

**AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA**  
**im. Stanisława Staszica w Krakowie**  
**OLIMPIADA „O DIAMENTOWY INDEKS AGH” 2021/22**

**MATEMATYKA - ETAP III**

**ZADANIA PO 10 PUNKTÓW**

1. Rozwiąż nierówność

$$|\log_{0,5}(2 - x)| \geq 1.$$

2. Oblicz sumę wszystkich liczb dwucyfrowych podzielnych przez 6 lub przez 8.
3. Znajdź równania prostych stycznych do krzywej  $y = x^2 + \frac{1}{x}$  i prostopadłych do prostej  $4x + 15y - 3 = 0$ .
4. Punkt  $S$  jest środkiem wysokości czworościanu foremnego  $ABCD$  opuszczonej z wierzchołka  $D$ . Wyznacz miarę kąta  $ASB$ .

**ZADANIA PO 20 PUNKTÓW**

5. Niech  $n$  będzie dowolną dodatnią liczbą całkowitą. Ze zbioru dodatnich liczb całkowitych mniejszych od  $3n$  losujemy ze zwracaniem trzy liczby. Oblicz prawdopodobieństwo, że dokładnie jedna z tych liczb jest równa  $n$ .  
Niech  $p_n$  oznacza prawdopodobieństwo, że iloczyn tych trzech liczb jest podzielny przez 3. Oblicz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n.$$

6. Dla jakich wartości parametru  $m$  równanie

$$m \cdot 2^x + (m + 3)2^{-x} = 4$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie?

7. Prosta przechodząca przez punkt  $M = (3, 1)$  ogranicza wraz z dodatnimi półosiąmi układu współrzędnych  $XOY$  trójkąt o najmniejszym polu. Wokół którego boku należy obracać ten trójkąt, aby otrzymana bryła obrotowa miała najmniejszą objętość? Podaj tę objętość.