MATEMATYKA

II KLASA GIMNAZJUM

SZCZECIN 2016

Bogdańska Beata
Maczan Aleksandra
Staniewska Iwona
Szuman Michał

Spis treści

WPROWADZENIE DO GEOMETRII

Ponieważ zasadniczym celem realizowanym na przedmiocie matematyka jest wykształcenie umiejętności logicznego myślenia, a nauką która umiejętność tę najbardziej rozwija, jest geometria, przeto rozpoczynamy od wprowadzenia do geometrii.

Słowo *geometria* pochodzi od dwóch słów greckich *geo* – ziemia i *metero* – mierzę. Historycznie rzecz biorąc, początkowo była to pewnego rodzaju wiedza utylitarna służąca do robienia pomiarów ziemi. Stopniowo wiedza ta rozwijała się i stała się nauką. Osobą, która zebrała wiedzę geometryczną w pewną całość, był żyjący na przełomie IV i III wieku pne. Euklides. Wiedza ta została zebrana i uporządkowana w pewien sposób. Ten sposób porządkowania wiedzy matematycznej stał się wzorcem do dzisiaj praktykowanym w matematyce. Euklides zebrał tę wiedzę w XIII księgach, które nazwał *Elementami.* „Elementy" były używane jako podręcznik geometrii jeszcze na początku XX wieku. Obecnie również uczymy się geometrii opierając się w pewnej mierze na „Elementach". Nie naśladujemy jednak tego dokładnie. Bowiem przy uczeniu geometrii z jednej strony musimy zwracać uwagę na to aby ta nauka była poprawna merytorycznie, ale z drugiej strony żeby była skuteczna, a zatem nie może być zbyt nudna.

W geometrii mamy pewne *pojęcia pierwotne*, czyli takie pojęcia, których nie definiujemy, ale z którymi wiążemy pewne intuicje fizyczne. Na przykład pojęciem pierwotnym jest *prosta*, dla której wyobrażeniem fizycznym jest droga promienia świetlnego. Takim pojęciem jest również *płaszczyzna*, dla której wyobrażeniem fizycznym jest powierzchnia kałuży, tablicy czy stołu. Oprócz pojęć pierwotnych, których nie definiujemy mamy również takie pojęcia które definiujemy. Na przykład definiujemy pojęcie *odcinka, półprostej, trójkąta.*

Pewne zdania geometrii przyjmujemy – z góry – za prawdziwe. Zdania te nazywamy *aksjomatami* lub też *pewnikami*. Na aksjomaty wybieramy takie fakty geometryczne, które są zgodne z naszą intuicją, czyli jak mówimy są dla nas rzeczami oczywistymi. Opierając się na aksjomatach uzasadniamy, z użyciem całego aparatu logiki, prawdziwość innych zdań. Te inne zdania nazywamy zazwyczaj *twierdzeniami*. Faktycznie w tym kursie geometrii słowo twierdzenie będziemy rezerwowali dla najważniejszych faktów geometrycznych.

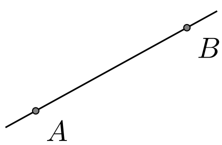
Istotą nauki geometrii jest przeprowadzanie dużej ilości rozumowań. Jednakowoż na to aby przeprowadzać rozumowania potrzebne jest dobre rozumienie tych pojęć, którymi operujemy. Tego lepszego rozumienia tych pojęć nabywamy przeprowadzając dużą ilość różnego rodzaju ćwiczeń. Pamiętaj: **nauka geometrii służy przede wszystkim rozwijaniu umiejętności logicznego myślenia**.

$\boxed{\textbf{!} \Rightarrow}$ **Uwaga**: Na marginesie niektórych zadań umieszczony jest symbol, tak jak tutaj. Oznacza on, że na zadanie przy którym ten znak jest umieszczony należy zwrócić większą uwagę, bowiem na to o czym jest mowa w takim zadaniu będziemy się później częściej powoływać.

Rozdział 1

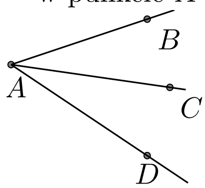
KĄTY I PROSTE

1.1 Proste, półproste, równoległość prostych

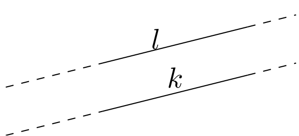


Jeden z aksjomatów geometrii mówi, że przez dwa różne punkty przechodzi dokładnie jedna prosta. Prostą przechodzącą przez punkty A i B będziemy oznaczali zazwyczaj l_{AB} i będziemy ją nazywali: *prosta* AB. Zbiór tych wszystkich punktów na prostej, które leżą pomiędzy punktami A i B (wraz z punktami A i B) nazywamy odcinkiem o końcach A, B. Odcinek ten będziemy oznaczać $\overline{AB}$, natomiast liczbę, która jest długością odcinka AB będziemy oznaczać $|AB|$. Czasami będziemy tylko pisać $AB = 5$ zamiast $|AB| = 5$.

Wybrany punkt na prostej dzieli ją na dwie półproste. Półprostą o początku w punkcie A przechodzącą przez punkt B będziemy oznaczać $AB^{\rightarrow}$.



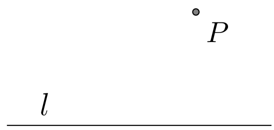
Można zwrócić uwagę na to, że po niemiecku półprosta nazywa się *Strahl* czyli *promień światła*, a po angielsku *halfline* lub *ray*. Słowo *ray* znaczy *promień światła*. Właśnie takie określenie używane jest nie bez powodu. Spójrz na rysunek obok gdzie narysowane są trzy półproste wychodzące z punktu A.



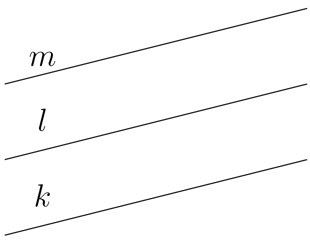
DEFINICJA Dwie proste nazywamy *równoległymi*, gdy nie mają żadnego punktu wspólnego (lub gdy są równe). To, że proste k i l są równoległe oznaczamy $k \parallel l$.

Bardzo ważnym w naszej geometrii jest następujący

AKSJOMAT Jeżeli dany jest punkt P i prosta l ($P \notin l$), to istnieje dokładnie jedna prosta przechodząca przez punkt P i równoległa do prostej l.



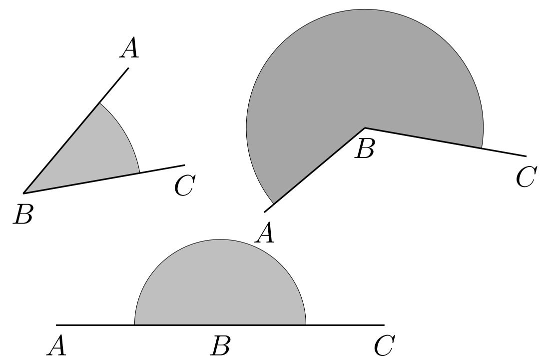
Właśnie z tego aksjomatu wynika, że suma wszystkich trzech kątów trójkąta jest kątem półpełnym.



Własność prostych równoległych:

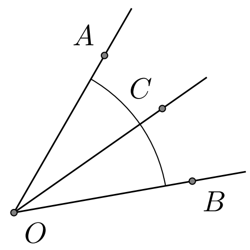
TWIERDZENIE
Jeżeli $k \parallel l$ i $l \parallel m$, to $k \parallel m$.

1.2 Kąty



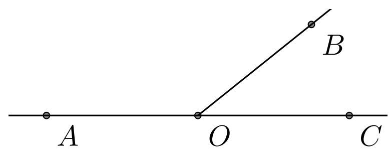
DEFINICJA Dwie półproste o wspólnym początku, wraz z jednym z dwóch obszarów, na które te półproste dzielą płaszczyznę, nazywamy *kątem*. Kąt nazywamy *półpełnym*, gdy jego ramiona są dwiema półprostymi leżącymi na jednej prostej, mającymi tylko jeden punkt wspólny.

Z każdym kątem, podobnie jak z każdym odcinkiem, związana jest liczba zwana *miarą kąta*. Kąt półpełny ma miarę 180°. Jeżeli kąt półpełny podzielimy na dwa kąty o równej mierze czyli 90°, to każdy taki kąt nazywamy *kątem prostym*. Miarę kąta $\sphericalangle A$ będziemy czasami oznaczać $|\sphericalangle A|$. Bardzo często będziemy stosować jeden zapis dla kąta jako obiektu geometrycznego jak i dla jego miary, czyli liczby. Będziemy pisali na przykład $\sphericalangle ABC = 75°$ lub też *punkt P leży wewnątrz kąta $\sphericalangle ABC$*.



DEFINICJA Półprostą $OC^{\rightarrow}$ leżącą wewnątrz kąta $\sphericalangle AOB$ nazywamy *dwusieczną* kąta $\sphericalangle AOB$, jeżeli $\sphericalangle AOC = \sphericalangle COB$.

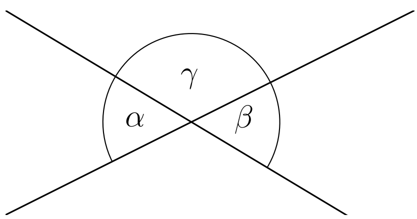
DEFINICJA Dwa kąty mniejsze od kąta półpełnego, w których jedno ramię jest wspólne, a pozostałe dwa ramiona tworzą jedną prostą nazywamy *kątami przyległymi*.



DEFINICJA Każde dwa kąty, w których suma miar równa jest 180° nazywamy parą kątów *dopełniających*.

DEFINICJA Dwa kąty nieprzyległe utworzone przez dwie przecinające się proste nazywamy *kątami wierzchołkowymi*.

TWIERDZENIE Kąty wierzchołkowe mają taką samą miarę.

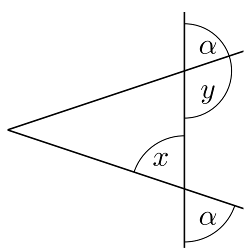


Dowód:
Zauważmy, że
$\gamma + \alpha = 180°$,
$\gamma + \beta = 180°$.
Z powyższego wynika, że $\alpha = \beta$.

1. Na rysunku obok dany jest kąt α. Wyznacz $x + y$.

2. Uzasadnij, że dwusieczne dwóch kątów wierzchołkowych tworzą jedną prostą.

3. Uzasadnij, że jeżeli trzy z czterech kątów jakie uzyskuje się przy przecięciu dwóch prostych mają równe miary α, to czwarty kąt też ma miarę α.

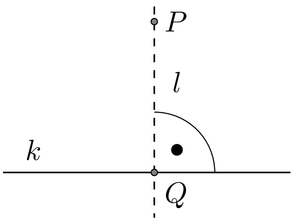


4. Kąty α i β są przyległe, przy czym $\alpha : \beta = 5 : 1$ (w takiej sytuacji mówimy zazwyczaj, że stosunek ich miar jest równy 5 do 1 lub, że kąt α jest 5 razy większy od kąta β). Wyznacz α i β.

1.3 Proste prostopadłe

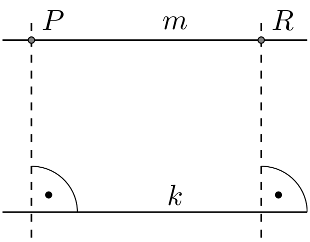
DEFINICJA Jeżeli którykolwiek z czterech kątów utworzonych przez przecinające się proste k, l ma miarę $90°$, to proste takie nazywamy *prostopadłymi* i piszemy $k \perp l$.

AKSJOMAT Jeżeli dany jest punkt P i prosta k, to istnieje dokładnie jedna prosta l przechodząca przez punkt P i prostopadła do prostej k.



DEFINICJA Niech dana będzie prosta k i punkt P. Oznaczmy przez Q punkt przecięcia prostej l prostopadłej do k i przechodzącej przez punkt P. Punkt Q nazywamy *spodkiem* punktu P na prostej k lub *rzutem prostopadłym* punktu P na prostą k. W takiej sytuacji długość odcinka PQ nazywamy *odległością punktu P od prostej* k i oznaczamy $d(P, k)$. Mamy więc $PQ = d(P, Q) = d(P, k)$.

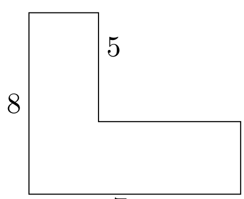
A oto inny aksjomat, który jest całkowicie zgodny z naszą intuicją geometryczną.



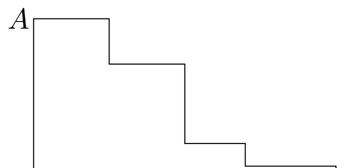
AKSJOMAT Jeżeli punkty P i R leżą na prostej m, a prosta k jest równoległa do m, to $d(P, k) = d(R, k)$.
Innymi słowy, jeżeli $m \parallel k$, to dowolne dwa punkty z prostej m są tak samo odległe od prostej k.

WNIOSEK: w prostokącie przeciwległe boki są równej długości.

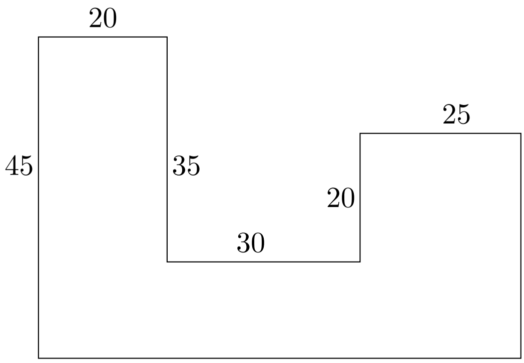
5. Wyznacz w pamięci obwód obu wielokątów. Na drugim rysunku $AB = 8$, $BC = 9$.



rys a)

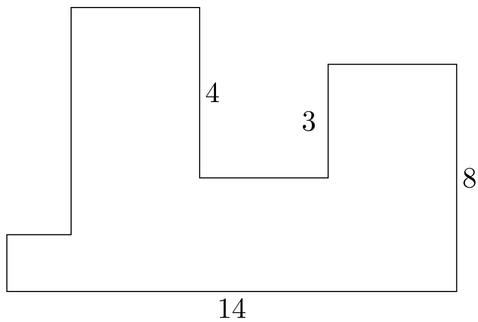


rys b)

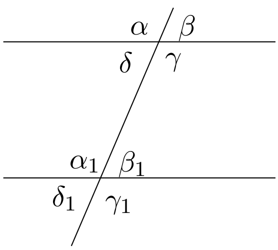


6. Na podstawie długości niektórych odcinków wyznacz w pamięci obwód narysowanego obok ośmiokąta.

7. Na podstawie długości niektórych odcinków wyznacz w pamięci obwód narysowanego obok ośmiokąta.



1.4 Kąty odpowiadające i naprzemianległe

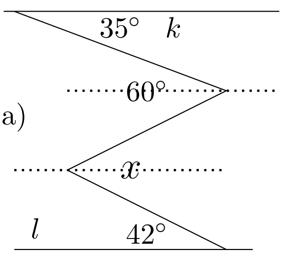


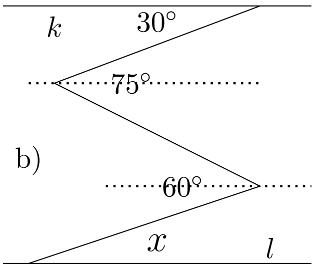
Jeżeli dwie równoległe proste przetniemy trzecią prostą, to otrzymamy 8 kątów tak, jak na rysunku obok. Wówczas każdą z par kątów (α, α_1), (β, β_1), (γ, γ_1), (δ, δ_1) nazywamy *parą kątów odpowiadających*, a każdą z par (γ, α_1), (δ, β_1), (α, γ_1), (β, δ_1) nazywamy *parą kątów naprzemianległych.*

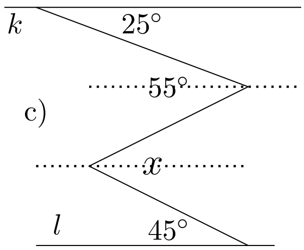
TWIERDZENIE Kąty odpowiadające mają równe miary. Kąty naprzemianległe mają równe miary.

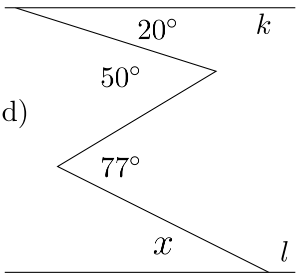
W kolejnych zadaniach tego rozdziału możesz tylko korzystać z twierdzenia o kątach naprzemianległych i odpowiadających, z definicji kątów przyległych i własności kątów wierzchołkowych. Musisz dorysowywać proste równoległe do danych prostych. Na niektórych rysunkach takie proste równoległe są już dorysowane przerywaną kreską. **Nie możesz** korzystać z sumy kątów trójkąta.

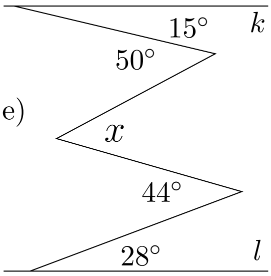
8. Na poniższych rysunkach $k \parallel l$. Wyznacz x. Na niektórych rysunkach masz już dorysowane kropkowaną linią proste równoległe do prostych k i l. Na pozostałych rysunkach musisz to sam zrobić.

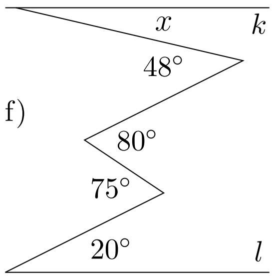
a)


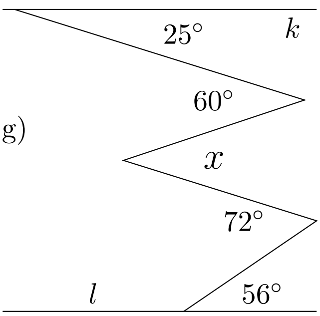
b)


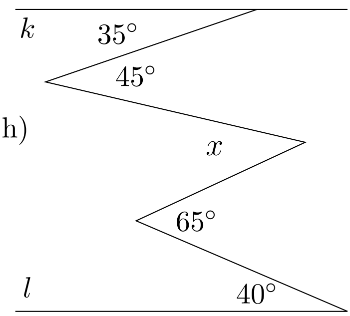
c)


d)


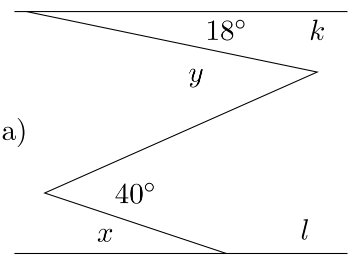
e)


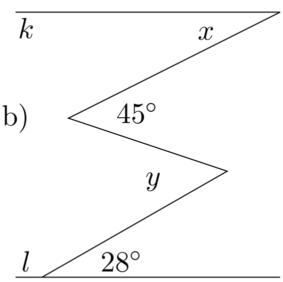
f)


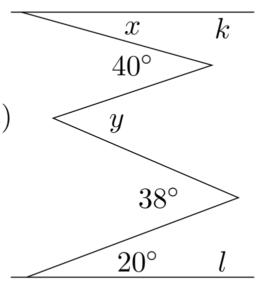
g)


h)


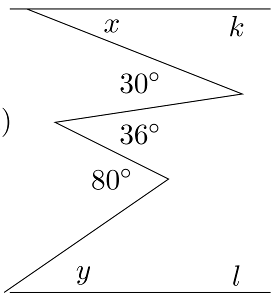
9. Na poniższych rysunkach $k \parallel l$. Wyznacz $x + y$.

a)


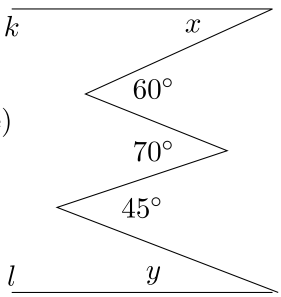
b)


c)


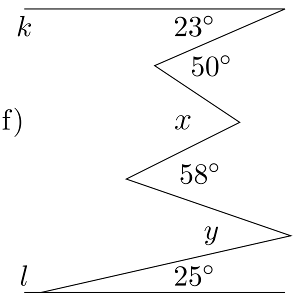
d)



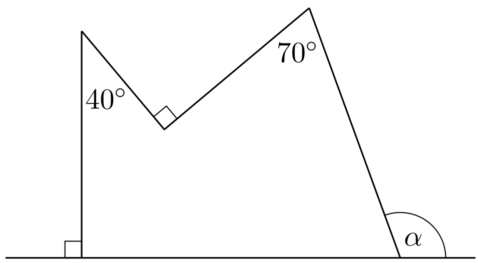
e)



f)

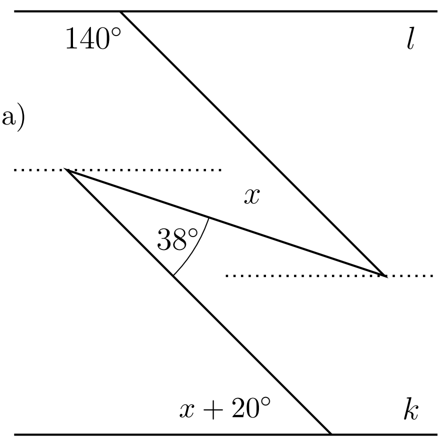


10. Wyznacz α na rysunku obok.

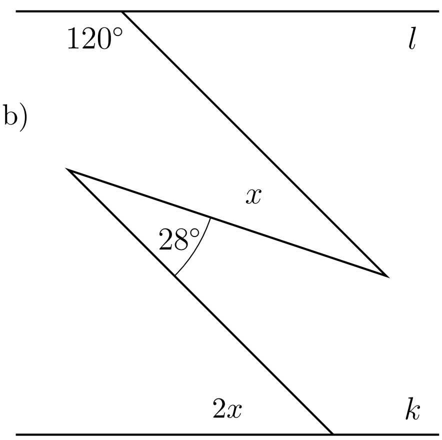


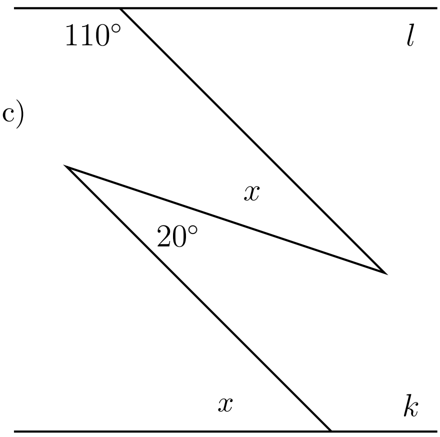
11. Na poniższych rysunkach $k \parallel l$. Na podstawie podanych miar kątów wyznacz x, względnie x i y. Na pierwszym rysunku zostały już narysowane przerywana kreską proste równoległe do prostych k i l.

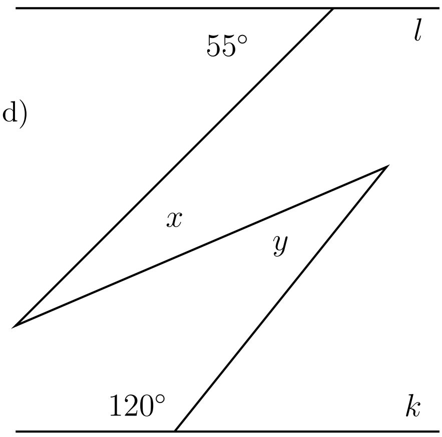
a)



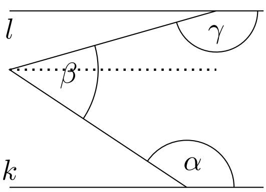
b)



c) 

d) 

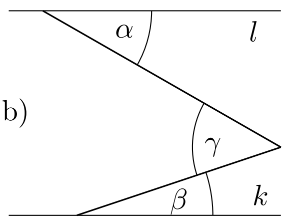
$x + y = 105°$

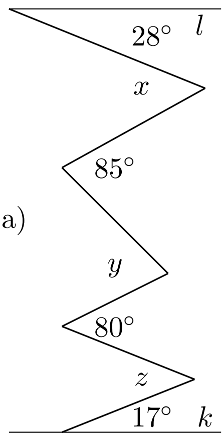
a) 

12. Wiedząc, że $k \parallel l$, uzasadnij, że

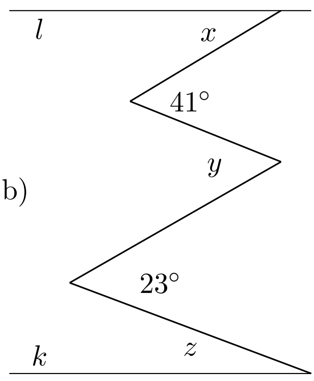
a) $\alpha + \beta + \gamma = 360°$,

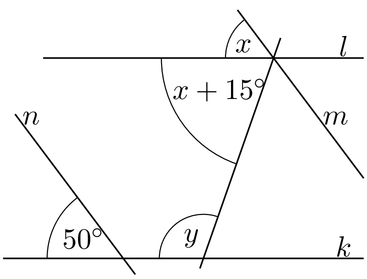
b) $\alpha + \beta = \gamma$.

b) 

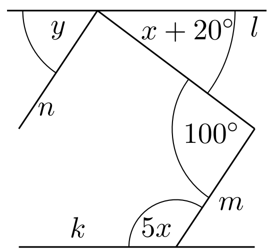
a) 

13. Na rysunkach obok $k \parallel l$. Wyznacz $x + y + z$.

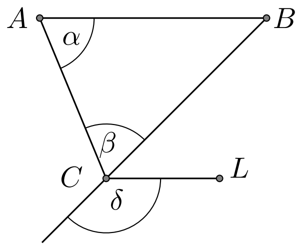
b) 

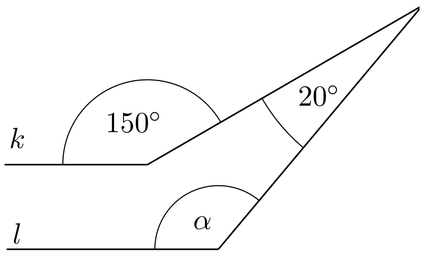


14. Wiedząc, że $k \parallel l$, $m \parallel n$, wyznacz x i y.



15. Wiedząc, że $\overline{CL} \parallel \overline{AB}$. Uzasadnij, że $\delta = \alpha + \beta$.

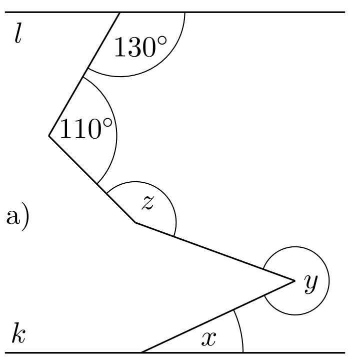




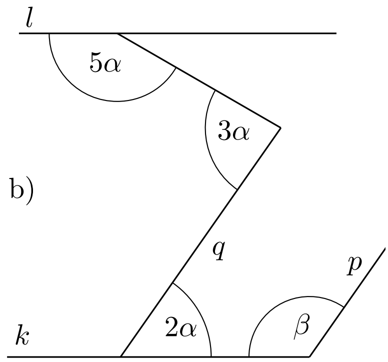
16. Na rysunku obok $k \parallel l$. Wyznacz α.

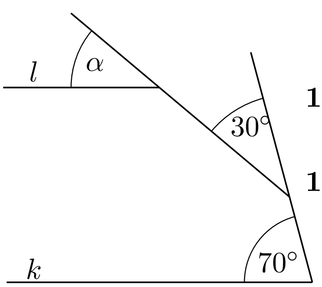
17. Na poniższych rysunkach $k \parallel l$, dodatkowo na drugim rysunku $p \parallel q$. Wyznacz $x+y+z$ na pierwszym rysunku oraz α i β na drugim rysunku. W celu ułatwienia sobie rozwiązania zadania sporządź rysunki w zeszycie powiększając je.

a)



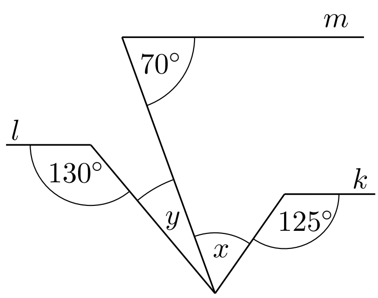
b)





18. Wiedząc, że $k \parallel l$ wyznacz α.

19. Wiedząc, że $k \parallel l \parallel m$, wyznacz x i y.



DEFINICJA Czworokąt, w którym boki są parami równoległe, nazywamy *równoległobokiem*.

$\boxed{! \Rightarrow}$ **20.** Uzasadnij, że w równoległoboku kąty leżące na przeciwko siebie mają równe miary.

Wskazówki i odpowiedzi.

1. 180°

2. **wsk**. zobacz definicję kąta półpełnego oraz kątów wierzchołkowych

3. **wsk**. zobacz definicję kąta półpełnego oraz kątów wierzchołkowych

4. $\alpha = 150^\circ$, $\beta = 30^\circ$

5. a) 30, b) 34

6. 280

7. 52

8. a) 67°, b) 15°, c) 75°, d) 47°, e) 51°, f) 23°, g) 51°, h) 35°

9. a) 58°, b) 73°, c) 58°, d) 74°, e) 35°, f) 110°

10. $\alpha = 110^\circ$.

11. a) 29°, b) $29\frac{1}{3}^\circ$, c) 45°, d) $x = 50^\circ$, $y = 55^\circ$

13. a) $x + y + z = 210^\circ$, b) $x + y + z = 64^\circ$

14. a) $x = 50^\circ$, $y = 115^\circ$, b) $x = 25^\circ$, $y = 55^\circ$

15. **wsk**. przedłuż prostą CL

16. $\alpha = 130^\circ$

17. a) $x + y + z = 480^\circ$, b) $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 120^\circ$

18. $\alpha = 40^\circ$ **wsk**. poprowadź odpowiednią prostą równoległą

19. $x = 55^\circ, y = 20^\circ$ **wsk**. przedłuż jedną z trzech prostych równoległych i dorysuj jeszcze jedną prostą równoległą

Rozdział 2

SUMA KĄTÓW TRÓJKĄTA

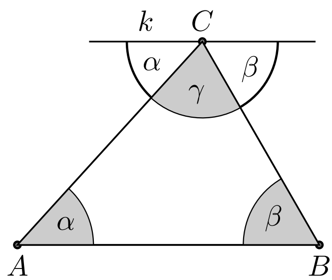
2.1 Kąty (wewnętrzne) w trójkącie

Wpierw udowodnimy twierdzenie o sumie kątów dowolnego trójkąta.

TWIERDZENIE Suma miar kątów dowolnego trójkąta wynosi $180°$.

Dowód:

Niech dany będzie dowolny trójkąt ABC. Przez punkt C prowadzimy prostą k równoległą do podstawy AB. Taka prosta jest dokładnie jedna. Teraz już wystarczy tylko spojrzeć na rysunek, zobaczyć pary kątów naprzemianległych i widać, że suma wszystkich trzech kątów trójkąta jest równa kątowi półpełnemu.

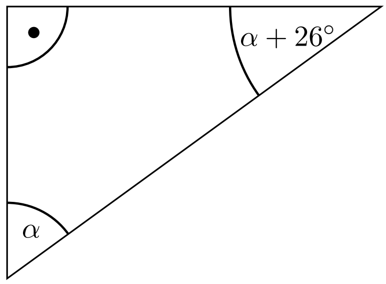


WNIOSEK Suma kątów czworokąta jest równa $360°$. Wynika to z tego, że czworokąt można podzielić przekątną na dwa trójkąty.

DEFINICJA Trójkąt w którym wszystkie kąty są ostre nazywamy *trójkątem ostrokątnym.* Trójkąt, w którym jeden kąt jest rozwarty nazywamy *trójkątem rozwartokątnym.* Trójkąt, w którym jeden z kątów jest prosty nazywamy *trójkątem prostokątnym.* Boki wychodzące z wierzchołka kąta prostego nazywamy *przyprostokątnymi*, zaś bok leżący na przeciwko kąta prostego nazywamy *przeciwprostokątną.*

PRZYKŁAD

Oblicz kąty ostre trójkąta prostokątnego, w którym jeden z kątów ostrych jest o 26° większy od drugiego kąta ostrego.



Przy oznaczeniach jak na rysunku obok mamy

$$\begin{aligned} \alpha + \alpha + 26° &= 90° \\ 2\alpha &= 64° \\ \alpha &= 32° \end{aligned}$$

Zatem kąty ostre trójkąta mają 32° i 58°.

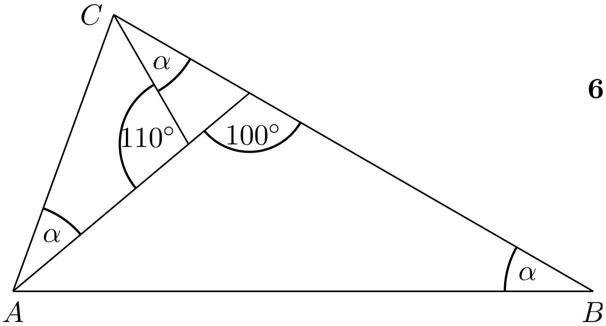
1. Jeden z kątów trójkąta jest równy 25°, a różnica pozostałych wynosi 15°. Wyznacz te kąty.

2. Jeden z kątów trójkąta równa się różnicy dwóch pozostałych kątów. Wyznacz miarę największego kąta w tym trójkącie.

3. Oblicz kąty trójkąta, w którym jeden kąt jest dwa razy większy od drugiego, a trzeci kąt jest równy sumie dwóch pozostałych.

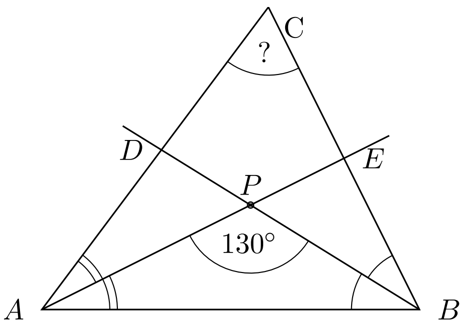
4. Stosunek miar dwóch kątów w trójkącie α i β wynosi 4 : 5 co oznacza, że $\alpha : \beta = 4 : 5$, zaś trzeci, największy kąt, jest większy od najmniejszego o 37°. Wyznacz kąty tego trójkąta.

5. Wyznacz kąty w trójkącie, jeżeli stosunek ich miar wynosi 5 : 3 : 1.

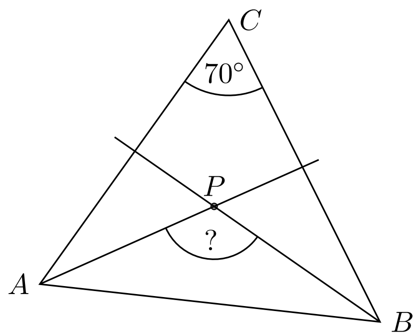


6. Na podstawie podanych miar dwóch kątów, wiedząc że trzy kąty mają miarę α, wyznacz α oraz miary kątów w trójkącie ABC.

7. W trójkącie ostrokątnym ABC opuszczono z wierzchołka C wysokość CC'. Wyznacz miary kątów ACC' i BCC', jeżeli $\sphericalangle A = 70°$, $\sphericalangle C = 48°$. (przypomnijmy, że wysokość trójkąta jest to odcinek łączący wierzchołek trójkąta z prostą wyznaczoną przez pozostałe dwa wierzchołki i prostopadły do tej prostej).

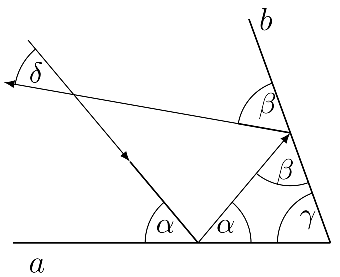


8. Na rysunku obok BD i AE są dwusiecznymi kątów. Miara kąta APB jest równa 130°. Wyznacz miarę kąta ACB. **Wsk**. oznacz $\sphericalangle CAB = 2\alpha$, $\sphericalangle CBA = 2\beta$.



9. W trójkącie ABC na rysunku obok $\sphericalangle C = 70°$, AP jest dwusieczną kąta A, zaś BP jest dwusieczną kąta B. Wyznacz $\sphericalangle APB$.

10. W trójkącie prostokątnym ABC kąt przy wierzchołku C jest prosty, zaś jeden z kątów ostrych ma miarę α (jeżeli to ci ułatwi obliczenia przyjmij, że $\alpha = 38°$). Wyznacz miarę kąta (rozwartego) pod jakim przecinają się dwusieczne kątów ostrych w tym trójkącie.



11. Na rysunku obok a i b oznaczają powierzchnie dwóch zwierciadeł, strzałki oznaczają drogę promienia światła padającego na zwierciadło a. Wyznacz kąt δ gdy:

a) $\alpha = 70°, \gamma = 60°$,

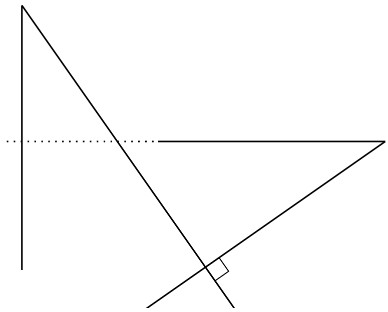
b) $\gamma = 60°$, zaś α jest dowolnym – co oznacza *„nie ustalonym”* – kątem.

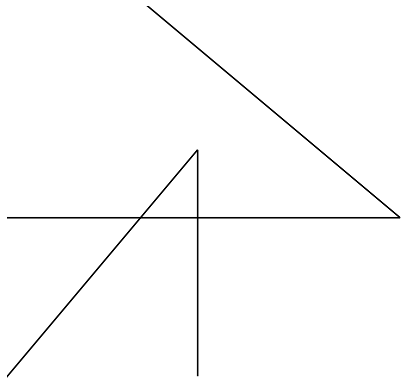
c) $\gamma = 70°$, zaś α jest dowolnym kątem.

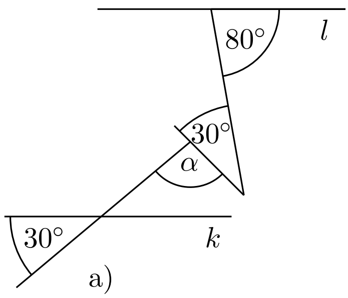
12. W trójkącie prostokątnym ABC kąt ostry przy wierzchołku A ma miarę α. (jeżeli to ci ułatwi obliczenia, to przyjmij, że $\alpha = 32°$). Wysokość CC' wychodzi z wierzchołka kąta prostego. Wyznacz kąt pod jakim przecinają się dwusieczne kątów ACC' i CBC'.

13. W trójkącie ABC dwusieczna kąta A jest prostopadła do boku BC, zaś dwusieczna kąta B jest prostopadła do boku AC. Uzasadnij, że w tym trójkącie każdy kąt ma 60°.

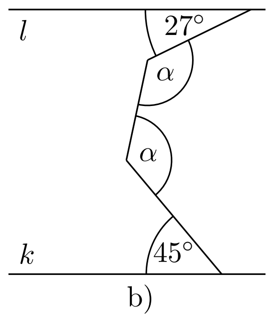
! ⇒ 14. Uzasadnij, że dwa kąty o ramionach wzajemnie prostopadłych mają równe miary





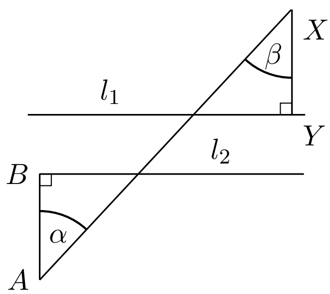


15. Na obu rysunkach $k \parallel l$. Wyznacz α.



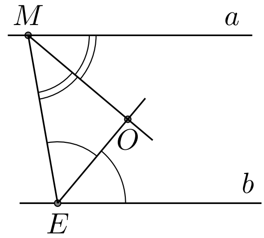
16. Na rysunku obok $l_1 || l_2$, $\overline{XY} \perp l_1$, zaś $\overline{AB} \perp l_2$. Uzasadnij, że $\alpha = \beta$.

17. Uzasadnij, że dwusieczne kątów przyległych tworzą kąt prosty. Pamiętaj, że kąty przyległe mają jedno ramię wspólne, a kąty te tworzą razem kąt półpełny.



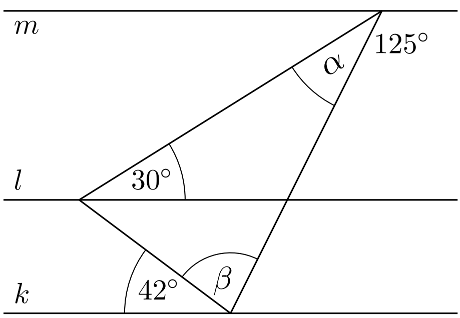
18. W równoległoboku $ABCD$ kąt przy wierzchołku D jest rozwarty. Z punktu D poprowadzono dwie wysokości równoległoboku, tworzące kąt α. Uzasadnij, że kąt ostry równoległoboku jest równy α. Przypomnijmy, że wysokość w równoległoboku jest to odcinek łączący parę prostych równoległych przechodzących przez boki równoległoboku i prostopadły do tych prostych.

19. Na rysunku obok $a \parallel b$. Półproste $MO^{\rightarrow}$ i $EO^{\rightarrow}$ są dwusiecznymi wskazanych kątów. Uzasadnij, że $\sphericalangle MOE = 90°$.



20. W trójkącie ABC kąty $\sphericalangle A$ i $\sphericalangle B$ są równe. Dwusieczna AD tworzy z bokiem BC kąt $60°$. Wyznacz miary kątów tego trójkąta. Zauważ, że tak sformułowane zadanie ma dwa rozwiązania. Zrób odpowiednie rysunki.

21*. Uzasadnij, ze w trójkącie ABC kąt pomiędzy wysokością wychodzącą z wierzchołka A i dwusieczną kąta A jest równy połowie różnicy dwóch pozostałych kątów.



22. Na rysunku obok $k \parallel l \parallel m$. Wyznacz α i β.

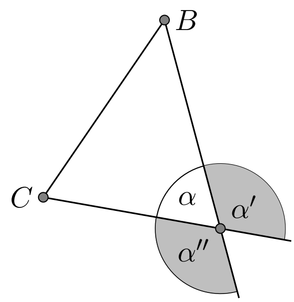
2.2 Kąty zewnętrzne w trójkącie

Wygodnym pojęciem, którego będziemy wielokrotnie używali, jest: *kąt zewnętrzny w trójkącie.*

DEFINICJA Kąt przyległy do kąta (wewnętrznego) w trójkącie nazywamy kątem *zewnętrznym.*

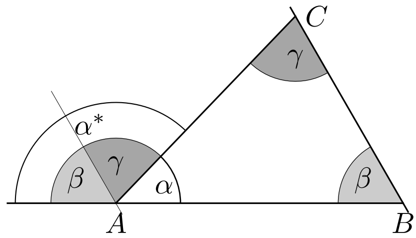
Na przykład w trójkącie ABC na rysunku obok α jest kątem wewnętrznym zaś α' i α'' są kątami zewnętrznymi przy wierzchołku A.

UWAGA Każdy kąt wewnętrzny w trójkącie ma dwa przyległe do niego kąty zewnętrzne czyli w każdym trójkącie jest sześć kątów zewnętrznych.



Ma miejsce przy tym następujące

TWIERDZENIE Kąt zewnętrzny w trójkącie równy jest sumie tych dwóch kątów wewnętrznych trójkąta, które do niego nie przylegają, czyli, że przy oznaczeniach jak na rysunku obok



$$\alpha^* = \beta + \gamma$$

Dowód:

Rozważmy kąt zewnętrzny α^* trójkąta ABC, w którym kąty wewnętrzne mają miary α, β i γ. Przez punkt A poprowadziliśmy prostą równoległą do prostej BC. Taka prosta jest tylko jedna, co wynika z przytoczonego na początku kursu aksjomatu. Z tego, że te proste są równoległe wynika równość odpowiednich kątów naprzemianległych i odpowiadających, co zostało zaznaczone na rysunku. Ponieważ w każdym trójkącie $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, a przy tym $\alpha + \alpha^* = 180°$ – jako kąty przyległe, wobec tego $\alpha^* = \beta + \gamma$.

Zauważmy dodatkowo, że ponieważ β i γ są liczbami dodatnimi, to z powyższej równości wynika, że

$$\alpha^* > \beta \quad \text{i} \quad \alpha^* > \gamma.$$

Co możemy sformułować jako

WNIOSEK (z którego nie raz będziemy korzystać) Kąt zewnętrzny w trójkącie jest większy od każdego z tych kątów wewnętrznych trójkąta, które do niego nie przylegają.

$\boxed{! \Rightarrow}$

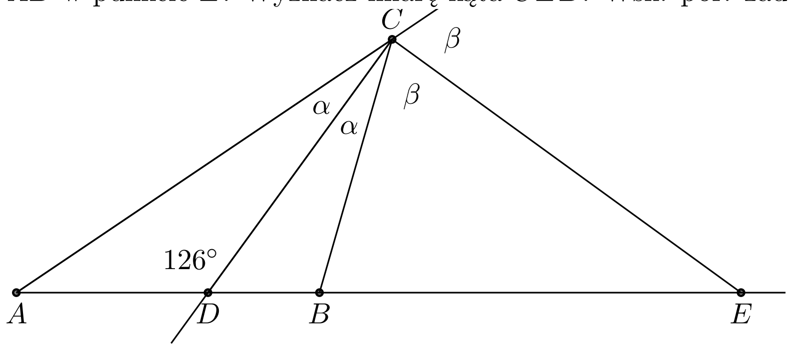
23. Cztery kąty zewnętrzne w trójkącie mają po $150°$. Po ile stopni mają pozostałe dwa kąty zewnętrzne?

24. Uzasadnij, że suma wszystkich sześciu kątów zewnętrznych trójkąta wynosi $720°$.

25. W trójkącie ABC kąt zewnętrzny przy wierzchołku A ma $40°$. Z wierzchołków B i C poprowadzono wysokości tego trójkąta. Wyznacz miarę kąta ostrego pomiędzy prostymi zawierającymi te dwie wysokości.

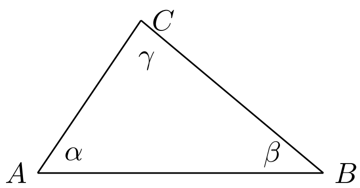
26. W trójkącie ABC poprowadzono z wierzchołka C dwusieczne kątów: wewnętrznego i zewnętrznego. Dwusieczna CD kąta wewnętrznego tworzy z bokiem AB kąt $126°$. Dwusieczna kąta zewnętrznego przecina prostą

AB w punkcie E. Wyznacz miarę kąta CEB. Wsk. por. zad. 17



PRZYKŁAD

W trójkącie suma kątów α i β równa jest kątowi γ. Wyznacz miarę kąta γ.



Rozwiązanie

Suma kątów trójkąta jest równa $180°$, wobec tego mamy

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

Ponieważ

$$\alpha + \beta = \gamma,$$

wobec tego mamy

$$\alpha + \beta + \gamma = \alpha + \beta + \underbrace{\alpha + \beta}_{=\gamma} = 180°$$

czyli

$$2\alpha + 2\beta = 180° \quad \text{zaś} \quad \alpha + \beta = 90°$$

Zatem $\gamma = 90°$

27. Postępując w podobny sposób wyznacz miarę kąta γ gdy w trójkącie o kątach α, β, γ suma kątów α i β jest

a) równa połowie kąta γ

b) równa jednej trzeciej kąta γ

c) dwa razy większa od kąta γ

d) pięć razy większa od kąta γ

e) o $60°$ większa od kąta γ

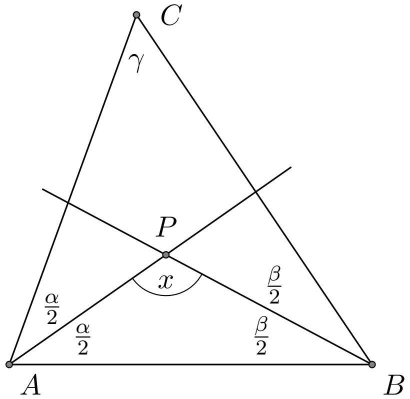
f) o $30°$ mniejsza od kąta γ

28. W trójkącie prostokątnym ABC dwusieczna kąta prostego tworzy z wysokością poprowadzoną z tego samego wierzchołka kąt o mierze $12°$. Wyznacz miary kątów ostrych w trójkącie ABC.

29. Największy kąt w trójkącie ma $82°$, a najmniejszy $45°$. Z wierzchołków dwóch mniejszych kątów poprowadzono wysokości trójkąta. Wyznacz miarę kąta ostrego pomiędzy tymi wysokościami.

PRZYKŁAD

W trójkącie ostrokątnym ABC dane są miary kątów: $\sphericalangle A = \alpha$, $\sphericalangle B = \beta$, $\sphericalangle C = \gamma$. Wyznacz miarę kąta rozwartego pomiędzy dwusiecznymi kątów A i B w zależności od γ.



Niech AP będzie dwusieczną kąta BAC, BP dwusieczną kąta ABC, zaś x poszukiwanym kątem. W trójkącie ABP mamy zatem

$$x + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 180°$$

czyli

$$x = 180° - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) = 180° - \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \quad (*)$$

W trójkącie ABC mamy

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

czyli

$$\alpha + \beta = 180° - \gamma$$

Uwzględniając to w wyrażeniu $(*)$ mamy

$$\begin{aligned} x &= 180° - \frac{1}{2}(180 - \gamma) \\ &= 180° - 90° + \frac{1}{2}\gamma \\ &= 90° + \frac{1}{2}\gamma \end{aligned}$$

Zatem miara kąta rozwartego pomiędzy dwusiecznymi kątów A i B jest równa $90° + \frac{1}{2}\gamma$.

30. Niech w trójkącie ostrokątnym ABC dane będą miary kątów: $\sphericalangle A = \alpha$, $\sphericalangle B = \beta$, $\sphericalangle C = \gamma$. Postępując podobnie jak w powyższym przykładzie

a) Wyznacz miarę kąta ostrego pomiędzy prostą zawierającą dwusieczną kąta zewnętrznego A a prostą zawierającą dwusieczną kąta zewnętrznego B w zależności od α i β.

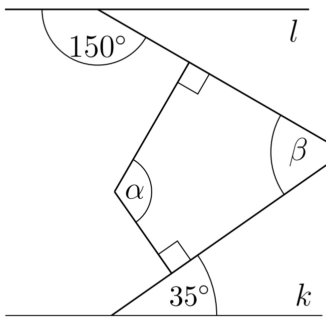
b) Wyznacz miarę kąta ostrego pomiędzy dwusieczną kąta wewnętrznego A i dwusieczną kąta zewnętrznego B w zależności od α i β.

c) Wyznacz miarę kąta rozwartego pomiędzy wysokością wychodzącą z wierzchołka B, a dwusieczną kąta A w zależności od α.

d) Wyznacz miarę kąta rozwartego pomiędzy wysokościami opuszczonymi z wierzchołków A i B w zależności od α i β.

e) Wyznacz miarę kąta pomiędzy prostą zawierająca wysokość wychodzącą z wierzchołka B a dwusieczną kąta zewnętrznego A w zależności od α.

31. Uzasadnij, że w żadnym trójkącie dwusieczne dwóch kątów wewnętrznych nie mogą być do siebie prostopadłe.

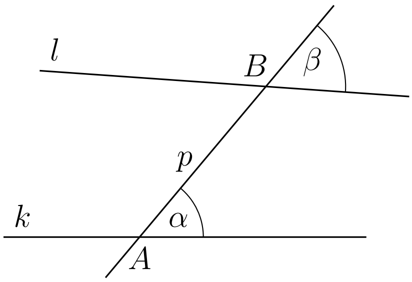


32. Na rysunku obok $k \parallel l$. Wyznacz α i β. **Wsk.** jakie proste równoległe należy dorysować?

33* W równoległoboku $ABCD$ bok AB jest dłuższy od boku BC. Dwusieczna kąta ADC przecina bok AB w punkcie E. Prosta DE i prosta BC przecinając się wyznaczają dwa kąty, których miary są w stosunku $2:3$. Oblicz miary kątów równoległoboku $ABCD$.

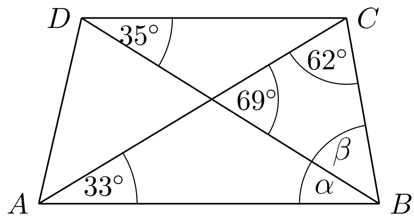
2.3 Twierdzenie o równoległości prostych

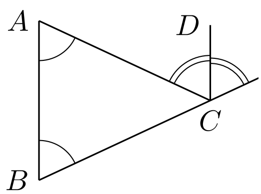
Rozszerzymy obecnie, na własny użytek i tylko na użytek poniższego twierdzenia, pojęcie kątów odpowiadających nie ograniczając się wyłącznie do sytuacji z parą prostych równoległych przeciętych trzecią prostą. Otrzymamy wówczas poniższe twierdzenie, które jest twierdzeniem odwrotnym do twierdzenia o kątach naprzemianległych i odpowiadających powstałych przy przecięciu pary prostych równoległych trzecią prostą.



TWIERDZENIE Niech k i l będą dwiema różnymi prostymi i niech prosta p przecina prostą k w punkcie A, a prostą l w punkcie B. Załóżmy ponadto, że miary odpowiadających sobie kątów α i β są równe. Wtedy proste k i l są równoległe.

34. Wyznacz α i β. Rozstrzygnij czy $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.





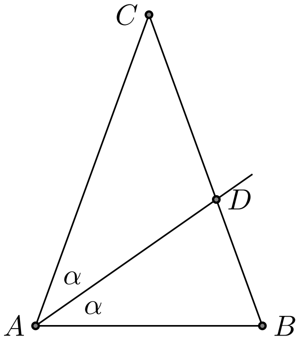
35. Na rysunku obok zaznaczono pary równych kątów. Uzasadnij, że $l_{AB} \parallel l_{CD}$.

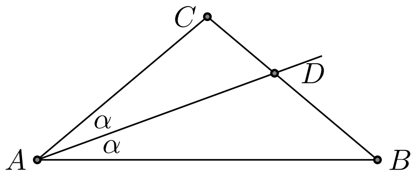
! ⇒ **36.** W czworokącie $ABCD$ mamy: $\sphericalangle ABC = \sphericalangle CDA$ i $\sphericalangle BCD = \sphericalangle BAD$. Uzasadnij, że czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem.

Wskazówki i odpowiedzi.

1. $70°, 85°$
2. $90°$
3. $30°, 60°, 90°$
4. $44°, 55°, 81°$
5. $100°, 60°, 20°$
6. $\sphericalangle B = \alpha = 30°, \sphericalangle A = 70°$, $\sphericalangle C = 80°$
7. $\sphericalangle ACC' = 20°$, $\sphericalangle BCC' = 28°$
8. $\sphericalangle ACB = 80°$
9. $\sphericalangle APB = 125°$
10. $135°$
11. a) $60°$, b) $60°$ c) $40°$
12. $90°$
14. **wsk**. przedłuż odpowiednie ramiona kątów
15. a) $\alpha = 100°$. b) $\alpha = 126°$.
18. **wsk.** co to jest wysokość w równoległoboku?

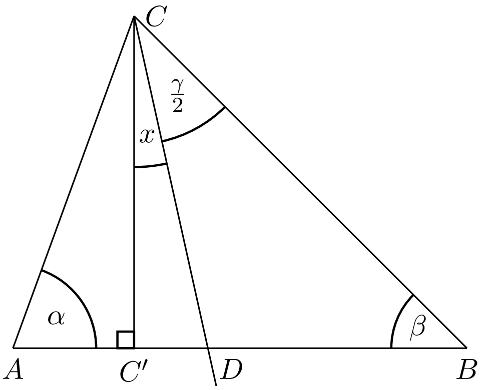
20. Rozpatrz poniższe dwa przypadki





W pierwszym przypadku mamy 80°, 80°, 20°, a w drugim 40°, 40°, 100°.

21. Spójrz na rysunek

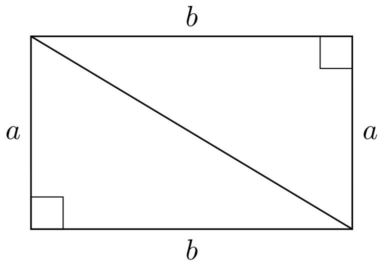


i zauważ, że suma kątów ostrych w trójkącie ACC' jest równa sumie kątów ostrych w trójkącie $CC'D$. To ci da równanie o zmiennej x. Równie dobrze możesz skorzystać z faktu, że suma kątów ostrych w trójkącie ACC' jest równa sumie kątów ostrych w trójkącie BCC'.

22. $\alpha = 25°$, $\beta = 83°$
23. 60°
25. 40° **wsk**. Co to jest wysokość w trójkącie?
26. 36°
27. a) $\gamma = 120°$ b) $\gamma = 135°$ c) $\gamma = 60°$ d) $\gamma = 30°$ e) $\gamma = 60°$ f) $\gamma = 105°$
28. 33°, 57°
29. 82°
30. a) $\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ b) $90° - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta$ c) $90° + \frac{1}{2}\alpha$ d) $\alpha + \beta$ e) $\frac{1}{2}\alpha$
32. $\alpha = 115°$, $\beta = 65°$
33. 108° i 72°
34. $\alpha = 36°, \beta = 49°$, nie są równoległe.

Rozdział 3

POLA FIGUR.



Obecnie uporządkujemy naszą wiedzę geometryczną związaną z polem prostokąta, trójkąta, trapezu i równoległoboku. Przypomnijmy wpierw, że *prostokąt* jest to równoległobok, w którym wszystkie kąty są proste.

Prostokąt, w którym wszystkie boki są równej długości nazywamy *kwadratem*. Ponieważ prostokąt jest równoległobokiem więc jego równoległe boki są równej długości.

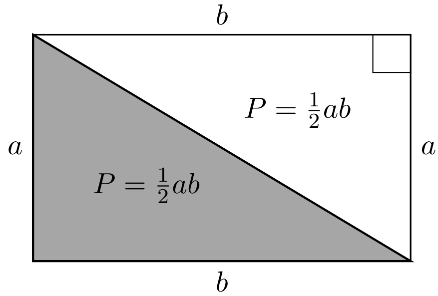
Teraz sformułujemy dobrze nam znany fakt geometryczny w postaci:

AKSJOMAT Pole prostokąta o bokach długości a, b równe jest ab, czyli jest równe iloczynowi długości jego boków.

WNIOSEK Pole kwadratu o boku długości a jest równe a^2.

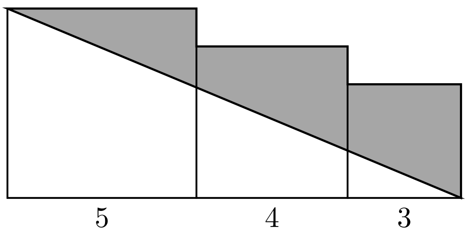
UWAGA Przekątna prostokąta dzieli go na dwa przystające trójkąty. Z dwóch przystających trójkątów prostokątnych o przyprostokątnych a, b można „złożyć” prostokąt o bokach długości a, b.

Z tego co powiedzieliśmy dotychczas wynika następujące:



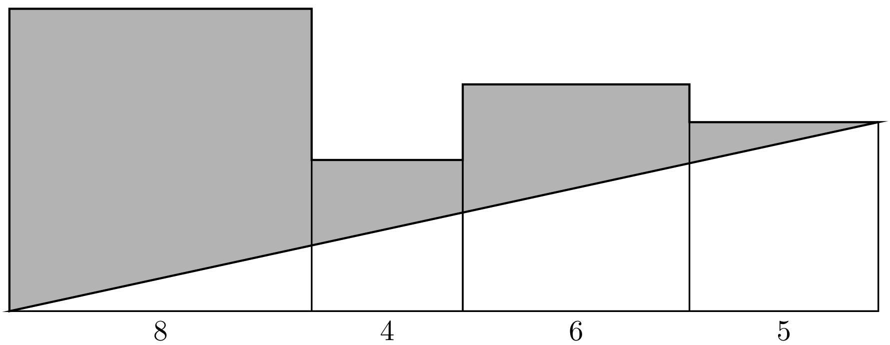
TWIERDZENIE
Pole trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych długości a i b jest równe połowie pola prostokąta o bokach długości a i b, czyli jest równe $\frac{1}{2}ab$.

