

LIGA MATEMATYCZNA
im. Zdzisława Matuskiego
GRUDZIEŃ 2014
SZKOŁA PONADGIMNAZJALNA

ZADANIE 1.

W trójkącie równoramiennym ABC ($|AC| = |BC|$) na boku AC obrano punkt D . Na trójkątach ABD i DBC opisano okręgi o_1 oraz o_2 . Styczna do okręgu o_1 w punkcie D przecina okrąg o_2 w punkcie M . Wykaż, że prosta CM jest równoległa do prostej AB .

ZADANIE 2.

Znajdź liczby naturalne a , b , których najmniejsza wspólna wielokrotność jest równa 630, a największy wspólny dzielnik 18, wiedząc, że te liczby nie dzielą się przez siebie.

ZADANIE 3.

Oblicz sumę

$$\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} + \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} + \sqrt{7 - 2\sqrt{12}} + \dots + \sqrt{4029 - 2\sqrt{2014 \cdot 2015}}.$$

ZADANIE 4.

Dodatnie liczby a , b , c spełniają warunki $a + b + c = 9$ oraz $\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} = \frac{10}{9}$. Oblicz

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}.$$

ZADANIE 5.

W kwadracie o boku 2 wybrano w sposób dowolny 9 punktów. Wykaż, że istnieje taka trójka punktów wśród nich, że pole figury, której wierzchołkami są te trzy punkty nie przekracza $\frac{1}{2}$.