dla jakich wartości a, b funkcja

$$f(x)=ax^3-5x^2+bx$$

ma ekstrema w punktach $x_1=\frac{1}{3}$ oraz $x_2=\frac{1}{2}$? Określ rodzaj tych ekstremów.

Szkic rozwiązania

Obliczamy pochodną: $f'(x)=3ax^2-10x+b$ i rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} f'\left(\frac{1}{3}\right)=0 \\ f'\left(\frac{1}{2}\right)=0 \end{cases}$$

czyli

$$\begin{cases} \frac{1}{3}a-\frac{10}{3}+b=0 \\ \frac{3}{4}a-5+b=0 \end{cases}$$

Stąd obliczamy: $a=4,\ b=2$.

Zatem pochodna jest równa $f'(x)=12x^2-10x+2$. Z wykresu pochodnej odczytujemy, że w punkcie $x_1=\frac{1}{3}$ pochodna zmienia znak z „+" na „ -" , zatem funkcja ma w tym punkcie maksimum, zaś w punkcie $x_2=\frac{1}{2}$ pochodna zmienia znak z „-" na „+" , zatem funkcja ma w tym punkcie minimum.

Zadanie 33

Na wykresie funkcji $f(x)=x^2+4$ znajdź taki punkt, że styczna do wykresu w tym punkcie przechodzi przez początek układu współrzędnych.

Szkic rozwiązania

Oznaczmy poszukiwany punkt: $P=(t,\ t^2+4)$.

Obliczamy pochodną danej funkcji: $f'(x)=2x$.

Współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji f w punkcie P jest równy wartości pochodnej dla $x=t$. Styczna ma przechodzić przez punkt (0, 0), zatem ma ona równanie

$$y=2tx \qquad (1)$$

Punkt P należy do stycznej, zatem podstawiamy do równania (1) jego współrzędne:
$x = t,\ y = t^2 + 4$ i otrzymujemy: $t^2 + 4 = 2t^2$, stąd $t_1 = -2,\ t_2 = 2$.
Odpowiedź. Są dwa takie punkty: $P_1 = (-2,8)$ oraz $P_2 = (2,8)$.

Zadanie 34

Wyznaczyć największy element ciągu o wyrazach $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n + 10000}$; n = 1, 2, ...

Szkic rozwiązania
Podstawiamy n = x i traktujemy wyrazy naszego ciągu jako wartości funkcji

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x + 10000}$$

dla x = n, czyli $a_n = f(n)$; n = 1, 2, ...
Jeśli $f'(x_0) = 0$, $m \le x_0 < m + 1$ oraz ciąg (a_n) ma największy element to jest on równy największej z liczb $a_1,\ a_m,\ a_{m+1}$.

W naszym przypadku $f'(x) = \dfrac{10000 - x}{2\sqrt{x}(x + 10000)^2}$, $f'(x) = 0$ dla x = 10000.

$a_1 = \dfrac{1}{10001}$; $a_{10000} = \dfrac{50}{10000}$
zatem największy element ciągu jest równy 0,005.
Odpowiedź. Największy element ciągu jest równy 0,005.

Zadanie 35
Na okręgu umieszczono punkty czerwone i zielone, razem 111 punktów. Wykazać, że wśród tych punktów są co najmniej dwa jednakowego koloru:
a) znajdujące się obok siebie,
b) rozdzielone dokładnie przez dwa punkty.

Szkic rozwiązania
Numerujemy kolejne punkty.
a) gdyby dowolne dwa sąsiednie punkty miały różne kolory to byłaby ich liczba parzysta, lecz liczba rozpatrywanych punktów jest nieparzysta.
b) pozostawiamy na okręgu punkty o numerach 1, 4, 7, ..., 111 (pozostałe wykreślamy). Jest ich 37 i z punktu a) wynika, że są wśród nich co najmniej dwa punkty jednakowego koloru stojące obok siebie, lecz przed wykreśleniem były one rozdzielone dwoma punktami.

Zadanie 36
Iloraz liczb 200513, 200631, 200749 przez pewną liczbę daje taką samą resztę.
Wyznacz tą liczbę.

Szkic rozwiązania
Oznaczmy szukaną liczbę przez x.
Mamy zależności
$200513 = xa + r$
$200631 = xb + r$
$200749 = xc + r$

odejmując powyższe równości stronami otrzymamy

$200631 - 200513 = 118 = x(b - a)$,

$200749 - 200513 = 236 = x(c - a)$

$200749 - 200631 = 118 = x(c - b)$

lecz

$118 = 2 \cdot 59$; $236 = 2 \cdot 2 \cdot 59$,

zatem $x = 59$ lub $x = 2$.

Odpowiedź. Szukana liczba jest równa 2 lub 59.

ZADANIA Z KONKURSU 2009-2010

ETAP 1

Przy każdym pytaniu są podane 4 odpowiedzi, z których dokładnie jedna jest prawidłowa.

1. Ile wynosi odległość początku układu współrzędnych od prostej

$$y = \frac{3}{4}x + 5 \qquad ?$$

I 3 **II** 4 **III** 5 **IV** 8

2. Który z poniższych wzorów jest prawdziwy dla dowolnych zdarzeń losowych A i B ?

I $P(A \cup B) \neq P(A)$

II $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

III $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

IV $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$

3. W ciągu (a_n) wyraz a_n wynosi $\frac{2n+1}{3n+4}$. Ile wynosi wyraz a_{n-1} dla $n > 1$?

I $\frac{2n-1}{3n+1}$ **II** $\frac{2n}{3n+3}$ **III** $\frac{-n-3}{3n+4}$ **IV** $\frac{2n}{3n+4}$

4. Dane są równania dwóch okręgów

$$x^2 + y^2 = 9 \qquad (x-3)^2 + (y-4)^2 = 3$$

Jakie jest wzajemne położenie tych okręgów ?

I Okręgi są styczne zewnętrznie

II Okręgi przecinają się w dwóch punktach

III Okręgi nie mają punktów wspólnych

IV Okręgi są styczne wewnętrznie

5. Kula o promieniu R ma tę samą objętość, co sześcian o przekątnej $\sqrt{3}$. Ile wynosi R ?

I $\sqrt[3]{\frac{4}{3\pi}}$ **II** $\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}}$ **III** $\sqrt[3]{\frac{3\pi}{4}}$ **IV** $\sqrt[3]{\frac{4\pi}{3}}$

6. Dany jest ciąg geometryczny $a_n = 4 \cdot 3^{n-1}$ $n = 1, 2, 3, \ldots$

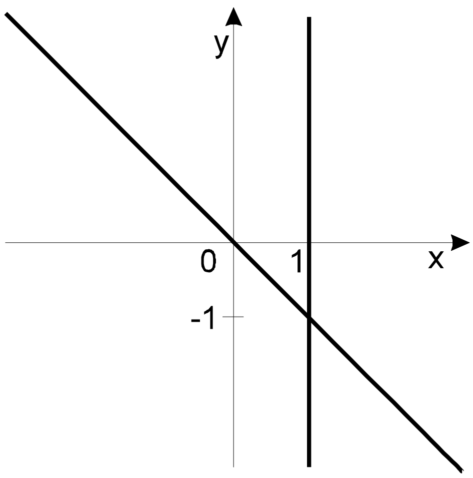
Ile wynosi suma n początkowych wyrazów tego ciągu ?

I $3^n - 1$ **II** $2(3^n - 1)$ **III** 3^n **IV** $0,5 \cdot 3^{n-1}$

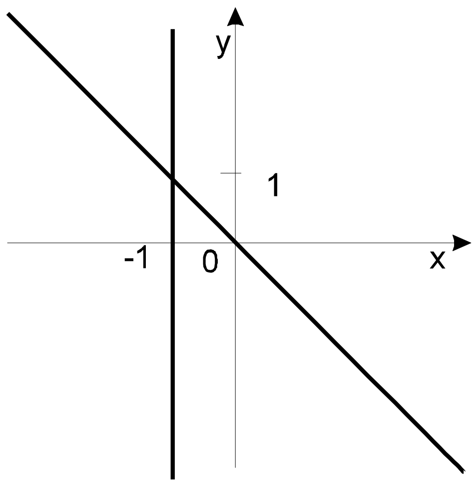
7. Który z poniższych rysunków przedstawia zbiór wszystkich rozwiązań równania

$$x^2 - x - xy + y = 0 \qquad ?$$

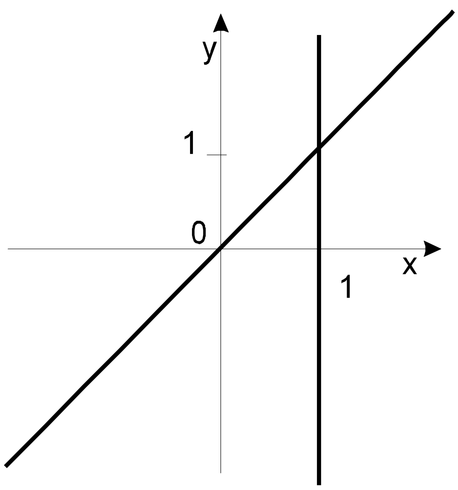
I



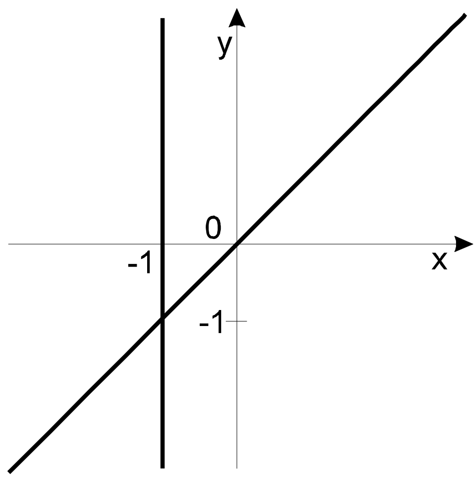
II



III



IV



8. Cena towaru wynosiła p. Cenę tę podniesiono o 8% , a następnie nową cenę obniżono o 10% .
Ile wynosi cena towaru po tych zmianach ?

I $p-2$ **II** $p-0,02$ **III** $0,98p$ **IV** $0,972p$

9. Jaką wartość ma wyrażenie

$$4^{\log_2 7} \quad ?$$

I 14 **II** 49 **III** 7 **IV** 128

10. Dany jest zbiór

$$Z = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$$

Ile jest 6-elementowych podzbiorów tego zbioru, do których należą dokładnie dwie liczby nieparzyste ?

I 15 **II** 75 **III** 30 **IV** 36

11. Dla jakich $x \in (0; 2\pi)$ jest spełniona nierówność

$$\sin x > \frac{1}{2} \quad ?$$

I $\left(\frac{\pi}{6}; 2\pi\right)$ **II** $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right)$ **III** $\left(\frac{\pi}{6}; \pi\right)$ **IV** $\left(0; \frac{\pi}{6}\right)$

12. Wykres funkcji $y = x^2 + 8x + 17$ jest obrazem wykresu funkcji $y = x^2$ w przesunięciu o wektor $\vec{w}$.

Jakie współrzędne ma wektor $\vec{w}$?

I $[-4, 1]$ **II** $[4, -1]$ **III** $[4, 1]$ **IV** $[-4, -1]$

13. Które z poniższych równań jest równaniem okręgu ?

I $x^2 + y^2 + 4 = 0$
II $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 13 = 0$
III $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 15 = 0$
IV $x^2 + y^2 - 2x = 0$

14. Pierwiastki równania kwadratowego

$$x^2 + px - q^2 = 0, \qquad q \neq 0$$

oznaczamy: x_1 i x_2 .

Ile wynosi $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2$?

I $p^2 + 2q^2$ **II** $\frac{p^2 + 2q^2}{q^2}$ **III** $p^2 + 4q^2$ **IV** pq^2

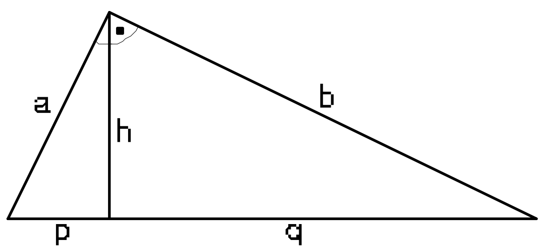
15. Zbiór A ma 12 elementów, zbiór B ma 9 elementów, zbiór $A \cup B$ ma 17 elementów.
Ile elementów należy do zbioru $A - B$?

I 3 **II** 5 **III** 4 **IV** 8

16. Krawędź sześcianu ma długość 1. Jaką długość ma odcinek łączący wierzchołek sześcianu ze środkiem ściany sześcianu, do której nie należy ten wierzchołek ?

I $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **II** $\sqrt{3}$ **III** $\frac{\sqrt{6}}{2}$ **IV** $\sqrt{2}$

17. W trójkącie prostokątnym na poniższym rysunku



mamy dane $a = 3$, $b = 4$. Ile wynosi p, q i h ?

I $p = 1{,}8$, $q = 3{,}2$, $h = 2{,}4$
II $p = 1{,}8$, $q = 3{,}2$, $h = 2{,}8$
III $p = 1{,}6$, $q = 3{,}4$, $h = 2{,}4$
IV $p = 1{,}6$, $q = 3{,}4$, $h = 2{,}8$

18. Zbiór A jest zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności

$$\frac{x-2}{x+3} \geq 0 \ .$$

Zbiór B jest zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności

$$(x-2)(x+3) \geq 0 \ .$$

Które z poniższych zdań jest prawdziwe ?

I $A = B$

II $B - A$ jest zbiorem jednoelementowym

III $A \cap B$ jest zbiorem jednoelementowym

IV $A \cap B = B$

19. Które z poniższych równań ma dokładnie dwa różne pierwiastki rzeczywiste ?

I $x^4 + 6x^2 + 9 = 0$

II $x^4 - 4x^2 - 4 = 0$

III $x^4 - 4x^2 + 2 = 0$

IV $x^4 - 3x^2 + 4 = 0$

20. Która z poniższych figur ma dokładnie dwie osie symetrii ?

I Odcinek

II Kwadrat

III Punkt

IV Dwie proste równoległe

ODPOWIEDZI

Prawidłowe odpowiedzi zaznaczono znakiem **x**.

Numer pytania	Odpowiedź			
	I	II	III	IV
1		x		
2			x	
3	x			
4			x	
5		x		
6		x		
7			x	
8				x
9		x		
10		x		
11		x		
12	x			
13				x
14				x
15				x
16			x	
17	x			
18		x		
19		x		
20	x			

ETAP 2 - FINAŁ

Zadanie 1.

Wyznacz iloraz malejącego ciągu geometrycznego, jeśli suma wyrazów pierwszego, drugiego i trzeciego wynosi -7 (minus siedem), a wyraz piąty jest o 14 mniejszy od wyrazu drugiego.

Zadanie 2.

Pole trapezu ABCD o podstawach AD i BC (AD > BC) jest równe 48.
Punkt O jest punktem przecięcia przekątnych trapezu.
Pole trójkąta AOB jest równe 9.
Wyznaczyć stosunek długości AD i BC podstaw trapezu.

TEST

Po każdym pytaniu są podane 4 odpowiedzi oznaczone cyframi rzymskimi I, II, III i IV.
Z tych odpowiedzi jedna, dwie, trzy lub cztery są prawdziwe.

1. Zakładamy, że zdarzenia A i B wykluczają się. Które z poniższych zdań jest wnioskiem z tego założenia ?

I $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
II $P(A - B) = P(A) - P(B)$
III $P(A - B) = P(A)$
IV $P(A) \leq P(B)$

2. Które z poniższych równań ma dokładnie dwa różne pierwiastki rzeczywiste ?

I $x^4 - 6x^2 + 9 = 0$
II $x^4 - 4x^2 - 4 = 0$
III $x^4 - 4x^2 + 2 = 0$
IV $x^4 - 3x^2 + 4 = 0$

3. Dana jest funkcja $f(x) = x^2 - 4x + 3, \quad x \in R$

Które z poniższych zdań jest prawdziwe ?

I Dla każdego x, $f(x) > 0$

II Istnieje x taki, że $f(x) = 1$

III Dla każdego $x < 0$, $f(x) > 0$

IV Dla każdego $x > 0$, $f(x) > 0$

4. Która z poniższych liczb jest liczbą wymierną ?

I $(5 - 3\sqrt{7})^2 + (5 + 3\sqrt{7})^2$

II 0,7252525...

III $\left|1 - \sqrt{2}\right| - \sqrt{2}$

IV 0

5. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{|x|}{x}$. Jakie własności ma ta funkcja ?

I Funkcja jest parzysta

II Funkcja jest nieparzysta

III Funkcja jest okresowa

IV Funkcja jest ograniczona

6. Która z poniższych figur ma dokładnie dwie osie symetrii ?

I Odcinek

II Kwadrat

III Dwa różne punkty

IV Dwie proste równoległe

7. Które z poniższych zdań są prawdziwe ?

I Symetralne boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie, który jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie.

II Punkt, w którym przecinają się środkowe trójkąta dzieli każdą ze środkowych w stosunku 2 : 1.

III W czworokąt można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy miar przeciwległych kątów czworokąta są równe.

IV Kąt wpisany w okrąg ma miarę dwa razy mniejszą, niż kąt środkowy oparty na tym samym łuku.

8. Dana jest nierówność $\frac{x-2}{x+3} < 0$.

Która z poniższych nierówności jest równoważna danej nierówności ?

I $x-2<0$ **II** $(x-2)(x+3)<0$

III $x-2 \le 0$ **IV** $(x-2)(x+3) \le 0$

9. Która z poniższych funkcji spełnia warunek

$$f(x+y) \le f(x)+f(y)$$

dla wszystkich $x, y \in R$?

I $f(x)=2x-1$ **II** $f(x)=2x+1$

III $f(x)=|x|$ **IV** $f(x)=x^2$

10. Zbiory A i B są dowolnymi podzbiorami niepustego zbioru Ω. Symbol A' oznacza uzupełnienie zbioru A do zbioru Ω, czyli $A' = \Omega - A$.

Które z poniższych równości są prawdziwe ?

I $(A \cup B)' = A' \cap B'$ **II** $(A \cap B)' = A' \cup B'$

III $(A' \cup B')' = A \cup B$ **IV** $A - B = A \cap B'$

ODPOWIEDZI

Prawidłowe odpowiedzi zaznaczono znakiem **X**.

Numer pytania	Odpowiedź			
	I	II	III	IV
1			X	
2	X	X		
3		X	X	
4	X	X	X	X
5		X		X
6	X		X	
7	X	X		X
8		X		
9		X	X	
10	X	X		X

ZADANIA Z KONKURSU 2010-2011

ETAP 1

Przy każdym pytaniu są podane 4 odpowiedzi, z których dokładnie jedna jest prawidłowa.

1. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, $x \in <-1;2>$. Który z podanych zbiorów jest zbiorem wartości tej funkcji:

I $<0{,}2;\ 0{,}5>$ **II** $<0{,}2;\ \infty)$

III $<0{,}2;\ 1>$ **IV** $(0;\ 1>$

2. Ile przekątnych ma 20-kąt wypukły?

I 170 **II** 180

III 340 **IV** 360

3. Ile podzbiorów ma zbiór $\{a, \{a\}, \{\{a\}\}\}$

I 3 **II** 4

III 6 **IV** 8

4. Która z poniższych liczb jest najmniejsza

I $0{,}02^{0{,}03}$ **II** $0{,}03^{0{,}02}$

III $\log_{0{,}98} 1{,}01$ **IV** $\sin 0{,}02$

5. Która z poniższych funkcji nie jest funkcją liniową

I $f(x) = (x-1)^2 - (x+1)^2$ **II** $f(x) = \frac{x}{|x|}$

III $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$ **IV** $f(x) = \frac{x^3+x}{x^2+1}$

6. Funkcja $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}\left(x^2 - 2x - 3\right)$ jest malejąca w przedziale:

I $(-\infty;\ -1)$ **II** $[1;\ \infty)$

III $(-\infty;\ 1)$ **IV** $(3;\ \infty)$

7. Funkcja $f(x) = \frac{x}{1-2^x} - \frac{x}{2}$:

I jest parzysta i nie jest nieparzysta **II** jest nieparzysta i nie jest parzysta

III jest parzysta i nieparzysta **IV** nie jest parzysta i nie jest nieparzysta

8. Wiadomo, że nierówność $\sqrt{x-3}+\sqrt{6-x} \geq k \quad (k \in R)$ ma rozwiązanie.
Maksymalna wartość k wynosi:

I $\sqrt{6}-\sqrt{3}$ **II** $\sqrt{3}$

III $\sqrt{6}+\sqrt{3}$ **IV** $\sqrt{6}$

9. Dane są dwa zbiory $A=\{a_1,.....,a_6\}$, $B=\{b_1,.....,b_3\}$, których elementami są liczby rzeczywiste. Określono odwzorowanie $f: A \to B$, takie, że każdy element zbioru *B* należy do zbioru wartości tego odwzorowania oraz $f(a_1) \leq f(a_2) \leq .... \leq f(a_6)$.
Liczba takich odwzorowań wynosi:

I 3^6 **II** $6 \cdot 3$ **III** $\binom{6}{3}$ **IV** $\binom{5}{2}$

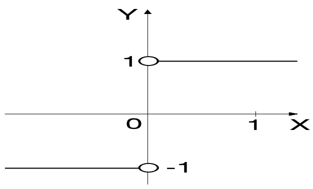
10. Niech liczby rzeczywiste x, y spełniają równość: $(x+5)^2+(y-12)^2=14^2$.
Wtedy wyrażenie x^2+y^2 ma najmniejszą wartość równą:

I 2 **II** 1 **III** $\sqrt{3}$ **IV** $\sqrt{2}$

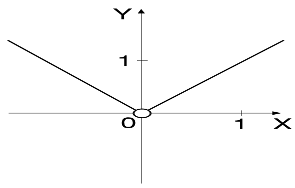
11. Który z poniższych rysunków przedstawia wykres funkcji

$$f(x)=x|x|$$

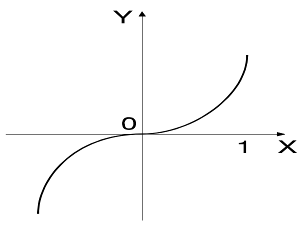
I



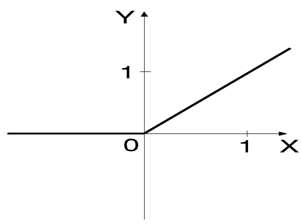
II



III



IV



12. Ile rozwiązań ma równanie $2|x-1|=x$

I Nie ma rozwiązań.

II Ma dokładnie jedno rozwiązanie.

III Ma nieskończenie wiele rozwiązań.

IV Ma dokładnie dwa rozwiązania.

13. Wykres funkcji $f(x)=2^x$ przesuwamy o wektor [1, 0], po czym otrzymaną krzywą przekształcamy przez symetrię względem osi Ox. Jakiej funkcji wykres otrzymamy?

I $g(x)=-2^{x-1}$ **II** $g(x)=2^{-x-1}$ **III** $g(x)=-2^x-1$ **IV** $g(x)=2^{-x}+1$

14. Który z poniższych wielomianów jest dzielnikiem wielomianu

$$W(x)=x^3-2x^2-5x+6$$

I $P(x)=(x-1)(x-2)$ **II** $P(x)=(x-1)(x+2)$

III $P(x)=(x+1)(x-2)$ **IV** $P(x)=(x+1)(x+2)$

15. Dla jakiej wartości m proste $y=x+3$ i $mx-3y+6=0$ są równoległe?

I 1 **II** 3 **III** -1 **IV** -3

16. Która z poniższych brył ma największą objętość?

I Kula o promieniu 3.
II Walec o promieniu podstawy 2 i wysokości 8.
III Sześcian o przekątnej $5\sqrt{3}$.
IV Stożek o wysokości 11 i tworzącej $\sqrt{130}$.

17. Gdzie znajduje się środek okręgu wpisanego w trójkąt?

I W punkcie, w którym przecinają się środkowe boków tego trójkąta.
II W punkcie, w którym przecinają się symetralne boków tego trójkąta.
III W punkcie, w którym przecinają się wysokości tego trójkąta.
IV W punkcie, w którym przecinają się dwusieczne kątów wewnętrznych tego trójkąta.

18. Jaką wartość ma wyrażenie

$$\sqrt{2}^{\log_4 81}$$

I 2 **II** 3 **III** 4 **IV** 9

19. W ciągu (a_n) wyraz a_n wynosi $\frac{2n+1}{n+3}$

Ile wynosi wyraz a_{n-1} dla $n>1$?

I $\frac{2n}{n+2}$ **II** $\frac{2n-1}{n+2}$

III $\frac{n-2}{n+3}$ **IV** $\frac{2n}{n+3}$

20. Cena towaru wynosiła *p*. Cenę tę podniesiono o 10% , a następnie nową cenę obniżono o 6% . Ile wynosi cena towaru po tych zmianach ?

I $p+4$ **II** $1,04p$ **III** $p+0,04$ **IV** $1,034p$

Prawidłowe odpowiedzi zaznaczono znakiem **x**.

Numer pytania	Odpowiedź			
	I	II	III	IV
1			**x**	
2	**x**			
3				**x**
4			**x**	
5		**x**		
6				**x**
7				**x**
8				**x**
9				**x**
10		**x**		
11			**x**	
12				**x**
13	**x**			
14		**x**		
15		**x**		
16			**x**	
17				**x**
18		**x**		
19		**x**		
20				**x**

ETAP 2 - FINAŁ

Część I

Zadania

Zadanie 1.
Środkowe trójkąta mają długości 9, 12, 15. Obliczyć pole tego trójkąta.

Zadanie 2.
Niech $f(x) = x^2 + 12x + 30$

Rozwiąż równanie

$$f\big(f(f(f(f(x))))\big) = 0 .$$

Zadanie 3.
Niech M i N będą punktami płaszczyzny z układem współrzędnych XOY. Odległością punktów M i N nazwiemy liczbę $dist(M, N)$ określoną następująco:

$$dist(M, N) = \begin{cases} |MN| & \text{gdy punkt } O \text{ nalezy do prostej } MN \\ |MO| + |ON| & \text{gdy punkt } O \text{ nie nalezy do prostej } MN \end{cases}$$

W powyższym określeniu O jest początkiem układu współrzędnych, a symbol $|MN|$ oznacza długość odcinka $\overline{MN}$.

Dane są punkty $P = (3, 0)$, $Q = (0, 1)$

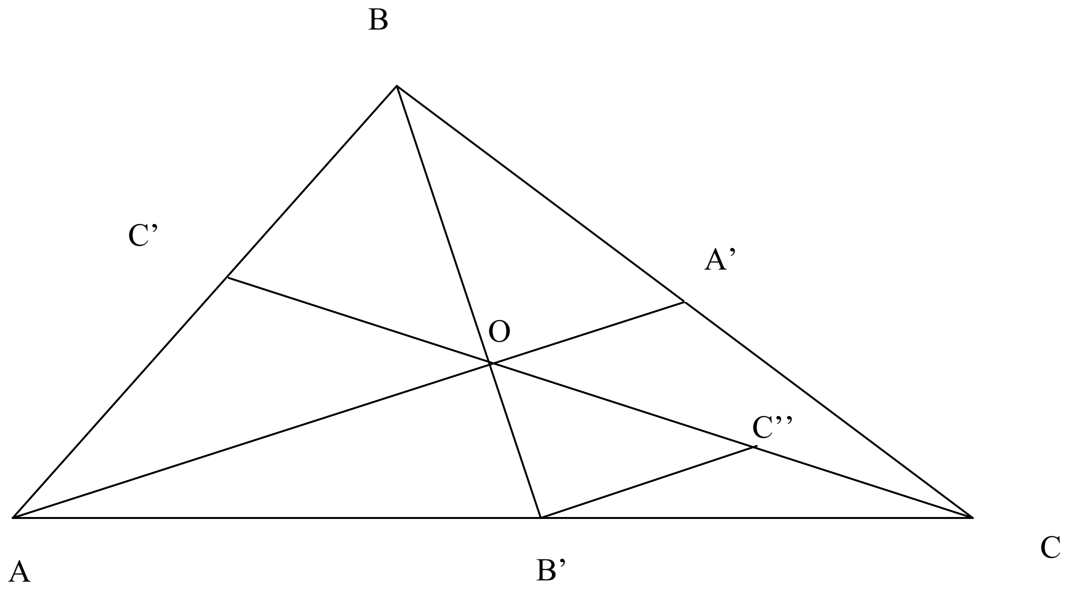
W układzie współrzędnych narysuj zbiory:

$$A = \{S : dist(P, S) = 4\}, \quad B = \{S : dist(P, S) < dist(S, Q)\}$$

Wykonaj dwa osobne rysunki.

Rozwiązania zadań

Zadanie 1
Szkic rozwiązania.



|AA'| = 9
|BB'| = 12
|CC'| = 15
B'C'' || AA'

Rozpatrujemy trójkąt OB'C''

$|B'C''| = \frac{1}{2}|AO| = \frac{1}{2}\frac{2}{3}|AA'| = 3$

$|OB'| = \frac{1}{3}|BB'| = 4$

$|OC''| = \frac{1}{2}|OC| = \frac{1}{2}\frac{2}{3}|CC'| = 5$

Skoro długości boków tego trójkąta maja długości 3, 4, 5, to **jest to trójkąt prostokątny**.
PΔOB'C'' = 6
2 PΔOB'C'' = PΔOB'C
PΔOB'C = PΔAOB'
stąd PΔAOC = 24
PΔAOB = 2 PΔAOB' = 24
PΔA'OC = PΔBOA' = 0,5 PΔAOB = 12
Zatem
PΔABC = 24 + 24 + 12 + 12 =72

Odp. Pole tego trójkąta wynosi 72.

Zadanie 2
Szkic rozwiązania.
Zauważmy, że

$$f(x)=(x+6)^2-6$$

stąd

$f(f(x))=(x+6)^4-6$

$f(f(f(x)))=(x+6)^8-6$

itd.

$f\big(f(f(f(f(x))))\big)=(x+6)^{32}-6$

Wtedy rozpatrywane równanie ma postać

$$(x+6)^{32}-6=0$$

Zatem rozwiązania to: $x=-6\pm\sqrt[32]{6}$.
Odp. Równanie ma dwa rozwiązania $x_1=-6-\sqrt[32]{6}$ i $x_2=-6+\sqrt[32]{6}$.

Zadanie 3
Odpowiedź:
A – okrąg o środku (0, 0) i promieniu 1 bez punktu (1, 0) z dołączonym punktem (7, 0).
B – półprosta zawarta w osi *OX* od punktu (1, 0) w prawo, bez punktu (1, 0)

Część II

PYTANIA TESTOWE

Po każdym pytaniu są podane 4 odpowiedzi oznaczone cyframi rzymskimi I, II, III i IV. Z tych odpowiedzi jedna, dwie, trzy lub cztery są prawdziwe.

1. Które z poniższych przekształceń płaszczyzny ma nieskończenie wiele punktów stałych?

I Przesunięcie o wektor niezerowy.

II Rzut prostopadły na prostą.

III Symetria środkowa.

IV Obrót o kąt α, $0 < \alpha < 2\pi$.

2. Które z poniższych równań jest równaniem okręgu?

I $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 6 = 0$

II $(x - 1)^2 + y^2 + 4 = 0$

III $x^2 + y^2 - 2x = 0$

IV $(x+1)^2+(y-4)^2-5=0$

3. Która z poniższych funkcji jest parzysta?

I $f(x)=\begin{cases} 1 & \text{gdy } |x|>1 \\ 0 & \text{gdy } |x|\le 1 \end{cases}$

II $g(x) = \log|x|$

III $h(x)=\begin{cases} -1-x & \text{gdy } x<0 \\ 1-x & \text{gdy } x>0 \end{cases}$

IV $k(x) = |\log x|$

4. Która z poniższych funkcji ma zbiór wartości równy przedziałowi $\langle 0;1 \rangle$?

I $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x\le 0 \\ 1 & \text{gdy } x>0 \end{cases}$

II $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

III $h(x) = \sqrt{1-x^2}$

IV $k(x) = \dfrac{1+\cos x}{2}$

5. Dany jest ciąg $a_n = \frac{n+1}{n}$. Które z poniższych zdań jest prawdziwe?

I Istnieje n takie, że $a_n = 1{,}003$

II Dla każdego n $a_n > 1{,}001$

III Istnieje n takie, że $a_n = 1{,}002$

IV Istnieje n takie, że $a_n < 1{,}001$

6. Punkt P' jest obrazem punktu P w symetrii środkowej względem punktu O. Która z poniższych równości jest prawdziwa?

I $\vec{OP} = \vec{OP'}$

II $\vec{PP'} = 2\vec{OP}$

III $\vec{OP} = -\vec{OP'}$

IV $\vec{PO} = \vec{P'O}$

7. Które z poniższych równań ma cztery różne pierwiastki rzeczywiste?

I $x^4 - 5x^2 + 2 = 0$ **II** $x^4 + 5x^2 + 2 = 0$

III $x^4 - 4x^2 + 4 = 0$ **IV** $x^4 - 4x^2 - 4 = 0$

8. Która z poniższych liczb jest liczbą wymierną ?

I 1,2533333...

II $\left|1-\sqrt{2}\right| + \sqrt{2}$

III $(4-\sqrt{12})(4+2\sqrt{3})$

IV $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - 2\sqrt{2}$

9. Która z poniższych figur jest wypukła ?

I Półpłaszczyzna

II Okrąg

III Dwa różne punkty

IV Koło

10. Które z poniższych równości są prawdziwe dla dowolnych zbiorów A, B, C ?

I $(A \cup B) \cap A = A$

II $(A - B) - C = A - (B \cap C)$

III $(A \cup B) \cap A = B$

IV $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$

ODPOWIEDZI

Prawidłowe odpowiedzi zaznaczono znakiem **X**.

Numer pytania	Odpowiedź			
	I	II	III	IV
1		X		
2	X		X	X
3	X	X		
4			X	X
5			X	X
6			X	
7	X			
8	X		X	X
9	X			X
10	X			X

ZADANIA Z KONKURSU 2011-2012

ETAP 1

Przy każdym pytaniu są podane 4 odpowiedzi, z których dokładnie jedna jest prawidłowa.

1. Funkcja f spełnia dla każdego $x \neq 0$ równość:

$$(x-1)f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 7$$

Ile wynosi $f(3)$?

I $\frac{1}{5}$ **II** 1 **III** 3 **IV** 5

2. Dla liczb rzeczywistych x, y definiujemy działanie: $x \oplus y = x^4 - y$. Ile wynosi $a \oplus (a \oplus a)$?

I a^8 **II** a^4 **III** a^2 **IV** a

3. Wiadomo, że $\frac{x^2+1}{x} = 3$. Ile wynosi $x^2 + \frac{1}{x^2}$?

I 3 **II** 6 **III** 7 **IV** 9

4. Sześciokąt A powstał przez połączenie odcinkami środków sąsiednich boków sześciokąta foremnego o polu 4. Pole sześciokąta A jest równe

I 2 **II** 3 **III** $\sqrt{2}$ **IV** $\sqrt{3}$

5. Dane są punkty: $A = \left(\sqrt{6}, \sqrt{29}\right)$, $B = \left(\sqrt{7}, 2\sqrt{7}\right)$, $C = \left(\sqrt{13}, 5\right)$. Ile punktów wspólnych mają brzeg trójkąta ABC i okrąg o równaniu $x^2 + y^2 = 36$?

I 0 **II** 1 **III** 2 **IV** 3

6. Która z poniższych funkcji jest funkcją liniową?

I $f(x) = |x|$ **II** $f(x) = \sqrt{x^2}$ **III** $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ **IV** $f(x) = \frac{x^3+x}{x^2+1}$

7. Układ równań

$$\begin{cases} 3x - 3y = 1 \\ 9x - 6y = p \end{cases}$$

I dla każdej wartości p nie ma rozwiązań

II dla każdej wartości p ma dokładnie jedno rozwiązanie

III dla każdej wartości p ma nieskończenie wiele rozwiązań

IV dla $p = 1$ jest układem sprzecznym

8. Każda liczba dodatnia podzielna przez 3, może być przedstawiona dla pewnego całkowitego i dodatniego n w postaci

I $3n-3$ **II** $3n+3$ **III** n^3+3 **IV** n^3-3

9. Zbiorem rozwiązań nierówności

$$\sqrt{2+x-x^2} > x-2$$

jest

I przedział $[-1;4)$

II zbiór $[-1;2)\cup(4;\infty)$

III przedział $[-1;2)$

IV przedział $(4;\infty)$

10. W sześcioosobowej grupie dzieci o różnych imionach, są cztery dziewczynki i dwóch chłopców. Dzieci te losowo dzielimy na dwie grupy po trzy osoby. Prawdopodobieństwo, że w każdej trójce jest jeden chłopiec jest równe

I $\frac{1}{2}$ **II** $\frac{1}{3}$ **III** $\frac{2}{3}$ **IV** $\frac{3}{5}$

11. W wielokącie foremnym W losujemy dwa spośród jego wierzchołków.

Prawdopodobieństwo tego, że łączący je odcinek nie jest bokiem wielokąta W wynosi $\frac{2}{3}$.

Stąd wynika, że

I W jest kwadratem

II W jest sześciokątem

III W jest siedmiokątem

IV W jest ośmiokątem

12. Na płaszczyźnie dany jest szesnastokąt foremny. Rozpatrujemy wszystkie trójkąty prostokątne, których wierzchołki są wybrane spośród wierzchołków tego szesnastokąta. Trójkątów takich jest

I 96 **II** 112 **III** 144 **IV** 72

13. Zbiór liczb rzeczywistych spełniających nierówność

$$(x-1)(x-2)^2(x-3)^3 \le 0$$

jest

I przedziałem $(-\infty; 1]$

II przedziałem $[3; \infty)$

III przedziałem $[1; 3]$

IV zbiorem $[-\infty; 1]\cup[3;\infty)$

14. Sześcian o przekątnej d ma takie samo pole powierzchni całkowitej, jak kula o promieniu $\sqrt{3}$. Ile wynosi d?

I $\sqrt{6\pi}$ **II** $\sqrt{8\pi}$ **III** $\sqrt{4\pi}$ **IV** $\sqrt{\pi}$

15. Podstawą prostopadłościanu jest kwadrat. Krawędź podstawy prostopadłościanu ma długość 1, a krawędź boczna prostopadłościanu ma długość 2. Jaką długość ma najdłuższy odcinek łączący wierzchołek prostopadłościanu ze środkiem krawędzi podstawy prostopadłościanu ?

I $\frac{\sqrt{6}}{2}$ **II** $\sqrt{3}$ **III** $\frac{\sqrt{21}}{2}$ **IV** $\frac{3}{2}$

16. Zbiór A jest zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności

$$\frac{x-1}{x+2} \geq 0 \ .$$

Zbiór B jest zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności

$$(x-1)(x+2) > 0 \ .$$

Które z poniższych zdań jest prawdziwe ?

I $A - B$ jest zbiorem pustym

II $B - A$ jest zbiorem pustym

III $A \cup B = B$

IV $A \cap B = A$

17. Dane są dwa koła

$$K_1 = \{(x,y): x^2 + y^2 \leq 9\} \quad K_2 = \{(x,y): (x-2)^2 + y^2 \leq 25\}$$

Jakie jest wzajemne położenie tych kół ?

I Koła są rozłączne

II Koło K_1 jest podzbiorem koła K_2

III Koło K_2 jest podzbiorem koła K_1

IV Koła mają dokładnie jeden punkt wspólny

18. Dla jakich wartości m równanie $2^{2x} - m \cdot 2^x + 1 = 0$ ma dwa pierwiastki ?

I $m \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$ **II** $m \in (-\infty; -2)$

III $m \in (2; \infty)$ **IV** $m \in (-2; 2)$

19. W jakim stosunku zmieszać roztwór cukru o stężeniu 2 % z roztworem cukru o stężeniu 5 %, aby otrzymać roztwór cukru o stężeniu 4 % ?

I 3 : 2 **II** 2 : 3 **III** 2 : 1 **IV** 1 : 2

20. Dla jakiej wartości x z przedziału $< 0; 2\pi >$ spełniony jest układ warunków

$$\begin{cases} \sin x = -\frac{1}{2} \\ \cos x > 0 \end{cases}$$

I $\frac{11\pi}{6}$ **II** $\frac{7\pi}{6}$ **III** $\frac{4\pi}{3}$ **IV** $\frac{5\pi}{3}$

ODPOWIEDZI

Prawidłowe odpowiedzi zaznaczono znakiem **X**.