W poniższych zadaniach od 1 do 4 należy korzystać tylko z wzoru na pole prostokąta oraz wzoru na pole trójkąta prostokątnego.

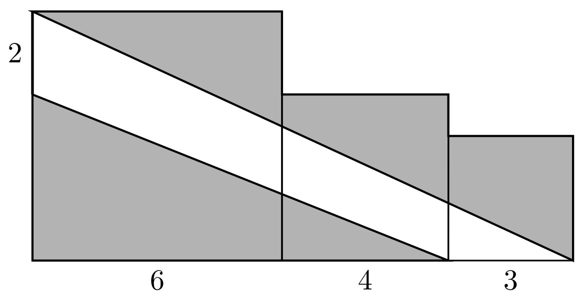


1. Figura na rysunku obok składa się z 3 kwadratów o podanych długościach boków. Wyznacz pole zacieniowanego obszaru.

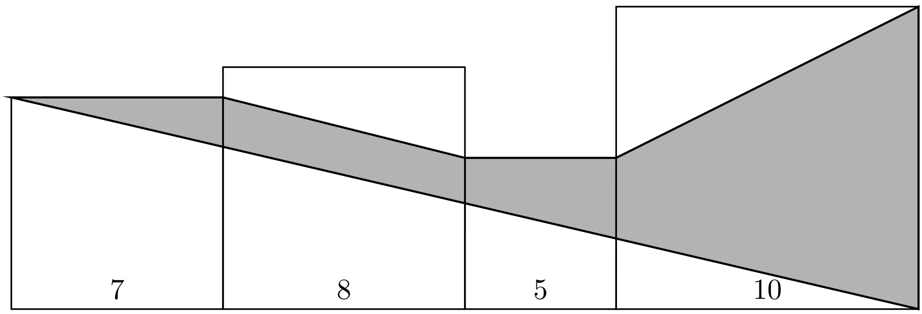
2. Figura na rysunku poniżej składa się z 4 kwadratów o podanych długościach boków. Wyznacz pole zacieniowanego obszaru.

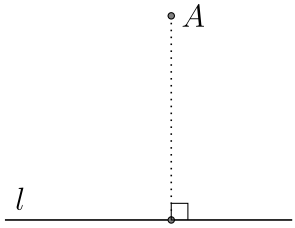


3. Figura na rysunku obok składa się z 3 kwadratów o bokach długości 6, 4, 3. Wyznacz pole zacieniowanego obszaru.



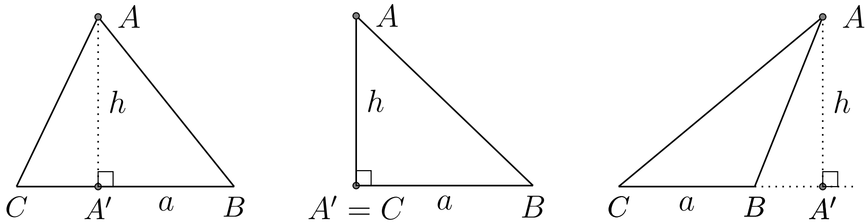
4. Figura na rysunku poniżej składa się z 4 kwadratów o bokach długości 7, 8, 5 i 10. Wyznacz pole zacieniowanego obszaru.



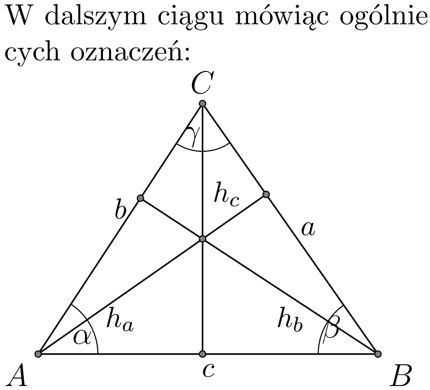


DEFINICJA *Rzutem prostopadłym punktu A na prostą l* jest punkt przecięcia prostej l z prostą, która przechodzi przez punkt A i jest przy tym prostopadła do l.

DEFINICJA W trójkącie ABC przez A' oznaczmy rzut prostopadły punktu A na prostą BC. Wtedy odcinek AA' nazywamy *wysokością trójkąta* (wychodzącą z wierzchołka A), zaś punkt A' nazywamy *spodkiem (podstawą) wysokości.*



Zauważmy, że długość tego odcinka, który jest wysokością trójkąta, jest odległością wierzchołka A od prostej BC, czyli krótko mówiąc $h_a = d(A, l_{BC})$. W dalszym ciągu mówiąc ogólnie o trójkącie, używać będziemy następujących oznaczeń:



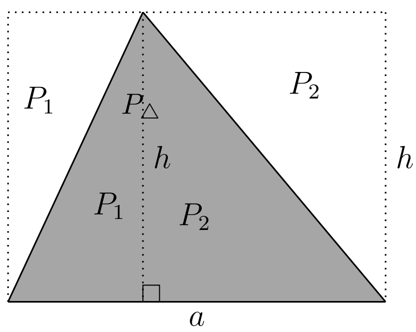
- A, B, C – wierzchołki trójkąta
- a, b, c – długości boków leżących odpowiednio naprzeciwko tych wierzchołków
- α,β, γ – odpowiednie miary kątów
- h_a, h_b, h_c – odpowiednie wysokości w trójkącie

Nazywamy je **oznaczeniami standardowymi**. Ich konsekwentne używanie ułatwia nam komunikację i (co za tym idzie) rozumienie (materiału). Zauważ, że na rysunku powyżej wszystkie trzy wysokości przecinają się w jednym punkcie. W rzeczywistości w każdym trójkącie ostrokątnym wysokości przecinają się w jednym punkcie. W trójkącie rozwartokątnym, trzy proste na których leżą te trzy wysokości przecinają się w jednym punkcie. Fakt ten zostanie udowodniony w dalszej części kursu. Oczywistą rzeczą jest, że wspólnym punktem wszystkich trzech wysokości trójkąta prostokątnego jest wierzchołek kąta prostego.
Obecnie udowodnimy twierdzenie o polu dowolnego trójkąta.

TWIERDZENIE Pole trójkąta równe jest połowie iloczynu długości boku i opuszczonej na ten bok wysokości. Czyli

$$P = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c.$$

Dowód
Wiemy już, że pole trójkąta prostokątnego równe jest $\frac{1}{2}ah$. Pokażemy, że podobnie jest w przypadku trójkąta ostrokątnego i rozwartokątnego. Oznaczmy w obu poniższych przypadkach na użytek tego dowodu pole prostokąta, w który wpisany jest trójkąt przez $P_\square$, a pole trójkąta przez $P_\triangle$.
Przypadek 1 – trójkąt ostrokątny.



Zauważmy, że w tym przypadku wysokość h podzieliła opisany na trójkącie prostokąt na dwa prostokąty. Każdy z tych dwóch mniejszych prostokątów podzielony jest przez odpowiedni bok trójkąta na dwa przystające trójkąty prostokątne. Wobec tego z jednej strony mamy

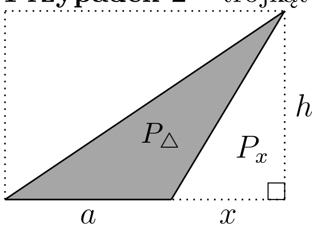
$$P_\square = a \cdot h$$

a z drugiej strony pole prostokąta jest sumą czterech trójkątów prostokątnych, czyli

$$P_\square = P_1 + P_1 + P_2 + P_2 = 2P_1 + 2P_2 = 2(P_1 + P_2).$$

Widać, że $P_\triangle = P_1 + P_2 = \frac{1}{2}P_\square$, a ponieważ $P_\square = a \cdot h$ czyli $\frac{1}{2}P_\square = \frac{1}{2}a \cdot h$ więc $P_\triangle = \frac{1}{2}ah$.

Przypadek 2 – trójkąt rozwartokątny.



Zauważmy, że w tym przypadku $P_\triangle + P_x$ jest połową pola prostokąta opisanego na naszym trójkącie, czyli

$$P_\triangle + P_x = \frac{1}{2}(a+x)h = \frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}xh,$$

a ponieważ

$$\frac{1}{2}xh = P_x$$

więc wobec tego

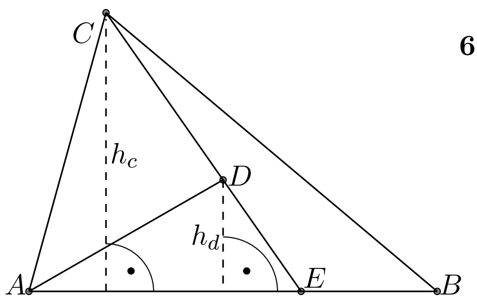
$$P_\triangle + P_x = \frac{1}{2}ah + P_x,$$

a stąd mamy

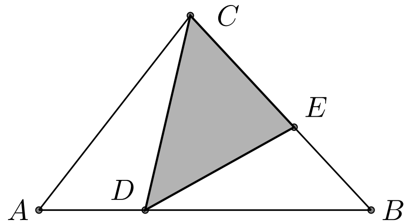
$$P_\triangle = \frac{1}{2}ah.$$

5. Dwa boki trójkąta sa równe 8 i 10. Wysokość poprowadzona do krótszego z nich jest równa 5. Jaką długość ma wysokość poprowadzona do drugiego boku?

! ⇒



6. Oblicz pole trójkąta ACD na rysunku obok, jeżeli w trójkącie ABC mamy $h_c = 10$, w trójkącie AED mamy $h_d = 5$, pola trójkątów AED i BCE są równe, czyli krótko $P_{AED} = P_{BCE}$ oraz $|EB| = 4$.

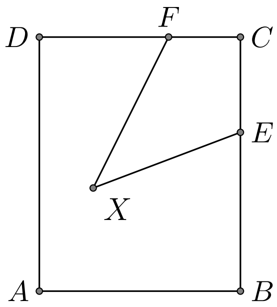


7. Na rysunku obok $P_{ABC} = 63$, $|AD| = 6$, $|DB| = 8$, $|BE| = 5$, $|EC| = 7$. Wyznacz P_{DEC}.

8. Dany jest kwadrat $ABCD$ o polu równym 64. Punkt O leży wewnątrz tego kwadratu, a przy tym $P_{ABO} = 6$. Wyznacz P_{CDO}.

9. Punkt E leży wewnątrz kwadratu $ABCD$ o polu 81 cm, P_{ABE} =15 cm^2, P_{BCE} =12 cm^2. Wyznacz wysokości trójkątów CDE i DAE wychodzące z wierzchołka E.

10. Punkt X leży wewnątrz prostokąta $ABCD$, w którym $|AB| = a$, $|BC| = b$. Wyznacz $P_{ABX} + P_{CDX}$.



11. Punkt X, na rysunku obok, leży wewnątrz prostokąta $ABCD$. Punkty E i F leżą na jego bokach, przy czym $|AB| = 7$, $|AD| = 9$, $|FC| = 2$, $|EC| = 3$, $d(X, l_{AB}) = 4$, $d(X, l_{AD}) = 1$. Wyznacz P_{ABXD}, P_{BDX}, P_{BEX}, P_{ECFX}, P_{BFX}.

PRZYKŁAD

Stosunek długości dwóch odcinków jest równy $2\frac{1}{2}$. Jeden z tych odcinków jest o 8 dłuższy od drugiego. Wyznacz długości obu odcinków.

Rozwiązanie

Oznaczmy
x – długość dłuższego odcinka
y – długość krótszego odcinka
Mamy wówczas

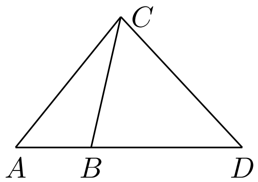
$$\begin{cases} \frac{x}{y} = 2\frac{1}{2} & (1) \\ x = y + 8 & (2) \end{cases}$$

Przekształcając pierwszy warunek mamy
$\frac{x}{y} = \frac{5}{2}$, czyli $5y = 2x$, czyli $y = \frac{2}{5}x$. (3)
Wstawiając to do (2) mamy
$x = \frac{2}{5}x + 8$
$\frac{3}{5}x = 8$
$x = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$.
Wstawiając to do (3) mamy
$y = \frac{2}{5} \cdot \frac{40}{3} = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$.
Odpowiedź: długość dłuższego odcinka to $13\frac{1}{3}$, a krótszego $5\frac{1}{3}$.

12. *Stosunek długości dwóch odcinków*, czyli iloraz ich długości, równy jest $1\frac{1}{3}$. Oblicz długości tych odcinków, jeżeli jeden z nich jest o 2 dłuższy od drugiego.

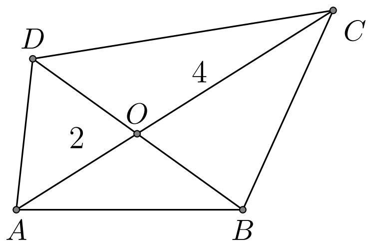
13. Różnica długości dwóch odcinków równa jest 12, a ich stosunek długości równy jest $2\frac{1}{3}$. Wyznacz długości tych odcinków.

14. Stosunek długości dwóch odcinków równy jest 0,5, a stosunek długości odcinków o 3 dłuższych od nich wynosi 0,6. Wyznacz długości tych odcinków.



15. Na rysunku obok $P_{ADC} = 12\frac{1}{2}$, $P_{ABC} = 5$, $|AB| = 2$. Wyznacz $|BD|$.

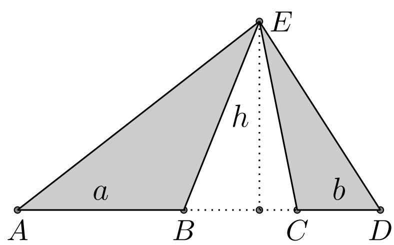
16. W czworokącie $ABCD$ na rysunku obok przekątne AC i BD przecinają się w punkcie O, przy czym $|AO| = 2$, $|OC| = 5$, $P_{AOB} = 3$, $P_{CDO} = 6$. Wyznacz P_{BCO} oraz wysokość h_d w trójkącie AOD (czyli wysokość opuszczoną na prostą AC).



Zauważmy teraz, że ma miejsce następujące:

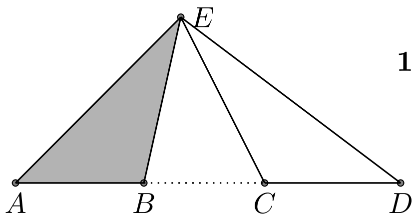
TWIERDZENIE

Jeżeli dwa trójkąty mają podstawy leżące na jednej prostej i wspólny wierzchołek poza tą prostą, to stosunek pól tych trójkątów równy jest stosunkowi długości tych podstaw.



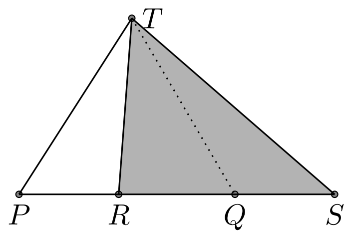
Dowód: Dla dowodu spójrz na rysunek i zauważ przy tym, że

$$P_{ABE} = \frac{1}{2}ah, \ P_{CDE} = \frac{1}{2}bh, \quad \text{stąd} \quad \frac{P_{ABE}}{P_{CDE}} = \frac{\frac{1}{2}ah}{\frac{1}{2}bh} = \frac{a}{b}.$$

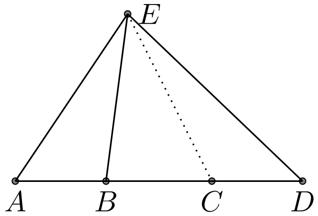


17. Podstawy AB i CD trójkątów ABE i CDE na rysunku obok leżą na jednej prostej, przy czym $|AB| = 5$, $|CD| = 3$, $P_{CDE} = 2$. Wyznacz P_{ABE}

18. Wierzchołki P, Q, R, S trójkątów PQT i RST leżą na jednej prostej, przy czym $|PQ| = 6$, $|RS| = 7$, $P_{PQT} = 9$. Wyznacz P_{RST}.



19. W trójkącie ABC punkt D leży na boku AB, przy czym $|AD| = 4$, $|DB| = 5$, $P_{ABC} = 40$. Wyznacz wysokość h_c trójkąta DBC, wychodzącą z wierzchołka C.

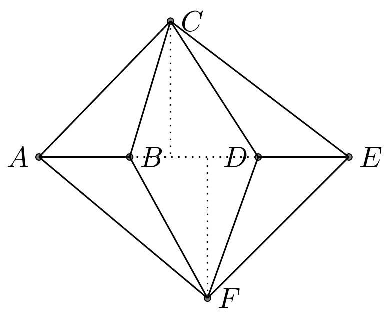


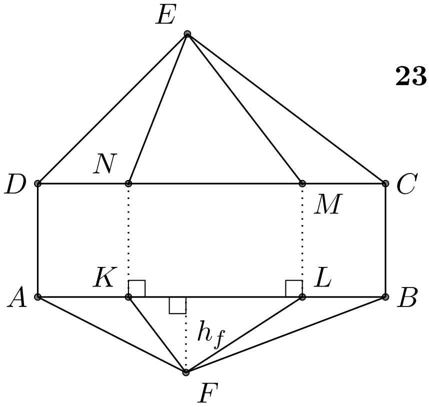
20. Punkty A, B, C, D, na rysunku obok, leżą na jednej prostej, przy czym $|AB| = 2$, $|BC| = 3$, $|CD| = 5$, $P_{CDE} = 8$. Wyznacz P_{ABE}, P_{BCE}.

21. Na przekątnej AC czworokąta $ABCD$ obrano punkt E tak, że $P_{ABE} = 6$, $P_{BCE} = 7$, $P_{ADE} = 5$. Wyznacz a) $\dfrac{AE}{EC}$, b) P_{CDE}.

22. Punkty A, B, D, E leżą na jednej prostej. Wiedząc, że $P_{ABC} = 4$, $P_{DEC} = 14$, $P_{DEF} = 6$, wyznacz

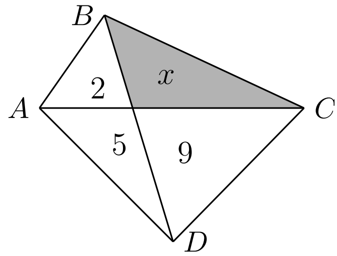
a) $\dfrac{AB}{DE}$, b) P_{ABF}.



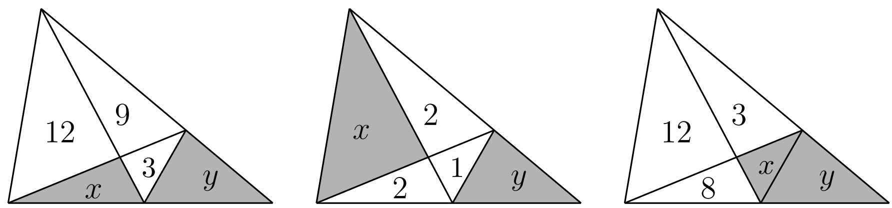


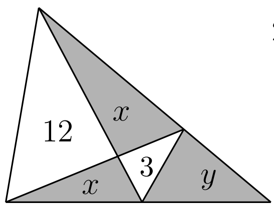
23. Na bokach prostokąta $ABCD$ zbudowano trójkąty DNE, MCE oraz AKF i LBF, przy czym $\overline{KN} \perp \overline{AB}$, $\overline{LM} \perp \overline{AB}$. Wiedząc, że $P_{MCE} = 4$, $P_{DNE} = 7$, $P_{AKF} = 3$, wyznacz P_{BLF}. Wiedząc dodatkowo, że $|MC| = 3$ wyznacz $|DN|$ oraz wysokość h_f trójkąta KLF wychodzącą z wierzchołka F.

24. Czworokąt $ABCD$ na rysunku obok przekątne AC i BD podzieliły na cztery trójkąty. Na podstawie podanych pól trzech trójkątów wyznacz pole x czwartego trójkąta.



25. Na poniższych trzech rysunkach trójkąt ABC został podzielony trzema odcinkami na pięć trójkątów. Na podstawie informacji o polach trzech trójkątów, wyznacz pola pozostałych dwóch trójkątów.



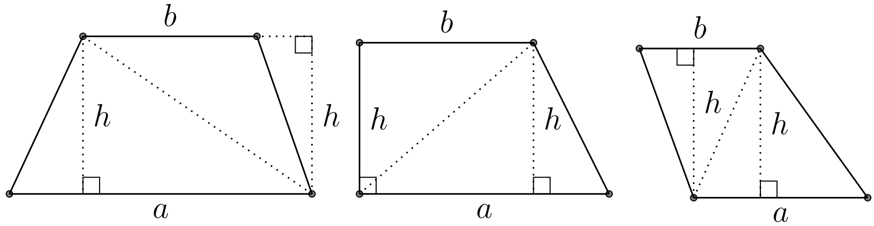


26. Trójkąt na rysunku obok został podzielony trzema odcinkami na pięć trójkątów. Pola dwóch z tych pięciu trójkątów są takie same. Na podstawie informacji o polach dwóch trójkątów wyznacz pola pozostałych trójkątów.

DEFINICJA *Trapezem* nazywamy czworokąt wypukły o co najmniej jednej parze boków równoległych. Te dwa równoległe boki nazywamy *podstawami* trapezu. Pozostałe dwa boki nazywamy *ramionami* trapezu. Odcinek prostopadły do obu podstaw łączący te podstawy, względnie proste zawierające podstawy, nazywamy *wysokością* trapezu. Trapez, w którym co najmniej jeden kąt jest prosty, nazywamy trapezem *prostokątnym.*

UWAGA Z tej definicji wynika, że równoległobok jest trapezem.

TWIERDZENIE Pole trapezu o podstawach długości a, b oraz wysokości h równe jest $\frac{(a+b)h}{2}$



Dowód Zauważ, że w każdym z powyższych trzech przypadków przekątna trapezu dzieli go na dwa trójkąty o równoległych podstawach. A zatem wysokości obu trójkątów opuszczone na te równoległe podstawy są tej samej długości. Przeto w każdym przypadku mamy:

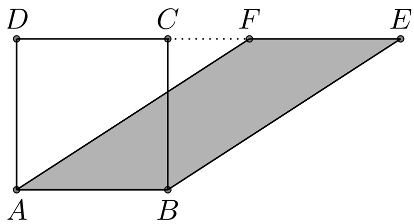
$$P = \frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}bh.$$

Wyłączając $\frac{1}{2}h$ przed nawias mamy:

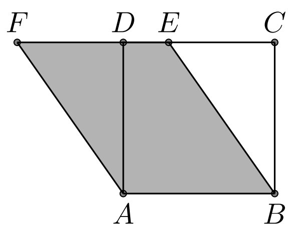
$$P = \frac{1}{2}h(a+b) = \frac{(a+b)h}{2}.$$

WNIOSEK Ponieważ równoległobok jest trapezem, wobec tego pole równoległoboku jest równe iloczynowi długości boku i wysokości opuszczonej na ten bok, bo obie podstawy są w nim równej długości. Mamy zatem

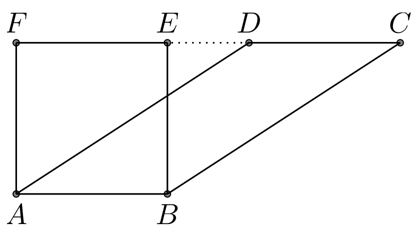
$P = \frac{1}{2}(a+a)h = \frac{1}{2} \cdot 2ah = ah.$



27. W kwadracie $ABCD$ na rysunku obok długość boku jest równa 4. Punkty D, C, E, F leżą na jednej prostej. Wyznacz pole równoległoboku $ABEF$



28. Pole równoległoboku $ABEF$ na rysunku obok równe jest 25. Wyznacz długość boku x kwadratu $ABCD$.

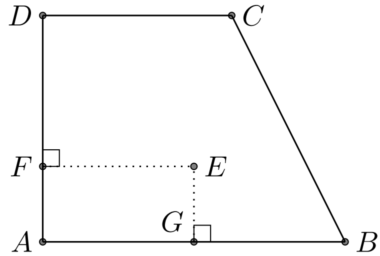


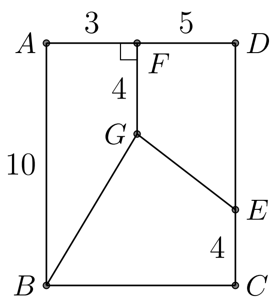
29. Pole równoległoboku $ABCD$ równe jest 100. Wyznacz pole kwadratu $ABEF$

30. W trapezie o podstawach b i c oraz wysokości h podstawa c jest trzy razy dłuższa niż b, a wysokość h jest równa połowie długości c. Oblicz b, c i h wiedząc, że pole trapezu równe jest polu prostokąta o bokach długości 3 i 36.

31. Pole trapezu $ABCD$ równe jest $900\,\text{cm}^2$. Długości podstaw trapezu równe są $|AB| = 25\text{cm}$, $|CD| = 20\text{cm}$. Wyznacz P_{ABC}.

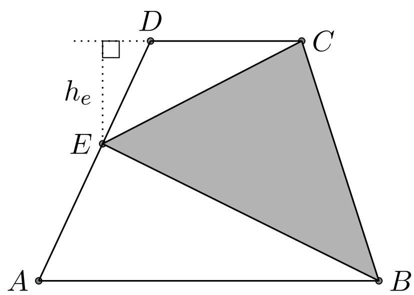
32. Punkt E, na rysunku obok, leży wewnątrz trapezu prostokątnego $ABCD$, przy czym $|AB| = 18$, $|CD| = 10$, $|AD| = 9$, $d(E, l_{AB}) = 2$, $d(E, l_{AD}) = 6$. Wyznacz P_{BCE}, P_{AEC}.

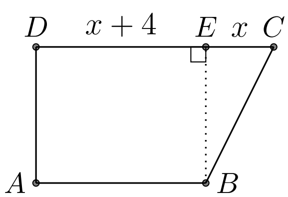




33. Punkt G, na rysunku obok, leży wewnątrz prostokąta $ABCD$, zaś punkty E i F leżą na jego bokach. Na podstawie podanych długości niektórych odcinków wyznacz P_{FGE}, P_{BEF}, P_{BCEG}, P_{BDG}.

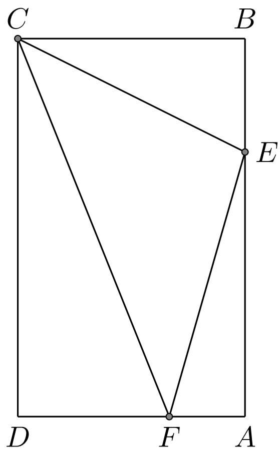
34. W trapezie $ABCD$, na rysunku obok, $|DC| = 6$, $|AB| = 18$, wysokość h_e trójkąta CDE równa jest 4. Oblicz P_{BCE}, jeżeli $P_{ABCD} = 84$.





35. W trapezie prostokątnym $ABCD$, na rysunku obok, wysokość $\overline{BE}$ wychodząca z wierzchołka kąta rozwartego $\sphericalangle B$, ma długość 5. Podzieliła ona dłuższą podstawę trapezu na odcinki o długościach x oraz $x + 4$. Pole P_{ABED} jest trzy razy większe od pola P_{BCE}. Wyznacz długości podstaw trapezu.

36. Na poniższym rysunku w prostokącie $ABCD$ punkt E leży na boku AB, zaś punkt F na boku AD. Wiedząc, że



(a) $|BC| = 6$, $|AB| = 10$, $|DF| = 4$, $P_{AEF} = 9$. Wyznacz $|EB|$.

(b) $|CD| = 8$, $|BC| = 5$, $|AE| = 6$, P_{CDF} jest o 6 większe od P_{AEF}. Wyznacz P_{CEF}.

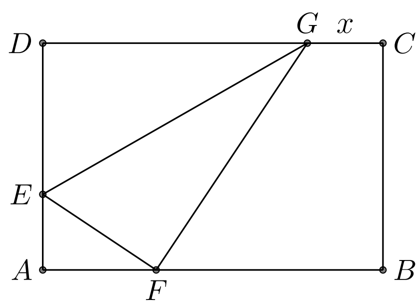
(c) $|AF| = 2$, $|CD| = 10$, $|BC| = 6$, P_{EBC} jest o 10 większe od P_{AEF}. Wyznacz P_{FEC}.

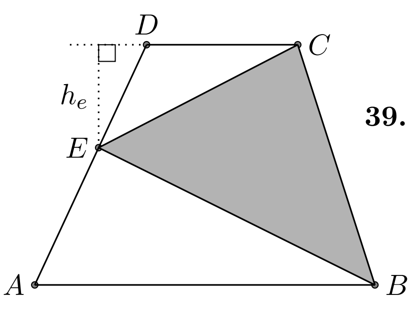
(d) $|AB| = 10$, $|BC| = 7$, $|DF| = 3$, $P_{CEF} = P_{AFE} + P_{FCD} + P_{BCE} - 5$. Wyznacz P_{AFE}.

(e) $|AB| = 10$, $|BC| = 7$, $|DF| = 2$, $P_{BCE} = 3 \cdot P_{FAE}$. Wyznacz $|AE|$.

37. W prostokącie $ABCD$ bok AB jest dwa razy dłuższy od boku BC. Na bokach prostokąta obrano punkty P, Q, R, S, przy czym $P \in \overline{AB}$ (co oznacza, że punkt P leży na boku AB), $Q \in \overline{BC}$, $R \in \overline{CD}$ i $S \in \overline{DA}$. Dane są również pewne odległości, a mianowicie: $|AP| = 6$, $|BP| = 4$, $|CQ| = 1$, $|DR| = 4$, $|AS| = 3$. Wyznacz P_{PQRS}.

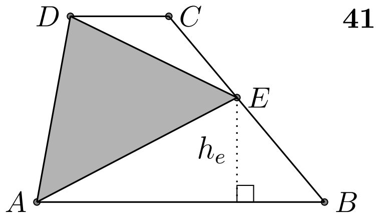
38. W prostokącie $ABCD$ na rysunku obok mamy: $|AB| = 10$, $|AF| = 4$, $|AE| = 2$, $P_{ABCD} = 50$, $P_{EFG} = 13$. Wyznacz $|CG|$.





39. W trapezie $ABCD$ na rysunku obok $|AB| = 16$, $|CD| = 6$, $P_{ABE} = 40$, $P_{CDE} = 3$. Wyznacz P_{ABCD}, P_{BCE}.

40. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach różnej długości $|AB| = a$, $|CD| = b$ i wysokości h. Na odcinku będącym wysokością trapezu obieramy punkt E tak, aby $P_{ABE} + P_{CDE}$ było równe połowie pola trapezu. Policz na jakiej długości odcinki punkt E dzieli wysokość h.



41. W trapezie $ABCD$ na rysunku obok $P_{ABE} = 33$, $P_{CDE} = 6$. W trójkącie ABE wysokość h_e wychodząca z wierzchołka E ma długość 6, zaś suma (różnych) długości podstaw trapezu jest równa 17. Wyznacz wysokość h trapezu $ABCD$ oraz P_{ADE}.

42. W prostokątnym układzie współrzędnych zaznacz kreską odcinek AB, w którym $A = (-1, 2)$, $B = (2, 2)$. Następnie zaznacz

(a) trzy takie punkty C leżące na jednej prostej, dla których $P_{ABC} = 3$,

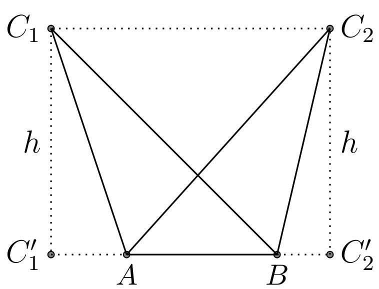
(b) pięć takich punktów C nie leżących na jednej prostej, dla których $P_{ABC} = 3$,

(c) zbiór tych wszystkich punktów C, dla których $P_{ABC} = 3$.

Obecnie sformułujemy kolejne twierdzenie o polach trójkątów.

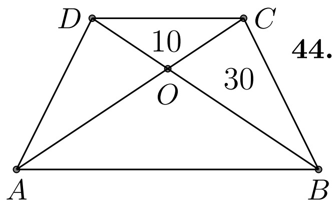
TWIERDZENIE Jeżeli dwa trójkąty mają wspólną podstawę, a pozostałe wierzchołki leżą na prostej równoległej do tej podstawy, to trójkąty te mają równe pola.

Dowód:



Rozpatrzmy trójkąty ABC_1 i ABC_2 o wspólnej podstawie AB, przy czym $\overline{C_1C_2} \parallel \overline{AB}$. Zauważmy, że wobec tego wysokości C_1C_1' i C_2C_2' opuszczone na prostą AB mają taką samą długość, którą oznaczmy h, zaś długość podstawy AB oznaczmy a. Wobec tego mamy $P_{ABC_1} = \frac{1}{2}ah$, jak również $P_{ABC_2} = \frac{1}{2}ah$.

$\boxed{! \Rightarrow}$ **43.** Niech dany będzie trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD. Niech jego przekątne przecinają się w punkcie O. Uzasadnij, że $P_{BCO} = P_{DAO}$.



44. Przekątne trapezu o polu 160 dzielą go na cztery trójkąty tak jak na rysunku obok. Podane są pola dwóch trójkątów. Wyznacz pole trójkąta ABO.

45. Przekątne AC i BD trapezu $ABCD$ o podstawach AB i CD przecinają się w punkcie O i podzieliły trapez na cztery trójkąty, przy czym a) $P_{ABO} = 12$, $P_{BCO} = 7$; b) $P_{ABO} = 16$, $P_{CDO} = 9$. Wyznacz pole trapezu.

46. W trapezie $ABCD$ o podstawach AB i CD przekątne AC i BD przecinają się w punkcie O, przy czym $|AB| = 3$, $P_{ABO} = 3$, $P_{AOD} = 12$. Wyznacz

(a) P_{ABC},

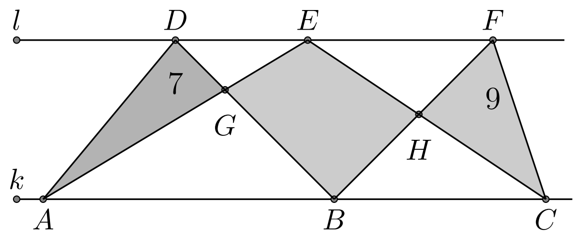
(b) wysokość h_c w trójkącie ABC,

(c) P_{CDO},

(d) wysokość h_o w trójkącie COD.

47. W trapezie $ABCD$ o podstawach AB i CD przekątne AC i BD przecinają się w punkcie O, przy czym $P_{BCO} = 3 \cdot P_{ABO}$, $|AB| = 2$. Wysokość trapezu jest równa 4. Wyznacz P_{ABO}, $|CD|$ oraz wysokość h_o trójkąta CDO opuszczoną na podstawę CD. **Wsk.** w trójkątach ABO i CBO podstawy AO i CO leżą na jednej prostej, a wierzchołek B jest wspólny dla obu trójkątów. Podobnie rzecz się ma w trójkątach AOD i OCD.

48. Na rysunku obok $k \parallel l$. Wyznacz pole czworokąta $BHEG$ wiedząc, że $P_{AGD} = 7$, zaś $P_{CFH} = 9$.

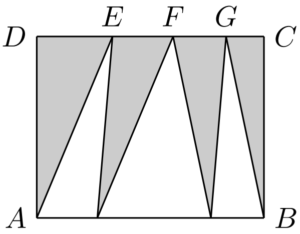


49. Pole prostokąta jest równe polu pewnego kwadratu. Długość jednego z boków prostokąta jest o 20 większa od długości boku tego kwadratu, zaś długość drugiego boku prostokąta jest o 10 mniejsza od długości boku kwadratu. Wyznacz długość x boku kwadratu.

50. Kwadrat i trójkąt mają takie samo pole. Bok kwadratu i podstawa trójkąta mają taką samą długość. Wysokość trójkąta opuszczona na tę podstawę jest równa 12. Wyznacz pole trójkąta.

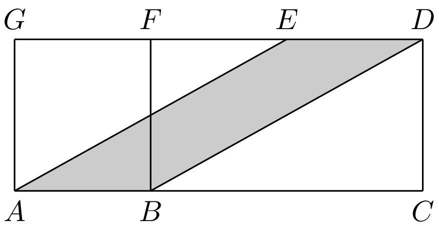
51. Uzasadnij, że jeżeli z punktu położonego wewnątrz trójkąta równobocznego poprowadzimy odcinki prostopadłe do boków trójkąta, to suma długości tych odcinków jest równa wysokości trójkąta równobocznego.

! $\Rightarrow$

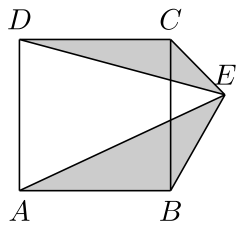


52. Uzasadnij, że pole zacieniowanego obszaru prostokąta $ABCD$ równe jest połowie pola prostokąta.

53. Uzasadnij, że w trójkącie równoramiennym wysokości wychodzące z wierzchołków przy podstawie mają równą długość.



54. Pole równoległoboku $ABDE$ jest 3 razy mniejsze od pola prostokąta $ACDG$. Pole kwadratu $ABFG$ równe jest 16. Wyznacz $|AC|$.



55*. Punkt E leży na zewnątrz kwadratu $ABCD$. Długość boku kwadratu jest równa a. Oblicz pole zacieniowanego obszaru.

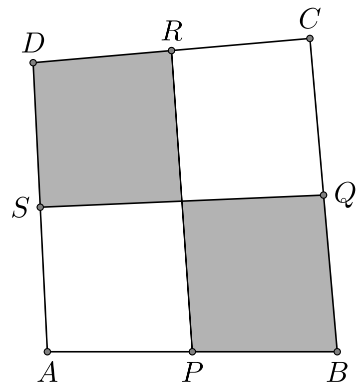
56*. Pole kwadratu $ABCD$ jest równe c. Punkt O leży wewnątrz kwadratu, a przy tym $P_{ABO} = a$, $P_{BCO} = b$. Wyznacz: a) P_{CDO}, b) pole P prostokąta, w którym BO jest przekątną, a pozostałe dwa wierzchołki leżą na bokach AB i BC kwadratu $ABCD$.

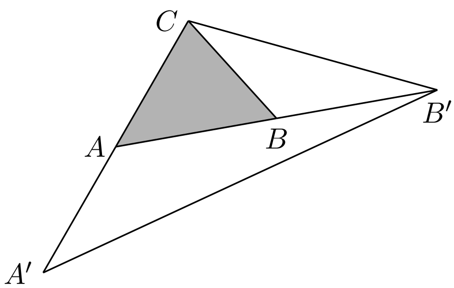
57*. W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku C jest prosty, $|BC| = 15$, $|AC| = 20$, $|AB| = 25$. Punkt D leży na boku AB i jest tak samo oddalony od prostej AC jak od prostej BC. Wyznacz tę odległość d.

58*. W trapezie $ABCD$ o podstawach AB i CD: $|AB| = a$, $|CD| = b$, wysokość ma długość h. Punkt E leży wewnątrz trapezu. Wyznacz odległość d punktu E od podstawy AB tak, aby $P_{ABE} + P_{CDE} = P_{BCE} + P_{ADE}$.

59. W trójkącie prostokątnym ABC kąt C jest prosty, $|AC| = 6$, $|BC| = 8$. Dwusieczna kąta prostego przecina bok AB w punkcie D. Wyznacz P_{ADC} i P_{DCB}.

60. Na rysunku obok punkty P,Q,R,S są środkami boków czworokąta $ABCD$. Uzasadnij, że zacieniowane pole jest połową pola czworokąta $ABCD$.





61. Trójkąt ABC na rysunku obok ma pole równe 7. Odcinek AB' jest dwukrotnie dłuższy od odcinka AB, zaś odcinek CA' jest dwukrotnie dłuższy od odcinka CA. Wyznacz pole trójkąta $AB'C$ oraz trójkąta $A'B'C$.

Wskazówki i odpowiedzi.

1. $P = 20$

2. $P = 83\frac{1}{2}$

3. $P = 42$

4. $P = 92$

5. $h = 4$

6. $P_{ACD} = 20$

7. $P_{DEC} = 21$

8. $P_{CDO} = 26$

9. w trójkącie CDE $h = 5\frac{2}{3}$, w trójkącie DAE $h = 6\frac{1}{3}$

10. $P_{ABX} + P_{CDX} = \frac{1}{2}ab$

11. $P_{ABXD} = 18\frac{1}{2}$, $P_{BDX} = 13$, $P_{BEX} = 18$, $P_{ECFX} = 14$, $P_{BFX} = 23$

12. 6 i 8

13. 21 i 9

14. 6 i 12

15. $|BD| = 3$

16. $P_{BCO} = 7\frac{1}{2}$, $h = 2\frac{2}{5}$

17. $P_{ABE} = 3\frac{1}{3}$

18. $P_{RST} = 10\frac{1}{2}$

19. $h_c = 8\frac{8}{9}$

20. $P_{BCE} = 4\frac{4}{5}$, $P_{ABE} = 3\frac{1}{5}$

21. $\frac{AE}{EC} = \frac{6}{7}$, $P_{CDE} = 5\frac{5}{6}$

22. $\frac{AB}{DE} = \frac{2}{7}$, $P_{ABF} = \frac{12}{7}$

23. $P_{BLF} = 1\frac{5}{7}$, $DN = 5\frac{1}{4}$, $h_f = 1\frac{1}{7}$

24. $3\frac{3}{5}$

25. a) $x = 4, y = 9\frac{1}{3}$, b) $x = 4, y = 3$, c) $x = 2, y = 5$

26. $x = 6$, $y = 9$

27. $P_{ABEF} = 16$

28. $x = 5$

29. $P_{ABEF} = 100$

30. $b = 6$, $c = 18$, $h = 9$

31. $P_{ABC} = 500\,\mathrm{cm}^2$

32. **Wsk.** Wpierw zrób staranny rysunek, a następnie wyznacz kolejno P_{FECD}, P_{GBE}, itd.
odp. $P_{BCE} = 46$, $P_{AEC} = 17$

33. $P_{FGE} = 10$, $P_{BEF} = 34$, $P_{BCEG} = 34$, $P_{BDG} = 9$

34. $P_{BCE} = 45$

35. a) $|EB| = 1$, b) $P_{CEF} = 17$, c) $P_{FEC} = 20$, d) $P_{AFE} = 16\frac{2}{3}$, e) $|AE| = 3\frac{3}{11}$

36. $P_{PQRS} = 26$

37. $|AB| = 12$, $|CD| = 20$

38. $|CG| = 3$

39. $P_{ABCD} = 66$, $P_{BCE} = 23$

40. Odcinki równej długości czyli $\frac{h}{2}$

41. $h = 8$, $P_{ADE} = 29$

43. **wsk.**skorzystaj z odpowiedniego twierdzenia o polach trójkątów

44. $P_{ABO} = 90$

45. a) $P_{ABCD} = 30\frac{1}{12}$, b)$P_{ABCD} = 49$

46. $P_{ABC} = 15$, $h_c = 10$, $P_{CDO} = 48$, $h_o = 8$

47. $P_{ABO} = 1$, $CD = 6$, $h_o = 3$

48. $P_{BHEG} = 16$

49. $x = 20$

50. $P = 36$

51. **wsk.** zauważ, że ten punkt dzieli nasz trójkąt równoboczny na trzy trójkąty

54. $|AC| = 12$

55. $\frac{1}{2}a^2$

56. $P_{CDO} = \frac{1}{2}c - a$, $P = \frac{4ab}{c}$

57. $d = 8\frac{4}{7}$

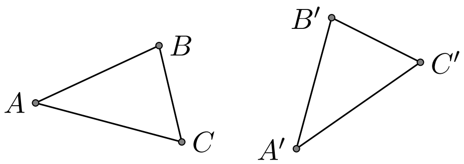
58. $d = \frac{1}{2}h$

59. $P_{ADC} = 10\frac{2}{7}$, $P_{BCD} = 13\frac{5}{7}$

61. $P_{AB'C} = 14$, $P_{A'B'C} = 28$

Rozdział 4

TRÓJKĄTY PRZYSTAJĄCE.



DEFINICJA Dwa trójkąty nazywamy przystającymi, jeżeli mają odpowiadające sobie boki i odpowiadające sobie kąty równe.

To, że trójkąt ABC przystaje do trójkąta $A'B'C'$ będziemy oznaczać $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

Zapis $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ oznacza, że

$$|AB| = |A'B'|,\ |BC| = |B'C'|,\ |AC| = |A'C'|,$$

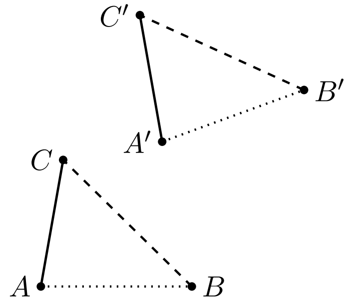
oraz

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C',\ \sphericalangle BCA = \sphericalangle B'C'A',\ \sphericalangle CAB = \sphericalangle C'A'B'.$$

Faktycznie, na to aby stwierdzić czy dwa dane trójkąty są przystające, nie potrzeba sprawdzać czy wszystkie odpowiadające sobie boki i kąty są równe. Rozstrzygają bowiem o tym tzw. *cechy przystawania trójkątów.*

Cecha **BBB** (bok, bok, bok)

Jeżeli w trójkątach ABC i $A'B'C'$ zachodzą równości:
$|AB| = |A'B'|$,
$|BC| = |B'C'|$,
$|AC| = |A'C'|$,
to te trójkąty są przystające, a dokładniej to $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.



Oznacza to, że dwa trójkąty przystają do siebie, jeżeli odpowiadające sobie boki mają równe długości.

PRZYKŁAD

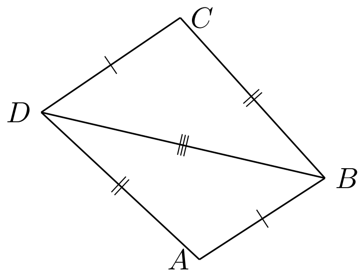
Dany jest czworokąt $ABCD$, w którym $|AB| = |CD|$ oraz $|AD| = |BC|$. Uzasadnij, że $\triangle ADB \equiv \triangle CBD$.

Uzasadnienie

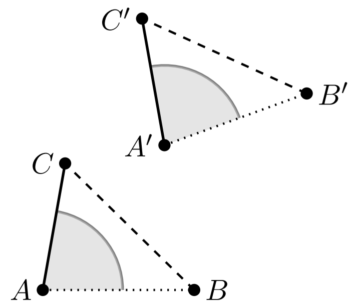
W trójkątach ABD i CDB z założenia mamy:

$|AB| = |CD|$,
$|AD| = |BC|$.

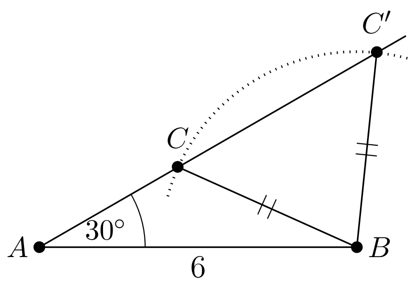
Odcinek BD jest wspólny dla obu trójkątów. Wobec tego na mocy cechy BBB przystawania trójkątów $\triangle ADB \equiv \triangle CBD$.
Podobnie uzasadniamy, że $\triangle ABC \equiv \triangle CDA$.



Cecha **BKB** (bok, kąt, bok):
Jeżeli dla trójkątów ABC i $A'B'C'$ zachodzą równości:
$|BA| = |B'A'|$,
$\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C'$,
$|AC| = |A'C'|$,
to $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.
Oznacza to, że jeżeli w jednym trójkącie długości dwóch boków i kąt **między nimi zawarty** są takie same jak długości dwóch boków i kąt **między nimi zawarty** w drugim trójkącie, to te trójkąty są przystające.



Natomiast sama równość dwóch boków i równość jakichkolwiek kątów w dwóch trójkątach nie oznacza, że te dwa trójkąty są przystające. Weźmy bowiem, na przykład, dwa trójkąty: ABC i ABC', w których $|BC| = |BC'|$, zaś AB jest wspólnym bokiem obu trójkątów (czyli te trójkąty mają po dwa boki równej długości), a przy tym $\sphericalangle CAB = \sphericalangle C'AB = 30°$, natomiast trójkąty te nie są przystające.



PRZYKŁAD

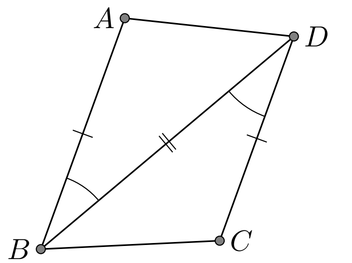
Przekątna BD podzieliła czworokąt $ABCD$ na dwa trójkąty, przy czym $|AB| = |CD|$ oraz $\sphericalangle ABD = \sphericalangle CDB$. Uzasadnij, że $\triangle ABD \equiv \triangle CDB$.

Uzasadnienie

W trójkątach ABD i CBD z założenia mamy:

$$|AB| = |CD|,$$
$$\sphericalangle ABD = \sphericalangle CDB.$$

Odcinek BD jest wspólny dla obu trójkątów. Wobec tego na mocy cechy BKB przystawania trójkątów $\triangle ABD \equiv \triangle CDB$.



Cecha **KBK** (kąt, bok, kąt):

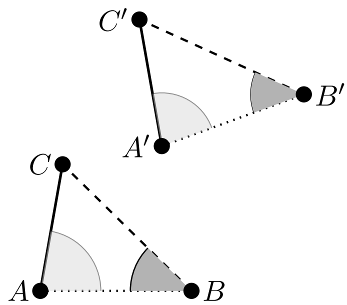
Jeżeli dla trójkątów ABC i $A'B'C'$ zachodzą równości

$|AB| = |A'B'|$,

$\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C'$,

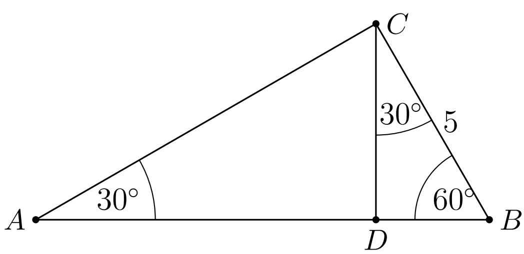
$\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C'$,

to te trójkąty są przystające.



Innymi słowy, jeżeli w jednym i drugim trójkącie dany jest bok o takiej samej długości i przyległe do tych boków kąty w obu trójkątach mają takie same miary, to te trójkąty są przystające.

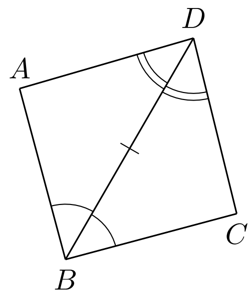
Natomiast sama równość dwóch kątów i równość jakichkolwiek boków w tych dwóch trójkątach nie oznacza, że te dwa trójkąty są przystające. Weźmy, na przykład, trójkąt prostokątny ABC, w którym $\sphericalangle CAB = 30°$, $\sphericalangle ACB = 90°$, $\sphericalangle ABC = 60°$, zaś $|BC| = 5$. Wysokość CD dzieli ten trójkąt na dwa trójkąty. Widać, że w trójkątach BCD i ABC są takie same kąty oraz, że jeden bok, a mianowicie BC, jest wspólny dla obu trójkątów. Trójkąty te jednak nie są przystające, bowiem kąty przy boku BC w obu trójkątach nie są takie same.



PRZYKŁAD

Odcinek BD podzielił czworokąt $ABCD$ na dwa trójkąty, przy czym $\sphericalangle ABD = \sphericalangle CBD$ oraz $\sphericalangle ADB = \sphericalangle CDB$. Pokaż, że $\triangle ABD \equiv \triangle CBD$.

Uzasadnienie



W trójkątach ABD i CDB z założenia mamy:

$\sphericalangle ADB = \sphericalangle CDB,$
$\sphericalangle ABD = \sphericalangle CBD.$

Odcinek BD jest wspólny dla obu trójkątów. Wobec tego, na mocy cechy KBK przystawania trójkątów, $\triangle ABD \equiv \triangle CBD$.

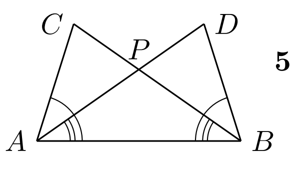
W poniższych zadaniach tam, gdzie nie ma rysunku sporządź rysunek. Uzasadnienia rób takim językiem jak w podanych powyżej przykładach. Większość uzasadnień jest na końcu rozdziału.

1. Przekątna BD podzieliła czworokąt $ABCD$ na dwa trójkąty, przy czym $\sphericalangle ADB = \sphericalangle CBD$ i $\sphericalangle ABD = \sphericalangle CDB$. Uzasadnij, że $\triangle ABD \equiv \triangle CDB$.

2. Odcinki AB i CD przecinają się w punkcie O, przy czym $|AO| = |OB|$ i $|CO| = |OD|$. Uzasadnij, że $\triangle DOB \equiv \triangle COA$ oraz, że $|AC| = |BD|$ oraz, że $|AD| = |BC|$.

3. Odcinek AC dzieli czworokąt $ABCD$ na trójkąty ABC i ADC przy czym $|AB| = |AD|$ oraz $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DAC$. Uzasadnij, że $|BC| = |DC|$.

4. W kwadracie $ABCD$ o boku długości a punkt E jest środkiem boku BC, punkt F jest środkiem boku CD. Uzasadnij, że $\triangle ADF \equiv \triangle ABE$.



5. Na rysunku obok $\sphericalangle DAB = \sphericalangle CBA$ i $\sphericalangle CAB = \sphericalangle DBA$. Uzasadnij, że $\triangle CAB \equiv \triangle DBA$.

6. Końce odcinka AB leżą na dwóch prostych równoległych. Przez środek O tego odcinka prowadzimy dowolny odcinek CD, którego końce leżą na tych samych równoległych, przy czym punkt C leży na tej prostej co punkt B. Udowodnij, że $|CO| = |OD|$.

$\boxed{! \Rightarrow}$ **7.** Uzasadnij, że w równoległoboku boki równoległe są równej długości.

$\boxed{!\ \Rightarrow}$ **8.** Uzasadnij, że punkt przecięcia przekątnych równoległoboku dzieli każdą z nich na połowy.

Wyniki ostatnich dwóch zadań oraz zadanie 20 z rozdziału 1 można krótko sformułować następująco:

W równoległoboku:

- kąty przeciwległe są równe,
- odcinki przeciwległe są równej długości,
- punkt przecięcia przekątnych dzieli każdą z nich na połowy.

9. Odcinki AB i CD przecinają się w punkcie O, przy czym $|AO| = |OB|$ i $|CO| = |OD|$. Uzasadnij, że $|AC| = |BD|$.

10. Odcinki AD i BC przecinają się w punkcie O, przy czym $|BO| = |CO|$ oraz $\sphericalangle ACO = \sphericalangle OBD$. Uzasadnij kolejno, że $\triangle DOB \equiv \triangle AOC$ i $\triangle BOA \equiv \triangle COD$.

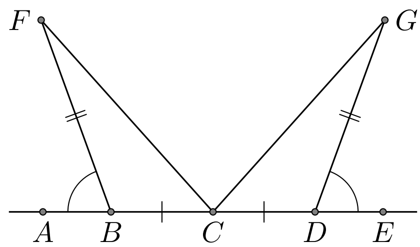
11. Dany jest trójkąt równoramienny ABC, w którym $|AC| = |BC|$. Z wierzchołka C odłożono na bokach CA i CB równej długości odcinki, odpowiednio: CA_1 i CB_1. Pokaż, że $\triangle CAB_1 \equiv \triangle CBA_1$.

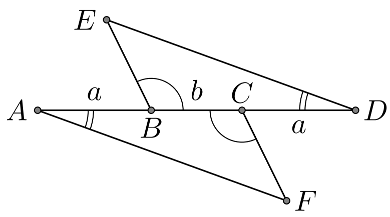
12. Na boku AB trójkąta ABC obrano punkt D, a na boku A_1B_1 trójkąta $A_1B_1C_1$ obrano punkt D_1. Wiadomo przy tym, że $\triangle ADC \equiv \triangle A_1D_1C_1$ i że $|DB| = |D_1B_1|$. Pokaż, że $\triangle ABC \equiv \triangle A_1B_1C_1$.

13. W kwadracie $ABCD$ punkty P, Q, R i S leżą na bokach AB, BC, CD i DA odpowiednio, w taki sposób, że $|AP| = |BQ| = |CR| = |DS|$. Wykaż, że czworokąt $PQRS$ jest kwadratem.

14. Przekątna BD podzieliła czworokąt $ABCD$ na dwa trójkąty, przy czym $\sphericalangle ADB = \sphericalangle CBD$ i $\sphericalangle ABD = \sphericalangle CDB$. Uzasadnij, że $\sphericalangle DCA = \sphericalangle BAC$.

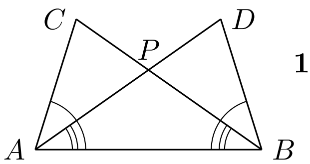
15. Punkty A, B, C, D, E leżą na jednej prostej tak jak na rysunku obok, zaś punkty F i G poza nią, przy czym $|BC| = |CD|$, $|BF| = |DG|$, $\sphericalangle ABF = \sphericalangle EDG$. Uzasadnij, że $\triangle BCF \equiv \triangle DCG$.





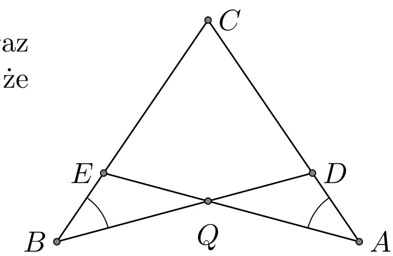
16. Punkty A, B, C, D leżą w tej właśnie kolejności na jednej prostej, przy czym $AB = CD$. Punkty E i F leżą po przeciwnych stronach tej prostej, przy czym $\sphericalangle EBD = \sphericalangle FCA$, $\sphericalangle FAC = \sphericalangle EDB$. Uzasadnij kolejno, że
a) $\triangle AFC \equiv \triangle DEB$,
b) $\triangle ABE \equiv \triangle DCF$.

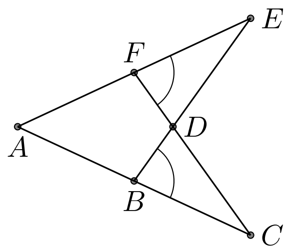
17. Punkty A, C, B, D leżą w tej właśnie kolejności na jednej prostej, przy czym $AB = CD$. Punkty E, F leżą po przeciwnych stronach tej prostej, przy czym $\sphericalangle EBD = \sphericalangle FCA$, $\sphericalangle FAC = \sphericalangle EDB$. Uzasadnij kolejno, że
a) $\triangle AFC \equiv \triangle DEB$, b) $\triangle ABE \equiv \triangle DCF$, c) $\triangle AED \equiv \triangle DFA$.



18. Na rysunku obok $\sphericalangle DAB = \sphericalangle CBA$ i $\sphericalangle CAB = \sphericalangle DBA$. Uzasadnij, że $\triangle APC \equiv \triangle BPD$.

19. Na rysunku obok $|BC| = |AC|$ oraz $\sphericalangle DBC = \sphericalangle EAC$. Uzasadnij kolejno, że
(a) $\triangle ACE \equiv \triangle BCD$,
(b) $\triangle BQE \equiv \triangle AQD$,
(c) $\triangle BAE \equiv \triangle ABD$.



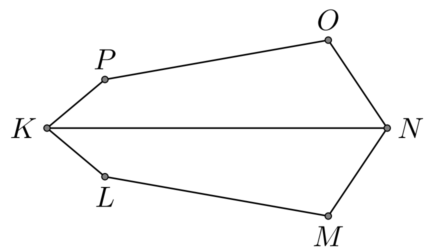


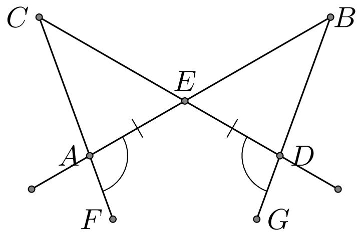
20. Na rysunku obok $|BD| = |DF|$ oraz $\sphericalangle CBD = \sphericalangle EFD$. Pokaż, że $|CF| = |BE|$.

21. Na rysunku obok $|AB| = |AF|$ oraz $|AC| = |AE|$. Pokaż, że $\sphericalangle ACF = \sphericalangle AEB$.

22. Odcinki AD i BC przecinają się w punkcie O, przy czym $|BO| = |CO|$ oraz $\sphericalangle ACO = \sphericalangle OBD$. Uzasadnij, że $\triangle ABC \equiv \triangle CDB$.

