

**AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA**  
**im. Stanisława Staszica w Krakowie**  
**OLIMPIADA „O DIAMENTOWY INDEKS AGH” 2014/15**

**MATEMATYKA - ETAP I**

**ZADANIA PO 10 PUNKTÓW**

1. Niech  $p$  będzie dowolną liczbą pierwszą. Udowodnij, że reszta z dzielenia liczby  $p$  przez 30 nie jest liczbą złożoną.
2. Rozwiąż równanie

$$\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x + \left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x = 10.$$

3. Oblicz granicę ciągu o wyrazie ogólnym

$$a_n = \frac{3^{n+1} + 2^{3+2n}}{2^{2n+1} + 3^n}.$$

4. Na ile sposobów można zbiór  $\{1, 2, \dots, n\}$ , gdzie  $n \geq 3$ , podzielić na trzy niepuste podzbiory?

**ZADANIA PO 20 PUNKTÓW**

5. Dla jakich wartości parametru  $m$  nierówność

$$(m^2 - 1) \cdot 25^x - 2(m - 1) \cdot 5^x + 2 > 0$$

jest spełniona przez każdą liczbę rzeczywistą  $x$ ?

6. W sześciacie o krawędzi długości  $a$  zawarte są dwie sfery zewnętrznie styczne, przy czym ich środki leżą na przekątnej sześcianu i każda z nich jest styczna przynajmniej do trzech ścian sześcianu. Oblicz promienie tych sfer, dla których suma ich pól powierzchni jest a) największa, b) najmniejsza.
7. Wyznacz równania stycznych do okręgu

$$x^2 + y^2 + 4x + 3 = 0$$

poprowadzonych z punktu  $M = (1, 0)$ . Jaką krzywą stanowi zbiór wszystkich środków cięciw tego okręgu wyznaczonych przez proste przechodzące przez punkt  $M$ ? Napisz jej równanie.