

PRACA KONTROLNA nr 3

grudzień 2002r

1. Suma wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego zmniejszy się o 25%, jeśli wykreślimy z niej składniki o numerach parzystych niepodzielnych przez 4. Obliczyć sumę wszystkich wyrazów tego ciągu wiedząc, że jego drugi wyraz wynosi 1.
2. Z kompletu 28 kości do gry w domino wylosowano dwie kości (bez zwracania). Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że kości *pasują* do siebie tzn. na jednym z pól obu kości występuje ta sama liczba oczek.
3. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 5x + my = m \end{cases}$$

w zależności od parametru rzeczywistego m . Wyznaczyć i narysować zbiór, jaki tworzą rozwiązania $(x(m), y(m))$ tego układu, gdy m przebiega zbiór liczb rzeczywistych.

4. W graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym krawędź dolnej podstawy \overline{AB} jest widoczna ze środka górnej podstawy P pod kątem α . Wyznaczyć cosinus kąta utworzonego przez płaszczyznę podstawy i płaszczyznę zawierającą \overline{AB} oraz przeciwną do niej krawędź $\overline{D'E'}$ górnej podstawy. Obliczenia odpowiednio uzasadnić.
5. Rozwiązać nierówność
$$-1 \leq \frac{2^{x+1/2}}{4^x - 4} \leq 1.$$
6. Nie posługując się tablicami wykazać, że $\operatorname{tg} 82^\circ 30' - \operatorname{tg} 7^\circ 30' = 4 + 2\sqrt{3}$.
7. Napisać równanie prostej k stycznej do okręgu $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0$ w punkcie $P(2, 3)$. Następnie wyznaczyć równania wszystkich prostych stycznych do tego okręgu, które tworzą z prostą k kąt 45° .
8. Dobrać parametry $a > 0$ i $b \in \mathbb{R}$ tak, aby funkcja

$$f(x) = \begin{cases} (a+1) + ax - x^2 & \text{dla } x \leq a, \\ \frac{b}{x^2-1} & \text{dla } x > a, \end{cases}$$

była ciągła i miała pochodną w punkcie a . Nie przeprowadzając dalszego badania sporządzić wykres funkcji $f(x)$ oraz stycznej do jej wykresu w punkcie $P(a, f(a))$.