

PRACA KONTROLNA nr 2 - POZIOM PODSTAWOWY

1. Rozwiąż nierówność

$$1 \leq \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2x-1} < 2.$$

2. Średnia arytmetyczna czwartego, szóstego i dziesiątego wyrazu ciągu arytmetycznego (a_n) , gdzie $n \geq 1$, wynosi 14, a ciąg (a_3, a_5, a_{11}) jest geometryczny. Uzasadnij, że ciąg (a_4, a_6, a_{10}) również jest geometryczny.

3. W ciągu arytmetycznym (a_n) , określonym dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, mamy

$$a_3 = 0 \quad \text{oraz} \quad a_6 = 7 \sin^2 \alpha,$$

gdzie $\operatorname{tg} \alpha = 3$. Oblicz sumę 50 początkowych wyrazów tego ciągu, których indeksy są liczbami parzystymi.

4. Bank oferuje kredyt, który należy spłacić jednorazowo wraz z odsetkami po roku. Jaki jest całkowity koszt tego kredytu, jeśli co miesiąc bank nalicza odsetki w wysokości 2% aktualnego zadłużenia, a dodatkowo w chwili przyznania kredytu dolicza prowizję w wysokości 3% pożyczanej kwoty? Jaką kwotę trzeba będzie spłacić, jeśli pożyczymy 20 000 zł? Prowizja naliczana jest jednorazowo i powiększa kwotę, którą należy spłacić.

5. Zaznacz na osi liczbowej zbiór wszystkich wartości parametru t , dla których funkcja

$$f(x) = \left(\frac{2-t^2}{t-3} \right)^{t-x} + 1 - t$$

jest malejąca. Naszkicuj wykres funkcji f dla największej całkowitej wartości t z wyznaczonego zbioru.

6. Niech $c > 0$ i $c \neq 1$. Wyznacz najmniejszą liczbę naturalną m , dla której suma m początkowych wyrazów ciągu (a_n) , $a_n = \log_2 c^n$, przekracza liczbę

$$\log_{2^m} c^{m^2} + 16 \log_4 c^2.$$

PRACA KONTROLNA nr 2 - POZIOM ROZSZERZONY

1. Uzasadnij, że ciąg (a_n) , którego n -ty wyraz dany jest wzorem

$$a_n = \frac{1}{2^1 + 3^1} + \frac{1}{2^2 + 3^2} + \frac{1}{2^3 + 3^3} + \cdots + \frac{1}{2^n + 3^n},$$

jest ograniczony.

2. Wyznacz dziedzinę D_f funkcji

$$f(x) = \log_{10+3x-x^2} \left(8 - \frac{7}{1-x} \right).$$

3. Niech $c > 0$. Zbadaj monotoniczność oraz oblicz sumę wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu (a_n) , gdzie

$$a_n = \log_{3^{3^n}} c \quad \text{dla każdego } n \geq 1.$$

Ustal, dla jakiej wartości parametru c suma ta jest nie mniejsza od liczby $\log_9(c^2 - 2)$.

4. Rozwiąż nierówność

$$\sqrt{\log_{\sqrt{x}}(x+2)} > \frac{1}{\log_{\sqrt{x+2}} \sqrt{x}}.$$

5. Określ ilość rozwiązań równania

$$\left| 2^{x-1} - 1 \right| = m \cdot 2^{x+1}$$

w zależności od wartości parametru m .

6. Opisz metodę konstrukcji i starannie narysuj wykres funkcji

$$f(x) = 2 + \log_2 \frac{1}{2-x}.$$

Następnie narysuj obraz tej krzywej w symetrii względem prostej $x = y$. Wyprowadź wzór funkcji, której wykresem jest powstała w ten sposób krzywa.

Rozwiązania (rękopis) zadań z wybranego poziomu prosimy nadsyłać do **20.10.2022r.** na adres:

Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska
Wybrzeże Wyspiańskiego 27
50-370 WROCŁAW,

lub **elektronicznie**, za pośrednictwem portalu talent.pwr.edu.pl

Na kopercie prosimy **koniecznie** zaznaczyć **wybrany poziom! (np. poziom podstawowy lub rozszerzony)**. Do rozwiązań należy dołączyć zaadresowaną do siebie kopertę zwrotną z naklejonym znaczkiem, odpowiednim do formatu listu. Prace niespełniające podanych warunków nie będą poprawiane ani odsyłane.

Uwaga. Wysyłając nam rozwiązania zadań uczestnik Kursu udostępnia Politechnice Wrocławskiej swoje **dane osobowe**, które przetwarzamy **wyłącznie** w zakresie niezbędnym do jego prowadzenia (odesłanie zadań, prowadzenie statystyki). Szczegółowe informacje o przetwarzaniu przez nas danych osobowych są dostępne na stronie internetowej Kursu.

Adres internetowy Kursu: <http://www.im.pwr.edu.pl/kurs>