

LIGA MATEMATYCZNA
STYCZEŃ 2010
SZKOŁA PONADGIMNAZJALNA

ZADANIE 1.

Znajdź wszystkie funkcje $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające następujące warunki

- $f(xy) = x^2 f(y) + y f(x)$ dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y ;
- $f(2) = 2$.

ZADANIE 2.

Wewnątrz danego czworokąta wypukłego znajdź taki punkt, żeby odcinki łączące ten punkt ze środkami boków czworokąta dzieliły czworokąt na cztery części o równych polach.

ZADANIE 3.

Uzasadnij, że wśród 65 liczb naturalnych znajduje się 9 liczb takich, że ich suma jest podzielna przez 9.

ZADANIE 4.

Liczba naturalna n jest większa od 2000. Wykaż, że liczba $n + 1$ jest podzielna przez 6, jeżeli wiadomo, że n i $n + 2$ są liczbami pierwszymi.

ZADANIE 5.

W prostokącie $ABCD$ punkt M jest środkiem boku AD , a N - środkiem boku BC . Na przedłużeniu odcinka CD poza punktem D wybrano punkt P . Niech S będzie punktem przecięcia prostych PM i AC . Udowodnij, że kąty SNM i MNP są równe.