

LIGA MATEMATYCZNA
FINAŁ
26 marca 2010
SZKOŁA PONADGIMNAZJALNA

ZADANIE 1.

Wykaż, że jeżeli w trapez można wpisać okrąg, to okręgi, których średnicami są ramiona tego trapezu, są styczne.

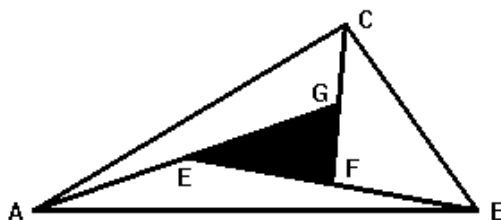
ZADANIE 2.

Udowodnij, że jeśli p i q są liczbami pierwszymi takimi, że $p \geq 5$ oraz $q - p = 2$, to liczba $p + q$ jest podzielna przez 12.

ZADANIE 3.

Pole trójkąta EFG jest równe 1. Oblicz pole trójkąta ABC , wiedząc, że

$$|AE| = |EG|, |EF| = |FB|, |FG| = |GC|.$$



ZADANIE 4.

Znajdź wszystkie funkcje $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające warunek

$$f(x)f(y) - f(xy) = x + y \text{ dla wszystkich liczb rzeczywistych } x, y.$$

ZADANIE 5.

Oblicz wartość wyrażenia $q^4 - 6q^3 + 9q^2 - 7$ wiedząc, że $q^2 - 3q + 1 = 0$.

ZADANIE 6.

Przedstaw liczbę 1 jako sumę kwadratów: (a) dwóch; (b) trzech; (c) czterech, parami różnych dodatnich liczb wymiernych.

ZADANIE 7.

Na okręgu zaznaczono sześć punktów. Każdy z odcinków łączących te punkty pomalowano na czerwono lub niebiesko. Wykaż, że otrzymano przynajmniej jeden jednokolorowy trójkąt.