

PRACA KONTROLNA nr 7 -POZIOM ROZSZERZONY

1. Na każdym z trzech drutów linii elektrycznej wysokiego napięcia siedzi po pięć wróbli. W pewnej chwili odfrunęło przypadkowych sześć wróbli. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że na co najmniej dwóch drutach pozostała taka sama liczba ptaków.
2. Dolna część namiotu ma kształt walca o wysokości $h = 2$ m, a górna jest stożkiem o tworzącej $l = \sqrt{15}$ m i tym samym promieniu, co część dolna. Wyznaczyć pozostałe parametry namiotu tak, aby jego objętość była największa. Sporządzić rysunek.
3. Z pudełka zawierającego 10 klocków ponumerowanych cyframi od 0 do 9 wylosowano dwa klocki i ustawiono obok siebie w przypadkowej kolejności, tworząc w ten sposób liczbę k (ustawienie 03 rozumiemy jako liczbę 3). Następnie wylosowano trzeci klocek z pozostałych i ustawiono go za tamtymi, gdy suma cyfr liczby k była mniejsza niż 10, lub przed tamtymi, w przeciwnym wypadku. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że otrzymana liczba jest większa od 500.
Wsk. Użyć wzoru na prawdopodobieństwo całkowite.
4. Stosując zasadę indukcji matematycznej, udowodnić tożsamość

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 3\alpha + \dots + \sin^2 (2n-1)\alpha = \frac{n}{2} - \frac{\sin 4n\alpha}{4 \sin 2\alpha}, \quad n \geq 1,$$

gdzie $\alpha \neq k\frac{\pi}{2}$, k całkowite.

5. Znaleźć równanie stycznej l do wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{x} + x^2$ w punkcie, w którym przecina on oś Ox . Wyznaczyć wszystkie styczne, które są równoległe do prostej l . Znaleźć punkty wspólne tych stycznych z wykresem funkcji. Rozwiązanie zilustrować odpowiednim rysunkiem.
6. Krawędź podstawy graniastosłupa trójkątnego prawidłowego ma długość a . Oznaczmy przez 2α kąt między przekątnymi ścian bocznych wychodzącymi z jednego wierzchołka. Graniastosłup przecięto na dwie części płaszczyzną przechodzącą przez krawędź dolnej podstawy i przeciwległy wierzchołek górnej podstawy. Obliczyć tangens kąta α , dla którego w większą część graniastosłupa można wpisać kulę. Dla znalezionej kąta α , obliczyć promień kuli wpisanej w mniejszą część graniastosłupa.