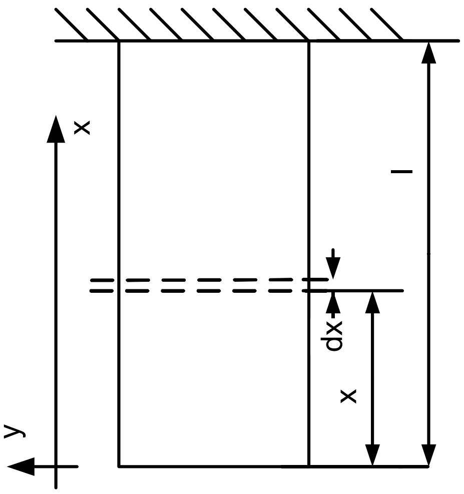
2.Wytrzymałość materiałów

2.1 Ściskanie i rozciąganie prętów

2.1.1

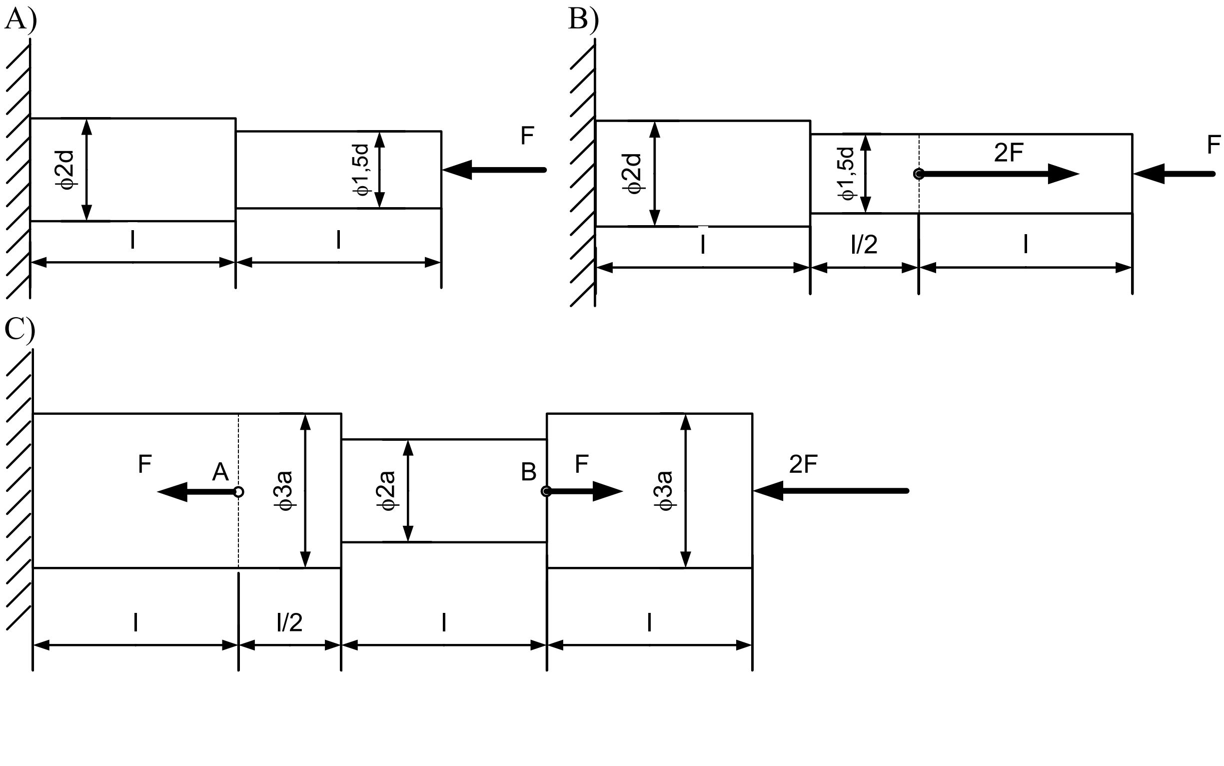
Obliczyć o ile wydłuży się pod własnym ciężarem pręt o długości *l*, jeżeli wykonany jest z aluminium o gęstości $\rho = 2{,}6$ g/cm^3 i module Younga $E = 64$ MPa.



2.1.2

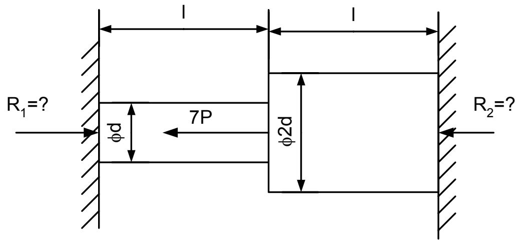
Dla prętów pokazanych na rysunkach obliczyć wydłużenie całkowite. Dla przypadku C) wyznaczyć również przemieszczenia punktów A i B. Moduł Younga dla wszystkich prętów przyjąć równy *E*.