Numer pytania	Odpowiedź				Zaliczono punktów
	I	II	III	IV	
1				**x**	
2				**x**	
3			**x**		
4		**x**			
5			**x**		
6				**x**	
7		**x**			
8	**x**				
9			**x**		
10				**x**	
11			**x**		
12		**x**			
13			**x**		
14	**x**				
15			**x**		
16		**x**			
17		**x**			
18			**x**		
19				**x**	
20	**x**				

ETAP 2 - FINAŁ

Część I

Zadania

Zadanie 1.

W trapezie ABCD o podstawach AD i BC punkt O jest punktem przecięcia przekątnych. Dane są pola trójkątów $P_1 = P\Delta AOD$ i $P_2 = P\Delta BOC$.
Wyznaczyć pole trapezu.

Zadanie 2.

Liczby a, b, c, d są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego rosnącego i są pierwiastkami równania

$$x^4 - 5x^2 + q = 0.$$

Wyznacz q.

Zadanie 3.

Symbol $E(x)$ oznacza największą liczbę całkowitą mniejszą lub równą liczbie x. Narysuj wykresy funkcji:

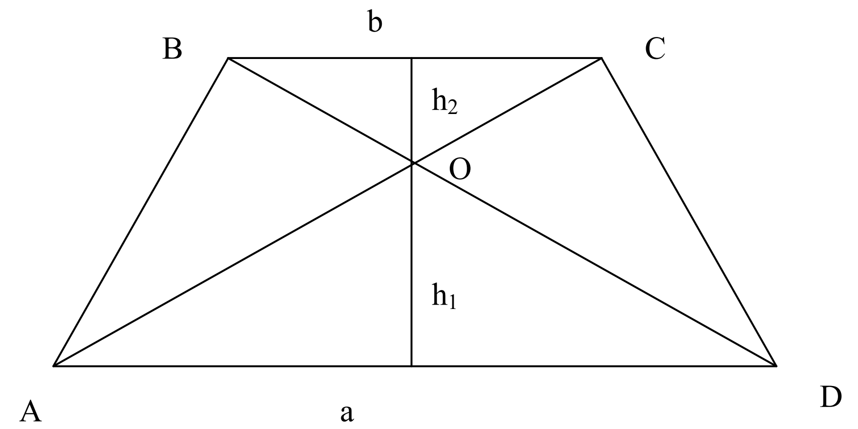
a) $f(x) = E(|x|)$ dla $x \in <-2; 2>$

b) $g(x) = x \cdot E(x)$ dla $x \in <-1; 2>$

Rozwiązania zadań

Zadanie 1

Szkic rozwiązania.



Niech:
|AD| = a, |BC| = b
h_1 – wysokość trójkąta BOC opuszczona na BC,
h_2 – wysokość trójkąta AOD opuszczona na AD,
$h = h_1 + h_2$ – wysokość trapezu ABCD

Zatem $P_1 = P\Delta AOD = \frac{1}{2}ah_1$; $P_2 = P\Delta BOC = \frac{1}{2}bh_2$;

Pole trapezu jest równe

$$P = \frac{1}{2}(a+b)(h_1+h_2) = \frac{1}{2}ah_1 + \frac{1}{2}ah_2 + \frac{1}{2}bh_1 + \frac{1}{2}bh_2 = P_1 + P_2 + \frac{1}{2}ah_2 + \frac{1}{2}bh_1$$

Trójkąt AOD jest podobny do trójkąta BOC, zatem

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{P_1}}{\sqrt{P_2}}$$

Stąd: $h_1 = \frac{h_2\sqrt{P_1}}{\sqrt{P_2}}$, $a = \frac{b\sqrt{P_1}}{\sqrt{P_2}}$. Zatem:

$$P = P_1 + P_2 + \frac{1}{2}\frac{b\sqrt{P_1}}{\sqrt{P_2}}h_2 + \frac{1}{2}b\frac{h_2\sqrt{P_1}}{\sqrt{P_2}} = P_1 + P_2 + \frac{P_2\sqrt{P_1}}{\sqrt{P_2}} = P_1 + P_2 + \sqrt{P_1P_2} = \left(\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2}\right)^2$$

Zadanie 2

Szkic rozwiązania.

Oznaczmy: $x^2 = t$. Z warunków zadania wynika, że równanie $t^2 - 5t + q = 0$ ma dwa pierwiastki dodatnie t_1, t_2 takie, że

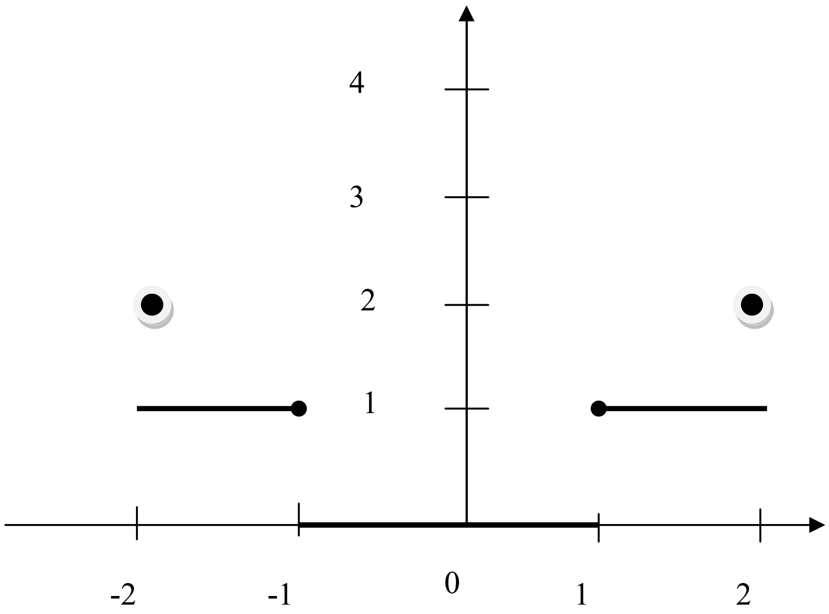
$$\begin{cases} b^2 = c^2 = t_1 \\ a^2 = d^2 = t_2 \end{cases}$$

przy czym *b* jest liczbą przeciwną do *c*, zaś *a* jest liczbą przeciwną do *d*.
Ponieważ $d - c = c - b$ i $b = -c$ więc $d = 3c$. Zatem $t_2 = 9t_1$.
Ze wzorów Viete'a mamy:

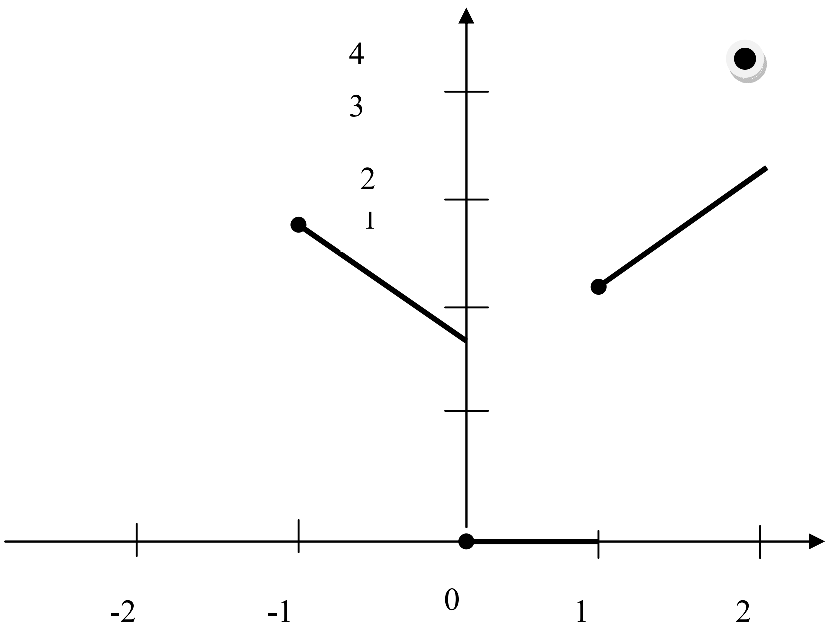
$$t_1t_2 = q$$
$$t_1 + t_2 = 5$$

Rozwiązując układ trzech ostatnich równań otrzymamy odpowiedź: $q = 9/4$.

Zadanie 3
Szkic rozwiązania.
a)



b)



Część II

PYTANIA TESTOWE

Po każdym pytaniu są podane 4 odpowiedzi oznaczone cyframi rzymskimi I, II, III i IV. Z tych odpowiedzi jedna, dwie, trzy lub cztery są prawdziwe.

1. Przekrój czworościanu foremnego płaszczyzną może być:

I trójkątem równobocznym
II trójkątem o każdym boku różnej długości
III kwadratem
IV pięciokątem

2. Niech p będzie taką liczbą rzeczywistą, że wielomian $x^2 - px + p$ ma dokładnie jeden pierwiastek rzeczywisty. Pierwiastek ten

I jest ujemny
II jest wymierny
III jest liczbą całkowitą parzystą
IV może być liczbą pierwszą.

3. Wielomian $x^2 + ax + b$ ma ten sam niepusty zbiór pierwiastków, co wielomian $ax + b$. Warunek ten

I oznacza, że zbiorem pierwiastków jest zbiór $\{0\}$
II jest spełniony, gdy $b = 0$
III nigdy nie jest spełniony
IV jest spełniony, gdy $a = 0$.

4. Które z poniższych równań nie ma pierwiastków rzeczywistych ?

I $x^4 + 6x^2 + 9 = 0$
II $x^4 - 6x^2 + 9 = 0$
III $x^4 + 3x^2 + 5 = 0$
IV $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$

5. Dana jest funkcja $f(x) = x^2 - 6x + 9$
Które z poniższych zdań jest prawdziwe ?

I Dla każdego $x < 0$, $f(x) > 0$
II Dla każdego x, $f(x) > 0$
III Istnieje $x < 0$ taki, że $f(x) = 0$
IV Istnieje x taki, że $f(x) = 0$

6. Która z poniższych liczb jest liczbą wymierną ?

I $(\sqrt{3}-3\sqrt{2})(\sqrt{3}+3\sqrt{2})$

II 0,6343434...

III $(4-\sqrt{20})(4+2\sqrt{5})$

IV $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}-\sqrt{3}$

7. Która z poniższych figur ma środek symetrii ?

I Półprosta
II Dwa różne punkty
III Trzy różne punkty niewspółliniowe
IV Dwie proste równoległe

8. Dane są wzory na n-ty wyraz ciągu ($n \in N_+$) :

I $a_n = \log 2^n$ **II** $b_n = \log^n 2$

III $c_n = \log 2^{(2n)}$ **IV** $d_n = \log 2^{(2^n)}$

Który z tych ciągów jest ciągiem geometrycznym?

9. Który z poniższych zbiorów jest jednoelementowy?

I $\{a, \emptyset\}$ **II** $\{a, a\}$

III $\{\{a\}\}$ **IV** $\{\emptyset\}$

10. Który z poniższych ułamków ma rozwinięcie dziesiętne skończone?

I $\frac{1}{15^{100}}$ **II** $\frac{1}{16^{100}}$

III $\frac{1}{20^{100}}$ **IV** $\frac{1}{75^{100}}$

ODPOWIEDZI

Prawidłowe odpowiedzi zaznaczono znakiem **X**.

Numer pytania	Odpowiedź			
	I	II	III	IV
1	X	X	X	
2		X	X	X
3			X	
4	X		X	X
5	X			X
6	X	X	X	X
7		X		X
8		X		X
9		X	X	X
10		X	X	

ZADANIA Z KONKURSU 2012-2013

ETAP 1

Przy każdym pytaniu są podane 4 odpowiedzi, z których dokładnie jedna jest prawidłowa.

1. Liczba $(17+\sqrt{71})^{31}+(17-\sqrt{71})^{31}$ jest

I niewymierna **II** całkowita parzysta
III całkowita nieparzysta **IV** wymierna niecałkowita

2. Ciąg (a_n) w którym $a_n = \cos\dfrac{\pi}{1+\sqrt{n}}$ dla $n = 1,2,3,...$ jest

I rosnący, a wszystkie wyrazy tego ciągu są dodatnie
II rosnący, a wszystkie wyrazy tego ciągu są mniejsze niż 1
III malejący, a wszystkie wyrazy tego ciągu są dodatnie
IV malejący, a wszystkie wyrazy tego ciągu są mniejsze niż 1

3. Dany jest układ równań

$$\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ x = y^2 - 3 \end{cases}$$

Ile jest par (x, y) spełniających ten układ równań?

I jedna **II** dwie **III** trzy **IV** cztery

4. Liczba N ma 201 cyfr i są to same siódemki. Zatem liczba N jest podzielna przez

I 9 **II** 11 **III** 111 **IV** 1111

5. Niech $f(x) = \cos x,\ \ g(x) = 2^x\ \ dla\ \ x \in R$. Wówczas:

I funkcja $f(g(x))$ jest parzysta
II funkcja $f(g(x))$ jest nieparzysta
III funkcja $g(f(x))$ jest parzysta
IV funkcja $g(f(x))$ jest nieparzysta

6. Ile punktów o obu współrzędnych całkowitych należy do zbioru

$$A = \{(x, y):\ 3 \le x^2 + y^2 \le 8\}$$

I 4 **II** 8 **III** 16 **IV** 24

7. Dany jest zbiór $A = \{a, b, \{a\}\}$. Które z poniższych zdań jest fałszywe?

I $\{a\} \in A$ **II** $\{a\} \subset A$ **III** $\emptyset \subset A$ **IV** $\emptyset \in A$

8. Wielokąt wypukły ma 275 przekątnych. Ile boków ma ten wielokąt?

I 50 **II** 25 **III** 20 **IV** 40

9. Która z poniższych funkcji ma zbiór wartości równy przedziałowi (0;1> ?

I $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ **II** $f(x)=\sqrt{1-x}$ **III** $f(x)=\frac{1+\sin x}{2}$ **IV** $f(x)=\sqrt{1-x^2}$

10. Rozpatrujemy trójkąty, których wierzchołki są wierzchołkami sześcianu. Ile jest wśród nich trójkątów równobocznych?

I 4 **II** 8 **III** 12 **IV** 24

11. Suma pierwiastków równania

$$9^x-12\cdot 3^x+27=0$$

wynosi

I 3 **II** 2 **III** 12 **IV** 7

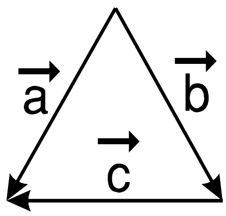
12. Przekątna rombu ma długość 6. Pole rombu wynosi 24. Jaką długość ma bok rombu?

I 5 **II** 10 **III** 6 **IV** 12

13. Miary kątów trójkąta tworzą rosnący ciąg arytmetyczny . Suma miar najmniejszego i największego kąta tego trójkąta wynosi

I 100^0 **II** 120^0 **III** 150^0 **IV** 90^0

14. Na rysunku przedstawione są trzy wektory: $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$



Który z poniższych związków między tymi wektorami jest prawdziwy?

I $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ **II** $\vec{a}+\vec{c}=\vec{b}$

III $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ **IV** $\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$

15. Pole trójkąta, którego długości przyprostokątnych są pierwiastkami równania

$$x^2-2\sqrt{5}\cdot x+3=0$$

jest równe

I 3 **II** 1,5 **III** 2 **IV** 1

16. Dane są dwa koła

$$K_1 = \{(x,y):\ x^2 + y^2 \le 9\} \qquad K_2 = \{(x,y):\ (x-2)^2 + y^2 \le 1\}$$

Jakie jest wzajemne położenie tych kół ?

I Koła są rozłączne
II Koło K_1 jest podzbiorem koła K_2
III Koło K_2 jest podzbiorem koła K_1
IV Koła mają dokładnie jeden punkt wspólny

17. W ciągu (a_n) wyraz a_n wynosi $\frac{4n+2}{2n+1}$
Ile wynosi wyraz a_{n-1} dla $n > 1$?

I $\frac{4n+1}{2n}$ **II** $\frac{4n-2}{2n-1}$ **III** 1 **IV** $\frac{4n+1}{2n+1}$

18. Dana jest funkcja $f(x) = 4x$. Którą z poniższych równości spełnia ta funkcja dla wszystkich $x, y \in R$?

I $f(x+2y) = f(x) + 2f(y)$ **II** $f(x \cdot y^2) = f(x) + 2f(y)$

III $f(x+2y) = f(x) \cdot [f(y)]^2$ **IV** $f(x \cdot y^2) = f(x) \cdot f(y^2)$

19. Ile wynosi kwadrat różnicy pierwiastków równania kwadratowego
$$x^2 + px - p^2 = 0, \qquad p \ne 0 \ ?$$

I $3p^2$ **II** $\frac{3}{p^2}$ **III** $5p^2$ **IV** p^3

20. Zbiór A jest zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności
$$\frac{x-1}{x+2} \ge 0 \ .$$
Zbiór B jest zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności
$$(x-1)(x+2) > 0 \ .$$
Które z poniższych zdań jest prawdziwe ?

I $A - B$ jest zbiorem pustym

II $B - A$ jest zbiorem jednoelementowym

III $A \cup B = B$

IV $A \cap B = B$

ODPOWIEDZI

Prawidłowe odpowiedzi zaznaczono znakiem **X**.

Numer pytania	Odpowiedź			
	I	II	III	IV
1		X		
2		X		
3				X
4			X	
5			X	
6			X	
7				X
8		X		
9	X			
10		X		
11	X			
12	X			
13		X		
14				X
15		X		
16			X	
17		X		
18	X			
19			X	
20				X

ETAP 2 - FINAŁ

Część I

Zadania

Zadanie 1.

Dane są funkcje:

$$f(x)=\begin{cases} 1 & dla \quad x<0 \\ 0 & dla \quad x=0 \\ -1 & dla \quad x>0 \end{cases} \qquad \text{oraz} \qquad g(x)=x^2-2x$$

Napisz wzory określające funkcje: $f(f(x)),\ f(g(x)),\ g(f(x)),\ g(g(x))$.

Zadanie 2.

W trójkąt ABC o podstawie długości c =|AB| i kącie ACB o mierze γ wpisano okrąg o środku O. Przez punkt O i wierzchołki A oraz B poprowadzono okrąg o środku S. Wyznaczyć długość promienia tego okręgu.

Zadanie 3.

Dana jest prosta $y=1$ oraz punkt $P=(2,3)$. Znajdź zbiór punktów równoodległych od danej prostej i od punktu *P*. Narysuj ten zbiór.

Rozwiązania zadań

Zadanie 1.

Odpowiedź.

$$f(f(x))=\begin{cases}-1 & dla \quad x<0\\ 0 & dla \quad x=0\\ 1 & dla \quad x>0\end{cases}$$

$$f(g(x))=\begin{cases}-1 & dla \quad x\in(-\infty;0)\cup(2;\infty)\\ 0 & dla \quad x\in\{0,2\}\\ 1 & dla \quad x\in(0,2)\end{cases}$$

$$g(f(x))=\begin{cases}-1 & dla \quad x<0\\ 0 & dla \quad x=0\\ 3 & dla \quad x>0\end{cases}$$

$$g(g(x))=x^4-4x^3+2x^2+4x$$

Zadanie 2.

Szkic rozwiązania.

Długość promienia rozpatrywanego okręgu to np. długość odcinka OS.

Niech kąt CAB ma miarę α a kąt ABC ma miarę β.

Ponieważ odcinki OA i OB są zawarte są w dwusiecznych odpowiednich kątów trójkąta ABC to miara kąta COB jest równa π – (α + β)/2.

Lecz α + β = π – γ, zatem miara kąta COB jest równa π/2 + γ/2.

Stosując twierdzenie sinusów do trójkąta COB otrzymujemy:

$$OS=\frac{c}{2\sin(\pi/2+\gamma/2)}=\frac{c}{2\cos(\gamma/2)}$$

Zadanie 3.

Rozwiązanie.

Niech punkt (x,y) należy do poszukiwanego zbioru.

Jego odległość od punktu P jest równa $\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}$, zaś jego odległość od prostej $y=1$ jest równa $|y-1|$.

Przyrównujemy te odległości:

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}=|y-1|$$

Podnosimy obustronnie do kwadratu:

$$(x-2)^2+(y-3)^2=(y-1)^2$$

Stąd: $y=\frac{1}{4}x^2-x+3$

Jest to parabola o wierzchołku $(2,2)$ z ramionami skierowanymi do góry.

