

## Praca kontrolna nr 3

**17.1.** Dla jakich wartości  $\sin x$  liczby  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\sin 2x$  (w podanym porządku) są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego? Wyznaczyć czwarty wyraz tego ciągu dla każdego z rozwiązań.

**17.2.** W pewnych zawodach sportowych startuje 16 drużyn. W eliminacjach są one losowo dzielone na 4 grupy po 4 drużyny w każdej grupie. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że trzy zwycięskie drużyny z poprzednich zawodów znajdą się w trzech różnych grupach.

**17.3.** Nie wykonując dzielenia, udowodnić, że wielomian

$$(x^2 + x + 1)^3 - x^6 - x^3 - 1$$

jest podzielny przez trójmian  $(x + 1)^2$ .

**17.4.** Wyznaczyć równanie okręgu o promieniu  $r$  stycznego do paraboli  $y = x^2$  w dwóch punktach. Dla jakiego  $r$  zadanie ma rozwiązanie? Sporządzić rysunek, przyjmując  $r = 3/2$ .

**17.5.** Stosując zasadę indukcji matematycznej, udowodnić prawdziwość wzoru

$$\binom{2}{2} - \binom{3}{2} + \binom{4}{2} - \binom{5}{2} + \dots + \binom{2n}{2} = n^2, \quad n \geq 1.$$

**17.6.** Rozwiązać nierówność

$$\log_x(1 - 6x^2) \geq 1.$$

**17.7.** W trapezie  $ABCD$  opisanym na okręgu o środku  $S$  dane są ramię  $|AD| = c$  oraz  $|AS| = d$ . Punkt styczności okręgu z podstawą  $AB$  dzieli ją w stosunku  $1 : 2$ . Obliczyć pole tego trapezu. Sporządzić rysunek dla  $c = 5$  i  $d = 4$ .

**17.8.** Wszystkie ściany równoległościanu są rombami o boku  $a$  i kącie ostrym  $\beta$ . Obliczyć objętość tego równoległościanu. Sporządzić rysunek. Obliczenia odpowiednio uzasadnić.