23. W sześciokącie $KLMNOP$ na rysunku obok $|KP| = |KL|$, $|PO| = |LM|$, $|ON| = |MN|$ oraz $\sphericalangle ONK = \sphericalangle MNK$. Pokaż, że $\sphericalangle KPO = \sphericalangle KLM$.





24. Odcinki AB i CD przecinają się w punkcie E, przy czym $|AE| = |ED|$ oraz $\sphericalangle EAF = \sphericalangle EDG$. Uzasadnij, że $\triangle ACE \equiv \triangle DBE$. Dorysuj następnie odcinek BC. Uzasadnij, że $\triangle ABC \equiv \triangle DCB$. A teraz dorysuj odcinek AD i uzasadnij, że uzyskałeś dwa kolejne trójkąty przystające.

25. W czworokącie $ABCD$ mamy $|AB| = |CD|$ i $|AD| = |BC|$. Uzasadnij, że czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem. **!** $\Leftarrow$

26. W czworokącie $ABCD$ mamy: $|AB| = |CD|$ i $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$. Uzasadnij, że $ABCD$ jest równoległobokiem. **!** $\Leftarrow$

27. Przekątne AC i BD czworokąta $ABCD$ przecinają się w punkcie O, który dzieli każdą z nich na połowy. Uzasadnij, że czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem. **!** $\Leftarrow$

Wyniki ostatnich trzech zadań i zadania 36 z rozdziału o kątach w trójkącie, można sformułować w postaci

TWIERDZENIE

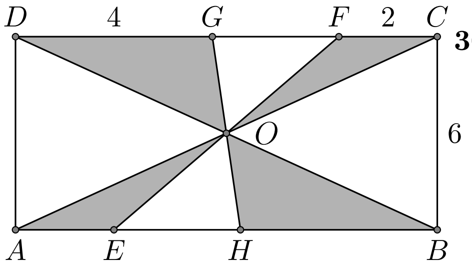
Jeżeli w czworokącie, spełniony jest jeden z warunków:

- obie pary odcinków przeciwległych są równej długości,
- obie pary przeciwległych kątów są równej miary
- jedna para przeciwległych boków jest równoległa i równej długości
- punkt przecięcia przekątnych dzieli każdą z nich na połowy,

to ten czworokąt jest równoległobokiem.

28. Trójkąty ABC i PQR są przystające, przy czym $\triangle ABC \equiv \triangle PQR$. Pokaż, że wysokość poprowadzona z wierzchołka C w trójkącie ABC jest równa wysokości poprowadzonej z wierzchołka R w trójkącie PQR. **!** $\Leftarrow$

29. W trójkącie prostokątnym ABC kąt C jest prosty, $|AB| = c$, $|BC| = a$, $|AC| = b$. Dwusieczne kątów ostrych przecinają się w punkcie D. Wyznacz odległość punktu D od boków tego trójkąta. Wsk. skorzystaj z odpowiedniego zadania o przystawaniu trójkątów.

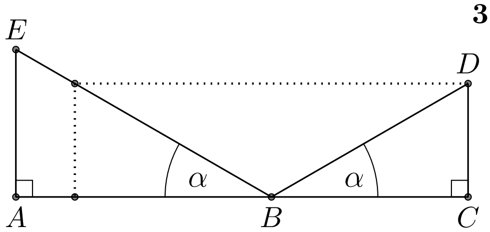


30. W prostokącie $ABCD$, na rysunku obok, poprowadzono przekątne AC i BD, które przecinają się w punkcie O. Przez punkt O poprowadzono odcinki EF i GH łączące przeciwległe boki prostokąta.

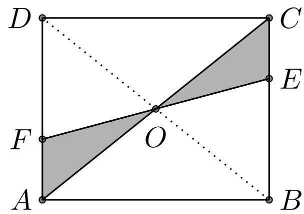
(a) Uzasadnij, że $\triangle OCF \equiv \triangle OAE$, $\triangle GOF \equiv \triangle HOE$.

(b) Uzasadnij, że wysokość trójkąta CFO opuszczona na prostą FC ma długość 4, wiedząc, że długość boku BC jest równa 8.

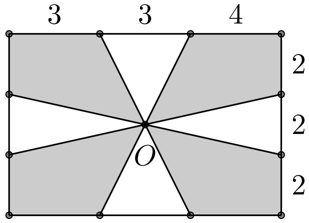
(c) Wyznacz pole zacieniowanego obszaru na podstawie podanych długości odcinków.



31. Punkty A, B, C na rysunku obok leżą na jednej prostej, przy czym $|AB| = 7$, $|AC| = 12$, $|CD| = 4$. Korzystając tylko z cech przystawania trójkątów oraz poznanych wzorów na pole trójkąta czy też trapezu wyznacz $|AE|$.



32. Przekątne prostokąta $ABCD$ na rysunku obok przecinają się w punkcie O. Uzasadnij, że $P_{ECO} = P_{FAO}$.



33. Wiedząc, że O jest punktem przecięcia przekątnych w prostokącie na rysunku obok korzystając z wyniku poprzedniego zadania, wyznacz pole P zacieniowanego obszaru.

34. W równoległoboku $ABCD$ poprowadzono przekątną AC. Wykaż, że $d(D, l_{AC}) = d(B, l_{AC})$.

DEFINICJA *Środkową* w trójkącie nazywamy odcinek łączący środek boku trójkąta z przeciwległym mu wierzchołkiem trójkąta.

35. Uzasadnij, że jeżeli w trójkącie ABC boki AC i BC są równej długości, to $\sphericalangle CAB = \sphericalangle CBA$. **wsk.** poprowadź środkową CD. **!** $\Leftarrow$

36. Uzasadnij, że jeżeli w trójkącie ABC kąty $\sphericalangle CAB$ i $\sphericalangle CBA$ są równe, to $|AC| = |BC|$. **wsk.** poprowadź dwusieczną kąta $\sphericalangle ACB$. **!** $\Leftarrow$

Ostatnie dwa zadania są treścią podstawowego twierdzenia geometrii o trójkącie równoramiennym. Historyczna nazwa tego twierdzenia brzmi: **Pons Asinorum** – po polsku **Ośli Most**. Mamy zatem

TWIERDZENIE **Pons Asinorum**

W trójkącie

(1) na przeciwko równych boków leżą równe kąty,

(2) na przeciwko równych kątów leżą równe boki.

W kolejnych zadaniach będziemy korzystać właśnie z tego twierdzenia.

DEFINICJA Trójkąt o wszystkich bokach równych nazywamy *trójkątem równobocznym.*

37. Uzasadnij, że w trójkącie równobocznym wszystkie kąty są równe.

38. Uzasadnij, że jeżeli w trójkącie wszystkie kąty są równe, to jest to trójkąt równoboczny.

39. Uzasadnij, że w trapezie równoramiennym, który nie jest równoległobokiem, kąty przy podstawie są równe. **!** $\Leftarrow$

40. Uzasadnij, że jeżeli w trapezie kąty przy podstawie są równe, to ten trapez jest równoramienny, a jego przekątne są równej długości. **!** $\Leftarrow$

41. W trójkącie ABC dwusieczna kąta A jest prostopadła do boku BC, zaś dwusieczna kąta B jest prostopadła do boku AC. Uzasadnij, że ten trójkąt ma wszystkie boki równej długości.

42. W trójkącie równobocznym ABC przedłużono bok AB o odcinek BB', bok BC o odcinek CC' i bok CA o odcinek AA', przy czym $|AA'| = |BB'| = |CC'| = 1$. Uzasadnij, że trójkąt $A'B'C'$ jest równoboczny.

43. W trójkącie ABC poprowadzono środkową AD. Pokaż, że wierzchołki B i C są jednakowo odległe od prostej AD. Rozpatrz trójkąt, w którym żadne dwa boki nie są równej długości. **Wsk.** co to jest odległość punktu od prostej?

$\boxed{! \Rightarrow}$ **44.** Uzasadnij, że jeżeli punkt leży na dwusiecznej kąta, to jest on tak samo odległy od obu ramion kąta.

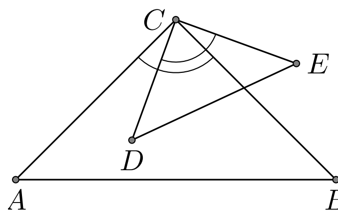
45. Uzasadnij, że jeżeli trójkąt jest równoramienny, to wysokości opuszczone na równe boki są równej długości. Rozpatrz zarówno trójkąt rozwartokątny jak i ostrokątny.

46. Uzasadnij, że jeżeli w trójkącie dwie wysokości są równej długości, to boki na które są one opuszczone są równej długości czyli ten trójkąt jest równoramienny.

47. Uzasadnij, że w trójkącie równoramiennym dwusieczne kątów przy podstawie są równej długości.

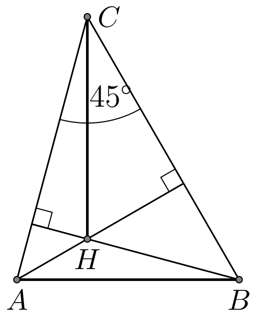
48. Uzasadnij, że w trójkącie równoramiennym środkowe wychodzące z wierzchołków przy podstawie są równej długości.

49. Dany jest kąt o wierzchołku O. Niech półprosta OS będzie jego dwusieczną. Prowadzimy prostą prostopadłą do tej dwusiecznej. Ta prosta przecina ramiona kąta w punktach A i B. Uzasadnij, że trójkąt AOB jest równoramienny.



50. (matura 2010) Trójkąty równoramienne ABC i DEC na rysunku obok mają wspólny wierzchołek C, a przy tym $\sphericalangle ACB = \sphericalangle DCE = 90°$. Uzasadnij, że $|AD| = BE|$.

Poniższe zadania są trudniejsze: wymagają pomysłu. Dobrze jest jednak zapoznać się z poniższym przykładem, a następnie rozwiązać kolejne dwa zadania opierając się na przygotowanych szkicach rozwiązań.

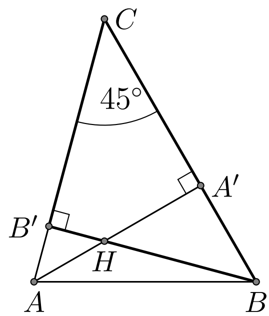


PRZYKŁAD

Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, przy czym $\sphericalangle ACB = 45°$. Wszystkie trzy wysokości trójkąta ABC przecinają się w punkcie H. Wykaż, że $|CH| = |AB|$.

Dowód:

Spodki wysokości oznaczmy przez A' i B' w sposób przedstawiony na rysunku obok. Zauważmy, że trójkąty $AA'C$ i $BB'C$ są trójkątami prostokątnymi równoramiennymi. Każdy z nich ma bowiem jeden kąt prosty oraz kąt przy wierzchołku C o mierze 45°.



Stąd otrzymujemy

w trójkącie $BB'C$	$\lvert B'C\rvert = \lvert B'B\rvert$
w trójkącie $AA'C$	$\sphericalangle CAA' = 45°$

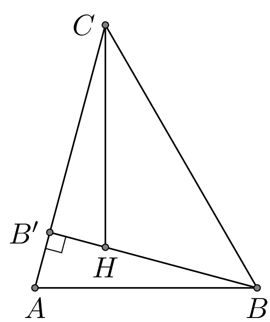
Zauważmy, że $\sphericalangle CAA' = \sphericalangle B'AH = 45°$.
Wobec tego trójkąt AHB' jest także trójkątem prostokątnym równoramiennym, dzięki czemu otrzymujemy $|B'A| = |B'H|$.

Wiedząc, że

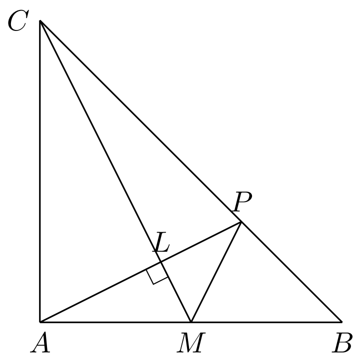
$$|B'C| = |B'B|$$

$$|B'A| = |B'H|$$

$$|\sphericalangle CB'H| = 90° = |\sphericalangle BB'A|$$



na mocy cechy BKB przystawania trójkątów mamy $\triangle CB'H \equiv \triangle BB'A$. Zatem $|CH| = |AB|$.



51. Dany jest trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle A = 90°$ oraz $|AB| = |AC|$. Punkt M jest środkiem boku AB. Prosta przechodząca przez punkt A i prostopadła do prostej CM przecina bok BC w punkcie P. Wykaż, że $\sphericalangle AMC = \sphericalangle BMP$.

Rozwiązanie.

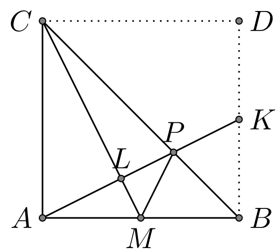
Założenie

Z treści zadania mamy: $\sphericalangle CAB = 90°$,

$$|AM| = |MB|,$$
$$\sphericalangle ALM = 90°.$$

Teza

Należy wykazać równość $\sphericalangle AMC = \sphericalangle BMP$



Dowód

Niech $\sphericalangle AMC = \alpha$. Wówczas

$\sphericalangle MCA =$ ....

$\sphericalangle CAL =$ ....

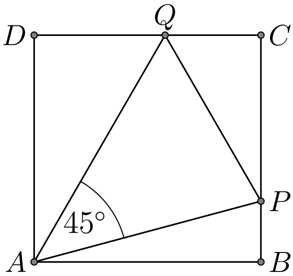
$\sphericalangle LAM =$ ....

Niech $ABDC$ będzie kwadratem. Prosta AP przecina bok BD w punkcie K.

Co można powiedzieć o trójkątach ABK i CAM?

Jakie równości wynikają z tego faktu?

Co można powiedzieć o trójkątach MBP i KBP? Jakie równości wynikają z tego faktu?



52. Punkty P i Q leżą odpowiednio na bokach BC i CD kwadratu $ABCD$, przy czym $\sphericalangle PAQ = 45°$. Wykaż, że $|BP| + |DQ| = |PQ|$.

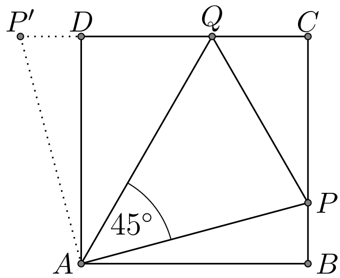
Rozwiązanie.

Założenie

Z treści zadania mamy:

$|\sphericalangle PAQ| = 45°$,

czworokąt $ABCD$ jest kwadratem.



Teza

Należy wykazać równość

$$|BP| + |DQ| = |PQ|$$

Dowód

Niech $\sphericalangle PAB = \alpha$. Wówczas $\sphericalangle QAD = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Na boku AD kwadratu $ABCD$ budujemy trójkąt ADP' przystający do trójkąta ABP. Ponieważ zaś

$\sphericalangle ADP' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\sphericalangle ADQ = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$

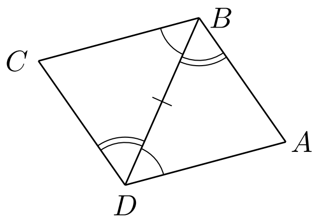
to punkty P', D i Q leżą na jednej prostej. Wtedy

$\sphericalangle DAP' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\sphericalangle QAP' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Co można powiedzieć o trójkątach PAQ i $P'AQ$? Jakie równości wynikają z tego faktu?

53*. Na bokach BC i CA trójkąta $\triangle ABC$ zbudowano po jego zewnętrznej stronie trójkąty równoboczne BCD i CAE. Wykaż, że $|AD| = |BE|$. **Wsk.** Wszystkie odcinki jednakowej długości zaznacz na rysunku tym samym kolorem. Postaraj się znaleźć parę trójkątów przystających.

PRZYKŁADOWE UZASADNIENIA

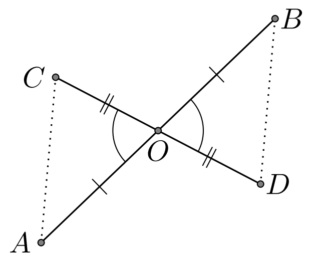


1. W trójkątach BDC i BDA z założenia mamy:

$$\sphericalangle ADB = \sphericalangle CBD,$$
$$\sphericalangle ABD = \sphericalangle CDB.$$

Odcinek BD jest wspólny dla obu trójkątów. Wobec tego na mocy cechy KBK przystawania trójkątów $\triangle ABD \equiv \triangle CDB$.

2. Rozważmy trójkąty AOC i BOD. Z założenia wiemy, że



$$|AO| = |BO|,$$
$$|CO| = |DO|.$$

Natomiast

$$\sphericalangle AOC = \sphericalangle BOD,$$

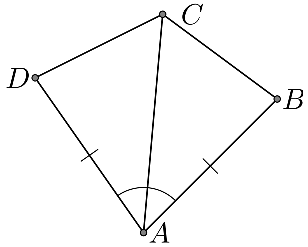
ponieważ są to kąty wierzchołkowe.
Wobec tego na mocy cechy BKB przystawania trójkątów $\triangle AOC \equiv \triangle BOD$.
Z tego zaś wynika, że $|AC| = |BD|$ jako długości odpowiadających sobie boków w trójkątach przystających.
Rozważmy teraz trójkąty COB i DOA, w których, z założenia,

$$|AO| = |BO|,$$
$$|CO| = |DO|,$$

zaś

$$\sphericalangle AOD = \sphericalangle BOC \text{ – bo to są kąty wierzchołkowe.}$$

Wobec tego na mocy cechy BKB przystawania trójkątów $\triangle AOD \equiv \triangle BOC$.
Z tego wynika natomiast, że $|AD| = |BC|$, jako długości odpowiadających sobie boków w trójkątach przystających.

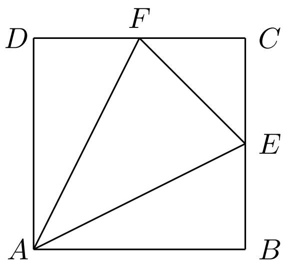


3. Rozważmy trójkąty ABC i ADC, w których z założenia

$$|AD| = |BC|,$$
$$\sphericalangle DAC = \sphericalangle BAC.$$

Odcinek AC jest wspólny dla obu trójkątów. Wobec tego na mocy cechy BKB przystawania trójkątów $\triangle DAC \equiv \triangle BAC$.

Z tego zaś wynika, że $|CD| = |CB|$ – jako długości odpowiadających sobie boków w trójkątach przystających.



4. W trójkątach ADF i ABE

$$|AD| = |AB|,$$

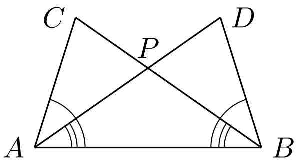
bowiem są to długości boków kwadratu.

$$|DF| = |BE|,$$

bowiem są to połowy długości boków kwadratu,

$$\sphericalangle ADF = \sphericalangle ABE,$$

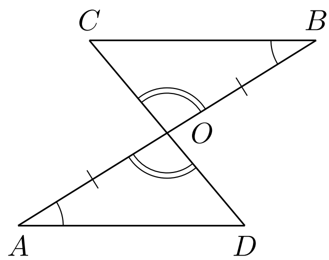
bo to są kąty w kwadracie.
Zatem na mocy cechy BKB przystawania trójkątów $\triangle ADF \equiv \triangle ABE$.



5. AB jest wspólny bokiem trójkątów ABC i ABD. W trójkątach tych, z założenia,

$$\sphericalangle CAB = \sphericalangle DBA,$$
$$\sphericalangle CBA = \sphericalangle DAB.$$

Wobec tego na mocy cechy KBK przystawania trójkątów $\triangle CAB \equiv \triangle DBA$.



6. W trójkątach DAO i CBO z założenia

$$|AO| = |BO|.$$

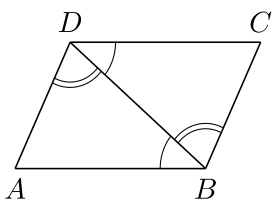
Wiemy również, że

$$\sphericalangle CBO = \sphericalangle DAO,$$

bo są to kąty naprzemianległe.

$$\sphericalangle COB = \sphericalangle DOA,$$

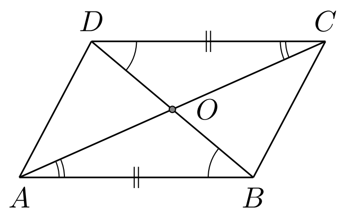
bo są to kąty wierzchołkowe.
Zatem na mocy cechy KBK przystawania trójkątów $\triangle COB \equiv \triangle DOA$.
Z tego wynika, że $|CO| = |OD|$, bo są to długości odpowiadających sobie boków w trójkątach przystających.



7. Rozważmy dowolny równoległobok i poprowadźmy w nim jedną z przekątnych np. BD. Wówczas

$$\sphericalangle CDB = \sphericalangle ABD, \quad \sphericalangle ADB = \sphericalangle CBD,$$

bowiem są to kąty naprzemianległe.
Odcinek BD jest wspólny dla trójkątów ABD i CDB.
Zatem na mocy cechy KBK przystawania trójkątów $\triangle ABD \equiv \triangle CDB$.
Z tego wynika, że $|AD| = |CB|$ oraz $|AB| = |CD|$ jako długości odpowiadających sobie boków w trójkątach przystających.



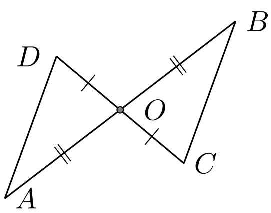
8. Rozważmy dowolny równoległobok $ABCD$, w którym przekątne AC i BD przecinają się w punkcie O.
W trójkątach ABO i CDO mamy

$$|AB| = |CD|,$$

bo są to równoległe boki równoległoboku.
Dodatkowo

$$\sphericalangle DCO = \sphericalangle BAO,\ \sphericalangle CDO = \sphericalangle ABO,$$

bowiem są to kąty naprzemianległe.
Zatem na mocy cechy KBK przystawania trójkątów $\triangle ABO \equiv \triangle CDO$.
Z tego wynika, że $|AO| = |CO|$ i $|BO| = |DO|$ jako długości odpowiadających sobie boków w trójkątach przystających.



9. W trójkątach AOC i DOB z założenia mamy

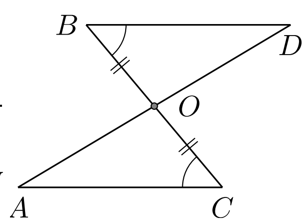
$$|AO| = |BO| \text{ i } |CO| = |DO|.$$

Następnie

$$\sphericalangle AOC = \sphericalangle BOD,$$

bowiem są to kąty wierzchołkowe.

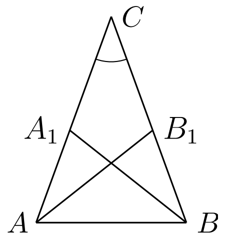
Zatem na mocy cechy BKB przystawania trójkątów $\triangle AOC \equiv \triangle BOD$.
Z tego wynika natomiast, że $|AC| = |DB|$ – jako długości odpowiadających sobie boków w trójkątach przystających.



10. W trójkątach DOB i AOC z założenia mamy

$$|BO| = |CO| \quad \text{i} \quad \sphericalangle DBO = \sphericalangle ACO.$$

Z kolei $\sphericalangle BOD = \sphericalangle COA$, bowiem są to kąty wierzchołkowe.
Zatem na mocy cechy KBK przystawania trójkątów $\triangle DOB \equiv \triangle AOC$.
Z tego wynika, że $|AO| = |OD|$ – jako długości odpowiadających sobie boków w trójkątach przystających.
$\sphericalangle AOB = \sphericalangle COD$ – jako kąty wierzchołkowe.
Więc na mocy cechy BKB przystawania trójkątów $\triangle BOA \equiv \triangle COD$.



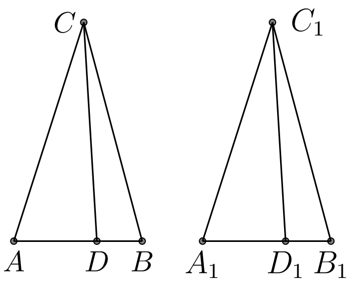
11. W trójkątach CBA_1 i CAB_1 mamy

$$|CB| = |CA|,$$

bo to są ramiona trójkąta równoramiennego ABC.
Z założenia wiemy, że

$$|CA_1| = |CB_1|.$$

Kąt $\sphericalangle A_1CB_1$ jest wspólny dla obu trójkątów.
Zatem na mocy cechy BKB przystawania trójkątów $\triangle CAB_1 \equiv \triangle CBA_1$.



12. Ponieważ $\triangle ACD \equiv \triangle A_1C_1D_1$, więc $|AC| = |A_1C_1|$ oraz $|AD| = |A_1D_1|$, bo są to długości odpowiadających sobie boków w trójkątach przystających. $\sphericalangle CAD = \sphericalangle C_1A_1D_1$, bo są to odpowiadające sobie kąty w trójkątach przystających.

Ponieważ z założenia $|DB| = |D_1B_1|$, więc $|AD| + |DB| = |A_1D_1| + |D_1B_1|$ czyli $|AB| = |A_1B_1|$.
Zatem na mocy cechy BKB przystawania trójkątów $\triangle CAB \equiv \triangle C_1A_1B_1$.

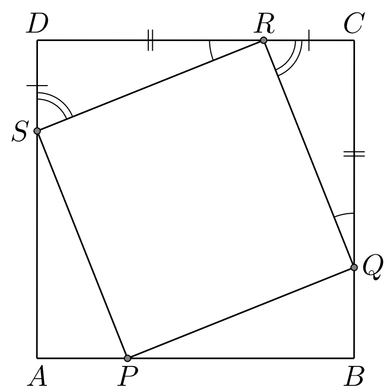
13. Ponieważ $ABCD$ jest kwadratem, więc wszystkie jego boki są równej długości, a kąty są proste. Zatem z tego, że

$$|QB| = |RC|$$

wynika, że

$$|DR| = |CQ|.$$

Z założenia $|SD| = |RC|$, wobec tego na mocy cechy BKB przystawania trójkątów $\triangle SDR \equiv \triangle RCQ$.



Z tego wynika, że

$|SR| = |RQ|$ – jako długości odpowiadających sobie boków w trójkątach przystających. (podobnie można uzasadnić, że wszystkie boki w czworokącie $PQRS$ są równej długości.)
Z tego, że $\triangle SDR \equiv \triangle RCQ$ wynika również, że

$\sphericalangle DSR = \sphericalangle CRQ$ oraz $\sphericalangle DRS = \sphericalangle CQR$ – jako odpowiadające sobie kąty w trójkątach przystających.
Ponieważ,

$$\sphericalangle DRS + \sphericalangle DSR = 90^\circ$$

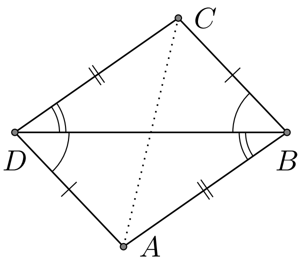
więc

$$\sphericalangle DRS + \sphericalangle CRQ = \sphericalangle DRS + \sphericalangle DSR = 90^\circ$$

Z tego wynika, że

$$\sphericalangle SRQ = 180^\circ - 90 = 90^\circ$$

Podobnie można wykazać, że wszystkie kąty w czworokącie $PQRS$ są proste. Z tego wynika, że $PQRS$ jest kwadratem.



14. W trójkątach CDB i ABD z założenia

$$\sphericalangle CDB = \sphericalangle ABD,$$
$$\sphericalangle CBD = \sphericalangle ADB,$$

zaś bok BD jest wspólny dla obu trójkątów. Zatem na mocy cechy KBK przystawania trójkątów $\triangle ADB \equiv \triangle CBD$.

Z tego wynika, że $|DC| = |AB|$ oraz $|AD| = |BC|$

jako długości odpowiadających sobie boków w trójkątach przystających.

Z tego wynika, że $\sphericalangle CDA = \sphericalangle ABC$,

bowiem każdy z tych kątów jest sumą dwóch takich samych kątów.
Zatem na mocy cechy BKB przystawania trójkątów $\triangle ACD \equiv \triangle CAB$.

Z tego wynika, że $\sphericalangle DCA = \sphericalangle BAC$,

bowiem są to odpowiadające sobie kąty w trójkątach przystających.

15. Z założenia $|BC| = |CD|$, $|BF| = |DG|$ oraz $\sphericalangle ABF = \sphericalangle EDG$. Zauważmy, że

$$\sphericalangle CBF = 180^\circ - \sphericalangle ABF,$$

bo $\sphericalangle CBF$ i $\sphericalangle ABF$ są dopełniające. Podobnie

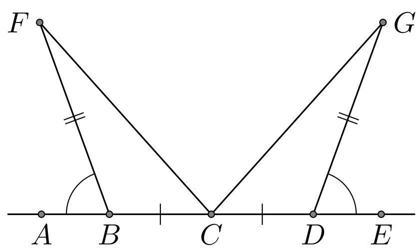
$$\sphericalangle CDG = 180^\circ - \sphericalangle EDG,$$

bo $\sphericalangle CDG$ i $\sphericalangle EDG$ są dopełniające. Ponieważ z założenia

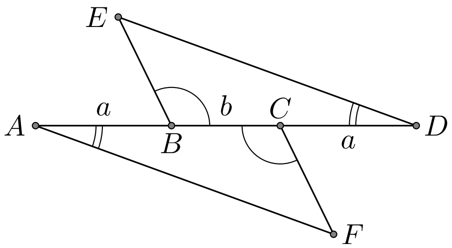
$$\sphericalangle ABF = \sphericalangle EDG$$

wobec tego

$$\sphericalangle CBF = \sphericalangle CDG.$$



Zatem na mocy cechy BKB przystawania trójkątów $\triangle BCF \equiv \triangle DCG$.



16. Oznaczmy

$$|AB| = |CD| = a,$$
$$|BC| = b.$$

Z tego wynika, że

$$|AC| = a + b = |BD|.$$

Wobec tego w trójkątach AFC i DEB

$$|AC| = |BD| = a + b.$$

Z założenia wiemy, że

$$\sphericalangle EBD = \sphericalangle FCA \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle FAC = \sphericalangle EDB.$$

Więc na mocy cechy KBK przystawania trójkątów

$$\triangle AFC \equiv \triangle DEB.$$

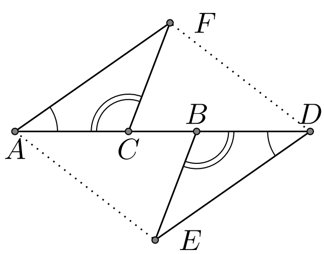
Z tego wynika, że

$$|BE| = |CF|$$

jako długości odpowiadających sobie boków w trójkątach przystających oraz, że

$$\sphericalangle ABE = \sphericalangle DCF,$$

jako dopełnienia do $180°$ dwóch równych kątów. Ponieważ $|AB| = |CD|$, więc na mocy cechy BKB przystawania trójkątów $\triangle ABE \equiv \triangle DCF$.



17. a) Ponieważ $|AB| = |CD|$, zaś odcinek BC jest częścią wspólną odcinków AB i BC, wobec tego $|AC| = |BD|$.
W trójkątach FAC i EDB z założenia

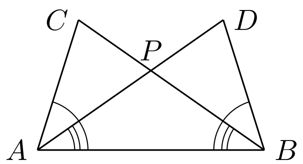
$$\sphericalangle FAC = \sphericalangle EDB,$$
$$\sphericalangle ACF = \sphericalangle DBE.$$

Wobec tego, na mocy cechy KBK przystawania trójkątów $\triangle ACF \equiv \triangle DBE$.

b) W trójkątach FCD i EBA, z założenia, $|AB| = |CD|$.
$|FC| = |BE|$, bowiem są to długości odpowiadających sobie boków w trójkątach przystających (ACF i EBD).
$\sphericalangle FCD = \sphericalangle EBA$, bowiem są to kąty dopełniające do $180°$ kątów EBD i FCA, które z założenia są równe.
Wobec tego na mocy cechy BKB przystawania trójkątów $\triangle ABE \equiv \triangle DCF$.

c) W trójkątach ADF i ADE mamy

$|AF| = |ED|$ i $|AE| = |FD|$ – jako długości odpowiadających sobie boków w trójkątach przystających.
Odcinek AD jest wspólnym bokiem obu trójkątów. Wobec tego na mocy cechy BBB przystawania trójkątów $\triangle AED \equiv \triangle DAF$.



18. Ponieważ odcinek AB jest wspólnym bokiem trójkątów ABC i ABD, zaś z założenia

$$\sphericalangle CAB = \sphericalangle DBA \text{ i } \sphericalangle DAB = \sphericalangle CBA$$

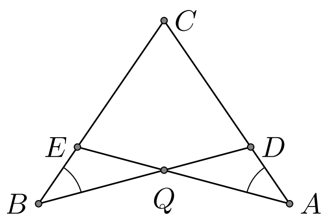
wobec tego na mocy cechy KBK przystawania trójkątów $\triangle CAB \equiv \triangle DBA$.

Z tego wynika, że

$\sphericalangle ACB = \sphericalangle BDA$ – jako odpowiadające sobie kąty w trójkątach przystających.

$|AC| = |BD|$ – jako długości odpowiadających sobie boków w trójkątach przystających.

$\sphericalangle DBP = \sphericalangle CAP$ – jako różnice takich samych kątów.
Zatem na mocy cechy KBK przystawania trójkątów $\triangle DBP \equiv \triangle CAP$.



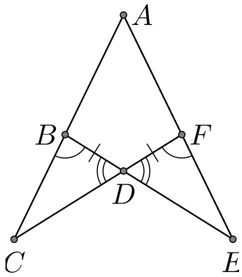
19. a) W trójkątach ACE i BCD, z założenia,

$$|AC| = |BC|, \quad \sphericalangle EAC = \sphericalangle DBC,$$

zaś kąt ECD jest wspólny dla obu tych trójkątów. Wobec tego na mocy cechy KBK przystawania trójkątów $\triangle ACE \equiv \triangle BCD$.

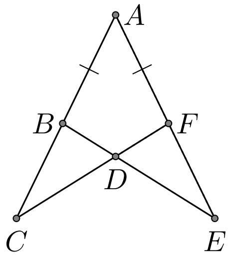
b) Z tego, że $\triangle ACE \equiv \triangle BCD$ wynika, że $|CE| = |CD|$ jako długości odpowiadających sobie boków w trójkątach przystających. Ponieważ z założenia $|BC| = |AC|$, wobec tego $|EB| = |DA|$. W trójkątach BEQ i ADQ z założenia $\sphericalangle EBQ = \sphericalangle DAQ$, $\sphericalangle EQB = \sphericalangle DQA$ jako kąty wierzchołkowe, wobec tego $\sphericalangle BEQ = \sphericalangle ADQ$. Zatem na mocy cechy KBK przystawania trójkątów $\triangle BQE \equiv \triangle AQD$.

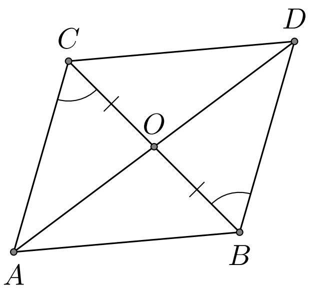
c) W trójkątach BAE i BAD mamy: $|BE| = |DA|$ jako długości odpowiadających sobie boków w trójkątach BQE i ADE. Podobnie $|AE| = |BD|$ jako długości odpowiadających sobie boków w trójkątach CEA i BCD. Bok AB jest wspólny dla obu trójkątów. Wobec tego na mocy cechy BBB przystawania trójkątów $\triangle ABE \equiv \triangle BAD$.



20. Ponieważ $\sphericalangle BDC = \sphericalangle FDE$, więc na mocy cechy KBK przystawania trójkątów $\triangle CBD \equiv \triangle EFD$. Z tego wynika, że $|CD| = |DE|$ jako długości odpowiadających sobie boków w trójkątach przystających, a ponieważ z założenia $|DF| = |DB|$, więc $|CF| = |BE|$ jako sumy odcinków równej długości.

21. Kąt $\sphericalangle BAF$ jest wspólny dla trójkątów CAF i EAB, a ponieważ z założenia $|AC| = |AE|$ oraz $|AB| = |AF|$ wobec tego, na mocy cechy BKB przystawania trójkątów $\triangle CAF \equiv \triangle EAB$. Z tego wynika, że $\sphericalangle ACF = \sphericalangle AEB$ jako odpowiadające sobie kąty w trójkątach przystających.



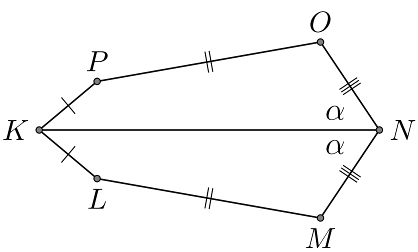


22. Z założenia wiemy, że

$$\sphericalangle ACO = \sphericalangle DBO, \quad |OC| = |OB|.$$

Natomiast $\sphericalangle COA = \sphericalangle BOD$, bo to są kąty wierzchołkowe.
Zatem na mocy cechy KBK przystawania trójkątów $\triangle ACO \equiv \triangle DBO$.
Z tego wynika, że $|AC| = |BD|$ jako długości odpowiadających sobie boków w trójkątach przystających.

Ponieważ bok BC jest wspólny dla trójkątów ACB i DBC, wobec tego na mocy cechy BKB przystawania trójkątów $\triangle ACB \equiv \triangle DBC$.

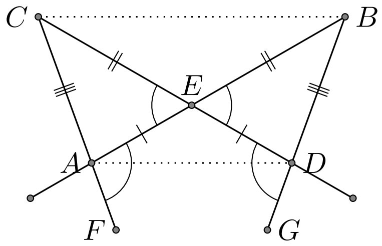


23. Wpierw uzasadnimy, że trójkąty KNO i KMN są przystające.
Z założenia

$$|MN| = |ON|, \sphericalangle KNM = \sphericalangle KNO.$$

Bok KN jest wspólny dla obu trójkątów, wobec tego na mocy cechy BKB przystawania trójkątów $\triangle ONK \equiv \triangle MNK$.

Z tego wynika, że $|OK| = |MK|$ jako długości odpowiadających sobie boków w trójkątach przystających.
A ponieważ z założenia $|KP| = |KL|$ oraz $|PO| = |LM|$, wobec tego na mocy cechy BBB przystawania trójkątów $\triangle KPO \equiv \triangle KLM$. Z tego wynika, że $\sphericalangle KPO = \sphericalangle KLM$ jako odpowiadające sobie kąty w trójkątach przystających.



24. Ponieważ $\sphericalangle FAE = \sphericalangle GDE$

więc $\sphericalangle CAE = \sphericalangle BDE$ jako kąty dopełniające.

$\sphericalangle CEA = \sphericalangle BED$ jako kąty wierzchołkowe

$|AE| = |ED|$ – z założenia.

Wobec tego na mocy cechy KBK przystawania trójkątów

$\triangle AEC \equiv \triangle DEB.$

Z tego wynika, że

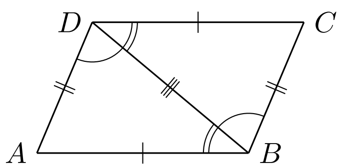
$|AC| = |DB|, |CE| = |BE|$ – jako długości odpowiadających sobie boków w trójkątach przystających.

Wobec tego

$|AE| + |EB| = |DE| + |EC|.$

Ponieważ BC jest wspólnym bokiem trójkątów ACB i DCB, wobec tego na mocy cechy BBB przystawania trójkątów $\triangle ABC \equiv \triangle DCB$.
Podobnie uzasadniamy, że na mocy cechy BBB $\triangle ACD \equiv \triangle DBA$, bowiem bok AD jest wspólnym bokiem obu trójkątów.

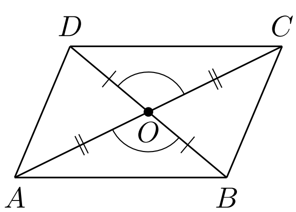
25. Niech w czworokącie $ABCD$ na rysunku obok, $|AB| = |CD|$ i $|BC| = |AD|$. Ponieważ odcinek BD jest wspólny dla trójkątów ABD i CDB, wobec tego na mocy cechy BBB przystawania trójkątów $\triangle ABD \equiv \triangle CDB$.



Z tego wynika, że

$\sphericalangle CBD = \sphericalangle ADB$ oraz $\sphericalangle CDB = \sphericalangle ABD.$

Wobec tego na mocy twierdzenia o dwóch prostych przeciętych trzecią prostą $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ oraz $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$.



27. Niech w czworokącie $ABCD$ na rysunku obok, przekątne przecinają się w punkcie O, przy czym

$|AO| = |OC|$ i $|BO| = |OD|$.

$\sphericalangle AOB = \sphericalangle COD$, bo to są kąty wierzchołkowe

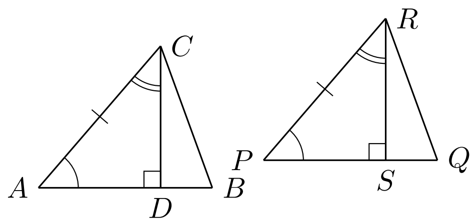
Wobec tego na mocy cechy BKB przystawania trójkątów $\triangle AOB \equiv \triangle COD$.

Z tego wynika, że $\sphericalangle ABO = \sphericalangle CDO$ jako odpowiadające sobie kąty w trójkątach przystających. Zatem na mocy twierdzenia o równoległości prostych $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$. Podobnie dowodzimy równoległości boków AB i CD.

28. Rozpatrzmy trójkąty przystające ABC i PQR tak jak na rysunku obok. Mamy wówczas

$\sphericalangle CAD = \sphericalangle RPS$

jako odpowiadające sobie kąty w trójkątach przystających.



Ponieważ CD i RS są wysokościami w trójkącie, wobec tego

$\sphericalangle CDA = 90^\circ = \sphericalangle RSP.$

Z tego wynika, że trzecie kąty $\sphericalangle ACD$ i $\sphericalangle PRS$ w tych trójkątach są równe. Zatem na mocy cechy KBK przystawania trójkątów $\triangle ACD \equiv \triangle PRS$.
Z tego wynika, że $|CD| = |RS|$ jako długości odpowiadających sobie boków w trójkątach przystających.
W podobny sposób rozważ przypadek gdy wysokość wychodzi z wierzchołka kąta ostrego w trójkącie rozwartokątnym.

29. $d = \frac{ab}{a+b+c}$

30. $P = 18$,

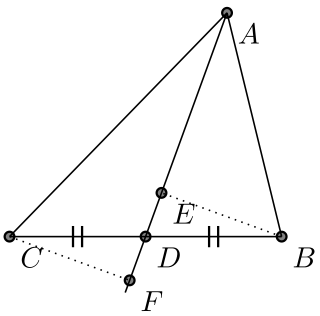
31. **wsk.** Przez punkt D poprowadź prostą równoległą do AC, która przecina odcinek BE w punkcie F. Następnie przez punkt F poprowadź prostopadłą do AC, która przecina AC w punkcie G. Teraz uzasadnij, że $\triangle FGB \equiv \triangle DCB$ i następnie wyznacz na dwa sposoby pole trapezu $AEFG$. $AE = 5\frac{3}{5}$

33. $P = 41$

34. **Wsk:** co to jest odległość punktu od prostej?

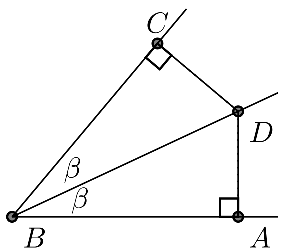
39. **wsk.** Poprowadź przez wierzchołek przy krótszej podstawie prostą równoległą do ramienia trapezu.

40. **wsk.** Poprowadź przez wierzchołek przy krótszej podstawie prostą równoległą do ramienia trapezu.



43. W trójkącie ABC punkt D jest środkiem boku BC, co oznacza, że $|CD| = |DB|$.
Poprowadźmy odcinki BE i CF prostopadłe do prostej AD. Ich długości to są właśnie odległości tych punktów od prostej AD. Punkty E i F leżą na tej prostej.
Rozważmy trójkąty CFD i BED. W trójkątach tych $\sphericalangle CDF = \sphericalangle BDE$, bo to są kąty wierzchołkowe.
Kąty $\sphericalangle CFD$ i $\sphericalangle BED$ są proste, bo tak poprowadziliśmy odcinki CF i BE. Wobec tego kąty $\sphericalangle FCD$ i $\sphericalangle EBD$ są równe.
Zatem na mocy cechy KBK przystawania trójkątów $\triangle CFD \equiv \triangle BED$.
Wobec tego $|CF| = |BE|$ jako długości odpowiadających sobie odcinków w trójkątach przystających.

44. Weźmy dowolny kąt o wierzchołku A i na dwusiecznej tego kąta obierzmy dowolny punkt D. Niech A będzie rzutem prostopadłym tego punktu na jedno ramię kąta, a C na drugie ramię. Wobec tego w trójkątach ABD i CBD mamy:



$\sphericalangle ABD = \sphericalangle CBD$ – bo BD jest dwusieczną kąta,
$\sphericalangle BAD = \sphericalangle BCD = 90°$, bo A i C są rzutami prostopadłymi punktu D na ramiona kąta.
Wobec tego $\sphericalangle CDB = \sphericalangle ADB$. Ponieważ odcinek BD jest wspólny dla trójkątów BAD i CBD, wobec tego na mocy cechy KBK przystawania trójkątów $\triangle BAD \equiv \triangle BCD$.
A z tego wynika, że $|CF| = |BE|$, bo są to długości odpowiadających sobie boków w trójkątach przystających.

45. Podpowiedź: narysuj trójkąt równoramienny ABC, w którym kąt przy wierzchołku C jest rozwarty. Następnie poprowadź wysokości AD i BE i uzasadnij, że trójkąty ACD i BCE są przystające. Podobnie postępuj w przypadku, gdy kąt przy wierzchołku C jest ostry.

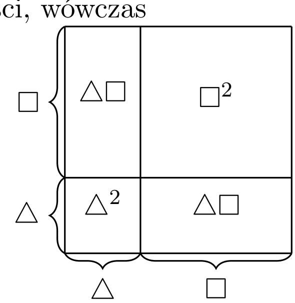
Rozdział 5

WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE.

5.1 Wzory skróconego mnożenia

Pewne szczególne wzory algebraiczne nazywamy wzorami skróconego mnożenia. Niech $\triangle$ i $\square$ oznaczają dowolne wielkości, wówczas

$$\begin{aligned}(\triangle + \square)^2 &= (\triangle + \square)(\triangle + \square)\\ &= \triangle(\triangle + \square) + \square(\triangle + \square)\\ &= \triangle^2 + \triangle\square + \triangle\square + \square^2\\ &= \triangle^2 + 2\triangle\square + \square^2\end{aligned}$$



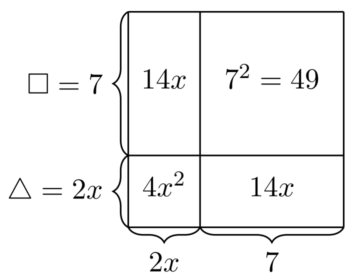
Na rysunku widać, że kwadrat o boku długości $\triangle + \square$, został podzielony na cztery prostokąty o polach $\triangle^2$, $\triangle\square$, $\triangle\square$, $\square^2$ czyli jego pole $(\triangle + \square)^2 = \triangle^2 + 2\triangle\square + \square^2$. Mamy zatem, dla dowolnych $\triangle, \square$

$$\boxed{(\triangle + \square)^2 = \triangle^2 + 2\triangle\square + \square^2}$$

PRZYKŁADY

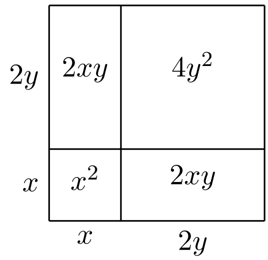
W wyrażeniu $(2x+7)^2$ mamy: $\triangle = 2x$, zaś $\square = 7$, wobec tego

$$\begin{aligned}(2x + 7)^2 &= (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 7 + 7^2\\ &= 4x^2 + 28x + 49\end{aligned}$$



Podobnie dla $(x+2y)^2$ mamy $\triangle = x$, zaś $\square = 2y$, wobec tego

$$\begin{aligned}(x+2y)^2 &= (x)^2 + 2\cdot x\cdot 2y + (2y)^2\\ &= x^2 + 4xy + 4y^2\end{aligned}$$



Podobnie możemy pokazać, że

$$\begin{aligned}(\triangle - \square)^2 &= (\triangle - \square)(\triangle - \square)\\ &= \triangle(\triangle - \square) - \square(\triangle - \square)\\ &= \triangle^2 - \triangle\square - \triangle\square + \square^2\\ &= \triangle^2 - 2\triangle\square + \square^2\end{aligned}$$

czyli krótko

$$\boxed{(\triangle - \square)^2 = \triangle^2 - 2\triangle\square + \square^2}$$

PRZYKŁADY

W wyrażeniu $(2a-5)^2$ mamy $\triangle = 2a$, zaś $\square = 5$, wobec tego

$$\begin{aligned}(2a-5)^2 &= (2a)^2 - 2\cdot 2a\cdot 5 + 5^2\\ &= 4a^2 - 20a + 25\end{aligned}$$

Podobnie w wyrażeniu $(3x-2y^2)^2$ mamy $\triangle = 3x$, $\square = 2y^2$, wobec tego mamy

$$\begin{aligned}(3x-2y^2)^2 &= (3x)^2 - 2\cdot 3x\cdot 2y^2 + (2y^2)^2\\ &= 9x^2 - 12xy^2 + 4y^4\end{aligned}$$

Zauważmy, że ma miejsce również wzór: $(\triangle + \square)(\triangle - \square) = \triangle^2 - \square^2$. Faktycznie

$$\begin{aligned}(\triangle + \square)(\triangle - \square) &= \triangle(\triangle - \square) + \square(\triangle - \square)\\ &= \triangle^2 - \triangle\square + \square\triangle - \square^2\\ &= \triangle^2 - \square^2\end{aligned}$$

czyli krótko

$$\boxed{(\triangle+\square)(\triangle-\square)=\triangle^2-\square^2}$$

PRZYKŁADY zamiany iloczynu na sumę algebraiczną.

$$\begin{aligned}(4a-3b)(4a+3b)&=(4a)^2-(3b)^2\\&=16a^2-9b^2\\(x-2y^2)(x+2y^2)&=x^2-(2y^2)^2\\&=x^2-4y^4\end{aligned}$$

PRZYKŁADY zamiany sumy algebraicznej na iloczyn.

$$\begin{aligned}9a^2-16b^2&=(3a)^2-(4b)^2\\&=(3a-4b)(3a+4b)\\1-25x^4&=1^2-(5x^2)^2\\&=(1-5x^2)(1+5x^2)\end{aligned}$$

1. Korzystając z wzorów skróconego mnożenia zapisz w postaci sumy algebraicznej następujące wyrażenia

a) $(a+1)^2$	b) $(2a-1)^2$	c) $(a-3)^2$	d) $(a+5)^2$
e) $(3x-1)^2$	f) $(2-x)^2$	g) $(3-2x)^2$	h) $(5+2x)^2$
i) $(a^2+1)^2$	j) $(1-2a^2)^2$	k) $(a^2-4)^2$	l) $(a^3+7)^2$
m) $(3x^2-1)^2$	n) $(4-3x^2)^2$	o) $(5+2x^2)^2$	p) $(x^2-9)^2$
q) $(4x+9y)^2$	r) $(xy+2)^2$	s) $(9-2b^2)^2$	t) $(7b^3-1)^2$
u) $(a+\frac{1}{2})^2$	v) $(2y^2-\frac{1}{2})^2$	w) $(7b^3-1)^2$	x) $(x^2+y^3)^2$
y) $\left(2x-\frac{2}{3}\right)^2$	z) $\left(\frac{1}{2}ab-1\right)^2$		

2. Korzystając z wzorów skróconego mnożenia zapisz poniższe sumy algebraiczne w postaci iloczynowej.

a) $x^2-2xy+y^2$	b) $a^2+6ab+9b^2$	c) $x^2+8xy+16y^2$
d) $16a^2+72ab+81b^2$	e) $16a^2+40ax+25x^2$	f) $a^2b^2+4ab+4$
g) $9-6bc+b^2c^2$	h) $a^2b^2+4abxy+4x^2y^2$	i) $81-72t+16t^2$
j) $49a^2-14a+1$	k) $\frac{9}{4}b^2-3b+1$	l) $9x^2-3x+\frac{1}{4}$

3. Korzystając z wzoru $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ zamień poniższe sumy algebraiczne na iloczyny

a) $x^2 - \frac{1}{9}$	b) $x^2 - \frac{9}{49}$	c) $\frac{9}{16} - y^2$
d) $81y^2 - \frac{49}{81}x^2z^2$	e) $\frac{1}{4} - \frac{1}{9}y^2$	f) $\frac{16}{25} - \frac{4}{81}x^2$
g) $\frac{1}{16}x^2y^2 - \frac{1}{9}a^2b^2$	h) $\frac{4}{49}x^2y^2 - 9a^2$	i) $\frac{144}{169}x^2y^2 - \frac{9}{16}z^2v^2$

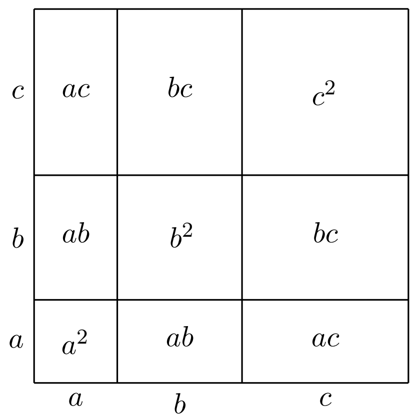
4. Korzystając z wzorów skróconego mnożenia zapisz poniższe sumy algebraiczne w postaci iloczynowej.

a) $4a^2 + 8ab + 4b^2$	b) $x^2 - \frac{4}{9}$	c) $4x^2 - 12xy + 9y^2$
d) $\frac{25}{64} - \frac{36}{81}x^2$	e) $100y^2 + 60ay + 9a^2$	f) $\frac{25}{64}x^2y^2 - \frac{49}{16}b^2$
g) $x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16}$	h) $\frac{4}{9}a^2 - 1\frac{1}{3}a + 1$	i) $\frac{9}{16}a^2 + \frac{3}{4}ab + \frac{1}{4}b^2$

Niech a, b, c oznaczają dowolne wielkości, wówczas

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= (a+b+c)(a+b+c)\\ &= a(a+b+c) + b(a+b+c) + c(a+b+c)\\ &= a^2 + ab + ac + ab + b^2 + bc + ac + bc + c^2\\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc\end{aligned}$$

To co jest powyżej napisane w postaci algebraicznej można zilustrować geometrycznie. Wtedy „wzór” staje się oczywisty. Na rysunku widać, że pole kwadratu o boku długości $a + b + c$ równe jest sumie dziewięciu pól dziewięciu czworokątów o polach a^2, b^2, c^2, ab, ab, ac, ac, bc, bc.



Czyli krótko

$$\boxed{(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc}$$

5. Wykonaj poniższe potęgowania

a) $(a+b+3c)^2$	b) $(2a+b+3c)^2$	c) $(a-b+c)^2$
d) $(2a-b-c)^2$	e) $(x+2y+3)^2$	f) $(x-y+1)^2$
g) $(4x+2y+1)^2$	h) $(2x-3y-2)^2$	i) $(x+3y-4)^2$

6. Korzystając z poznanych tożsamości wszystkie poniższe sumy algebraiczne przedstaw w postaci iloczynu, natomiast wszystkie iloczyny zapisz w postaci sumy algebraicznej.

a) $\left(\frac{3}{4}-y\right)\left(\frac{3}{4}+y\right)$	b) $\left(y^2-\frac{1}{3}\right)^2$	c) $x^2-x+\frac{1}{4}$
d) $\left(\frac{1}{3}-a\right)^2$	e) $\left(\frac{1}{2}a+2\right)^2$	f) $100a^2-180ab+81b^2$
g) $\left(\frac{1}{5}-x\right)\left(\frac{1}{5}+x\right)$	h) $25-\frac{10}{3}a+\frac{1}{9}a^2$	i) $4x^2-\frac{25}{81}$
j) $x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}$	k) $\frac{49}{144}a^2-\frac{9}{25}$	l) $\left(\frac{1}{9}ab-6x\right)\left(\frac{1}{9}ab+6x\right)$
m) $1-\frac{64}{121}x^2$	n) $\left(3x+\frac{1}{3}\right)^2$	o) $(b+a)(a-b)$

5.2 Zastosowania w obliczeniach

Przypomniane równości często mogą pomóc w sprawnym wykonywaniu rachunków nawet w pamięci. Poniższe przykłady prezentują te zastosowania:
PRZYKŁADY

$$31^2 = (30+1)^2 = 30^2 + 2\cdot 30\cdot 1 + 1^2 = 900+60+1 = 961$$
$$49^2 = (50-1)^2 = 2500-100+1 = 2401$$
$$29\cdot 31 = (30-1)(30+1) = 30^2-1^2 = 900-1 = 899$$

7. Postępując dokładnie tak, jak w powyższych przykładach (bez używania kalkulatora), oblicz:

a) 61^2	b) 39^2	c) 22^2	d) 59^2	e) 28^2	f) 37^2
g) $59\cdot 61$	h) $105\cdot 95$	i) $28\cdot 32$	j) $58\cdot 62$	k) $7,1\cdot 6,9$	l) $205\cdot 195$

5.3 Rozkład sumy algebraicznej na czynniki

Wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias powoduje zamianę sumy na iloczyn. Wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias polega na podzieleniu każdego składnika w tej sumie przez ten wspólny czynnik.

PRZYKŁADY

$$
\begin{aligned}
175 + 225 &= 25(7 + 9)\\
12ab + 16bc &= 4b(3a + 4c)\\
8ab^2 - 28abc &= 4ab(2b - 7c)\\
x^3 + x &= x(x^2 + 1)\\
-3x^2 + 6x &= -3x(x - 2)
\end{aligned}
$$

w szczególności, gdy wyłączamy przed nawias czynnik -1, co nazywamy zazwyczaj w żargonie matematycznym, *wyłączaniem minusa przed nawias*, to wówczas dzielenie każdego składnika w sumie przez -1 oznacza, że przed nawiasem umieszczamy znak minus, a w każdym składniku sumy zamieniamy znak na przeciwny.

$$
\begin{aligned}
-7x^2 - 13y^2 + 5 &= (-1)(7x^2 + 13y^2 - 5) = -(7x^2 + 13y^2 - 5)\\
-a + b &= -(a - b)
\end{aligned}
$$

W kolejnym ćwiczeniu będziemy dokonywali zamiany sumy algebraicznej na iloczyn możliwie największej liczby czynników. Mówimy wówczas, że dokonujemy *rozkładu sumy na czynniki.* Odpowiednikiem tego pojęcia dla liczb naturalnych jest dokonywanie rozkładu liczby na czynniki pierwsze.