Dane: *F, E, d ,a ,l*



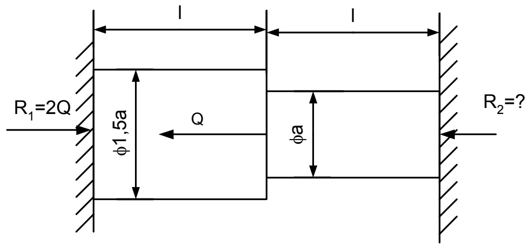
2.1.3

Obustronnie utwierdzony pręt o przekroju kołowym (przedstawiony na rysunku) oziębiono o Δt°C. Obliczyć reakcje ścian oraz naprężenia w prętach, jeżeli liniowy współczynnik rozszerzalności wynosi α, a moduł Younga jest równy E. Pręt dodatkowo obciążono siłą $7P$ zaznaczoną na rysunku.
(Termiczne wydłużenie liniowe opisuje zależność $\Delta l=\alpha\Delta tl$)



2.1.4

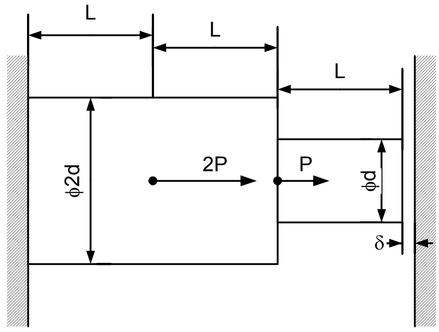
Obustronnie utwierdzony pręt o przekroju kołowym (przedstawiony na rysunku) obciążono siłą Q a następnie ogrzano. Obliczyć o ile ogrzano ten pręt, rekcję R_2 a także naprężenia w prętach, jeżeli reakcja jednej ze ścian po ogrzaniu wynosi $2Q$; liniowy współczynnik



rozszerzalności jest równy α, Moduł Younga dla pręta przyjąć równy E.

2.1.5

Pręt o przekroju kołowym obciążony jest siłami P i $2P$ jak przedstawiono na rysunku.
Wyznaczyć reakcję ścian. Szerokość szczeliny wynosi δ a moduł Younga dla materiału z którego wykonany jest pręt E.



2.1.6

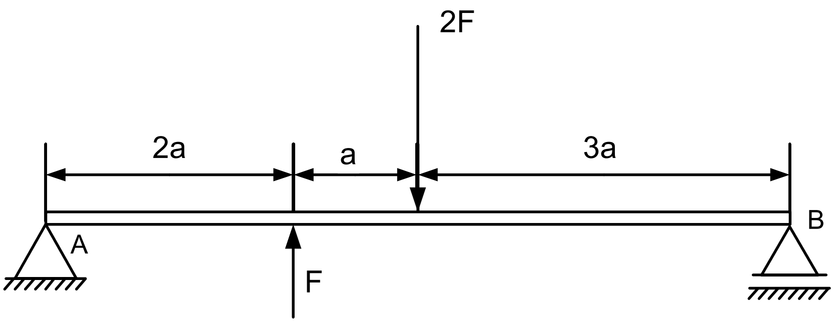
Filar mostu w całości ma być zanurzony w wodzie. Jak musi się zmieniać przekrój poprzeczny tego filaru wykonanego z betonu o gęstości ρ, aby naprężenia w dowolnym przekroju były równe wytrzymałości betonu na ściskanie k_c. Przyjąć że górna powierzchnia filaru obciążona jest równomiernie naciskiem powierzchniowym $q = k_c$ a jej pole wynosi S_0.

2.1 Zginanie belek

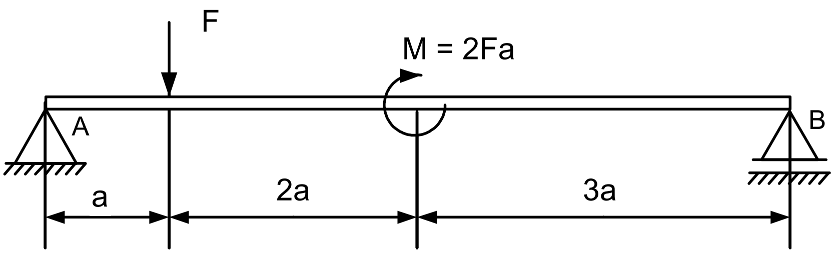
2.2.1

Dla belek przedstawionych na rysunkach sporządzić wykresy siły tnącej (*T*) oraz momentu gnącego (M_g)

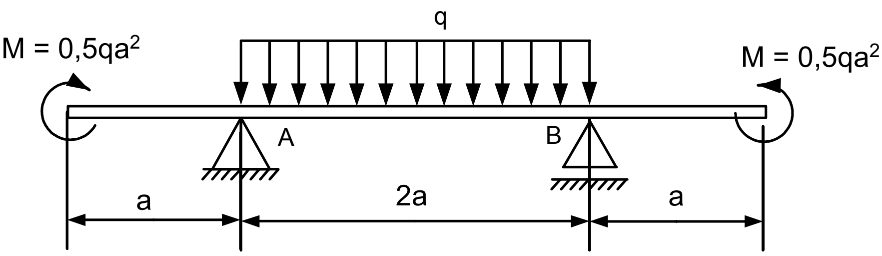
a)



b)

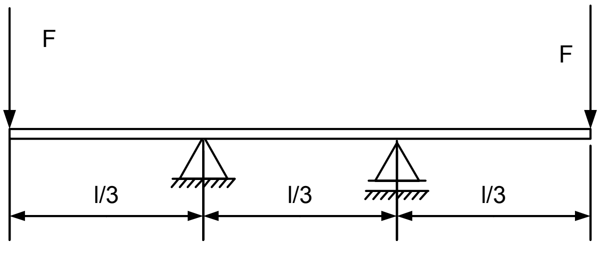


c)



