PRACA KONTROLNA nr 4 - POZIOM ROZSZERZONY

1. Dzieląc wielomian $W(x)$ przez dwumian $x-3$ otrzymujemy resztę równą 2, a dzieląc ten wielomian przez $x-2$ otrzymujemy resztę równą 1. Wyznaczyć resztę z dzielenia $W(x)$ przez $(x-2)(x-3)$. Znaleźć wielomian trzeciego stopnia spełniający powyższe warunki wiedząc, że $x=1$ jest pierwiastkiem tego wielomianu, a suma wyrazu wolnego i współczynnika przy x^3 jest równa 0.

2. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x)=\sin x-\frac{1}{2}\cos 2x$ na przedziale $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ i rozwiązać nierówność $-\frac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant\frac{1}{4}$. Zadanie rozwiązać bez używania pojęcia pochodnej.

3. Rozwiązać nierówność
$$\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(2^{2x+1}-16^x\right)\geqslant -12x.$$

4. W stożek o kącie rozwarcia równym 2α wpisano kulę o promieniu R. Wewnątrz stożka stawiamy na kuli sześcian o maksymalnej objętości i podstawie równoległej do podstawy stożka. Wyznaczyć długość krawędzi tego sześcianu.

5. Stosunek długości promienia okręgu wpisanego do długości promienia okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym wynosi $\frac{1}{3+2\sqrt{3}}$. Obliczyć sinusy kątów ostrych tego trójkąta.

6. Ślimak ma do przejścia taśmę o długości 3 metrów zamocowaną w punkcie startu A. W ciągu każdego dnia udaje mu się przejść 1 metr, a każdej nocy gdy śpi, ktoś - ciągnąc za drugi koniec taśmy - wydłuża ją równomiernie o 1 metr. Niech d_n oznacza długość taśmy w n-tym dniu, a a_n - odległość ślimaka od punktu A przy końcu n-tego dnia.

   a) Uzasadnić, że ciąg (a_n) zdefiniowany jest następującym wzorem rekurencyjnym: $a_1=1$ oraz $a_{n+1}=\frac{3+n}{2+n}a_n+1$ dla $n\geqslant 1$.

   b) Pokazać, że $a_n=(n+2)\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n+2}\right)$, $n\geqslant 1$.

   c) Czy ślimak dojdzie do końca taśmy? Jeżeli tak, to w którym dniu, to znaczy, dla jakich n prawdziwa jest nierówność $a_n>d_n$?