

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
im. Stanisława Staszica w Krakowie
OLIMPIADA „O DIAMENTOWY INDEKS AGH” 2021/22

MATEMATYKA - ETAP II

ZADANIA PO 10 PUNKTÓW

1. Jadąc z prędkością 30 km/godz. spóźnimy się na spotkanie 10 minut, a jadąc z prędkością 60 km/godz. będziemy 10 minut za wcześnie. Z jaką prędkością powinniśmy jechać, aby przybyć punktualnie?
2. Bok kwadratu jest przeciwprostokątną AB trójkąta prostokątnego, którego trzeci wierzchołek C leży na zewnątrz kwadratu. Niech S będzie środkiem kwadratu. Uzasadnij, że kąty ACS i BCS są przystające.
3. Dane są trzy kolejne liczby całkowite. Udowodnij, że kwadraty dokładnie dwóch z nich dają resztę 1 z dzielenia przez 3.
4. Liczby $2\log_2 x$, $\log_2 2x$, $\log_2(x-4)$ są trzema początkowymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Znajdź setny wyraz tego ciągu.

ZADANIA PO 20 PUNKTÓW

5. Wyznacz dziedzinę i zbiór wartości funkcji f , jeżeli dla każdego x należącego do jej dziedziny spełniona jest równość

$$f(x) + (f(x))^2 + (f(x))^3 + \dots = -\frac{1}{5}(x^2 + 1).$$

6. Dane są dodatnie liczby całkowite n oraz k , przy czym $k \leq n$. Ze zbioru liczb $\{1, 2, \dots, n\}$ losujemy kolejno bez zwracania k liczb, otrzymując w ten sposób ciąg k -wyrazowy. Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń
 A : liczba k nie występuje w tym ciągu,
 B : k jest ostatnim wyrazem ciągu,
 C : ciąg jest monotoniczny i k jest jego wyrazem.
7. Punkty $A = (0, 7)$, $B = (1, 0)$, $C = (-3, -2)$ są wierzchołkami trójkąta. Znajdź równanie okręgu opisanego na tym trójkącie i równanie jego obrazu w symetrii środkowej względem punktu A . Napisz równania wszystkich prostych stycznych jednocześnie do obu tych okręgów.