PRZYKŁADY

Poniżej dokonujemy rozkładu sumy algebraicznej na czynniki w dwóch krokach. W pierwszym kroku wyłączamy wspólny czynnik przed nawias, a w drugim kroku korzystamy ze wzoru: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

$$
\begin{aligned}
5a^2 - 20b^2 &= 5(a^2 - 4b^2)\\
&= 5(a - 2b)(a + 2b)\\
x^3 - x &= x(x^2 - 1)\\
&= x(x - 1)(x + 1)
\end{aligned}
$$

8. Zamień podobnie poniższe sumy alg. na iloczyn trzech czynników

a) $7a^2 - 7$	b) $8x^2 - 2x^2y^2$	c) $2a^2 - 12a + 18$
d) $3a^2b^2 - \frac{3}{4}$	e) $\frac{8}{9}x^2 - 72$	f) $9x^2y + y - 6xy$
g) $\frac{4}{5}a^2b^2 - 5$	h) $-3c + 48a^2c$	i) $\frac{7}{9}x^2 - 7^3$
j) $3x^2y^2z - 27z$	k) $12a^2 - 12ab + 3b^2$	l) $8x^2 - \frac{1}{2}$

5.4 Działania na sumach algebraicznych

PRZYKŁAD 1

$$\begin{aligned} 4x^2-13x-2-2x(x-7) &= 4x^2-13x-2-[2x(x-7)] \quad \text{dopisujemy nawias} \\ &= 4x^2-13x-2-[2x^2-14x] \quad \text{mnożenie} \\ &= 4x^2-13x-2-2x^2+14x \quad \text{odejmowanie} \\ &= 2x^2+x-2 \quad \text{redukcja} \end{aligned}$$

9. Postępując podobnie wykonaj poniższe działania

a) $x^2+6x+8-4(x-3)$ b) $x^2-2x+5-3x(2x-1)$

c) $4x+7-2x(3-x)$ d) $(x-2)^2-2x(x+5)$

e) $2x+3-5x(3x-1)$ f) $(1+2x)^2-4x(x-1)$

PRZYKŁADY 2

$$\begin{aligned} 2x-1-(2x-3)(x+2) &= 2x-1-[(2x-3)(x+2)] \quad \text{dopisujemy nawiasy} \\ &= 2x-1-[2x(x+2)-3(x+2)] \quad \text{wpierw mnożenie} \\ &= 2x-1-[2x^2+4x-(3x+6)] \quad \text{dalsze mnożenie} \\ &= 2x-1-[2x^2+4x-3x-6] \quad \text{odejmowanie} \\ &= 2x-1-[2x^2+x-6] \quad \text{redukcja} \\ &= 2x-1-2x^2-x+6 \quad \text{odejmowanie} \\ &= -2x^2+x+5 \quad \text{redukcja} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4x^2+5x-9-(x-2)(x+3) &= 4x^2+5x-9-[(x-2)(x+3)] \\ &= 4x^2+5x-9-[x(x+3)-2(x+3)] \\ &= 4x^2+5x-9-[x^2+3x-2x-6] \\ &= 4x^2+5x-9-x^2-3x+2x+6 \\ &= 3x^2+4x-3 \end{aligned}$$

10. Postępując podobnie wykonaj poniższe działania

a) $-3x^2-4x+5-(x+3)(x+4)$ b) $2x^2+x-(2x+3)(x-2)$

c) $5x^2-3-(x-5)(x-2)$ d) $(2x-1)^2-(x-2)(5-x)$

e) $2x^2+7x-12-(x+1)(x-6)$ f) $3x+7-(2x+5)(x-4)$

g) $12x-7-(6x+1)(2x-3)$ h) $2x^2+5x-1-(x+2)(2x+3)$

i) $x^2-3-(2x+5)(3x+2)$ j) $3x^3-x^2+x-2-(2x^2-1)(x+3)$

k) $2x^2-3x+(2x+1)(3x-2)$

PRZYKŁAD 3

$$\begin{aligned}2x^2+9x+3-(x+3)^2 &= 2x^2+9x+3-[(x+3)^2] \quad \text{dopisujemy nawias}\\ &= 2x^2+9x+3-[x^2+6x+9] \quad \text{wz. skr. mnożenia}\\ &= 2x^2+9x+3-x^2-6x-9 \quad \text{odejmowanie}\\ &= x^2+3x-6 \quad \text{redukcja}\end{aligned}$$

11. Postępując podobnie wykonaj poniższe działania

a) $x^2-7x+5-(x-2)^2$

b) $2x^2+3x+2-(x+1)^2$

c) $5x^2-9x+8-(2x-3)^2$

d) $(3x+1)^2-(2x+3)^2$

e) $3x^2-x-2-(x+5)^2$

f) $2x-7-(3-x)^2$

PRZYKŁAD 4

$$\begin{aligned}3x^3-7x+1-3x(x-2)^2 &= 3x^3-7x+1-[3x(x-2)^2]\\ &= 3x^3-7x+1-[3x(x^2-4x+4)]\\ &= 3x^3-7x+1-[3x^2-12x^2+12x]\\ &= 3x^3-7x+1-3x^2+12x^2-12x\\ &= 3x^3+15x^2-7x-11\end{aligned}$$

12. Postępując podobnie wykonaj poniższe działania

a) $7x-2-3(2x+1)^2$

b) $3x^2+7x-2(2-3x)^2$

c) $5x^2-x+7-2(x-2)^2$

d) $x^3-6x^2-8x+9-3x(x+2)^2$

e) $4x^2-5x-2-2x(x+1)^2$

f) $5x^3+7x^2-3x-4-5x(x-3)^2$

g) $2x^3-3x^2+2x+1-x(2x-3)^2$

PRZYKŁADY 5

$$\begin{aligned}2x^3-2-x(x+1)(x+2) &= 2x^3-2-[x(x+1)(x+2)]\\ &= 2x^3-2-[(x^2+x)(x+2)]\\ &= 2x^3-2-[x^2(x+2)+x(x+2)]\\ &= 2x^3-2-[x^3+2x^2+x^2+2x]\\ &= 2x^3-2-x^3-2x^2-x^2-2x\\ &= x^3-3x^2-2x-2\end{aligned}$$

13. Postępując podobnie wykonaj poniższe działania

a) $3x^3 + 2x - 4 - 2x(x+1)(x-3)$

b) $5x^3 - x^2 + 3 - 3x(x-2)(x+1)$

c) $4x^3 - 2x^2 + 9 - 4x(2x-1)(x+1)$

d) $x^3 - 3x - 2 - 5x(2-x)(3x+1)$

e) $5x + 4 - 3(2x-1)(x+3)$

f) $2x^2 - 4 - 2x(x-3)(2x-2)$

g) $x^2 + 3x - 2 - 3x(x-2)(x+1)$

PRZYKŁADY 6 (różnicy dwóch iloczynów)

$$\begin{aligned} x \cdot (3x-2) - 2x^2 \cdot (2-7x) &= x \cdot (3x-2) - [2x^2 \cdot (2-7x)] \quad \text{dopisanie nawiasu} \\ &= 3x^2 - 2x - [4x^2 - 14x^3] \quad \text{wykonanie mnożenia} \\ &= 3x^2 - 2x - 4x^2 + 14x^3 \quad \text{odejmowanie} \\ &= 14x^3 - x^2 - 2x \quad \text{redukcja} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x(x-3y) - 3y(x-y) &= 2x \cdot x - 2x \cdot 3y - (3y \cdot x - 3y \cdot y) \\ &= 2x^2 - 6xy - (3xy - 3y^2) \\ &= 2x^2 - 6xy - 3xy + 3y^2 \\ &= 2x^2 - 9xy + 3y^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x^2(2x^3 - y) - 2x(y-3)^2 &= 2x^2(2x^3 - y) - 2x(y^2 - 6y + 9) \\ &= 6x^5 - 2x^2y - (2xy^2 - 12xy + 18x) \\ &= 6x^5 - 2x^2y - 2xy^2 + 12xy - 18x \\ &= 6x^5 + 18x^2 + 10x^2y - 2xy^2 \end{aligned}$$

14. Postępując podobnie zapisz w najprostszej postaci

a) $2x(x-5) - 3(x^2 - 2x) + (x-2)x$

b) $3x(17x - 11y) - 2x(9x - 14y)$

c) $5p^2(3p-2) - 4p(2p^2 + 3p)$

d) $a(a+b+c) - b(a-b+c) - c(a-b-c)$

e) $x^2yz - (xy^2z - (xyz^2 - (x^2yz - xy^2z)))$

5.5 Zamiana różnicy kwadratów na iloczyn

Korzystając ze wzoru $\triangle^2 - \square^2 = (\triangle + \square)(\triangle - \square)$ rozkładamy poniżej różnice kwadratów na czynniki.

PRZYKŁAD 1

$$\begin{aligned}(2x+3y)^2 - 25x^2 &= (2x+3y)^2 - (5x)^2 \\ &= (2x+3y-5x)(2x+3y+5x) \\ &= (3y-3x)(3y+7x) \\ &= 3(y-x)(3y+7x)\end{aligned}$$

PRZYKŁAD 2

$$\begin{aligned}4 - (2a-b)^2 &= 2^2 - (2a-b)^2 \\ &= [2-(2a-b)][2+(2a-b)] \\ &= (2-2a+b)(2+2a-b)\end{aligned}$$

PRZYKŁAD 3

$$\begin{aligned}-49x^2 + (2x+y)^2 &= (2x+y)^2 - 49x^2 \\ &= (2x+y)^2 - (7x)^2 \\ &= (2x+y-7x)(2x+y+7x) \\ &= (y-5x)(9x+y)\end{aligned}$$

15. Postępując podobnie jak w przykładach 1 i 2 zamień poniższe sumy algebraiczne na iloczyny

a) $25 - (3x+y)^2$	b) $36 - (4x-y)^2$	c) $(2x-7)^2 - 25$
d) $(a+b)^2 - 4b^2$	e) $9y^2 - (5x-2y)^2$	f) $-25x^2 + (b-x)^2$
g) $(2a-3b)^2 - 4b^2$	h) $9b^2 - (2a-5b)^2$	i) $(a+b)^2 - 16a^2b^2$

PRZYKŁAD 4

$$\begin{aligned}(2x+y)^2 - (3x+1)^2 &= [(2x+y)-(3x+1)][(2x+y)+(3x+1)] \\ &= (2x+y-3x-1)(2x+y+3x+1) \\ &= (-x+y-1)(5x+y+1)\end{aligned}$$

16. Postępując podobnie zamień poniższe sumy algebraiczne na iloczyny

a) $(2a-3b)^2-(4b+5a)^2$ b) $(6a+5)^2-(2a-5b)^2$
c) $(5a-2b)^2-(a-4b)^2$ d) $(4x-y)^2-(2x+y)^2$
e) $(4x+3y)^2-(x+y-1)^2$ f) $(3x-y)^2-(2x+y)^2$
g) $(3b+5a)^2-(b-2a)^2$ h) $(1-3b)^2-(a+2b)^2$

5.6 Rozkład sumy algebraicznej na czynniki c.d.

W kolejnych dwóch ćwiczeniach będziemy wyłączali przed nawias wspólny czynnik będący nie jednomianem lecz sumą algebraiczną.

PRZYKŁADY

$$
\begin{aligned}
(2a+b)4x+(2a+b)7y &= (2a+b)(4x+7y)\\
(a-3b)5x+(a-3b)(2y+z) &= (a-3b)[5x+(2y+z)]\\
&= (a-3b)(5x+2y+z)\\
5b(x-y)-(x-y)(7a+2b) &= (x-y)([5b-(7a+2b)]\\
&= (x-y)(5b-7a-2b)\\
&= (x-y)(3b-7a)\\
(3x+y)(a+2b)-(3a-b)(y+3x) &= (3x+y)[(a+2b)-(3a-b)]\\
&= (3x+y)(a+2b-3a+b)\\
&= (3x+y)(3b-2a)
\end{aligned}
$$

17. Zamień poniższe sumy algebraiczne na iloczyny

a) $a(x-3)+b(x-3)$ b) $45(a+4)-9a(a+4)+12b(a+4)$
c) $x(3-x)-2(3-x)$ d) $3a(x-1)-2b(x-1)+c(x-1)$
e) $7x(p-2)+4y(p-2)$ f) $(a-2b)x+(a-2b)(2x+y)$
g) $a(x+y)+b(x+y)$ h) $(a^2+1)x+(a^2+1)y+(a^2+1)z$

W kolejnym ćwiczeniu w niektórych podpunktach należy zauważyć, że w pierwszym ruchu należy wyłączyć przed nawias -1 (w takiej sytuacji mówimy krócej: *wyłączamy minus przed nawias*) względnie jakąś inną wielkość.

PRZYKŁADY

$$\begin{aligned}
x(a-3b)-a+3b &= x(a-3b)-(a-3b)=(a-3b)(x-1)\\
(2a-b)2x+(b-2a)3y &= (2a-b)2x-(2a-b)3y=(2a-b)(2x-3y)\\
(3x-y)(2a+b)+y-3x &= (3x-y)(2a+b)-(3x-y)\\
&= (3x-y)(2a+b-1)\\
(2a-3b)xy+6b-4a &= (2a-3b)xy-2(2a-3b)=(2a-3b)(xy-2)
\end{aligned}$$

18. Zamień poniższe sumy algebraiczne na iloczyny wyłączając wspólny czynnik przed nawias

a) $x(a+b)+(a+b)$
b) $2a(x+y)-(x+y)$
c) $a(b+c)-b(-b-c)$
d) $3(x+y)+2(x+y)^2$
e) $(3a+b)x-(b+3a)(4x-y)$
f) $2x(a-5b)+4y(5b-a)$
g) $(a+2b)2x+(2a+4b)(3x+y)$
h) $(a-b)x-b+a$
i) $a(x-2y)+b(2y-x)$
j) $(2b-a)x+(a-2b)(2x-y)$
k) $x+y-(x+y)^2$
l) $(p-q)-2a(q-p)$
m) $(a+b)^3-a(a+b)^2$
n) $2a(6x-4)-5b(3x-2)$
o) $(2x-y)(a+3b)-(7b-4a)(2x-y)$
p) $(2a-9b)(x+3y)+(x+3y)(6b-3a)$

19. Korzystając ze sposobów przedstawionych we wszystkich wcześniejszych przykładach, zamień poniższe sumy algebraiczne na iloczyn.

a) $a^2(x-1)-b(1-x)$
b) a^2+6a+9
c) $\frac{9}{64}-81x^2$
d) $p(p-1)-4(1-p)$
e) $(2x+y)^2-(3x+y)^2$
f) $x(p-a)-y(p-a)-z(a-p)$
g) $y^2-16y+64$
h) $50-8a^2$
i) $32a^2x-18b^2x$
j) $2x(a^2-b)+3y(b-a^2)$
k) $(2a+b)^2-(a+4b)^2$
l) $a^2-4ay+4y^2$
m) $-12x^2+27$
n) $(3x+4y)^2-(2y+x)^2$
o) $a(b-5)+2(5-b)$
p) $\frac{16}{81}x^2-169u^2$

W kolejnych dwóch ćwiczeniach zamiana sum algebraicznych na iloczyn będzie się odbywała w dwóch krokach.

PRZYKŁADY

$$2ax - 3bx + 4ay - 6by = x(2a - 3b) + 2y(2a - 3b) = (2a - 3b)(x + 2y)$$
$$x^3 - 4x^2 + x - 4 = x^2(x - 4) + (x - 4) = (x - 4)(x^2 + 1)$$
$$7a^2 - 3ay - 7a + 3y = a(7a - 3y) - (7a - 3y) = (7a - 3y)(a - 1)$$

20. Rozłóż poniższe sumy algebraiczne na czynniki

a) $ax + bx + ay + by$ b) $3xy - 7y + 9x^2 - 21x$ c) $x^2 + xy + ax + ay$

d) $x^3 + 3x^2 + 3x + 9$ e) $5a^2 - 5ax - 7a + 7x$ f) $x^2 + xy - 5x - 5y$

g) $a^2 - ab - 3a + 3b$ h) $10ay - 5by + 2ax - bx$ i) $a^2 - ab - 5a + 5b$

21. Rozłóż poniższe sumy algebraiczne na czynniki

a) $x^3 + x - 1 - x^2$ b) $x^2 + ay + xy + ax$
c) $2ax + 3by + 3ay + 2bx$ d) $10a^2 + 21bc - 14ab - 15ac$
e) $6ax + 9bx - 4ay - 6by$ f) $1 + a + a^2 + b + ab + a^2b$
g) $6ax - 8bx - 4by + 3ay$ h) $6ax - 3ay - by + 2bx - 2cx + cy$
i) $xy - 1 + x - y$ j) $ax^2 + bx^2 + ax - cx^2 + bx - cx$
k) $16ap^2 + 32bp^2 - 8ap - 16bp + a + 2b$
l) $4y^2x^2 - 16y^2 - 4x^2y + 16y + x^2 - 4$

W kolejnym ćwiczeniu, w każdym przykładzie, będziemy korzystać z wzorów na kwadrat sumy lub różnicy oraz wzoru na różnicę kwadratów.

PRZYKŁADY

Zamień na iloczyn poniższe sumy algebraiczne.

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 4 - y^2 &= (x - 2)^2 - y^2 \\ &= (x - 2 - y)(x - 2 + y) \\ 9 - 4a^2 + 4ab - b^2 &= 3^2 - (4a^2 - 4ab + b^2) = 3^2 - (2a - b)^2 \\ &= [3 - (2a - b)][3 + (2a - b)] \\ &= (3 - 2a + b)(3 + 2a - b) \end{aligned}$$

22. Zamień na iloczyn

a) $a^2 - 2ab + b^2 - 25$ b) $1 - a^2 - 2ab - b^2$
c) $49x^2 - 9a^2 + 30ab - 25b^2$ d) $a^2 + 2ab + b^2 - 4$
e) $4x^2 - 20xy + 25y^2 - 36$ f) $25a^2 - x^2 + 2x - 1$
g) $16y^2 - x^2 - 4x - 4$ h) $x^2 + 8x + 16 - 9b^2$
i) $b^2 - x^2 + 2x - 1$ j) $4y^2 - x^2 - 4x - 4$

23. Korzystając ze sposobów przedstawionych we wcześniejszych przykładach, zamień każdą z sum algebraicznych na iloczyn.

a) $xy + xz + y + z$
b) $6ax + 2ay - 10a + 3bx + by - 5b$
c) $16a^2 - 8ab + b^2 - 49$
d) $x^2 + 4x + 4 - 4y^2$
e) $a^2 + ab + ac + bc$
f) $4x^2 - 4x + 1 - y^2$
g) $ac + bc + a + b$
h) $x^2 + 2x + 1 - b^2$
i) $x^2 + xy + 2x + 2y$
j) $ax^2 - bx^2 - bx + ax - a + b$
k) $a^2 - ab - 5a + 5b$
l) $x^3 + x^2y - x^2z - xyz$

PRZYKŁAD uzupełniania sumy do pełnego kwadratu
W wyrażeniu $4x^2 + 12x + \dots$ w miejsce kropek należy wstawić 9, uzyskując $4x^2 + 12x + 9$, co można zapisać w postaci kwadratu sumy $(2x + 3)^2$.

24. Uzupełnij podobnie tak, aby uzyskać kwadrat sumy lub różnicy:

a) $x^2 + 2x + \dots$
b) $x^2 + 6x + \dots$
c) $x^2 + 10x + \dots$
d) $x^2 - 4x + \dots$
e) $x^2 + 20x + \dots$
f) $4x^2 - 12x + \dots$
g) $25x^2 + 10x + \dots$
h) $16x^2 - 8x + \dots$
i) $16x^2 + 24x + \dots$
j) $9x^2 + 12x + \dots$
k) $25x^2 + 20x + \dots$
l) $x^2 + 14x + \dots$
m) $x^2 + x + \dots$
n) $x^2 + 3x + \dots$
o) $x^2 + 7x + \dots$
p) $x^2 + \frac{4}{3}x + \dots$
q) $x^2 + \frac{14}{3}x + \dots$
r) $x^2 + \frac{2}{7}x + \dots$
s) $x^2 + \frac{4}{5}x + \dots$
t) $4x^2 - 2x + \dots$
u) $16x^2 + 4x + \dots$
v) $9x^2 + 3x + \dots$
w) $\frac{1}{4}x^2 + x + \dots$
x) $\frac{4}{25}x^2 + \frac{12}{5}x + \dots$

PRZYKŁADY zamiany sumy algebraicznej na iloczyn

$$\begin{aligned}
y^2 - 8y + 16 - 9 &= (y-4)^2 - 3^2 \\
&= (y-4-3)(y-4+3) \\
&= (y-7)(y-1) \\
x^2 - 12x + 27 &= x^2 - 12x + 36 - 36 + 27 \\
&= (x-6)^2 - 9 \\
&= (x-6-3)(x-6+3) \\
&= (x-9)(x-3)
\end{aligned}$$

25. Rozłóż na czynniki podobnie jak w poprzedzających dwóch przykładach. Począwszy od punktu d) musisz postępować tak jak w powyższych dwóch przykładach.

a) $x^2 + 6x + 9 - 1$ b) $a^2 + 4a + 4 - 9$ c) $4a^2 + 4a + 1 - 16$
d) $4a^2 + 12a - 27$ e) $y^2 + 4y - 5$ f) $x^2 + 4x + 3$
g) $x^2 + 18x + 32$ h) $4a^2 + 12a - 7$ i) $9y^2 + 12y - 21$

PRZYKŁADY zamiany sumy alg. na iloczyn

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 4 - y^2 - 2y - 1 &= (x-2)^2 - (y^2 + 2y + 1) \\ &= (x-2)^2 - (y+1)^2 \\ &= [(x-2) - (y+1)] \cdot [(x-2) + (y+1)] \\ &= (x - 2 - y - 1)(x - 2 + y + 1) \\ &= (x - y - 3)(x + y - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 - 6x - 4y^2 - 4y + 8 &= x^2 - 6x + 9 - 9 - (4y^2 + 4y + 1 - 1) + 8 \\ &= (x-3)^2 - 9 - [(2y+1)^2 - 1] + 8 \\ &= (x-3)^2 - 9 - (2y+1)^2 + 1 + 8 \\ &= (x-3)^2 - (2y+1)^2 \\ &= [x - 3 - (2y+1)][x - 3 + (2y+1)] \\ &= (x - 2y - 4)(x + 2y - 2) \end{aligned}$$

26. Rozłóż na czynniki. Począwszy od punktu d) musisz postępować tak jak w powyższym przykładzie.

a) $a^2 - 6a + 9 - b^2 - 2b - 1$ b) $b^2 - 4b + 4 - 4x^2 - 4x - 1$
c) $4a^2b^2 + 12ab + 9 - x^2 - 2x - 1$ d) $x^2 - 8x - y^2 - 6y + 7$
e) $a^2 + 6a - b^2 + 4b + 5$ f) $4a^2 + 4a - b^2 - 8b - 15$
g) $4a^2 + 12a - b^2 - 2b + 8$ h) $4a^2 - 4a - x^2 + 6x - 8$
i) $9y^2 + 12y - x^2 + 2x + 3$

27. Korzystając ze sposobów przedstawionych we wszystkich wcześniejszych przykładach, zamień sumy algebraiczne na iloczyny. Postaraj się, by każdy z nich miał jak najwięcej czynników.

a) $a^2 + 4b^2 - 4ab$

b) $x^4 + 2x^2 + 1$

c) $a^2 - b^2 + 2a^2 + 4ab + 2b^2$

d) $x^6 - x^2$

e) $4b^2 - 4b + 1 - x^2 - 2xy - y^2$

f) $x^3 + x^2y - xy^2 - y^3$

g) $ac - bc - a^2 + 2ab - b^2$

h) $m^8 - m^4$

i) $xy - ky - x^2 + 2kx - k^2$

j) $a^6 + 2a^3 + 1$

k) $x(a^2 - b^2) + n(b^2 - a^2)$

l) $x^3 - 2x^2 + 4x - 8$

m) $(2a - b)(3x - 2y)^2 - (2a - b)(4x + 5y)^2$

n) $x^4 - 2x^2 + 1$

o) $a^2(t + 1) + 2a(t + 1) + 1(t + 1)$

p) $a^2(s + t) - b^2(s + t)$

q) $2(a - b)^2 - (a^2 - b^2)$

r) $49 - (x - 2y)^2$

s) $a^2(a^2 - b^2) + b^2(b^2 - a^2)$

t) $8q(p - a) - 3p(p - a)$

u) $(6a + 5)^2 - (2a - 5b)^2$

v) $\frac{4}{9}(k + 1) - \frac{49}{4}b^2(k + 1)$

w) $m^6 - m^4 - m^2 + 1$

x) $2ab + a^2 - 9 + b^2$

28. Rozłóż na czynniki. Postaraj się, by każdy z iloczynów miał jak najwięcej czynników. To zadanie pozwoli Tobie sprawdzić, w jakim stopniu opanowałeś metody rozkładu sum algebraicznych na czynniki.

a) $x^3 + 2x^2 - x - 2$

b) $x - x^2 + x^3 - x^4$

c) $a - 9ay^2 + 2b - 18by^2$

d) $(x + 3y)^2 - 169z^2$

e) $49a^2(p - 1) - 14a(p - 1) + p - 1$

f) $(a + b)x - (a + b)y$

g) $9b^2 - (2a - 5b)^2$

h) $x^2 + 4x + 4 - 4y^2$

i) $x^2 + 8x + 16 - 9b^2$

j) $xy - 1 + x - y$

k) $6ax - 3ay - by + 2bx - 2cx + cy$

l) $25 - a^2 + 2ab - b^2$

m) $4x^2 - 20xy + 25y^2 - 36$

n) $4a^2 + 12a - 7$

o) $y^2 - 10ay + 25a^2 - \frac{9}{4}y^2 - 6y - 4$

p) $a^2 + 12a - y^2 - 8y + 20$

q) $(a + 2b)3x - (3a + 6b)(3x + y)$

r) $(a - b)x - b + a$

s) $x^5 + x^4 - x^3 - x^2 + x + 1$

t) $1 - m^2 - 2nm - n^2$

29*. Znajdź liczby, które należy wpisać w puste miejsca, a następnie zapisz sumę algebraiczną w postaci iloczynowej.

a) $5x^4 - 9x^3 + x^2 + 3x = 5x^4 - 4x^3 - 3x^2 - \ldots x^3 + \ldots x^2 + 3x$

b) $-7x^5 + 9x^4 + x^3 - 3x^2 = -7x^5 + \ldots x^4 + 3x^3 + 7x^4 - \ldots x^3 - 3x^2$

c) $6x^3 + 5x^2 + 16x + 5 = 6x^3 + 2x^2 + \ldots x^2 + \ldots x + x + 5$

30*. Rozłóż na czynniki.

a) $x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 3x^2 + x$

b) $3x^4 - 5x^3 + 5x^2 - 5x + 2$

c) $7x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 3x - 5$

d) $x^5 - 2x^4 + x^2 + x^3 + 3$

e) $x^3 - 6x - 4$

f) $2x^3 - 3x^2 + 1$

31*. Rozłóż na czynniki wyrażenie:

a) $x^3 + 5x^2 + 3x + 15$, a następnie uzasadnij, że wyrażenie przyjmuje wartości dodatnie tylko dla $x > -5$.

b) $4x^3 - 8x^2 + 3x - 6$, a następnie określ, dla jakich wartości x wyrażenie przyjmuje wartości ujemne.

c) $-12x^5 + 6x^4 - 2x + 1$, a następnie uzasadnij, że dla ujemnych wartości x wyrażenie przyjmuje wartości dodatnie.

32*. Wykaż, że dla każdej liczby a prawdziwa jest równość $a^4 + 4 = (a^2 + 2)^2 - 4a^2$. Korzystając z tej równości rozłóż sumę $a^4 + 4$ na czynniki.

5.7 Zastosowanie: rozwiązywanie równań

Rozkład sum algebraicznych na czynniki ma zastosowanie w rozwiązywaniu pewnego typu równań. Do tej pory umieliśmy znajdować rozwiązania równania liniowego z jedną niewiadomą. Dosyć łatwo rozwiązuje się równania, które możemy przedstawić w postaci iloczynowej. Wystarczy skorzystać z faktu, że iloczyn jest równy zero wtedy, gdy którykolowiek z czynników jest równy zero lub precyzyjniej:

> Dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b
> $a \cdot b = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = 0$ lub $b = 0$.

PRZYKŁAD

Aby rozwiązać równanie $4x^3 - 14x^2 - 16x = -56$ wystarczy przekształcić je tak, by prawa strona równania wynosiła 0. Następnie lewą stronę równania zapisujemy w postaci iloczynowej i korzystamy z przytoczonego wyżej faktu.

$$\begin{aligned} 4x^3 - 14x^2 - 16x + 56 &= 0 \\ 2x^2(2x-7) - 8(2x-7) &= 0 \\ (2x^2-8)(2x-7) &= 0 \end{aligned}$$

Z powyższej równości wynika, że

$$\begin{array}{rcl} 2x^2 - 8 = 0 & \text{lub} & 2x - 7 = 0 \\ 2x^2 = 8 & \text{lub} & 2x = 7 \\ x^2 = 4 & \text{lub} & x = \frac{7}{2} \\ x = -2 \quad \text{lub} \quad x = 2 & \text{lub} & x = \frac{7}{2} \end{array}$$

Zbiór rozwiązań równania jest zatem równy $ZR = \{-2, 2, \frac{7}{2}\}$

33. Znajdź liczby spełniające równanie i zapisz zbiór jego rozwiązań.

a) $(x-1)(x+1)(x+2) = 0$ b) $x(1-x)\left(1+x^2\right) = 0$
c) $(1-3a)(1+3a)(a+2)^2 = 0$ d) $\left(4x^2-1\right)(2x+1) = 0$

34. Które z podanych równań nie mają rozwiązań? Odpowiedz na to pytanie, nie rozwiązując równań.

a) $x^4 + 1 = 0$ b) $x^2 - 1 = 0$ c) $3x^2 + x^4 = 0$
d) $(3x-4)^6 = 0$ e) $3x^2 + 4x^8 + 2 = 0$ f) $(x^4+2)^3 = -8$
g) $2(x^2+7) = -4$ h) $(x-1)^2 = (x-1)^4$

35. Rozwiąż równania:

a) $x^2 - 2x = 0$ b) $2x^2 - 5x = 0$
c) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{5}x = 0$ d) $(x+1)(x-1) - (x-1)(3-x) = 0$
e) $x^2 - (x-2)x = 0$ f) $(x-4)^2 - (x-4)(2x-1) = 0$
g) $x(x-2) - 3(x-2) = 0$ h) $4x^2 - 9 = 0$
i) $16m^2 - 49 = 0$ j) $2x^2 - 4x = -2$

5.8 Zastosowanie: Podzielność

36. a) Rozłóż na czynniki wyrażenie $n^3 - n$, a następnie uzasadnij, że dla każdej liczby całkowitej n wartość tego wyrażenia jest podzielna przez 3, a także przez 6.

b) Wykaż, że dla dowolnej liczby całkowitej n wartość wyrażenia $n^4 - 2n^3 + n^2$ jest liczbą podzielną przez 4.

c) Uzasadnij, że dla dowolnej liczby całkowitej n wartość wyrażenia $n^5 - n$ jest liczbą podzielną przez 6 (a nawet przez 30).

37. Uzasadnij, że

a) jeśli jedna z dwóch liczb naturalnych daje przy dzieleniu przez 9 resztę 7, a druga resztę 5, to iloczyn tych liczb daje przy dzieleniu przez 9 resztę 8;

b) jeśli jedna z dwóch liczb naturalnych daje przy dzieleniu przez 12 resztę 9, a druga resztę 4, to iloczyn tych liczb jest podzielny przez 12.

38. Uzasadnij, że

a) różnica $51^2 - 51^6$ jest podzielna przez: 50, 150 i 17

b) suma $26^8 + 26^7$ jest podzielna przez 27, 54 i 13

c) liczba $7^7 - 7^6 + 7^5$ jest podzielna przez 43

d) liczba $4^9 + 4^8 + 4^6$ jest podzielna przez 81.

e) liczba $3^{12} - 2^{12}$ jest podzielna przez 35 oraz przez 19.

f) liczba $13^8 - 7^8$ jest podzielna przez 12 i cyfrą jedności tej liczby jest 0.

39. Rozłóż sumę algebraiczną $n^{12} - n^8 - n^4 + 1$ na czynniki, a następnie wykaż, że jeśli n jest liczbą nieparzystą, to $n^{12} - n^8 - n^4 + 1$ jest liczbą podzielną przez 64.

40. Uzasadnij, że różnica kwadratów dwóch kolejnych liczb nieparzystych jest podzielna przez 8.

Odpowiedzi.

1. a) $a^2 + 2a + 1$ b) $4a^2 - 4a + 1$ c) $a^2 - 6a + 9$ d) $a^2 + 10a + 25$
e) $9x^2 - 6x + 1$ f) $4 - 4x + x^2$ g) $9 - 12x + 4x^2$ h) $25 + 20x + 4x^2$
i) $a^4 + 2a^2 + 1$ j) $1 - 4a^2 + 4a^4$ k) $a^4 - 8a^2 + 16$ l) $a^6 + 14a^3 + 49$
m) $9x^4 - 6x^2 + 1$ n) $16 - 24x^2 + 9x^4$ o) $25 + 20x^2 + 4x^4$ p) $x^2 - 18x^2 + 81$
q) $16x^2 + 72xy + 81y^2$ r) $x^2y^2 + 4xy + 4$ s) $81 - 36b^2 + 4b^4$ t) $49b^6 - 14b^3 + 1$
u) $a^2 + a + \frac{1}{4}$ v) $4y^4 - 2y^2 + \frac{1}{4}$ w) $49b^6 - 14b^3 + 1$ x) $x^4 + 2x^2y^3 + y^6$

y) $4x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{4}{9}$ z) $\frac{1}{4}a^2b^2 - ab + 1$

2. a) $(x-y)^2$ b) $(a+3b)^2$ c) $(x+4y)^2$ d) $(4a+9b)^2$ e) $(4a+5x)^2$
f) $(ab+2)^2$ g) $(3-bc)^2$ h) $(ab+2xy)^2$ i) $(9-4t)^2$ j) $(7a-1)^2$
k) $\left(\frac{3}{2}b-1\right)^2$ l) $\left(3x-\frac{1}{2}\right)^2$

3. a) $\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)$ b) $\left(x-\frac{3}{7}\right)\left(x+\frac{3}{7}\right)$ c) $\left(\frac{3}{4}-y\right)\left(\frac{3}{4}+y\right)$
d) $\left(9y-\frac{7}{9}xz\right)\left(9y+\frac{7}{9}xz\right)$ e) $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}y\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}y\right)$ f) $\left(\frac{4}{5}-\frac{2}{9}x\right)\left(\frac{4}{5}+\frac{2}{9}x\right)$
g) $\left(\frac{1}{4}xy-\frac{1}{3}ab\right)\left(\frac{1}{4}xy+\frac{1}{3}ab\right)$ h) $\left(\frac{2}{7}xy-3a\right)\left(\frac{2}{7}xy+3a\right)$
i) $\left(\frac{12}{13}xy-\frac{3}{4}zv\right)\left(\frac{12}{13}xy+\frac{3}{4}zv\right)$

4. a) $(2a+2b)^2$ b) $\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right)$ c) $(2x-3y)^2$ d) $\left(\frac{5}{8}-\frac{6}{9}x\right)\left(\frac{5}{8}+\frac{6}{9}x\right)$
e) $(10y+3a)^2$ f) $\left(\frac{5}{8}xy-\frac{7}{4}b\right)\left(\frac{5}{8}xy+\frac{7}{4}b\right)$ g) $\left(x-\frac{3}{4}\right)^2$ h) $\left(\frac{2}{3}a-1\right)^2$
i) $\left(\frac{3}{4}a+\frac{1}{2}b\right)^2$

5. a) $a^2+b^2+9c^2+2ab+6bc+6ac$ b) $4a^2+b^2+9c^2+4ab+6bc+12ac$
c) $a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ac$ d) $4a^2+b^2+c^2-4ab+2bc-4ac$
e) $x^2+4y^2+9+4xy+12y+6x$ f) $x^2+y^2+1-2xy+2x-2y$
g) $16x^2+4y^2+1+16xy+4y+8x$ h) $4x^2+9y^2+4-8x+12y-12xy$
i) $x^2+9y^2+16+6xy-24y-8x$

6. a) $\frac{9}{16}-y^2$ b) $y^4-\frac{2}{3}y^2+\frac{1}{9}$ c) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$ d) $\frac{1}{9}-\frac{2}{3}a+a^2$ e) $\frac{1}{4}a^2+2a+4$
f) $(10a-9b)^2$ g) $\frac{1}{25}-x^2$ h) $\left(5-\frac{1}{3}a\right)^2$ i) $\left(2x-\frac{5}{9}\right)\left(2x+\frac{5}{9}\right)$ j) $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2$
k) $(\frac{7}{12}a-\frac{3}{5})(\frac{7}{12}a+\frac{3}{5})$ l) $\frac{1}{81}a^2b^2-36x^2$ m) $\left(1-\frac{8}{11}x\right)\left(1+\frac{8}{11}x\right)$
n) $9x^2+2x+\frac{1}{9}$ o) a^2-b^2

7. a) 3721 b) 1521 c) 484 d) 3481 e) 784 f) 1369 g) 3599 h) 9975 i) 896 j) 3596 k) 48,99 l) 39975

8. a) $7(a-1)(a+1)$ b) $2x^2(2-y)(2+y)$ c) $2(a-3)^2$
d) $3\left(ab-\frac{1}{2}\right)\left(ab+\frac{1}{2}\right)$ e) $\frac{8}{9}(x-9)(x+9)$ f) $y(3x-1)^2$
g) $\frac{1}{5}(2ab-5)(2ab+5)$ h) $3c(4a-1)(4a+1)$ i) $\frac{7}{9}(x-21)(x+21)$
j) $3z(xy-3)(xy+3)$ k) $3(2a-b)^2$ l) $8\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x+\frac{1}{4}\right)$

9. a) $x^2+2x+20$ b) $-5x^2+x+5$ c) $2x^2-2x+7$ d) $-x^2-14x+4$
e) $-15x^2+7x+3$ f) $8x+1$

10. a) $-4x^2-11x-7$ b) $2x+6$ c) $4x^2+7x-13$ d) $5x^2-11x+11$
e) $x^2+12x-6$ f) $-2x^2+6x+27$ g) $-12x^2+28x-4$ h) $-2x-7$

11. a) $-3x+1$ b) x^2+x+1x^2+3x+1 c) x^2+3x-1 d) $5x^2-6x-8$
e) $2x^2-11x-27$ f) $-x^2+8x-16$

12. a) $-12x^2-5x-5$ b) $-15x^2+31x-8$ c) $3x^2+7x-1$
d) $-2x^3-18x^2-20x+9$ e) $-2x^3-7x-2$ f) $37x^2-48x-4$
g) $-2x^3+9x^2-7x+1$
13. a) x^3+4x^2+8x-4 b) $2x^3+2x^2+6x-3$ c) $-4x^3-6x^2+4x+9$
d) $16x^3-25x^2-13x-2$ e) $-6x^2-10x+13$ f) $-4x^3+18x^2-12x-4$
g) $-3x^3+4x^2+9x-2$
14. a) $-6x$ b) $33x^2-5xy$ c) $7p^3-22p^2$ d) $a^2+b^2+c^2$ e) xyz^2
15. a) $(5-3x-y)(5+3x+y)$ b) $(6-4x+y)(6+4x-y)$ c) $(2x-12)(2x-2)$
d) $(a-b)(a+3b)$ e) $(5y-5x)(y+5x)$ f) $(b-6x)(b+4x)$ g) $(2a-5b)(2a-b)$
h) $(8b-2a)(2a-2b)$ i) $(a+b-4ab)(a+b+4ab)$
16. a) $(-3a-7b)(7a+b)$ b) $(4a+5b+5)(8a-5b+5)$ c) $(4a+2b)(6a-6b)$
d) $(2x-2y)6x$ e) $(3x+2y+1)(5x+4y-1)$ f) $(x-2y)5x$ g) $(2b+7a)(4b+3a)$
h) $(1-a-5b)(1+a-b)$
17. a) $(x-3)(a+b)$ b) $(a+4)(45-9a+12b)$ c) $(3-x)(x-2)$
d) $(x-1)(3a-2b+c)$ e) $(7x+4y)(p-2)$ f) $(a-2b)(3x+y)$
g) $(x+y)(a+b)$ h) $\left(a^2+1\right)(x+y+z)$
18. a) $(a+b)(x+1)$ b) $(x+y)(2a-1)$ c) $(b+c)(a+b)$
d) $(x+y)(3+2x+2y)$ e) $(3a+b)(y-3x)$ f) $(a-5b)(2x-4y)$
g) $2(a+2b)(4x+y)$ h) $(a-b)(x+1)$ i) $(x-2y)(a-b)$ j) $(a-2b)(x-y)$
k) $(x+y)(1-x-y)$ l) $(p-q)(1+2a)$ m) $b(a+b)^2$ n) $(4a-5b)(3x-2)$
o) $(2x-y)(5a-4b)$ p) $-(x+3y)(a+3b)$
19. a) $(x-1)\left(a^2+b\right)$ b) $(a+3)^2$ c) $\left(\frac{3}{8}-9x\right)\left(\frac{3}{8}+9x\right)$ d) $(p-1)(p+4)$
e) $(-x)(5x+2y)$ f) $(p-a)(x-y+z)$ g) $(y-8)^2$ h) $2(5-2a)(5+2a)$
i) $2x(4a-3b)(4a+3b)$ j) $\left(a^2-b\right)(2x-3y)$ k) $(a-3b)(3a+5b)$
l) $(a-2y)^2$ m) $-3(2x-3)(2x+3)$ n) $4(x+y)(2x+3y)$ o) $(b-5)(a-2)$
p) $\left(\frac{4}{9}x-13u\right)\left(\frac{4}{9}x+13u\right)$
20. a) $(a+b)(x+y)$ b) $(3x-7)(3x+y)$ c) $(x+y)(x+a)$
d) $(x+3)\left(x^2+3\right)$ e) $(a-x)(5a-7)$ f) $(x+y)(x-5)$ g) $(a-b)(a-3)$
h) $(2a-b)(5y+x)$ i) $(a-b)(a-5)$
21. a) $\left(x^2+1\right)(x-1)$ b) $(x+y)(x+a)$ c) $(a+b)(2x+3y)$
d) $(2a-3c)(5a-7b)$ e) $(2a+3b)(3x-2y)$ f) $\left(1+a+a^2\right)(1+b)$
g) $(2x+y)(3a-4b)$ h) $(2x-y)(3a+b-c)$ i) $(x-1)(y+1)$
j) $x(x+1)(a+b-c)$ k) $(a+2b)(4p-1)^2$ l) $(x+2)(x-2)(2y-1)^2$

22. a) $(a-b-5)(a-b+5)$ b) $(1-a-b)(1+a+b)$
c) $(7x-3a+5b)(7x+3a-5b)$ d) $(a+b-2)(a+b+2)$
e) $(2x-5y-6)(2x-5y+6)$ f) $(5a-x+1)(5a+x-1)$
g) $(4y-x-2)(4y+x+2)$ h) $(x+4-3b)(x+4+3b)$
i) $(b-x+1)(b+x-1)$ j) $(2y-x-2)(2y+x+2)$
23. a) $(x+1)(y+z)$ b) $(3x+y-5)(2a+b)$ c) $(4a-b-7)(4a-b+7)$
d) $(x+2-2y)(x+2+2y)$ e) $(a+b)(a+c)$ f) $(2x-1-y)(2x-1+y)$
g) $(a+b)(c+1)$ h) $(x+1-b)(x+1+b)$ i) $(x+y)(x+2)$
j) $(a-b)\left(x^2+x-1\right)$ k) $(a-b)(a-5)$ l) $x(x+y)(x-z)$
24. a) x^2+2x+1 b) x^2+6x+9 c) $x^2+10x+25$ d) x^2-4x+4
e) $x^2+20x+100$ f) $4x^2-12x+9$ g) $25x^2+10x+1$ h) $16x^2-8x+1$
i) $16x^2+24x+9$ j) $9x^2+12x+4$ k) $25x^2+20x+4$ l) $x^2+14x+49$
m) $x^2+x+\frac{1}{4}$ n) $x^2+3x+\frac{9}{4}$ o) $x^2+7x+\frac{49}{4}$ p) $x^2+\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}$ q) $x^2+\frac{14}{3}x+\frac{49}{9}$
r) $x^2+\frac{2}{7}x+\frac{1}{49}$ s) $x^2+\frac{4}{5}x+\frac{4}{25}$ t) $4x^2-2x+\frac{1}{4}$ u) $16x^2+4x+\frac{1}{4}$ v) $9x^2+3x+\frac{1}{4}$ w) $\frac{1}{4}x^2+x+1$ x) $\frac{4}{25}x^2+\frac{12}{5}x+9$
25. a) $(x+4)(x+2)$ b) $(a+5)(a-1)$ c) $(2a+5)(2a-3)$
d) $(2a+9)(2a-3)$ e) $(y+5)(y-1)$ f) $(x+3)(x+1)$ g) $(x+16)(x+2)$
h) $(2a+7)(2a-1)$ i) $(3y-3)(3y+7)$
26. a) $(a+b-2)(a-b-4)$ b) $(b+2x-1)(b-2x-3)$
c) $(2ab+x+4)(2ab-x+2)$ d) $(x-y-7)(x+y-1)$
e) $(a-b+5)(a+b+1)$ f) $(2a-b-3)(2a+b+5)$
g) $(2a-b+2)(2a+b+4)$ h) $(2a-x+2)(2a+x-4)$
i) $(3y-x+3)(3y+x+1)$
27. a) $(a-2b)^2$ b) $\left(x^2+1\right)^2$ c) $(a+b)(3a+b)$ d) $x^2\left(x^2+1\right)(x-1)(x+1)$
e) $(2b-1-x-y)(2b-1+x+y)$ f) $(x-y)(x+y)^2$ g) $(a-b)(c-a+b)$
h) $m^4\left(m^2+1\right)(m+1)(m-1)$ i) $(x-k)(y-x+k)$ j) $\left(a^3+1\right)^2$
k) $(a+b)(a-b)(x-n)$ l) $(x-2)\left(x^2+4\right)$ m) $(2a-b)(-x-7y)(7x+3y)$
n) $(x-1)^2(x+1)^2$ o) $(t+1)(a+1)^2$ p) $(s+t)(a-b)(a+b)$
q) $(a-b)(a-3b)$ r) $(7-x+2y)(7+x-2y)$ s) $(a-b)^2(a+b)^2$
t) $(p-a)(8q-3p)$ u) $(4a+5b+5)(8a-5b+5)$ v) $(k+1)(\frac{2}{3}-\frac{7}{2}b)(\frac{2}{3}+\frac{7}{2}b)$
w) $(m^2+1)(m+1)^2(m-1)^2$ x) $(a+b-3)(a+b+3)$
28. a) $(x-1)(x+1)(x+2)$ b) $x(1-x)\left(1+x^2\right)$ c) $(1-3y)(1+3y)(a+2b)$
d) $(x+3y-13z)(x+3y+13z)$ e) $(p-1)(7a-1)^2$ f) $(a+b)(x-y)$

g) $4\,(4b-a)\,(a-b)$ h) $(x+2-2y)\,(x+2+2y)$ i) $(x+4-3b)\,(x+4+3b)$
j) $(x-1)(y+1)$ k) $(2x-y)\,(3a+b-c)$ l) $(5-a+b)\,(5+a-b)$
m) $(2x-5y-6)\,(2x-5y+6)$ n) $(2a+5)\,(2a+13)$
o) $\left(-\frac{1}{2}y-5a-2\right)\left(\frac{5}{2}y-5a+2\right)$ p) $(a-y+2)\,(a+y+10)$
q) $(-3)\,(a+2b)\,(2x+y)$ r) $(a-b)\,(x+1)$
s) $(x+1)\left(x^4-x^2+1\right)$ t) $(1-m-n)\,(1+m+n)$
29. a) 5, 4, $x\,(x-1)\left(5x^2-4x-3\right)$ b) 2, 2, $x^2\,(x-1)\left(-7x^2+2x+3\right)$
c) 3, 15, $(3x+1)\left(2x^2+x+5\right)$
30. a) $x\left(x^2+1\right)\left(x^2+3x+1\right)$ b) $x^2\left(3x^2-5x+2\right)$ c) $\left(7x^2+3x-5\right)\left(x^2+1\right)$
d) $\left(x^2+1\right)\left(x^2-3x+3\right)(x+1)$ e) $(x+2)\left(x^2-2x-2\right)$ f) $(x-1)^2\,(2x-1)$
31. a) $\left(x^2+3\right)(x+5)$ b) $\left(4x^2+3\right)(x-2)$ c) $\left(-6x^4-1\right)(2x-1)$
33. a) $ZR=\{-2,-1,1\}$ b) $ZR=\{0,1\}$ c) $ZR=\{-2,-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\}$
d) $ZR=\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\}$
34. a) $ZR=\emptyset$ b) $ZR=\{-1,1\}$ c) $ZR=\{0\}$ d) $ZR=\{\frac{4}{3}\}$ e) $ZR=\emptyset$
f) $ZR=\emptyset$ g) $ZR=\emptyset$ h) $ZR=\{0,1,2\}$
35. a) $ZR=\{0,2\}$ b) $ZR=\{0,\frac{5}{2}\}$ c) $ZR=\{0,-\frac{4}{5}\}$ d) $ZR=\{1\}$
e) $ZR=\{0\}$ f) $ZR=\{-3,4\}$ g) $ZR=\{2,3\}$ h) $ZR=\{-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\}$
i) $ZR=\{-\frac{7}{4},\frac{7}{4}\}$ j) $ZR=\{1\}$ k) $ZR=\emptyset$ l) $ZR=\{2,3\}$ m) $ZR=\{-1,8\}$ n) $ZR=\{-5,3\}$ o) $ZR=\{-4,-1\}$

Rozdział 6

POTĘGI.

W XVI wieku zaczęto stosować tzw. notację potęgową tzn. zamiast pisać $x \cdot x \cdot x \cdot x$ czy też $a \cdot a \cdot a$ pisano odpowiednio x^4 czy też a^3. Notacja ta pierwotnie była tylko bardzo zgrabnym i wygodnym skrótem zapisu iloczynu kilku takich samych czynników. Wiemy już, że dla $n \geqslant 2$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots \cdot a}_{n\text{ – czynników}} \qquad \text{oraz} \qquad a^1 = a$$

Przypomnijmy, że o potęgi o wykładniku naturalnym mają własności

(1) $a^n \cdot a^p = a^{n+p}$

(2) $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

(3) $\dfrac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$ dla $n > p$

(4) $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$

(5) $(a^p)^n = a^{p \cdot n}$

Przypomnijmy, że

$(-1) \cdot a = -a$ czyli -1 razy a jest to liczba przeciwna do a

PRZYKŁADY

$(-1) \cdot 4 = -4, \quad (-1) \cdot (-5) = -(-5) = 5$

w szczególności

$(-1) \cdot 1 = -1, \quad (-1) \cdot (-1) = -(-1) = 1$

PRZYKŁADY

$$(-1)^{12} = (-1)^{2\cdot 6} = [(-1)^2]^6 = 1^6 = 1$$
$$(-1)^{13} = (-1)\cdot(-1)^{12} = (-1)\cdot 1 = -1$$

Ogólnie

$$\boxed{\begin{array}{l}(-1)^{2n} = [(-1)^2]^n = 1^n = 1 \quad n \in \mathbb{N}\\ (-1)^{2n+1} = (-1)\cdot(-1)^{2n} = (-1)\cdot 1 = -1\end{array}}$$

PRZYKŁADY

$$(-2)^4 = [(-1)\cdot 2]^4 = (-1)^4 \cdot 2^4 = 1\cdot 16 = 16$$
$$(-2)^5 = (-2)\cdot(-2)^4 = (-2)\cdot 16 = -32$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1^5}{2^5} = \frac{1}{32}$$
$$\left(-2\frac{1}{2}\right)^3 = \left(-\frac{5}{2}\right)^3 = -\left(\frac{5}{2}\right)^3 = -\frac{125}{4} = -31\frac{1}{4}$$

1. W miejsce kropek wstaw odpowiedni znak $<$, $=$ lub $>$.

a) $-2^4 \ldots\ldots (-2)^4$ b) $3^3 \ldots\ldots 3^5$ c) $(-3)^3 \ldots\ldots (-3)^5$

d) $5^{10} \ldots\ldots 5^{20}$ e) $(\frac{1}{3})^2 \ldots\ldots (\frac{1}{3})^4$ f) $-\frac{1}{3} \ldots\ldots -(\frac{1}{3})^2$

g) $(-\frac{1}{3})^3 \ldots\ldots (-\frac{1}{3})^5$ h) $(\frac{1}{2})^{30} \ldots\ldots (\frac{1}{2})^{40}$ i) $(0{,}3)^2 \ldots\ldots (0{,}3)^3$

j) $(0{,}3)^{20} \ldots\ldots (0{,}3)^{22}$ k) $(-7)^{10} \ldots\ldots (-7)^{20}$ l) $(-7)^{10} \ldots\ldots (-7)^{21}$

m) $-7^{10} \ldots\ldots -7^{20}$ n) $(-3\frac{1}{3})^4 \ldots\ldots (3\frac{1}{3})^4$ o) $(3\frac{1}{3})^2 \ldots\ldots (3\frac{1}{3})^4$

2. Uporządkuj rosnąco liczby

a) 2^3, -2^3, -2^4, $(-2)^4$, ...

b) $(\frac{1}{2})^2$, $(\frac{1}{2})^3$, $(\frac{1}{2})^4$, $-\frac{1}{2}$, $-(\frac{1}{2})^2$, $-(\frac{1}{2})^3$ ....

c) $\frac{2}{3}$, $(\frac{2}{3})^2$, $(\frac{2}{3})^5$, $\frac{3}{2}$, $(\frac{3}{2})^2$, $(\frac{3}{2})^3$ ....

3. Nie korzystając z kalkulatora oblicz:

a) $(-7)^2 - 5^2 =$ b) $(-12)^2 : (-2)^5 =$

c) $4^3 - 2\cdot(-3)^3 =$ d) $(-5)^3 - 2\cdot(-12)^2 =$

e) $-13^2 - (-14)^2 =$ f) $-16 - 13^2 =$

g) $2\cdot(-5)^3 - (-4)^2 =$ h) $-17^2 - 11^2 =$

i) $(-18)^2 - (-12)^2 =$ j) $(-6)^3 : (-3)^2 =$

4. Oblicz wartość wyrażeń pamiętając, że potęgowanie wykonujemy przed mnożeniem i dzieleniem.

a) $2^5 - (-2)^5$ b) $(\frac{1}{3})^4 + (-\frac{1}{3})^4$ c) $10^3 \cdot 0{,}1^2$

d) $\frac{1}{3} \cdot 3^2 + \frac{1}{4} \cdot 2^2$ e) $(\frac{1}{2})^3 : (\frac{1}{6})^2 - (-2)^3$ f) $(-0{,}1)^4 \cdot 20^3 - (-2)^4$

5. Wiedząc, że $2^{10} = 1\,024$ oblicz

a) 2^{11} b) 2^9 c) -2^{10}

d) $(\frac{1}{2})^{10}$ e) $(-\frac{1}{2})^{10}$ f) $(\frac{1}{2})^{11}$

g) $(-\frac{1}{2})^{11}$ h) $(0{,}5)^{11}$ i) $(-0{,}5)^{11}$

6. Przedstaw poniższe wyrażenia w postaci iloczynu dwóch potęg o podstawach a i b.

a) $a^2b \cdot ab$ b) $a^2b^3 \cdot a^4b^2$

c) $a^2 \cdot a \cdot b^3 \cdot b^5 \cdot b^2$ d) $a^4 \cdot a^9 \cdot b^2 \cdot a \cdot b^4 \cdot a^2$

e) $a^2 \cdot b^3 \cdot b^4 \cdot a \cdot a^4$ f) $a^3 \cdot b^2 \cdot a \cdot b^3 \cdot a^5$

g) $a^3 \cdot b^2 \cdot a^2 \cdot a^5 \cdot b^4 \cdot b \cdot a$ h) $a^3 \cdot b^2 \cdot a^2 \cdot a \cdot b^3 \cdot a \cdot b^4 \cdot a^6$

PRZYKŁADY zapisywania wyrażeń w postaci kwadratu wyrażenia.

$4^7 = (2^2)^7 = 2^{14} = (2^7)^2$

$144a^2 = (12a)^2$

$a^7 \cdot b^3 \cdot a^5 \cdot b = a^{12} \cdot b^4 = (a^6)^2 \cdot (b^2)^2 = (a^6 \cdot b^2)^2$

$8 \cdot 9a \cdot 2a^5 = 16 \cdot 9 \cdot a^6 = 4^2 \cdot 3^2 \cdot (a^3)^2 = 12^2 \cdot (a^3)^2 = (12a^3)^2$

7. Każde z poniższych wyrażeń arytmetycznych czy też algebraicznych zapisz podobnie jak w przykładach jako kwadrat odpowiedniego wyrażenia lub też liczby:

a) 0 b) 1 c) 2^6 d) 10^8

e) 4^3 f) 9^5 g) 16^5 h) 4^4

i) 32^6 j) a^8 k) $(ab)^6$ l) $9 \cdot 2^8$

m) $3 \cdot 3^3$ n) $7 \cdot 7^5$ o) $16a^4b^6$ p) $3 \cdot 15^3 \cdot 125$

q) $8 \cdot 18a^4$ r) $3 \cdot 12^3$ s) $32 \cdot 98a^4$ t) $54 \cdot 96a^6$

PRZYKŁADY

- Zapisz w postaci potęgi o podstawie 2 wyrażenie $4 \cdot 8^{19}$
  $4 \cdot 8^{19} = 2^2 \cdot (2^3)^{19} = 2^2 \cdot 2^{57} = 2^{59}$

- Zapisz w postaci potęgi o podstawie 4 wyrażenie $2 \cdot 8^{105}$
  $2 \cdot 8^{105} = 2 \cdot (2^3)^{105} = 2 \cdot 2^{3 \cdot 105} = 2 \cdot 2^{315} = 2^{316} = 2^{2 \cdot 158} = (2^2)^{158} = 4^{158}$
- Zapisz w postaci potęgi o podstawie 8 wyrażenie $2^{15} \cdot 4^{18}$
  $2^{15} \cdot 4^{18} = 2^{15} \cdot (2^2)^{18} = 2^{15} \cdot 2^{36} = 2^{51} = 2^{3 \cdot 17} = (2^3)^{17} = 8^{17}$

8. Zapisz w postaci potęgi o podstawie 2:

a) $\frac{1}{2} \cdot 2^{102}$ b) $\frac{1}{2} \cdot 4^{93}$ c) $\frac{1}{8} \cdot 4^{15}$ d) $\frac{1}{4} \cdot 8^{57}$
e) $\frac{1}{16} \cdot 8^{39}$ f) $\frac{1}{64} \cdot 4^{19}$ g) $\frac{1}{8} \cdot 2^{37}$ h) $\frac{1}{32} \cdot 16^{7}$
i) połowę liczby 32^{32} j) połowę liczby 16^{30} k) jedną czwartą liczby 8^{40}

9. Zapisz w postaci potęgi o podstawie 4:

a) 8^{20} b) 16^{37} c) 2^{92} d) 32^{32}
e) 64^{17} f) 1024^{8} g) 512^{12} h) 128^{8}
i) $\frac{1}{4} \cdot 128^{6}$ j) $\frac{1}{8} \cdot 512^{7}$ k) $\frac{1}{8} \cdot 128^{17}$ l) $\frac{1}{8} \cdot 8^{31}$

10. Wyznacz połowę połowy liczby 16^{20} i zapisz ją w postaci potęgi o podstawie 4.

11. Zapisz w postaci potęgi o podstawie 8:

a) $2^{14} \cdot 4^{5}$ b) $16^{7} \cdot 2 \cdot 4^{5}$ c) $32^{2} \cdot 4^{11} \cdot 2^{10}$ d) $16^{3} \cdot 4^{15} \cdot 8^{3}$
e) $256 \cdot 16^{5} \cdot 4^{7}$ f) $\frac{1}{4} \cdot 16^{5} \cdot 4^{7}$ g) $\frac{1}{16} \cdot 32^{30} \cdot 4^{13}$ h) $\frac{1}{32} \cdot 16^{7} \cdot 4^{26}$

12. Populacja bakterii podwaja się po upływie każdej godziny. Ile razy zwiększyła się liczba bakterii po upływie 10 godzin w stosunku do stanu wyjściowego, przy założeniu, że w tym czasie bakterie nie umierały.

W matematyce w niektórych sytuacjach używamy zwrotu *postać iloczynowa*. Mówiąc o potęgach przez postać iloczynową rozumiemy wyrażenie, które jest iloczynem potęg o różnych podstawach. W szczególności może to być tylko jedna potęga jakiejś liczby.

