Kuratorium Oświaty
w Szczecinie

Konkurs Matematyczny
dla gimnazjalistów województwa zachodniopomorskiego
w roku szkolnym 2016/2017

Etap wojewódzki

Drogi Uczniu!

Gratulujemy osiągniętych wyników w etapie rejonowym.

Przed przystąpieniem do rozwiązywania testu prosimy, żebyś zapoznał się z poniższymi wskazówkami:

1. **Wpisz i zakoduj swój kod na karcie odpowiedzi,** zgodnie z poleceniem komisji konkursowej.
2. Masz do rozwiązania 10 zadań otwartych, punktacja za każde z tych zadań podana jest przy numerze zadania; odpowiedzi na te zadania udzielaj w **karcie odpowiedzi w miejscach na to przeznaczonych**.
3. Za rozwiązanie wszystkich zadań możesz otrzymać łącznie **32** punkty.
4. **Nie wolno Ci używać KALKULATORA** .
5. Odpowiedzi udzielaj czarnym długopisem; nie używaj ołówka, gumki ani korektora.
6. Uważnie czytaj wszystkie polecenia.
7. Po zakończeniu pracy sprawdź, czy udzieliłeś wszystkich odpowiedzi.
8. Czas rozwiązywania zadań: **120 minut.**

Powodzenia!

Zadanie 1 (3 punkty)

Wykaż, że jeśli $n \in N$, to liczba $7^{n+2} + 5 \cdot 2^{n+3} + 2^{n+2} + 6 \cdot 7^{n}$ jest podzielna przez 11.

Zadanie 2 (3 punkty)

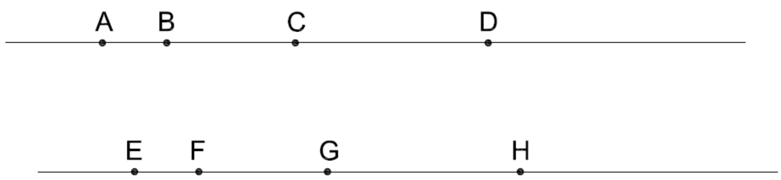
Dany jest trójkąt ABC, w którym $|\angle ACB| = 90^{o}$, $|AB| = 123$, $|BC| = 27$ i $|AC| = 120$. Na bokach AB i AC obrano odpowiednio punkty D i E takie, że $|AD| = 40$ i $|AE| = 41$. Oblicz pole powierzchni trójkąta AED. Uzasadnij odpowiedź.

Zadanie 3 (3 punkty)

W okrąg o promieniu długości 2 wpisano trójkąt równoramienny. Miara jednego z kątów wewnętrznych tego trójkąta jest równa 120^{o}. Oblicz obwód tego trójkąta. Uzasadnij odpowiedź.

Zadanie 4 (4 punkty)

Na rysunku poniżej zaznaczono na dwóch prostych równoległych po cztery punkty.



Odległość między tymi prostymi jest równa 2. Wiadomo, że $|AB| = |EF| = 1$, $|BC| = |GF| = 2$ i $|CD| = |HG| = 3$. Tworzymy trójkąty o wierzchołkach w punktach A, B, C, D, E, F, G, H.

a) Oblicz, ile istnieje wszystkich takich trójkątów.
b) Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania spośród wszystkich takich trójkątów trójkąta o polu powierzchni równym 3.

Zadanie 5 (4 punkty)

Funkcje f i g w układzie XOY dane są wzorami: $f(x) = (7a + 5b + 2)x + a + b$ i $g(x) = (6a + 4b)x + 5a + 3b$, gdzie $x \in R$. Wykresy funkcji f i g są prostymi równoległymi. Miejscem zerowym funkcji g jest liczba (-2). Oblicz liczby a i b oraz podaj wzory tych funkcji. Uzasadnij odpowiedź.

Zadanie 6 (4 punkty)

Przekątna przekroju osiowego walca długości 3 jest nachylona do płaszczyzny jego podstawy pod kątem o mierze α. Wiadomo, że $tg\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, a objętość walca jest równa $27\sqrt{2}\pi$. Oblicz pole powierzchni całkowitej walca. Uzasadnij odpowiedź.

Zadanie 7 (3 punkty)

Trapez prostokątny jest opisany na okręgu. Stosunek długości ramion jest równy $\sqrt{5}$. Długość krótszej podstawy jest o 2 krótsza od długości krótszego ramienia. Różnica długości podstaw trapezu jest dwa razy dłuższa od długości jego wysokości. Oblicz długość krótszego ramienia tego trapezu. Uzasadnij odpowiedź.

Zadanie 8 (2 punkty)

Uzasadnij, że w każdym czworokącie wypukłym suma długości przekątnych jest mniejsza od obwodu tego czworokąta.

Zadanie 9 (2 punkty)

Wyznacz wszystkie całkowite liczby m $(m \neq 2)$, tak by liczba $\frac{m+3}{m-2}$ była całkowita.

Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 10 (4 punkty)

Rozwiąż nierówność $\frac{(x-1)^2-(x+1)^2}{2^{2016}-2^{2017}} \leq 2^{-2016}$ i zapisz zbiór rozwiązań w postaci przedziału liczbowego.

BRUDNOPIS