

**AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA**  
**im. Stanisława Staszica w Krakowie**  
**OLIMPIADA „O DIAMENTOWY INDEKS AGH” 2016/17**  
**MATEMATYKA - ETAP I**

**ZADANIA PO 10 PUNKTÓW**

1. Udowodnij, że jedyną liczbą pierwszą  $p$ , taką że liczba  $p^2 + 2$  też jest pierwsza, jest  $p = 3$ .
2. Dane są punkty  $A = (-1, -2)$ ,  $B = (3, 1)$ ,  $C = (1, 4)$ . Prosta  $l$  jest równoległa do prostej  $AC$  i dzieli trójkąt  $ABC$  na dwie figury o równych polach. Znajdź równanie prostej  $l$ .
3. Rozwiąż równanie

$$4 \sin^2 x + 8 \sin^2 x \cos x = 2 \cos x + 1.$$

4. Niech  $a$  i  $b$  będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Wykaż, że jeżeli  $a < b$ , to

$$a^3 - b^3 < a^2b - ab^2.$$

**ZADANIA PO 20 PUNKTÓW**

5. Wykaż, że jeżeli liczba  $m$  spełnia nierówność

$$\left(1 + \frac{1}{2m}\right) \log_{0,5} 3 - \log_{0,5} \left(27 + 3^{\frac{1}{m}}\right) \leq 2,$$

to  $x^2 + mx + 1 > 0$  dla każdej liczby rzeczywistej  $x$ .

6. nieskończony ciąg  $(a_n)$  dany jest wzorem  $a_n = 1 + 2 + \dots + n$ .
  - a) Znajdź wszystkie cyfry jedności wyrazów tego ciągu w zapisie dziesiętnym. Udowodnij, że znalezione rozwiązanie jest poprawne.
  - b) Wyznacz granicę ciągu  $(b_n)$ , gdzie

$$b_n = \frac{a_{(n-1)^2}}{(a_{3n} - a_{2n})^2}.$$

7. Cztery kule o jednakowym promieniu  $a$  są parami zewnętrznie styczne. Znajdź promienie dwóch kul, z których każda jest styczna do wszystkich czterech kul.