PRACA KONTROLNA nr 4 - POZIOM ROZSZERZONY

1. Rozwiązać równanie $2\sin^2 x - 2\sin x \cos 2x = 1$.

2. Dane są dwa wektory $\vec{a} = [2, -3]$ oraz $\vec{b} = [-1, 4]$. Pokazać, że wektor $\overrightarrow{AB} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$ jest prostopadły do wektora $\overrightarrow{BC} = 8\vec{a} + 11\vec{b}$. Obliczyć długość środkowej trójkąta ABC rozpiętego na wektorach $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$, poprowadzonej z wierzchołka B.

3. Niech K będzie wierzchołkiem paraboli $f(x) = -\frac{4}{9}x^2 - \frac{8}{3}x$, a L - wierzchołkiem paraboli $g(x) = -f(x-7) + 7$. Na paraboli $g(x)$ znaleźć taki punkt N, aby wektor $\overrightarrow{NL}$ był równoległy do wektora $\overrightarrow{MK}$, gdzie $M = (0, f(0))$. Obliczyć pole czworokąta $KMLN$.

4. Przekrój sześcianu płaszczyzną jest sześciokątem foremnym. Wyznaczyć kąt nachylenia tej płaszczyzny do płaszczyzny podstawy sześcianu oraz obliczyć pole tego przekroju. Wykonać odpowiedni rysunek.

5. Dane są dwa okręgi: K_1 o środku w punkcie $P(1,1)$ i promieniu 1 oraz K_2 o środku $Q(9,5)$ i promieniu 3. Znaleźć punkt S na odcinku $\overline{PQ}$ oraz dobrać skalę k tak, aby okrąg K_2 był obrazem okręgu K_1 w jednokładności o środku S i skali k. Wyznaczyć równania prostych, które są styczne jednocześnie do obu okręgów i przechodzą przez punkt S.

6. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym pole każdej z pięciu ścian jest równe 1. Ostrosłup ten ścięto w połowie wysokości płaszczyzną równoległą do podstawy. Obliczyć objętość oraz pole powierzchni całkowitej otrzymanego ostrosłupa ściętego. Wykonać odpowiedni rysunek.