

Praca kontrolna nr 3

- 24.1.** Suma wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego zmniejszy się o 25%, jeśli wykreślimy z niej składniki o numerach parzystych niepodzielnych przez 4. Obliczyć sumę wszystkich wyrazów tego ciągu, wiedząc, że jego drugi wyraz wynosi 1.
- 24.2.** Z kompletu 28 kości do gry w domino wylosowano dwie kości (bez zwracania). Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że kości *pasują* do siebie, tzn. na jednym z pól obu kości występuje ta sama liczba oczek.
- 24.3.** Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 5x + my = m \end{cases}$$

w zależności od parametru rzeczywistego m . Wyznaczyć i narysować zbiór, jaki tworzą rozwiązania $(x(m), y(m))$ tego układu, gdy m przebiega zbiór liczb rzeczywistych.

- 24.4.** W graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym krawędź dolnej podstawy AB widać ze środka górnej podstawy P pod kątem α . Wyznaczyć cosinus kąta utworzonego przez płaszczyznę podstawy i płaszczyznę zawierającą krawędź AB oraz przeciwległą do niej krawędź $D'E'$ górnej podstawy. Uzasadnić odpowiednio obliczenia.
- 24.5.** Rozwiązać nierówność $-1 \leq \frac{2^{x+1/2}}{4^x - 4} \leq 1$.
- 24.6.** Bez użycia tablic wykazać, że $\operatorname{tg} 82^\circ 30' - \operatorname{tg} 7^\circ 30' = 4 + 2\sqrt{3}$.
- 24.7.** Napisać równanie prostej k stycznej w punkcie $P(2, 3)$ do okręgu $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0$. Następnie wyznaczyć równania wszystkich prostych stycznych do tego okręgu, które tworzą z prostą k kąt 45° .
- 24.8.** Dobrać parametry $a > 0$ i $b \in \mathbb{R}$ tak, aby funkcja

$$f(x) = \begin{cases} (a+1) + ax - x^2, & \text{dla } x \leq a, \\ \frac{b}{x^2 - 1}, & \text{dla } x > a, \end{cases}$$

była ciągła i miała pochodną w punkcie $x = a$. Sporządzić wykres funkcji $f(x)$ oraz stycznej do wykresu w punkcie $P(a, f(a))$ bez szczegółowego badania jej przebiegu.