

PRACA KONTROLNA nr 6 - POZIOM ROZSZERZONY

1. Rozwiązać równanie

$$\sqrt{x^2 - 3} + 2\sqrt{5 - 2x} = 5 - x.$$

2. Wybrano losowo trzy krawędzie sześcianu. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że żadne dwie nie mają punktów wspólnych.
3. **Gra w pary.** W skarbonce znajduje się duża liczba monet o nominałach 1 zł, 2 zł i 5 zł. W pierwszym kroku Jaś losuje trzy monety. Jeśli wśród nich są dwie jednakowe, to wrzuca je do skarbonki. W kolejnych krokach losuje ze skarbonki każdorazowo tyle monet, ile trzyma w ręce, a następnie pary jednakowych monet wrzuca do skarbonki. Gra kończy się, gdy wrzuci do skarbonki wszystkie monety. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że Jaś skończy grę: a) w drugim kroku; b) w drugim lub trzecim kroku.
4. Dane są wierzchołki $A(-3, 2)$, $C(4, 2)$, $D(0, 4)$ trapezu równoramiennego $ABCD$, w którym $AB \parallel CD$. Wyznaczyć współrzędne wierzchołka B oraz równanie okręgu opisanego na trapezie.
5. Udowodnić, że dla $x > -1$ prawdziwa jest nierówność podwójna

$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}.$$

Zilustrować tę nierówność odpowiednim rysunkiem.

6. Z dwóch przeciwległych wierzchołków prostokąta o polu P , będącego podstawą prostopadłościanu o wysokości 1, wystawiono po dwie przekątne sąsiednich ścian bocznych. Wyrazić cosinus kąta pomiędzy płaszczyznami utworzonymi przez te pary przekątnych jako funkcję sinusa kąta między nimi. Sporządzić rysunki.