



Zestaw 9

GINNAZJUM

1. W trójkącie ABC dwusieczna AD jest prostopadła do środkowej CE . Udowodnij, że jeden z boków tego trójkąta jest dwa razy dłuższy od drugiego boku.
2. Wyznacz wszystkie trójki (a, b, c) liczb rzeczywistych spełniające układ równań:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 23 \\ a + 2b + 4c = 22 \end{cases}$$

3. Dane są liczby 1, 2, 3, 4, 5, 6. Wykonujemy operację polegającą na dodaniu do dwóch spośród nich liczby 1. Na tak utworzonym ciągu liczb powtarzamy wielokrotnie tę operację. Czy w pewnym momencie możemy uzyskać ciąg stały, tj. mający wszystkie wyrazy równe?

LICEUM

1. W okrąg wpisano trapez równoramienny o dłuższej podstawie będącej średnicą okręgu oraz trójkąt, którego boki są równoległe do boków trapezu. Wykaż, że trapez i trójkąt mają równe pola.
2. Wykaż, że trójka $(0, 0, 0)$ jest jedynym rozwiązaniem w liczbach całkowitych równania

$$x^3 = 2y^3 + 4z^3$$

3. Niech n będzie liczbą naturalną. Wykaż, że suma $1 + 2^n + 3^n + 4^n$ jest podzielna przez 5 wtedy i tylko wtedy, gdy n nie jest podzielne przez 4.

Rozwiązania należy oddać do piątku 27 marca do godziny 12.30 koordynatorowi konkursu panu Jarosławowi Szczepaniakowi lub swojemu nauczycielowi matematyki.

Na stronie internetowej szkoły w zakładce Konkursy i olimpiady można znaleźć wyniki dotychczasowych rund i rozwiązania zadań.

