LIGA MATEMATYCZNA
im. Zdzisława Matuskiego
FINAŁ
16 kwietnia 2015
SZKOŁA PONADGIMNAZJALNA

ZADANIE 1.
Uzasadnij, że liczba S jest podzielna przez 45, gdy

$$S = \underbrace{111\ldots1}_{2015\text{ cyfr}} + \underbrace{222\ldots2}_{2015\text{ cyfr}} + \underbrace{333\ldots3}_{2015\text{ cyfr}} + \ldots + \underbrace{999\ldots9}_{2015\text{ cyfr}}.$$

ZADANIE 2.
Dany jest okrąg o_1 o środku S oraz okrąg o_2 przechodzący przez S, przecinający okrąg o_1 w punktach A i B. Z punktu A poprowadzono prostą, przecinającą okrąg o_1 w punkcie C, zaś okrąg o_2 w punkcie D. Udowodnij, że trójkąt BCD jest równoramienny.

ZADANIE 3.
W kwadracie o boku o długości 3 wybrano dowolnie dziesięć punktów. Wykaż, że wśród tych punktów zawsze znajdą się dwa, których odległość jest nie większa niż $\sqrt{2}$.

ZADANIE 4.
Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej n liczba $\frac{1}{6}(n^3 - 7n + 2016)$ jest całkowita.

ZADANIE 5.
W klasie jest 30 uczniów. Siedzą oni w piętnastu dwuosobowych ławkach tak, że połowa dziewcząt siedzi z chłopcami. Rozstrzygnij, czy można uczniów tej klasy tak posadzić, aby połowa chłopców siedziała z dziewczętami.

ZADANIE 6.
W okrąg o wpisany jest taki pięciokąt $ABCDE$, że $|AE| = |BC| = |CD|$. Proste AB i DE przecinają się w punkcie F. Udowodnij, że środek okręgu opisanego na trójkącie BDF leży na okręgu o.

ZADANIE 7.
Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x - \frac{1}{xyz} = 0 \\ y - \frac{3}{xyz} = 0 \\ z - \frac{27}{xyz} = 0. \end{cases}$$