PRZYKŁADY postaci iloczynowych

$$7^{13}, \quad 2 \cdot 5^{8}, \quad 3^{7} \cdot 5^{12}, \quad 3 \cdot 2^{5} \cdot 7^{4}$$

PRZYKŁAD zamiany sumy na postać iloczynową

$$\underbrace{2^2 + 2^2}_{\text{suma}} = \underbrace{2 \cdot 2^2}_{\text{iloczyn}} = \underbrace{2^3}_{\text{iloczyn}}$$

PRZYKŁADY zamiany sumy na postać iloczynową

suma		iloczyn
$3x - 7x$	$=$	$-4x$
$5\heartsuit + 2\heartsuit$	$=$	$7\heartsuit$
$5 \cdot 11^2 + 2 \cdot 11^2$	$=$	$7 \cdot 11^2$
$2^3 + 2^3 + 2^3$	$=$	$3 \cdot 2^3$,

$8^7 + 8^6 = 8 \cdot 8^6 + 8^6 = 9 \cdot 8^6$

$7 \cdot 2^7 - 3 \cdot 2^5 = 7 \cdot 2^2 \cdot 2^5 - 3 \cdot 2^5 = 28 \cdot 2^5 - 3 \cdot 2^5 = 25 \cdot 2^5$

13. Zapisz w postaci potęgi

a) $2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2$ b) $3^2 + 3^2 + 3^2$ c) $2^7 + 2^7$

d) $2^6 + 2^6 + 2^6 + 2^6$ e) $2^{11} + 2^{11}$ f) $5^2 + 5^2 + 5^2 + 5^2 + 5^2$

g) $8 \cdot (2^8 + 2^8)$ h) $3^2(3^8 + 3^8 + 3^8)$

i) $8(2^4 + 2^4 + 2^4 + 2^4)$ j) $3^4 + 3^4 + 3^4$ k) $3 \cdot 2^7 - 2^7$

14. a) Ile dwójek trzeba dodać, aby otrzymać liczbę 2^6

b) Ile trójek trzeba dodać, aby otrzymać liczbę 3^5

c) Ile piątek trzeba dodać, aby otrzymać liczbę 5^3

15. Zapisz w postaci iloczynowej

a) $5 \cdot 3^{11} - 3^{10}$ b) $2^{10} + 2^{11}$ c) $3^{100} + 3^{101} + 3^{102}$

d) $8^{15} + 3 \cdot 2^{43}$ e) $3 \cdot 36^8 - 6^{17}$ f) $5^{41} + 7 \cdot 5^{42} + 8 \cdot 5^{43}$

g) $9^{10} - 10 \cdot 3^{19}$ h) $2^{15} + 2^{14} + 2^{13}$ i) $5 \cdot 2^{14} + 4^7 + 4^8$

j) $5 \cdot 10^{10} + 2 \cdot 10^{11}$ k) $5^9 + 25^4$ l) $7^7 + 2 \cdot 7^6 - 3 \cdot 7^5$

m) $2^{11} + 2^{14}$ n) $8^8 - 3 \cdot 2^{21}$ o) $6 \cdot 3^{100} + 3^{101} + 3^{103}$

p) $2 \cdot 3^{20} - 5 \cdot 3^{19}$ q) $10 \cdot 3^{18} - 9^{10}$ r) $10 \cdot 3^{11} - 3^{12}$

16. Przedstaw w prostszej postaci:

a) $\dfrac{2 \cdot 3^{20} - 5 \cdot 3^{19}}{9^9}$ b) $\dfrac{(3^{15} + 3^{13})2^9}{(3^{14} + 3^{12})1024}$ c) $\dfrac{5^{26} + 5^{25} + 5^{24}}{2 \cdot 2^{14} \cdot 2^{14} - 2^{12} \cdot 2^{12}}$

d) $\dfrac{2^{20} + 2^{20} + 2^{21}}{4^9 + 4^9 + 2^{19}}$ e) $\dfrac{2 \cdot 3^{73} - 3^{72}}{\frac{1}{3} \cdot 3^{75} + 27^{24}}$ f) $\dfrac{(3 \cdot 2^{20} + 7 \cdot 2^{19}) \cdot 52}{(13 \cdot 8^4)^2}$

g) $\dfrac{3^{51} + 3^{52} + 3^{53}}{9^{25} + 9^{26} + 9^{27}}$ h) $\dfrac{4^{36} + 2 \cdot 16^{17}}{2^{72} + 2^{69}}$

Zastosowana notacja zapisywania potęg doprowadziła do dalszego rozwoju pojęcia potęgi. Obecnie rozszerzymy pojęcie potęgi na dowolne wykładniki całkowite. Miejmy w świadomości, że jeżeli rozszerzamy pojęcie potęgi, to wszystkie własności potęgi muszą być spełnione po tym rozszerzeniu.
Wpierw rozważmy wykładnik zerowy. Spójrzmy w tym celu na wyrażenie $\frac{a^3}{a^3}$ dla $a \neq 0$. Z jednej strony $\frac{a^3}{a^3} = 1$, a z drugiej strony, jeżeli ma być spełniona własność (3) potęgi, to
$\frac{a^3}{a^3} = a^{3-3} = a^0$. Wynika z tego, że należy przyjąć iż

$$\boxed{a^0 = 1 \quad \text{dla} \quad a \neq 0}$$

Podobnie spójrzmy, na przykład, na wyrażenie $\frac{a^3}{a^5}$ i zauważmy, że

$$\frac{a^3}{a^5} = \frac{a^3}{a^3 \cdot a^2} = \frac{a^3}{a^3} \cdot \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a^2},$$

zaś z drugiej strony, jeżeli ma być zachowana własność 3, to

$$\frac{a^3}{a^5} = a^{3-5} = a^{-2},$$

Wobec tego mamy

$$a^{-2} = \frac{1}{a^2} \quad \text{dla} \quad a \neq 0$$

Przyjmujemy ogólnie, że

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{dla} \quad a \neq 0}$$

Tym sposobem mamy określone pojęcie potęgi dla dowolnego wykładnika całkowitego. Przy takim określeniu potęgi o dowolnym wykładniku całkowitym zachodzi wszystkich pięć własności potęgi.

$$\boxed{\begin{array}{ll}
(1) & a^n \cdot a^p = a^{n+p} \\
(2) & a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \\
(3) & \frac{a^n}{a^p} = a^{n-p} \quad \text{dla} \quad a \neq 0 \\
(4) & \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \quad \text{dla } b \neq 0 \\
(5) & (a^p)^n = a^{p \cdot n}
\end{array}}$$

PRZYKŁADY

a) $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

b) $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

c) $(-2)^{-2} = \frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{4}$

d) $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{-8} = -\frac{1}{8}$

e) $(\frac{1}{2})^{-2} = \frac{1}{(\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$

f) $(-\frac{1}{2})^{-3} = \frac{1}{(-\frac{1}{2})^3} = \frac{1}{-\frac{1}{8}} = 1 \cdot (-8) = -8$

g) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1\cdot 3} = \left((\frac{2}{3})^{-1}\right)^3 = \left(\frac{1}{(\frac{2}{3})^1}\right)^3 = \left(\frac{1}{\frac{2}{3}}\right)^3 = (1 \cdot \frac{3}{2})^3 = (\frac{3}{2})^3$

17. Oblicz (staraj się tylko w pamięci)

a) $5^{-3} =$ b) $4^{-4} =$ c) $(\frac{2}{5})^{-1} =$ d) $(\frac{3}{7})^{-2} =$

e) $(2\frac{1}{4})^{-2} =$ f) $(-3\frac{1}{3})^{-3} =$ g) $(2{,}5)^{-1} =$ h) $(2{,}5)^{-2} =$

i) $(-2{,}5)^{-2} =$ j) $(-3)^{-3} =$ k) $(-3)^{-4} =$ l) $-3^{-4} =$

m) $-0{,}2^4 =$ n) $(-0{,}2)^4 =$ o) $(0{,}01)^{-3} =$ p) $(0{,}12)^{-2} =$

q) $(-0{,}12)^{-2} =$ r) $-0{,}12^{-2} =$ s) $(0{,}125)^{-2} =$ t) $(0{,}375)^{-2} =$

18. Zastąp kropki odpowiednimi liczbami, tak aby była spełniona równość

a) $(\frac{2}{3})^4 = (\ldots.)^{-4}$ b) $(\frac{5}{3})^3 = (\ldots.)^{-3}$ c) $(0{,}3)^{-5} = (\ldots.)^5$

d) $(0{,}1)^{-3} = (\ldots.)^3$ e) $12^3 = (\ldots.)^{-3}$ f) $5^4 = (\ldots.)^{-4}$

19. Skreśl błędne obliczenia

a) $2^{-3} = -8$ b) $(-5)^{-2} = \frac{1}{25}$ c) $(-1)^{-1} = 1$

d) $(3\frac{1}{5})^{-1} = 5\frac{1}{3}$ e) $(-1\frac{2}{3})^{-1} = -1\frac{3}{2}$ f) $(-2)^3 = -8$

20. W miejsce kropek wstaw odpowiedni znak: <, > lub =

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^5 \ldots. \left(\frac{1}{3}\right)^{-5}$ b) $(0{,}3)^{-1} \ldots. (0{,}1)^{-1}$ c) $(0{,}1)^3 \ldots. (0{,}1)^4$

d) $(0{,}1)^{-3} \ldots. (0{,}1)^{-4}$ e) $(-0{,}1)^{-3} \ldots. (-0{,}1)^{-5}$ f) $(-2)^{-3} \ldots. (-2)^{-5}$

21. Korzystając z własności działań na potęgach zapisz w postaci jednej potęgi

a) $a^{-4} \cdot a^{6} \cdot a^{-3} \cdot a^{5} =$ b) $a^{5} : a^{3} : a^{-4}$ c) $a^{5} : a^{3} \cdot a^{-4}$

d) $a^{5} \cdot a^{3} : a^{-4}$ e) $a^{5} \cdot a^{3} \cdot a^{-4}$ f) $\left[\dfrac{(a^4)^3 : (a^5)^{-2}}{(a^3)^7}\right]^{-2}$

g) $a^{-6} \cdot \dfrac{(a^{-3})^{-4}}{a^4}$ h) $\dfrac{\left[(a^2)^{-2} \cdot a^6\right]^{-3}}{(a^{-2})^5}$

22. Oblicz korzystając z własności potęg o wykładniku całkowitym

a) $4^{-7} \cdot 4^{6} \cdot 4^{-2}$ b) $(\frac{1}{5})^{-1} + (\frac{1}{5})^{-2}$ c) $(0{,}2)^{-6} \cdot (0{,}2)^{12} \cdot (0{,}2)^{-4}$

d) $\left(\dfrac{3^{-4} \cdot 3^{-2}}{3^{-5}}\right)^{-3}$ e) $\dfrac{5^{-6} \cdot (5^{-2} : 5)^{-1}}{5^4 : (5^2 \cdot 5^6)}$ f) $25 \cdot 125^3 \cdot 5^0 \cdot 5^{-3} : 25^3$

g) $\frac{1}{81} \cdot 9^{-3} \cdot 3^7 : 27^{-2}$ h) $\dfrac{3^5 \cdot (-4)^9}{48^4}$ i) $\dfrac{36 \cdot (-6)^7 \cdot (-6)^4}{6^{12} : (-6)}$

j) $\dfrac{64^2}{16^3} : \dfrac{4^{-4}}{2^{-3}}$ k) $\dfrac{0{,}25^4 \cdot 0{,}5^{-5}}{0{,}125^2}$ l) $\dfrac{0{,}25^2}{0{,}001^3} : \dfrac{0{,}5}{0{,}01^5}$

m) $\dfrac{(3 \cdot 8)^9 \cdot (5 \cdot 6)^8}{(3 \cdot 5)^8 \cdot (6 \cdot 8)^7}$ n) $\dfrac{64^2 \cdot 36^2}{6^3 \cdot 2^7}$ o) $(-\frac{1}{16}) \cdot (-32) \cdot (-\frac{1}{4})^{-2} : 2^{-5}$

p) $\dfrac{0{,}2^5 \cdot 0{,}04^3}{0{,}0016^2}$ q) $\dfrac{0{,}3^5}{0{,}01^4} \cdot \dfrac{0{,}001^2}{0{,}09^3}$ r) $\dfrac{0{,}125^3 \cdot 0{,}25}{0{,}0625^2 \cdot 0{,}5^5}$

23. Korzystając z równości $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$ dla m całkowitego i dowolnych a, b oraz z równości $a^m : b^m = (a : b)^m$ dla m całkowitego, $b \neq 0$ i dowolnego a, oblicz:

a) $(1\frac{3}{4})^6 \cdot (\frac{2}{7})^6 =$ b) $(0{,}8)^4 : (2\frac{2}{3})^4 =$ c) $(-6{,}5)^3 : (-0{,}13)^3 =$

d) $(4\frac{1}{2})^3 \cdot (-\frac{2}{3})^3 \cdot (-2)^3$ e) $(2\frac{1}{4})^4 \cdot 0{,}6^4 \cdot (-\frac{1}{15})^4 =$ f) $(0{,}3)^4 \cdot (2\frac{2}{3})^4 : (-4)^4 =$

g) $(2\frac{1}{4})^{-15} \cdot (\frac{4}{9})^{-15} =$ h) $(2{,}5)^{10} \cdot (2{,}5)^{-10} =$ i) $(1\frac{1}{4})^5 \cdot (0{,}4)^5 : (0{,}5)^4 =$

j) $0{,}1^8 \cdot 0{,}2^8 : 0{,}02^6 =$ k) $(1\frac{1}{2})^3 : (2\frac{1}{4})^3 \cdot 3^3 =$ l) $(0{,}5)^6 \cdot (-0{,}5)^7 : (0{,}5)^{13} =$

24. Oblicz pamiętając o kolejności wykonywania działań

(a) $\{[(-2)^2]^{-3} - (2^4)^{-2}\} \cdot 21\frac{1}{3}$

(b) $-(-1^{-4})^{15} - [-(-1)^3]^7 - 1^{12} \cdot (-1^6)^{-11}$

(c) $(3^5)^{-9} \cdot [(\frac{1}{3})^{-2}]^7 : (3^{-3})^{-5} \cdot [(-\frac{1}{3})^{-6}]^8$

(d) $(\frac{1}{4})^{-2} - 4^{-2} \cdot 3$

(e) $(3^{-1} \cdot 6^2 - 5)^{-1}$

(f) $[(-1)^{-2} - 2^{-1} + 2]^{-2}$

(g) $[(4\frac{4}{5})^{-1} \cdot 2\frac{2}{3} - (1\frac{1}{2})^{-2}]^{-1}$

25. Oblicz sprytnie korzystając z własności potęg – nie pracuj fizycznie!

a) $\frac{3^5 \cdot 3^4 + (3^3)^3}{3^8}$ b) $\frac{2^3 - 2^7 : 2^3}{3 \cdot 2^3}$ c) $\frac{5^8 \cdot (5^2)^2}{10^{10} : 2^{10}}$

d) $\frac{40^5 : 5^5}{2^6 : 4^6}$ e) $\frac{81 \cdot 16}{6^3}$ f) $\frac{14^4}{2^5 \cdot 7^3}$

PRZYKŁADY

Która z liczb jest większa 26^{17} czy 83^{13}?

Liczby 26 i 83 możemy oszacować przy pomocy potęg liczby 3, a mianowicie

$$26 < 27 = 3^3 \quad \text{oraz} \quad 83 > 81 = 3^4$$

Stąd mamy:

$$26^{17} < 27^{17} = (3^3)^{17} = 3^{51}$$
$$83^{13} > 81^{13} = (3^4)^{13} = 3^{52}$$

Zatem $26^{17} < 3^{51} < 3^{52} < 83^{13}$

26*. Która z liczb jest większa

a) 31^{11} czy 17^{14}? b) 127^{23} czy 513^{18}? c) 20^{50} czy 50^{20}?

27*. Czy liczba 2^{20} jest większa niż milion?

28*. Ustaw następujące liczby w porządku rosnącym $2^{55}, 3^{40}, 4^{27}, 5^{21}$.

29*. Oblicz $1 + (2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)(2^{32}+1)$

30.** Która z liczb jest większa $(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 1993)^2$ czy 1993^{997}?

Odpowiedzi.

1. a) $<$ b) $<$ c) $>$ d) $<$ e) $>$ f) $<$ g) $<$ h) $>$ i) $>$
j) $>$ k) $<$ l) $>$ m) $>$ n) $=$ o) $<$

2. a) $-2^4, -2^3, 2^3, (-2)^4$ b) $-\frac{1}{2}, -(\frac{1}{2})^2, -(\frac{1}{2})^3, (\frac{1}{2})^4, (\frac{1}{2})^3, (\frac{1}{2})^2$
c) $(\frac{2}{3})^5, (\frac{2}{3})^2, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, (\frac{3}{2})^2, (\frac{3}{2})^3$

3. a) 24 b) $-4\frac{1}{2}$ c) $64+54=118$ d) $-125-288=-413$ e) -365
f) -185 g) -266 h) -410 i) 180 j) -24

4. a) 64 b) $\frac{2}{81}$ c) 10 d) 4 e) $12\frac{1}{2}$ f) $-15{,}2$

5. a) 2048 b) 512 c) -1024 d) $\frac{1}{1024}$ e) $\frac{1}{1024}$ f) $\frac{1}{2048}$ g) $-\frac{1}{2048}$ h) $\frac{1}{2048}$
i) $-\frac{1}{2048}$

6. a) a^3b^2 b) a^6b^5 c) a^3b^{10} d) $a^{16}b^6$ e) a^7b^7 f) a^9b^5 g) $a^{11}b^7$
h) $a^{13}b^9$

7. a) 0^2 b) 1^2 c) $(2^3)^2$ d) $(10^4)^2$ e) $(2^3)^2$ f) $(3^5)^2$ g) $(4^5)^2$ h) $(2^4)^2$
i) $(32^3)^2$ j) $(a^4)^2$ k) $(a^3b^3)^2$ l) $(3\cdot 2^4)^2$ m) $(3^2)^2$ n) $(7^3)^2$ o) $(4a^2b^3)^2$
p) $(3^2\cdot 5^3)^2$ q) $(4\cdot 3\cdot a^2)^2$ r) $(3^2\cdot 2^3)^2$ s) $(2^6\cdot 7\cdot a^2)^2$ t) $(2^3\cdot 3^2\cdot a^3)^2$

8. a) 2^{101} b) 2^{185} c) 2^{27} d) 2^{169} e) 2^{113} f) 2^{32} g) 2^{34} h) 2^{37} i) 2^{159}
j) 2^{149} k) 2^{118}

9. a) 4^{30} b) 4^{68} c) 4^{184} d) 4^{80} e) 4^{51} f) 4^{40} g) 4^{54} h) 4^{28} i) 4^{20} j)
4^{30} k) 4^{53} l) 4^{30}

10. 4^{39}

11. a) 8^8 b) 8^{13} c) 8^{14} d) 8^{17} e) 8^{14} f) 8^{11} g) 8^{58} h) 8^{25}

12. wsk. Ile razy zwiększy się ilość bakterii po godzinie, a ile razy po dwóch godzinach? odp. 2^{10} czyli 1024 razy

13. a) 2^4 b) 3^3 c) 2^8 d) 2^8 e) 2^{12} f) 5^3 g) 2^{11} h) 3^{11} i) 2^7 j) 3^5
k) $2\cdot 2^7$

14. a) $2^5=32$ b) $3^4=81$ c) $5^2=25$

15. a) $2\cdot 7\cdot 3^{10}$ b) $3\cdot 2^{10}$ c) $3^{100}\cdot 13$ d) $3\cdot 2^{45}$ e) $-3\cdot 616$ f) $236\cdot 5^{41}$
g) $-7\cdot 3^{19}$ h) $7\cdot 2^{13}$ i) $5\cdot 2^{15}$ j) $25\cdot 10^{10}$ k) $6\cdot 5^8$ l) $60\cdot 7^5$ m) $9\cdot 2^{11}$
n) $5\cdot 2^{21}$ o) $31\cdot 3^{100}$ p) 3^{19} q) 3^{18} r) $7\cdot 3^{11}$

16. a) 3 b) $\frac{3}{2}$ c) $(\frac{5}{2})^{24}$ d) 4 e) $\frac{1}{2}$ f) $\frac{1}{8}$ g) $\frac{3}{7}$ h) 1

17. a) $\frac{1}{125}$ b) $\frac{1}{256}$ c) $\frac{5}{2}$ d) $\frac{49}{9}=5\frac{4}{9}$ e) $\frac{16}{81}$ f) $-\frac{27}{1000}$ g) $\frac{2}{5}$ h) $\frac{4}{25}$ i) $\frac{4}{25}$
j) $-\frac{1}{27}$ k) $\frac{1}{81}$ l) $-\frac{1}{81}$ m) $-0{,}0016$ n) $0{,}0016$ o) $1\,000\,000=10^6$ p) $69\frac{4}{9}$
q) $69\frac{4}{9}$ r) $-69\frac{4}{9}$ s) 64 t) $7\frac{1}{9}$

18. a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{10}{3}$ d) 10 e) $\frac{1}{12}$ f) $\frac{1}{5}$

19. błędne a), c), d), e)

20. a) $<$ b) $<$ c) $>$ d) $<$ e) $>$ f) $<$

21. a) a^4 b) a^6 c) a^{-2} d) a^{12} e) a^4 f) a^{-2} g) a^2 h) a^4

22. a) $\frac{1}{64}$ b) 30 c) $0{,}04$ d) 27 e) 5 f) 25 g) 27 h) -12 i) 36 j) 32

k) 8 l) 0,0125 m) $3 \cdot 8^2 \cdot 6 = 1152$ n) $2^5 \cdot 6 = 192$ o) 1024 p) 0,008
q) $333\frac{1}{3}$ r) 4
23. a) $\frac{1}{64}$ b) 0,0081 c) 50 d) $6^3 = 216$ e) $0{,}09^4$ f) $\frac{1}{625}$ g) 1 h) 1
i) $\frac{1}{2}$ j) 0,0004 k) 8 l) -1
24. a) $\frac{1}{4}$ b) 1 c) 9 d) $15\frac{13}{16}$ e) $\frac{1}{7}$ f) $\frac{4}{25}$ g) 9
25. a) 6 b) $-\frac{1}{3}$ c) 25 d) 2^{21} e) 6 f) $3\frac{1}{2}$
26. a) $17^{14} > 31^{11}$, wsk $31 < 32$ i $16 < 17$ b) $127^{23} < 513^{18}$
wsk. $127 < 128$, $512 < 513$ c) wsk. porównaj poprzednie podpunkty
27. tak, wsk. $2^{20} = 2^{10} \cdot 2^{10}$ i $2^{10} = 1024$
28. $5^{21} < 4^{27} < 2^{55} < 3^{40}$
29. 2^{64}, wsk. $(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)(2^{32}+1) = (2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)(2^{32}+1) = \ldots$
30. $(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 1993)^2 > 1993^{997}$, wsk. dla dowolnego nieparzystego $k \leqslant 1993$ mamy $k(1994-k) \geqslant 1993$ i
$(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot 1993)^2 = (1 \cdot 1993)(3 \cdot 1991) \cdot (5 \cdot 1989) \cdot \cdots \cdot (1993 \cdot 1)$

Rozdział 7

PIERWIASTKI.

Zacznijmy od pewnych zadań.

1. Podaj długość boku kwadratu, którego pole jest równe

a) $9\,\mathrm{m}^2$ b) $64\,\mathrm{cm}^2$ c) $\frac{1}{16}\,\mathrm{m}^2$ d) $\frac{25}{49}\,\mathrm{dm}^2$ e) $0{,}36\,\mathrm{cm}^2$

2. Podaj jaką długość ma krawędź sześcianu o objętości

a) $8\,\mathrm{dm}^3$ b) $64\,\mathrm{mm}^3$ c) $\frac{1}{27}\,\mathrm{m}^3$ d) $\frac{8}{125}\,\mathrm{cm}^3$

Zadanie 1 polegało na znalezieniu liczb, których kwadrat był dany, a zadanie 2 na znalezieniu liczb, których sześcian był dany. Czynność, którą tam wykonywaliśmy nazywamy wyznaczaniem pierwiastka z danej liczby.

Pierwiastkiem drugiego stopnia z nieujemnej liczby a nazywamy taką liczbę **nieujemną**, której kwadrat jest równy a i oznaczamy go $\sqrt{a}$. Często zamiast nazwy: pierwiastek stopnia drugiego, używamy krótszej nazwy: **pierwiastek kwadratowy**.

PRZYKŁADY

1. $\sqrt{16} = 4$, bo $4^2 = 16$
2. $\sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}$, bo $\left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$
3. $\sqrt{7}$ jest liczbą, której kwadrat jest równy 7, ale liczby tej nie można przedstawić w postaci ilorazu liczb całkowitych czyli ułamka o liczniku i mianowniku całkowitym. Dowód tego faktu pomijamy.
   Możemy natomiast oszacować $\sqrt{7}$ następująco:
   $$2{,}64 < \sqrt{7} < 2{,}65 \quad \text{bo} \quad 2{,}64^2 < 7 < 2{,}65^2$$

Pierwiastkiem trzeciego stopnia z liczby a nazywamy taką liczbę, której sześcian jest równy a i oznaczamy go $\sqrt[3]{a}$. Pierwiastek ten często nazywamy **pierwiastkiem sześciennym.**

PRZYKŁADY

1. $\sqrt[3]{8} = 2$, bo $2^3 = 8$
2. $\sqrt[3]{\dfrac{216}{125}} = \dfrac{6}{5}$, bo $\left(\frac{6}{5}\right)^3 = \frac{216}{125}$
3. $\sqrt{30\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{121}{4}} = \frac{11}{2} = 5\frac{1}{2}$
4. $\sqrt[3]{2}$ jest liczbą, której sześcian jest równy 2, ale liczby tej nie można przedstawić w postaci ułamka o całkowitym liczniku i mianowniku. Możemy natomiast oszacować $1{,}25 < \sqrt[3]{2} < 1{,}26$, bo $1{,}25^3 < 2 < 1{,}26^3$

Przypomnijmy, że liczby, które można przedstawić w postaci ilorazu liczb całkowitych nazywamy **liczbami wymiernymi**.
Liczby, których nie można przedstawić w postaci ilorazu liczb całkowitych nazywamy **liczbami niewymiernymi.** $\sqrt[3]{2}$ nie jest zatem liczbą wymierną. Dowód tego faktu pomijamy.
Liczby wymierne i niewymierne tworzą razem zbiór, który nazywamy zbiorem liczb rzeczywistych i oznaczamy go $\mathbb{R}$.

3. Zapisz każdą z poniższych liczb bez użycia symbolu pierwiastka. Staraj się wszystko liczyć w pamięci.

a) $\sqrt{\dfrac{4}{9}}$ b) $\sqrt{\dfrac{9}{25}}$ c) $\sqrt{\dfrac{25}{144}}$ d) $\sqrt{\dfrac{49}{400}}$

e) $\sqrt{12\dfrac{1}{4}}$ f) $\sqrt{1\dfrac{7}{9}}$ g) $\sqrt{3\dfrac{13}{36}}$ h) $\sqrt{\dfrac{64}{900}}$

i) $\sqrt{3\dfrac{1}{16}}$ j) $\sqrt{4\dfrac{25}{36}}$ k) $\sqrt{5\dfrac{4}{9}}$ l) $\sqrt{225}$

m) $\sqrt{2{,}25}$ n) $\sqrt{0{,}0225}$ o) $\sqrt{169}$ p) $\sqrt{1{,}69}$

q) $\sqrt{0{,}0169}$ r) $\sqrt{256}$ s) $\sqrt{2{,}56}$ t) $\sqrt{0{,}0256}$

4. Nie posługując się kalkulatorem wypisz kwadraty wszystkich liczb naturalnych od 1 do 31. Zauważ, że tym sposobem wyznaczysz pierwszych 31 liczb naturalnych, z których pierwiastek kwadratowy jest liczbą naturalną.

$\boxed{! \Rightarrow}$

5. Nie posługując się kalkulatorem wyznacz trzecie potęgi, a mówiąc żargonem matematycznym *sześciany*, liczb naturalnych od 1 do 10. Zauważ, że tym sposobem wyznaczysz pierwszych dziesięć liczb naturalnych, z których pierwiastek sześcienny jest liczbą naturalną. $\boxed{!\Leftarrow}$

6. Oblicz w pamięci pierwiastki.

a) $\sqrt{2\frac{14}{25}}$ b) $\sqrt{1\frac{13}{36}}$ c) $\sqrt{1\frac{21}{100}}$ d) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$

e) $\sqrt[3]{2\frac{10}{27}}$ f) $\sqrt[3]{1\frac{61}{64}}$ g) $\sqrt[3]{2\frac{93}{125}}$ h) $\sqrt[3]{\frac{27}{64}}$

i) $\sqrt[3]{\frac{1}{343}}$ j) $\sqrt{1{,}96}$ k) $\sqrt{2{,}89}$ l) $\sqrt{0{,}0064}$

m) $\sqrt[3]{0{,}000008}$ n) $\sqrt[3]{0{,}027}$ o) $\sqrt[3]{0{,}125}$ p) $\sqrt[3]{0{,}064}$

q) $\sqrt[3]{-0{,}216}$ r) $\sqrt[3]{0{,}000027}$ s) $\sqrt[3]{-0{,}512}$ t) $\sqrt[3]{0{,}343}$

u) $\sqrt[3]{-27}$ v) $\sqrt[3]{-\frac{343}{125}}$ w) $\sqrt[3]{-0{,}008}$ x) $\sqrt[3]{-0{,}000001}$

7. Nie korzystając z kalkulatora, a wiedząc że w każdym przypadku wynik jest liczbą całkowitą, oblicz $\sqrt{x^2+y^2}$, gdy

a) $x = 3 \quad y = 4$ b) $x = 12 \quad y = 5$ c) $x = 9 \quad y = 12$

d) $x = 20 \quad y = 15$ e) $x = 24 \quad y = 10$ f) $x = 21 \quad y = 20$

g) $x = 8 \quad y = 15$

8. Oblicz wartość następujących pierwiastków dla $a = 4$, $b = 2$, $c = 6$

a) $\sqrt{2a^2b}$ b) $\sqrt{a^2+5b^2}$ c) $\sqrt{3bc}$

d) $\sqrt{\frac{a-2b}{a+2b}}$ e) $\sqrt{1-a^2c+ac^2}$ f) $\sqrt{2a^2+3b^2+c^2+1}$

9. Oblicz

a) $\sqrt{36}+\sqrt[3]{27}$ b) $\sqrt{169}-\sqrt{225}+\sqrt{144}$ c) $\sqrt[3]{216}\cdot\sqrt{81}$

d) $\sqrt{1600} : \sqrt[3]{64} : \sqrt{16}$ e) $\sqrt{\sqrt{144} : (\sqrt{25}-\sqrt{4})}$ f) $\sqrt[3]{\sqrt{81}-1}$

g) $\sqrt{\sqrt{256}}$ h) $\sqrt{\sqrt{36}\cdot\sqrt{36}}$ i) $\sqrt{\sqrt{36}+\sqrt{100}}$

j) $(-\frac{1}{3})^2-\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{9}}$ k) $\sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{8}-\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{1000}-\sqrt[3]{8}}}$

10. Oblicz

a) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{4}}}}$ b) $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{4}}}$ c) $\sqrt{\sqrt{8\sqrt[3]{2\sqrt[3]{64}}}}$

PRZYKŁADY szacowania pierwiastków, które nie są liczbami wymiernymi.
Liczbę $\sqrt{85}$ szacujemy przy pomocy liczb $\sqrt{81}$ i $\sqrt{100}$. Mamy bowiem

$$81 < 85 < 100,$$

wobec tego

$$\sqrt{81} < \sqrt{85} < \sqrt{100},$$

a ponieważ liczby 81 i 100 są kwadratami kolejnych liczb naturalnych 9 i 10, wobec tego mamy

$$9 < \sqrt{85} < 10.$$

Liczbę $\sqrt[3]{135}$ szacujemy przy pomocy liczb $\sqrt[3]{125}$ i $\sqrt[3]{216}$. Mamy bowiem

$$125 < 135 < 216,$$

wobec tego

$$\sqrt[3]{125} < \sqrt[3]{135} < \sqrt[3]{216},$$

a ponieważ

$$\sqrt[3]{125} = 5,\ \sqrt[3]{216} = 6,$$

wobec tego

$$5 < \sqrt[3]{135} < 6.$$

11. Postępując podobnie, dobierz dwie kolejne liczby naturalne tak, aby jedna była mniejsza, a druga większa od podanej liczby.

a) $\sqrt{14}$ b) $\sqrt{31}$ c) $\sqrt{87}$ d) $\sqrt{200}$ e) $\sqrt[3]{10}$

f) $\sqrt[3]{30}$ g) $\sqrt[3]{200}$ h) $\sqrt[3]{1500}$

PRZYKŁAD porównywania pierwiastków.
W celu porównania $\sqrt{24}$ i $\sqrt[3]{130}$ zauważmy, że

$$\sqrt{24} < \sqrt{25} = 5 = \sqrt[3]{125} < \sqrt[3]{130}$$

czyli

$$\sqrt{24} < \sqrt[3]{130}.$$

12. Postępując podobnie jak w powyższym przykładzie w miejsce kropek wstaw znak < lub >.

a) $\sqrt{26}\ldots\ldots\sqrt[3]{60}$ b) $\sqrt[3]{0{,}1}\ldots\ldots\sqrt{1{,}1}$ c) $\sqrt[3]{30}\ldots\ldots\sqrt{17}$

d) $\sqrt{\frac{1}{35}}\ldots\ldots\sqrt[3]{\frac{1}{217}}$ e) $\sqrt[3]{\frac{1}{26}}\ldots\ldots\sqrt{\frac{1}{126}}$ f) $\sqrt{42}\ldots\ldots\sqrt[3]{200}$

WŁASNOŚĆ 1.

$\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ dla dowolnych liczb $a,b\geqslant 0$

$\sqrt[3]{a\cdot b}=\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}$ dla dowolnych liczb a,b

$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ dla $a\geqslant 0$, $b>0$

$\sqrt[3]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$ dla dowolnych a i dowolnego $b\neq 0$

Czyli krótko mówiąc: *pierwiastek iloczynu jest równy iloczynowi pierwiastków, a pierwiastek ilorazu jest równy ilorazowi pierwiastków.*

PRZYKŁADY

Korzystając z własności 1 możemy obliczać pierwiastki z iloczynów i ilorazów następująco:

1. $\sqrt{121\cdot 16}=\sqrt{121}\cdot\sqrt{16}=11\cdot 4=44$
2. $\sqrt[3]{216\cdot 27}=\sqrt[3]{216}\cdot\sqrt[3]{27}=6\cdot 3=18$
3. $\sqrt{\frac{625}{144}}=\frac{\sqrt{625}}{\sqrt{144}}=\frac{25}{12}=2\frac{1}{12}$
4. $\sqrt[3]{\frac{343}{27}}=\frac{\sqrt[3]{343}}{\sqrt[3]{27}}=\frac{7}{3}=2\frac{1}{3}$

UWAGA

Analogiczne wzory dla pierwiastków z sumy lub różnicy **nie** zachodzą!

Oblicz:

a) $\sqrt{16+9}=$ .... b) $\sqrt{16}+\sqrt{9}=$ ....

c) $\sqrt{25-9}=$ .... d) $\sqrt{25}-\sqrt{9}=$ ....

czyli

- $\sqrt{16+9}\neq\sqrt{16}+\sqrt{9}$ jak również $\sqrt{25-9}\neq\sqrt{25}-\sqrt{9}$

13. Korzystając z **własności 1** oblicz w pamięci:

a) $\sqrt{49 \cdot 64} =$ b) $\sqrt[3]{125 \cdot 216} =$ c) $\sqrt[3]{8 \cdot 27} =$

d) $\sqrt[3]{\frac{343}{216}} =$ e) $\sqrt{\frac{121}{100}} =$ f) $\sqrt[3]{\frac{27}{1000}} =$

g) $\sqrt{81 \cdot 64} =$ h) $\sqrt{36 \cdot 49 \cdot 64} =$ i) $\sqrt[3]{0{,}125 \cdot 0{,}027} =$

j) $\sqrt{121 \cdot 100 \cdot 81} =$ k) $\sqrt[3]{27 \cdot 64 \cdot 125} =$ l) $\sqrt[3]{8 \cdot 216 \cdot 343} =$

PRZYKŁADY

Korzystając z własności 1 możemy pewne pierwiastki przedstawić w innej postaci:

1. $\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3 \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$
2. $\sqrt[3]{192} = \sqrt[3]{64 \cdot 3} = \sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{3} = 4 \cdot \sqrt[3]{3} = 4\sqrt[3]{3}$

Powyższą operację nazywamy wyłączaniem całkowitego czynnika przed znak pierwiastka. Dokładniej, to w tej operacji wyłączmy możliwie największy czynnik przed znak pierwiastka.

14. Korzystając z **własności 1** wyłącz całkowity czynnik przed znak pierwiastka.

a) $\sqrt{8}$ b) $\sqrt{44}$ c) $\sqrt{12}$ d) $\sqrt{1025}$ e) $\sqrt{20}$

f) $\sqrt{150}$ g) $\sqrt{1200}$ h) $\sqrt{27}$ i) $\sqrt{52}$ j) $\sqrt{300}$

k) $\sqrt{32}$ l) $\sqrt{98}$ m) $\sqrt{243}$ n) $\sqrt{99}$ o) $\sqrt{108}$

p) $\sqrt{112}$ q) $\sqrt{63}$ r) $\sqrt{48}$ s) $\sqrt{147}$ t) $\sqrt{135}$

15. Korzystając z własności 1 wyłącz całkowity czynnik przed znak pierwiastka.

a) $\sqrt[3]{24}$ b) $\sqrt[3]{32}$ c) $\sqrt[3]{250}$ d) $\sqrt[3]{7000}$ e) $\sqrt[3]{40}$

f) $\sqrt[3]{256}$ g) $\sqrt[3]{72}$ h) $\sqrt[3]{162}$ i) $\sqrt[3]{625}$ j) $\sqrt[3]{2048}$

k) $\sqrt[3]{320}$ l) $\sqrt[3]{80}$

Własność 1 można również wykorzystywać w odwrotny sposób.

PRZYKŁADY

- $\sqrt{5} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{5 \cdot 2 \cdot 10} = \sqrt{100} = 10$
- $\sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[3]{50} \cdot \sqrt[3]{100} = \sqrt[3]{25 \cdot 50 \cdot 100} = \sqrt[3]{125\,000} = 50$

16. Korzystając z własności 1 zapisz poniższe wyrażenia bez użycia symbolu pierwiastka.

a) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{20}$ b) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{18}$ c) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{50}$

d) $\sqrt{40}\cdot\sqrt{10}$ e) $\sqrt{12}\cdot\sqrt{3}$ f) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}$

g) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{125}$ h) $\sqrt{1{,}8}\cdot\sqrt{0{,}02}\cdot\sqrt{1000}$ i) $\sqrt{8}\cdot\sqrt{72}$

j) $\sqrt{10}\cdot\sqrt{16{,}9}$ k) $\sqrt{14{,}4}\cdot\sqrt{10}$

17. Oblicz korzystając z własności pierwiastków:

a) $\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{6}$ b) $\sqrt{\frac{2}{7}}\cdot\sqrt{56}$ c) $\sqrt{1\frac{1}{5}}\cdot\sqrt{30}$

d) $\sqrt{2\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{5}{8}}$ e) $\sqrt{63}:\sqrt{7}$ f) $\sqrt{363}:\sqrt{3}$

g) $\sqrt{5\frac{1}{3}}:\sqrt{8\frac{1}{3}}$ h) $\sqrt{490}\cdot\sqrt{0{,}1}$ i) $\sqrt{0{,}072}:\sqrt{0{,}2}$

j) $\sqrt{3{,}6}:\sqrt{0{,}1}$ k) $\sqrt[3]{5{,}4}:\sqrt[3]{0{,}2}$ l) $\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[3]{32}:\sqrt[3]{28}$

m) $\dfrac{\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[3]{14}\cdot\sqrt[3]{21}}{\sqrt[3]{6}}$

18. Korzystając z własności 1 włącz czynnik pod znak pierwiastka.

Przykład: $5\sqrt{3}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{25\cdot 3}=\sqrt{75}$

a) $2\sqrt{3}$ b) $3\sqrt{2}$ c) $5\sqrt{6}$ d) $8\sqrt{7}$ e) $2\sqrt{11}$

f) $3\sqrt[3]{2}$ g) $2\sqrt[3]{5}$ h) $3\sqrt[3]{5}$ i) $4\sqrt[3]{3}$ j) $5\sqrt[3]{6}$

k) $10\sqrt[3]{0{,}01}$ l) $0{,}1\sqrt[3]{140}$ m) $4\sqrt[3]{5}$ n) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}$ o) $2\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

Potęgowanie i pierwiastkowanie są ze sobą związane. Zaobserwuj ten związek w czasie obliczeń.

19. Oblicz. W przykładach e) i f) nie podnoś liczby pod pierwiastkiem do kwadratu, a w przykładach k) i l) do sześcianu.

a) $\sqrt{5^2}$ b) $\sqrt{(-7)^2}$ c) $\sqrt{12^2}$ d) $\sqrt{(-14)^2}$

e) $\sqrt{222^2}$ f) $\sqrt{(-137)^2}$ g) $\sqrt[3]{4^3}$ h) $\sqrt[3]{(\frac{1}{3})^3}$

i) $\sqrt[3]{(-3)^3}$ j) $\sqrt[3]{(-5)^3}$ k) $\sqrt[3]{152^3}$ l) $\sqrt[3]{(-111)^3}$

PRZYKŁADY

- $(\sqrt{5})^2 = \sqrt{5}\cdot\sqrt{5} = \sqrt{5\cdot 5} = \sqrt{5^2} = 5$
- $(\sqrt[3]{7})^3 = \sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{7\cdot 7\cdot 7} = \sqrt[3]{7^3} = 7$

WŁASNOŚĆ 2

1. $\sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{gdy} \quad a \geqslant 0 \\ -a & \text{gdy} \quad a < 0 \end{cases}$
2. $\sqrt[3]{a^3} = a$ dla dowolnego a
3. $(\sqrt{a})^2 = a$ dla $a \geqslant 0$
4. $(\sqrt[3]{a})^3 = a$ dla dowolnego a

Równości 1. i 2. wynikają z definicji pierwiastka, zaś równości 3. i 4. z własności 1. oraz powyższych dwóch równości. Niech bowiem a będzie dowolną liczbą nieujemną. Mamy wówczas:

$$(\sqrt{a})^2 \underbrace{=}_{\substack{\text{z definicji}\\ \text{potęgi}}} \sqrt{a}\cdot\sqrt{a} \underbrace{=}_{\text{z własności 1.}} \sqrt{a\cdot a} = \sqrt{a^2} \underbrace{=}_{\substack{\text{z własności}\\ \text{2 równości}\\ \text{1.}}} a$$

podobnie

$$(\sqrt[3]{a})^3 = \sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{a\cdot a\cdot a} = \sqrt[3]{a^3} = a$$

PRZYKŁADY

$\sqrt{10\,800} = \sqrt{100\cdot 108} = 10\sqrt{108} = 10\sqrt{36\cdot 3} = 10\cdot 6\sqrt{3} = 60\sqrt{3}$

$\sqrt{675} = \sqrt{25\cdot 27} = 5\sqrt{27} = 5\sqrt{9\cdot 3} = 5\cdot 3\sqrt{3} = 15\sqrt{3}$

20. Postępując w podobny sposób wyłącz maksymalnie duży czynnik przed znak pierwiastka.

a) $\sqrt{972}$ b) $\sqrt{448}$ c) $\sqrt[3]{432}$ d) $\sqrt[3]{1\,375}$ e) $\sqrt[3]{3\,645}$

f) $\sqrt[3]{375}$ g) $\sqrt{88}$ h) $\sqrt{2\,100}$ i) $\sqrt[3]{2\,500}$ j) $\sqrt{7350}$

Wyłączanie czynnika przed znak pierwiastka jest bardzo przydatne w upraszczaniu wyrażeń algebraicznych.

PRZYKŁADY Uprość wyrażenia

$$\text{a) } \sqrt{32}+\sqrt{50}+\sqrt{98} = \sqrt{16\cdot 2}+\sqrt{25\cdot 2}+\sqrt{49\cdot 2} = \sqrt{16}\cdot\sqrt{2}+\sqrt{25}\cdot\sqrt{2}+\sqrt{49}\cdot\sqrt{2} = 4\sqrt{2}+5\sqrt{2}+7\sqrt{2} = 16\sqrt{2}$$

$$\text{b) } \sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{192} = \sqrt[3]{8\cdot 3}+\sqrt[3]{27\cdot 3}-\sqrt[3]{64\cdot 3} = \sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{27}\cdot\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{64}\cdot\sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3}+3\sqrt[3]{3}-4\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3}$$

21. Sprowadź do prostszej postaci:

a) $3\sqrt{5}-2\sqrt{5}$ b) $3\sqrt{2}+2\sqrt{2}$

c) $3\sqrt{7}-2\sqrt{2}-5\sqrt{7}+4\sqrt{2}$ d) $\sqrt{28}-\sqrt{63}+\sqrt{700}-\sqrt{567}$

e) $3\sqrt{48}-2\sqrt{12}+6\sqrt{192}$ f) $3\sqrt{2450}+2\sqrt{2048}-\sqrt{13122}$

g) $3\sqrt{5}+\sqrt{50}-3\sqrt{72}+7\sqrt{20}$ h) $7\sqrt{15}+5\sqrt{27}-2\sqrt{12}$

i) $5\sqrt[3]{108}+3\sqrt[3]{1372}-\sqrt[3]{500}$ j) $8\sqrt[3]{16}-4\sqrt[3]{54}+9\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{432}$

k) $\sqrt{27}+\sqrt{48}+\sqrt{75}-2\sqrt{108}$ l) $\frac{7}{2}\sqrt{24}-\frac{40}{3}\sqrt{99}+7\sqrt{44}$

m) $\sqrt{8}+\sqrt{18}+\sqrt{50}-\sqrt{162}+4$ n) $(\sqrt[3]{54}-3\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{128}):\sqrt[3]{2}$

PRZYKŁAD

$$\frac{\sqrt{75}+\sqrt{48}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{25\cdot 3}+\sqrt{16\cdot 3}}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}+4\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{9\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 9$$

22. Uprość wyrażenia, tak jak w powyższym przykładzie.

a) $\frac{\sqrt{27}-\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$ b) $\frac{\sqrt{50}-\sqrt{18}}{\sqrt{8}}$ c) $\frac{6\sqrt{5}-\sqrt{45}}{12\sqrt{5}-\sqrt{125}}$

d) $\frac{\sqrt{175}-\sqrt{28}}{\sqrt{700}-\sqrt{63}}$ e) $\frac{\sqrt{44}}{\sqrt{99}-\sqrt{11}}$ f) $\frac{\sqrt{96}}{\sqrt{24}+4\sqrt{6}}$

g) $\frac{12\sqrt{12}}{3\sqrt{48}-2\sqrt{75}}$ h) $\frac{8\sqrt{15}}{\sqrt{135}-\sqrt{60}}$

PRZYKŁADY

$$\begin{aligned}(3\sqrt{15}-2\sqrt{3})(\sqrt{15}+3\sqrt{3}) &= 3\sqrt{15}\cdot\sqrt{15}+3\sqrt{15}\cdot 3\sqrt{3}-2\sqrt{3}\cdot\sqrt{15}-2\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{3}\\ &= 3\cdot 15+9\sqrt{15\cdot 3}-2\cdot\sqrt{3\cdot 15}-6\cdot 3\\ &= 45-18+7\sqrt{3\cdot 15}\\ &= 27+7\sqrt{3\cdot 3\cdot 5}\\ &= 27+7\cdot 3\cdot\sqrt{5}\\ &= 27+21\sqrt{5}\end{aligned}$$

23. Wykonaj działania i sprowadź wyniki do najprostszej postaci podobnie jak w powyższym przykładzie.

a) $(2\sqrt{10}-\sqrt{2})(\sqrt{10}+3\sqrt{2})$

b) $(3\sqrt{6}-2\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})$

c) $(\sqrt{10}-3\sqrt{5})(2\sqrt{10}+2\sqrt{5})$

d) $(3\sqrt{6}+\sqrt{10})(\sqrt{6}-2\sqrt{10})$

e) $(2\sqrt{21}-\sqrt{14})(3\sqrt{14}+\sqrt{21})$

f) $(\sqrt{8}-\sqrt{3})(3\sqrt{2}+\sqrt{3})$

g) $(2\sqrt{20}-5\sqrt{125}-2\sqrt{5})\cdot\sqrt{5}$

h) $\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$

i) $(3\sqrt{8}+\sqrt{18}-\sqrt{50})\cdot\sqrt{2}$

j) $\sqrt{3}(\sqrt{48}-\sqrt{27})$

k) $(4\sqrt{12}-8\sqrt{27}+\sqrt{48}-2\sqrt{75})\cdot\sqrt{3}$

l) $(7\sqrt{2}-3\sqrt{8})\sqrt{2}$

m) $(11\sqrt{3}+2\sqrt{10})\,(\sqrt{6}-\sqrt{5})$

n) $(2\sqrt{6}-\sqrt{12}-\sqrt{24}+\sqrt{48})\,\sqrt{2}$

o) $(7\sqrt{2}-3\sqrt{8}+3\sqrt{18})\cdot\sqrt{2}$

p) $(\sqrt{3}-5)(\sqrt{3}+3^2)$

q) $(2\sqrt{8}+3\sqrt{18}+\sqrt{50}-2\sqrt{72})\cdot\sqrt{2}$

r) $3\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2}-\sqrt{6})-\sqrt{72}$

s) $\sqrt{2}\cdot(\sqrt{18}+\sqrt{50})$

t) $(6\sqrt{10}-2\sqrt{3})\,(2\sqrt{10}-\sqrt{3})$

u) $(7\sqrt{2}-3\sqrt{3})\,(4\sqrt{2}+\sqrt{3})$

v) $(a-\sqrt{b})(2a+2\sqrt{b})$

w) $(5\sqrt{24}-4\sqrt{32}+3\sqrt{50}-3\sqrt{54})\cdot\sqrt{3}$

x) $(4\sqrt{5}+3\sqrt{3})\,(\sqrt{5}-2\sqrt{3})$

Przed kolejnymi ćwiczeniami przypomnijmy, że dla dowolnych liczb a, b mają miejsce następujące równości:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2\\ (a-b)^2 &= a^2-2ab+b^2\\ (a-b)(a+b) &= a^2-b^2\end{aligned}$$

Tego typu równości nazywamy często *wzorami skróconego mnożenia.* Są to po prostu tożsamości algebraiczne.

PRZYKŁADY

$(\sqrt{7}-2)^2 = (\sqrt{7})^2 - 2\cdot 2\cdot\sqrt{7} + 2^2 = 7 - 4\sqrt{7} + 4 = 11 - 4\sqrt{7}$

$(3+2\sqrt{7})^2 = 9 + 12\sqrt{7} + (2\sqrt{7})^2 = 9 + 12\sqrt{7} + 4\cdot 7 = 37 + 12\sqrt{7}$

$(2\sqrt{2}-3)(2\sqrt{2}+3) = (2\sqrt{2})^2 - 3^2 = 8 - 9 = -1$

24. Korzystając z wzorów skróconego mnożenia wykonaj odpowiednie działania i wynik zapisz w postaci $a + b\sqrt{c}$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{Z}$ (w części przykładów $b = 0$).

a) $(2+\sqrt{3})^2$ b) $(4-\sqrt{5})^2$ c) $(1+\sqrt{3})^2$

d) $(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2$ e) $(\sqrt{7}+\sqrt{5})^2$ f) $(\sqrt{13}-\sqrt{2})^2$

g) $(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})^2$ h) $(3\sqrt{15}-4\sqrt{3})^2$ i) $(\sqrt{3}-3\sqrt{5})^2$

j) $(\sqrt{3}-2\sqrt{5})^2$ k) $(2\sqrt{7}-3\sqrt{3})^2$ l) $\frac{1}{4}(\sqrt{12}+\sqrt{8})^2$

m) $(\sqrt{11}+2\sqrt{2})^2$ n) $(2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5})$ o) $(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})$

p) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})$ q) $(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})$ r) $(2\sqrt{5}-3\sqrt{2})^2$

25. Korzystając z wzorów skróconego mnożenia oblicz

a) $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2$ b) $\left(\sqrt{7-\sqrt{13}}-\sqrt{\sqrt{13}+7}\right)^2$

c) $\left(\sqrt{\sqrt{11}+6}+\sqrt{6-\sqrt{11}}\right)^2$ d) $\left(\sqrt{4-\sqrt{7}}-\sqrt{4+\sqrt{7}}\right)^2$

e) $\left(\sqrt{11-4\sqrt{7}}-\sqrt{11+4\sqrt{7}}\right)^2$ f) $\left(\sqrt{9-\sqrt{17}}-\sqrt{9+\sqrt{17}}\right)^2$

26. W każdym z poniższych przykładów wynik jest liczbą całkowitą; wyznacz tę liczbę

a) $\sqrt{\sqrt{2}-1}\cdot\sqrt{\sqrt{2}+1}$ b) $\sqrt[3]{\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{8}}\cdot\sqrt[3]{2}$

c) $\sqrt[3]{7-\sqrt{22}}\cdot\sqrt[3]{7+\sqrt{22}}$ d) $\sqrt{2\sqrt{3}+2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2\sqrt{3}-2\sqrt{2}}$

e) $\sqrt{\sqrt{19}+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{\sqrt{19}-\sqrt{3}}$ f) $\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}$

g) $\sqrt{2\sqrt{7}+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ h) $\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

Upraszczając wyrażenia arytmetyczne zawierające pierwiastki staramy się nie zostawiać pierwiastków w mianownikach wyrażeń. Postępujemy wówczas tak, jak w poniższym przykładzie

$$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Tego typu postępowanie nazywamy zazwyczaj *usuwaniem niewymierności z mianownika.* Czynimy tak między innymi dlatego, że wyrażenie $\frac{\sqrt{5}}{5}$ łatwiej jest oszacować niż wyrażenie $\frac{1}{\sqrt{5}}$, mamy bowiem:

$$\sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9} \text{ stąd } 2 < \sqrt{5} < 3, \text{ a stąd } \frac{2}{5} < \frac{\sqrt{5}}{5} < \frac{3}{5}$$

PRZYKŁADY usuwania niewymierności z mianownika.

- $\frac{2}{\sqrt{17}} = \frac{2}{\sqrt{17}} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{17}}}_{\textbf{jedynka}} = \frac{2\sqrt{17}}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{17}} = \frac{2\sqrt{17}}{\sqrt{17}\sqrt{17}} = \frac{2}{17}\sqrt{17}$

- $\frac{3}{2\sqrt{7}} = \frac{3}{2\sqrt{7}} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}}_{=1} = \frac{3\sqrt{7}}{2\sqrt{7}\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{2\cdot 7} = \frac{3\sqrt{7}}{14} = \frac{3}{14}\sqrt{7}$

- $\frac{5}{\sqrt{63}} = \frac{5}{\sqrt{9\cdot 7}} = \frac{5}{3\sqrt{7}} = \frac{5}{3\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{5\sqrt{7}}{3\cdot 7} = \frac{5}{21}\sqrt{7}$

- $\frac{3}{\sqrt{5}-1} = \frac{3}{\sqrt{5}-1} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1}}_{=1} = \frac{3\sqrt{5}+1}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{3(\sqrt{5}+1)}{5-1} =$
  $\frac{3(\sqrt{5}+1)}{4} = \frac{3}{4}(\sqrt{5}+1)$

- $\frac{12}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{12}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}}_{=1} = \frac{12(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})} =$
  $\frac{12(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{12(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{5-3} = \frac{12(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{2} = 6\sqrt{5}+6\sqrt{3}$

- $\frac{2\sqrt{6}+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}-\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}-\sqrt{3}} \cdot \underbrace{\frac{2\sqrt{6}+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}+\sqrt{3}}}_{=1} = \frac{(2\sqrt{6}+\sqrt{3})^2}{(2\sqrt{6}-\sqrt{3})(2\sqrt{6}+\sqrt{3})} =$
  $\frac{4\cdot 6+4\sqrt{18}+3}{4\cdot 6-3} = \frac{27+12\sqrt{2}}{21} = \frac{3(9+4\sqrt{2})}{3\cdot 7} = \frac{9}{7}+\frac{4}{7}\sqrt{3}$

27. Usuń niewymierność z mianownika:

a) $\frac{5}{\sqrt{6}}$ b) $\frac{4}{\sqrt{10}}$ c) $\frac{5}{\sqrt{15}}$ d) $\frac{4}{5\sqrt{11}}$

e) $\frac{2}{3\sqrt{15}}$ f) $\frac{15}{2\sqrt{5}}$ g) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$ h) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{175}}$

i) $\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{128}}$ j) $\frac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ k) $\frac{\sqrt{5}-2}{2\sqrt{5}}$ l) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$

m) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{3\sqrt{15}}$ n) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{2\sqrt{30}}$ o) $\frac{2\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{12}}$ p) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

q) $\frac{12}{\sqrt{10}-2}$ r) $\frac{5}{\sqrt{14}+2}$ s) $\frac{14}{9-\sqrt{11}}$

t) $\frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2}$ u) $\frac{\sqrt{15}+1}{4-\sqrt{15}}$ v) $\frac{4+\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}$ w) $\frac{2\sqrt{6}+\sqrt{5}}{2\sqrt{6}-\sqrt{5}}$

x) $\frac{4-\sqrt{10}}{\sqrt{10}-3}$ y) $\frac{2\sqrt{7}-\sqrt{6}}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}$ z) $\frac{3\sqrt{10}-4\sqrt{2}}{\sqrt{10}-2\sqrt{2}}$

28. Każde z poniższych wyrażeń zapisz w postaci ułamka o całkowitym mianowniku mnożąc w tym celu wyrażenie – tam gdzie to jest potrzebne – przez liczbę 1 zapisaną w odpowiedniej postaci.

PRZYKŁAD: $\frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{5}$

a) $\frac{8}{3\sqrt{2}}$ b) $\frac{3}{2\sqrt{2}}$ c) $\frac{4}{\sqrt{5}}$ d) $\frac{4}{\sqrt{6}}$

e) $\frac{2}{3\sqrt{7}}$ f) $\frac{3}{2\sqrt{5}}$ g) $\frac{8}{5\sqrt{8}}$ h) $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{3}{2\sqrt{2}}$

i) $\frac{3}{\sqrt{6}}$ j) $\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$ k) $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{15}}$ l) $2\sqrt{\frac{7}{6}}\cdot 5\sqrt{\frac{3}{49}}$

m) $\frac{2}{\sqrt{5}}:\frac{3}{\sqrt{2}}$ n) $\sqrt{\frac{2}{3}}:\sqrt{\frac{7}{6}}$ o) $\frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{8}}:\frac{9\sqrt{35}}{4\sqrt{6}}$

29. Uporządkuj podane liczby w kolejności rosnącej

a) $\frac{4}{\sqrt{2}}$, $3\sqrt{2}$, $\frac{5}{2\sqrt{2}}$, $\frac{10}{3\sqrt{2}}$ b) $\frac{6}{\sqrt{5}}$, $\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\frac{7}{3\sqrt{5}}$, $\frac{10}{3\sqrt{5}}$

30. Uporządkuj liczby w kolejności rosnącej: $\sqrt{7^4}$, $\sqrt{4^7}$, $\sqrt[3]{27^2}$, $\sqrt[3]{2^{27}}$

31. Oblicz wartość wyrażenia

a) $\sqrt{x^2+x+\frac{1}{4}}$ dla $x=-\frac{1}{3}$
b) x^4-7x^2-3 dla $x=\sqrt{3}$
c) $2x^4+x^3-2x^2+3x-5$ dla $x=-\sqrt{7}$
d) $2x-3x^3+4x^5$ dla $x=\sqrt{2}$
e) $4+3x-2x^2-x^3$ dla $x=-\sqrt{3}$
f) $x^5-4x^4+3x^3+2x^2-x-\sqrt{5}$ dla $x=\sqrt{5}$

32. Oblicz

a) $\dfrac{3\sqrt{24}+\sqrt{150}+5\sqrt{216}}{12\sqrt{6}+9\sqrt{54}-4\sqrt{96}}$ b) $\dfrac{\sqrt{28}-5\sqrt{63}-4\sqrt{175}}{6\sqrt{7}+3\sqrt{112}-5\sqrt{700}}$

c) $\dfrac{\sqrt{48}+\sqrt{147}-\sqrt{75}}{\sqrt{300}-\sqrt{27}-\sqrt{108}}$ d) $\dfrac{\sqrt{176}+\sqrt{275}}{\sqrt{99}+\sqrt{396}}$

PRZYKŁADY zamiany sumy/różnicy na kwadrat sumy/różnicy.

