MISTRZOWIE MATEMATYKI

Zestaw 25

GIMNAZJUM

1. Wykaż, że w trójkącie o bokach a, b, c i wysokościach odpowiednio $h_a, h_b,\ h_c$ zachodzi równość:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=(h_a+h_b+\ h_c)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)$$

2. Wyznacz wszystkie liczby całkowite n spełniające równanie

$$2^n\cdot(4-n)=2n+4$$

3. Przez [x] oznaczamy największą liczbę całkowitą nie większą od x. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n liczba

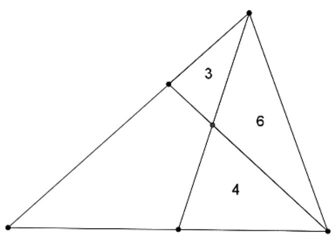
$$\left[\frac{n+4}{2}\right]+3n-2\cdot(-1)^n$$

jest podzielna przez 7.

LICEUM

1. W trójkącie kąty spełniają zależność $\sin^2\alpha+\sin^2\beta<\sin^2\gamma$. Udowodnij, że $\cos\gamma<0$.

2. Trójkąt podzielono dwoma liniami na cztery części, jak na rysunku. Pola trzech z nich wynoszą 3, 6 i 4. Oblicz pole czwartej części.



3. W czworościanie foremnym środek jednej z wysokości połączono odcinkami z wierzchołkami tego czworościanu nie należącymi do tej wysokości. Wykaż, ze odcinki te są do siebie parami prostopadłe.

Rozwiązania należy oddać do piątku 13 kwietnia do godziny 15.00 koordynatorowi konkursu panu Jarosławowi Szczepaniakowi lub przesłać na adres jareksz@interia.pl do soboty 14 kwietnia do północy.