XXXVIII
KORESPONDENCYJNY KURS
Z MATEMATYKI

luty 2009 r.

PRACA KONTROLNA nr 5 - POZIOM PODSTAWOWY

1. Biegacz wyruszył na trasę maratonu, pokonując każde 300 m w ciągu 1 minuty. Po upływie 20 minut wyruszył za nim rowerzysta i jadąc ze stałą prędkością, dogonił maratończyka dokładnie 195 m przed linią mety. Jaka była prędkość rowerzysty? Po jakim czasie powinien wyjechać rowerzysta, aby jadąc ze stałą prędkością 30 km/h, przekroczyć linię mety równocześnie z biegaczem? Wynik zaokrąglić w dół z dokładnością do 1 sekundy.

2. Tangens kąta ostrego α równy jest $\frac{a}{b}$, gdzie

$$a = \left(\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2, \quad b = \left(\sqrt{\sqrt{2}+1} - \sqrt{\sqrt{2}-1}\right)^2.$$

   Wyznaczyć wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych tego kąta. Wykorzystując wzór $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, obliczyć miarę kąta α.

3. W walec wpisano trzy wzajemnie styczne kule w ten sposób, że każda z nich jest styczna do ściany bocznej i obu podstaw walca. Sprawdzić, jaką część objętości walca zajmują kule. Wynik wyrażony w procentach podać z dokładnością do 1 promila.

4. Wskazać wszystkie te wyrazy ciągu (a_n), gdzie

$$a_n = \frac{\log_2^2 n + \log_{\frac{1}{2}}(n^3)}{\log_n 2} - 2\log_4\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

   które są równe zero.

5. Dwie klepsydry, mała i duża, odmierzają odpowiednio m i n, $m < n$, pełnych minut. Po raz pierwszy obrócono je równocześnie w samo południe. Każdą z nich obracano, gdy tylko przesypał się w niej cały piasek. Czas mierzono do momentu, gdy obie klepsydry równocześnie przestały działać. Określić, która była wtedy godzina, jeżeli wiadomo, że małą obrócono o 13 razy więcej niż dużą, a gdy małą obracano po raz jedenasty, duża wypełniona była dokładnie w połowie.

6. W trójkąt równoboczny o polu P wpisano okrąg oraz trzy małe okręgi – jak na rysunku. Następnie odcięto narożniki trójkąta wzdłuż łuków małych okręgów. Obliczyć pole koła opisanego na tak powstałej figurze.