Część II

PYTANIA TESTOWE

Po każdym pytaniu są podane 4 odpowiedzi oznaczone cyframi rzymskimi I, II, III i IV. Z tych odpowiedzi jedna, dwie, trzy lub cztery są prawdziwe.

1. Które z poniższych zdań jest prawdziwe:

I $\emptyset = \{\emptyset\}$ **II** $\emptyset \in \{\emptyset\}$ **III** $\emptyset \subset \{\emptyset\}$ **IV** $\{\emptyset, \emptyset\} = \{\emptyset\}$

2. Dane są funkcje:

$$f(x) = \left|\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right|, \quad g(x) = |\sin x|, \quad h(x) = \left|\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right|, \quad k(x) = |\sin(x - \pi)|.$$

Które z poniższych zdań jest prawdziwe:

I $f(x) = g(x)$ **II** $f(x) = k(x)$ **III** $f(x) = h(x)$ **IV** $g(x) = k(x)$

3. Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = \dfrac{1}{1+3^x}$. Które z poniższych zdań jest prawdziwe:

I Dziedziną funkcji f jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych
II Zbiór wartości funkcji f jest ograniczony
III Funkcja f jest malejąca
IV Dla każdej liczby k należącej do przedziału (0; 1) istnieje taka liczba x, że $f(x) = k$

4. Które z poniższych równań przedstawia prostą na płaszczyźnie:

I $\dfrac{x}{y+2} = 3$ **II** $x \cdot 2^y = 0$ **III** $x \cdot y = 0$ **IV** $\sqrt{x^2 + 2xy + y^2} = 0$

5. Czworościan może mieć:

I dokładnie jedną oś symetrii
II dokładnie trzy osie symetrii
III pole powierzchni większe niż 1 km^2 i jednocześnie objętość mniejszą niż 1 mm^3
IV trzy pary krawędzi wzajemnie prostopadłych

6. Która z poniższych liczb jest liczbą wymierną ?

I $(5-3\sqrt{7})^2+(5+3\sqrt{7})^2$

II $(4-\sqrt{12})(4+2\sqrt{3})$

III $\left|1-\sqrt{2}\right|+\sqrt{2}$

IV 0

7. Dana jest funkcja

$$f(x)=x^2-4x+4$$

Które z poniższych zdań jest prawdziwe ?

I Dla każdego $x<0$, $f(x)>0$
II Dla każdego x, $f(x)>0$
III Istnieje $x<0$ taki, że , $f(x)=0$
IV Dla każdego $x>0$, $f(x)>0$

8. Które z poniższych zdań jest prawdziwe ?

I Funkcja $f(x)=2^{\sin x}+2^{-\sin x}$ jest parzysta
II Funkcja $g(x)=2^{\sin x}-2^{-\sin x}$ jest nieparzysta
III Funkcja $h(x)=2^{\sin x}+1$ nie jest parzysta i nie jest nieparzysta
IV Funkcja $k(x)=2^{\cos x}+1$ nie jest parzysta i nie jest nieparzysta

9. Pole powierzchni kuli wpisanej w walec

I jest mniejsze od powierzchni walca
II nie przekracza pola powierzchni bocznej walca
III nie przekracza sumy pól podstaw walca
IV jest większe od sumy pól podstaw walca i mniejsze od jego pola powierzchni bocznej

10. Liczba n^2+87 jest podzielna przez liczbę $n-2$ (n jest liczbą całkowitą dodatnią). Wynika stąd, że

I $n \leq 87$
II n jest liczbą nieparzystą
III n jest liczbą pierwszą
IV n jest kwadratem liczby całkowitej

ODPOWIEDZI

Prawidłowe odpowiedzi zaznaczono znakiem **X**.

Numer pytania	Odpowiedź			
	I	II	III	IV
1		X	X	X
2	X	X		X
3	X	X	X	X
4		X		X
5		X	X	X
6	X	X		X
7	X			
8	X	X	X	
9	X	X		
10	X	X		

ZADANIA Z KONKURSU 2013-2014

ETAP 1

Przy każdym pytaniu są podane 4 odpowiedzi, z których dokładnie jedna jest prawidłowa.

1. Dwa kolejne wierzchołki kwadratu leżą na okręgu o promieniu 1, a pozostałe dwa na średnicy tego okręgu. Długość boku tego kwadratu wynosi:

I 1 **II** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **III** $\frac{\sqrt{5}}{5}$ **IV** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

2. Okrąg o promieniu 10 i okrąg o promieniu 17 przecinają się w dwóch punktach. Długość wspólnej cięciwy wyznaczonej przez te punkty wynosi 16. Odległość między środkami tych okręgów wynosi:

I 21 **II** 15 **III** 27 **IV** 23

3. Prostokąt ABCD ma bok AB o długości 5 i bok BC o długości 3. Przekątna AC została podzielona punktami E i F na trzy odcinki o równej długości. Pole powierzchni trójkąta EFB wynosi:

I $\frac{5}{2}$ **II** $\frac{\sqrt{15}}{3}$ **III** $\frac{\sqrt{30}}{3}$ **IV** $\frac{5}{3}$

4. Ciąg (a_n) spełnia dla $n = 1, 2, \dots$ zależność $a_{n+1} = \frac{2a_n + 1}{2}$, oraz $a_1 = 2$.

Ile wynosi wyraz a_{101} ?

I 49 **II** 50 **III** 51 **IV** 52

5. Ile rozwiązań ma równanie $\sqrt{x+3} = 1 + \sqrt{x}$?

I Nie ma rozwiązań.

II Ma dokładnie jedno rozwiązanie.

III Ma nieskończenie wiele rozwiązań.

IV Ma dokładnie dwa rozwiązania.

6. O ile procent należy zwiększyć promień koła, by pole koła powiększyło się czterokrotnie?

I 100% **II** 200% **III** 160% **IV** 40%

7. Która z poniższych brył ma największą objętość?

I Czworościan foremny o krawędzi $\sqrt{5}$.

II Walec o promieniu podstawy 0,5 i wysokości 5.

III Kula o promieniu 1.

IV Stożek o wysokości $\sqrt{15}$ i tworzącej 4.

8. Dany jest ciąg geometryczny

$$a_n = \frac{1}{2^{n-1}} \qquad n = 1, 2, 3, \dots$$

Ile wynosi suma n początkowych wyrazów tego ciągu ?

I $3(1-2^{-n})$ **II** $6(1-2^{-n})$ **III** $2(1-2^{-n})$ **IV** $1-2^{-n}$

9. Pierwiastki równania kwadratowego

$$mx^2 + px - m = 0, \qquad m \neq 0$$

oznaczamy: x_1 , x_2. Ile wynosi

$$x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 \quad ?$$

I $\frac{p^2 + 2m^2}{m^2}$ **II** $p^2 + 2m^2$

III $\frac{p^2 + 4m^2}{m^2}$ **IV** $\frac{p}{m}$

10. Dany jest wielomian $W(x) = x^{2n+1} - 1$, $n \in N$. Ile wynosi reszta z dzielenia tego wielomianu przez dwumian $x + 1$?

I -2 **II** -1 **III** 0 **IV** 1

11. Ostatnia cyfra liczby 762^{1816} to:

I 2 **II** 4 **III** 6 **IV** 8

12. Zbiór punktów płaszczyzny Oxy spełniających równanie

$$|x| + |y| = 1$$

jest

I zbiorem czteroelementowym.

II brzegiem kwadratu.

III okręgiem.

IV zbiorem nieograniczonym.

13. Dane są funkcje:

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = \sin 2x$$

Funkcja $f(g(x))$ jest

I parzysta i okresowa.

II parzysta i nieokresowa.

III nieparzysta i okresowa.

IV nieparzysta i nieokresowa.

14. Liczba, której czwarta część powiększona o 15 jest równa trzeciej części tej liczby pomniejszonej o 15

I jest większa niż 400.

II jest nieparzysta.

III jest mniejsza niż 400.

IV nie istnieje.

15. Koło ma promień r i obwód a. Która wypowiedź jest prawdziwa?

I Jeżeli a jest liczbą niewymierną, to r też jest liczbą niewymierną.

II Jeżeli a jest liczbą wymierną, to r też jest liczbą wymierną.

III Jeżeli a jest liczbą naturalną, to r jest liczbą niewymierną.

IV Jeżeli a jest liczbą naturalną, to r jest liczbą wymierną.

16. Która z poniższych funkcji ma wykres symetryczny do wykresu funkcji $f(x) = 3^{2-x}$ względem prostej $y = x$?

I $g(x) = 2 - \log_3 x$ **II** $g(x) = 2 + \log_3 x$

III $g(x) = 3 - \log_2 x$ **IV** $g(x) = 3 + \log_2 x$

17. Ile rozwiązań ma równanie:

$$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0 \quad ?$$

I Nie ma żadnego.

II Dokładnie jedno.

III Dokładnie trzy.

IV Dokładnie pięć.

18. Funkcja

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

I jest rosnąca. **II** jest malejąca.

III jest parzysta. **IV** jest nieparzysta.

19. Liczba $1 + 4^{\log_2 1001}$ jest równa

I $\log_2 1001 \cdot \log_2 5$ **II** $(\log_2 1001)^2$

III $(\log_2 1001)^2 + 1$ **IV** $1001^2 + 1$

20. Dane są zbiory:

$$A = \{\emptyset\} \quad \text{oraz} \quad B = \{\{\emptyset\}\}.$$

Zatem:

I $A = B = \emptyset$ **II** $A = B \neq \emptyset$

III $A \in B$ **`IV** $A \subset B$

Prawidłowe odpowiedzi zaznaczono znakiem **X**.

Numer pytania	Odpowiedź			
	I	II	III	IV
1				x
2	x			
3	x			
4				x
5		x		
6	x			
7			x	
8			x	
9				x
10	x			
11			x	
12		x		
13	x			
14			x	
15			x	
16	x			
17		x		
18				x
19				x
20			x	

ETAP 2 - FINAŁ

Część I

Zadania

Zadanie 1.
Rozwiąż nierówność:

$$\sqrt{x^3 - 6x^2 + 9x - 4} > \log_{0,8}(3x - x^2)$$

Zadanie 2.
Na czworokącie ABCD opisano okrąg i wpisano okrąg. Różnica długości boków AD i BC jest równa różnicy długości boków AB i CD.
Wykazać, że przekątna AC jest średnicą okręgu opisanego na tym czworokącie.

Zadanie 3.
Punkt skupienia zbioru A na płaszczyźnie jest to taki punkt P tej płaszczyzny, że w dowolnym kole otwartym (tzn. bez okręgu koła) o środku P znajduje się przynajmniej jeden punkt różny od punktu P i należący do zbioru A.
Uwaga. Punkt P nie musi (choć może) należeć do zbioru A.
Na płaszczyźnie Oxy dany jest zbiór $A = \left\{ \left(\frac{1}{n}, y \right) : n = 1, 2, 3, \ldots ;\ 0 < y < 1 \right\}$.
Wyznacz zbiór wszystkich punktów skupienia zbioru A.
Wyznaczony zbiór możesz opisać słowami lub symbolami albo narysować.

Rozwiązania zadań

Zadanie 1.

Rozwiązanie.

Nierówność ma sens, gdy

$$x^3 - 6x^2 + 9x - 4 \geq 0 \qquad (1)$$

i

$$3x - x^2 > 0 \qquad (2)$$

Rozwiązanie (1): $(x-1)^2(x-4) \geq 0$, stąd: $x \in < 4; \infty) \cup \{1\}$

Rozwiązanie (2): $x(3-x) > 0$, stąd: $x \in (0; 3)$

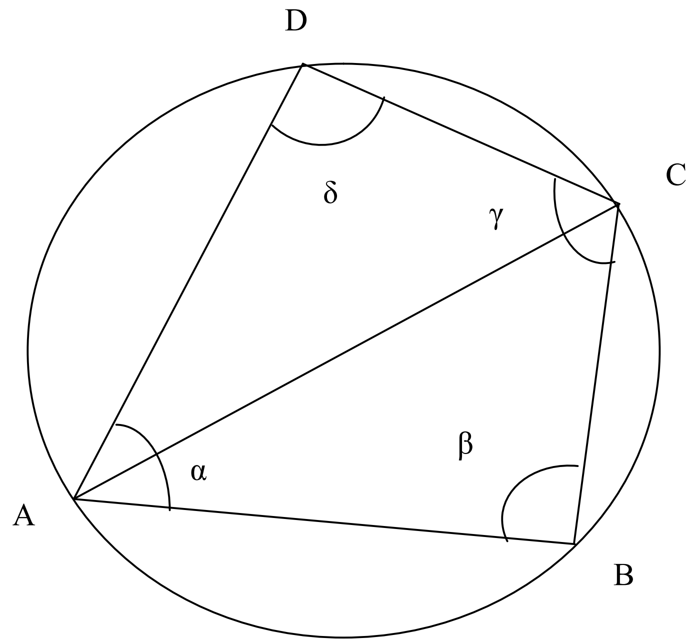
(1) i (2): $x = 1$.

Podstawiamy $x = 1$ do nierówności: $L = 0$, $P = \log_{0,8} 2 < 0$, nierówność jest spełniona.

Odpowiedź: $x = 1$.

Zadanie 2.

Szkic rozwiązania.



Mamy z założenia |AD| - |BC| = |AB| - |CD|

oraz warunek na możliwość wpisania okręgu |AD| + |BC| = |AB| + |CD|

Dodając równości stronami otrzymamy

2|AD| = 2|AB| czyli |AD| = |AB|.

Zatem również |BC| = |CD|.

Stąd trójkąty ABC i ACD są przystające.

Warunek opisania okręgu dla miar odpowiednich kątów $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 1800$.

Z przystawania trójkątów ABC i ACD mamy $\beta = \delta$ zatem $2\beta = 1800$ i $\beta = 900$.

Kąt wpisany jest prosty więc musi być oparty na średnicy.

Zadanie 3.

Rozwiązanie:

$$\left\{\left(\frac{1}{n}, y\right) : n = 1,2,3,\ldots\ ;\ 0 \le y \le 1\right\} \cup \{(0, y) : 0 \le y \le 1\}$$

albo opis słowny:

Szukany zbiór jest sumą:

- zbioru A, (1)
- ciągu $\left(\frac{1}{n},0\right)$ $n = 1,2,3,\ldots$ (ciąg na osi *Ox*), (2)
- ciągu $\left(\frac{1}{n},1\right)$ $n = 1,2,3,\ldots$ (ciąg na prostej $y = 1$), (3)
- odcinka o końcach (0,0) i (0,1) wraz z końcami (odcinek na osi *Oy*). (4)

Część II

PYTANIA TESTOWE

Po każdym pytaniu są podane 4 odpowiedzi oznaczone cyframi rzymskimi I, II, III i IV. Z tych odpowiedzi jedna, dwie, trzy lub cztery są prawdziwe.

1. Który z poniższych zbiorów jest dwuelementowy:

I {a, a, a, b, b} **II** {a, {a}}
III {{a}, {b}} **IV** {{a, b}}

2. Funkcja f każdej liczbie naturalnej dodatniej n przyporządkowuje liczbę jej dzielników. Które z poniższych zdań jest prawdziwe:

I $f(n+1) > f(n)$ dla każdego n

II $f(2n) > f(n)$ dla każdego n

III $f(2n) = 1 + f(n)$ dla każdego n

IV Jeżeli $f(n) = 2$ to $f(n+1) > 2$

3. Który z poniższych podzbiorów płaszczyzny Oxy jest ograniczony:

I $\{(x, y) : x \in R \ \wedge \ y \in R \ \wedge \ 1 \le x + y \le 4\}$

II $\{(x, y) : x \in R \ \wedge \ y \in R \ \wedge \ 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$

III $\{(x, y) : x \in R \ \wedge \ y \in R \ \wedge \ 1 \le |x| + |y| \le 4\}$

IV $\{(x, y) : x \in R \ \wedge \ y \in R \ \wedge \ 1 \le |x + y| \le 4\}$

4. Które z poniższych równań ma dokładnie dwa rozwiązania:

I $\left|x^2 - 1\right| = x$ **II** $\left|x^2 - 1\right| = x^2$

III $\left|x^2 - 1\right| = x + 1$ **IV** $\left|x^2 - 1\right| = x + 10$

5. Dla układu równań

$$\begin{cases} |x| + |y| = 2 \\ x^2 + y^2 = t \end{cases} \qquad t \in R$$

rozpatrujemy funkcję $f(t)$ o wartościach równych liczbie rozwiązań tego układu. Wtedy

I Wykres funkcji *f* ma oś symetrii.

II Funkcja *f* jest niemalejąca.

III Zbiór wartości funkcji *f* jest dwuelementowy

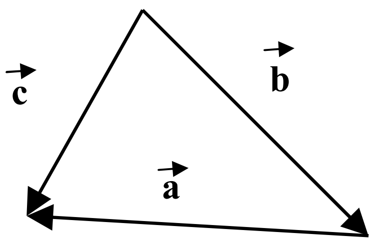
IV Funkcja *f* jest różnowartościowa.

6. Niech $k = \dfrac{\log_2 7}{\log_2 5}$. Wtedy

I $k = \dfrac{\log_4 7}{\log_4 5}$ **II** $k = \log_4 7 - \log_4 5$

III $k = \log_5 7$ **IV** $k = \log_7 5$

7. Na rysunku przedstawione są trzy wektory: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$



Który z poniższych związków między tymi wektorami jest prawdziwy?

I $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ **II** $\vec{c} - \vec{a} = \vec{b}$

III $\vec{c} + \vec{b} = \vec{a}$ **IV** $\vec{b} + \vec{a} = \vec{c}$

8. Która z poniższych funkcji ma zbiór wartości równy przedziałowi $\langle 0;1 \rangle$?

I $f(x) = \cos^2 2x$ **II** $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

III $h(x) = 2^{-|x|}$ **IV** $k(x) = \dfrac{1+\cos x}{2}$

9. Które z poniższych przekształceń płaszczyzny jest izometrią?

I Rzut prostopadły na prostą.

II Symetria środkowa.

III Jednokładność o skali -1.

IV Symetria osiowa.

10. Która z poniższych funkcji jest parzysta?

I $f(x) = \sin x \cdot \sin 3x$ **II** $g(x) = \sin 3x \cdot \cos x$

III $h(x) = \log|x|$ **IV** $k(x) = |\log x|$

ODPOWIEDZI

Prawidłowe odpowiedzi zaznaczono znakiem **X**.

Numer pytania	Odpowiedź			
	I	II	III	IV
1	X	X	X	
2		X		
3		X	X	
4	X	X		X
5	X			
6	X		X	
7		X		X
8	X			X
9		X	X	X
10	X		X	

ZADANIA Z KONKURSU 2014-2015

ETAP 1

1. Pierwiastki równania kwadratowego $x^2 - px + 2 = 0$ oznaczamy x_1 i x_2.
   Jaka jest wartość wyrażenia $x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3$?

   I $p^2 - 4$ **II** $8 - 2p^2$ **III** $2p^2 - 8$ **IV** $2p^2 + 8$

2. Który z poniższych wzorów określa n-ty wyraz ciągu geometrycznego?

   I $a_n = \sin n\pi + \cos n\pi$ **II** $a_n = \sin\frac{n\pi}{2} + \cos\frac{n\pi}{2}$

   III $a_n = \sin n + \cos n$ **IV** $a_n = (\sin n + \cos n)^2$

3. Ile rozwiązań ma równanie $\left||x| - 2\right| = 2 - x^2$

   I 1 **II** 2 **III** 3 **IV** 4

4. Dana jest funkcja $f(x) = 2^x$ .Którą z poniższych równości spełnia ta funkcja dla wszystkich $x, y \in R$?

   I $f(x+2y) = 2 \cdot f(x) \cdot f(y)$ **II** $f(x+2y) = f(x) + 2f(y)$

   III $f(x+2y) = f(x) \cdot [f(y)]^2$ **IV** $f(x+2y) = f(x) + [f(y)]^2$

5. Który z poniższych przedziałów jest zbiorem wartości funkcji $f(x) = \frac{1}{x^4 + x^2 + 1}$?

   I $< 1; \infty)$ **II** $(0; \infty)$ **III** $(0; 1)$ **IV** $(0; 1\rangle$

6. Ile podzbiorów ma zbiór { { {Ø } } } ?

   I 1 **II** 2 **III** 4 **IV** 8

7. Równość $(A \cup B) - B = A$ jest prawdziwa:

   I dla dowolnej pary zbiorów rozłącznych A, B

   II dla dowolnej pary zbiorów A, B

   III tylko wtedy gdy zbiór B jest pusty

   IV gdy zbiór B jest podzbiorem zbioru A

8. Samochód wjechał pod górę ze stałą prędkością 30 km/h po czym zjechał po tej samej trasie ze stałą prędkością 90 km/h. Średnia prędkość samochodu na całej trasie wynosiła:

I 45 km/h **II** 50 km/h **III** 60 km/h **IV** 75 km/h

9. Ile dzielników naturalnych ma liczba miliard ?

I 89 **II** 90 **III** 99 **IV** 100

10. Liczba 0,44444…. (po przecinku same czwórki)

I Jest mniejsza od $\frac{4}{9}$. **II** Jest mniejsza od $\frac{5}{9}$.

