

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
im. Stanisława Staszica w Krakowie
OGÓLNOPOLSKA OLIMPIADA
„O DIAMENTOWY INDEKS AGH” 2019/20

MATEMATYKA - ETAP II

ZADANIA PO 10 PUNKTÓW

1. Niech n będzie dowolną nieparzystą liczbą naturalną. Udowodnij, że suma n kolejnych liczb całkowitych jest podzielna przez n .
2. Dla jakich liczb k trójmian kwadratowy

$$2(1 - k^2)x^2 + k(1 + k^2)x + 2k$$

jest podzielny przez dwumian $x + k$?

3. Rozwiąż równanie $\cos^2 3x - \sin^2 x = 0$.
4. Do klasy, w której co czwarty uczeń jest jedynakiem, przyłączono drugą klasę o dwukrotnie mniejszej liczbie uczniów, wśród których jest 40% jedynaków. Jaki procent uczniów w nowo utworzonej klasie ma rodzeństwo?

ZADANIA PO 20 PUNKTÓW

5. Ze zbioru $\{1, 2, \dots, 9\}$ losujemy jednocześnie dwie liczby. Czynność tę powtarzamy (zwróciwszy wylosowane liczby) dotąd, aż wylosujemy dwie liczby dające tę samą resztę z dzielenia przez 3. Jakie jest prawdopodobieństwo, że liczba losowań będzie
 A : mniejsza niż 10,
 B : równa 6,
 C : nieparzysta.

6. Funkcja f dla każdego jej argumentu x spełnia równość

$$f(x) + (f(x))^2 + \dots = x^3,$$

której lewa strona jest sumą nieskończonego ciągu geometrycznego. Wyznacz dziedzinę funkcji f oraz jej ekstrema lokalne.

7. W równoległobok $ABCD$, w którym kolejność wierzchołków $ABCD$ jest przeciwna do ruchu wskazówek zegara, można wpisać okrąg. Mając dane współrzędne wierzchołków $A = (0, 1)$ i $B = (\sqrt{3}, 0)$ oraz miarę 120° kąta wewnętrznego przy wierzchołku D , oblicz pole powierzchni równoległoboku i napisz równanie okręgu weń wpisanego.