

## PRACA KONTROLNA nr 7

1. Pierwsze dwa wyrazy ciągu geometrycznego są rozwiązaniami równania  $4x^2 - 4px - 3p^2 = 0$ , gdzie  $p$  jest nieznaną liczbą. Wyznaczyć ten ciąg, jeśli suma wszystkich jego wyrazów wynosi 3.
2. Wiedząc, że  $\cos \varphi = \sqrt{\frac{2}{3}}$  oraz  $\varphi \in (\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$ , obliczyć **cosinus** kąta pomiędzy prostymi  $y = (\sin \frac{\varphi}{2})x$ ,  $y = (\cos \frac{\varphi}{2})x$ .
3. Kostka sześcienna ma krawędź  $2a$ . Aby zmieścić ją w pojemniku w kształcie kuli o średnicy  $3a$ , ze wszystkich naroży odcięto w minimalny sposób jednakowe ostrosłupy prawidłowe trójkątne. Obliczyć długość krawędzi bocznej odciętych czworościanów?
4. Udowodnić prawdziwość nierówności

$$1 + \frac{x}{2} \geq \sqrt{1+x} \geq 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} \quad \text{dla } x \in [-1, 1].$$

**Zilustrować** ją na odpowiednim wykresie.

5. Rozwiązać równanie:

$$\frac{\cos 5x}{\sin 2x} = -\sin 3x.$$

6. Znaleźć równanie okręgu symetrycznego do okręgu  $x^2 - 4x + y^2 + 6y = 0$  względem stycznej do tego okręgu poprowadzonej z punktu  $P(3, 5)$  i mającej dodatni współczynnik kierunkowy.
7. W okrąg o promieniu  $r$  wpisano trapez o przekątnej  $d \geq r\sqrt{3}$  i największym obwodzie. Obliczyć pole tego trapezu.
8. Metodą analityczną określić dla jakich wartości parametru  $m$  układ równań

$$\begin{cases} mx & -y & +2 = 0 \\ x & -2|y| & +2 = 0 \end{cases}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie? Wyznaczyć to rozwiązanie w zależności od  $m$ . Sporządzić rysunek.