III Jest niewymierna. **IV** Należy do zbioru rozwiązań nierówności $\sqrt{2x} < 2x$.

11. Równość $|a+b+c| = |a|+|b|+|c|$, gdzie a, b, c to liczby rzeczywiste, jest prawdziwa:

I Jeśli liczby a,b,c są ujemne.

II Dla dowolnych liczb a,b,c.

III Wtedy i tylko wtedy, gdy liczby a,b,c są nieujemne.

IV Jeśli jedna z liczb a,b,c jest równa zero.

12. Okrąg przecina wszystkie boki czworokąta wycinając z nich równe odcinki. Stąd wynika, że:

I Na tym czworokącie można opisać okrąg.

II W ten czworokąt można wpisać okrąg.

III Ten czworokąt jest kwadratem.

IV Ten czworokąt jest prostokątem.

13. Dany jest trójkąt prostokątny o bokach długości a, b, c; a < b < c. Obracając ten trójkąt wokół boku długości a otrzymujemy bryłę o objętości V_a, obracając ten trójkąt wokół boku długości b otrzymujemy bryłę o objętości V_b, obracając ten trójkąt wokół boku długości c otrzymujemy bryłę o objętości V_c.

Wtedy:

I $V_a < V_b$ **II** $V_a < V_c$ **III** $V_c < V_b$ **IV** $V_b < V_c$

14. Jeśli dla dodatnich liczb całkowitych x, y, z, które nie mają wspólnego dzielnika większego od 1 spełniona jest równość $x\log_{200} 5 + y\log_{200} 2 = z$, to $x+y+z$ wynosi:

I **6** **II** **7** **III** **8** **IV** **9**

15. Liczba elementów zbioru $A = \{(x, y) : 5y - 3x = 15 \quad i \quad x^2 + y^2 \leq 16\}$ wynosi:

I 0 **II** 1 **III** 2 **IV** więcej niż 2

16. Końce przekątnej prostokąta mają współrzędne (4, 3) i (-4, -3), pozostałe wierzchołki mają współrzędne, które też są liczbami całkowitymi.
Takich prostokątów może być:

I 2 **II** 3 **III** 4 **IV** 5

17. Dane są: okrąg, trójkąt równoboczny wpisany w ten okrąg i trójkąt równoboczny opisany na tym okręgu. Stosunek pól trójkąta opisanego i trójkąta wpisanego wynosi

I $\sqrt{3}$ **II** 4 **III** 3 **IV** 2

18. Pierwsza pompa napełnia zbiornik w ciągu 4,5 godziny, druga pompa napełnia ten sam zbiornik w ciągu 9 godzin. Obie pompy, pracując jednocześnie, napełnią ten zbiornik w czasie:

I 1 godziny **II** 2 godzin **III** 3 godzin **IV** 4 godzin

19. Suma *n* początkowych wyrazów ciągu geometrycznego wynosi $S_n = 3 \cdot (1 - 3^{-n})$. Ile wynosi wyraz a_n w tym ciągu ?

I $\frac{2}{3^n}$ **II** $\frac{2}{3^{n-1}}$ **III** $\frac{1}{3^{n-1}}$ **IV** $\frac{1}{3^n}$

20. Obrazem wykresu funkcji f w przesunięciu o wektor $[1; -2]$
jest wykres funkcji $g(x) = x^2 - 3x - 3$. Jaki jest wzór funkcji f?

I $f(x) = x^2 + x - 3$ **II** $f(x) = x^2 - x + 3$

III $f(x) = x^2 + x + 3$ **IV** $f(x) = x^2 - x - 3$

ODPOWIEDZI

Prawidłowe odpowiedzi zaznaczono znakiem **X**.

Numer pytania	Odpowiedź				Zaliczono punktów
	I	II	III	IV	
1			**x**		
2	**x**				
3			**x**		
4			**x**		
5				**x**	
6		**x**			
7	**x**				
8	**x**				
9				**x**	
10		**x**			
11	**x**				
12		**x**			
13			**x**		
14	**x**				
15				**x**	
16				**x**	
17		**x**			
18			**x**		
19		**x**			
20				**x**	

ETAP 2 - FINAŁ

Część I

Zadania

Zadanie 1

W trapezie ABCD, AB||CD, $|\angle DAB| = 30^o$, $|\angle ABC| = 60^o$. Punkty E,F,G,H są środkami boków DA, AB, BC, CD odpowiednio.
Niech |AB| = 10, |EG| = 6. Wyznacz długość odcinka HF.

Zadanie 2

Znajdź wspólne styczne do wykresów funkcji $y = x^2$ oraz $y = -x^2 + 6x - 5$

Zadanie 3

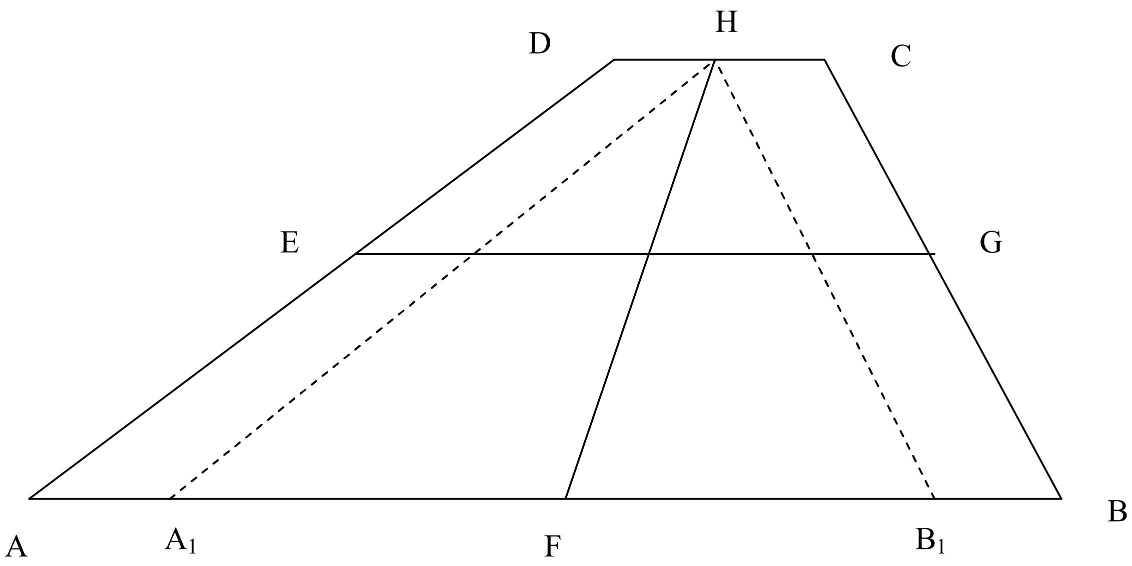
Wektor $\vec{u}$ nazywamy ***kombinacją liniową*** wektorów $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ gdy istnieją liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ takie, że $\vec{u} = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + \ldots + a_n \vec{v}_n$.

Wektor $\vec{u} = [1, 2]$ zapisz jako kombinację liniową wektorów $\vec{v}_1 = [2, 1]$, $\vec{v}_2 = [4, 3]$.

Rozwiązania zadań

Zadanie 1

Szkic rozwiązania I.



Niech $HB_1 \parallel CB$, $HA_1 \parallel AD$

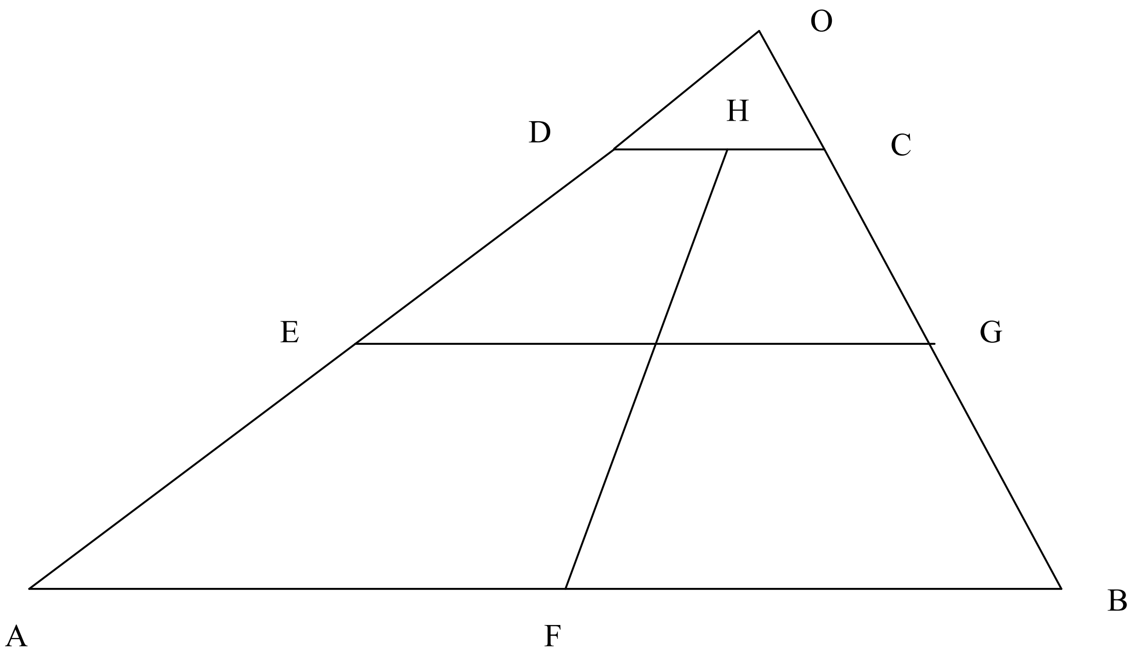
$|EG| = 0{,}5(|DC| + |AB|)$. Stąd $|DC| = 2$

Zatem $|A_1B_1| = 8$ oraz $|A_1F| = |FB_1| = 4$

Zauważmy, że $|\angle A_1HB_1| = 90^o$,

Opisując okrąg na trójkącie A_1B_1H (lub porównując pola ΔA_1FH i ΔFB_1H) otrzymamy $|FH| = 4$

Szkic rozwiązania II.



Przedłużenia boków AD i BC przecinają się w punkcie O.
1) Trójkąt ABO jest prostokątny. AB jest średnicą okręgu opisanego na trójkącie ABO.
2) Trójkąty ABO i DCO są podobne.
3) $|EG| = 0,5(|DC| + |AB|)$. Stąd $|DC| = 2$
4) Z 2) $|HO| = 0,5|DC| = 1$, na podstawie 1) $|FH| + |HO| = 0,5|AB|$
Zatem $|FH| = 4$

Zadanie 2

Rozwiązanie I

Szukamy takich a, b aby każde z równań

$$x^2 = ax + b \qquad (1)$$

$$-x^2 + 6x - 5 = ax + b \qquad (2)$$

miało dokładnie jedno rozwiązanie.

Z (1): $x^2 - ax - b = 0$, $\quad \Delta = a^2 + 4b$

Z (2): $x^2 + x(a-6) + b + 5 = 0$, $\quad \Delta = a^2 - 12a + 36 - 4b - 20 = a^2 - 12a + 16 - 4b$

Rozwiązując układ równań:

$$a^2 + 4b = 0$$

$$a^2 - 12a + 16 - 4b = 0$$

otrzymujemy dwa rozwiązania:

$$a_1 = 4,\ b_1 = -4 \quad \text{oraz} \quad a_2 = 2,\ b_1 = -1$$

Odpowiedź: Są dwie styczne: $y = 4x - 4$ oraz $y = 2x - 1$.

Rozwiązanie II

Równanie stycznejdo funkcji $y = x^2$ w punkcie (0, a) ma postać $y - a^2 = 2a(x - a)$ czyli

$$y = 2ax - a^2,\ a \in R. \qquad (I)$$

Wystarczy wyznaczyć a, dla którego równanie

$$2ax - a^2 = -x^2 + 6x - 5 \qquad (II)$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie (gdyż osie symetrii wykresów obu funkcji są różne (III)).

Mamy $x^2 + (2a-6)x + 5 - a^2 = 0$, $\Delta = 8a^2 - 24a + 16 = 8(a-1)(a-2)$

Zatem a = 1 lub a = 2.

Wobec tego są dwie styczne: $y = 4x - 4$ oraz $y = 2x - 1$.

Zadanie 3

Rozwiązanie

Szukamy takich a_1, a_2 aby

$$[1,2] = a_1[2,1] + a_2[4,\ 3]$$

Stąd:

$$2a_1 + 4a_2 = 1$$

$$a_1 + 3a_2 = 2$$

Rozwiązując ten układ równań otrzymujemy:

$$a_1 = -2{,}5\ ,\ a_2 = 1{,}5$$

Odpowiedź: $\vec{u} = -2{,}5\vec{v_1} + 1{,}5\vec{v_2}$.

Część II

PYTANIA TESTOWE

Po każdym pytaniu są podane 4 odpowiedzi oznaczone cyframi rzymskimi I, II, III i IV. Z tych odpowiedzi jedna, dwie, trzy lub cztery są prawdziwe.

1. Na każdym boku kwadratu wybrano po jednym punkcie tak, aby tworzyły wierzchołki rombu. Wtedy

I Środek symetrii tego rombu jest zawsze środkiem symetrii kwadratu
II Taki romb jest zawsze kwadratem
III Pole takiego rombu może być mniejsze od połowy pola kwadratu
IV Pole takiego rombu może być równe 0,75 pola kwadratu

2. Niech $x = \left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{5}}$ $\quad y = \left(\sqrt[3]{4}\right)^{\sqrt{2}}$, wtedy

I $x > y$.

II $x < y$.

III $x^{\sqrt{2}} < y^{\sqrt{5}}$

IV $x^{\sqrt{5}} = y^{\sqrt{8}}$.

3. Wielomiany W(x) i P(x) są funkcjami nieparzystymi. Wówczas funkcją nieparzystą jest również

I Suma wielomianów W(x) i P(x)
II Iloczyn wielomianów W(x) i P(x)
III Złożenie wielomianów W(x) i P(x)
IV Różnica wielomianów W(x) i P(x)

4. Rozpatrujemy szesnastokąt foremny. Tworzymy wszystkie trójkąty prostokątne, których wierzchołki są wierzchołkami tego szesnastokąta.

I Trójkątów takich jest nie więcej niż 100
II Trójkątów takich jest co najmniej 100
III Wszystkie te trójkąty mają takie samo pole
IV Liczba takich trójkątów jest podzielna przez 8.

5. Dla układu równań

$$\begin{cases} x^2 = y^2 \\ x^2 + y^2 - 2x = t \end{cases} \quad t \in R$$

rozpatrujemy funkcję $f(t)$ o wartościach równych liczbie rozwiązań tego układu. Wtedy

I $f(0) > 0$.

II Funkcja f jest niemalejąca.

III Zbiór wartości funkcji *f* jest dwuelementowy

IV Funkcja *f* jest różnowartościowa.

6. Który z poniższych ułamków ma rozwinięcie dziesiętne nieskończone:

I $\dfrac{1}{24^{100}}$

II $\dfrac{1}{25^{100}}$

III $\dfrac{1}{625\,000\,000\,000}$

IV $\dfrac{1}{12\,000\,000\,000}$

7. Który z poniższych zbiorów jest jednoelementowy:

I { Ø }
II { Ø, a }
III { a, {a} }
IV {{ Ø, a, {a}}}

8. Dana jest funkcja $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{-x^2 + x - 1}$. Które ze zdań jest prawdziwe:

I Dla każdego $x \in R$: $f(x) < 0$
II Istnieje $x \in R$ taki, że $f(x) = -1$
III Jeżeli $f(x) = 0$ to $x = 0$
IV Dla każdego $x \in R$: $f(x) \cdot f(-x) = 1$

9. Które z poniższych równań ma dokładnie dwa pierwiastki rzeczywiste:

I $\log_2 x = x + 3$
II $\log_2 x = x - 3$
III $\log_{0,5} x = x + 3$
IV $\log_{0,5} x = x - 3$

10. W którym z poniższych przypadków okręgi O_1, O_2 są styczne:

I $O_1:\ x^2 + y^2 = 25$; $O_2:\ (x+6)^2 + (y+8)^2 = 100$

II $O_1:\ x^2 + y^2 = 25$; $O_2:\ (x+6)^2 + (y+8)^2 = 25$

III $O_1:\ x^2 + y^2 = 100$; $O_2:\ (x+6)^2 + (y+8)^2 = 25$

IV $O_1:\ x^2 + y^2 = 225$; $O_2:\ (x+6)^2 + (y+8)^2 = 25$

ODPOWIEDZI

Prawidłowe odpowiedzi zaznaczono znakiem **X**.

Numer pytania	Odpowiedź			
	I	II	III	IV
1	X	X		X
2	X		X	
3	X		X	X
4		X		X
5	X			
6	X			X
7	X			X
8	X	X	X	X
9		X		
10		X		X

ZADANIA Z KONKURSU 2015-2016

ETAP 1

1. Ile rozwiązań ma równanie $|2x+1| = 2x$?

I Nie ma rozwiązań.
II Ma dokładnie jedno rozwiązanie.
III Ma nieskończenie wiele rozwiązań.
IV Ma dokładnie dwa rozwiązania.

2. Dana jest funkcja $f(x) = \dfrac{1}{x^4+4}$, $x \in <-1; 2>$. Który z podanych zbiorów jest zbiorem wartości tej funkcji:

I $<0{,}05;\ 0{,}2>$ **II** $<0{,}05;\ 0{,}25>$
III $<0{,}05;\ 1>$ **IV** $(0;\ 1>$

3. Średnia arytmetyczna dwóch liczb jest równa 6. Ich średnia geometryczna wynosi 4.
Wtedy liczby te są pierwiastkami równania

I $x^2+12x+4=0$ **II** $x^2-6x+4=0$
III $x^2-12x+16=0$ **IV** $x^2+6x+16=0$

4. Na pewnym kwadracie opisano okrąg O_1 i wpisano w ten kwadrat okrąg O_2. Stosunek pola koła ograniczonego okręgiem O_1 do pola koła ograniczonego okręgiem O_2 jest równy:

I $\sqrt{2}$ **II** 2
III $2\sqrt{2}$ **IV** $2\sqrt{3}$

5. AB jest średnicą okręgu o środku O. C jest punktem na tym okręgu, takim, że kąt BOC ma miarę 60°. Jeśli długość średnicy wynosi 10 to długość odcinka AC wynosi:

I $4\sqrt{3}$ **II** 6
III $6\sqrt{3}$ **IV** $5\sqrt{3}$

6. Niech $d = a^2+b^2+c^2$ gdzie *a*, *b* to kolejne liczby całkowite oraz $c = ab$.
Wtedy $\sqrt{d}$

I zawsze jest liczbą parzystą
II zawsze jest liczbą nieparzystą
III jest niekiedy liczbą parzystą a niekiedy nieparzystą
IV jest niekiedy liczbą wymierną a niekiedy niewymierną

7. Cyfrą jedności liczby 1! + 2! + ...+ 99! jest:

I 9 **II** 5 **III** 3 **IV** 0

8. X jest zbiorem. Ile rozwiązań ma zależność $\{1,2\} \subset X \subset \{1,2,3,4,5\}$:

I 8 **II** 6 **III** 4 **IV** żaden z tych wyników

9. W trójkąt równoboczny o boku a wpisano okrąg. Następnie w ten okrąg wpisano kwadrat. Pole tego kwadratu wynosi:

I $\frac{a^2}{3}$ **II** $\frac{a^2}{6}$ **III** $\frac{a^2}{12}$ **IV** $\frac{a^2}{24}$

10. Liczby rzeczywiste x, y spełniają równość: $(x+3)^2 + (y-4)^2 = 6^2$.
Wtedy wyrażenie $x^2 + y^2$ ma najmniejszą wartość równą:

I 2 **II** $\sqrt{2}$ **III** 5 **IV** 1

11. Ile jest funkcji różnowartościowych ze zbioru {1, 2, 3, 4, 5} w zbiór {a, b, c, d, e} ?

I 5! **II** 2^5 **III** 5^2 **IV** 5^5

12. Kran A napełnia basen w 18 godzin, zaś kran B w 12 godzin. W jakim czasie oba krany pracując równocześnie napełnią basen?

