AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA im. Stanisława Staszica w Krakowie OLIMPIADA "O DIAMENTOWY INDEKS AGH" 2011/12

MATEMATYKA - ETAP III

ZADANIA PO 10 PUNKTÓW

1. Niech a i b będą dwiema liczbami rzeczywistymi, przy czym a > b. Udowodnij, że

$$a^3 - b^3 \ge ab^2 - a^2b.$$

- 2. Ile dzielników w zbiorze liczb naturalnych ma liczba $4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$?
- 3. Suma czterech początkowych wyrazów rosnącego ciągu arytmetycznego (a_n) jest równa 0, a suma ich kwadratów wynosi 80. Znajdź wzór na n-ty wyraz tego ciągu.
- 4. Rozwiąż nierówność

$$1 + \sqrt{x+5} > x.$$

ZADANIA PO 20 PUNKTÓW

5. Ze zbioru $L = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ losujemy ze zwracaniem dwie liczby x, y. Następnie powtarzamy to losowanie dotąd, aż otrzymamy punkt (x, y) należący do zbioru

$$S = \{(x,y): |x| + |y| \le 2\}.$$

Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń:

- A będziemy losować dokładnie cztery razy,
- B liczba losowań będzie parzysta.
- 6. Dla jakich m równanie

$$\log_3(x-m) + \log_3 x = \log_3(3x-4)$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie w zbiorze liczb rzeczywistych?

7. Prosta 2x + y - 13 = 0 zawiera bok AB trójkąta ABC, prosta x - y - 5 = 0 zawiera bok BC, a prosta 3x - y - 7 = 0 zawiera dwusieczną kąta ACB. Znajdź wierzchołki tego trójkąta i oblicz jego pole.