

PRACA KONTROLNA nr 6 - POZIOM PODSTAWOWY

1. Pewnej mroźnej zimy trzy przeziębione krasnale kupowały w aptece lekarstwa. Pierwszego męczył straszny ból gardła. Kupił więc trzy tabletki do ssania, tabletkę na kaszel i kropelkę do nosa. Zapłacił za wszystko 4 grosze. Drugiemu dokuczał uporczywy kaszel, za tę samą cenę kupił trzy tabletki na kaszel, tabletkę do ssania i kropelkę do nosa. Trzeciemu miał straszny katar. Poprosił więc o trzy kropelki do nosa, o tabletkę do ssania oraz o tabletkę na kaszel. A dowiedziawszy się, że ma zapłacić 2 grosze, pomyślał chwilę, kichnął i powiedział do aptekarza: „Pomylił się Pan!” Uzasadnić, że krasnal miał rację.
2. Obliczyć, ile kolejnych dodatnich liczb naturalnych podzielnych przez 3 należy dodać do siebie, aby otrzymana suma była równa liczbie $115a^{-1}$, gdzie

$$a = \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{691 \cdot 693}.$$

3. Rozwiązać równanie

$$\sin^3 x(1 + \operatorname{ctg} x) + \cos^3 x(1 + \operatorname{tg} x) = \sin 2x + 2 \sin^2 x.$$

4. Rzucamy pięć razy jednorodną kostką do gry. Obliczyć prawdopodobieństwo wyrzucenia sumy oczek większej od 20, jeśli wiadomo, że suma oczek wyrzuconych w trzech pierwszych rzutach wynosi 10.
5. W trójkąt równoramienny, którego ramiona są dwa razy dłuższe od podstawy, wpisano prostokąt w taki sposób, że jeden z boków prostokąta zawarty jest w podstawie trójkąta. Jakie powinny być wymiary tego prostokąta, aby jego pole było największe? Wyznaczyć wartość tego największego pola.
6. Narysować w prostokątnym układzie współrzędnych wykresy funkcji

$$f(x) = -\frac{2}{x} \quad \text{oraz} \quad g(x) = f(|x| - 1) + 1.$$

Rozwiązać nierówność $g(x) \geq f(x)$ i zaznaczyć zbiór jej rozwiązań na osi liczbowej.