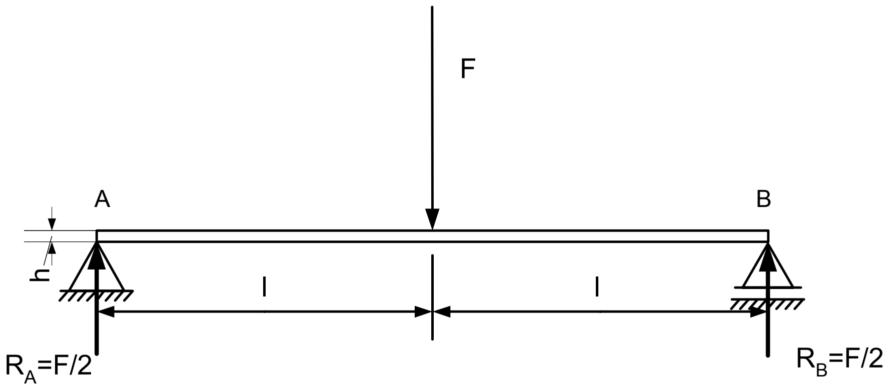
2.2.2

W celu zbadania wpływu naprężeń na własności magnetyczne ciał stosuje się próbki w kształcie pasków materiału o przekroju prostokątnym w układzie jak na rysunku. Jaką wartość muszą mieć siły *F* aby zbadać próbkę w zakresie do granicy plastyczności (200MPa), jeżeli próbki mają długość L = 9 cm, szerokość b = 1 cm i grubość h = 0,3 mm. W jakim obszarze można przeprowadzać badania.



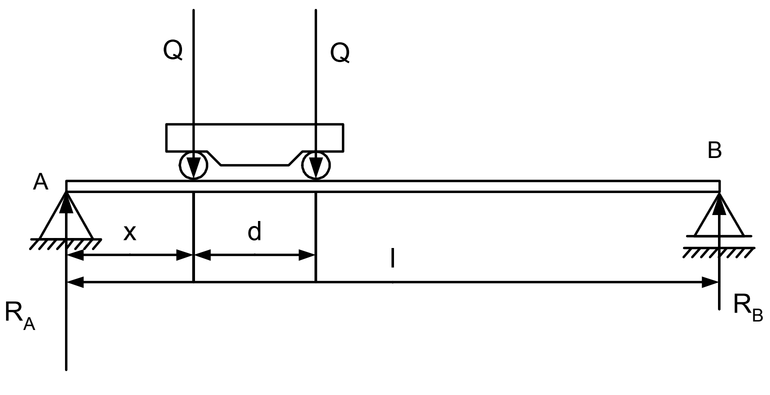
2.2.3
Jak długi pręt o masie całkowitej m (o przekroju kołowym) można wykonać z materiału o gęstości ρ, aby pręt ten po ułożeniu go poziomo i podparciu jego końców nie uległ zniszczeniu pod własnym ciężarem. Naprężenie maksymalne na zginanie materiału pręta wynosi k_g. Wskaźnik wytrzymałości przekroju porzecznego belki na zginanie dla belki o przekroju kołowym wynosi $W = \pi R^3/4$

2.2.4
Zaprojektuj belkę o przekroju prostokątnym, przy założeniu stałej jej grubości h = const, jako belkę o równomiernej wytrzymałości na rozciąganie. Obliczenia wykonaj dla obciążenia przedstawionego na rysunku.



2.2.5
Po belce o długości l podpartej na obu końcach może przemieszczać się człowiek o ciężarze G. Wyznaczyć wymaganą grubość belki o przekroju kwadratowym aby człowiek nie spowodował zniszczenia belki, jeżeli naprężenie dopuszczalne na zginanie wynosi k_g

2.2.6
Wyznaczyć maksymalną wartość naprężeń rozciągających w belce suwnicy przedstawionej na rysunku, jeżeli wskaźnik wytrzymałości przekroju porzecznego belki na zginanie wynosi W.



Rozwiązania:

2.1.1.R

Rozpatrzmy wydłużenie elementu pręta o długości *dx* znajdującego się w odległości *x* od dolnego końca pręta. Element ten jest rozciągany siłą równą co do wartości ciężarowi pręta znajdującego się poniżej tego elementu.

$$F(x) = m(x)g = \rho Sxg$$

Z prawa Hooke'a otrzymujemy:

$$\frac{F(x)}{S} = \frac{\Delta dx}{dx} E \Rightarrow \Delta dx = \frac{F(x)}{SE} dx = \frac{\rho Sxg}{SE} dx = \frac{\rho xg}{E} dx \,,$$

Aby wyznaczyć całkowite wydłużenie pręta musimy zsumować (scałkować) wydłużenia wszystkich elementów dx.

$$\Delta l = \int_0^l \Delta dx = \int_0^l \frac{\rho xg}{E} dx = \frac{\rho g}{E} \int_0^l x dx = \frac{\rho g l^2}{2E}$$

Odpowiedź: całkowite wydłużenie pręta wyniesie: $\Delta l = \frac{\rho g l^2}{2E} \approx 0{,}2\text{mm}$

2.1.2.R

A)

Reakcję ściany wyznaczamy z zależności:

$$R - F = 0 \Rightarrow R = F$$

Korzystając z prawa Hooke'a otrzymujemy:

$$\sigma = \varepsilon E \Rightarrow \frac{F}{S} = E \frac{\Delta l}{l}$$

$$\Delta l = \frac{Fl}{ES}$$

Wydłużenie całkowite jest sumą wydłużeń obu prętów:

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = -\frac{Fl}{ES_1} - \frac{Fl}{ES_2} \text{, gdzie } S_1 = \pi d^2 \text{, } S_2 = \frac{9}{16}\pi d^2$$

$$\Delta l = -\frac{25Fl}{9\pi d^2 E} \text{ (pręt jest ściskany)}$$

B)

