LIGA MATEMATYCZNA
im. Zdzisława Matuskiego
GRUDZIEŃ 2015
SZKOŁA PONADGIMNAZJALNA

ZADANIE 1.
Na przyprostokątnych BC i CA trójkąta prostokątnego ABC zbudowano, po zewnętrznej stronie, kwadraty $BEFC$ oraz $CGHA$. Odcinek CD jest wysokością trójkąta ABC. Wykaż, że proste AE, BH oraz CD przecinają się w jednym punkcie.

ZADANIE 2.
W zbiorze liczb rzeczywistych rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 2yz + 100 \\ z^2 = 2xy - 100. \end{cases}$$

ZADANIE 3.
Różne dodatnie liczby rzeczywiste a, b spełniają równość

$$\frac{5a}{a+b} + \frac{5b}{a-b} = 6.$$

Wykaż, że co najmniej jedna z nich jest niewymierna.

ZADANIE 4.
Czy istnieje taka dodatnia liczba całkowita n, aby zapis dziesiętny liczby 2^n zawierał 10 jedynek, 10 dwójek, 10 trójek, ..., 10 ósemek, 10 dziewiątek i pewną ilość zer?

ZADANIE 5.
Funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia warunek

$$2f(x) + f(1-x) = 3x$$

dla wszystkich liczb rzeczywistych x. Wyznacz $f(2015)$.