

PRACA KONTROLNA nr 3 - POZIOM ROZSZERZONY

1. Dany jest wielomian $W(x) = x^3 + ax + b$, gdzie $b \neq 0$. Wykazać, że $W(x)$ posiada pierwiastek podwójny wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek $4a^3 + 27b^2 = 0$. Wyrazić pierwiastki za pomocą współczynnika b .
2. Wyznaczyć promień okręgu opisanego na czworokącie $ABCD$, w którym kąt przy wierzchołku A ma miarę α , kąty przy wierzchołkach B, D są proste oraz $|BC| = a, |AD| = b$. Sporządzić staranny rysunek.
3. Narysować staranny wykres funkcji $f(x) = \frac{\sin 2x - |\sin x|}{\sin x}$.
W przedziale $[0, \pi]$ wyznaczyć rozwiązania nierówności $f(x) < 2(\sqrt{2} - 1)\cos^2 x$.
4. Z wierzchołka A kwadratu $ABCD$ o boku a poprowadzono dwie proste, które dzielą kąt przy tym wierzchołku na trzy równe części i przecinają boki kwadratu w punktach K i L . Wyznaczyć długości odcinków, na jakie te proste dzielą przekątną kwadratu. Znaleźć promień okręgu wpisanego w deltoid $AKCL$.
5. Czworokąt wypukły $ABCD$, w którym $AB = 1, BC = 2, CD = 4, DA = 3$ jest wpisany w okrąg. Obliczyć promień R tego okręgu. Sprawdzić, czy w czworokąt ten można wpisać okrąg. Jeżeli tak, to obliczyć promień r tego okręgu.
6. Na boku BC trójkąta równobocznego obrano punkt D tak, że promień okręgu wpisanego w trójkąt ADC jest dwa razy mniejszy niż promień okręgu wpisanego w trójkąt ABD . W jakim stosunku punkt D dzieli bok BC ?