

PRACA KONTROLNA nr 7 - POZIOM ROZSZERZONY

1. Stosując zasadę indukcji matematycznej, wykazać, że dla wszystkich $n \geq 1$ liczba $10^n + 18n - 1$ jest podzielna przez 27.
2. Sprawdzić tożsamość

$$\frac{\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \beta} = \operatorname{tg}(\alpha + \beta) \operatorname{tg}(\alpha - \beta)$$

i określić jej dziedzinę.

3. Dwóch strzelców oddało każdy po dwa strzały i okazało się, że cel został trafiony dokładnie dwa razy. Obliczyć prawdopodobieństwo, że dwukrotnie trafił pierwszy strzelec, jeśli za każdym razem pierwszy trafia z prawdopodobieństwem $\frac{4}{5}$, a drugi z prawdopodobieństwem $\frac{3}{5}$.
4. Znaleźć wartość parametru nieujemnego p , dla którego suma kwadratów odwrotności pierwiastków równania

$$x^2 + (p + 1)x - (p + 3) = 0$$

jest najmniejsza.

5. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x^2 y^2 = 4 \\ y^4 - 6y^2 - x^2 + 9 = 0 \end{cases}.$$

Podać interpretację geometryczną tego układu i obliczyć pole wielokąta utworzonego przez jego rozwiązania (interpretowane jako punkty na płaszczyźnie). Sporządzić rysunek.

6. Podstawą ostrosłupa $ABCD$ jest trójkąt równoramienny o kącie przy wierzchołku 2α . Płaszczyzna przechodząca przez wierzchołek D ostrosłupa i wysokość podstawy jest płaszczyzną symetrii ostrosłupa, a przekrój bryły tą płaszczyzną jest trójkątem równobocznym o boku a . Wykazać, że ostrosłup ma jeszcze jedną płaszczyznę symetrii i obliczyć promień kuli opisanej na nim.

Rozwiązania (rękopis) zadań z wybranego poziomu prosimy nadsyłać do 18 marca 2018 r. na adres:

**Wydział Matematyki
Politechniki Wrocławskiej,
ul. Wybrzeże Wyspiańskiego 27,
50-370 WROCŁAW.**

Na kopercie prosimy koniecznie zaznaczyć wybrany poziom! (np. poziom podstawowy lub rozszerzony). Do rozwiązań należy dołączyć zaadresowaną do siebie kopertę zwrotną z naklejonym znaczkiem, odpowiednim do wagi listu. Prace nie spełniające podanych warunków nie będą poprawiane ani odsyłane.