$7+4\sqrt{3}=3+2\cdot\sqrt{3}\cdot 2+4=\sqrt{3}^2+2\cdot\sqrt{3}\cdot 2+2^2=(\sqrt{3}+2)^2$
$3-2\sqrt{2}=2-2\cdot\sqrt{2}\cdot 1+1=\sqrt{2}^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot 1+1^2=(\sqrt{2}-1)^2$

33* Postępując podobnie zamień poniższe wyrażenia na kwadrat sumy lub różnicy.

a) $14+6\sqrt{5}$ b) $7-4\sqrt{3}$ c) $4+2\sqrt{3}$ d) $16-6\sqrt{7}$
e) $15-4\sqrt{11}$ f) $28+10\sqrt{3}$ g) $9-4\sqrt{5}$ h) $11-6\sqrt{2}$
i) $11+4\sqrt{7}$ j) $5+\sqrt{24}$ k) $7+\sqrt{48}$ l) $57+40\sqrt{2}$

PRZYKŁADY upraszczania wyrażeń

$$\sqrt{7+4\sqrt{3}}=\sqrt{3+2\sqrt{3}\cdot 2+4}=\sqrt{\sqrt{3}^2+2\sqrt{3}\cdot 2+2^2}=\sqrt{(\sqrt{3}+2)^2}$$
$$=\sqrt{3}+2$$
$$\sqrt{6-2\sqrt{5}}=\sqrt{5-2\sqrt{5}+1}=\sqrt{\sqrt{5}^2-2\sqrt{5}+1}=\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}=\sqrt{5}-1$$
$$\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{1-2\sqrt{2}+2}=\sqrt{1^2-2\sqrt{2}+\sqrt{2}^2}=\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$$
$$=-(1-\sqrt{2})=\sqrt{2}-1$$

34* Postępując w podobny sposób uprość wyrażenia

a) $\sqrt{8-2\sqrt{7}}$ b) $\sqrt{11+2\sqrt{10}}$ c) $\sqrt{11-4\sqrt{7}}$ d) $\sqrt{14-6\sqrt{5}}$
e) $\sqrt{51-14\sqrt{2}}$ f) $\sqrt{21-8\sqrt{5}}$ g) $\sqrt{39-12\sqrt{3}}$ h) $\sqrt{16-6\sqrt{7}}$

35.* Uzasadnij, że

a) $\sqrt{7+\sqrt{24}}=\sqrt{6}+1$ b) $\sqrt{7+\sqrt{48}}=2+\sqrt{3}$

c) $\sqrt{7-\sqrt{24}}=\sqrt{6}-1$ d) $\sqrt{5+\sqrt{24}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$

e) $\sqrt{16-4\sqrt{7}}=\sqrt{14}-\sqrt{2}$ f) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$

36.* Uzasadnij, że

a) $\dfrac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}-\sqrt{3}=\sqrt{6}$ b) $\sqrt{6+4\sqrt{2}}-2-\sqrt{2}=0$

c) $\dfrac{3+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}=1+\sqrt{2}$ d) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2+\sqrt{3}}$

37. Każde z poniższych wyrażeń arytmetycznych jest liczbą całkowitą. Wyznacz tę liczbę

a) $\dfrac{13\sqrt{5}-\sqrt{125}}{\sqrt{20}}+\dfrac{3^{11}\cdot 4^{10}}{12^{10}}$ b) $\dfrac{\sqrt{675}+\sqrt{27}}{\sqrt{243}}-\left(\dfrac{5^{20}\cdot 7^{20}}{35^{21}}\right)^{-1}$

c) $\sqrt{11-6\sqrt{2}}+\sqrt{11+6\sqrt{2}}$ d) $\sqrt{57+40\sqrt{2}}-\sqrt{57-40\sqrt{2}}$

e) $\dfrac{2}{5+2\sqrt{6}}+\dfrac{2}{5-2\sqrt{6}}$ f) $\dfrac{1}{7+4\sqrt{3}}+\dfrac{1}{7-4\sqrt{3}}$

Rozwiązując pewne problemy związane z twierdzeniem Pitagorasa potrzebna nam będzie umiejętność rozwiązywania równań, w których pojawiają się współczynniki niewymierne.

PRZYKŁADY

Porównaj rozwiązania dwóch równań:

a)

$$1{,}3\cdot x=91 \quad |:1{,}3$$
$$x=\frac{91}{1{,}3}$$
$$x=\frac{910}{13}$$
$$x=70$$

$$\sqrt{2}\cdot x=10 \quad |:\sqrt{2}$$
$$x=\frac{10}{\sqrt{2}}$$
$$x=\frac{10}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$
$$x=\frac{10\sqrt{2}}{2}$$
$$x=5\sqrt{2}$$

b)

$3{,}2x + x = 12{,}6$	$\sqrt{2}\cdot x + x = 10$
$3{,}2x + 1\cdot x = 12{,}6$	$\sqrt{2}\cdot x + 1\cdot x = 10$
$(3{,}2+1)\cdot x = 12{,}6$	$(\sqrt{2}+1)\cdot x = 10 \quad \mid : (\sqrt{2}+1)$
$4{,}2\cdot x = 12{,}6$	$x = \dfrac{10}{\sqrt{2}+1}$
$4{,}2\cdot x = 12{,}6 \quad \mid : 4{,}2$	$x = \dfrac{10}{\sqrt{2}+1}\cdot\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}$
$x = \dfrac{12{,}6}{4{,}2}$	$x = \dfrac{10\cdot(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2})^2-1^2}$
$x = \dfrac{126}{42}$	$x = \dfrac{10\cdot(\sqrt{2}-1)}{2-1} = 10(\sqrt{2}-1)$
$x = 3$	

38. Rozwiąż równania

a) $\sqrt{7}\cdot a = 14$
b) $2\sqrt{10}a = 100$
c) $5\sqrt{5}x = 25\sqrt{10}$
d) $\sqrt{216}x = 36\sqrt{2}$
e) $\sqrt{5}x + \sqrt{20} = \sqrt{80}$
f) $2\sqrt{3}x - \sqrt{75} = 3\sqrt{12}$
g) $\sqrt{32} - \sqrt{18}x = \sqrt{72}$
h) $x + \sqrt{2}x = 20$
i) $a\sqrt{2} - a = 7$
j) $a + \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = 100$
k) $3a + \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = 20$
l) $a - a\frac{\sqrt{3}}{2} = 5$
m) $(x-\sqrt{2})^2 = (x+\sqrt{2})^2 - 4$
n) $(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5}) = (x+\sqrt{5})^2$
o) $(2x+\sqrt{5})^2 - (2x-\sqrt{5})^2 = 5$

Odpowiedzi.

1. a) 3 m b) 8 cm c) $\frac{1}{4}$ m d) $\frac{5}{7}$ dm e) 0,6 cm

2. a) 2 dm b) 4 mm c) $\frac{1}{3}$ m d) $\frac{2}{5}$ cm

3. a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{5}{12}$ d) $\frac{7}{20}$ e) $\frac{7}{2}$ f) $\frac{4}{3}$ g) $\frac{11}{6}$ h) $\frac{4}{15}$ i) $\frac{7}{4}$ j) $\frac{13}{6}$ k) $\frac{7}{3}$ l) $\frac{9}{5}$ m) 0,6 n) 0,04 o) 0,12 p) 15 q) 1,5 r) 0,15 s) 13 t) 1,3 u) 0,13 v) 16 w) 1,6 x) 0,16

6. a) $\frac{8}{5}$ b) $\frac{7}{6}$ c) 1,1 d) $\frac{3}{2}$ e) $\frac{4}{3}$ f) $\frac{5}{4}$ g) $\frac{7}{5}$ h) $\frac{3}{4}$ i) $\frac{1}{7}$ j) 1,4 k) 1,7 l)

0,08 m) 0,02 n) 0,3 o) 0,5 p) 0,4 q) $-0{,}6$ r) 0,03 s) $-0{,}8$ t) 0,7 u) -3 v) $-\frac{7}{5}$ w) $-0{,}2$ x) $-0{,}01$

7. a) 5 b) 13 c) 15 d) 25 e) 26 f) 29 g) 17

8. a) 8 b) 6 c) 6 d) 0 e) 7 f) 9

9. a) 9 b) 10 c) 54 d) $\frac{5}{2}$ e) 2 f) 2 g) 4 h) 6 i) 4 j) $-\frac{11}{36}$ k) $\frac{1}{2}$

10. a) 2 b) 2 c) 2

11. a) $3 < \sqrt{14} < 4$ b) $5 < \sqrt{31} < 6$ c) $9 < \sqrt{87} < 10$ d) $14 < \sqrt{200} < 15$ e) $2 < \sqrt[3]{10} < 3$ f) $3 < \sqrt[3]{30} < 4$ g) $5 < \sqrt[3]{200} < 6$ h) $11 < \sqrt[3]{1500} < 12$

12. a) $\sqrt{26} > \sqrt[3]{60}$ b) $\sqrt[3]{0{,}1} < \sqrt{1{,}1}$ c) $\sqrt[3]{30} < \sqrt{17}$ d) $\sqrt{42} > \sqrt[3]{200}$ e) $\sqrt{\frac{1}{35}} > \sqrt[3]{\frac{1}{217}}$ f) $\sqrt[3]{\frac{1}{26}} > \sqrt{\frac{1}{126}}$

13. a) 56 b) 30 c) 6 d) $1\frac{1}{6}$ e) 1,1 f) 0,3 g) 72 h) 336 i) 0,15 j) 990 k) 60 l) 84

14. a) $2\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{11}$ c) $2\sqrt{3}$ d) $5\sqrt{41}$ e) $2\sqrt{5}$ f) $5\sqrt{6}$ g) $20\sqrt{3}$ h) $3\sqrt{3}$ i) $2\sqrt{13}$ j) $10\sqrt{3}$ k) $4\sqrt{2}$ l) $7\sqrt{2}$ m) $9\sqrt{3}$ n) $3\sqrt{11}$ o) $6\sqrt{3}$ p) $4\sqrt{7}$ q) $3\sqrt{7}$ r) $4\sqrt{3}$ s) $7\sqrt{3}$ t) $3\sqrt{15}$

15. a) $2\sqrt[3]{3}$ b) $2\sqrt[3]{4}$ c) $5\sqrt[3]{2}$ d) $10\sqrt[3]{7}$ e) $2\sqrt[3]{5}$ f) $4\sqrt[3]{4}$ g) $2\sqrt[3]{9}$ h) $3\sqrt[3]{6}$ i) $5\sqrt[3]{5}$ j) $8\sqrt[3]{4}$ k) $4\sqrt[3]{5}$ l) $2\sqrt[3]{10}$

16. a) 10 b) 6 c) 10 d) 20 e) 6 f) 9 g) 25 h) 6 i) 24 j) 13 k) 12

17. a) 2 b) 4 c) 6 d) $\frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$ e) 3 f) 11 g) $\frac{4}{5}$ h) 7 i) 0,6 j) 6 k) 3 l) 2 m) 7

18. a) $\sqrt{12}$ b) $\sqrt{18}$ c) $\sqrt{150}$ d) $\sqrt{448}$ e) $\sqrt{44}$ f) $\sqrt[3]{54}$ g) $\sqrt[3]{40}$ h) $\sqrt[3]{135}$ i) $\sqrt[3]{192}$ j) $\sqrt[3]{750}$ k) $\sqrt[3]{10}$ l) $\sqrt[3]{0{,}14}$ m) $\sqrt[3]{320}$ n) $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ o) $\sqrt[3]{4}$

19. a) 5 b) 7 c) 12 d) 14 e) 222 f) 137 g) 4 h) $\frac{1}{3}$ i) -3 j) -5 k) 152 l) -111

20. a) $18\sqrt{3}$ b) $8\sqrt{7}$ c) $6\sqrt[3]{2}$ d) $5\sqrt[3]{11}$ e) $9\sqrt[3]{5}$ f) $5\sqrt[3]{3}$ g) $2\sqrt{22}$ h) $10\sqrt{21}$ i) $5\sqrt[3]{20}$ j) $35\sqrt{6}$

21. a) $\sqrt{5}$ b) $5\sqrt{2}$ c) $2\sqrt{2}-2\sqrt{7}$ d) 0 e) $56\sqrt{3}$ f) $88\sqrt{2}$ g) $17\sqrt{5}-13\sqrt{2}$ h) $7\sqrt{15}+11\sqrt{3}$ i) $31\sqrt[3]{4}$ j) $7\sqrt[3]{2}$ k) 0 l) $7\sqrt{6}-26\sqrt{11}$ m) $\sqrt{2}+4$ n) 1

22. a) 1 b) 1 c) $\frac{3}{7}$ d) $\frac{3}{7}$ e) 1 f) $\frac{2}{3}$ g) 12 h) 8

23. a) $14+10\sqrt{5}$ b) $14+2\sqrt{3}$ c) $-10-20\sqrt{2}$ d) $-2-10\sqrt{15}$ e) $35\sqrt{6}$ f) $9-\sqrt{6}$ g) -115 h) $2+\sqrt{6}$ i) 8 j) 3 k) -66 l) 2 m) $23\sqrt{2}-7\sqrt{15}$ n) $2\sqrt{6}$ o) 20 p) $-42+4\sqrt{3}$ q) 12 r) $6-6\sqrt{2}-6\sqrt{3}$ s) 16 t) $126-10\sqrt{30}$ u) $47-5\sqrt{6}$ v) $2a^2-2b$ w) $3\sqrt{2}-\sqrt{6}$ x) $2-5\sqrt{15}$

24. a) $7+4\sqrt{3}$ b) $21-8\sqrt{5}$ c) $4+2\sqrt{3}$ d) $8-2\sqrt{15}$ e) $12+2\sqrt{35}$ f) $15-2\sqrt{26}$ g) $30+12\sqrt{6}$ h) $183-72\sqrt{5}$ i) $48-6\sqrt{15}$ j) $23-4\sqrt{5}$ k) $55-12\sqrt{21}$ l) $5+2\sqrt{6}$ m) $19+4\sqrt{22}$ n) -1 o) -1 p) 1 q) 2 r) $38-12\sqrt{10}$

25. a) 6 b) 2 c) 22 d) 2 e) 16 f) 2

26. a) 1 b) 2 c) 3 d) 2 e) 4 f) 1 g) 5 h) 1 i) 2

27. a) $\frac{5}{6}\sqrt{6}$ b) $\frac{2}{5}\sqrt{10}$ c) $\frac{1}{3}\sqrt{15}$ d) $\frac{4}{55}\sqrt{11}$ e) $\frac{2}{45}\sqrt{15}$ f) $\frac{3}{2}\sqrt{5}$ g) $\frac{1}{7}\sqrt{35}$ h) $\frac{2}{35}\sqrt{21}$ i) $\frac{3}{16}\sqrt{10}$ j) $\frac{3}{2}\sqrt{2}-1$ k) $\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\sqrt{5}$ l) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{10}$ m) $\frac{1}{9}\sqrt{3}+\frac{1}{15}\sqrt{5}$ n) $\frac{1}{10}\sqrt{5}++\frac{1}{12}\sqrt{6}$ o) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\sqrt{15}$ p) $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\sqrt{10}$ q) $2\sqrt{10}+4$ r) $\frac{1}{2}\sqrt{14}-1$ s) $\frac{9}{5}+\frac{1}{5}\sqrt{11}$ t) $9+4\sqrt{5}$ u) $19+5\sqrt{15}$ v) $16+11\sqrt{2}$ w) $\frac{29}{19}+\frac{4}{19}\sqrt{30}$ x) $\sqrt{10}+2$ y) $20-3\sqrt{42}$ z) $7+2\sqrt{5}$

28. a) $\frac{4}{3}\sqrt{2}$ b) $\frac{3}{4}\sqrt{2}$ c) $\frac{4}{5}\sqrt{5}$ d) $\frac{2}{3}\sqrt{6}$ e) $\frac{2}{21}\sqrt{7}$ f) $\frac{3}{10}\sqrt{5}$ g) $\frac{1}{5}\sqrt{8}$ h) $\frac{5}{4}\sqrt{2}$ i) $\frac{1}{2}\sqrt{6}$ j) $\frac{1}{10}\sqrt{10}$ k) $\frac{1}{5}\sqrt{30}$ l) $\frac{5}{7}\sqrt{14}$ m) $\frac{2}{15}\sqrt{10}$ n) $\frac{2}{7}\sqrt{7}$ o) $\frac{\sqrt{21}}{21}$

29. a) $\dfrac{5}{2\sqrt{2}}<\dfrac{10}{3\sqrt{2}}<\dfrac{4}{\sqrt{2}}<3\sqrt{2}$ b) $\dfrac{\sqrt{5}}{3}<\dfrac{7}{3\sqrt{5}}<\dfrac{6}{\sqrt{5}}<\dfrac{10}{3\sqrt{5}}<\dfrac{6}{\sqrt{5}}$

30. $\sqrt[3]{27^2}<\sqrt{74}<\sqrt{4^7}<\sqrt[3]{2^{27}}$

31. a) $\frac{1}{6}$ b) -15 c) $79-10\sqrt{7}$ d) $12\sqrt{2}$ e) -2 f) $38\sqrt{5}-90$

32. a) $\frac{41}{23}$ b) $\frac{33}{32}$ c) $\dfrac{6}{7}$ d) 1

33. a) $(3+\sqrt{5})^2$ b) $(2-\sqrt{3})^2=(\sqrt{3}-2)^2$ c) $(\sqrt{3}+1)^2$ d) $(3-\sqrt{7})^2$ e) $(\sqrt{11}-2)^2=(2-\sqrt{11})^2$ f) $(5+\sqrt{3})^2$ g) $(\sqrt{5}-2)^2=(2-\sqrt{5})^2$ h) $(3-\sqrt{2})^2$ i) $(\sqrt{7}+2)^2$ j) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$ k) $(2+\sqrt{3})^2$ l) $(5+4\sqrt{2})^2$

34. a) $\sqrt{7}-1$ b) $\sqrt{10}+1$ c) $\sqrt{7}-2$ d) $3-\sqrt{5}$ e) $7-\sqrt{2}$ f) $4-\sqrt{5}$ g) $6-\sqrt{3}$ h) $3-\sqrt{7}$

37. a) 7 b) -33 c) 6 d) 20 e) 14 f) 10 g) 3

38. a) $2\sqrt{7}$ b) $5\sqrt{10}$ c) $5\sqrt{2}$ d) $2\sqrt{3}$ e) 2 f) $\frac{11}{2}=5\frac{1}{2}$ g) $-\frac{2}{3}$ h) $20(\sqrt{2}-1)$ i) $7(\sqrt{2}+1)$ j) $200(2-\sqrt{3})$ k) $\frac{240-40\sqrt{3}}{33}$ l) $10(2+\sqrt{3})$ m) $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ n) $-\sqrt{5}$ o) $\frac{1}{8}\sqrt{5}$

Rozdział 8

TWIERDZENIE PITAGORASA.

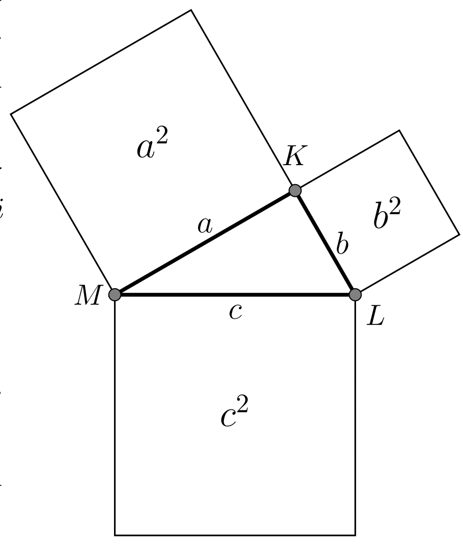
Pitagoras z Samos

Pitagoras urodził się na wyspie Samos ok 580 r p.n.e. W Krotonie w południowej Italii (Wielka Grecja) założył szkołę o charakterze filozoficzno – religijnym. Jego imieniem nazywane jest twierdzenie, które mówi jaki jest związek pomiędzy długościami boków w trójkącie prostokątnym. Zmarł ok 500 r p.n.e. w Metaponcie w południowej Italii.

TWIERDZENIE

W trójkącie prostokątnym suma pól kwadratów zbudowanych na przyprostokątnych równa jest polu kwadratu zbudowanego na przeciwprostokątnej. Krótko mówiąc *w trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych a, b i przeciwprostokątnej c* zachodzi

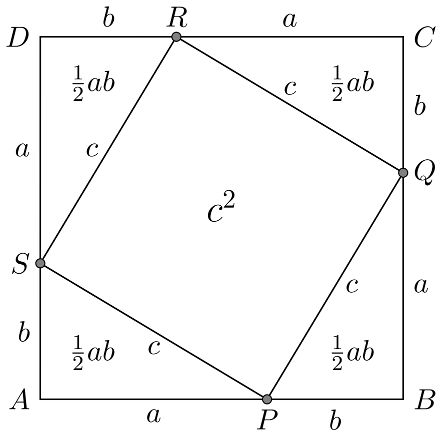
$$a^2 + b^2 = c^2.$$



Dowód: Rozpatrzmy trójkąt prostokątny KLM, tak jak na rysunku obok, o przyprostokątnych długości a, b i przeciwprostokątnej długości c.

Zbudujmy kwadrat $ABCD$ o boku długości $a+b$. Punkty P, Q, R, S obieramy tak, aby dzieliły one boki kwadratu na odcinki o długościach a i b, przy czym $|AP| = |BQ| = |CR| = |DS| = a$, zaś $|PB| = |QC| = |RD| = |SA| = b$.

Odcinki PQ, QR, RS i SP odcinają od kwadratu cztery trójkąty prostokątne. Z cechy BKB przystawania trójkątów wynika wówczas, że trójkąty APS, BQP, CRQ i DSR przystają do trójkąta KLM. Z tego wynika, że wszystkie boki czworokąta $PQRS$ są równe c oraz, że wszystkie jego kąty są proste. A zatem czworokąt $PQRS$ jest kwadratem o boku długości c.



Zauważmy, że pole kwadratu $ABCD$ możemy rozłożyć na pięć składników:

$$P_{ABCD} = P_{APS} + P_{BQP} + P_{CRQ} + P_{DSR} + P_{PQRS}.$$

Wobec tego mamy:

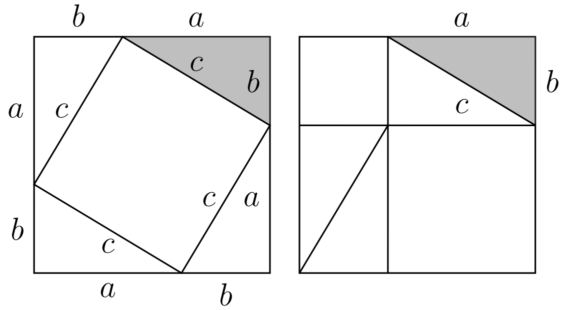
$$(a+b)^2 = \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab + c^2$$
$$a^2 + 2ab + b^2 = 4 \cdot \frac{1}{2}ab + c^2$$
$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2 \quad / - 2ab$$

Odejmując od obu stron $2ab$ mamy

$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2.}$$

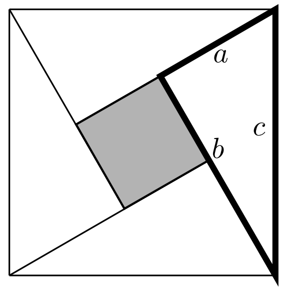
Czyli udowodniliśmy twierdzenie Pitagorasa.

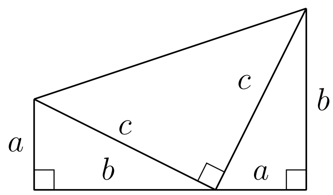
Istnieje wiele dowodów Twierdzenia Pitagorasa. Na poniższych rysunkach mamy kilka dowodów tego twierdzenia w oparciu o równość pól. Wiele z tych dowodów nie różni się między sobą w istotny sposób. Spróbuj udowodnić twierdzenie Pitagorasa w każdym z poniższych przypadków. Na każdym rysunku długości przyprostokątnych oznaczamy a i b.



Na tych dwóch rysunkach, jak widać, kwadrat o boku długości $a + b$ został na dwa różne sposoby rozłożony: raz na cztery trójkąty i jeden kwadrat, a drugi raz na cztery takie same trójkąty i dwa kwadraty.

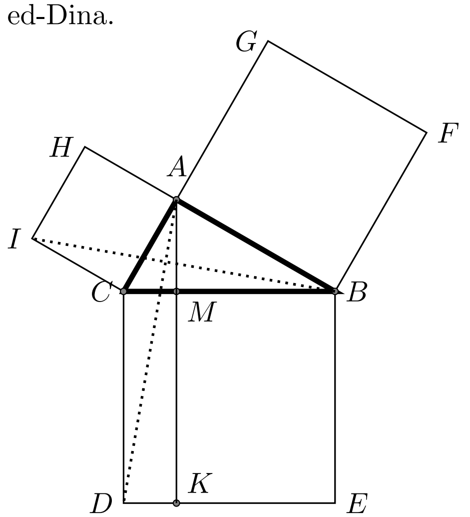
Dowód Bhaskary (matematyk i astronom indyjski żyjący w latach 1114 – 1185).
Na tym rysunku w kwadrat o boku długości c zostały wpisane cztery przystające trójkąty prostokątne o przyprostokątnych długości a, b. Wsk. jaka jest długość boku zacieniowanego kwadratu?

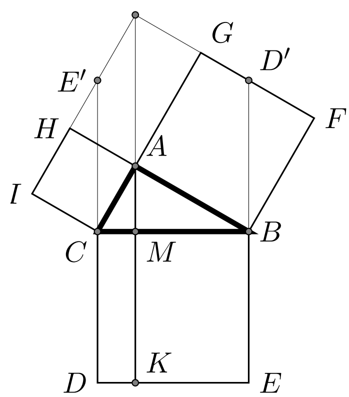




Na tym rysunku jest dowód tw. Pitagorasa pochodzący od prezydenta USA J.A.Garfielda z 1876 r. Tu wystarczy na dwa sposoby obliczyć pole trapezu.

Autorem dowodu na pierwszym rysunku jest Euklides, a na drugim Nassir-ed-Dina.





1. Wyznacz długość c przeciwprostokątnej w trójkącie jeżeli długości przyprostokątnych są równe
a) $a = 6$, $b = 8$; b) $a = 12$, $b = 5$; c) $a = 20$, $b = 15$;
d) $a = 2\sqrt{2}$, $b = 2\sqrt{7}$; e) $a = 2\sqrt{5}$, $b = 2\sqrt{7}$; f) $a = 3\sqrt{2}$, $b = 3$.

2. Wyznacz długość b drugiej przyprostokątnej w trójkącie, jeżeli długości jednej z przyprostokątnych oraz przeciwprostokątnej są następujące:
a) $a = 8$, $c = 10$; b) $a = 9$, $c = 15$; c) $a = 12$, $c = 13$;
d) $a = 24$, $c = 26$; e) $a = 3\sqrt{2}$, $c = 6$; f) $a = 2\sqrt{3}$, $c = \sqrt{37}$.

3. W równoległoboku dłuższy bok ma długość 10, a krótsza przekątna ma długość 6 i dzieli ona równoległobok na dwa trójkąty prostokątne. Oblicz obwód tego równoległoboku.

4. Oblicz długość przekątnej kwadratu o boku długości 5.

5. Obwód kwadratu jest równy 12. Wyznacz długość przekątnej tego kwadratu.

6. Przekątna kwadratu ma długość 7. Wyznacz długość boku tego kwadratu.

Zanalizujmy obecnie dowolny kwadrat o boku długości a i przekątnej długości d. Z twierdzenia Pitagorasa mamy wówczas

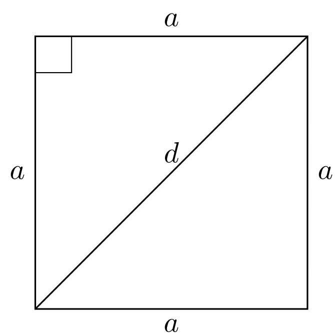
$$d^2 = a^2 + a^2, \quad \text{czyli} \quad d^2 = 2a^2,$$

czyli

$$d = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}.$$

Zatem wzór na długość przekątnej w kwadracie o boku długości a jest

$$\boxed{d = a\sqrt{2}}$$



Powyższy wzór możemy wyrazić słowami następująco:

długość przekątnej w kwadracie jest $\sqrt{2}$ razy dłuższa od długości boku tego kwadratu

7. W trójkącie prostokątnym równoramiennym przeciwprostokątna ma długość 10. Oblicz pole tego trójkąta.

8. W trójkącie prostokątnym równoramiennym długości ramion są równe 4. Wyznacz obwód trójkąta i wysokość wychodzącą z wierzchołka kąta prostego.

9. Na podstawie podanej jednej z wielkości w kwadracie wyznacz pozostałe dwie wielkości

długość boku kwadratu	5	$2\sqrt{2}$				
długość przekątnej kwadratu					$7\sqrt{2}$	$\sqrt{6}$
pole kwadratu			36	10		

10. Suma długości boku kwadratu i jego przekątnej równa jest 7. Wyznacz długość boku tego kwadratu.

11. O ile dłuższa jest przekątna kwadratu o boku długości 10 od boku kwadratu o przekątnej długości 10.

12. Długość przekątnej kwadratu jest o 7 większa od długości jego boku. Wyznacz długość boku w tym kwadracie.

13. Oblicz długość boku kwadratu, w którym przekątna jest o 3 dłuższa od boku.

14. Oblicz pole prostokąta, którego przekątna ma długość 9, a jeden z boków ma długość $4\sqrt{2}$.

15. Wyznacz długość przekątnej prostokąta o polu 120, w którym jeden z boków ma długość 8.

16. Pole kwadratu zbudowanego na przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego równe jest 360. Jedna z przyprostokątnych jest trzy razy dłuższa od drugiej. Oblicz pola kwadratów zbudowanych na przyprostokątnych tego trójkąta.

17. Obwód prostokąta jest równy 42, a stosunek długości boków (czyli iloraz długości dwóch boków) jest równy 3 : 4. Oblicz długość przekątnej prostokąta.

18. Przeciwprostokątna w trójkącie prostokątnym ma długość $4\sqrt{5}$. Stosunek długości przyprostokątnych jest równy 2 : 1 (czyli 2). Oblicz pole trójkąta.

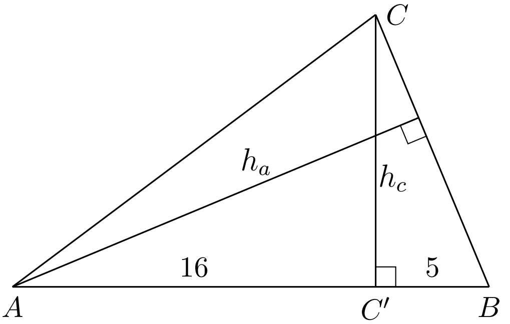
19. Oblicz obwód prostokąta, którego przekątna ma długość $10\sqrt{10}$, a jeden z boków jest 3 razy dłuższy od drugiego.

UWAGI dotyczące sporządzania rysunków.

- Rysunki muszą być realistyczne, to znaczy że muszą być na nich
  - w rozsądnym przybliżeniu zachowane miary kątów;
  - zachowane proporcje w długościach odcinków
  - wysokość trójkąta musi być prostopadła do prostej zawierającej podstawę trójkąta
  - wysokość trapezu prostopadła do obu podstaw
- Jeżeli w zadaniu jest mowa o trójkącie ABC, to odpowiednie punkty na rysunku muszą być opisane tymi literami.
- Jeżeli w treści zadania jest mowa o długościach odcinków lub miarach kątów, to muszą być one zapisane na rysunku.

PRZYKŁAD

W trójkącie ABC wysokość CC' podzieliła bok AB na odcinki długości 5 i 16, $P_{ABC} = 126$. Wyznacz h_a czyli wysokość wychodząca z wierzchołka A.



I. Wyznaczamy wysokość h_c.

Z wzoru na pole trójkąta mamy

$\frac{1}{2}(16+5)h_c = 126$

$\frac{21}{2}h_c = 126$

czyli

$h_c = \frac{126 \cdot 2}{21} = 12$

II. Z twierdzenia Pitagorasa w zastosowaniu do trójkąta BCC' wyznaczamy długość boku BC

$$|BC|^2 = 12^2 + 5^2$$
$$|BC|^2 = 169$$
$$|BC| = 13$$

III. Ze wzoru na pole trójkąta wyznaczam wysokość h_a.

$$P = \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot h_a$$
$$126 = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot h_a$$
$$h_a = \frac{126 \cdot 2}{13} = 19\frac{5}{13}$$

20. Spodek wysokości trójkąta podzielił podstawę na odcinki długości 5 i 9. Pole trójkąta jest równe 84. Wyznacz obwód trójkąta oraz pozostałe dwie wysokości.

21. W trójkącie wysokość podzieliła podstawę na odcinki o długościach 5 i 35. Krótsze ramię trójkąta ma długość 13. Wyznacz długość d drugiego ramienia.

22. W trójkącie ABC wysokość CC' dzieli podstawę AB na odcinki AC' i $C'B$, przy czym $|AC'| = 2$, $|C'B| = 3$, $|AC| = 4$. Wyznacz $|BC|$.

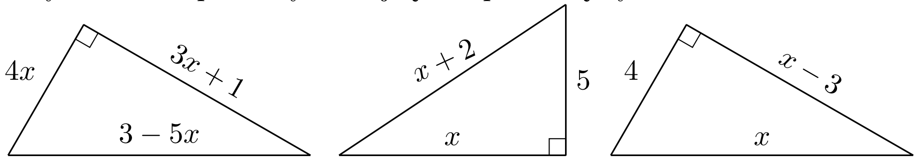
23. Oblicz obwód trapezu prostokątnego, w którym podstawy mają długość 6 i 18, a pole jest równe 60.

24. Oblicz pole trapezu prostokątnego o podstawach długości 7 i 15, a dłuższym ramieniu długości 10.

25* W trapezie $ABCD$ o podstawach AB i CD kąty A i D są proste, $|AD| = 12$, $|CD| = 8$, $|BC| = 13$. Oblicz długość boku AB. Rozpatrz dwa przypadki a) $|AB| > |CD|$, b) $|CD| > |AB|$.

26. Oblicz obwód trapezu, w którym ramiona mają długość 8 i 13, a krótsza podstawa i wysokość mają długość 5.

27. Wyznacz x w poniższych trójkątach prostokątnych.



28. Jedna z przyprostokątnych trójkąta prostokątnego ma długość 6, a suma długości pozostałych boków wynosi 30. Oblicz długość przeciwprostokątnej.

29. Trzcina bambusowa mająca 32 łokcie i wznosząca się na równinie, została w jednym miejscu złamana przez wiatr tak, że wierzchołek jej dotknął ziemi w odległości 16 łokci od podstawy. Ile łokci nad ziemią została złamana trzcina?

30. Pośrodku kwadratowej sadzawki (przez środek kwadratu rozumiemy punkt w którym przecinają się jego przekątne czyli punkt, który jest jednakowo oddalony od wszystkich czterech wierzchołków kwadratu) o boku długości 10 stóp rośnie kwiat lilii wodnej, który wynurza się o stopę ponad powierzchnię wody. Gdy go się przechyli ku środkowi któregokolwiek brzegu, to dotykając końcem brzegu skryje się on pod wodę. Jaka jest głębokość sadzawki?

31. Statek wypłynął z punktu A. Popłynął 5 km na południe, potem 6 km na wschód, a następnie 3 km na południe. W jakiej odległości od punktu A znalazł się statek po przepłynięciu tych trzech odcinków? a) W takim zadaniu zakładamy, że Ziemia jest lokalnie płaska.
b) Jaka byłaby odpowiedź gdyby punkt A był na biegunie północnym, a Ziemia nie była lokalnie płaska?

32. W kwadracie $ABCD$, o boku długości 4, punkt E leży na boku AB przy czym $|AE| = 1$. Wyznacz wysokość w trójkącie AEC opuszczoną na bok AC.

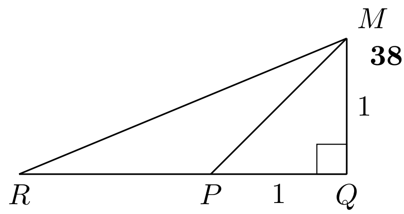
33. W trójkącie prostokątnym długość jednej przyprostokątnej równa jest 9. Długość przeciwprostokątnej jest 15. Wyznacz długość wysokości opuszczonej na przeciwprostokątną.

34. W trójkącie ostrokątnym ABC boki AC i BC mają długości odpowiednio $\sqrt{13}$ i 5, a wysokość poprowadzona z wierzchołka C ma długość 3. Oblicz pole tego trójkąta.

35. Długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego równe są a i b. Wyznacz długość wysokości opuszczonej na przeciwprostokątną.

36. W prostokącie $ABCD$ przekątna AC ma długość $3\sqrt{2}$, zaś $|BC| = \sqrt{2}$. Wyznacz pole tego prostokąta oraz długość wysokości DE w trójkącie ACD.

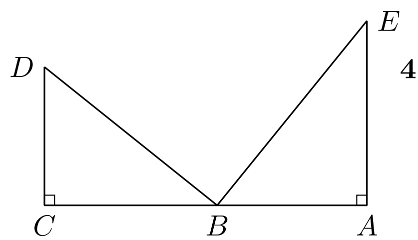
37*. W trójkącie prostokątnym ABC wysokość CC' wychodząca z wierzchołka kąta prostego ma długość 4, a odcinek BC' ma długość 8. Wyznacz wszystkie długości boków w tym trójkącie.



38. Na rysunku obok trójkąt RQM jest prostokątny. $|MP| = |PR|$, $|MQ| = |QP| = 1$. Wyznacz długość odcinka MR.

39. W trapezie podstawy mają długości 10 i 20, a ramiona 10 i 12. Wyznacz wysokość trapezu.

40. W trapezie podstawy mają długości 9 i 6, a ramiona długości 4 i 3. Wyznacz wysokość trapezu oraz długości przekątnych.



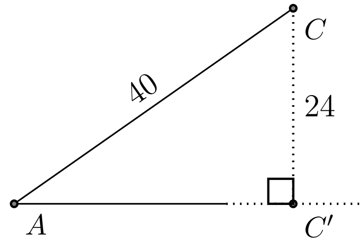
41. Na rysunku obok $\overline{AE} \perp \overline{AC}$, $\overline{DC} \perp \overline{AC}$, $|EB| = |DB|$, $|EA| = 50$, $|DC| = 40$, $|AC| = 60$. Wyznacz $|AB|$.

42.* Podstawy trapezu mają długość 20 i 10, zaś ramiona 8 i 6. Wyznacz wysokość trapezu oraz jego pole.

43.* Podstawy trapezu mają długość 10 i 6, a ramiona długość 13 i 11. Wyznacz wysokość trapezu. **wsk.** zrób staranny rysunek z użyciem cyrkla i linijki.

44.* Dany jest trójkąt o bokach długości 4, 5, 6. Spodek wysokości opuszczonej na najdłuższy bok dzieli go na dwa odcinki. Wyznacz długości tych odcinków oraz wysokość h opuszczoną na ten bok.

45. Dany jest odcinek AB o długości 12. Na prostej prostopadłej do AB i przechodzącej przez punkt A obieramy punkt L tak, aby $|AL| = 3$, zaś na prostej prostopadłej także do odcinka AB i przechodzącej przez punkt B obieramy punkt K tak, że $|BK| = 2$. Oblicz długość odcinka KL.



46. W trójkącie ABC dane są: $|AC| = 40$, $|CB| = 25$, zaś wysokość CC' ma długość 24. Wyznacz $|AB|$. Rozpatrz oba przypadki.

47. Dwa boki trójkąta prostokątnego mają długości 10 i 20. Jaką długość może mieć trzeci bok w tym trójkącie?

48. W trójkącie ABC podstawa AB ma długość 6, ramię AC ma długość 5, a pole trójkąta jest równe 9. Wyznacz długość boku BC – rozpatrz obydwa przypadki. Wyznacz również wysokość opuszczoną na bok BC.

49. Dany jest trójkąt równoramienny o podstawie długości 6 i ramionach długości 5. Wyznacz wysokość opuszczoną na podstawę.

50. Oblicz wysokość trójkąta równoramiennego o podstawie długości 12 i ramionach długości 10 opuszczoną na jego podstawę oraz wysokość opuszczoną na jedno z ramion trójkąta.

51. Boki trójkąta mają długości 13, 13 i 10. Oblicz jego pole oraz długości wszystkich jego wysokości.

52. W trójkącie równoramiennym podstawa i wysokość na nią opadająca mają równe długości. Oblicz pole i obwód tego trójkąta wiedząc, że ramię ma długość $\sqrt{5}$.

53. Pole trójkąta równoramiennego jest równe 48; podstawa ma długość 12. Oblicz obwód tego trójkąta oraz wysokość wychodzącą z wierzchołka przy podstawie.

54. W kwadracie $ABCD$ bok ma długość 8. Punkt E leży wewnątrz kwadratu, a przy tym $|AE| = |BE| = 5$. Wyznacz $d(E, l_{CD})$ (czyli długość wysokości w trójkącie CDE) oraz $|ED|$.

55. W trójkącie równoramiennym podstawa ma długość $2a$, zaś ramię ma długość b. Oblicz wysokość tego trójkąta.

56. W trójkącie równoramiennym podstawa ma długość 16, a wysokość jest o 4 krótsza od ramienia. Wyznacz pole tego trójkąta.

57. W trójkącie równoramiennym ostrokątnym ABC: $|AC| = |BC|$. Niech A' będzie spodkiem wysokości wychodzącej z wierzchołka A, a punkt B' spodkiem wysokości wychodzącej z wierzchołka B. Uzasadnij, że trójkąty ABA' i ABB' są przystające.

$\boxed{! \Rightarrow}$ **58.** Niech $ABCD$ będzie trapezem równoramiennym o dłuższej podstawie AB i krótszej CD. Niech CK i DL będą wysokościami w tym trapezie. Uzasadnij, że $\triangle ADL \equiv \triangle BCK$.

59. Wyznacz długość przekątnych trapezu równoramiennego, którego ramiona mają długość 41, zaś podstawy mają długości 54 i 36.

60. W trapezie równoramiennym dłuższa podstawa ma długość 40. Ramiona mają długość 13, a wysokość ma długość 12. Oblicz długość b drugiej podstawy oraz długość d przekątnych.

61. W trapezie równoramiennym wysokość opuszczona z wierzchołka kąta rozwartego dzieli podstawę na dwie części o długościach 8 i 3. Obwód trapezu równy jest 26. Wyznacz pole trapezu.

62. W trapezie równoramiennym boki mają długości 24,15,15,6. Wyznacz jego pole.

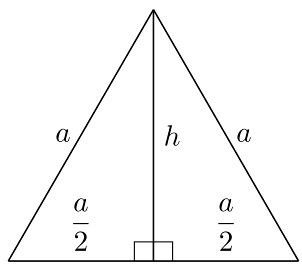
63. W trapezie równoramiennym $ABCD$: $|BC| = |AD| = 15$. Przekątne trapezu są prostopadłe do jego ramion i mają długość 20. Wyznacz długość podstaw oraz pole trapezu.

64. W trapezie $ABCD$ ramiona BC i AD mają długość 15, podstawa CD ma długość 7, zaś wysokość CH ma długość 12. Wyznacz długość drugiej podstawy oraz długość przekątnych.

TRÓJKĄTY RÓWNOBOCZNE

Obecnie wyznaczymy wzory jakimi się wyrażają wysokość oraz pole trójkąta równobocznego o boku długości a. Wysokość w trójkącie oznaczamy h.

Wpierw zauważmy, że trójkąt równoboczny jest równoramienny, więc wysokość dzieli w takim trójkącie podstawę na połowy. Z twierdzenia Pitagorasa, zob. rysunek, mamy



$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 = a^2,$$

czyli $h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$, czyli $h^2 = \frac{3}{4}a^2$, a stąd $h = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = a\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Mamy zatem wzór na wysokość w trójkącie równobocznym

$$\boxed{h = a\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Ponieważ pole trójkąta jest równe połowie iloczynu podstawy i wysokości, wobec tego mamy

$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Zatem wzór na pole trójkąta równobocznego o boku długości a jest

$$\boxed{P = a^2\frac{\sqrt{3}}{4}}$$

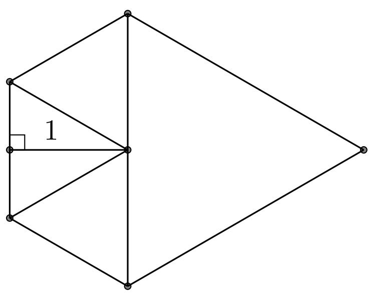
Obecnie wykonamy serię ćwiczeń, których celem jest osadzenie w świadomości wyprowadzonych powyżej wzorów.

65. Na podstawie podanej wielkości w trójkącie równobocznym wyznacz dwie pozostałe wielkości.

długość boku trójkąta równobocznego	8	$2\sqrt{3}$				
wysokość trójkąta			$\sqrt{3}$	5		
pole trójkąta					$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$4\sqrt{3}$

66. W trójkącie równobocznym suma długości boku i wysokości poprowadzonej do niego wynosi 10. Wyznacz długość boku oraz wysokość w tym trójkącie.

67. W trójkącie równobocznym bok jest o 2 jednostki dłuższy od wysokości. Wyznacz długość boku oraz wysokość w tym trójkącie.



68. Przekątna kwadratu i wysokość trójkąta równobocznego mają taką samą długość. Wyznacz pole kwadratu i pole trójkąta. Które z tych pól jest większe?

69. Oblicz pole i obwód pięciokąta na rysunku obok, zbudowanego z czterech trójkątów równobocznych.

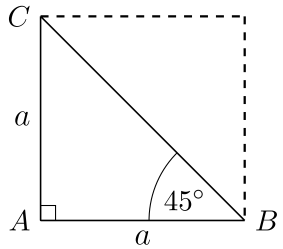
70. W trójkącie równobocznym różnica długości boku i wysokości trójkąta wynosi 3. Wyznacz długość boku oraz wysokość w tym trójkącie.

71. Kwadrat i trójkąt równoboczny mają takie same obwody równe 12. Wyznacz długość przekątnej kwadratu oraz wysokość trójkąta, a następnie rozstrzygnij co jest dłuższe: przekątna kwadratu czy wysokość trójkąta.

TRÓJKĄTY O KĄTACH $90°$, $45°$, $45°$ ORAZ $90°, 60°, 30°$

W początkowym kursie geometrii ważne są szczególnie dwa typy trójkątów prostokątnych: o kątach $45°, 45°, 90°$ oraz o kątach $30°, 60°, 90°$.

Trójkąty o kątach $45°, 45°, 90°$.



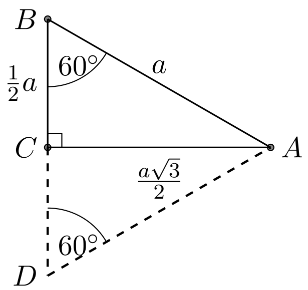
Trójkąt prostokątny ABC, którego jeden z kątów ostrych ma miarę $45°$ jest trójkątem równoramiennym. (Zastanów się, czy umiesz uzasadnić ten fakt.)

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku obok. Niech zatem $|AB| = |AC| = a$.

Zauważmy, że trójkąt ABC jest połową kwadratu, ponieważ składając dwa takie trójkąty w sposób przedstawiony na rysunku otrzymujemy czworokąt o czterech kątach prostych i wszystkich bokach długości a. Zatem przeciwprostokątna BC trójkąta prostokątnego równoramiennego ABC o ramionach długości a jest jednocześnie przekątną kwadratu o boku długości a. Stąd skoro $|AB| = |AC| = a$, to $|BC| = a\sqrt{2}$.

Trójkąt o kątach $30°, 60°, 90°$.

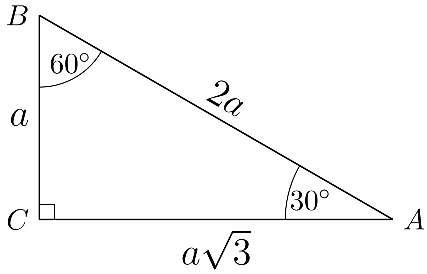
czyli trójkąt prostokątny, którego jeden kąt ostry ma $60°$, a drugi $30°$.



Dorysujmy trójkąt przystający do trójkąta ABC w sposób przedstawiony na rysunku obok.

Zauważmy, że trójkąt BDA jest trójkątem równobocznym, bo wszystkie jego kąty mają miarę $60°$. Wtedy przyprostokątna AC w trójkącie ABC jest wysokością w trójkącie równobocznym ABD. Niech $|AB| = a$. Wówczas $|BC| = \dfrac{1}{2}a$ oraz $|AC| = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

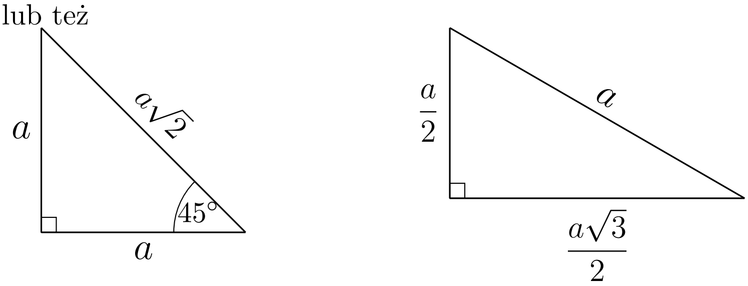
Często, dla ułatwienia obliczeń, przyjmuje się zależności:



UWAGA

Ważne jest precyzyjne wykonywanie rysunków tak, aby kąt o mierze $30°$ był mniejszy od kąta o mierze $60°$. To ułatwia prawidłową obserwację, w jaki sposób *w pamięci dorysować* drugą połowę trójkąta równobocznego i prawidłowo zapisać zależności.

lub też

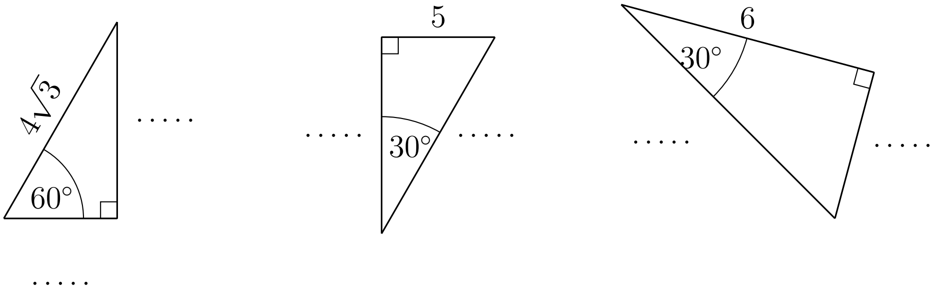


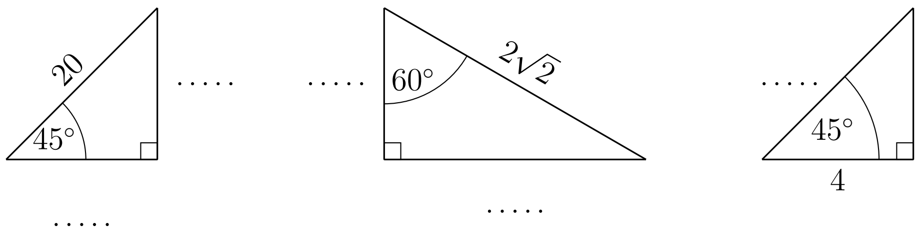
W każdym z powyższych przypadków wystarczy znać długość jednego boku trójkąta, by wyznaczyć długości pozostałych boków.

72. O trójkącie ABC wiemy, że jest on prostokątny, zaś kąt o wierzchołku A jest prosty. Na podstawie podanych pewnych elementów tego trójkąta wpisz pozostałe elementy tego trójkąta.

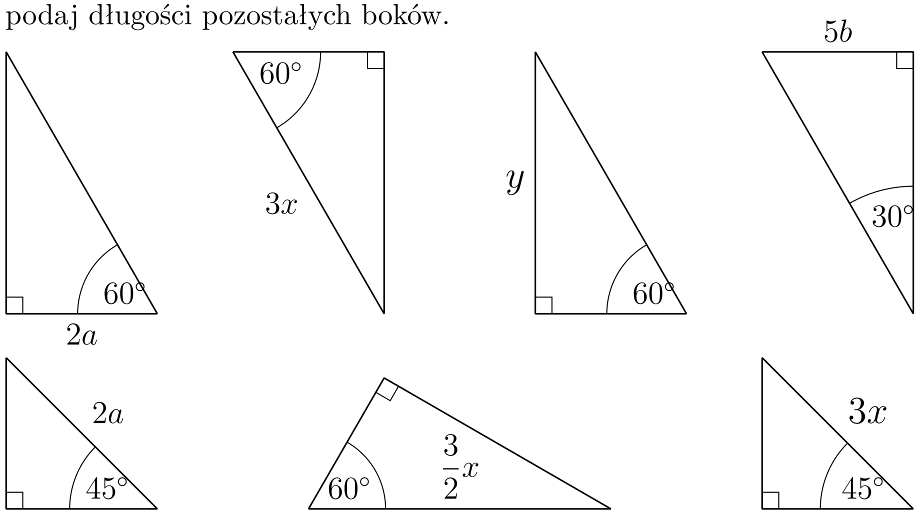
$\|AB\|$	6				18	
$\|AC\|$		6		12		
$\|BC\|$			6			8
$\sphericalangle ABC$	60°	60°	60°	30°	30°	30°

73. Na każdym z poniższych rysunków mamy trójkąt, w którym podano pewne długości boków oraz pewne kąty. Na podstawie tych informacji podaj długości wskazanych boków.

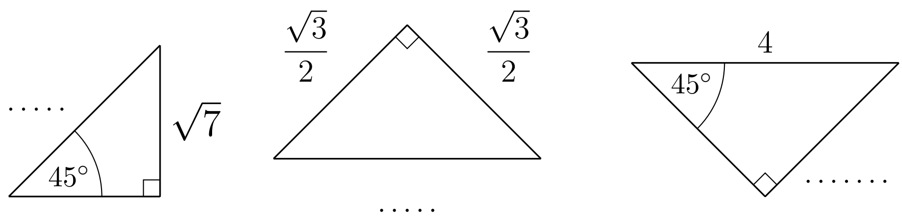




74. Na każdym z poniższych rysunków mamy trójkąt, w którym podano pewne długości boków oraz pewne kąty. Na podstawie tych informacji podaj długości pozostałych boków.



75. Na każdym z poniższych rysunków mamy trójkąt, w którym podano pewne długości boków oraz pewne kąty. Na podstawie tych informacji podaj długości wskazanych boków.



76. W trójkącie prostokątnym jeden z kątów ostrych ma 30°. Obwód tego trójkąta

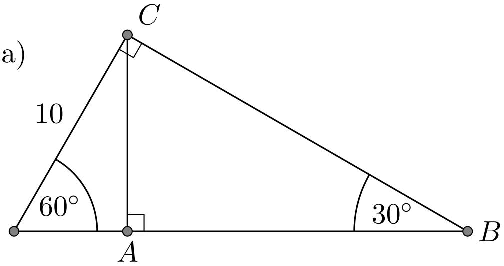
(a) jeżeli krótsza przyprostokątna ma długość 2, jest równy ....

(b) jeżeli dłuższa przyprostokątna ma długość 2, jest równy ....

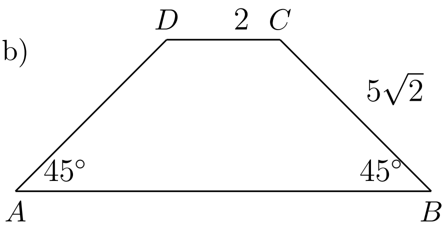
(c) jeżeli przeciwprostokątna ma długość 2, jest równy ....

77. Na poniższych czterech rysunkach mamy trójkąty i trapezy, w których podano pewne długości boków oraz pewne kąty. Na podstawie tych informacji wyznacz obwód trójkąta ABC czy też trapezu $ABCD$. Na rysunku zapisuj długości odcinków potrzebne do wyznaczenia tego obwodu.

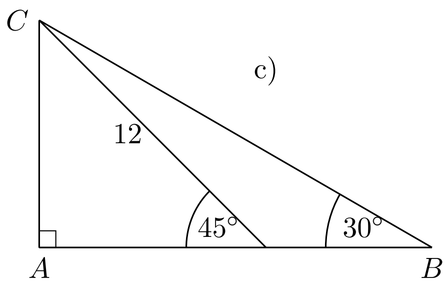
a)



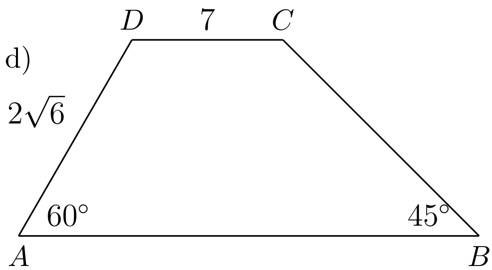
b)

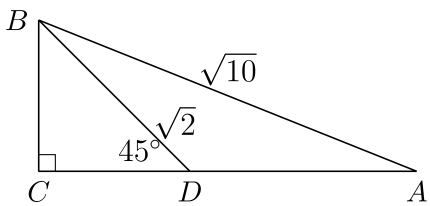


c)



d)





78. Na rysunku obok trójkąt ABC jest prostokątny. Oblicz pole trójkąta ABD.

79. W trójkącie na rysunku obok wyznacz kolejno

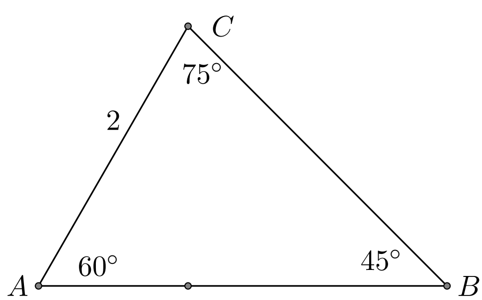
(a) h_c,

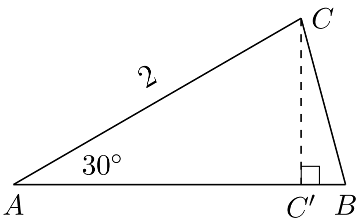
(b) $|BC|$,

(c) $|AB|$,

(d) P_{ABC},

(e) h_a.





80. Trójkąt na rysunku obok jest równoramienny. Wyznacz w pamięci kolejno
a) $|CC'|$, b) $|AC'|$, c) $|C'B|$, d) $|BC|$.

81. W trójkącie prostokątnym jeden z kątów ma $30°$, a najdłuższy bok ma długość 7. Wyznacz długość dwóch pozostałych boków.

82. W trójkącie prostokątnym przyprostokątna przy kącie $60°$ ma długość 3. Wyznacz długości pozostałych boków, pole tego trójkąta oraz wysokość wychodzącą z wierzchołka kąta prostego.

83. W równoległoboku dłuższy bok ma długość 6. Kąty ostre mają miarę $45°$, a krótsza przekątna tworzy z krótszym bokiem kąt prosty. Wyznacz długość drugiego boku w tym równoległoboku, jego pole oraz wysokość opuszczoną na bok o długości 6.

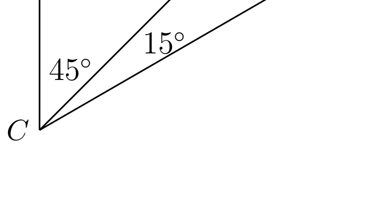
84. Krótsza podstawa trapezu równoramiennego ma długość 10. Ramię ma długość 4 i jest nachylone do podstawy pod kątem $30°$. Oblicz pole tego trapezu.

85. W trapezie, o podstawach długości 8 i 4, kąty ostre przy podstawie mają po $60°$. Wyznacz długość ramienia w tym trapezie oraz jego pole.

86. W trapezie prostokątnym o podstawach AB i CD krótsza przekątna AC i pochyłe ramię mają długość 10, zaś kąt ostry w trapezie ma miarę $60°$. Oblicz pole trapezu.

87. W trójkącie prostokątnym przyprostokątna leżąca naprzeciwko kąta $60°$ ma długość 3. Wyznacz długości pozostałych boków w tym trójkącie.

