

**LIGA MATEMATYCZNA**  
**im. Zdzisława Matuskiego**  
**GRUDZIEŃ 2015**  
**SZKOŁA PONADGIMNAZJALNA**

**ZADANIE 1.**

Na przyprostokątnych  $BC$  i  $CA$  trójkąta prostokątnego  $ABC$  zbudowano, po zewnętrznej stronie, kwadraty  $BEFC$  oraz  $CGHA$ . Odcinek  $CD$  jest wysokością trójkąta  $ABC$ . Wykaż, że proste  $AE$ ,  $BH$  oraz  $CD$  przecinają się w jednym punkcie.

**ZADANIE 2.**

W zbiorze liczb rzeczywistych rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 2yz + 100 \\ z^2 = 2xy - 100. \end{cases}$$

**ZADANIE 3.**

Różne dodatnie liczby rzeczywiste  $a$ ,  $b$  spełniają równość

$$\frac{5a}{a+b} + \frac{5b}{a-b} = 6.$$

Wykaż, że co najmniej jedna z nich jest niewymierna.

**ZADANIE 4.**

Czy istnieje taka dodatnia liczba całkowita  $n$ , aby zapis dziesiętny liczby  $2^n$  zawierał 10 jedynek, 10 dwójek, 10 trójek, ..., 10 ósemek, 10 dziewiątek i pewną ilość zer?

**ZADANIE 5.**

Funkcja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  spełnia warunek

$$2f(x) + f(1-x) = 3x$$

dla wszystkich liczb rzeczywistych  $x$ . Wyznacz  $f(2015)$ .