I w 6 godzin **II** w 6 godzin i 36 minut
III w 7 godzin i 12 minut **IV** w 9 godzin

13. Dla jakich wartości *m* układ równań

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x - y + m = 0 \end{cases}$$

ma dokładnie dwa rozwiązania?

I dla $m \in (-2;\, 2)$ **II** dla $m \in <-2;\, 2>$
III dla $m \in (-4;\, 4)$ **IV** dla $m \in <-4;\, 4>$

14. Która z poniższych brył ma największe pole powierzchni całkowitej?

I kula o promieniu 3
II walec o promieniu podstawy 4 i wysokości 1
III stożek o wysokości 3 i tworzącej 5
IV sześcian o przekątnej $\frac{5\sqrt{10}}{2}$

15. Funkcja f każdej liczbie naturalnej przyporządkowuje sumę jej dzielników naturalnych. Ile wynosi $f(f(10))$

I 36 **II** 18^2 **III** 57 **IV** 39

16. Wykres funkcji $y = x^2 + x$ przesunięto o wektor [1, 2], a następnie otrzymany wykres odbito symetrycznie względem początku układu współrzędnych. Otrzymano wykres funkcji:

I $y = -x^2 - x - 2$ **II** $y = -x^2 + x - 2$

III $y = -x^2 - x + 2$ **IV** $y = -x^2 + x + 2$

17. Dane są zbiory: *A* = {a, {a}}, *B* = {a}. Wypowiadamy dwa zdania Z1: $B \subset A$ i Z2: $B \in A$

I oba zdania są fałszywe

II zdanie Z1 jest fałszywe, a zdanie Z2 jest prawdziwe

III zdanie Z1 jest prawdziwe, a zdanie Z2 jest fałszywe

IV oba zdania są prawdziwe

18. Czy ciąg (a_n), w którym $a_n = \sin\frac{1}{n}$ jest:

I malejący i zbieżny **II** rosnący i zbieżny

III malejący i rozbieżny **IV** rosnący i rozbieżny

19. Suma cyfr iloczynu liczb 99999985 i 100000015 jest równa

I 118 **II** 135 **III** 136 **IV** 144

20. Ile przekątnych ma 18-kąt wypukły?

I 118 **II** 135 **III** 136 **IV** 144

ODPOWIEDZI

Prawidłowe odpowiedzi zaznaczono znakiem **X**.

Numer pytania	Odpowiedź			
	I	II	III	IV
1	x			
2		x		
3			x	
4		x		
5				x
6		x		
7			x	
8	x			
9		x		
10				x
11	x			
12			x	
13	x			
14		x		
15				x
16	x			
17				x
18	x			
19			x	
20		x		

ETAP 2 - FINAŁ

Część I

Zadania

Zadanie 1.

Wyznaczyć rozwiązania równania

$$xy + x - 5y = -6$$

które są liczbami całkowitymi.

Zadanie 2.

Na wykresie funkcji $y = \sqrt{2} \cdot x^2$ znajdź punkt położony najbliżej punktu $P = (1,0)$.

Zadanie 3.

Dana jest funkcja $f : X \to Y$ oraz zbiór $G \subset Y$. Przeciwobrazem zbioru G nazywamy zbiór, który oznaczamy $f^{-1}(G)$ i określamy następująco:

$$f^{-1}(G) = \{x \in X : f(x) \in G\}$$

Wyznacz $f^{-1}(G)$ gdy:

a) $f : R \to R,\ f(x) = x^2,\ G = (1;4)$

b) $f : R \to R,\ f(x) = \dfrac{1}{1+x^2},\ G = (0;\ 0{,}25 >$

c) $f : X \to N$, X – zbiór par liczb naturalnych, $f(m,n) = m \cdot n + 1,\ G = \{4,\ 5\}$

d) $f : X \to R$, X – zbiór punktów płaszczyzny, M – ustalony punkt tej płaszczyzny, $f(P)$ jest długością odcinka PM, $G = (-1;4)$

Rozwiązania zadań

Zadanie 1.

Rozwiązanie.

Przekształcamy równanie do postaci

$y = -1 - \frac{11}{x-5}$ gdy $x \neq 5$ (dla $x = 5$ równanie jest sprzeczne)

Liczba 11 dzieli się tylko przez 1 i 11.
Stąd otrzymamy rozwiązania:
$x = 6$, $y = -12$;
$x = 4$, $y = 10$;
$x = 16$, $y = -2$;
$x = -6$, $y = 0$;

Sposób alternatywny.
Przekształcamy równanie do postaci

$x = 5 - \frac{11}{y+1}$ gdy $y \neq -1$ (dla $y = -1$ równanie jest sprzeczne)

Liczba 11 dzieli się tylko przez 1 i 11.
Stąd też otrzymamy powyższe rozwiązania.

Zadanie 2.

Rozwiązanie.

Oznaczmy poszukiwany punkt: $(x, \sqrt{2} \cdot x^2)$

Jego odległość od punktu P jest równa $f(x) = \sqrt{(x-1)^2 + 2x^4}$, $x \in R$

$f(x)$ ma wartość najmniejszą gdy wyrażenie podpierwiastkowe ma wartość najmniejszą.

Oznaczmy: $g(x) = (x-1)^2 + 2x^4 = x^2 - 2x + 1 + 2x^4$

Obliczamy pochodną: $g'(x) = 2x - 2 + 8x^3$

Zauważmy, że $g'(0{,}5) = 0$. Po podzieleniu wielomianu $g(x)$ przez $x - 0{,}5$ otrzymujemy:

$g'(x) = (x - 0{,}5)(8x^2 + 4x + 4)$

Zatem: $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0{,}5$

Ponieważ w punkcie $x = 0{,}5$ pochodna zmienia znak z minusa na plus i jest to jedyne ekstremum, więc w tym punkcie wartość funkcji jest najmniejsza.

Odpowiedź. Szukanym punktem jest $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$.

Zadanie 3.

Szkic rozwiązania.

Ad. a) Na podstawie wykresu $f^{-1}(G) = (-2;-1) \cup (1;2)$.

Ad. b) Na podstawie wykresu $f^{-1}(G) = (-\infty;-\sqrt{3} > \cup < \sqrt{3};\infty)$.

Ad. c) Na podstawie zależności $mn = 3$ i $mn = 4$ $f^{-1}(G) = \{(1;3), (3;1), (1;4), (4;1), (2;2)\}$.

Ad. d) Na podstawie interpretacji geometrycznej $f^{-1}(G) =$ Koło bez brzegu o środku M i promieniu o długości równej długości odcinka PM.

Część II

PYTANIA TESTOWE

Po każdym pytaniu są podane 4 odpowiedzi oznaczone cyframi rzymskimi I, II, III i IV. Z tych odpowiedzi jedna, dwie, trzy lub cztery są prawdziwe.

1. Wielomian $x^4 + 5x^3 + 15x - 9$ ma pierwiastki, których

I Iloczyn jest dodatni.

II Iloczyn jest ujemny.

III Suma jest dodatnia.

IV Suma jest ujemna.

2. Prostą $x + 2y + 1 = 0$ obrócono wokół początku układu współrzędnych o 90^o zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Otrzymano prostą

I $2x - y - 1 = 0$ **II** $x + 2y - 1 = 0$

III $2x - y + 1 = 0$ **IV** $x - 2y + 1 = 0$

3. Rozpatrujemy równanie $x^2 - 2|x| + k = 0$

Które z poniższych stwierdzeń jest prawdziwe?
Istnieje liczba rzeczywista *k*, że równanie to ma dokładnie

I jedno rozwiązanie.

II dwa rozwiązania.

III trzy rozwiązania.

IV cztery rozwiązania.

4. Który z poniższych ciągów nie jest rosnący?

I $a_n = \frac{-5n + 6}{2}$ **II** $b_n = n^{-2} + 1$

III $c_n = 2^{-n} - 1$ **IV** $d_n = \frac{2}{n}$

5. Który z poniższych szeregów geometrycznych jest zbieżny?

I $1 + \log_5 4 + (\log_5 4)^2 + (\log_5 4)^3 + \ldots$

II $1 + \sin\pi + \sin^2\pi + \sin^3\pi + \ldots$

III $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$

IV $1+\sin(\pi/2)+\sin^2(\pi/2)+\sin^3(\pi/2)+.....$

6. Który z poniższych ciągów jest zbieżny:

I $a_n = \lg\frac{1}{n}$ **II** $b_n = \lg\frac{n}{n+1}$ **III** $c_n = 2^{\frac{n^2}{1-n}}$ **IV** $d_n = (0{,}5)^{\frac{n^2}{1-n}}$

7. Który z poniższych układów równań ma dokładnie cztery rozwiązania:

I $\begin{cases} xy = 1 \\ x^2 + y^2 = 2{,}25 \end{cases}$ **II** $\begin{cases} |y| = x^2 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$

III $\begin{cases} |y| = x^2 \\ xy = 1 \end{cases}$ **IV** $\begin{cases} |xy| = 1 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$

8. Które z poniższych zdań jest prawdziwe:

I Mediana liczb $x_1, x_2, ..., x_n$ jest równa medianie liczb $x_1 + k, x_2 + k, ..., x_n + k$

II Mediana liczb $x_1, x_2, ..., x_n$ jest równa medianie liczb $2x_1, 2x_2, ..., 2x_n$

III Wariancja liczb $x_1, x_2, ..., x_n$ jest równa wariancji liczb $x_1 + k, x_2 + k, ..., x_n + k$

IV Wariancja liczb $x_1, x_2, ..., x_n$ jest cztery razy mniejsza niż wariancja liczb $2x_1, 2x_2, ..., 2x_n$

9. Które z poniższych zdań jest prawdziwe:

I Istnieje graniastosłup, którego liczba krawędzi jest równa 6789.

II Istnieje ostrosłup, którego liczba krawędzi jest równa 6789.

III Istnieje graniastosłup, którego liczba krawędzi jest o 6789 większa niż liczba ścian

IV Istnieje ostrosłup, którego liczba krawędzi jest o 6789 większa niż liczba ścian

10. Która z poniższych funkcji ma okres równy π:

I $f(x) = 2\sin\left(\frac{4x+\pi}{2}\right)$

II $f(x) = 2\sin(x+\pi)$

III $f(x) = \sin^2(x+\pi)$

IV $f(x) = 0{,}5\sin\left(\frac{x}{2}+\pi\right)$

ODPOWIEDZI

Prawidłowe odpowiedzi zaznaczono znakiem **X**.

Numer pytania	Odpowiedź			
	I	II	III	IV
1		X		X
2			X	
3		X	X	X
4	X	X	X	X
5	X	X		
6		X	X	
7	X	X		X
8			X	X
9	X			X
10	X		X	

ZADANIA Z KONKURSU 2016-2017

ETAP 1

1. Boki trójkąta mają długości x, y, z i spełniające warunek
$$0 \le x \le 1 \le y \le 2 \le z \le 3$$
Maksymalne pole powierzchni tego trójkąta wynosi:

I 1 **II** $\sqrt{2}$ **III** 2 **IV** $\sqrt{5}$

2. Liczba pierwiastków równania $x^5 + (x+1)^5 + (x+2)^5 = 0$ wynosi:

I 5 **II** 3 **III** 1 **IV** 0

3. Środkowe trójkąta mają długość: 9; 12; 15. Pole powierzchni tego trójkąta wynosi:

I 54 **II** 72 **III** 90 **IV** 108

4. Wskazówka godzinowa i minutowa w ciągu doby są prostopadłe:

I 24 razy **II** 40 razy

III 44 razy **IV** 48 razy

5. Dana jest funkcja $f(x) = \pi^x$. Która z poniższych równości jest prawdziwa dla każdego $a, b \in R$:

I $f(a) + f(b) = f(a+b)$

II $f(a) - f(b) = f(a-b)$

III $f(a) \cdot f(b) = f(a+b)$

IV $f(a) + f(b) = \log_\pi (a \cdot b)$

6. W trapezie równoramiennym podstawy mają długość 6 i 2 a przekątne są prostopadłe. Wysokość tego trapezu ma długość:

I 3 **II** 4 **III** 5 **IV** 6

7. Najmniejszy wyraz ciągu określonego wzorem $a_n = \frac{n^2}{2^n}$ n = 1,2, 3, ... to:

I a_1 **II** a_2

III a_3 **IV** nie istnieje wyraz najmniejszy

8. Liczby a, b są pierwsze. Wtedy liczba $a^n b^m$ ma:

I 3 dzielniki **II** 4 dzielniki

III n + m dzielników **IV** (n + 1)(m + 1) dzielników

9. Trójmian $ax^2 + bx + c$ ma wszystkie współczynniki tego samego znaku (różne od zera). Trójmian ten

I Nie ma pierwiastków rzeczywistych.
II Ma dwa pierwiastki tego samego znaku.
III Jeśli ma pierwiastki rzeczywiste to są one ujemne.
IV Jeśli ma pierwiastki rzeczywiste to są one różnych znaków.

10. Ile jest par (x, y) spełniających układ równań

$$\begin{cases} |xy| = 1 \\ x^2 + y^2 = 3 \end{cases} ?$$

I Nie ma rozwiązań.
II Ma dwa rozwiązania.
III Ma cztery rozwiązania.
IV Ma osiem rozwiązań.

11. Dana jest funkcja $f(x) = \sqrt{x^4 - 1} + \sqrt{1 - x^8}$. Który z podanych zbiorów jest zbiorem wartości tej funkcji:

I $< 0, 1 >$ **II** { 0 } **III** $(0; \infty)$ **IV** $(0; 1>$

12. Dane są zbiory: A = {a, b} , B = {{a, b}, a, b}. Które z poniższych zdań jest prawdziwe?

I Zbiory A i B są równe.
II A jest podzbiorem B i A jest elementem B.
III A jest podzbiorem B i A nie jest elementem B.
IV A nie jest podzbiorem B i A jest elementem B.

13. Który z poniższych ułamków zwykłych ma rozwinięcie dziesiętne skończone?

I $\frac{1}{1024^{1024}}$ **II** $\frac{1}{2222^{2222}}$ **III** $\frac{1}{5555^{5555}}$ **IV** $\frac{1}{1500^{1500}}$

14. Symbol $n!$ oznacza iloczyn $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$.
Cyfrą jedności liczby 1! + 3! + 5! + 7! +…+ 49! jest:

I 9 **II** 5 **III** 7 **IV** 0

15. Funkcja *f* każdej liczbie naturalnej przyporządkowuje liczbę jej dzielników naturalnych. Ile wynosi $f(f(24))$

I 64 **II** 32 **III** 16 **IV** 4

16. Wykres funkcji $f(x)=\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}$ odbito symetrycznie względem prostej $y=x$. Wykres której z poniższych funkcji otrzymano?

I $f(x)=\frac{3}{2}x+\frac{3}{4}$ **II** $f(x)=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$

III $f(x)=\frac{3}{2}x-\frac{3}{4}$ **IV** $f(x)=-\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}$

17. Dany jest ciąg $(a_n)=\frac{1}{\sin\frac{3}{n}}$. Które z poniższych zdań jest prawdziwe?

I Ciąg (a_n) jest rosnący.

II Istnieje wyraz ciągu (a_n) równy 1.

III Istnieje nieskończenie wiele wyrazów ciągu (a_n) większych niż 1000.

IV Istnieje nieskończenie wiele wyrazów ciągu (a_n) mniejszych niż 1000.

18. Kwadrat K_1 ma pole równe 1. Zbudowano kwadraty K_2 ,K_3 ,K_4 ,…,K_n takie, że bok kwadratu K_p ma długość dwa razy mniejszą niż bok kwadratu K_{p-1} dla p = 2,3,4,…,n. Ile wynosi suma pól wszystkich kwadratów (łącznie z K_1)?

I $\frac{2^n-1}{2^{n-1}}$ **II** $\frac{4^n-1}{3\cdot 4^{n-1}}$ **III** $\frac{2^{n-1}+3}{4}$ **IV** $\frac{4^n}{3\cdot 4^{n-1}}$

19. W sześcianie A połączono odcinkami środki sąsiednich ścian otrzymując bryłę B. Ile wynosi stosunek objętości bryły B do objętości sześcianu A?

I $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **II** $\frac{1}{2}$ **III** $\frac{1}{6}$ **IV** $\frac{\sqrt{2}}{4}$

20. Kula o promieniu R ma takie samo pole powierzchni jak sześcian, którego przekątna ma długość 1. Ile wynosi R?

I $\sqrt{\frac{1}{2\pi}}$ **II** $\sqrt{\frac{1}{4\pi}}$ **III** $\sqrt{\frac{\pi}{4}}$ **IV** $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

ODPOWIEDZI

Prawidłowe odpowiedzi zaznaczono znakiem **X**.

Numer pytania	Odpowiedź			
	I	II	III	IV
1	x			
2			x	
3		x		
4			x	
5			x	
6		x		
7				x
8				x
9			x	
10				x
11		x		
12		x		
13	x			
14			x	
15				x
16	x			
17			x	
18		x		
19			x	
20	x			

ETAP 2 - FINAŁ

Część I

Zadania

Zadanie 1.

Rozwiązać układ równań $\begin{cases} y^2 = x^3 - 3x^2 + 2x \\ x^2 = y^3 - 3y^2 + 2y \end{cases}$

Zadanie 2.

Dana jest parabola o równaniu

$$y = ax^2 + 4a$$

w którym a jest stałą dodatnią. Do tej paraboli poprowadzono styczną równoległą do prostej $y = x$. Oznaczmy: O – początek układu współrzędnych, A – wierzchołek paraboli, M – punkt styczności. Oblicz pole trójkąta OAM.

Zadanie 3.

Definicja.

Zdarzenia A, B nazywamy **niezależnymi** jeśli prawdopodobieństwo iloczynu tych zdarzeń jest równe iloczynowi prawdopodobieństw tych zdarzeń, tzn. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

1) Niech A, B będą zdarzeniami niezależnymi. A', B' to zdarzenia do nich przeciwne.
   Udowodnić, że wtedy
   a) Zdarzenia A, B' też są zdarzeniami niezależnymi,
   b) Zdarzenia A', B' też są zdarzeniami niezależnymi.
2) Czy zdarzenia rozłączne są zawsze niezależne?

Zadanie 1.

Szkic rozwiązania.

Odejmując pierwsze równanie od drugiego równania i wyłączając $(y-x)$ otrzymamy

$(y-x)(y+x+x^2+xy+y^2-3y-3x+2)=0$

Stąd $x=y$ co daje rozwiązania (0, 0), $(2-\sqrt{2}, 2-\sqrt{2})$, $(2+\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$.

Drugi czynnik nie ma pierwiastków (trójmian kwadratowy z parametrem o wyróżniku ujemnym).

Zadanie 2.

Szkic rozwiązania.

Styczna ma równanie: $y=x+k$.

