

LIGA MATEMATYCZNA
GRUDZIEŃ 2011
SZKOŁA PONADGIMNAZJALNA

ZADANIE 1.

Łąka w kształcie kwadratu ma powierzchnię 1 hektara. Swoje norki wykopało tam 2011 zajęcy (każdy ma jedną norkę). Po pewnym czasie pojawił się jeszcze jeden zajęc - samotnik, który nie chce mieć sąsiada bliżej niż 1 metr od swojej norki. Udowodnij, że może tam zamieszkać.

ZADANIE 2.

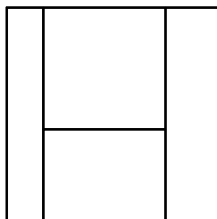
Znajdź wszystkie funkcje $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające warunek

$$f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2}{x}$$

dla każdej liczby rzeczywistej x różnej od zera.

ZADANIE 3.

Kwadrat podzielono na mniejszy kwadrat i trzy prostokąty, jak na rysunku. Czy trzy spośród tych czterech części mogą mieć taki sam obwód?



ZADANIE 4.

Wykaż, że dla liczby całkowitej k liczba $k^6 - 2k^4 + k^2$ jest podzielna przez 36.

ZADANIE 5.

Wykaż, że wśród pięciu dowolnie wybranych liczb naturalnych zawsze znajdą się trzy takie, których suma jest podzielna przez 3.