

PRACA KONTROLNA nr 2

listopad 2002r

1. Czy liczby różnych ‘słów’, jakie można utworzyć zmieniając kolejność liter w ‘słowach’ TANATAN i AKABARA, są takie same? Uzasadnić odpowiedź. Przez ‘słowo’ rozumiemy tutaj dowolny ciąg liter.
2. Reszta z dzielenia wielomianu $x^3 + px^2 - x + q$ przez trójmian $(x+2)^2$ wynosi $-x+1$. Wyznaczyć pierwiastki tego wielomianu.
3. Figura na rysunku poniżej składa się z łuków BC , CA okręgów o promieniu a i środkach odpowiednio w punktach A , B , oraz z odcinka \overline{AB} o długości a . Obliczyć promień okręgu stycznego do obu łuków oraz do odcinka \overline{AB} .
4. Podstawą pryzmy przedstawionej na rysunku poniżej jest prostokąt $ABCD$, którego bok \overline{AB} ma długość a , a bok \overline{BC} długość b , gdzie $a > b$. Wszystkie ściany boczne pryzmy są nachylone pod kątem α do płaszczyzny podstawy. Obliczyć objętość tej pryzmy.
5. Rozwiązać nierówność

$$\frac{2}{x} < \sqrt{5-x^2}.$$

Rozwiązanie zilustrować wykresami funkcji występujących po obu stronach nierówności. Zaznaczyć na rysunku otrzymany zbiór rozwiązań.

6. Ciąg (a_n) jest określony warunkami $a_1 = 4$, $a_{n+1} = 1 + 2\sqrt{a_n}$, $n \geq 1$. Stosując zasadę indukcji matematycznej wykazać, że ciąg (a_n) jest rosnący oraz dla $n \geq 1$ spełniona jest nierówność: $4 \leq a_n < 6$.
7. Na krzywej o równaniu $y = \sqrt{x}$ znaleźć miejsce, które jest położone najbliżej punktu $P(0, 3)$. Sporządzić rysunek.
8. Wykazać, że dla każdej wartości parametru $\alpha \in R$ równanie kwadratowe

$$3x^2 + 4x \sin \alpha - \cos 2\alpha = 0$$

ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste. Wyznaczyć te wartości parametru α , dla których oba pierwiastki leżą w przedziale $(0, 1)$.