

LIGA MATEMATYCZNA
GRUDZIEŃ 2010
SZKOŁA PONADGIMNAZJALNA

ZADANIE 1.

Częścią całkowitą liczby rzeczywistej x nazywamy największą liczbę całkowitą nie większą niż x i oznaczamy $[x]$. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} [x] + y - 2[z] = 1 \\ x + y - [z] = 2 \\ 3[x] - 4[y] + z = 3. \end{cases}$$

ZADANIE 2.

Punkt S leży wewnątrz sześciokąta foremnego $ABCDEF$. Udowodnij, że suma pól trójkątów ABS , CDS , EFS jest równa połowie pola sześciokąta $ABCDEF$.

ZADANIE 3.

Jan napisał na tablicy dwie liczby naturalne. Potem starł je i w ich miejsce wpisał iloczyn zmniejszony o 1 oraz ich sumę. Nie zadowolilo go to jednak i powtórzył tę czynność. Znowu starł wszystko i zapisał sumę otrzymanych liczb: 1309. Oblicz sumę liczb zapisanych na początku.

ZADANIE 4.

Wykaż, że z grupy 2010 osób można wybrać 45 osób mających tak samo na imię lub 45 osób, z których każda nosi inne imię.

ZADANIE 5.

Wykaż, że liczba $3^{2012} + 15^{1006} + 5^{2012}$ jest złożona.