

**AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA**  
**im. Stanisława Staszica w Krakowie**  
**OLIMPIADA „O DIAMENTOWY INDEKS AGH” 2011/12**

**MATEMATYKA - ETAP III**

**ZADANIA PO 10 PUNKTÓW**

1. Niech  $a$  i  $b$  będą dwiema liczbami rzeczywistymi, przy czym  $a > b$ . Udowodnij, że

$$a^3 - b^3 \geq ab^2 - a^2b.$$

2. Ile dzielników w zbiorze liczb naturalnych ma liczba  $4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$  ?
3. Suma czterech początkowych wyrazów rosnącego ciągu arytmetycznego  $(a_n)$  jest równa 0, a suma ich kwadratów wynosi 80. Znajdź wzór na  $n$ -ty wyraz tego ciągu.
4. Rozwiąż nierówność

$$1 + \sqrt{x + 5} > x.$$

**ZADANIA PO 20 PUNKTÓW**

5. Ze zbioru  $L = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$  losujemy ze zwracaniem dwie liczby  $x, y$ . Następnie powtarzamy to losowanie dotąd, aż otrzymamy punkt  $(x, y)$  należący do zbioru

$$S = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 2\}.$$

Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń:

$A$  - będziemy losować dokładnie cztery razy,

$B$  - liczba losowań będzie parzysta.

6. Dla jakich  $m$  równanie

$$\log_3(x - m) + \log_3 x = \log_3(3x - 4)$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie w zbiorze liczb rzeczywistych?

7. Prosta  $2x + y - 13 = 0$  zawiera bok  $AB$  trójkąta  $ABC$ , prosta  $x - y - 5 = 0$  zawiera bok  $BC$ , a prosta  $3x - y - 7 = 0$  zawiera dwusieczną kąta  $ACB$ . Znajdź wierzchołki tego trójkąta i oblicz jego pole.