88. W trójkącie ABC wysokość CD ma długość 8. Kąt B ma $60°$, a kąt A ma $45°$. Wyznacz obwód tego trójkąta.



89. W trójkącie prostokątnym ABC, na rysunku obok, półprosta CD dzieli kąt C na dwa kąty o podanych miarach, $|AB| = 100$. Wyznacz $|DB|$.

90. W trójkącie ABC o podstawie AB, $\sphericalangle A = 30^\circ$, $\sphericalangle B = 45^\circ$, zaś wysokość wychodząca z wierzchołka C ma długość 4. Wyznacz pole i obwód trójkąta ABC.

91. W trójkącie prostokątnym suma dwóch kątów równa jest 120°. Przyprostokątna wychodząca z wierzchołka trzeciego kąta ma długość 2. Wyznacz długości pozostałych boków w tym trójkącie oraz wysokość wychodzącą z wierzchołka kąta prostego.

92. W trójkącie ABC o podstawie AB kąt $\sphericalangle A$ ma miarę 45°, kąt $\sphericalangle B$ ma 60°. Długość boku BC jest równa 6. Wyznacz obwód i pole tego trójkąta.

93. W trójkącie ABC o podstawie AB kąt $\sphericalangle A$ ma 30°, kąt $\sphericalangle B$ ma 135°. Długość boku AC jest równa 10. Wyznacz pole i obwód trójkąta ABC.

94. W trójkącie prostokątnym ABC miara kąta C jest równa 30°. Dwusieczna AD drugiego kąta ostrego w tym trójkącie dzieli bok BC na dwa odcinki, przy czym $|BD| = 5$. Wyznacz długości boków trójkąta ABC, długość dwusiecznej AD oraz P_{ACD}.

95. Przekątne trapezu równoramiennego są dwusiecznymi kątów przy dłuższej podstawie. Dłuższa podstawa ma długość 12. Kąt którego wierzchołkiem jest punkt przecięcia przekątnych a ramiona przechodzą przez końce dłuższej podstawy ma 120°. Oblicz obwód tego trapezu.

96. Oblicz obwód trapezu prostokątnego, którego krótsza podstawa oraz dłuższe ramię mają długość 4, a kąt ostry ma miarę 60°.

97. W trójkącie ABC dane są $\sphericalangle C = 120^\circ$, $|AC| = 7$, $|BC| = 4$. Wyznacz długość boku AB.

98. Dany jest równoległobok o bokach 8 i 6 oraz kącie rozwartym 120°. Oblicz obie wysokości tego równoległoboku oraz dłuższą przekątną.

99. Jeden z boków trójkąta ma długość $1 + \sqrt{3}$. Kąty przylegające do tego boku mają miary 30° i 45°. Oblicz pole tego trójkąta.

100. W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku C ma miarę 120°, długość boku BC jest równa 6, zaś długość boku AC jest równa 8. Wyznacz długość boku AB oraz pole trójkąta ABC. **Wsk.** przyjmij AC lub BC za podstawę.

DEFINICJA

Romb jest to czworokąt o wszystkich bokach równych.

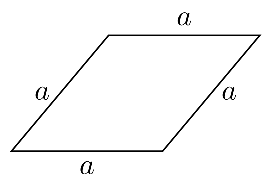
TWIERDZENIE

(i) Przekątne rombu są dwusiecznymi kątów.

(ii) Romb jest równoległobokiem.

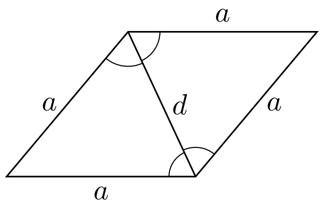
(iii) Przekątne rombu przecinają się pod kątem prostym.

(iv) Pole rombu jest równe połowie iloczynu długości przekątnych rombu.

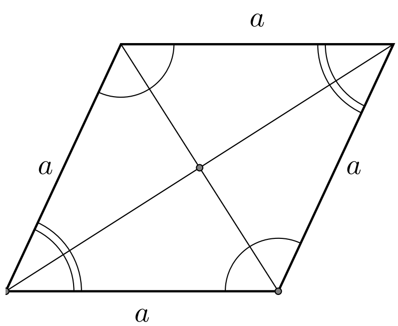


Dowód:

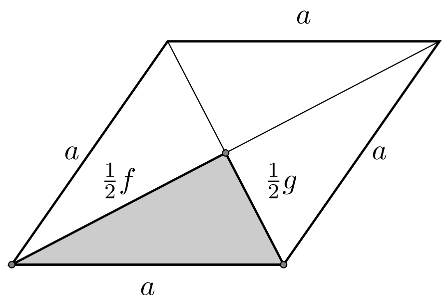
(i) Poprowadźmy którąś z przekątnych w rombie. Dzieli ona romb na dwa przystające (na mocy cechy BBB) trójkąty równoramienne. Ta przekątna jest ich wspólnym bokiem. Z przystawania trójkątów oraz twierdzenia Pons Asinorum wynika, że wszystkie cztery zaznaczone kąty są równe, a z tego wynika, że przekątna ta jest dwusieczną obu kątów w rombie. Podobnie można rozumować w przypadku drugiej przekątnej.



(ii) Na mocy twierdzenia o dwóch prostych przeciętych trzecią prostą z równości kątów na przemian leżących wynika, że naprzeciw siebie leżące w rombie boki są równoległe. A zatem romb jest równoległobokiem.



(iii) Ponieważ wszystkie boki w rombie są równe, a przekątne są, jak już wiemy, dwusiecznymi kątów, wobec tego na mocy cechy KBK przystawania trójkątów, wszystkie cztery trójkąty jakie uzyskujemy w wyniku przecięcia przekątnych są przystające. Wobec tego są to trójkąty prostokątne. Czyli przekątne przecinają się pod kątem prostym, a punkt przecięcia dzieli każdą z nich na połowy.



(iv) Jeśli długość jednej przekątnej oznaczymy przez f, a drugiej przez g, to pole jednego z tych trójkątów prostokątnych jest równe $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}f \cdot \frac{1}{2}g = \frac{1}{8}fg$, więc pole całego rombu jest równe $4 \cdot \frac{1}{8}fg = \frac{1}{2}fg$, czyli równe jest połowie iloczynu długości jego przekątnych.

101. Przekątne rombu mają długości

a) 10 i 24 b) 18 i 24

Wyznacz długość boku rombu, jego pole i wysokość.

102. Bok rombu ma długość 10, a jedna z przekątnych ma długość 6. Oblicz długość drugiej przekątnej i wysokość rombu.

103. Oblicz długość przekątnych rombu, którego obwód wynosi 104, a stosunek długości przekątnych wynosi 12:5.

104. Wyznacz długości obu przekątnych rombu oraz jego pole, w którym kąt ostry ma miarę 60°, a bok ma długość 10.

105. Pole rombu o kącie ostrym 60° wynosi $32\sqrt{3}$. Oblicz długość boku rombu oraz długości jego przekątnych.

106. Kąt ostry rombu ma miarę 60°, a dłuższa przekątna ma długość 8. Wyznacz długość boku tego rombu oraz jego pole.

107. Wysokość rombu, wychodząca z wierzchołka kąta rozwartego, dzieli bok na który pada, na odcinki długości 1 i 2. Wyznacz wysokość rombu oraz długości obu przekątnych. Zauważ, że zadanie ma dwa rozwiązania. Wyznacz obydwa rozwiązania.

108. Zbadaj czy istnieje romb o boku 15, wysokości 5, przekątnych 10 i 24.

TWIERDZENIE O DWUSIECZNEJ

Z twierdzenia Pitagorasa oraz z cech przystawania trójkątów wynikają następujące dwa fakty:

a) **Jeżeli** punkt leży na dwusiecznej kąta, **to** jest on jednakowo odległy od obu ramion tego kąta.

b) **Jeżeli** punkt jest jednakowo odległy od obu ramion kąta, **to** leży on na dwusiecznej tego kąta.

Oba powyższe fakty wyraża się często w postaci jednego zdania:

TWIERDZENIE

Punkt leży na dwusiecznej kąta **wtedy i tylko wtedy, gdy** jest on jednakowo odległy od obu ramion tego kąta.

Zanim przystąpimy do dowodu twierdzenia wyjaśnimy wpierw użyty w twierdzeniu zwrot *wtedy i tylko wtedy, gdy.* Zwrotu tego używamy wówczas, gdy chcemy pokazać, że dwa zdania – nazwijmy je (1) i (2) są sobie równoważne. Na to, aby dowieść, że tak jest czyli, że

(1) *wtedy i tylko wtedy, gdy* (2)

musimy pokazać, że z prawdziwości zdania (1) wynika prawdziwość zdania (2) oraz, że z prawdziwości zdania (2) wynika prawdziwość zdania (1). W naszym przypadku tymi zdaniami są:

(1) Punkt leży na dwusiecznej kąta.

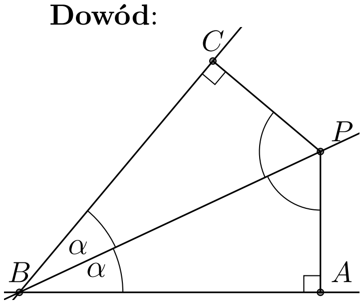
(2) Punkt jest jednakowo odległy od obu ramion tego kąta.

Innymi słowy musimy udowodnić prawdziwość dwóch następujących faktów:

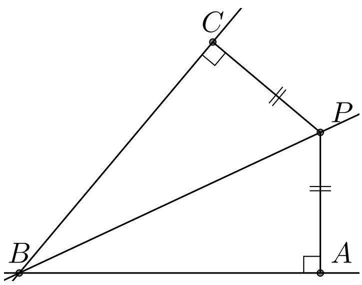
1) Jeżeli punkt leży na dwusiecznej kąta, to jest on jednakowo odległy od obu ramion kąta.

2) Jeżeli punkt jest jednakowo odległy od obu ramion kąta, to ten punkt leży na dwusiecznej tego kąta.

Dowód:



$\boxed{\Longrightarrow}$ Przypomnijmy wpierw, że odległość punktu od prostej jest to długość odcinka łączącego ten punkt z tą prostą i prostopadłego do tej prostej.
Niech $\sphericalangle CBA = 2\alpha$. Półprosta BP niech będzie dwusieczną kąta CBA i niech $\overline{PA} \perp \overline{BA}$, $\overline{PC} \perp \overline{BC}$.
Wobec tego w trójkątach BCP i BAP kąty CPB i APB są równe $90° - \alpha$. Odcinek BP jest wspólny dla trójkątów BPC i BPA. Wobec tego na mocy cechy KBK przystawania trójkątów $\triangle ABP \equiv \triangle CBP$. A ponieważ w trójkątach przystających odpowiadające sobie boki są równej długości, więc $|PC| = |PA|$. Czyli pokazaliśmy, że jeżeli punkt leży na dwusiecznej kąta, to jest jednakowo odległy od obu ramion kąta.



$\boxed{\Longleftarrow}$ Teraz załóżmy, że punkt P leży wewnątrz kąta ABC, niech $\overline{PA} \perp \overline{BA}$, $\overline{PC} \perp \overline{BC}$ i niech $|PC| = |PA|$. Poprowadźmy półprostą BP. Trójkąty BPC i BPA są prostokątne, bok PB jest wspólny dla obu trójkątów, a boki PA i PC są – z założenia – równej długości. Wobec tego z twierdzenia Pitagorasa mamy:

$|BP|^2 = |PC|^2 + |BC|^2$ oraz $|PB|^2 = |PA|^2 + |BA|^2$ czyli

$|PC|^2 + |BC|^2 = |PA|^2 + |BA|^2$

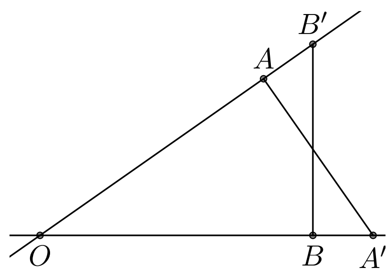
a ponieważ $|PC| = |PA|$ więc z tego wynika, że $|BC|^2 = |BA|^2$, a stąd mamy $|BC| = |BA|$, czyli na mocy cechy BBB przystawania trójkątów $\triangle BCP \equiv \triangle BAP$, a ponieważ w trójkątach przystających odpowiadające sobie kąty są równe, więc w szczególności $\sphericalangle CBP = \sphericalangle ABP$, co oznacza, że półprosta BP jest dwusieczną kąta ABC.

109. W trójkącie prostokątnym ABC kąt C jest prosty, $|BC| = 4$, $|CA| = 3$. Korzystając z ostatniego twierdzenia wyznacz długości odcinków na jakie dzieli bok CA dwusieczna kąta B.

110. W trójkącie równoramiennym ABC o podstawie $AB = 12$ i ramionach długości 10 dwusieczna kąta CAB przecina ramię BC w punkcie E. Wyznacz odległość punktu E od podstawy AB oraz wyznacz P_{AEC}

111. W trójkącie prostokątnym ABC kąt C jest prosty, $|AB| = 13$, $|BC| = 12$. Dwusieczna kąta B przecina bok AC w punkcie D. Wyznacz $d(D, l_{AB})$, $|DC|$, P_{ABD}.

112. W kącie na rysunku obok, O jest wierzchołkiem kąta, $|OA| = |OB|$, $|OA'| = |OB'|$, $\overline{AA'} \perp \overline{OB'}$, $\overline{BB'} \perp \overline{OA'}$. Uzasadnij, że punkt, w którym przecinają się proste AA' i BB' leży na dwusiecznej kąta AOB.



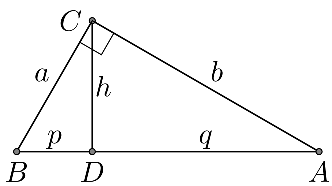
113. W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątna AC ma ma długość 24, a przyprostokątna BC ma długość 10. Dwusieczna kąta CBA przecina bok AC w punkcie D. Wyznacz odległość punktu D od prostych BC i BA.

114. W trójkącie prostokątnym równoramiennym ABC przeciwprostokątna BC ma długość $7\sqrt{2}$. Dwusieczna kąta ACB przecina bok AB w punkcie D. Wyznacz odległość d punktu D od ramion kąta ACB.

115.* W trójkącie ABC mamy: $|AB| = 40$, $|BC| = 13$, $|AC| = 37$. Dwusieczna kąta ACB przecina bok AB w punkcie D. Wyznacz odległość punktu D od prostych AC i BC.

TWIERDZ. O WYSOKOŚCI TRÓJKĄTA PROSTOKĄTNEGO

116. W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długości 6 i 8. Wysokość poprowadzona do przeciwprostokątnej podzieliła ją na dwa odcinki. Wyznacz długość każdego z nich.



TWIERDZENIE

W trójkącie prostokątnym wysokość wychodząca z wierzchołka kąta prostego dzieli przeciwprostokątną na dwa odcinki, których iloczyn długości jest równy kwadratowi długości tej wysokości, czyli przy oznaczeniach jak na rysunku obok $h^2 = pq$.

Dowód:
Stosując tw. Pitagorasa do trójkątów BDC i ACD mamy równości

$$p^2 + h^2 = a^2 \text{ i } q^2 + h^2 = b^2$$

Dodając te równości stronami mamy

$$p^2 + q^2 + 2h^2 = a^2 + b^2 \qquad (*)$$

Stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkąta ABC mamy

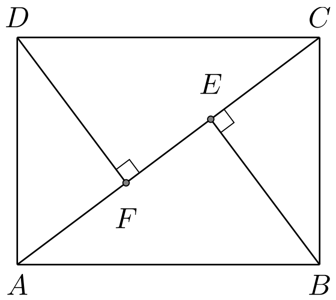
$$(p + q)^2 = a^2 + b^2 \text{ czyli } p^2 + q^2 + 2pq = a^2 + b^2 \qquad (**)$$

Wobec tego z równości $(*)$ i $(**)$ mamy
$p^2+q^2+2h^2 = p^2+q^2+2pq$, odejmując od obu stron p^2+q^2 mamy $2h^2 = 2pq$, a stąd $h^2 = pq$.

117. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości 4 i 8. Wyznacz długości odcinków na jakie dzieli przeciwprostokątną spodek wysokości wychodzącej z wierzchołka kąta prostego oraz wyznacz tę wysokość.

118. W trójkącie prostokątnym ABC przeciwprostokątna AB ma długość 13. Wysokość CD ma długość h i dzieli przeciwprostokątną tak, że $|AD| = 4$. Oblicz h oraz długości obu przyprostokątnych.

119.* W trójkącie prostokątnym ABC wysokość CC' wychodząca z wierzchołka kąta prostego ma długość 4, a odcinek BC' ma długość 8. Wyznacz wszystkie długości boków w tym trójkącie.



120. Z przeciwległych wierzchołków B i D prostokąta $ABCD$ na rysunku obok poprowadzono odcinki BE i DF prostopadłe do przekątnej AC. Punkty E i F podzieliły przekątną AC tak, że $|AF| = |FE| = |EC| = 4$. Oblicz pole tego prostokąta.

ZADANIA RÓŻNE

121. W trójkącie prostokątnym suma długości przyprostokątnych równa jest 40, zaś pole trójkąta równe jest 175. Wyznacz długość przeciwprostokątnej.

122. W trójkącie prostokątnym o polu równym 2 suma długości przyprostokątnych jest równa 6. Wyznacz długość przeciwprostokątnej.

123. W trójkącie prostokątnym suma długości przyprostokątnych równa jest $\sqrt{37}$, a przeciwprostokątna ma długość 5. Oblicz pole trójkąta oraz długość wysokości opuszczonej na przeciwprostokątną.

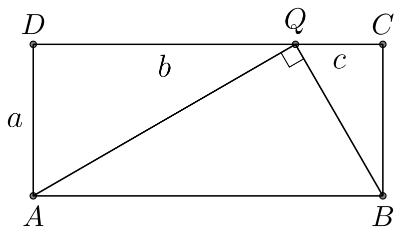
124. W pewnym trójkącie o polu równym 2 kąt pomiędzy bokami o długościach 1 i 5 jest rozwarty. Wyznacz wysokość opuszczoną na prostą zawierającą podstawę o długości 1 oraz długość trzeciego boku.

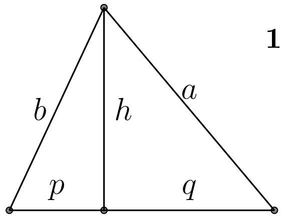
125. W pewnym trójkącie kąt pomiędzy bokami o długościach 13 i 1 jest rozwarty. Pole tego trójkąta równe jest 6.Wyznacz wysokość opuszczoną na prostą zawierającą podstawę o długości 1 oraz długość trzeciego boku.

126. W trójkącie kąt pomiędzy bokami długości 13 i 1 jest ostry, a pole trójkąta jest równe $\frac{5}{2}$. Wyznacz długość trzeciego boku.

127. Podstawa trójkąta ma długość 14, a pole jego równe jest 84. Jedno z ramion ma długość 13. Wyznacz długość drugiego ramienia. Podaj oba rozwiązania.

128. W prostokącie $ABCD$ kąt AQB jest prosty, $|AD| = a$, $|BQ| = b$, $|QC| = c$. Pokaż, że $|AB| = \sqrt{b^2 + 2a^2 + c^2}$ oraz, że $a^2 = bc$.





129. Pokaż, że w dowolnym trójkącie ostrokątnym, przy oznaczeniach jak na rysunku obok, zachodzi:

$$p = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}, \quad q = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}.$$

Wsk: $q = c - p$.

130. Korzystając z tego samego rysunku udowodnij, że $h^2 = (b + p)(b - p)$. Stosując wyniki z poprzedniego zadania dla p, pokaż, że $4c^2h^2 = [a^2 - (b - c)^2] \cdot [(b + c)^2 - a^2]$. Oznaczając $a + b + c = 2s$ pokaż teraz, że $P_{ABC} = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$.
Jest to tzw. wzór Herona na pole trójkąta. *Heron z Aleksandrii, matematyk, mechanik i wynalazca żyjący w I wieku n.e.*

131. Z dowolnie wybranego punktu na boku trójkąta równobocznego prowadzimy odcinki prostopadłe do dwóch boków. Wykaż, że suma ich długości równa się wysokości trójkąta.

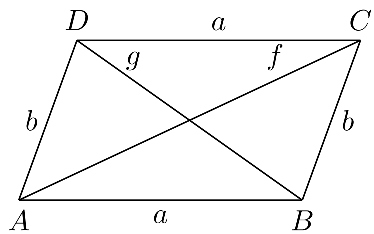
132. W kwadracie $ABCD$ o boku długości 12 wybrano na boku AB punkt E, który podzielił ten bok na odcinki o długościach 5 i 7. Następnie punkt E połączono z wierzchołkami C i D. Oblicz pole trójkąta ECD oraz wysokości w tym trójkącie wychodzące z wierzchołków C i D.

133. Uzasadnij, że jeżeli

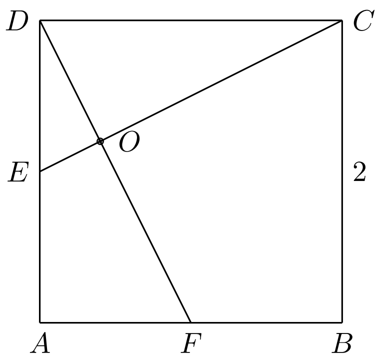
(a) w trapezie przekątne są równej długości, to jest on równoramienny,

(b) trapez jest równoramienny, a nie jest przy tym równoległobokiem, to przekątne jego są równej długości.

134. Uzasadnij, że w równoległoboku suma kwadratów przekątnych równa jest sumie kwadratów jego boków, czyli krótko, jeżeli a, b są długościami boków równoległoboku, a f, g długościami jego przekątnych, to $2a^2 + 2b^2 = f^2 + g^2$



135** W trójkącie prostokątnym ABC dwusieczne kątów ostrych dzielą ten trójkąt na trzy trójkąty i czworokąt. Wyznacz pole tego czworokąta, jeżeli przyprostokątne mają długość 8 i 6.



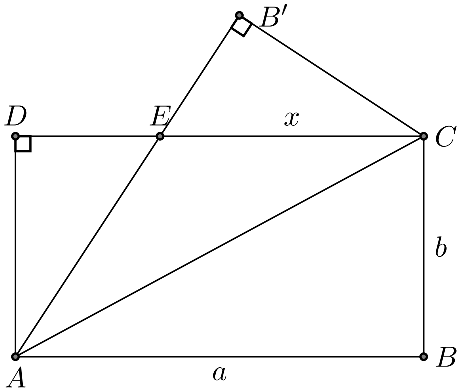
136. Dany jest kwadrat $ABCD$ o boku długości 2. Punkt E jest środkiem boku AD, punkt F jest środkiem boku AB. Punkt O jest punktem przecięcia odcinków CE i DF.

(a) Uzasadnij, że $\overline{CE} \perp \overline{DF}$.

(b) Wyznacz P_{DEC} oraz $|DO|$.

(c) Wyznacz $|EO|$

137. W prostokącie $ABCD$ na rysunku poniżej mamy $|AB| = a$, $|BC| = b$.



Na przekątnej AC zbudowano trójkąt ACB' przystający do trójkąta ACD, przy czym $\triangle ACD \equiv \triangle CAB'$. Odcinki CD i AB' przecinają się w punkcie E.

a) Uzasadnij, że $\triangle AED \equiv \triangle ECB'$.

b) Wyznacz długość odcinka CE.

c) Wyznacz pole trójkąta ACE.

Odpowiedzi i wskazówki

1. a) $c = 10$, b) $c = 13$, c) $c = 25$, d) $c = 6$, e) $c = 4\sqrt{3}$, f) $c = 3\sqrt{3}$

2. a) $b = 6$, b) $b = 12$, c) $b = 5$, d) $b = 10$, e) $b = 3\sqrt{2}$, f) $b = 5$

3. 36

4. $5\sqrt{2}$

5. $3\sqrt{2}$

6. $\frac{7}{2}\sqrt{2}$

7. 25

8. $Ob = 8 + 4\sqrt{2}$, $h = \frac{4}{\sqrt{2}}$

9.

długość boku kwadratu	5	$2\sqrt{2}$	6	$\sqrt{10}$	7	$\sqrt{3}$
długość przekątnej kwadratu	$5\sqrt{2}$	4	$6\sqrt{2}$	$2\sqrt{5}$	$7\sqrt{2}$	$\sqrt{6}$
pole kwadratu	25	8	36	10	49	3

10. $\frac{7}{\sqrt{2}+1}$ wsk. przekątna w kwadracie jest $\sqrt{2}$ razy dłuższa od jego boku.
11. $5\sqrt{2}$
12. $\frac{7}{\sqrt{2}-1}$
13. $\frac{3}{\sqrt{2}-1}$
14. $28\sqrt{2}$
15. 17
16. 36, 324
17. 15
18. 16
19. 80
20. $Ob = 42$, $h_2 = 11\frac{1}{5}$, $h_3 = 12\frac{12}{13}$
21. $d = 37$
22. $\sqrt{21}$
23. 42
24. 66
25. a) 13, b) 3
26. $43 + \sqrt{39}$
27. $x = \frac{2}{9}$, $x = 5\frac{1}{4}$, $x = 4\frac{1}{6}$
28. $15\frac{3}{5}$
29. 12 łokci
30. 12 stóp
31. a) 10 km, b) 8 km
32. $\frac{1}{\sqrt{2}}$
33. $h = 7\frac{1}{5}$
34. 9
35. $h = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$
36. $P = 4\sqrt{2}$, $h = 1\frac{1}{3}$
37. $2\sqrt{5}$, $4\sqrt{5}$, 10
38. $\sqrt{4+2\sqrt{2}}$
39. $h = \frac{48}{5} = 9\frac{3}{5}$
40. $h = \frac{4}{3}\sqrt{5}$, $d_1 = 7$, $d_2 = 2\sqrt{21}$
41. $|AB| = 22{,}5$
42. $h = \frac{24}{5} = 4\frac{4}{5}$, $P = 72$
43. $h = \sqrt{105}$
44. $6 = 2\frac{1}{4} + 3\frac{3}{4}$, $h = \frac{5}{4}\sqrt{7}$
45. $|KL| = 13$ lub $|KL| = \sqrt{145}$
46. $|AB| = 39$ lub $|AB| = 25$
47. $10\sqrt{5}$ lub $10\sqrt{3}$
48. $|BC| = \sqrt{13}$, $h_a = \frac{18}{13}\sqrt{13}$ lub $|BC| = \sqrt{109}$, $h_a = \frac{18}{109}\sqrt{109}$
49. 4
50. $h_1 = 8$, $h_2 = 9\frac{3}{5}$
51. $P = 60$, $h_1 = 12$, $h_2 = 9\dfrac{3}{13}$
52. $P = 2$, $Ob = 2\sqrt{5} + 2$
53. $Ob = 32$, $h = 9\dfrac{3}{5}$
54. $d(E, l_{CD}) = 5$, $|ED| = \sqrt{41}$
55. $\sqrt{b^2 - a^2}$
56. $P = 48$
59. $d = 5\sqrt{145}$
60. $b = 30$, $d = 37$
61. $P = 32$
62. $P = 180$
63. $a = 25$, $b = 7$, $P = 192$
64. $|AB| = 25$, $|DB| = |AC| = 20$

65.

długość boku trójkąta równobocznego	8	$2\sqrt{3}$	2	$\frac{10}{3}\sqrt{3}$	1	4
wysokość trójkąta	$4\sqrt{3}$	3	$\sqrt{3}$	5	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$
pole trójkąta	$16\sqrt{3}$	$3\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{25}{3}\sqrt{3}$	$\frac{1}{4}\sqrt{3}$	$4\sqrt{3}$

66. $a = \frac{20}{2+\sqrt{3}}$, $h = \frac{10\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$
67. $a = \frac{4}{2-\sqrt{3}}$, $h = \frac{2\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$
68. $P_{\text{kwadratu}} = \frac{1}{2}d^2$, $P_{\text{trójkąta}} = \frac{1}{\sqrt{3}}d^2$, zatem pole trójkąta jest większe
69. $a = \frac{2}{3}\sqrt{3}$, $Ob = \frac{14}{3}\sqrt{3}$, $S = \frac{7}{3}\sqrt{3}$
70. $a = \frac{6}{2-\sqrt{3}}$, $h = \frac{3\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$
71. $d = 3\sqrt{2}$, $h = 2\sqrt{3}$, przekątna kwadratu jest dłuższa

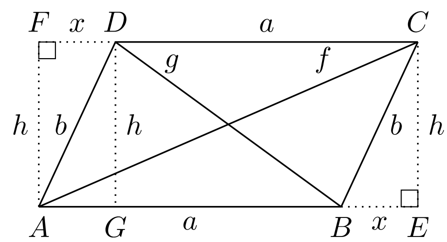
72.

$\lvert AB\rvert$	6	$2\sqrt{3}$	3	$12\sqrt{3}$	18	$4\sqrt{3}$
$\lvert AC\rvert$	$6\sqrt{3}$	6	$3\sqrt{3}$	12	$6\sqrt{3}$	4
$\lvert BC\rvert$	12	$4\sqrt{3}$	6	24	$12\sqrt{3}$	8
$\sphericalangle ABC$	$60°$	$60°$	$60°$	$30°$	$30°$	$30°$

76. a) $6 + 2\sqrt{3} = 2(3 + \sqrt{3})$, b) $2 + 2\sqrt{3}$, c) $3 + \sqrt{3}$
77. a) $Ob_{ABC} = 15\sqrt{3} + 15$, b) $Ob_{ABCD} = 14 + 10\sqrt{2}$, c) $Ob_{ABC} = 18\sqrt{2} + 6\sqrt{6}$, d) $Ob_{ABCD} = 20 + 3\sqrt{6} + 3\sqrt{2}$
78. $P_{ABD} = 1$
79. a) $h_c = \sqrt{3}$, b) $|BC| = \sqrt{6}$, c) $|AB| = 1+\sqrt{3}$, d) $P_{ABC} = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$, e) $h_a = \frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$
80. a) $|CC'| = 1$, b) $|AC'| = \sqrt{3}$, c) $|C'B| = 2 - \sqrt{3}$, d) $|BC| = 2\sqrt{2 - \sqrt{3}}$.
81. $\frac{7}{2}$, $\frac{7}{2}\sqrt{3}$
82. boki: 6, $3\sqrt{3}$, $P = \frac{9}{2}\sqrt{3}$, $h = \frac{3}{2}\sqrt{3}$
83. $b = \frac{6}{\sqrt{2}}$, $P = 18$, $h = 3$
84. $P = 20 + 4\sqrt{3}$
85. $b = 4$, $P = 12\sqrt{3}$
86. $P = \frac{75}{2}\sqrt{3}$
87. $\frac{3}{\sqrt{3}}$, $\frac{6}{\sqrt{3}}$
88. $Ob = 8\sqrt{3} + 8\sqrt{2} + 8$
89. $100 - \frac{100}{3}\sqrt{3}$
90. $P = 8(1 + \sqrt{3})$
91. $2, 2\sqrt{3}, 4$, $h = \sqrt{3}$
92. $Ob = 3\sqrt{6} + 3\sqrt{3} + 9$, $P = \frac{27+9\sqrt{3}}{2}$
93. $P = \frac{25(\sqrt{3}-1)}{2}$, $l = 5(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})$
94. $5\sqrt{3}, 15, 10\sqrt{3}$, $d = 10$, $P_{ACD} = 25\sqrt{3}$
95. 30
96. $14 + 2\sqrt{3}$
97. $|AB| = \sqrt{93}$
98. $h_1 = 3\sqrt{3}$, $h_2 = 4\sqrt{3}$, $d = 2\sqrt{37}$
99. $P = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}$
100. $|AB| = 2\sqrt{37}$, $P_{ABC} = 12\sqrt{3}$
101. a) $a = 13$, $P = 120$, $h = 9\frac{3}{13}$, b) $a = 15$, $P = 216$, $h = 14\frac{2}{5}$
102. $d = 2\sqrt{91}$, $h = \frac{3}{5}\sqrt{91}$

103. $d_1 = 20$, $d_2 = 48$
104. $d_1 = 10$, $d_2 = 10\sqrt{3}$, $P = 50\sqrt{3}$
105. $a = 8$, $d_1 = 8$, $d_2 = 8\sqrt{3}$
106. $a = \frac{8}{\sqrt{3}}$, $P = \frac{32}{\sqrt{3}}$
107. $h = 2\sqrt{2}$, $d_1 = 2\sqrt{3}$, $d_2 = 2\sqrt{6}$ lub $h = \sqrt{5}$, $d_1 = \sqrt{6}$, $d_2 = \sqrt{30}$
108. nie istnieje
109. $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{3}$
110. $d(E, l_{AB}) = \frac{48}{11}$, $P_{AEC} = 21\frac{9}{11}$
111. $d(D, l_{AB}) = \frac{12}{5}$, $|DC| = \frac{12}{5}$, $P_{ABD} = 15\frac{3}{5}$
113. $6\frac{2}{3}$
114. $7\sqrt{2} - 7$
115. wsk wyznacz wpierw wysokość wychodzącą z wierzchołka C, następnie P_{ABC}, a następnie zauważ, że $P_{ABC} = P_{ACD} + P_{BCD}$. Trójkąty ACD i BCD mają jedną wysokość taką samą, a mianowicie tę wychodzącą z wierzchołka D.
116. $3\frac{3}{5}$, $6\frac{2}{5}$
117. $\frac{4}{5}\sqrt{5}$, $\frac{16}{5}\sqrt{5}$, $h = \frac{8}{5}\sqrt{5}$
118. $h = 6$, $|AC| = 2\sqrt{13}$, $|BC| = 3\sqrt{13}$
119. $2\sqrt{5}$, $4\sqrt{5}$, 10
120. $P = 48\sqrt{2}$
121. $c = 30$
122. $2\sqrt{7}$
123. $P = 3$, $h = \frac{6}{5}$
124. $h = 4$, $x = 4\sqrt{2}$
125. $h = 12$, $x = 6\sqrt{5}$
126. $\sqrt{146}$
127. 15 lub $\sqrt{505}$
132. $P_{CDE} = 72$, $h_1 = \frac{144}{13}$, $h_2 = \frac{144}{193}\sqrt{193}$

134.



Weźmy równoległobok $ABCD$ o bokach długości a, b i przekątnych długości f, g. Poprowadźmy w nim wysokości AF, DG i CE. Oznaczmy ich długość przez h. Trójkąty BEC i FAD są przystające. Oznaczmy $FD = BE = x$. Mamy wówczas:

W trójkącie AEC

$$(a + x)^2 + h^2 = f^2 \quad \text{czyli} \quad a^2 + 2ax + x^2 + h^2 = f^2 \tag{1}$$

W trójkącie BDG

$$(a - x)^2 + h^2 = g^2 \quad \text{czyli} \quad a^2 - 2ax + x^2 + h^2 = g^2. \tag{2}$$

Dodając (1) do (2) mamy

$$2a^2 + 2x^2 + 2h^2 = f^2 + g^2$$
$$2a^2 + 2(x^2 + h^2) = f^2 + g^2. \tag{3}$$

W trójkącie FAD mamy

$$x^2 + h^2 = b^2 \tag{4}$$

Uwzględniając (4) w równaniu (3) czyli w miejsce $x^2 + h^2$ wstawiając b^2 dostajemy

$$2a^2 + 2b^2 = f^2 + g^2.$$

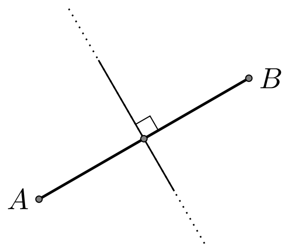
136. a) wsk. skorzystaj z tego, że $\triangle DEC \equiv \triangle AFD$, b) $P_{DEC} = 1$, $|DO| = \frac{2}{5}\sqrt{5}$, c) $|EO| = \frac{1}{5}\sqrt{5}$
137. b) $x = \frac{a^2+b^2}{2a}$ c) $P_{ACE} = \frac{a^2b+b^3}{4a}$

Rozdział 9

SYMETRALNA ODCINKA.

Obecnie będziemy zajmowali się prostą zwaną *symetralną odcinka*. Wpierw określimy co to jest symetralna odcinka, następnie jakie ona ma własności i wreszcie co wynika z tych własności.

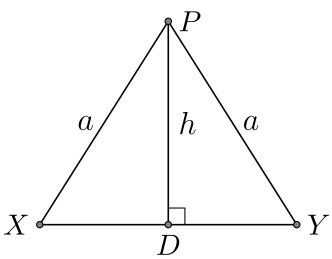
DEFINICJA *Symetralną* odcinka nazywamy prostą prostopadłą do tego odcinka i przechodzącą przez jego środek.

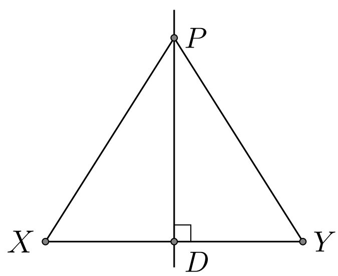


Ponieważ niewygodnie jest powoływać się w każdej sytuacji, gdy mowa jest o symetralnej odcinka, na jej definicję, dlatego sformułujemy twierdzenie o własności symetralnej odcinka.

TWIERDZENIE Niech X i Y będą końcami dowolnego odcinka. Wówczas równość $|XP| = |YP|$ zachodzi **wtedy i tylko wtedy**, gdy punkt P leży na symetralnej odcinka XY.

Dowód:





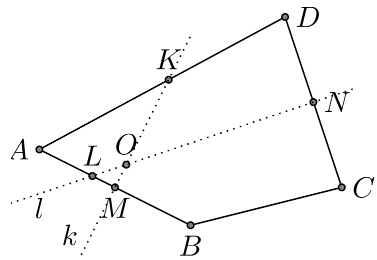
Pokażemy, że jeżeli $|XP| = |YP|$, to punkt P leży na symetralnej odcinka XY. Niech $|PX| = |PY|$. Poprowadźmy odcinek PD prostopadły do XY. Wówczas z tw. Pitagorasa w zastosowaniu do trójkątów PDX i PDY mamy

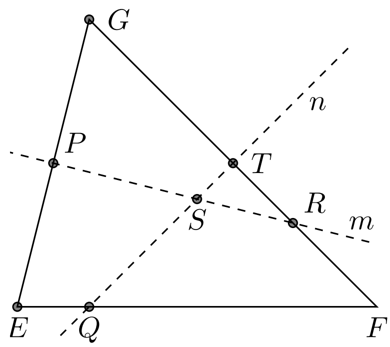
$$|XD|^2 = a^2 - h^2$$
$$|YD|^2 = a^2 - h^2$$

czyli $|XD|^2 = |YD|^2$,
zatem $|XD| = |YD|$.

Pokażemy, że jeżeli punkt leży na symetralnej odcinka XY, to $|XP| = |YP|$.
Niech prosta PD będzie symetralną odcinka XY. Z tego wynika, że $|XD| = |YD|$ oraz, że $l_{PD} \perp \overline{XY}$. Wobec tego na mocy cechy BKB przystawania trójkątów $\triangle XDP \triangle \triangle YDP$. Ponieważ w trójkątach przystających odpowiadające sobie boki mają równe długości, więc z tego wynika, że $|PY| = |PX|$.

1. Na rysunku obok prosta k jest symetralną odcinka AB, zaś prosta l jest symetralną odcinka CD. Posługując się jedynie punktami zaznaczonymi na rysunku, wypisz wszystkie pary odcinków równej długości na tym rysunku.





2. Na rysunku obok prosta m jest symetralną odcinka EG, zaś prosta n jest symetralną odcinka GF. Posługując się jedynie punktami zaznaczonymi na rysunku, wypisz wszystkie pary odcinków równej długości na tym rysunku.

DEFINICJA Okręgiem o środku w punkcie O i promieniu długości r nazywamy zbiór tych wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość od punktu O jest równa r. Okrąg o środku w punkcie O i promieniu r będziemy oznaczać $K(O, r)$.

! $\Rightarrow$ **3.** Uzasadnij, że symetralna cięciwy okręgu przechodzi przez środek tego okręgu.

! $\Rightarrow$ **4.** Pokaż, że prosta przechodząca przez środek okręgu i prostopadła do cięciwy tego okręgu jest symetralną tej cięciwy.

5. W okręgu o promieniu 5 narysowano cięciwę AB o długości 8 i jej końce połączono ze środkiem O tego okręgu.

a) Wyznacz wysokość tak utworzonego trójkąta wychodzącą z punktu O.

b) Wyznacz P_{AOB}.

c) Wyznacz wysokość trójkąta AOB wychodzącą z wierzchołka B.

6. W okręgu o środku O obrano cięciwę o długości 12. Odległość środka O od tej cięciwy równa jest 8. Wyznacz długość promienia w tym okręgu.

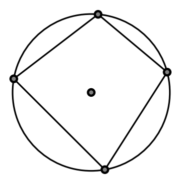
DEFINICJA Odległość dwóch prostych równoległych jest to długość odcinka łączącego te dwie proste, a przy tym prostopadłego do tych prostych.

7. W okręgu o promieniu długości 12 obrano dwie równoległe cięciwy, każda o długości 20. Wyznacz odległość tych dwóch cięciw.

8. Odległość środka okręgu O od cięciwy AB wynosi 8. Jaka jest długość d cięciwy, jeżeli promień okręgu równy jest 10?

9. Odległość środka okręgu O od cięciwy AB wynosi 9, a $P_{AOB} = 108$. Wyznacz promień okręgu.

DEFINICJA
Czworokąt, którego wszystkie cztery wierzchołki leżą na jednym okręgu, nazywamy czworokątem wpisanym w okrąg.



10. Trapez równoramienny $ABCD$ jest wpisany w okrąg o promieniu $r = 25$. Podstawy trapezu mają długości odpowiednio równe 40 i 14. Oblicz pole tego trapezu. Zwróć uwagę na dwa rozwiązania zadania. Wyznacz oba rozwiązania.

11. W kwadracie $ABCD$ o boku długości 1 punkt E jest środkiem boku CD. Symetralna odcinka AE przecina bok AD w punkcie F, zaś bok BC w punkcie G. Wyznacz długości boków trójkąta DEF oraz długości boków trójkąta CEG. Wyznacz pole trójkąta EFG.

12. W prostokącie $ABCD$ punkt E jest środkiem boku AD, $|CD| = 3$, $|AD| = 2$. Symetralna odcinka EC przecina bok CD w punkcie F. Wyznacz $|DF|$, $|EF|$.

13. W trójkącie prostokątnym ABC przeciwprostokątna AB ma długość 10; przyprostokątna AC ma długość 6. Symetralna przeciwprostokątnej AB przecina bok BC w punkcie D. Wyznacz $|BD|$ i $|DC|$.

14.* W kwadracie $ABCD$ o boku długości 12 punkt E leży na boku AB, a przy tym $|AE| = 8$. Symetralna odcinka CE przecina bok BC w punkcie F, zaś bok AD w punkcie G. Wyznacz $|AG|$ i $|BF|$.

15.* W trójkącie prostokątnym ABC przeciwprostokątna AB ma długość 20. Symetralna przeciwprostokątnej przecina bok BC w punkcie D tak, że $|AD| = 12$. Wyznacz $|BC|$, $|AC|$.

16. W trójkącie prostokątnym ABC kąt C jest prosty, $|BC| = 15$, $|AC| = 20$. Niech D będzie środkiem boku BC, zaś F środkiem boku AC. Symetralne boków AC i BC przecinają się w punkcie E. Sporządź staranny rysunek trójkąta ABC, a następnie

(a) wyznacz P_{CDEF}, P_{ABC},

(b) wyznacz wysokość h_1 trójkąta BCE opuszczoną na bok BC oraz wysokość h_2 trójkąta ACE opuszczoną na bok AC.

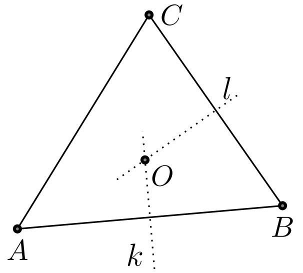
17. W trójkącie prostokątnym ABC punkt D jest środkiem przeciwprostokątnej AB. Symetralna przeciwprostokątnej AB przecina przyprostokątną BC w punkcie E tak, że $|BE| = 5$, $|CE| = 3$. Wyznacz:
a) $|AC|$; b) $|AB|$; c) P_{ABE}; d) P_{BDE}; e) P_{ADEC}.

18. W trapezie prostokątnym $ABCD$ (wierzchołki są oznaczone kolejnymi literami w kierunku odwrotnym do ruchu wskazówek zegara) o podstawach AB i CD symetralna dłuższej podstawy AB przecina ją w punkcie E oraz podstawę CD w punkcie F, przy czym $|CF| = 1$, a $|FD| = 4$, $P_{DFA} = 12$. Wyznacz długości przekątnych tego trapezu.

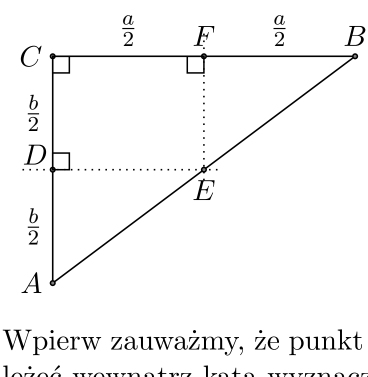
19. W trapezie $ABCD$ (wierzchołki są oznaczone kolejnymi literami w kierunku odwrotnym do ruchu wskazówek zegara) o podstawach AB i CD symetralna dłuższej podstawy AB przecina ją w punkcie E, a krótszą podstawę CD w punkcie F, tak, że $|DF| = 1$, $|CF| = 4$, $P_{ADF} = 2\frac{1}{2}$, $P_{EBF} = 20$. Wyznacz długości przekątnych tego trapezu. **Wsk.** zrób realistyczny rysunek.

Udowodnimy obecnie twierdzenie o symetralnych boków trójkąta.
TWIERDZENIE Symetralne trzech boków dowolnego trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

Dowód:
Weźmy dowolny trójkąt ABC oraz symetralne dwóch boków, na przykład AB i BC. Niech O będzie punktem przecięcia tych symetralnych. Ponieważ punkt O leży na symetralnej boku AB, więc $|AO| = |BO|$. Ponieważ punkt O leży również na symetralnej boku BC, więc $|BO| = |CO|$. Z tych równości wynika, że $|AO| = |CO|$, a z tej równości



wynika, że punkt O leży na symetralnej boku AC. Czyli symetralne wszystkich trzech boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie.
Pokazaliśmy, że punkt O, w którym przecinają się symetralne wszystkich trzech boków trójkąta jest jednakowo odległy od wszystkich trzech wierzchołków trójkąta ABC. Oznaczmy przez R wspólną wartość $|OA| = |OB| = |OC|$. Widzimy, że okrąg $\mathcal{K}(O, R)$ przechodzi przez punkty A, B i C.
DEFINICJA
Okrąg przechodzący przez wszystkie wierzchołki danego wielokąta, nazywamy okręgiem opisanym na tym wielokącie.
WNIOSEK
Punkt, w którym przecinają się symetralne boków trójkąta jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie.
Teraz rozpatrzymy szczególny przypadek trójkąta, a mianowicie trójkąta prostokątnego.
TWIERDZENIE
Punkt w którym przecinają się symetralne boków trójkąta prostokątnego leży na środku przeciwprostokątnej tego trójkąta.



Dowód:
Rozpatrzmy dowolny trójkąt prostokątny ABC o przyprostokątnych długości a i b. Oznaczmy sobie, tak jak na rysunku obok,
D – środek boku AC,
F – środek boku BC,
E – punkt przecięcia symetralnych boków AC i BC.

Wpierw zauważmy, że punkt przecięcia symetralnych boków CB i CA musi leżeć wewnątrz kąta wyznaczonego przez półproste CB i CA. Zatem musi on leżeć albo wewnątrz trójkąta ABC, albo na zewnątrz tego trójkąta, albo też na boku AB czyli na przeciwprostokątnej trójkąta ABC. Uzasadnimy, że leży on na przeciwprostokątnej AB. Niech bowiem E będzie punktem przecięcia symetralnych boków AC i BC. Zauważmy wpierw, że czworokąt $CDEF$ jest prostokątem o bokach długości $\frac{a}{2}$ i $\frac{b}{2}$, a to dlatego, bo boki AC i BC są do siebie prostopadłe, a symetralne boków są do tych boków prostopadłe. Uzasadnimy, że punkt E leży na przeciwprostokątnej AB. W tym celu zauważmy, że $P_{BCE} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{b}{2} = \frac{1}{4}ab$, $P_{ACE} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot \frac{a}{2} = \frac{1}{4}ab$. Wobec tego $P_{BCE} + P_{ACE} = \frac{1}{4}ab + \frac{1}{4}ab = \frac{1}{2}ab = P_{ABC}$. Zauważmy teraz, że gdyby punkt E leżał wewnątrz trójkąta ABC, to $P_{BCE} + P_{ACE}$ byłoby mniejsze od P_{ABC}, gdyby punkt E leżał na zewnątrz trójkąta ABC, to $P_{BCE} + P_{ACE}$ byłoby większe od P_{ABC}, a ponieważ $P_{BCE} + P_{ACE} = \frac{1}{2}ab$, więc z tego wynika, że punkt E musi leżeć na przeciwprostokątnej AB.

WNIOSEK Ponieważ punkt, w którym przecinają się symetralne boków trójkąta, jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie, wobec tego środek okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym leży na przeciwprostokątnej tego trójkąta, a promień okręgu równy jest połowie długości przeciwprostokątnej.

20. Wysokość trójkąta prostokątnego wychodząca z wierzchołka kąta prostego jest dwa razy krótsza od promienia R okręgu opisanego na tym trójkącie. Pole trójkąta jest równe 4. Wyznacz długość promienia R.

21. W trójkącie prostokątnym ABC kąt C jest prosty, $|AC| = 6$, $|BC| = 8$. Wyznacz promień okręgu opisanego na tym trójkącie oraz odległość środka O tego okręgu od prostej AC oraz od prostej BC.

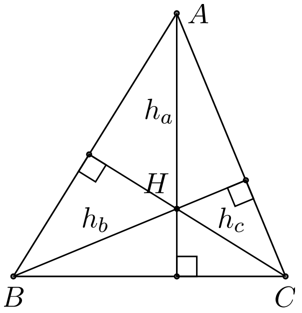
22. Promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym ABC równy jest 5. Niech punkt O będzie środkiem tego okręgu. Symetralna przeciwprostokątnej AB przecina przyprostokątną BC w punkcie D, a $|BC| = 8$. Wyznacz

(a) $|BD|$, $|DC|$,

(b) P_{ADC},

(c) promień okręgu opisanego na trójkącie ACD,

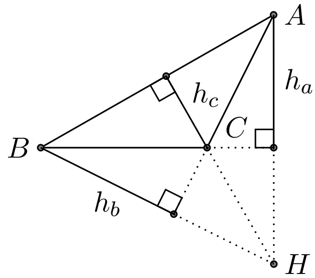
(d) odległość punktu O od prostej BC i od prostej AC.



TWIERDZENIE

W trójkącie ostrokątnym wysokości przecinają się w jednym punkcie.

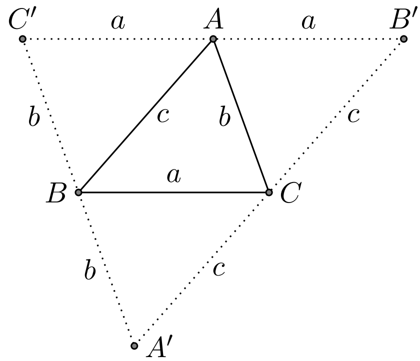
W trójkącie rozwartokątnym proste zawierające wysokości przecinają się w jednym punkcie.



Punkt, o którym jest mowa w twierdzeniu, nazywamy *ortocentrum trójkąta* i oznaczmy zazwyczaj literą H.

Dowód:

Dla dowodu rozpatrzmy trójkąt ostrokątny ABC o bokach długości a, b, c tak jak na rysunku poniżej. Samo rozumowanie dla zwiększenia czytelności podzielmy na kilka kroków.



$\boxed{\mathbf{1.}}$ Przez wierzchołki trójkąta ABC prowadzimy proste równoległe do jego boków. Punkty w których te proste przecinają się oznaczmy A', B', C' tak jak na rysunku obok.

$\boxed{\mathbf{2.}}$ Utworzyliśmy tym sposobem trójkąt $A'B'C'$ którego boki są równoległe do boków trójkąta ABC. Utworzyliśmy też trzy równoległoboki: $ABCB'$, $BCAC'$, $CABA'$.

$\boxed{\mathbf{3.}}$ Ponieważ w równoległoboku boki równoległe są równej długości, wobec tego mamy

$|B'C| = |AB| = |CA'| = c$, bo $ABCB'$ i $ABA'C$ są równoległobokami.

Podobnie wnioskujemy, że

$$|B'A| = |CB| = |AC'| = a$$

i, że

$$|C'B| = |AC| = |BA'| = b.$$

$\boxed{\mathbf{4.}}$ Z powyższego wynika, że środkami boków $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ trójkąta $A'B'C'$ są odpowiednio punkty C, A, B będące wierzchołkami trójkąta ABC.

$\boxed{\mathbf{5.}}$ Symetralna boku $A'B'$ przechodzi przez punkt C, jest przy tym prostopadła do boku AB, zatem zawiera w sobie wysokość h_c trójkąta ABC. Podobnie wnioskujemy o pozostałych dwóch wysokościach trójkąta ABC.

$\boxed{6.}$ Ponieważ symetralne trójkąta $A'B'C'$ przecinają się w jednym punkcie, wobec tego wysokości trójkąta ABC przecinają się w tym samym punkcie.

23. Przeprowadź dowód powyższego twierdzenia w przypadku trójkąta rozwartokątnego. Zrób odpowiedni rysunek i przeprowadź, takie jak w powyższym dowodzie rozumowanie.

24.* W trójkącie ostrokątnym równoramiennym ABC mamy $|AC| = |BC| = 10$, $|AB| = 12$. Niech AE będzie wysokością wychodzącą z wierzchołka A, zaś CD wysokością wychodzącą z wierzchołka C. Wysokości te przecinają się w punkcie H (ortocentrum trójkąta). Wyznacz kolejno $|AD|$, $|DB|$, $|BE|$, $|EC|$, a następnie korzystając z tych wyników wyznacz $|HD|$ i $|HE|$.

25.* Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym $\sphericalangle DAB = \sphericalangle ABC$. Symetralne odcinków AD i BC przecinają się w punkcie M leżącym na odcinku AB. Udowodnij, że $|AC| = |BD|$. **Wsk.** korzystając z własności symetralnej zaznacz tym samym kolorem odcinki jednakowej długości.

Odpowiedzi i wskazówki

1. $|AM| = |MB|$, $|AO| = |OB|$, $|AK| = |KB|$, $|DN| = |NC|$, $|DO| = |OC|$, $|DL| = |LC|$, **2.** $|GP| = |PE|$, $|GS| = |SE|$, $|GR| = |RE|$, $|GT| = |TF|$, $|GS| = |SF|$, $|GQ| = |QF|$, (zatem $|SE| = |SF|$)
3. Wsk. Co to jest środek okręgu? **4.** Wsk. Co to jest środek okręgu? Jaka jest definicja symetralnej? **5.** a) $h = 3$, b) $P = 12$, c) $h = 4\frac{4}{5}$
6. $r = 10$ **7.** $4\sqrt{11}$ **8.** $d = 12$ **9.** $r = 15$ **10.** $P = 1053$ lub $P = 243$
11. w trójkącie DEF $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{8}$, w trójkącie CEG $\frac{1}{2}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{1}{8}\sqrt{65}$ $P_{EFG} = \frac{5}{16}$
12. $|DF| = \frac{4}{3}$, $|EF| = \frac{5}{3}$ **13.** $|BD| = 6\frac{1}{4}$, $|DC| = 1\frac{3}{4}$ **14.** $|AG| = \frac{28}{3}$, $|BF| = \frac{16}{3}$ **15.** $|BC| = 16\frac{2}{3}$, $|AC| = \frac{10}{3}\sqrt{11}$ **16.** $P_{CDEF} = 75$, $P_{ABC} = 150$, $h_1 = 10$, $h_2 = 7\frac{1}{2}$, **17.** a) $|AC| = 4$, b) $|AB| = 4\sqrt{5}$, c) $P_{ABE} = 10$, d) $P_{BDE} = 5$, e) $P_{ADEC} = 11$. **18.** $|AC| = \sqrt{61}$, $|BD| = 10$, **19.** $|AC| = 13$, $|BD| = \sqrt{106}$ **20.** $R = 2\sqrt{2}$ **21.** $R = 5$, $d(O, l_{AC}) = 4$, $d(O, l_{BC}) = 3$
22. a) $|BD| = 6\frac{1}{4}$, $|DC| = 1\frac{3}{4}$, b) $P_{ADC} = 5\frac{1}{4}$, c) $R = 3\frac{1}{8}$, d) $d(O, l_{AC}) = 4$, $d(O, l_{BC}) = 3$ **24.** $|AD| = |DB| = 6$, $|BE| = 7\frac{1}{5}$, $|EC| = 2\frac{4}{5}$, $d(H, l_{AB}) = \frac{9}{2}$, $d(H, l_{AC}) = d(H, l_{BC}) = \frac{21}{10}$, $|HD| = 4\frac{1}{2}$, $|HE| = 2\frac{1}{10}$

Rozdział 10

ZADANIA TEKSTOWE

W matematyce posługujemy się pojęciami różnych tzw. średnich. Znasz już *średnią arytmetyczną*. W gimnazjum zapoznasz się jeszcze z tzw. *średnią harmoniczną* wykorzystywaną głównie w fizyce oraz ze *średnią geometryczną*. Przypomnijmy, na przykładzie, pojęcie średniej arytmetycznej.

PRZYKŁAD Słuchacz uzyskał w 8 testach następujące wyniki: 7, 3, 5, 2, 7, 3, 7, 4. Średnia arytmetyczna tych 8 wyników jest równa

$$\frac{7+3+5+2+7+3+7+4}{8} = \frac{2+2\cdot 3+4+5+3\cdot 7}{8} = \frac{2+6+4+5+21}{8} = \frac{38}{8} = 4{,}75$$

1. W naszej klasie jest 15 chłopców i 10 dziewcząt. Średnia waga jednego chłopaka wynosi 60 kg, a jednej dziewczyny 50 kg. Jaka jest średnia waga jednej osoby z naszej klasy?

2. W naszej klasie jest 6 chłopców i 24 dziewczyny. Średnia waga jednego chłopaka wynosi 55 kg, a jednej dziewczyny 50 kg. Jaka jest średnia waga jednej osoby z naszej klasy?

3. W naszej klasie jest 25 osób i średnia waga ucznia w naszej klasie wynosi 50 kilogramów. W sąsiedniej klasie jest 30 uczniów i średnia waga ucznia w tej drugiej klasie jest równa 60 kilogramów. Jaka jest średnia waga uczniów w tych dwóch klasach? Odpowiedź podaj w postaci liczby całkowitej i ułamka nieskracalnego.

4. Uczniowie napisali pracę kontrolną. 30% uczniów otrzymało piątkę, 40% otrzymało czwórkę, 8 uczniów otrzymało ocenę dostateczną, a pozostali ocenę dopuszczającą. Średnia arytmetyczna tych ocen ocen wynosiła 3,9. Ilu uczniów otrzymało ocenę bardzo dobrą, a ilu dopuszczającą?

5. Średnia arytmetyczna wieku 27 osobowej grupy dzieci jest równa 14 lat. Gdy do obliczania średniej doliczymy wiek opiekuna, to średnia wzrośnie do 15 lat. Ile lat ma opiekun grupy?

W zbiorze wszystkich liczb całkowitych prawdziwa jest następująca własność: dla każdej liczby całkowitej w i dowolnej liczby naturalnej p można zawsze znaleźć dwie liczby całkowite q i r takie, że

$$w = p \cdot q + r, \text{ przy czym } 0 \leqslant r < p.$$

Przy czym

w – nazywamy **dzielną**

p – nazywamy **dzielnikiem**

q – nazywamy **ilorazem**

r – nazywamy **resztą** z dzielenia w przez p.

Jeżeli $r = 0$, to mówimy, że w jest podzielne przez p.

