

**LIGA MATEMATYCZNA**  
**im. Zdzisława Matuskiego**  
**PAŹDZIERNIK 2016**  
**SZKOŁA PONADGIMNAZJALNA**

**ZADANIE 1.**

Punkt  $P$  leży na zewnątrz równoległoboku  $ABCD$ , przy czym  $\sphericalangle PAB = \sphericalangle PCB$ . Udowodnij, że  $\sphericalangle APB = \sphericalangle CPD$ .

**ZADANIE 2.**

Liczby dodatnie  $a, b$  spełniają warunek

$$\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab+3}.$$

Wykaż, że co najmniej jedna z liczb  $a, b$  jest niewymierna.

**ZADANIE 3.**

Wyznacz wszystkie liczby naturalne  $n$ , dla których  $n^4 + 33$  jest kwadratem liczby naturalnej.

**ZADANIE 4.**

Liczby całkowite  $a$  i  $b$  są tak dobrane, że  $a^2 + 119ab + b^2$  jest podzielna przez 11. Wykaż, że  $a^3 - b^3$  też dzieli się przez 11.

**ZADANIE 5.**

Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x^2 + 24 = 9y + \frac{x+z}{2} \\ y^2 + 25 = 9z + \frac{x+y}{2} \\ z^2 + 26 = 9x + \frac{y+z}{2}. \end{cases}$$