Ma ona jeden punkt wspólny z parabolą, zatem równanie $ax^2+4a=x+k$

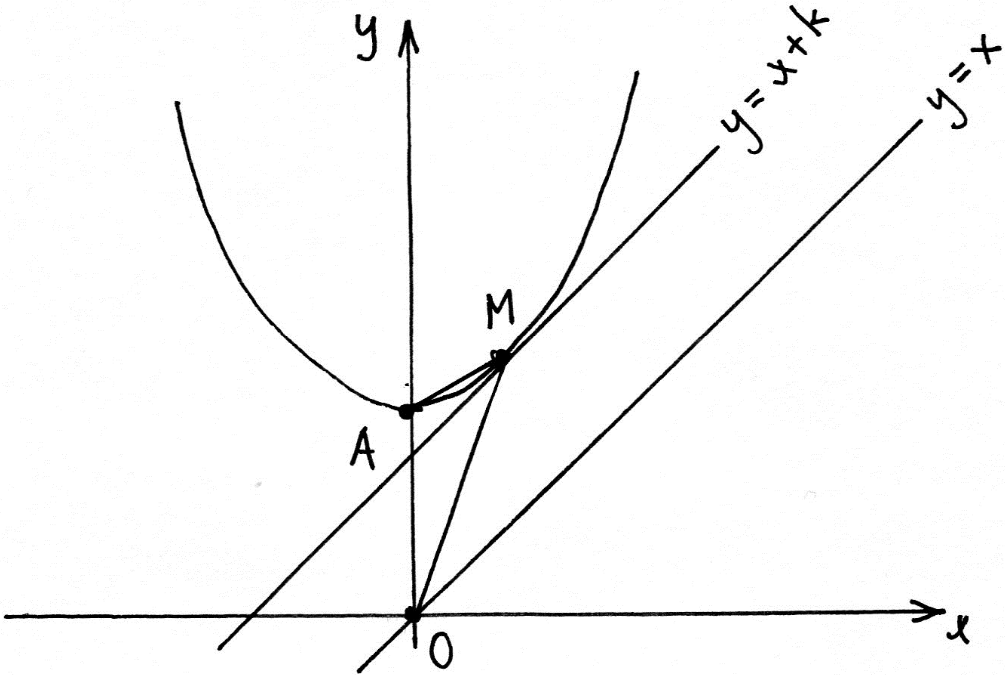
czyli $$ax^2-x+4a-k=0 \qquad (1)$$
ma jedno rozwiązanie.

Tak jest, gdy $$1-4a(4a-k)=0$$

Stąd: $$k=\frac{16a^2-1}{4a}, \quad x=\frac{1}{2a}$$

Zatem: $O=(0, 0)$, $A=(0, 4a)$, $M=(\frac{1}{2a}, y)$

Pole P trójkąta OAM jest równe $\frac{|OA|h}{2}$, gdzie $|OA|=4a$, zaś h jest odległością punktu M od osi Oy, czyli $h=\frac{1}{2a}$. Stąd dostajemy $P=1$.



Zadanie 3.

Szkic rozwiązania.

1) a) $P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A) \cdot P(B')$,

b) wynika z a).

2) Nie, tylko gdy co najmniej jedno z tych zdarzeń jest zdarzeniem niemożliwym.

Część II

PYTANIA TESTOWE

Po każdym pytaniu są podane 4 odpowiedzi oznaczone cyframi rzymskimi I, II, III i IV. Z tych odpowiedzi jedna, dwie, trzy lub cztery są prawdziwe.

1. Który z poniższych ciągów jest monotoniczny?

I $a_n = \sin\left(\frac{8n-5}{5n}\right)$

II $b_n = \cos\left(\frac{8n-5}{5n}\right)$

III $c_n = \mathrm{tg}\left(\frac{8n-5}{5n}\right)$

IV $d_n = \mathrm{tg}\left(\frac{3n-2}{2n}\right)$

2. Które z poniższych równań nie ma rozwiązania?

I $\sin x + |\log_3 x| = 0$

II $\cos x - |\log_3 x| = 0$

III $x + |\log_3 x| = 0$

IV $x - \log_3 x = 0$

3. Który z poniższych zbiorów jest podzbiorem zbioru $\{a, \{a, b\}, \{a\}\}$?

I $\{a, b\}$

II $\emptyset$

III $\{\{a\}\}$

IV $\{b\}$

4. Które z poniższych równań jest równaniem okręgu?

I $\frac{1}{(x^2+y^2)^2} = 1$

II $\frac{x^2-1}{y^2} = -1$

III $2^{x^2} 2^{y^2} = \mathrm{tg}\frac{\pi}{6}$

IV $2^{x^2} 2^{y^2} = \mathrm{tg}\frac{\pi}{3}$

5. Który z poniższych zbiorów ma więcej niż 1000 elementów?

I Zbiór wszystkich podzbiorów zbioru 10-elementowego
II Zbiór wszystkich trójelementowych podzbiorów zbioru 20-elementowego
III Zbiór wszystkich pięciowyrazowych ciągów o wyrazach ze zbioru 4-elementowego
IV Zbiór wszystkich czterowyrazowych ciągów o różnych wyrazach ze zbioru 8-elementowego

6. Które z poniższych zdań jest prawdziwe?

I Jeżeli w czworokącie przekątne są prostopadłe, to ten czworokąt jest rombem.
II Jeżeli w czworokąt można wpisać okrąg i na tym samym czworokącie można opisać okrąg, to ten czworokąt jest kwadratem.
III Dwusieczne kątów trójkąta przecinają się w jednym punkcie, który jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt.
IV Symetralne boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie, który jest środkiem ciężkości tego trójkąta.

7. Krzywe $|xy| = 1$, $(x+1)^2 + y^2 = 1$ mają punkty wspólne leżące w ćwiartkach

I Pierwszej. **II** Drugiej. **III** Trzeciej. **IV** Czwartej.

8. Niech $n > 12$ będzie liczbą pierwszą. Liczba $n!$ dzieli się przez

I $n+1$ **II** $n+2$ **III** $n+13$ **IV** $n+4$

9. Iloczyn logarytmów $\log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7$ jest równy:

I $\frac{1}{4}$ **II** $\frac{1}{3}$ **III** $\frac{1}{2}$ **IV** $\frac{2}{3}$

10. Który z poniższych szeregów geometrycznych nie dla każdej liczby rzeczywistej x jest zbieżny?

I $1 + \sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \ldots$

II $1 + \frac{1}{2+x^2} + \left(\frac{1}{2+x^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2+x^2}\right)^3 + \ldots$

III $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} + \ldots$

IV $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$

ODPOWIEDZI

Prawidłowe odpowiedzi zaznaczono znakiem **X**.

Numer pytania	Odpowiedź			
	I	II	III	IV
1		x		x
2	x		x	x
3		x	x	
4	x			x
5	x	x	x	x
6			x	
7		x	x	
8	x		x	
9				x
10	x		x	x

ZADANIA Z KONKURSU 2017-2018

ETAP 1

1. Które z poniższych zdań jest fałszywe:

I Każdy wielomian stopnia nieparzystego ma pierwiastki rzeczywiste.

II Istnieje wielomian stopnia czwartego, który ma wszystkie współczynniki całkowite i cztery pierwiastki niewymierne.

III Liczba pierwiastków rzeczywistych wielomianu stopnia nieparzystego też jest nieparzysta (nie uwzględniamy krotności pierwiastków).

IV Istnieje wielomian stopnia szóstego, który nie ma pierwiastków rzeczywistych.

2. $g(m)$ jest funkcją, której wartości są równe liczbie rozwiązań równania $x^2 + m = 0$ z niewiadomą *x*. Który z podanych zbiorów jest zbiorem wartości funkcji $f(m) = 2^{g(m)}$:

I $(0; \infty)$ **II** { 1, 2, 4 } **III** $< 1; \infty)$ **IV** $< 1; 4 >$

3. Zbiór A ma 3 elementy. Zbiór B jest zbiorem wszystkich podzbiorów zbioru A. Ile

trójelementowych podzbiorów ma zbiór B?

I 1 **II** 3 **III** 8 **IV** 56

4. Dokładnie jeden z poniższych ułamków zwykłych ma rozwinięcie dziesiętne

skończone. Który?

I $\frac{1}{1048576}$ **II** $\frac{1}{1048675}$ **III** $\frac{1}{1048678}$ **IV** $\frac{1}{1048980}$

5. Ile rozwiązań ma równanie $\cos 2x = x + 1$?

I 0 **II** 1 **III** 2 **IV** 3

6. Cena towaru wynosiła *p*. Cenę te podniesiono o *m*%. O ile procent obniżyć nową cenę, by znów wynosiła *p*?

I $\frac{100m}{m+100}$ **II** $\frac{m}{m+1}$

III *m* **IV** $\frac{m}{m+100}$

7. Dany jest ciąg $(a_n) = \log_2 \frac{(n^9 + n)^{11}}{(n^{10} + n)^{10}}$. Granica tego ciągu:

I jest równa zero.
II jest równa minus nieskończoność.
III jest równa plus nieskończoność.
IV nie istnieje.

8. Która z poniższych nierówności jest prawdziwa?

I $0{,}01 < \sin 0{,}01 < \mathrm{tg}0{,}01$ **II** $\sin 0{,}01 < 0{,}01 < \mathrm{tg}0{,}01$

III $\sin 0{,}01 < \mathrm{tg}0{,}01 < 0{,}01$ **IV** $0{,}01 < \mathrm{tg}0{,}01 < \sin 0{,}01$

9. Który z poniższych zbiorów jest dziedziną funkcji

$$\log_{x-1}(9-x^2)\ ?$$

I $(2;\,3)$ **II** $(2;\,3>$ **III** $(1;\,3)$ **IV** $(1;\,2)\cup(2;3)$

10. Dana jest funkcja

$$f(x)=|x+5|+|x+4|+.....+|x+1|+|x|+|x-1|+.....+|x-4|+|x-5|$$

Wskaż zdanie, które jest fałszywe:

I *f*(*x*) jest funkcją ciągłą,

II *f*(*x*) ma najmniejszą wartość równą 30,

III *f*(*x*) jest funkcją parzystą,

IV *f*(*x*) jest funkcją okresową.

11. Liczba dodatnich rozwiązań całkowitoliczbowych równania
$x^4 + y^4 = 625$ wynosi:

I 0 **II** 1 **III** 2 **IV** 4

12. Cyfra jedności liczby 2017^{2017} wynosi:

I 1 **II** 3 **III** 7 **IV** 9

13. Stosunek pola kwadratu wpisanego w półokrąg do pola kwadratu wpisanego w okrąg o tym samym promieniu jest równy:

I 2:3 **II** 1:2 **III** 2:5 **IV** 3:5

14. Liczb całkowitych nieujemnych mniejszych od 2017, które są podzielne przez 3 lub 4 lecz nie są podzielne przez 5 jest:

I 807 **II** 1008 **III** 840 **IV** 1041

15. Obydwa pierwiastki równania $x^2 - 39x + c = 0$ są liczbami pierwszymi.

Ile jest możliwych wartości wyrazu wolnego c?

I 1 **II** 2 **III** 4 **IV** ponad cztery

16. Ośmiokąt foremny ABCDEFGH ma pole powierzchni równe 1.
Wtedy prostokąt ABEF ma pole powierzchni równe:

I $\frac{1}{2}$ **II** $1-\frac{\sqrt{2}}{4}$

III $\sqrt{2}-1$ **IV** $\frac{1+\sqrt{2}}{4}$

17. Iloczyn logarytmów $\log_5 4\cdot\log_6 5\cdot\log_7 6\cdot\log_8 7$ jest równy:

I $\frac{1}{4}$ **II** $\frac{1}{3}$

III $\frac{1}{2}$ **IV** $\frac{2}{3}$

18. Funkcja f ma następujące własności

$$f(1)=1$$

$$f(2n)=nf(n) \quad n\in N, n\geq 1$$

Wartość $f\left(2^{100}\right)$ wynosi:

I 1 **II** 2^{100} **III** 2^{4950} **IV** 2^{9900}

19. Trójkąt ABC ma boki o długości |AC| = 5, |CB| = 3, |AB| = 4.
Wskaż zdanie, które jest fałszywe:

I Miara kąta BAC jest mniejsza od miary kąta ACB,

II Promień okręgu wpisanego w ten trójkąt ma długość równą 0,5,

III Środek okręgu opisanego na tym trójkącie leży na jednym z boków

IV Wysokości tego trójkąta przecinają się w wierzchołku trójkąta.

20. Trójkąt ABC ma boki, których długości spełniają równość

$$|AB|^2 = |BC|^2 + |BC||AC|$$

Wtedy:

I $|\angle ACB| = |\angle CAB|$ **II** $|\angle ACB| = 2|\angle CAB|$

III $|\angle ACB| = 3|\angle CAB|$ **IV** $2|\angle ACB| = |\angle CAB|$

ODPOWIEDZI

Prawidłowe odpowiedzi zaznaczono znakiem **X**.

Numer pytania	Odpowiedź			
	I	II	III	IV
1			**x**	
2		**x**		
3				**x**
4	**x**			
5				**x**
6	**x**			
7		**x**		
8		**x**		
9				**x**
10				**x**
11	**x**			
12			**x**	
13			**x**	
14	**x**			
15	**x**			
16	**x**			
17				**x**
18			**x**	
19		**x**		
20		**x**		

ETAP 2 - FINAŁ

Część I

Zadania

Zadanie 1.

Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} \log_2(5xy) = (\log_2 x)\cdot(\log_2 y) \\ \log_2(zy) \ = (\log_2 z)\cdot(\log_2 y) \\ \log_2(5xz) = (\log_2 x)\cdot(\log_2 z) \end{cases}$$

Zadanie 2.

Podaj wzór i narysuj wykres funkcji $f(k)$, która każdej liczbie rzeczywistej k przyporządkowuje liczbę rozwiązań równania

$$x^4 + 48 = kx$$

Przeczytaj uważnie poniższy tekst przed rozwiązywaniem zadania 3.

Działaniem w zbiorze liczb rzeczywistych nazywamy funkcję,
która każdej parze liczb rzeczywistych przyporządkowuje liczbę rzeczywistą.

Niech ♥ będzie działaniem w zbiorze liczb rzeczywistych.

Elementem *neutralnym* działania ♥ nazywamy taką liczbę rzeczywistą e,
że dla każdej liczby rzeczywistej x jest: x ♥ $e = e$ ♥ $x = x$

Elementem *odwrotnym* do liczby rzeczywistej x w działaniu ♥
nazywamy taką liczbę rzeczywistą $\underline{\underline{x}}$, że: x ♥ $\underline{\underline{x}} = \underline{\underline{x}}$ ♥ $x = e$.

PRZYKŁAD1.
Jeżeli ♥ jest dodawaniem, to elementem *neutralnym* jest liczba 0,
gdyż dla każdej liczby rzeczywistej x jest: $x + 0 = 0 + x = x$.
Elementem *odwrotnym* do liczby 5 jest liczba -5 gdyż $5 + (-5) = -5 + 5 = 0$.

PRZYKŁAD2.
Jeżeli ♥ jest mnożeniem, to elementem *neutralnym* jest liczba 1,
gdyż dla każdej liczby rzeczywistej x jest: $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$.
Elementem *odwrotnym* do liczby 5 jest liczba 0,2 gdyż $5 \cdot 0{,}2 = 0{,}2 \cdot 5 = 1$.

Zadanie 3.

a) W zbiorze liczb rzeczywistych określamy działanie ♥ : $x \heartsuit y = x + y + 2$.
Uzupełnij zdania:

W tym działaniu elementem *neutralnym* jest liczba ......

Elementem *odwrotnym* do liczby 5 jest liczba ......

b) W zbiorze liczb rzeczywistych określamy działanie ♥ : $x \heartsuit y = 2xy$.
Uzupełnij zdania:

W tym działaniu elementem *neutralnym* jest liczba ......

Elementem *odwrotnym* do liczby 1 jest liczba ......

Zadanie 1.

Szkic rozwiązania.

Odejmując stronami równanie pierwsze i trzecie otrzymamy równości:

a) $\log_2 x = 1$ (prowadzi do sprzeczności)

lub

b) $\log_2 y = \log_2 z$

skąd po podstawieniu wynika

1) $\log_2 y = 0$ co daje rozwiązanie $x = 0{,}2$; $y = 1$; $z = 1$,

2) $\log_2 y = 2$ co daje rozwiązanie $x = 20$; $y = 4$; $z = 4$.

Zadanie 2.

Szkic rozwiązania.

$y = kx$ jest prostą przechodzącą przez początek układu. Z wykresu funkcji $g(x) = x^4 + 48$ wynika, że funkcja f ma postać:

$$f(k) = \begin{cases} 0 \;\; dla \;\; k \in (-k_0; k_0) \\ 1 \;\; dla \;\; k = k_0 \;\; lub \;\; k = -k_0 \\ 2 \;\; dla \;\; k \in (-\infty; -k_0) \cup (k_0; \infty) \end{cases}$$

gdzie k_0 jest taką liczbą dodatnią, że prosta $y = k_0 x$ jest styczna do wykresu funkcji $g(x) = x^4 + 48$.

Niech $P = (x_0, y_0)$ będzie punktem styczności. Muszą być spełnione warunki:

(1) $y_0 = k_0 x_0$ gdyż punkt P leży na stycznej

(2) $y_0 = x_0^4 + 48$ gdyż punkt P leży na wykresie funkcji g

(3) $k_0 = 4x_0^3$ gdyż współczynnik kierunkowy stycznej jest równy $g'(x_0)$

Rozwiązując układ równań (1), (2), (3) otrzymujemy: $k_0 = 32$

Zatem:

$$f(k) = \begin{cases} 0 \;\; dla \;\; k \in (-32;\, 32) \\ 1 \;\; dla \;\; k = 32 \;\; \text{lub} \;\; k = -32 \\ 2 \;\; dla \;\; k \in (-\infty;\, -32) \cup (32;\, \infty) \end{cases}$$

Zadanie 3.

Poprawne odpowiedzi (kolejno: –2 ; –9 ; 0,5 ; 0,25)

Część II

PYTANIA TESTOWE

Po każdym pytaniu są podane 4 odpowiedzi oznaczone cyframi rzymskimi I, II, III i IV. Z tych odpowiedzi jedna, dwie, trzy lub cztery są prawdziwe.

1. Dana jest funkcja $f(x)=\begin{cases}\left|\left|\log_2|x|\right|\right| & dla\ x\neq 0\\ 0 & dla\ x=0\end{cases}$

Które z poniższych zdań jest prawdziwe?

I Funkcja *f* jest parzysta.
II Funkcja *f* osiąga ekstremum w trzech punktach.
III Funkcja *f* jest monotoniczna.
IV Funkcja *f* jest nieograniczona.

2. Która z poniższych figur jest wypukła?

I Półpłaszczyzna bez brzegu.
II Sfera.
III Trójkąt rozwartokątny.
IV Kula.

3. Wskaż zbiór jednoelementowy

I $\varnothing\cup\{\varnothing\}$ **II** $\{\varnothing\}\cup\{\varnothing\}$

III $\{\varnothing\}-\varnothing$ **IV** $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}-\{\{\varnothing\}\}$

4. Dla jakich wartości *a*, *b* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{an^2+n+2}{bn^2+4n+6}=0{,}25$

I $a=0,\ b=0$ **II** $a=2,\ b=8$

III $a=0,\ b=4$ **IV** $a=0{,}25;\ b=0$

5. Liczba n^3+5n dla dowolnej liczby naturalnej n dzieli się przez

I 2 **II** 3 **III** 5 **IV** 6

6. Który z poniższych wzorów jest prawdziwy dla dowolnych zdarzeń losowych A, B?

I $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$.

II $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

III $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$.

IV $P(A-B)=P(A)-P(B)$.

7. Które z poniższych zdań jest prawdziwe?

I Iloczyn liczby wymiernej i liczby niewymiernej zawsze jest liczbą niewymierną.

II Suma dwóch liczb niewymiernych zawsze jest liczbą niewymierną.

III Suma liczby wymiernej i liczby niewymiernej zawsze jest liczbą niewymierną.

IV Pierwiastek kwadratowy z liczby niewymiernej dodatniej zawsze jest liczbą niewymierną.

8. Które z równań ma dokładnie 3 rozwiązania?

I $x^2=|\sin x|$ **II** $x^2=|\cos x|$

III $\left|1-|x|\right|=\sin^2 x$ **IV** $\left|1-|x|\right|=\cos^2 x$

9. Które z poniższych zdań jest prawdziwe?

I Istnieje dokładnie 20 trójelementowych podzbiorów zbioru sześcioelementowego.

II Istnieją dokładnie 64 niepuste podzbiory zbioru sześcioelementowego.

III Istnieje dokładnie 216 trójwyrazowych ciągów o wyrazach ze zbioru sześcioelementowego.

IV Istnieje dokładnie 120 trójwyrazowych ciągów o różnych wyrazach ze zbioru sześcioelementowego.

10. Która z poniższych nierówności jest prawdziwa?

I $\log_{0,5}(\mathrm{tg}0{,}8)>0$ **II** $0{,}5^{\sin 0{,}1-\cos 0{,}1}>0$

III $\sin 0{,}5+\cos 0{,}5>1$ **IV** $\mathrm{tg}(\log_2 7)>0$

ODPOWIEDZI

Prawidłowe odpowiedzi zaznaczono znakiem **X**.

