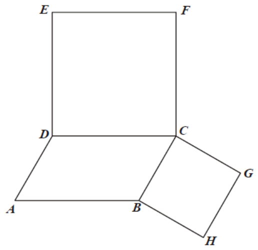
Zestaw 8

GIMNAZJUM

1. Na bokach BC i CD kwadratu $ABCD$ wybrano odpowiednio takie punkty P i Q, że $BP + DQ = PQ$. Wykazać, że środek okręgu opisanego na trójkącie APQ leży na przekątnej AC kwadratu $ABCD$.



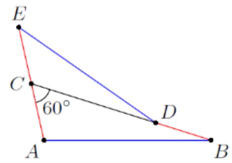
2. Na bokach BC i CD równoległoboku $ABCD$ zbudowano kwadraty $CDEF$ i $BCGH$. Udowodnij, że $|AC| = |FG|$.

3. Udowodnij, że jeżeli $a \neq b$ i $a + b = 2c$, to

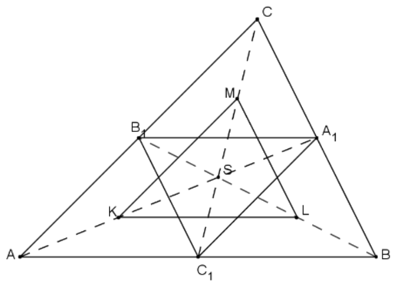
$$\frac{a}{a-c} + \frac{b}{b-c} = 2$$

LICEUM

1. Dany jest trójkąt ABC, w którym $\measuredangle ACB = 60°$ oraz $AC < BC$. Punkt D leży na boku BC, przy czym $BD = AC$. Punkt E jest punktem symetrycznym do punktu A względem punktu C. Udowodnić, że $AB = DE$.



2. Punkt S jest środkiem ciężkości trójkąta ABC, punkty A_1, B_1, C_1 są odpowiednio środkami boków BC, AC, AB, zaś punkty K, L, M – środkami odcinków SA, SB, SC. Wykaż, że $\triangle A_1B_1C_1 \equiv \triangle KLM$.



3. Przez $[x]$ oznaczamy największą liczbę całkowitą nie większą od x. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n liczba

$$\left[\frac{n+4}{2}\right] + 3n - 2 \cdot (-1)^n$$

jest podzielna przez 7.

Rozwiązania należy oddać do piątku 16 listopada do godziny 15.00 koordynatorowi konkursu panu Jarosławowi Szczepaniakowi lub przesłać na adres jareksz@interia.pl do soboty 17 listopada do północy.