Reakcję ściany wyznaczamy z zależności: $R + 2F - F = 0 \Rightarrow R = -F$

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = \frac{Fl}{ES_1} + \frac{Fl}{2ES_2} + \frac{(F - 2F)l}{ES_2} \,,$$

gdzie $S_1 = \pi d^2$, $S_2 = \frac{9}{16}\pi d^2$

$$\Delta l = \frac{Fl}{9\pi d^2 E}$$

C)

$$\Delta l = -\frac{27Fl}{9\pi a^2 E}$$

$$\Delta x_A = -\frac{8Fl}{9\pi a^2 E}$$

$$\Delta x_B = -\frac{19Fl}{9\pi a^2 E}$$

2.1.3.R

Całkowite wydłużenie pręta składa się z wydłużenia (skrócenia) termicznego i wydłużenia mechanicznego. Z uwagi na to, że pręt jest utwierdzony jest ono zerowe.

$$\Delta l = \Delta l_t + \Delta l_m = 0$$

Wydłużenie termiczne obliczamy z zależności:

$\Delta l_t = -2l\alpha\Delta t$ - minus oznacza oziębianie, a czynnik 2 wynika z faktu że rozpatrujemy wydłużenie obu fragmentów pręta jednocześnie.

Wydłużenie mechaniczne jest sumą wydłużeń obu fragmentów:

$$\Delta l_m = \Delta l_1 + \Delta l_2 = \frac{-R_1 l}{ES_1} + \frac{(7P - R_1)l}{ES_2} = \frac{-4R_1 l}{E\pi d^2} + \frac{(7P - R_1)l}{E\pi d^2} = \frac{(7P - 5R_1)l}{E\pi d^2}$$

Z warunków zadania:

$$\Delta l = 0 \Rightarrow -2\alpha\Delta t l + \frac{(7P - 5R_1)l}{E\pi d^2} = 0$$

$$2\alpha\Delta t E\pi d^2 = 7P - 5R_1$$

$$R_1 = \frac{1}{5}\left(7P - 2\alpha\Delta t E\pi d^2\right)$$

Drugą reakcję obliczamy z warunku równowagi sił:

$$R_1 - 7P - R_2 = 0 \Rightarrow R_2 = R_1 - 7P$$

$$R_2 = -\frac{1}{5}\left(28P + 2\alpha\Delta t E\pi d^2\right)$$

Następnie obliczamy naprężenia w prętach:

$$\sigma_1 = \frac{-R_1}{S_1} = \frac{-4\left(7P - 2\alpha\Delta t E\pi d^2\right)}{5\pi d^2} = \frac{8}{5}\alpha\Delta t E - \frac{28P}{5\pi d^2}$$ - minus przed R_1 oznacza ściskanie.

$$\sigma_2 = \frac{-R_2}{S_2} = \frac{\left(28P + 2\alpha\Delta t E\pi d^2\right)}{5\pi d^2} = \frac{28P}{5\pi d^2} + \frac{2}{5}\alpha\Delta t E$$

2.1.4.R

$$\Delta t = \frac{34Q}{9\alpha E\pi a^2}$$

$$R_2 = Q$$

$$\sigma_1 = -\frac{32Q}{9\pi a^2} \quad \sigma_2 = -\frac{4Q}{\pi a^2}$$

2.1.5.R

Wskazówka: całkowite wydłużenie pręta wyniesie δ

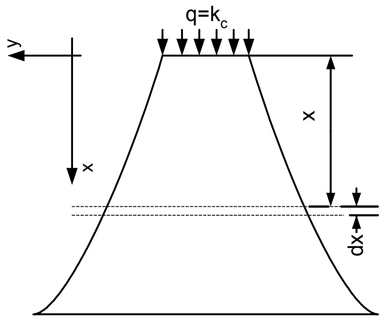
Jeżeli przyjmiemy że obie reakcje skierowane są w lewo otrzymamy:

$$R_1 = \frac{7}{3}P + \frac{\pi d^2 E\delta}{6L}$$

$$R_2 = \frac{2}{3}P - \frac{\pi d^2 E\delta}{6L}$$

2.1.6.R

Rozpatrzmy element filaru o wysokości dx. Na górną powierzchnię tego elementu działa, zgodnie z warunkami zadania siła:



$$F(x) = qS(x),$$

Wypadkowa siła działająca na element dx musi być równa zeru.

$$\vec{F}(x+dx) + \vec{F}(x) + \vec{F}_w + \vec{Q}_{dx} = 0,$$

$$F(x+dx) = F(x) + Q_{dx} - F_w,$$

gdzie F_w oznacza siłę wyporu działającą na ten element natomiast Q_{dx} jego ciężar.

$$F(x+dx) = qS(x) + \rho g S(x)dx - \rho_w g S(x)dx = qS(x) + (\rho - \rho_w)gS(x)dx$$

Siłę działającą na dolna powierzchnię elementu możemy zapisać w postaci:

$$F(x+dx) = qS(x+dx) \cong (S(x)+dS)q = qS(x) + qdS$$

Przyrównując stronami otrzymamy:

$$q\,dS = (\rho - \rho_w) g S(x) dx,$$
$$\frac{dS}{S(x)} = \frac{(\rho - \rho_w) g}{q} dx$$

Po scałkowaniu otrzymamy:

$$\ln(S(x)) = \frac{(\rho - \rho_w) g}{q} x + C$$

Stałą *C* wyznaczamy z warunku że dla $x = 0$ pole $S(x) = S_0$, stąd $C = \ln(S_0)$, czyli:

$$\ln\left(\frac{S(x)}{S_0}\right) = \frac{(\rho - \rho_w) g}{q} x,$$
$$S(x) = S_0 \exp\left(\frac{(\rho - \rho_w) g}{q} x\right)$$

Odpowiedź: Pole przekroju filaru powinno rosnąć zgodnie z równaniem:
$$S(x) = S_0 \exp\left(\frac{(\rho - \rho_w) g}{q} x\right)$$

2.2.1.R

A)

Zadanie rozpoczynamy od wyznaczenia reakcji podporowych.

