LIGA MATEMATYCZNA
im. Zdzisława Matuskiego
FINAŁ
24 kwietnia 2017
SZKOŁA PONADGIMNAZJALNA

ZADANIE 1.
Dane są dwie bliźniacze (to znaczy różniące się o 2) liczby pierwsze. Udowodnij, że nie mogą one być przyprostokątnymi trójkąta prostokątnego o wszystkich bokach o długości całkowitej.

ZADANIE 2.
Na tablicy napisano dwie liczby: pierwszą i drugą. Następnie napisano liczbę trzecią, która jest sumą pierwszej i drugiej, potem zapisano czwartą liczbę, która jest sumą drugiej i trzeciej. I tak dalej aż do dziesiątej liczby. Suma wszystkich dziesięciu liczb napisanych na tablicy jest równa 5005. Wyznacz siódmą liczbę.

ZADANIE 3.
Czy liczbę 1 można przedstawić jako sumę ułamków $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{d}$, gdzie a, b, c, d są nieparzystymi liczbami naturalnymi?

ZADANIE 4.
Danych jest 21 liczb rzeczywistych. Wiadomo, że suma każdych jedenastu spośród tych liczb jest większa od sumy pozostałych dziesięciu. Wykaż, że wszystkie liczby są dodatnie.

ZADANIE 5.
Oblicz pole trapezu prostokątnego wiedząc, że odległości środka okręgu wpisanego w ten trapez od końców ramienia nieprostopadłego do podstaw, są równe a oraz $2a$.

ZADANIE 6.
W zbiorze liczb rzeczywistych rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x^2+9=4y \\ y^2+1=6z \\ z^2+4=2x. \end{cases}$$

ZADANIE 7.
Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Proste AB i CD przecinają się w punkcie E, a proste AD i BC przecinają się w punkcie F. Udowodnij, że jeśli $|BE| = |DF|$, to $|CE| = |CF|$.