Numer pytania	Odpowiedź			
	I	II	III	IV
1	**x**	**x**		**x**
2	**x**		**x**	**x**
3	**x**	**x**	**x**	**x**
4	**x**	**x**		
5	**x**	**x**		**x**
6	**x**			
7			**x**	**x**
8	**x**			**x**
9	**x**		**x**	**x**
10		**x**	**x**	

ZADANIA Z KONKURSU 2018-2019

ETAP 1

1. Ile wynosi suma czterdziestu cyfr po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym ułamka $\frac{3}{7}$

I 175 **II** 180 **III** 181 **IV** 182

2. Przekątną wielościanu wypukłego nazywamy każdy odcinek łączący wierzchołki tego wielościanu i nie zawierający się w jego powierzchni. Ile przekątnych ma dwunastościan foremny? (ściany tej bryły to pięciokąty)

I 50 **II** 80 **III** 100 **IV** 120

3. Oznaczmy: *Z*(*x*) - ***zaokrąglenie*** liczby rzeczywistej *x* do jednego miejsca po przecinku. Jaki jest zbiór wartości funkcji $f:\langle 0;\infty) \to \boldsymbol{R}$ określonej wzorem $f(x) = x - Z(x)$?

I $\langle -0,05;\ 0,05)$ **II** $\langle -0,05;\ 0,05\rangle$ **III** $\langle -0,05;\ 0,04)$ **IV** $\langle -0,05;\ 0,04\rangle$

4. W układzie współrzędnych dany jest trójkąt o wierzchołkach A=(1,0), B=(2,0), C=(5,4). Ile wynosi cosinus kąta przy wierzchołku B?

I $0,6$ **II** $-0,6$ **III** $0,8$ **IV** $-0,8$

5. Cenę towaru obniżono o 20%. Po tygodniu nową cenę podniesiono o *p*%, po kolejnym tygodniu ponownie cenę podniesiono o *p*%. Po jeszcze jednej podwyżce, także o *p*% cena wróciła do poziomu wyjściowego. Ile wynosi *p%*?

I $\frac{0,2}{3}$ **II** $\sqrt[3]{0,2}$ **III** $\sqrt[3]{1,2}-1$ **IV** $\sqrt[3]{1,25}-1$

6. Ciąg (a_n) jest określony wzorem: $a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$. Iloraz $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ jest równy:

I $4-\frac{2}{n+1}$ **II** $\frac{2n+1}{(n+1)^2}$ **III** $\frac{2}{n+1}$ **IV** $\frac{4n}{n+1}$

7. Dane są zbiory $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ oraz $B = \{-3,-2,-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Ile istnieje różnowartościowych funkcji $f : A \to B$ takich, że $f(2) > 0$ i $f(3) > 0$?

I 48000 **II** 50400 **III** 60480 **IV** 151200

8. Dla liczb rzeczywistych *x* oraz *y* określamy *działanie* ▼ wzorem: $x ▼ y = x^2 - 2y$.
Ile wynosi $a ▼ (a ▼ a)$?
I $4a$ **II** $4a^2$ **III** $4a - a^2$ **IV** $4a + a^2$

9. Ile dzielników naturalnych ma liczba 20790?
I 48 **II** 64 **III** 72 **IV** 80

10. Ile rozwiązań ma równanie $|x+1|+|x|=1$?
I 1 **II** 2 **III** 4 **IV** nieskończenie wiele

11. Ile rozwiązań ma układ równań: $\begin{cases} |x \cdot y| = 1 \\ x^2 + y^2 = 3 \end{cases}$

I 0 **II** 4 **III** 8 **IV** nieskończenie wiele

12. Cyfra jedności liczby 2018^{2019} wynosi:

I 2 **II** 4 **III** 6 **IV** 8

13. Najmniejsza wartość bezwzględna miejsc zerowych funkcji $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ wynosi:
I 0 **II** $\frac{1}{\pi}$ **III** $\frac{1}{2\pi}$ **IV** nie istnieje

14. Odległość między prostą $y = 2x + 1$ i $y = 2x + 3$ wynosi:

I $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **II** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ **III** 2 **IV** 1

15. Ile rozwiązań ma równanie $(x-2)^4 + (x+4)^4 = 272$?

I 0 **II** 1 **III** 2 **IV** 4

16. Reszta z dzielenia liczby $n^2 + 1$ ($n \in N$) przez 3 jest równa:
I 1 lub 2 **II** 0, 1 lub 2 **III** 0 lub 1 **IV** 0 lub 2

17. Funkcja $f(x)$ jest określona na odcinku $\langle -1; 1\rangle$. Jej zbiór wartości to przedział $\langle 2; 3\rangle$. Zbiór wartości funkcji złożonej $f(5x)$ jest równy:

I $\langle -\frac{1}{5}; \frac{1}{5} \rangle$ **II** $\langle 2; 3 \rangle$ **III** $\langle -5; 5 \rangle$ **IV** $\langle 10; 15 \rangle$

18. Pierwszy trójkąt ma boki o długościach 5; 12 i 13. Drugi trójkąt jest podobny do pierwszego i ma promień okręgu wpisanego równy 4. Pole drugiego trójkąta wynosi:

I 30 **II** 60 **III** 120 **IV** 240

19. Którą z poniższych równości spełnia funkcja $f(x) = x^5$:

I $f(x+y) = f(x) + f(y)$ **II** $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$

III $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ **IV** $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$

20. Wykres funkcji $f(x) = (x-1)^2$ przesuwamy o wektor [1, 0], po czym otrzymaną krzywą przekształcamy przez symetrię względem osi Oy. Otrzymamy wykres funkcji:

I $f_1(x) = (-x+2)^2$ **II** $f_2(x) = (x+2)^2$ **III** $f_3(x) = x^2$ **IV** $f_4(x) = -x^2$

ODPOWIEDZI

Prawidłowe odpowiedzi zaznaczono znakiem **X**.

Numer pytania	Odpowiedź			
	I	II	III	IV
1			X	
2			X	
3	X			
4		X		
5				X
6	X			
7		X		
8			X	
9		X		
10				X
11			X	
12	X			
13				X
14		X		
15			X	
16	X			
17		X		
18			X	
19		X		
20		X		

ETAP 2 - FINAŁ

Część I

Zadania

Zadanie 1.

Rozwiąż równanie:

$5\sin^4 x - 2\sin^3 x\cos x - \sin^2 x\cos^2 x - 2\sin x\cos^3 x = 0$

Zadanie 2.

Z początku układu współrzędnych poprowadzono cięciwy okręgu $x^2 + y^2 = 4x$.

Wyznacz zbiór, którego elementami są środki tych cięciw. Sporządź rysunek.

Zadanie 3.

Niech f będzie funkcją rzeczywistą zmiennej rzeczywistej.
Funkcją pierwotną funkcji f nazywamy funkcję F taką, że $F'(x) = f(x)$ dla każdego x należącego do dziedziny funkcji f.
<u>*Przykład*</u>: Funkcja $F(x) = x^2$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x) = 2x$, gdyż $(x^2)' = 2x$ dla $x \in R$.
Podaj wzór funkcji pierwotnej dla każdej z poniższych funkcji

a) $f(x) = 5$ Odp.: $F(x) =$

b) $f(x) = x^4$ Odp.: $F(x) =$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ Odp.: $F(x) =$

d) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ Odp.: $F(x) =$

Zadanie 1.

Szkic rozwiązania.

Zapisujemy lewą stronę w postaci iloczynu:

$\sin x(5\sin^3 x - 2\sin^2 x\cos x - \sin x\cos^2 x - 2\cos^3 x) = 0$

zatem $\sin x = 0$ wtedy $x = k\pi$, k - dowolna liczba całkowita,

lub $5\sin^3 x - 2\sin^2 x\cos x - \sin x\cos^2 x - 2\cos^3 x = 0$

Dzieląc przez $\cos^3 x$ (zauważmy, że $\cos x \neq 0$) i podstawiając $tgx = t$ otrzymamy

$$5t^3 - 2t^2 - t - 2 = 0$$

Dzieląc przez $t-1$ lub rozkładając na czynniki otrzymamy

$$(t-1)(5t^2 + 3t + 2) = 0$$

Stąd jedyne rozwiązanie to $t = 1$, czyli $tgx = 1$.

Wtedy $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, k - dowolna liczba całkowita

Ostatecznie $x = k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, k - dowolna liczba całkowita,

albo $x = \frac{\pi}{8} \pm \frac{\pi}{8} + k\pi$, k - dowolna liczba całkowita.

Zadanie 2.

Szkic rozwiązania.

Sposób I

Dany okrąg ma środek w punkcie $S = (2, 0)$ i promień $r = 2$.

Niech $A = (x, y)$ gdzie $x > 0$, będzie środkiem pewnej rozważanej cięciwy.

Trójkąt OAS jest prostokątny, $|OA| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $|AS| = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$, $|OS| = 2$.

Mamy: $|OA|^2 + |AS|^2 = |OS|^2$

Zatem: $x^2 + y^2 + (x-2)^2 + y^2 = 4$ dla $x > 0$ (1)

Stąd: $x^2 + y^2 - 2x = 0$, czyli: $(x-1)^2 + y^2 = 1$ dla $x > 0$ (2)

Jest to okrąg o środku (1,0) i promieniu 1 z usuniętym punktem (0,0)

Sposób II

Dany okrąg ma środek w punkcie $S = (2,0)$ i promień $r = 2$.

Niech $A = (x, y)$ gdzie $x > 0$, będzie środkiem pewnej rozważanej cięciwy.

Wówczas końce cięciwy mają współrzędne (0,0) oraz $(2x, 2y)$.

Punkt $(2x, 2y)$ leży na danym okręgu, więc spełnia jego równanie: $4x^2 + 4y^2 = 8x$.

Po podzieleniu przez 4 i uporządkowaniu dostajemy:

$x^2 + y^2 - 2x = 0$, czyli: $(x-1)^2 + y^2 = 1$

Zadanie 3.

Poprawne odpowiedzi

a) $F(x) = 5x$

b) $F(x) = \frac{1}{5}x^5$

c) $F(x) = -\frac{1}{x}$

d) $F(x) = 2\sqrt{x}$

Część II

PYTANIA TESTOWE

Po każdym pytaniu są podane 4 odpowiedzi oznaczone cyframi rzymskimi I, II, III i IV. Z tych odpowiedzi jedna, dwie, trzy lub cztery są prawdziwe.

1. Miary kątów trójkąta tworzą ciąg arytmetyczny. Które z poniższych zdań jest prawdziwe?

I Taki trójkąt może być prostokątny.

II Suma miar pewnych dwóch kątów tego trójkąta jest równa 120^{o}.

III Taki trójkąt może być rozwartokątny.

IV Długość jednego z boków tego trójkąta może być dwa razy większa od długości innego boku.

2. Które z poniższych równań jest sprzeczne?

I $\sin(\cos x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **II** $\cos(\sin x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

III $\sin(\sin x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **IV** $\cos(\cos x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

3. Rozpatrujemy równanie $\sqrt[x]{x} = \sqrt{x^x}$ dla $x > 0$. Wtedy co najmniej jedno z rozwiązań spełnia warunek:

I $x \le 1$ **II** $x > 1$

III $1 < x \le 2$ **IV** $x \ge 4$

4. Które z podanych własności są prawdziwe dla dowolnego $n \in N$

I Liczba 2 jest dzielnikiem liczby $n^2 - n$

II Liczba 4 jest dzielnikiem liczby $n^4 - n$

III Liczba 6 jest dzielnikiem liczby $n^3 - n$

IV Liczba 3 jest dzielnikiem liczby $n^2 + n$

5. Które z podanych liczb są niewymierne

I $\sin 15^o$ **II** $\cos 15^o$

III $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} + 2\sqrt{6}$ **IV** $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} + 3\sqrt{6}$

6. Które z poniższych równań ma dokładnie jedno rozwiązanie w zbiorze liczb rzeczywistych?

I $x^2 = \cos x - 1$ **II** $x^2 = \sin x - 1$ **III** $\log_{0,5} x = 3^x$ **IV** $\log_2 x = 3^x$

7. Które z poniższych zdań jest prawdziwe?

I Dla każdej liczby wymiernej x istnieje ciąg liczb wymiernych, którego granicą jest x.

II Dla każdej liczby wymiernej x istnieje ciąg liczb niewymiernych, którego granicą jest x.

III Dla każdej liczby niewymiernej x istnieje ciąg liczb wymiernych, którego granicą jest x.

IV Dla każdej liczby niewymiernej x istnieje ciąg liczb niewymiernych, którego granicą jest x.

8. Który z poniższych zbiorów ma więcej niż tysiąc elementów?

I Zbiór wszystkich podzbiorów zbioru 10-elementowego.

II Zbiór wszystkich trójelementowych podzbiorów zbioru 20-elementowego.

III Zbiór wszystkich funkcji ze zbioru 4-elementowego w zbiór 5-elementowy.

IV Zbiór wszystkich funkcji ze zbioru 5-elementowego w zbiór 4-elementowy.

9. Która z poniższych funkcji jest różnowartościowa?

I $f(x) = \begin{cases} \cos x & dla\ x \in (9;10) \\ (0,5)^x & dla\ x \notin (9;10) \end{cases}$ **II** $f(x) = \begin{cases} \cos x & dla\ x \in (8;9) \\ (0,5)^x & dla\ x \notin (8;9) \end{cases}$

III $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & dla\ x \in (3;\infty) \\ (0,5)^x & dla\ x \notin (3;\infty) \end{cases}$ **IV** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & dla\ x \in (3;\infty) \\ (0,5)^x & dla\ x \notin (3;\infty) \end{cases}$

10. Liczby a, b, c są długościami trzech odcinków. W którym z poniższych przypadków z tych odcinków można zbudować trójkąt?

I $a = 1,\ b = \log_{0,5} 0,2,\ c = \log_{\sqrt{3}} \sqrt{2}$

II $a = \mathrm{tg}\dfrac{\pi}{6},\ b = \mathrm{tg}\dfrac{\pi}{4},\ c = \mathrm{tg}\dfrac{\pi}{3}$

III $a = 1,\ b = \sin\dfrac{\pi}{8},\ c = \cos\dfrac{3\pi}{8}$

IV $a = 1,\ b = \sin\dfrac{\pi}{7},\ c = \cos\dfrac{\pi}{7}$

ODPOWIEDZI

Prawidłowe odpowiedzi zaznaczono znakiem **X**.

Numer pytania	Odpowiedź			
	I	II	III	IV
1	**x**	**x**	**x**	**x**
2	**x**		**x**	
3	**x**	**x**	**x**	
4	**x**		**x**	
5	**x**	**x**		**x**
6	**x**		**x**	
7	**x**	**x**	**x**	**x**
8	**x**	**x**		**x**
9		**x**		**x**
10				**x**

ZADANIA Z KONKURSU 2019-2020

ETAP 1

1. Boki trójkąta mają długości 11, 15 oraz a, gdzie a jest liczbą naturalną. Dla ilu wartości a ten trójkąt jest rozwartokątny?

I 5 **II** 7 **III** 12 **IV** 13

2. Pięć różnych liczb całkowitych n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 spełnia równość:

$$(8-n_1)\cdot(8-n_2)\cdot(8-n_3)\cdot(8-n_4)\cdot(8-n_5)=63$$

Ile wynosi suma $n_1+n_2+n_3+n_4+n_5$?

I 33 **II** 16 **III** 9 **IV** 8

3. Równoległobok ma przekątne o długości 16 i 12. Jeden z jego boków ma długość 10.

Pole tego równoległoboku wynosi:

I 60 **II** 72 **III** 96 **IV** 192

4. Liczby $m, n, m-n, m+n$ są pierwsze. Ich suma jest:

I podzielna przez 3
II podzielna przez 5
III podzielna przez 7
IV liczbą pierwszą

5. Liczby a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego i ich suma jest równa 50. Jednoznacznie można wyznaczyć tylko:

I a_1 **II** a_2 **III** a_3 **IV** a_4 lub a_5

6. Wykres funkcji $f(x)=\log_4(x)$ nie można przekształcić przez symetrię osiową na wykres funkcji:

I $f(x)=4^x$
II $f(x)=0{,}25^x$
III $f(x)=\log_4(-x)$
IV $f(x)=\log_{0,25} x$

7. Własność $f(g(x)) = g(f(x))$ gdy $x \in R$ jest spełniona dla:

I $f(x) = x^3$ $g(x) = x^{\frac{1}{3}}$

II $f(x) = x^2$ $g(x) = 2x$

III $f(x) = \log_2 x$ $g(x) = 2^x$

IV $f(x) = x^2$ $g(x) = x^{-2}$

8. Stosunek pól sześciokątów foremnych wpisanego i opisanego na tym samym okręgu wynosi:

I 2:3 **II** 3:4 **III** 4:5 **IV** 5:6

9. Cenę towaru podniesiono dwukrotnie, każdorazowo o 50%, po czym cenę obniżono o 40%. W efekcie wszystkich zmian cena początkowa wzrosła o:

I 20% **II** 35% **III** 60% **IV** 85%

10. Ułamek $\frac{711}{896}$ ma rozwinięcie dziesiętne

I skończone **II** nieskończone okresowe

III nieskończone nieokresowe **IV** nieskończone półokresowe

11. Która z poniższych liczb jest najmniejsza?

I $\log_{0,5} 0{,}8$ **II** $\log_{0,6} 0{,}8$ **III** $\log_6 0{,}8$ **IV** $\log_5 0{,}8$

12. Dane są funkcje: $f(x) = x^6 + x^5 + x^2 + x$ oraz $g(x) = \left| |x-2| - 1 \right|$.

Która z tych funkcji ma dokładnie dwa miejsca zerowe?

I obie funkcje **II** tylko funkcja *f*

III tylko funkcja *g* **IV** żadna z funkcji

13. Przy dzieleniu wielomianu $W(x)$ przez wielomian $x-1$ otrzymano resztę 3, zaś przy dzieleniu wielomianu $W(x)$ przez wielomian $x+1$ otrzymano resztę 5.

Ile wynosi reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian $x^2 - 1$?

I 8 **II** 15 **III** $4 - x$ **IV** $3x + 5$

14. Dany jest zbiór $A = \{a, b, \{a\}, \{b\}, \emptyset\}$. Ile elementów ma ten zbiór?

I 2 **II** 3 **III** 4 **IV** 5

15. A jest zbiorem punktów płaszczyzny Oxy, których współrzędne spełniają równocześnie równanie $|x+y| = |x| + |y|$ oraz nierówność $-x-1 < y < -x+1$.

Które z poniższych zdań jest prawdziwe?

I A jest zbiorem pustym.

II A jest zbiorem skończonym.

III A jest zbiorem nieograniczonym.

IV Zbiór A ma pole równe 1.

16. Jaka jest ostatnia cyfra liczby 3^{2009}?

I 9 **II** 3 **III** 7 **IV** 1

17. Równanie $(2x-y+3)^2+4xy=4x^2+y^2+9x-1$ ma w zbiorze liczb całkowitych:

I 0 rozwiązań **II** 1 rozwiązanie

III 2 rozwiązania **IV** nieskończenie wiele rozwiązań

18. Ile dodatnich liczb naturalnych należy do zbioru wartości funkcji $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}\left(|x|+\frac{1}{16}\right)$

I 16 **II** 8 **III** 4 **IV** 2

19. Dany jest równoległobok o kącie ostrym $60°$.
Odległości punktu przecięcia przekątnych równoległoboku od jego boków są równe 2 i 1. Pole tego równoległoboku wynosi:

I $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ **II** $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ **III** $8\sqrt{3}$ **IV** $16\sqrt{3}$

20. Dane są liczby $A=\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}$ oraz $B=\frac{2}{x\cdot y+1}$,
gdzie $x, y \in R$, $x \neq y$ i $x\cdot y+1\neq 0$.
Wiedząc, że $A=B$ suma liczb $A+B$ wynosi:

I $\frac{1}{2}$ **II** -4 **III** -2 **IV** 2

ODPOWIEDZI

Prawidłowe odpowiedzi zaznaczono znakiem **X**.

Numer pytania	Odpowiedź			
	I	II	III	IV
1				**x**
2	**x**			
3			**x**	
4				**x**
5			**x**	
6		**x**		
7	**x**			
8		**x**		
9		**x**		
10		**x**		
11				**x**
12	**x**			
13			**x**	
14				**x**
15				**x**
16		**x**		
17	**x**			
18			**x**	
19	**x**			
20				**x**

Uwaga. Z powodu pandemii II etap Konkursu 2019/20 nie odbył się.