Z warunku równowagi momentów sił względem punktu A otrzymujemy:
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow F2a - 2F3a + R_B 6a = 0$$
$$-4F + 6R_B = 0$$
$$R_B = \frac{2}{3} F$$

Z równowagi sił:
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_A + R_B - F = 0$$
$$R_A = \frac{1}{3} F$$

Następnie belkę dzielimy na trzy obszary i wyznaczamy w nich T i M_g

1. *0<x<2a*
   $$T = R_A = \frac{1}{3} F$$
   $$M_g = R_A x = \frac{1}{3} Fx$$
2. *2a<x<3a*

$$T = R_A + F = \frac{1}{3}F + F = \frac{4}{3}F$$

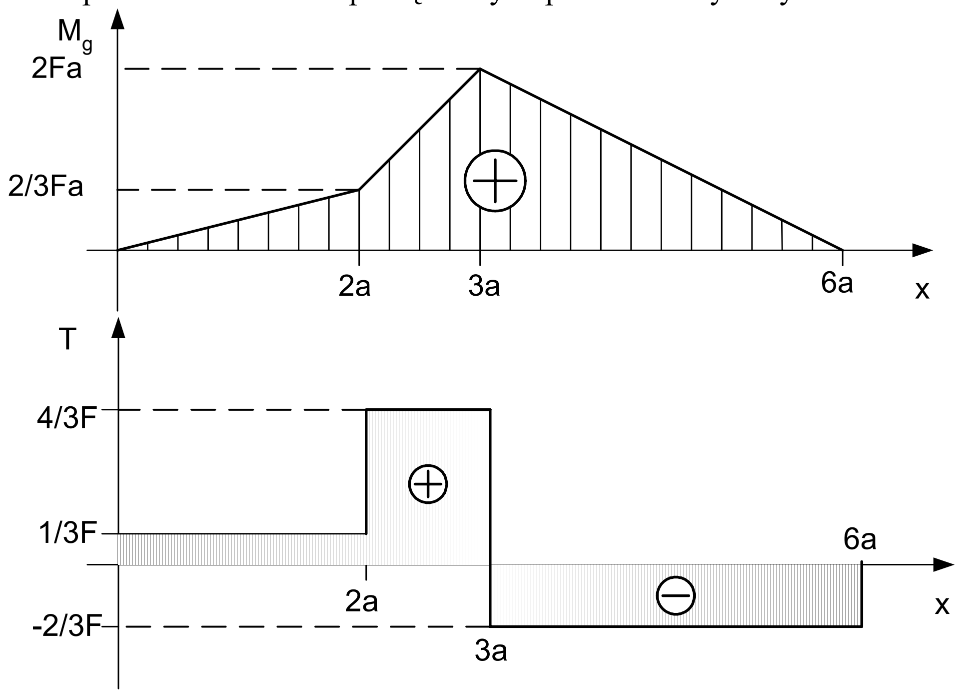
$$M_g = R_A x + F(x - 2a) = \frac{1}{3}Fx + Fx - 2aF = \frac{4}{3}Fx - 2aF$$

3. 3a<x<6a

$$T = R_A + F - 2F = \frac{1}{3}F + F - 2F = -\frac{2}{3}F$$

$$M_g = \frac{4}{3}Fx - 2aF - 2F(x - 3a) = -\frac{2}{3}Fx + 4Fa$$

Na podstawie obliczeń sporządzamy odpowiednie wykresy:



B) Reakcje podporowe obliczamy analogicznie jak w przypadku a) i otrzymujemy:

$$R_A = R_B = 1/2\, F$$

Podobnie jak poprzednio wyznaczamy T i M_g w trzech obszarach:

