Dla obliczenia pola podstawy czworościanu (rys. 30) zauważmy, że $|AC| = |LC| + |AL| = r + r\mathrm{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$ oraz $|BC| = |AC|\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Stąd mamy

$$P_p = \frac{1}{2}|AC|\cdot|BC| = \frac{1}{2}r^2\left(\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2}+1\right)^2\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{2}r^2\frac{\left(\sin\dfrac{\alpha}{2}+\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)^2}{\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}\mathrm{tg}\,\alpha$$

i ostatecznie

$$P_p = r^2\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}. \tag{9}$$

Z równości (8) i (9) otrzymujemy

$$V = \frac{1}{3}P_pH = \frac{\sqrt{2}}{3}r^3\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha\sqrt{-\cos\beta}}\cos\frac{\beta}{2}\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

Odp. Objętość czworościanu wynosi $\dfrac{\sqrt{2}}{3}r^3\dfrac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha\sqrt{-\cos\beta}}\cos\dfrac{\beta}{2}\mathrm{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$.

Rozwiązanie zadania 28.2

Aby nierówność

$$\frac{2px^2+2px+1}{x^2+x+2-p^2} \geq 2 \tag{10}$$

była spełniona dla każdej liczby rzeczywistej, jej dziedziną musi być **R**, czyli trójmian kwadratowy w mianowniku nie może mieć pierwiastków rzeczywistych. Stąd otrzymujemy warunek $\Delta_0 = 1 - 4(2-p^2) = 4p^2 - 7 < 0$. Nierówność ta jest spełniona dla

$$p \in \left(-\frac{\sqrt{7}}{2}, \frac{\sqrt{7}}{2}\right). \tag{11}$$

Dla parametru p spełniającego warunek (11) mianownik lewej strony (10) jest dodatni na całej prostej, więc po pomnożeniu obu stron (10) przez ten mianownik otrzymujemy nierówność równoważną $2px^2 + 2px + 1 \geq 2x^2 + 2x + 4 - 2p^2$, a po uporządkowaniu

$$2(p-1)x^2 + 2(p-1)x + 2p^2 - 3 \geq 0. \tag{12}$$