

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
im. Stanisława Staszica w Krakowie
OLIMPIADA „O DIAMENTOWY INDEKS AGH” 2013/14

MATEMATYKA - ETAP III

ZADANIA PO 10 PUNKTÓW

1. Rozwiąż równanie

$$\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^{\cos 2x} \left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^{\sin 2x} = 1.$$

2. Rzucono trzy razy sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo, że suma wyrzuconych oczek jest mniejsza niż sześć.
3. Po zmieszaniu roztworów soli o stężeniach 8% oraz 20% otrzymano 12 litrów roztworu o stężeniu 16%. Oblicz objętości zmieszanych roztworów.
4. Rozwiąż nierówność

$$3x^2 + 6x^3 + 12x^4 + \dots \leq 1.$$

ZADANIA PO 20 PUNKTÓW

5. Wyznacz zbiór wszystkich liczb rzeczywistych p , dla których pierwiastki x_1 i x_2 równania

$$x + 1 = \frac{px}{p-1} + \frac{p+1}{x}$$

spełniają nierówność

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \leq 2p + 1.$$

6. Dwie ściany ostrosłupa trójkątnego są trójkątami równobocznymi o boku długości a i dwie są trójkątami prostokątnymi. Oblicz pole powierzchni i objętość ostrosłupa.
7. Oblicz promień mniejszego z dwóch okręgów stycznych w punkcie $M(2, 1)$ do prostej $x - 7y + 5 = 0$ i jednocześnie stycznych do prostej $x + y + 13 = 0$. Napisz równania wszystkich okręgów o tym promieniu stycznych jednocześnie do obydwu prostych.