1. 0<x<a

$$T = R_A = \frac{1}{2}F$$

$$M_g = R_A x = \frac{1}{2}Fx$$

2. a<x<3a

$$T = R_A - F = -\frac{1}{2}F$$

$$M_g = R_A x - F(x-a) = \frac{1}{2}Fx - Fx + Fa = -\frac{1}{2}Fx + Fa$$

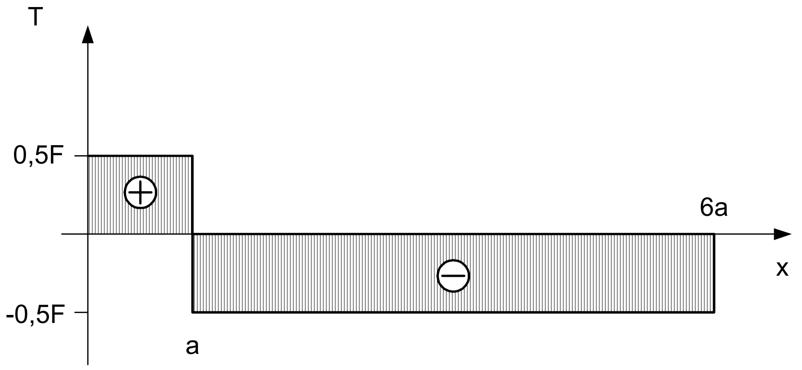
3. 3a<x<6a

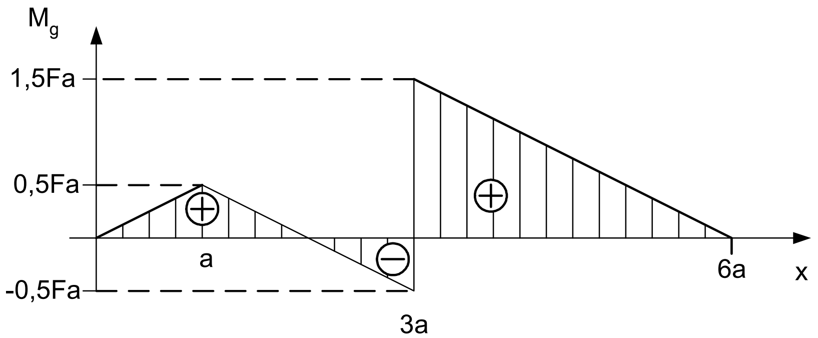
T nie ulega zmianie na skutek działania pary sił o momencie M a więc :

$T = 1/2\,F$

$$M_g = -\frac{1}{2}Fx + Fa + M = -\frac{1}{2}Fx + Fa + 2Fa = -\frac{1}{2}Fx + 3Fa$$

Odpowiednie wykresy:





C)

Reakcje podporowe wyznaczamy z równowagi momentów i sił, przy czym ciągły jednorodny rozkład siły o gęstości q traktujemy jak siłę F_q przyłożoną w jego centrum

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -M - F_q a + R_B 2a + M = 0$$

$$-F_q + 2R_B = 0 \Rightarrow 2aq + 2R_B = 0$$

$$R_B = aq$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_A + R_B - F_q = 0$$

$$R_A = 2aq - aq = aq$$

Dla 3 obszarów otrzymujemy:

1. 0<x<a

$T = 0$

$$M_g = M = \frac{qa^2}{2}$$

2. a<x<3a

$$T = R_A - q \cdot (x-a) = qa - qx + qa = -qx + 2qa$$

Do wyznaczenia momentu gnącego korzystamy z faktu że wkład pochodzący od ciągłego rozkładu siły (na długości *x-a*) jest równoważny wkładowi od siły (równej $F_q(x) = (x-a)q$) umiejscowionej w środku tego rozkładu (ramię działania tej siły to $r = (x-a)/2$).

$$M_g = M + R_A(x-a) - F_q(x)r(x) = \frac{qa^2}{2} + qa(x-a) - \frac{q(x-a)^2}{2}$$

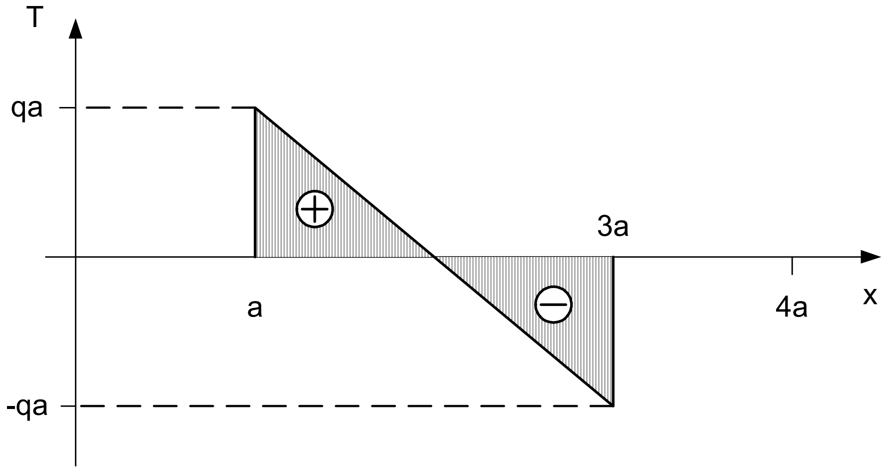
3. 3a<x<4a

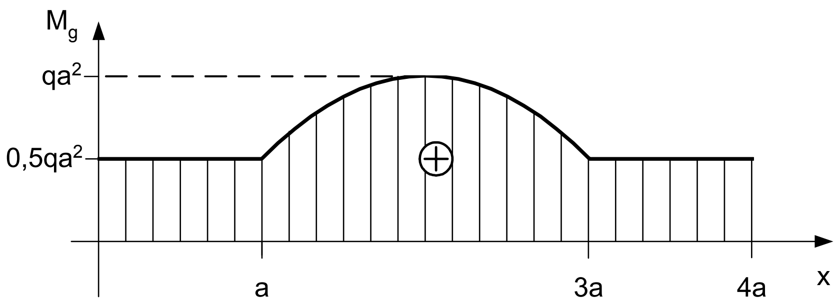
$$T = 0$$

$$M_g = M + R_A(x-a) - F_q(3a)(x - r(3a) - a) + R_B(x-3a) =$$

$$\frac{qa^2}{2} + qax - qa^2 - 2qax + 4qa^2 + qax - 3qa^2 = \frac{qa^2}{2}$$

Wykresy sił i momentów przedstawia rysunek:





2.2.2.R

Aby rozwiązać przedstawione zagadnienie należy zbadać rozkład naprężeń na powierzchni belki, czyli również rozkład momentu gnącego. W tym celu wyznaczmy najpierw reakcje podporowe R_A i R_B. Z uwagi na symetrię zagadnienia mamy:

$$R_A = R_B = R$$

$$2R - 2F = 0 \Rightarrow R = F$$

Następnie dzielimy belkę na trzy obszary o długości l/3 każdy i wyznaczamy w nich moment gnący:

a) w obszarze I *0<x</3*

$$M_g = -Fx$$

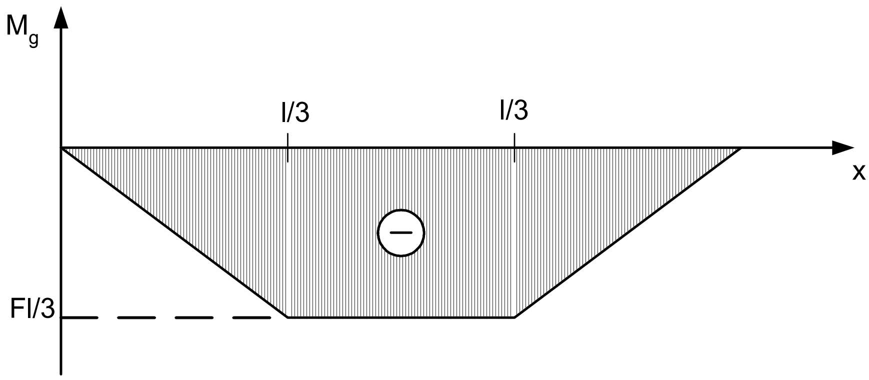
b) w obszarze II *l/3<x<2/3l*

$$M_g = -Fx + R_A\left(x - \frac{l}{3}\right) = x(R_A - F) - R_A\frac{l}{3} = -F\frac{l}{3}$$

c) w obszarze III *2/3l<x<l*

$$M_g = -Fx + R_A\left(x - \frac{l}{3}\right) + R_B\left(x - \frac{2}{3}l\right) = x(R_A + R_B - F) - R_A\frac{l}{3} - R_B\frac{2}{3}l = Fx - Fl$$

Wykres momentu gnącego wygląda więc następująco:



Jak widać moment jest maksymalny (a zarazem ma stałą wartość $M_g = Fa$) w obszarze od l/3 do 2/3l, więc w tym obszarze należy prowadzić badania.

Aby znaleźć wartość naprężeń na powierzchni próbki korzystamy z zależności:

$$\sigma = \frac{M_g}{W},$$

gdzie W – wskaźnik wytrzymałości przekroju poprzecznego belki na zginanie, dla belki prostokątnej:

$$W = \frac{bh^2}{6}$$

Po podstawieniu otrzymamy:

$$\sigma = \frac{Fl6}{3bh^2} \Rightarrow F = \frac{\sigma bh^2}{2l}$$

Jeżeli za σ przyjmiemy granicę plastyczności i podstawimy otrzymamy

$$F = \frac{2 \cdot 10^8 N/m^2 \cdot 10^{-2} m \cdot 9 \cdot 10^{-8} m^2}{2 \cdot 9 \cdot 10^{-2} m} = 1N$$

Odpowiedź: Należy przyłożyć siłę $F = \frac{\sigma b h^2}{2l}$ =1N

2.2.3.R

Reakcje podporowe dla pręta obciążonego jednorodnie (ciężarem własnym) będą sobie równe i równe połowie ciężaru pręta:

$$R_A = R_B = R = 1/2\,Q = \frac{1}{2}\rho Slg$$

Moment gnący dla tak obciążonej belki:

$$M_g = R_A \cdot x - Q(x)\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}\rho Slgx - \frac{1}{2}\rho Sgx^2 = \frac{1}{2}\rho Sg\left(lx - x^2\right)$$

Aby znaleźć maksymalną wartość momentu liczymy pochodną względem x.

$$\frac{dM_g}{dx} = \frac{1}{2}\rho Sg(l - 2x) = 0 \Rightarrow x_{\max} = \frac{1}{2}l$$

$$M_{g\max} = \frac{1}{8}\rho Sgl^2$$

Dla maksymalnego momentu gnącego korzystamy z zależności:

$$\frac{M_{g\max}}{W} = k_C \text{, gdzie } W = \frac{\pi R^3}{4}$$

$$\frac{4\rho\pi R^2 gl^2}{8\pi R^3} = k_C \text{,}$$

ale $m = \rho\pi R^2 l \Rightarrow R = \sqrt{m/\rho\pi l}$

$$l = \left(\frac{2k_C\sqrt{m/\rho\pi}}{\rho g}\right)^{\frac{2}{5}}$$

Odpowiedź: maksymalna długość pręta wynosi: $l = \left(\frac{2k_C\sqrt{m/\rho\pi}}{\rho g}\right)^{\frac{2}{5}}$

2.2.4.R

Belka jest symetryczna, więc możemy rozpatrywać zagadnienie w przedziale 0<x<l, w tym przedziale tym moment gnący opisany jest zależnością:

$$M_g = \frac{1}{2}Fx \text{,}$$

dla przekroju prostokątnego wskaźnik wytrzymałości wynosi:

$$W(x) = \frac{b(x)h^2}{6}$$

Jeżeli przyjmiemy dla naprężenia jego wartość dopuszczalną otrzymamy:

$$\sigma_{dop} = \frac{M_g(x)}{W(x)} \Rightarrow W(x) = \frac{M_g(x)}{\sigma_{dop}} = \frac{b(x)h^2}{6}$$

