

LIGA MATEMATYCZNA
im. Zdzisława Matuskiego
FINAŁ
25 kwietnia 2016
SZKOŁA PONADGIMNAZJALNA

ZADANIE 1.

Wykaż, że suma kwadratów trzech kolejnych liczb naturalnych nie może być kwadratem liczby naturalnej.

ZADANIE 2.

Funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia warunki:

a) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y ;

b) $f(1) = 1$.

Wyznacz $f\left(\frac{9}{32}\right)$.

ZADANIE 3.

Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Punkty K i L leżą odpowiednio na odcinkach AB i AD , przy czym czworokąt $AKCL$ jest równoległobokiem. Odcinki KD i BL przecinają się w punkcie M . Wykaż, że pola czworokątów $AKML$ i $BCDM$ są równe.

ZADANIE 4.

Znajdź wszystkie liczby pierwsze p o tej własności, że liczba $19p + 1$ jest sześcianem pewnej liczby całkowitej.

ZADANIE 5.

Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n liczba

$$\underbrace{4444 \dots 4}_{7n \text{ cyfr } 4} \underbrace{7777 \dots 7}_{n \text{ cyfr } 7} \underbrace{4444 \dots 4}_{7n \text{ cyfr } 4} + 2016$$

jest złożona.

ZADANIE 6.

Dany jest trójkąt ostrokątny ABC oraz jego wysokości AD i BE . Punkty P i Q są rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów A i B na prostą DE . Wykaż, że $|PE| = |QD|$.

ZADANIE 7.

Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x_1^2 - 3x_1 + 4 = x_2 \\ x_2^2 - 3x_2 + 4 = x_3 \\ x_3^2 - 3x_3 + 4 = x_4 \\ \dots \\ x_{n-1}^2 - 3x_{n-1} + 4 = x_n \\ x_n^2 - 3x_n + 4 = x_1. \end{cases}$$