

PRACA KONTROLNA nr 1 - POZIOM ROZSZERZONY

1. Uprościć następujące wyrażenie, określwszy uprzednio jego dziedzinę:

$$\frac{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}} \cdot \frac{a - b}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^2}} \cdot \left(1 + \frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}} - \frac{1 + \sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{b}}\right) : \frac{\sqrt[3]{b}(1 + \sqrt[3]{b}) - \sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$$

Obliczyć wartość tego wyrażenia dla $a = 7 + 5\sqrt{2}$ i $b = 7 - 5\sqrt{2}$.

2. Dla jakiego rzeczywistego parametru m równanie

$$\frac{m+1}{mx} - \frac{x}{m} = 1 + \frac{m}{x}$$

ma dwa pierwiastki będące sinusem i cosinusem kąta z przedziału $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$?

3. Dane są liczby: $m = \frac{\binom{6}{4} \cdot \binom{8}{2}}{\binom{7}{3}}$, $n = \frac{(\sqrt{2})^{-4} \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{5}{2}} \sqrt[4]{3}}{\left(\sqrt[4]{4}\right)^5 \cdot \sqrt{32} \cdot 27^{-\frac{1}{4}}}$. Wyznaczyć k tak, by liczby

m, k, n były odpowiednio: pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu geometrycznego, a następnie wyznaczyć sumę wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego, którego pierwszymi trzema wyrazami są m, k, n . Ile wyrazów tego ciągu należy wziąć, by ich suma przekroczyła 95% sumy wszystkich wyrazów?

4. Podać wzór funkcji homograficznej, której wykres jest symetrycznym odbiciem wykresu funkcji $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ względem: a) prostej $x = 1$, b) punktu $(0, 0)$, c) punktu $(1, 0)$.

Odpowiedź uzasadnić, przeprowadzając odpowiednie obliczenia. Sporządzić staranne wykresy wszystkich rozważanych funkcji.

5. W czworokącie wypukłym $ABCD$, w którym $AB = 1, BC = 2, CD = 4, DA = 3$, cosinus kąta przy wierzchołku B jest równy $-\frac{5}{7}$. Wykazać, że czworokąt ten można wpisać w okrąg i obliczyć promień R tego okręgu. Sprawdzić, czy w rozważany czworokąt można wpisać okrąg. Jeżeli tak, to obliczyć jego promień.
6. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym, w którym wszystkie krawędzie są równe, poprowadzono płaszczyznę przechodzącą przez jedną z krawędzi podstawy oraz środki dwu przeciwległych do niej krawędzi bocznych. Obliczyć stosunek pola powierzchni przekroju do pola podstawy oraz stosunek objętości brył, na jakie płaszczyzna podzieliła ostrosłup.

Rozwiązania (rękopis) zadań z wybranego poziomu prosimy nadsyłać do **28 września 2017r.** na adres:

Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska
Wybrzeże Wyspiańskiego 27
50-370 WROCŁAW.

Na kopercie prosimy **koniecznie** zaznaczyć **wybrany poziom! (np. poziom podstawowy lub rozszerzony)**. Do rozwiązań należy dołączyć zaadresowaną do siebie kopertę zwrotną z naklejonym znaczkiem, odpowiednim do wagi listu. Prace niespełniające podanych warunków nie będą poprawiane ani odsyłane.

Adres internetowy Kursu: <http://www.im.pwr.edu.pl/kurs>