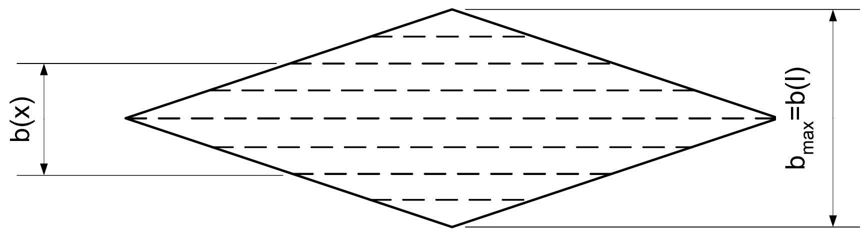
stąd:

$$b(x) = \frac{3Fx}{h^2 \sigma_{dop}}$$

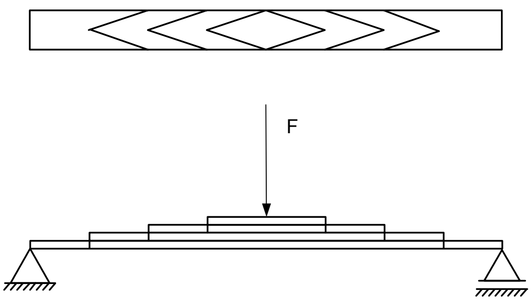
Czyli otrzymujemy liniowo zmieniającą się szerokość przekroju z maksimum w środku belki równym:

$$b_{\max} = \frac{3Fl}{h^2 \sigma_{dop}},$$

Belka taka widziana z góry:

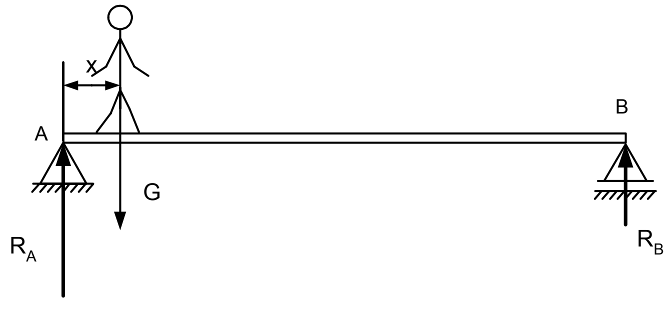


Stosowanie takiej belki byłoby jednak kłopotliwe, dlatego w praktyce stosuje się belki o innym kształcie. jeżeli podzielimy (myślowo) naszą belkę na paski tak jak pokazują linie przerywane i odpowiednio złożymy, to otrzymamy belkę będącą w istocie piórem resoru:



2.2.5.R

Wyznaczmy reakcję podporową w podporze A, w tym celu skorzystamy z warunku



zerowania się momentów względem podpory B:

$$\sum M_B = -R_A(x)l + G(l-x) = 0$$

$$R_A(x) = G\frac{(l-x)}{l}$$

Moment gnący na lewo od człowieka:

$M_g(\xi) = R_A(x) \cdot \xi = \dfrac{G\xi(l-x)}{l}$, gdzie ξ jest odległością od lewej podpory.

Moment ten osiąga wartość ekstremalną w punkcie działania siły G (jest to zarazem wartość maksymalna dla całej belki z uwagi na brak innych sił poza reakcjami podporowymi)

$$M_g(x) = Gx - \frac{Gx^2}{l}$$

Zbadajmy w jakim położeniu (x) człowiek wywoła największy moment gnący, w tym celu policzmy pochodną:

$$\frac{dM_g(x)}{dx} = 0 \Rightarrow G - \frac{2Gx}{l} = 0$$

$$x = \frac{1}{2}l$$

Czyli maksymalny moment gnący dla: $x = \dfrac{1}{2}l$

$$M_{g\max} = \frac{1}{4}Pl$$

Z warunku wytrzymałości na zginanie:

$k_g = \dfrac{M_{g\max}}{W}$, gdzie $W = \dfrac{1}{6}h^3$

$$k_g = \frac{3Pl}{2h^3}$$

ostatecznie:

$$h = \sqrt[3]{\frac{3Pl}{2k_g}}\ .$$

Odpowiedź: belka musi mieć grubość co najmniej równą: $h = \sqrt[3]{\dfrac{3Pl}{2k_g}}$

2.2.6.R

Z warunków równowagi momentów otrzymujemy reakcje podporowe:

$$R_A = \frac{Q}{l}\left(2l - 2x - d\right)$$

$$R_B = \frac{Q}{l\left(2x + d\right)}$$

Momenty gnące w miejscach przyłożenia sił (tylko tam mogą one osiągać maksimum):

$M_{g1} = R_A x = \frac{Qx}{l}\left(2l - 2x - d\right)$, dla siły na lewej osi wózka

$M_{g2} = R_A (x + d) - Qd = \frac{Q}{l}\left(x + d\right)\left(2l - 2x - d\right) - Qd$, dla siły na prawej osi wózka

W celu znalezienia maksymalnych wartości momentów gnących liczymy ich pochodne względem x i przyrównujemy je do zera.

$$\frac{dM_{g1}}{dx} = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{l}{2} - \frac{d}{4}$$

$$M_{g1\max} = \frac{Q}{2l}\left(l - \frac{d}{2}\right)^2$$

$$\frac{dM_{g2}}{dx} = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{l}{2} - \frac{3}{4}d$$

$$M_{g2\max} = \frac{Q}{2l}\left(l - \frac{d}{2}\right)^2$$

Jak widać oba momenty mają taką samą wartość maksimum, a więc do policzenia maksymalnego naprężenia możemy wziąć którykolwiek z nich.

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{g\max}}{W} = \frac{Q}{2lW}\left(l - \frac{d}{2}\right)^2$$

Maksymalna wartość naprężeń rozciągających wyniesie:

$$\sigma_{\max} = \frac{Q}{2lW}\left(l - \frac{d}{2}\right)^2$$