PRACA KONTROLNA nr 2

listopad 2005r.

1. Stop zawiera 60% srebra próby 0,6 i 30% srebra próby 0,7 oraz 20 dkg srebra próby 0,8.
   a) Ile srebra i jakiej próby należy dodać, by otrzymać 2,5 kg srebra próby 0,7?
   b) Obliczyć próbę stopu, jakim należy zastąpić połowę danego stopu, by otrzymać stop o próbie 0,75?

2. Wyznaczyć wszystkie punkty okręgu o środku $(0,0)$ i promieniu 5, których iloczyn kwadratów współrzędnych jest najmniejszą wspólną wielokrotnością liczb 12 i 14. Obliczyć obwód wielokąta, którego wierzchołkami są znalezione punkty. Bez używania kalkulatora zbadać, czy jest on większy od 30.

3. Dla jakich wartości a i b wielomian $W(x) = x^4 - 3x^3 + bx^2 + ax + b$ jest podzielny przez trójmian kwadratowy $(x^2 - 1)$? Dla znalezionych wartości współczynników a i b rozwiązać nierówność $W(x) \leqslant 0$.

4. Wykorzystując tożsamość trygonometryczną $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ narysować staranny wykres funkcji $f(x) = |\sin x + \cos x|$. Korzystając z tego wykresu, wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f na przedziale $[-\frac{\pi}{2}, \pi]$. Wyznaczyć rozwiązania równania $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ zawarte w tym przedziale.

5. Pole powierzchni całkowitej stożka jest dwa razy większe od pola powierzchni kuli wpisanej w ten stożek. Znaleźć cosinus kąta nachylenia tworzącej stożka do podstawy.

6. W trójkącie równoramiennym suma długości ramienia i promienia okręgu opisanego na tym trójkącie równa jest m a wysokość trójkąta równa jest 2. Wyznaczyć długość ramienia jako funkcję parametru m oraz wartość m, dla której kąt przy wierzchołku trójkąta równy jest $120°$? Dla jakich wartości m zadanie ma rozwiązanie?

7. Narysować zbiory $A = \{(x,y) : x^2 + 2x + y^2 \leqslant 0\}$, $B = \{(x,y) : x^2 + 2y + y^2 \leqslant 0\}$, $C = \{(x,y) : x \leqslant 0, y \geqslant 0, x^2 + y^2 \leqslant 4\}$. Obliczyć pola figur $A \cap B, A \setminus B, C \setminus (A \cup B)$. Podać równania osi symetrii figury $A \cup B$.

8. Rozwiązać nierówność $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \leqslant \frac{1}{x-1}$.

9. Wyznaczyć równania wszystkich prostych stycznych do wykresu funkcji $f(x) = \frac{8x}{x^2+3}$, które są prostopadłe do prostej o równaniu $x + y = 0$. Obliczyć pole równoległoboku, którego wierzchołkami są punkty wspólne tych stycznych z wykresem funkcji $f(x)$.