PRZYKŁAD:

dzielna		dzielnik		iloraz		reszta
w	$=$	p	$\cdot$	q	$+$	r
17	$=$	3	$\cdot$	5	$+$	2

Dalsze PRZYKŁADY:

a) dla $w = 7$, $p = 2$ mamy $q = 3$, $r = 1$ bo $7 = 2 \cdot 3 + 1$

b) dla $w = 35$, $p = 8$ mamy $q = 4$, $r = 3$ bo $35 = 8 \cdot 4 + 3$

c) dla $w = 45$, $p = 9$ mamy $q = 5$, $r = 0$ bo $45 = 9 \cdot 5 + 0$

d) dla $w = -12$, $p = 5$ mamy $q = -3$, $r = 3$, bo $-12 = 5 \cdot (-3) + 3$

6. Wyznacz iloraz i resztę z dzielenia w przez p gdy

a) $w = 17$ $p = 3$ b) $w = 37$ $p = 8$

c) $w = 4$ $p = 5$ d) $w = 16$ $p = 7$

e) $w = 36$ $p = 11$ f) $w = -11$ $p = 3$

7. Iloraz z dzielenia liczby całkowitej w przez liczbę całkowitą p równy jest 4, a reszta z dzielenia równa jest 30. Suma dzielnej, dzielnika, ilorazu i reszty wynosi 574. Znaleźć dzielną i dzielnik.

8. Suma trzech liczb jest równa 70. Dzieląc drugą przez pierwszą otrzymamy 2 i resztę 1, zaś dzieląc trzecią przez drugą otrzymamy 3 i resztę 3. Wyznacz te liczby.

9. Na trybunie było kilka równej długości ławek. Gdy uczniów próbowano posadzić po 11 w rzędzie, to zostały 3 miejsca wolne. Gdy ich próbowano posadzić po 10 w rzędzie, to dla 5 uczniów zabrakło miejsca. Ile było rzędów? Ilu było uczniów?

PRZYKŁAD

Jeżeli liczbę dwucyfrową podzielimy przez sumę jej cyfr, to otrzymamy 6 i resztę 8. Jeżeli natomiast w tej liczbie zamienimy kolejność cyfr i otrzymaną liczbę podzielimy przez sumę jej cyfr, to otrzymamy 4 i resztę 3. Wyznacz tę liczbę dwucyfrową.

Rozwiązanie

Oznaczmy

x – cyfra dziesiątek

y – cyfra jedności.

Wówczas mamy

$10x + y$ – szukana liczba

$x + y$ – suma cyfr tej liczby

$10y + x$ – liczba z przestawionymi cyframi.

Wobec tego mamy

$$\begin{cases} 10x + y = 6(x + y) + 8 \\ 10y + x = 4(x + y) + 3 \end{cases}$$

czyli

$$\begin{cases} 10x + y = 6x + 6y + 8 \\ 10y + x = 4x + 4y + 3 \end{cases}$$

czyli

$$\begin{cases} 4x - 5y = 8 \quad (1) \\ -3x + 6y = 3 \quad (2) \end{cases}$$

Mnożąc równanie (1) przez 3, a (2) przez 4 mamy

$$\begin{cases} 12x - 15y = 24 \\ -12x + 24y = 12 \end{cases}$$

Dodając stronami mamy

$9y = 36 \quad$ czyli $\quad y = 4$

wstawiając $y = 4$ do równania (1) dostajemy $x = 7$

Zatem szukana liczba jest równa 74.

10. Jeśli liczbę dwucyfrową podzielimy przez sumę jej cyfr, to otrzymamy 5 i resztę 11. Jeśli zaś w tej liczbie przestawimy cyfry i otrzymaną liczbę podzielimy przez sumę jej cyfr, to otrzymamy 5 i resztę 2. Wyznacz tę liczbę.

11. Wynikiem dzielenia liczby dwucyfrowej przez sumę jej cyfr jest 6 i reszta 3. Jeżeli dzielimy natomiast tę liczbę przez sumę jej cyfr powiększoną o 2, to otrzymujemy 5 i resztę 5. Wyznacz tę liczbę.

12. Jedna liczba jest większa od drugiej o 406. Jeżeli podzielimy tę większą liczbę przez mniejszą, to otrzymamy 6 i resztę 66. Wyznacz tę większa liczbę.

13. Suma dwóch liczb naturalnych jest równa 47. Jeżeli większą z nich podzielimy przez mniejszą, to otrzymamy iloraz 2 i resztę 5. Wyznacz te liczby.

14. W pewnej liczbie dwucyfrowej cyfra dziesiątek jest większa od cyfry jedności. Jeżeli tę liczbę podzielimy przez różnicę pomiędzy cyfrą dziesiątek a cyfrą jedności, to otrzymamy 11 i resztę 5. Jeśli zaś tę liczbę podzielimy przez sumę jej cyfr, to otrzymamy 8 i resztę 7. Wyznacz tę liczbę.

15. Ile kilogramów 80% roztworu kwasu należy zmieszać z 40 kilogramami 65% roztworu kwasu, aby otrzymać 70% roztwór kwasu?

16. Z naczynia wypełnionego 96% roztworem kwasu siarkowego odlano 2,5 litra i dopełniono naczynie kwasem 80%. W wyniku powstał kwas 89%. Wyznacz pojemność naczynia.

17. Dwie beczki zawierają 160 litrów wody. Przelano z pierwszej beczki do drugiej tyle by jej zawartość podwoiła się, po czym z drugiej beczki przelano do pierwszej tyle wody, by jej zawartość podwoiła się. Okazało się, że po tych dwóch operacjach przelewania beczki zawierają jednakowe ilości wody. Ile wody było pierwotnie w każdej beczce?

18. Pojemność trzech beczek wynosi 1440 litrów. Dwie beczki są pełne, a trzecia jest pusta. Aby napełnić pustą beczkę potrzebna jest zawartość pierwszej beczki i 1/5 zawartości drugiej beczki albo zawartość drugiej beczki i 2/3 zawartości pierwszej beczki. Wyznacz pojemność każdej beczki.

19. Stop miedzi i cynku o masie 24 kg po zanurzeniu do wody traci pozornie $12\frac{8}{9}\%$ swojej wagi. Wiemy, że miedź traci w wodzie $11\frac{1}{9}\%$ swojej wagi, a cynk $14\frac{2}{7}\%$ swojej wagi. Ile cynku, a ile miedzi zawiera stop?

20. Mianownik ułamka jest o 5 mniejszy od licznika. Jeśli do mianownika dodamy 14, zaś od licznika odejmiemy 1, to otrzymamy ułamek odwrotny do danego. Wyznacz ten ułamek.

21. Mianownik ułamka jest o 3 większy od licznika. Jeżeli licznik tego ułamka zwiększymy o 10, a mianownik zwiększymy o 1, to otrzymamy ułamek będący odwrotnością szukanego ułamka. Wyznacz ten ułamek.

22. Jeżeli do liczby dwucyfrowej dopiszemy z prawej strony cyfrę dziesiątek, to otrzymamy liczbę o 227 większą. Dopisując zaś przed daną liczbą cyfrę jej jedności otrzymamy liczbę 21 razy większą. Wyznacz tę liczbę.

23. Na początku roku szkolnego dziewczyny stanowiły $\frac{3}{8}$ liczby wszystkich uczniów w tej klasie. W ciągu pierwszego semestru do tej klasy doszły jeszcze 4 uczennice i wówczas dziewczyny stanowiły $\frac{4}{9}$ wszystkich uczniów w tej klasie. Ilu uczniów było na początku roku szkolnego w tej klasie; ile było wtedy dziewczyn w tej klasie?

24. Mamy cztery liczby naturalne takie, że różnica pomiędzy kolejnymi wynosi 4. Iloczyn dwóch pierwszych jest o 224 mniejszy od iloczynu dwóch ostatnich. Wyznacz te liczby.

25. Dopisując po prawej stronie pewnej liczby naturalnej zero otrzymujemy liczbę o 405 większą od wyjściowej liczby. Wyznacz tę liczbę.

26. Ogon suma waży 6 razy mniej niż głowa z tułowiem. Gdyby tułów był o 6 kilogramów cięższy, to głowa z tułowiem ważyła by 10 razy więcej niż ogon. Ile waży sum?

27. W dwóch naczyniach znajduje się woda. Jeżeli z pierwszego naczynia przelejemy do drugiego $6\,\mathrm{l}$, to w obu naczyniach będzie tyle samo wody. Jeśli zaś z drugiego naczynia przelejemy do pierwszego $4\,\mathrm{l}$, to w pierwszym będzie dwa razy więcej wody niż w drugim. Ile jest wody w każdym z naczyń?

28. Jedna beczka zawiera 12 wiader alkoholu etylowego i 20 wiader wody, a druga 9 wiader alkoholu etylowego i 4 wiadra wody. Ile wiader cieczy należy przelać z pierwszej beczki do drugiej, aby otrzymać w niej roztwór o jednakowej objętości alkoholu i wody? **wsk**. wyznacz wpierw stężenie procentowe alkoholu w każdej beczce.

29. Suma pól dwóch kwadratów wynosi $100\,\mathrm{cm}^2$, a stosunek ich boków jest równy 3:4. Oblicz długości boków tych kwadratów.

30. Świeżo zerwany arbuz zawierający 90% wody waży 6 kg. Ile waży woda, a ile sucha masa w tym arbuzie?

31. Świeżo zerwany arbuz zawierający 89% wody waży 6kg. Po dwóch dniach zawartość wody w arbuzie spadła do 88%. Ile teraz waży ten arbuz?

32. Grzyby w czasie suszenia tracą 92% swojej masy, czyli prawie całą zawartą w nich wodę. Ile grzybów potrzeba na to, aby otrzymać 1 kg grzybów suszonych?

33. Do suszarni dostarczono 510 kilogramów świeżych grzybów, zawierających 90% wody. Po dwóch dniach suszenia grzyby zawierały 15% wody. Ile ważyły grzyby po dwóch dniach suszenia?

34. Kurs kroju i szycia rozpoczęło 200 osób, w tym 70% mężczyzn. Po pierwszym dniu zajęć wyjechało 60% mężczyzn i 4 kobiety. a) Ile osób zostało na kursie na drugi dzień? b) Jaki procent wszystkich uczestników kursu stanowili mężczyźni w drugim dniu kursu?

35. Z 10 litrów 30% roztworu kwasu siarkowego odlano pewną ilość roztworu, a do reszty dolano roztwór 45% i otrzymano 12 litrów kwasu 40%. Ile litrów kwasu odlano, a ile dolano?

36. Na egzaminie $33\frac{1}{3}\%$ uczniów dostało oceny bdb, 10% – dostateczne, $\frac{1}{3}$ liczby tych co dostali bdb – było dopuszczających, a dobrych dwa razy więcej niż dopuszczających i dostatecznych razem. Ilu było uczniów na egzaminie, jeśli 15 dostało oceny niedostateczne?

37. Mamy mieszankę 16 kilogramów nasion owsa i maku. Nasiona maku stanowią 10% wagi tej mieszanki. Ile maku trzeba usunąć, aby stanowił on 4% wagi tej mieszanki nasion?

38. Rolnik sprzedał ziemniaki trzem kupcom. Pierwszemu sprzedał 1/4 całości i jeszcze 10 kg, drugiemu 5/13 reszty i jeszcze 10 kilogramów. Trzeciemu pozostałe 150 kg. Ile ziemniaków sprzedał?

39. Zmieszano 6 kilogramów 20% kwasu azotowego z 10 kilogramami 36% kwasu azotowego, a następnie część tego nowego kwasu zmieszano z pewną ilością 50% kwasu azotowego. Otrzymano 12 kilogramów kwasu 40%. Ile kilogramów kwasu 20%, a ile kilogramów kwasu 36% znajdowało się w 12 kilogramach mieszaniny?

40. Zmieszano 70% roztwór kwasu siarkowego z 84% roztworem i otrzymano roztwór 75%. Do tego roztworu dolano 5 litrów roztworu 84% oraz 135 litrów roztworu 70%. Nowo otrzymany roztwór miał stężenie 72%. Ile litrów każdego z tych dwóch kwasów wzięto do pierwszej mieszaniny?

41. Z trzech grup słuchaczy kursu samochodowego łącznie zdało egzamin 29 osób. Z grupy najmniej licznej połowa kursantów, z grupy średniej 1/3 uczestników, a z grupy najliczniejszej 25% słuchaczy. Ile osób uczestniczyło w tym kursie, jeżeli liczby słuchaczy w każdej z trzech grup były kolejnymi liczbami naturalnymi?

42. Pan Kwiatkowski wydał 4 000 zł w ciągu trzech dni. Pierwszego dnia wydał 30% kwoty, drugiego o 600 zł więcej. O ile procent mniej wydał trzeciego dnia niż pierwszego?

43. W klasie Ia jest 24 uczniów, a w klasie Ib o 25% więcej. O ile procent mniej uczniów jest w klasie Ia niż w klasie Ib?

44. Cenę towaru podwyższano dwukrotnie: wpierw o 20%, a za drugim razem o 25%. Po tych podwyżkach towar kosztuje 75 zł. Oblicz cenę początkową oraz ustal o ile procent najnowsza cena jest wyższa od ceny początkowej tego towaru.

45. Pewien towar kosztował pierwotnie 150 zł. Cenę tego towaru zmieniano dwukrotnie. Wyznacz jego końcową cenę w każdej z poniższych sytuacji:

a) po podwyżce o 20% i ponownej podwyżce o 20%,

b) po podwyżce o 20% i obniżce o 20%,

c) po obniżce o 20% i podwyżce o 20%.,

46. Cena pewnego towaru wynosiła pierwotnie 100 zł. Cenę tę podwyższono o 10%. Ile kosztuje ten towar po tej podwyżce? Następnie nową cenę towaru obniżono o 10%. Ile kosztuje ten towar po tej obniżce? O ile procent różni się cena końcowa od ceny wyjściowej?

47. W wyborach brało udział 10 000 osób. Było dwóch kandydatów na burmistrza kandydat A i kandydat B. Kandydat A zdobył 40% wszystkich głosów, zaś kandydat B – 60%. O ile głosów więcej zdobył kandydat B od kandydata A? O ile głosów mniej zdobył kandydat A od kandydata B? O ile procent głosów więcej zdobył kandydat B od kandydata A? O ile procent głosów mniej zdobył kandydat A od kandydata B?

48. Browar Szczecin (BS) i Zakłady Piwowarskie w Sierpcu (ZP) tworzyły tzw. grupę piwowarską. W 1999 roku ilość sprzedanego przez Browar Szczecin piwa wyniosła 726 tys. hl, co oznaczało wzrost sprzedaży o 20% w porównaniu z rokiem 1998, zaś w ZP Sierpce sprzedaż wyniosła 560 tys. hl, co oznaczało wzrost sprzedaży o 12% w stosunku do roku 1998.

a) Ile hektolitrów piwa sprzedał BS, a ile ZP w Sierpcu w roku 1998?

b) O ile procent mniej piwa sprzedał BS w roku 1998 niż w roku 1999?

c) O ile procent wzrosła sprzedaż w grupie piwowarskiej w roku 1999 w porównaniu z rokiem 1998?

d) O ile procent więcej sprzedał BS niż ZP w Sierpcu w roku 1999?

e) O ile procent mniej sprzedały ZP w Sierpcu niż BS w roku 1999?

49. W klasie jest 12 chłopców i 9 dziewcząt. W czasie roku odeszła pewna liczba chłopców i teraz chłopcy stanowią 40% liczby wszystkich uczniów. O ile procent zmniejszyła się liczba chłopców?

50. W klasie jest 12 chłopców i 9 dziewcząt. W czasie roku doszła pewna liczba dziewcząt i teraz chłopcy stanowią 40% liczby wszystkich uczniów. O ile procent zwiększyła się liczba dziewcząt?

51. Cena pewnego towaru wynosiła pierwotnie 100 zł. Cenę tę podwyższono o 10%. O ile procent trzeba obniżyć teraz cenę tego towaru, aby po tej obniżce kosztował on tyle ile kosztował przed podwyżką?

52. Kurtka kosztowała początkowo 400 zł. Cenę jej obniżano dwukrotnie. Za każdym razem obniżka wynosiła 20%. Ile kosztuje kurtka obecnie? O ile procent zmniejszyła się jej cena początkowa po tych dwóch obniżkach?

53. Cenę towaru podwyższono z 450 zł na 540 zł, a po sezonie obniżono o taki sam procent. Ile kosztuje kurtka obecnie? Jaki procent ceny początkowej stanowi cena po sezonie?

54. Cenę towaru podwyższono dwukrotnie: o 20%, a potem o 25%. Po tych podwyżkach towar kosztuje 72 złote. Oblicz cenę początkową tego towaru oraz podaj wzrost procentowy ceny początkowej po tych dwóch podwyżkach.

55. Cena pewnego towaru wynosiła pierwotnie 200 złotych. Cenę tę obniżono wpierw o 10%, a po pewnym czasie obniżono ją o dalszych 5 punktów. Ile kosztował ten towar po pierwszej, a ile po drugiej obniżce? O ile procent jest niższa jego cena po drugiej obniżce od ceny po pierwszej obniżce?

VAT *Przy sprzedaży towarów do ceny netto, doliczany jest tzw. podatek VAT – skrót od* **V***alue* **A***dded* **T***ax. Jeśli na przykład VAT na dany towar wynosi 22%, to oznacza to, że kwota, którą musimy zapłacić, jest o 22% wyższa od ceny netto.*

56. Jeden komputer kosztuje 2550 zł + 22% VAT, a drugi kosztuje 3 100 zł wraz z VAT'em. Który z tych komputerów jest tańszy i o ile?

57. Cena pewnego towaru wraz z podatkiem VAT, czyli ta cena, którą płacimy w sklepie, w wysokości 7% wynosiła 85,60 zł. Podatek VAT na ten towar podniesiono do 22%. O ile procent wzrosła cena tego towaru?

58. Gdy Jan zapytał Andrzeja, ile ma lat, to usłyszał odpowiedź: *Gdy ja byłem w twoim wieku, byłeś ode mnie 3 razy młodszy, a gdy ty będziesz w moim wieku, to ja będę miał 35 lat.* Ile lat ma Jan, a ile Andrzej?

59. Złoto na wyroby jubilerskie lub numizmatyczne (monety, medale etc.) nie jest brane w czystej postaci. Bierze się je zazwyczaj w postaci stopu złota i innego metalu np. miedzi lub srebra. Mamy 108 kg stopu złota próby 750. Oznacza to, że $\frac{750}{1000}$ masy tego stopu stanowi złoto, a resztę inny metal. W tym zadaniu niech to będzie miedź. Ile kilogramów miedzi trzeba stopić wraz z tym stopem, aby uzyskać stop złota próby 720?

60. Dwa kawałki złota jeden próby 840, a drugi próby 750 stopiono i otrzymano 3 762 g stopu o zawartości 747 g miedzi. Ile ważył każdy kawałek?

61. Ile kilogramów miedzi trzeba dodać do 116,6 kilograma złota próby 750, aby otrzymać stop próby 583?

62. Gdy Janek spytał Andrzeja, ile ma lat, to usłyszał odpowiedź: "Gdy ja byłem w Twoim wieku, byłeś ode mnie 4 razy młodszy, a gdy ty będziesz w moim wieku, ja będę miał 40 lat."Ile lat ma Janek, a ile Andrzej?

Odpowiedzi

1. 56 kg

2. 51 kg

3. $55\frac{5}{11}$

4. bdb – 12 uczniów, dop – 4 uczniów

5. 42

6. a) $q = 5, r = 2$, b) $q = 4, r = 5$, c) $q = 0, r = 4$, d) $q = 2, r = 2$, e) $q = 3, r = 3$, f) $q = -4, r = 1$

7. dzielna = 438, dzielnik = 102

8. 15, 48

9. 8 rzędów, 85 uczniów

10. 76

11. 75
12. 474
13. 14, 33
14. 71
15. 20 kilogramów
16. $5\frac{5}{7}$ l
17. 100, 60
18. 576 l, 240 l, 624 l
19. cynk – $13\frac{11}{25}$ kg, miedź $10\frac{14}{25}$ kg
20. $\frac{9}{4}$
21. $\frac{4}{7}$
22. 25
23. 32 uczniów, w tym 12 dziewczyn
24. 8,12, 16, 20
25. 45
26. $10\dfrac{1}{2}$ kg
27. 24 l, 36 l
28. 20 wiader
29. 8 cm, 6 cm
30. $5\frac{2}{5}$ kg, $\frac{3}{5}$ kg
31. $5\frac{1}{2}$ kg
32. $12\frac{1}{2}$ kg
33. 60 kg
34. a) 112 osób, b) 50%
35. odlano 6 l, dolano 8 l
36. 450
37. 1 kg
38. 360 kg
39. 3,75 kg kw. 36%; 2,25 kg kw. 20%
40. 25, 45
41. 81
42. $16\frac{2}{3}$%
43. o 20%
44. 50 zł, 50%
45. a) 216 zł, b) 144 zł, c) 144 zł
46. a) 110 zł, b) 99 zł, c) 1%
47. B zdobył o 50% głosów więcej niż A, zaś A zdobył o $33\frac{1}{3}$% głosów mniej niż B
48. a) BS – 605 000, ZP – 500 000, b) $16\frac{2}{3}$%, c) $16\frac{84}{221}$%, d) $29\frac{9}{14}$%, e) $22\frac{314}{363}$%
49. 50%
50. o 100%
51. $9\frac{1}{11}$%
52. 256 zł, 36%
53. 96%
54. 48 zł, 50%
55. 180 zł, 170 zł $5\frac{5}{9}$%
56. drugi tańszy o 11 zł
57. $14\frac{2}{107}$%
58. Jan 15 lat, Andrzej 25 lat
59. $4\frac{1}{2}$ kg
60. 1612 g – pr. 750, 2150 g – . 840
61. 33,4 kg
62. Janek – 16 lat, Andrzej – 28 lat

Rozdział 11

TRÓJKĄTY RÓWNORA-MIENNE

Udowodniliśmy już wcześniej dwa twierdzenia, które sformułujemy jeszcze raz w postaci jednego twierdzenia o trójkącie równoramiennym, jako że twierdzenie to jest dosyć podstawowym twierdzeniem w geometrii, a przy tym częstokroć używanym.

TWIERDZENIE

W trójkącie

(i) naprzeciwko równych boków leżą równe kąty,

(ii) naprzeciwko równych kątów leżą równe boki.

1. Wyznacz kąty trójkąta równoramiennego, w którym kąt przy podstawie jest pięć razy mniejszy od przyległego do niego kąta zewnętrznego.

2. Kąt zewnętrzny przy podstawie trójkąta równoramiennego jest o 36° większy od kąta zewnętrznego przy jego wierzchołku. Wyznacz kąty tego trójkąta.

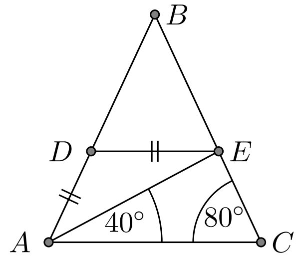
3. W trójkącie równoramiennym ABC zachodzą związki: $|AB| = |AC|$ oraz $\sphericalangle BAC = 36^\circ$. Uzasadnij, że dwusieczna kąta przy podstawie dzieli trójkąt ABC na dwa trójkąty równoramienne.

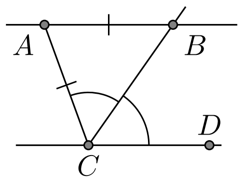
4. Jeden z kątów trójkąta równoramiennego ma 18°. Wyznacz miary pozostałych kątów tego trójkąta. Wyznacz oba rozwiązania.

5. Jeden z kątów zewnętrznych trójkąta równoramiennego ma 70°. Wyznacz miary kątów tego trójkąta.

6. Jeden z kątów zewnętrznych trójkąta równoramiennego ma $150°$. Wyznacz miary kątów wewnętrznych tego trójkąta (dwa rozwiązania)

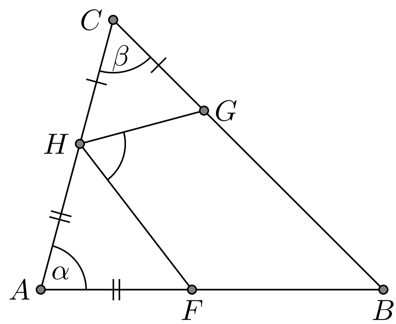
7. W trójkącie ABC na rysunku obok $|AB| = |BC|$, $|DA| = |DE|$ oraz podane są miary dwóch kątów. Rozstrzygnij, czy $l_{DE} \parallel l_{AC}$.

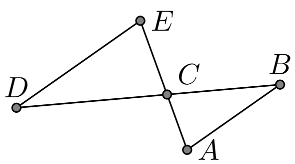




8. Półprosta $CB^{\rightarrow}$, na rysunku obok, jest dwusieczną kąta ACD, a przy tym $|AC| = |AB|$. Uzasadnij, że $l_{AB} \parallel l_{CD}$.

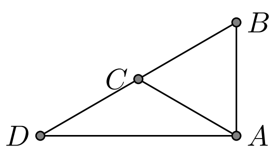
9. W trójkącie ABC mają miejsce następujące związki: $|AH| = |AF|$, $|CH| = |CG|$. Wyznacz $\sphericalangle FHG$ w zależności od α i β.





10. Na rysunku obok punkty A, C, E leżą na jednej prostej i punkty B, C, D leżą na jednej prostej, $|AB| = |BC|$ oraz $|CD| = |DE|$. Pokaż, że $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$.

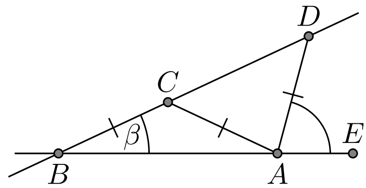
11. Wyznacz kąty trójkąta równoramiennego ABC, w którym $|AC| = |BC|$, a dwusieczna AD tworzy z bokiem BC kąt $120°$.

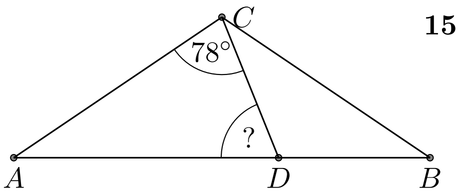


12. Trójkąt ABC na rysunku obok jest równoboczny, $\sphericalangle BAD = 90°$. Pokaż, że $|BC| = |CD|$.

13. W trójkącie ABC dwusieczna AD kąta A jest równa bokowi AB. Wyznacz miary kątów B i C wiedząc, że $\sphericalangle A = 108°$.

14. Na rysunku obok $|BC| = |AC| = |AD|$. Wyznacz miarę kąta EAD w zależności od β.





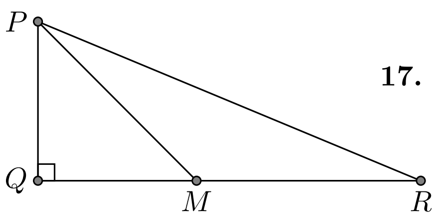
15. Trójkąt ABC jest równoramienny, przy czym $CA = CB$. Trójkąt BCD jest równoramienny, przy czym $DB = DC$. Kąt ACD ma 78°. Wyznacz miarę kąta ADC.

Przypomnijmy teraz definicję środkowej trójkąta: odcinek łączący wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku nazywamy *środkową trójkąta*.

16. Uzasadnij, że w trójkącie równoramiennym:

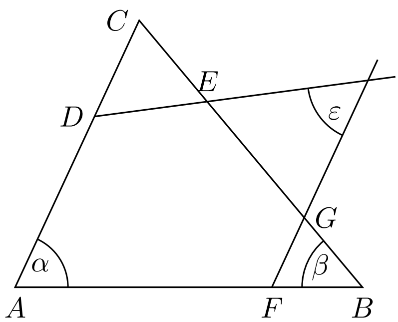
(a) dwusieczne kątów przy podstawie są równej długości

(b) środkowe wychodzące z wierzchołków przy podstawie są równej długości

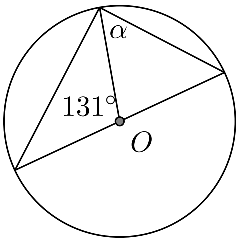


17. Na rysunku obok $\sphericalangle MQP = 90°$, $|QM| = |QP| = 1$, $|MP| = |MR|$. Wyznacz $|PR|$ oraz $\sphericalangle QRP$.

18. Trójkąt ABC przecięto dwiema prostymi tak, że $|CD| = |CE$, zaś $|BF| = |BG|$. Wyznacz ε w zależności od α i β.



19. W trójkącie ABC dwusieczna kąta $\sphericalangle B$ przecina bok AC w punkcie B_1. Przez punkt B_1 prowadzimy równoległą do BC, przecinającą bok AB w punkcie C_1. Uzasadnij, że $|B_1C_1| = |BC_1|$.



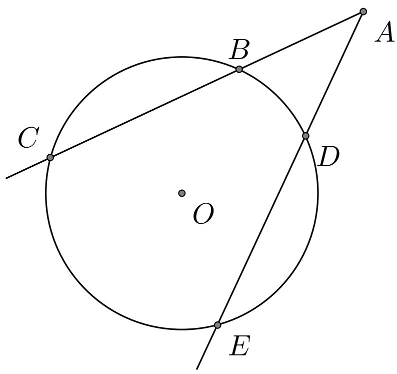
20. Trójkąt, na rysunku obok, wpisany jest w okrąg. Oznacza to, że każdy jego wierzchołek leży na tym okręgu. Punkt O jest środkiem okręgu. Wyznacz α.

21. Trójkąt ABC wpisany jest w okrąg o środku w punkcie O. Wyznacz miarę kąta $\sphericalangle AOB$, jeżeli $\sphericalangle BAC = 55°$, zaś $\sphericalangle AOC = 140°$

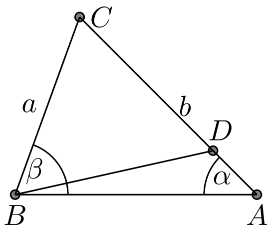
22. Przekątna AC podzieliła czworokąt $ABCD$ na na dwa trójkąty równoramienne ABC i ACD, w których $AB = AC = AD$, $\sphericalangle BAC = 30°$, $\sphericalangle BCD = 130°$. Wyznacz $\sphericalangle DAB$.

23. Przekątna AC podzieliła czworokąt $ABCD$ na dwa trójkąty ABC i ACD. Trójkąt ABC jest równoramienny, przy czym $AB = AC$, $\sphericalangle ABC = 80°$, $\sphericalangle BCD = 110°$, zaś $\sphericalangle DAC$ jest 2 razy większy od $\sphericalangle ACD$. Wyznacz $\sphericalangle BAD$.

24. Z punktu A leżącego poza okręgiem wychodzą dwie półproste. Jedna z nich przecina okrąg w punktach B i C, a druga w punktach D i E. Uzasadnij, że jeżeli $|BC| = |DE|$, to trójkąt ACE jest równoramienny. **wsk**. każdy punkt okręgu jest tak samo odległy od środka okręgu.



Tworząc rysunki wielokrotnie korzystaliśmy ze związku pomiędzy długością boku w trójkącie a miarą kąta leżącego naprzeciwko. Mają bowiem miejsce następujące dwa twierdzenia:



TWIERDZENIE

W trójkącie naprzeciwko dłuższego boku leży większy kąt. Czyli zakładamy, że $a < b$, a z tego wynika, że $\alpha < \beta$.

Dowód:

Ponieważ $|CB| < |CA|$ więc z tego wynika, że na boku AC możemy sobie obrać taki punkt D, że $|CD| = |CB|$. W efekcie mamy trójkąt równoramienny CBD.

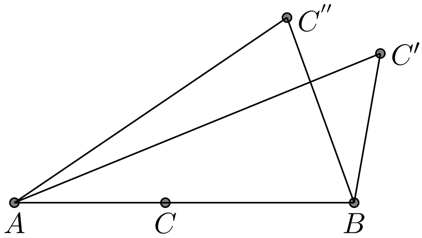
Wówczas

$$\alpha = \sphericalangle BAD \underbrace{<}_{\substack{\text{bo } \sphericalangle CDB \text{ k.} \\ \text{zewnętrzny w} \\ \triangle ABD}} \sphericalangle CDB \underbrace{=}_{\substack{\text{bo } \triangle BDC \\ \text{jest równo-} \\ \text{ramienny}}} \sphericalangle CBD \underbrace{<}_{\substack{\text{bo } BD \\ \text{jest sieczną} \\ \text{kąta } CBA}} \sphericalangle CBA = \beta$$

czyli $\alpha < \beta$.

Nim dowiedziemy odwrotnego twierdzenia, sformułujemy wpierw aksjomat, intuicyjnie oczywisty, tzw. *nierówność trójkąta*, z której będziemy korzystać w dowodzie następnego twierdzenia.

AKSJOMAT

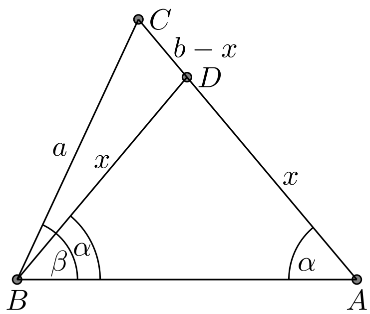


Nierówność trójkąta.
W trójkącie ABC ma miejsce nierówność

$$|AB| \leqslant |AC| + |CB|,$$

przy czym równość zachodzi tylko wówczas, gdy punkt C leży na odcinku AB.

Nierówność tę słowami można opisać tak: *najkrótsza droga od punktu A do punktu B wiodąca przez punkt C jest równa długości odcinka AB tylko wtedy, gdy punkt C leży na odcinku AB, w pozostałych przypadkach jest dłuższa od długości odcinka AB.*



TWIERDZENIE

W trójkącie naprzeciwko większego kąta leży dłuższy bok. Czyli krótko

Z: $\beta > \alpha$

T: $b > a$

Dowód:

Ponieważ $\beta > \alpha$, więc wewnątrz kąta β możemy odłożyć kąt α tak jak na rysunku obok. Wówczas w trójkącie ABD na przeciwko równych kątów leżą równe boki. Oznaczmy ich długość przez x. Ponieważ bok AC ma długość b, zaś bok AD ma długość x, wobec tego $|CD| = b - x$. Nierówność trójkąta w trójkącie BDC możemy zapisać $|BC| < |CD| + |DB|$ czyli $a < (b - x) + x$, czyli $a < b$.

WNIOSEK

W trójkącie prostokątnym najdłuższym bokiem jest przeciwprostokątna, bo leży ona naprzeciwko kąta prostego, czyli największego kąta w trójkącie.

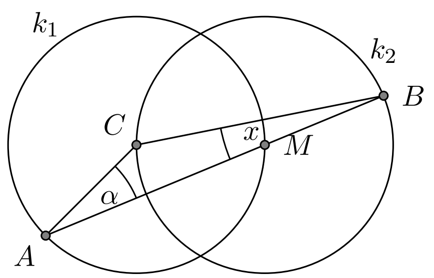
25* Uzasadnij, że dwusieczne wszystkich trzech kątów trójkąta przecinają się w jednym punkcie. Uzasadnij następnie, że ten punkt leży najbliżej wierzchołka największego kąta w tym trójkącie.

26. W trójkącie ABC dwusieczna poprowadzona z wierzchołka C przecina przeciwległy bok w punkcie D. Wiedząc, że $\sphericalangle BDC = 100°$ i że odcinek CD ma długość równą długości jednego z boków wychodzących z wierzchołka C, oblicz miary kątów trójkąta ABC.

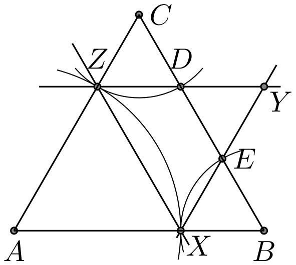
27*. W czworokącie wypukłym $ABCD$ o wszystkich bokach różnej długości $\sphericalangle A = \sphericalangle C = \alpha$. Pokaż, że jeżeli $|AB| > |BC|$, to $|AD| < |DC|$. Wsk. narysuj przekątną AC.

28*. W czworokącie wypukłym $ABCD$ o wszystkich bokach różnej długości $\sphericalangle A = \sphericalangle C = \alpha$. Pokaż, że jeżeli $|AD| < |DC|$, to $|AB| > |BC|$. Wsk. narysuj przekątną AC.

29. Pokaż, że jeżeli w trójkącie ABC środkowa CD jest równa połowie długości boku AB, to $\sphericalangle C = 90°$.



30. Okręgi k_1 i k_2 o środkach C i M mają jednakowe promienie. Każdy z okręgów przechodzi przez środek drugiego. Odcinek $\overline{AB}$ przechodzi przez środek M okręgu k_2. Wyznacz miarę kąta $\sphericalangle CBA$, w zależności od α.



31. Trójkąt równoramienny ABC, w którym $AC = BC$ przecięto trzema prostymi tak, że $AX = AZ$, $CZ = CD$, $BX = BE$. Pokaż, że trójkąt XYZ jest równoramienny. Które dwa boki w trójkącie XYZ są sobie równe?

32. W kątach przyległych α i β, których dwa ramiona tworzą jedną prostą, poprowadzono dwusieczne. Przez punkt A leżący na wspólnym ramieniu tych kątów poprowadzono prostą równoległą do pozostałych ramion, która przecina dwusieczną kąta α w punkcie B, a dwusieczną kąta β w punkcie C. Udowodnij, że $AB = AC$.

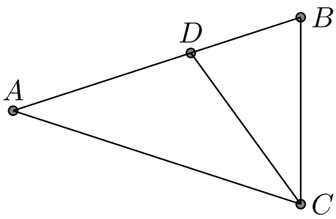
33. Na podstawie AB trójkąta równoramiennego ABC dane są punkty A_1 i B_1, przy czym kolejność punktów jest następująca:

(a) A, B_1, A_1, B,

(b) A, A_1, B_1, B.

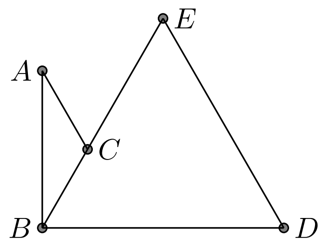
Wiadomo, że $AB_1 = BA_1$. Pokaż, że w obu przypadkach $\triangle AB_1C \equiv \triangle BA_1C$.

34. Jeden z kątów zewnętrznych trójkąta równoramiennego ma 40°. Wyznacz miarę kąta pomiędzy prostymi zawierającymi wysokości opuszczone na ramiona trójkąta.



35. Na rysunku obok odcinek CD podzielił trójkąt równoramienny ABC, w którym $|AB| = |AC|$, na dwa trójkąty równoramienne, przy czym $|BC| = |CD| = |AD|$. Wyznacz miarę kąta A.

36. Na rysunku obok trójkąty ABC i BDE są równoramienne, przy czym $|AC| = |BC|$, $|BE| = |DE|$ oraz $\overline{AC} \parallel \overline{ED}$. Wyznacz miarę kąta ABD.



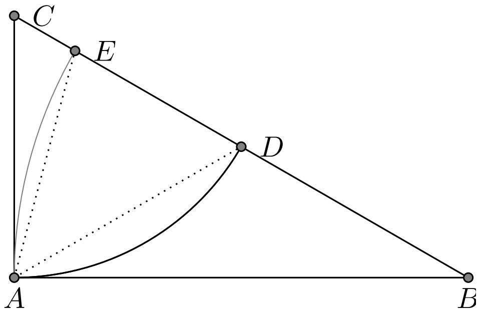
37. W trójkącie ABC bok AB jest dłuższy od boku AC. Na boku AB wybrano punkt K tak, że $|AK| = |AC|$. Wiadomo, że dwusieczna kąta BKC jest równoległa do prostej AC. Wyznacz miarę kąta BAC.

38. Trójkąt ABC jest taki, że wysokość CD dzieli podstawę AB tak, że $|AD| = |CD|$ oraz $|DB| < |CD|$. Na wysokości CD obieramy taki punkt E, że $|ED| = |DB|$. Pokaż, że $l_{BE} \perp l_{AC}$.

39. W trójkącie równoramiennym ABC, w którym $|AC| = |BC|$, połączono punkt A z punktem A' – środkiem odcinka BC oraz punkt B z punktem B' – środkiem odcinka AC. S jest punktem przecięcia odcinków BB' i AA'. Pokaż, że $|SA'| = |SB'|$ i $|AS| = |SB|$.

40. W trójkącie ABC kąt C jest rozwarty. Proste zawierające wysokości wychodzące z wierzchołków A i B tworzą kąt ostry α. Wyznacz miarę kąta ACB w zależności od α. Rozważ również przypadek, gdy kąt C jest ostry.

41. W trójkącie równoramiennym ABC z wierzchołka C odłożono na ramionach CA i CB równej długości odcinki – odpowiednio CA_1 i CB_1. Pokaż, że $\triangle ABA_1 \equiv \triangle BAB_1$.



42. Trójkąt ABC jest prostokątny, przy czym kąt A jest prosty, a $|BA| = |BE|$, $|CA| = |CD|$. Wyznacz miarę kąta AED i EAD w zależności od β. Jakie musi być β, aby trójkąt ADE był równoramienny?

43*. W trójkącie prostokątnym ABC, gdzie kąt C jest prosty, przedłużono bok AC poza punkt C o odcinek CB_1, taki że $|CB_1| = |CB|$, oraz bok BC o odcinek CA_1 taki, że $|CA_1| = |CA|$ i połączono punkty A_1 i B_1. Uzasadnij, że przedłużenie wysokości CD trójkąta ABC jest środkową CE trójkąta A_1B_1C.

44*. Na bokach BC i CD równoległoboku $ABCD$ zbudowano (na zewnątrz) trójkąty równoboczne BCK i DCL. Udowodnij, że trójkąt AKL jest równoboczny.

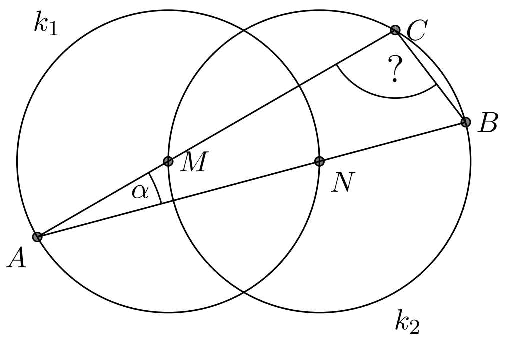
45. W trójkącie równobocznym ABC na przedłużeniu wysokości CD poza punktem C odłożono odcinek CE o długości równej długości boku trójkąta ABC. Oblicz miary kątów trójkąta ABE.

46. W trójkącie ABC przedłużono bok AB poza wierzchołek B i odłożono odcinek BD o długości takiej samej jak odcinek BC. Następnie połączono punkty C i D. Uzasadnij, że $\sphericalangle CDA = \frac{1}{2}\sphericalangle CBA$.

47. Wyznacz kąty ostre trójkąta prostokątnego ABC, wiedząc, że środkowa i wysokość poprowadzone z wierzchołka C dzielą kąt prosty C na trzy równe części.

48. W trójkącie prostokątnym ABC przedłużono przeciwprostokątną AB i obrano na przedłużeniach punkty D i E tak, że $|AD| = |AC|$ oraz $|BE| = |BC|$. Pokaż, że $\sphericalangle DCE = 135°$.

49. Okręgi k_1 i k_2 o środkach w punktach M i N mają jednakowe promienie i każdy z nich przechodzi przez środek drugiego.



Wierzchołki trójkąta ABC leżą na jednym lub na drugim okręgu, tak jak to pokazano na rysunku obok. Punkt M leży na boku AC, a N na boku AB. Wyznacz miarę kąta C. Raz przyjmij, że $\alpha = 18°$, a następnie zrób to ogólnie przy dowolnym kącie α.

50. Na przedłużeniu boku BC trójkąta równoramiennego ABC, w którym $|AC| = |BC|$, odkładamy odcinek CD o długości krótszej niż odcinek BC. Niech F będzie rzutem prostopadłym punktu D na podstawę AB, a odcinek DF niech przecina ramię AC w punkcie E. Uzasadnij, że trójkąt CDE jest równoramienny.

51. W trójkącie ABC o kątach $\sphericalangle C = 60°$, $\sphericalangle B = 45°$ poprowadzono wysokość CD. Punkt D połączono odcinkiem ze środkiem E boku CB. Uzasadnij, że $\overline{DE} \perp \overline{CB}$ oraz, że $|DE| = \frac{1}{2}|CB|$.

52. Dany jest kąt o wierzchołku O. Punkty A i B leżą na jednym ramieniu, zaś punkty C i D na drugim ramieniu kąta, przy czym $|OA| = |OD|$, $|OB| = |OC|$. Uzasadnij, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem.

53. Jeden z kątów zewnętrznych trójkąta równoramiennego ma miarę α. Wyznacz kąt pomiędzy podstawą trójkąta a wysokością wychodzącą z wierzchołka leżącego przy podstawie trójkąta dla a) $\alpha = 80°$, b) $\alpha = 32°$, c) dowolne $\alpha < 90°$

54. W trójkącie równoramiennym kąt pomiędzy dwusieczną kąta przy wierzchołku i dwusieczną kąta przy podstawie równy jest $130°$. Wyznacz miary kątów tego trójkąta.

55. Jeden z kątów zewnętrznych trójkąta równoramiennego ma $118°$. Wyznacz miary kątów pomiędzy wysokościami tego trójkąta poprowadzonymi z wierzchołków mniejszych kątów.

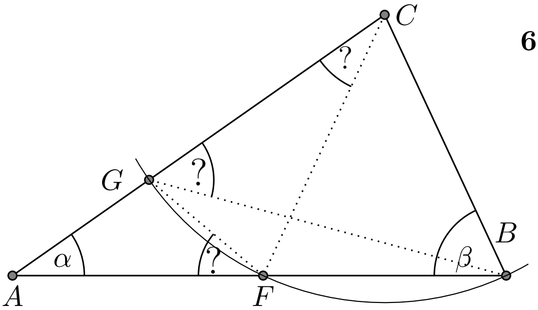
56. Jeden z kątów zewnętrznych trójkąta równoramiennego ma $40°$. Wyznacz miarę kąta pomiędzy wysokościami tego trójkąta wychodzącymi z wierzchołków przy podstawie tego trójkąta.

57. W trójkącie równoramiennym jeden z kątów jest cztery razy większy od jednego z pozostałych kątów tego trójkąta. Wyznacz miary wszystkich kątów tego trójkąta.

58. W trójkącie równoramiennym dwusieczna kąta przy podstawie dzieli ten trójkąt na dwa trójkąty, z których jeden jest równoramienny. Wyznacz kąty wyjściowego trójkąta.

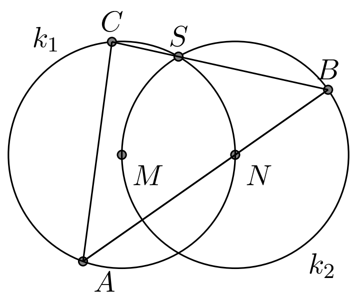
59. Wyznacz miary kątów w trójkącie ABC jeżeli dwusieczna kąta C ma taką samą długość jak bok AC i tworzy z bokiem AB kąt o mierze $75°$.

60. Uzasadnij, że jeżeli w trójkącie równoramiennym dwusieczna kąta przy podstawie jest prostopadła do ramienia trójkąta, to ten trójkąt jest równoboczny.



61. W trójkącie ABC mamy $a < b$, zaś $\beta > \alpha$. Promieniem CB zataczamy łuk przecinający boki trójkąta w punktach F i G. Wyznacz miary kątów AFG, CGB i GCF w zależności od α i β.

62. Okręgi k_1 i k_2 o środkach w punktach M i N mają jednakowe promienie i każdy z okręgów przechodzi przez środek drugiego. Wierzchołki A i C trójkąta ABC leżą na k_1, a punkt B na k_2. Bok AB przechodzi przez N, a bok BC przez punkt S – punkt przecięcia obu okręgów. Pokaż, że trójkąt ABC jest równoramienny.



63. Punkty A, B, D, E leżą, w tej właśnie kolejności, na jednej prostej tak, że $AB = BC$ oraz $CD = DE$, a przy tym kąt BCD jest prosty. Wyznacz miarę kąta ACB.

Odpowiedzi i wskazówki

1. 30°, 30°, 120°

2. 48°, 48°, 84°

4. 18°, 18°, 144° lub 18°, 81°, 81°

5. 35°, 35°, 110°

6. 30°, 30°, 120° lub 30°, 75°, 75°

7. jest

9. $\sphericalangle FHG = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$

11. $40^\circ, 40^\circ, 100^\circ$ lub $20^\circ, 80^\circ, 80^\circ$

13. $\sphericalangle B = 9^\circ$, $\sphericalangle C = 63^\circ$

14. $\sphericalangle EAD = 3\beta$

15. $\sphericalangle ADC = 68^\circ$

17. $PR = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$, $\sphericalangle PRQ = 22{,}5^\circ$

18. $\varepsilon = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$

20. $\alpha = 65{,}5^\circ$

21. $\sphericalangle AOB = 110^\circ$

22. $\sphericalangle DAB = 100^\circ$

23. 80°

26. 40°, 60°, 80°

30. $\sphericalangle CBA = \frac{1}{2}\alpha$

31. $|XZ| = |XY|$

34. 40°

35. $\sphericalangle A = 36^\circ$

36. $\sphericalangle ABD = 90^\circ$

37. $\sphericalangle BAC = 60^\circ$

40. $\sphericalangle ACB = 180^\circ - \alpha$

42. $\sphericalangle AEB = 90 - \frac{1}{2}\beta$, $\sphericalangle EAD = 45^\circ$, dla $\beta = 45^\circ$

44. wsk. Dla czytelności rysunku przyjmij, że kąt $\sphericalangle BCD$ ma ok. 30°, ale w dowodzie zadania nie korzystaj z tego faktu!

45. $75^\circ, 75^\circ, 30^\circ$

47. $30^\circ, 60^\circ$

49. $90^\circ + \frac{1}{2}\alpha$, $\alpha = 18^\circ$, $\sphericalangle ACB = 99^\circ$

53. 50°, 74°, $90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$

54. $80^\circ, 80^\circ, 20^\circ$

55. 118°

56. 40°

57. $20^\circ, 80^\circ, 80^\circ$ lub $30^\circ, 30^\circ, 120^\circ$

58. 72°, 72°, 36° lub $\frac{360^\circ}{7}$, $\frac{360^\circ}{7}$, $\frac{540^\circ}{7}$

59. $45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$

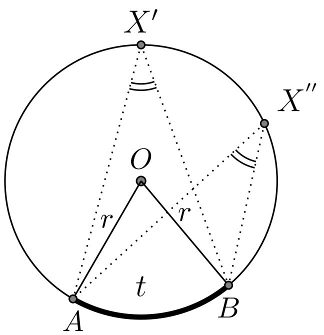
61. $\sphericalangle AFG = 90^\circ - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, $\sphericalangle CGB = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, $\sphericalangle GCF = \beta - \alpha$

63. $\sphericalangle ACB = 135^\circ$

Rozdział 12

KĄTY W OKRĘGU

Obecnie zajmiemy się twierdzeniem, które wynika z własności trójkątów równoramiennych.

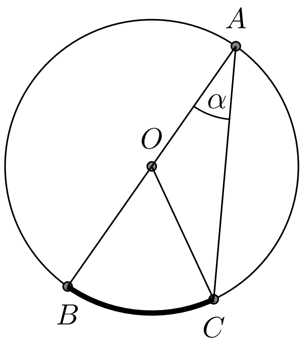


DEFINICJA Jeżeli $K(O, r)$ jest okręgiem, t jest łukiem tego okręgu o końcach A i B, to *kątem środkowym opartym na łuku* t nazywamy kąt AOB wyznaczony przez łuk t. Każdy kąt AXB, w którego wnętrzu leży łuk t, a wierzchołek X leży na łuku dopełniającym łuk t do pełnego okręgu nazywamy *kątem wpisanym w okrąg opartym na łuku* t.

1. Na danym okręgu odmierzamy kolejno łuki AB, BC i CD odpowiadające kątom środkowym $120°$, $40°$ i $80°$. Wyznacz kąty czworokąta $ABCD$.

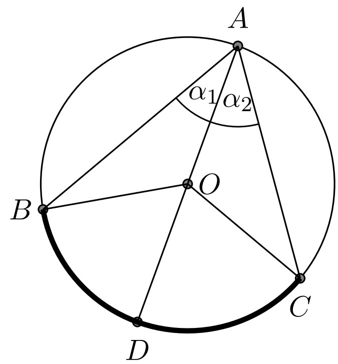
TWIERDZENIE Miara kąta wpisanego w okrąg i opartego na pewnym łuku równa jest połowie miary kąta środkowego opartego na tym samym łuku.

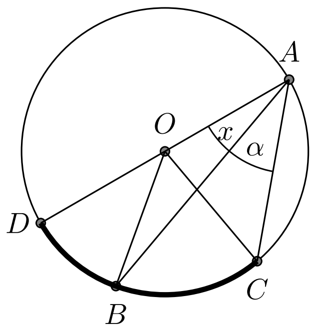
Dowód:
Dla dowodu rozpatrzymy trzy przypadki. W każdym z tych trzech przypadków punkty A, B, C leżą na okręgu, punkt O jest środkiem okręgu, punkt A wierzchołkiem kąta wpisanego w ten okrąg, zaś kąt BAC ma miarę α.



Przypadek I.
Jedno z ramion kąta wpisanego przechodzi przez środek okręgu.
Trójkąt AOC jest równoramienny, więc $\sphericalangle OCA = \alpha$, zaś kąt BOC jest kątem zewnętrznym w trójkącie AOC, wobec tego równy jest 2α, czyli $\sphericalangle BOC = 2\sphericalangle BAC$.

Przypadek II.
Środek okręgu leży wewnątrz kąta wpisanego.
Półprosta h_{AO} przecina okrąg w punkcie D i dzieli kąt $\sphericalangle BAC = \alpha$, na dwa kąty $\sphericalangle BAD = \alpha_1$ i $\sphericalangle CAD = \alpha_2$, czyli $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$. Wówczas na mocy przypadku I, $\sphericalangle BOD = 2\alpha_1$, $\sphericalangle COD = 2\alpha_2$, zaś $\sphericalangle BOC = \sphericalangle BOD + \sphericalangle COD = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 2(\alpha_1 + \alpha_2) = 2\alpha = 2\sphericalangle BAC$, czyli $\sphericalangle BOC = 2\sphericalangle BAC$.





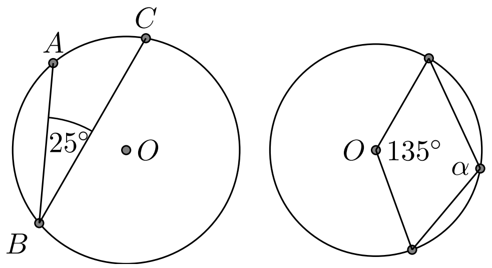
Przypadek III.
Środek okręgu leży na zewnątrz kąta wpisanego.
Poprowadźmy półprostą AO przecinającą okrąg w punkcie D. Oznaczmy miarę kąta DAB przez x. Trójkąt BOA jest równoramienny, więc więc $\sphericalangle OAB = \sphericalangle ABO = x$, zaś $\sphericalangle DOB = 2x$, bo $\sphericalangle DOB$ jest kątem zewnętrznym trójkąta BOA. Podobnie trójkąt AOC jest równoramienny, więc $\sphericalangle OAC = \sphericalangle OCA = x + \alpha$, zaś kąt COD jest kątem zewnętrznym trójkąta AOC, zatem $\sphericalangle COD = 2(x + \alpha)$. Ponieważ, $\sphericalangle COD = \sphericalangle DOB + \sphericalangle BOC$ czyli $\sphericalangle BOC = \sphericalangle COD - \sphericalangle DOB$. Mamy zatem

$$\sphericalangle BOC = 2(\alpha + x) - 2x = 2\alpha + 2x - 2x = 2\alpha = 2\sphericalangle BAC$$

czyli

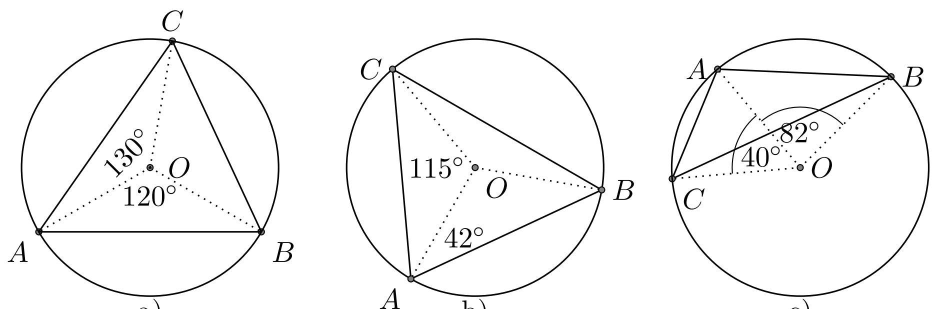
$$\sphericalangle BOC = 2\sphericalangle BAC.$$

Przypadek IV.
Sporządź rysunek i przeprowadź odpowiednie rozumowanie w sytuacji gdy kąt $\sphericalangle BOC$ jest wklęsły czyli ma więcej niż 180°.

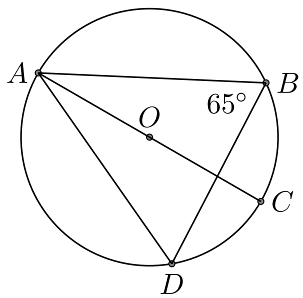


2. Na pierwszym rysunku obok punkty A, B, C leżą na okręgu, zaś punkt O jest jego środkiem. Wiedząc, że $\sphericalangle ABC = 25°$ wyznacz $\sphericalangle AOC$ i $\sphericalangle ACO$. Na drugim rysunku wyznacz α.

3. Na poniższych rysunkach O oznacza środek okręgu opisanego na trójkącie ABC. Wyznacz kąty trójkąta ABC.

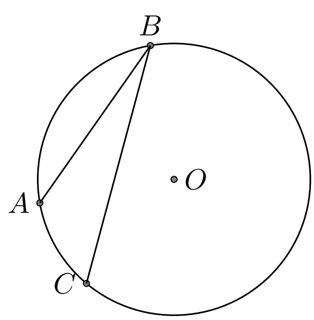


a) b) c)



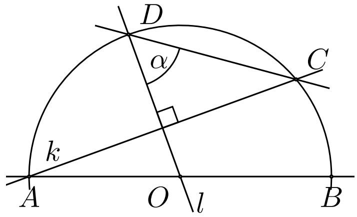
4. Punkty A, B, C, D na rysunku obok leżą na okręgu o środku w punkcie O przy czym AC jest jego średnicą. Kąt ABD ma 65°. Wyznacz miarę kąta DAC.

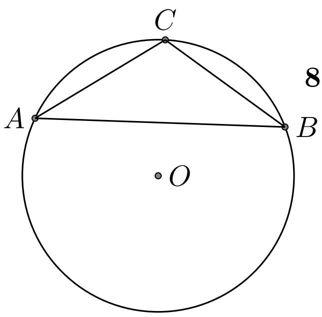
5. Na rysunku obok kąt ABC ma 17°. Wpisany jest on w okrąg o środku w punkcie O. Zaznacz kąt środkowy, który jest oparty na tym samym łuku co kąt wpisany ABC. Jaka jest miara tego kąta? Jaka jest miara kąta ACO?



6. Trójkąt ABC wpisany jest w okrąg o środku w punkcie O. Wiedząc, że $\sphericalangle BAC = 50°$, $\sphericalangle AOC = 140°$, wyznacz $\sphericalangle AOB$ i $\sphericalangle BCO$.

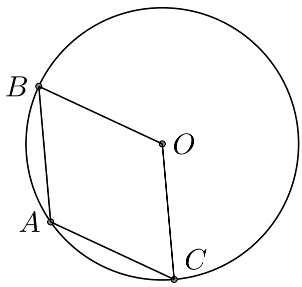
7. Na rysunku obok AB jest średnicą okręgu, a punkt O jego środkiem. Przez punkt A prowadzimy prostą k, która przecina okrąg w punkcie C, a przez środek okręgu prowadzimy prostą l prostopadłą do k. Przecina ona okrąg w punkcie D. Wiedząc, że $\sphericalangle CDO = \alpha$, wyznacz $\sphericalangle DOB$. Zrób zadanie w dwóch wersjach: raz dla obliczeń przyjmij $\alpha = 55°$, a drugi raz α oznacza dowolny kąt ostry.



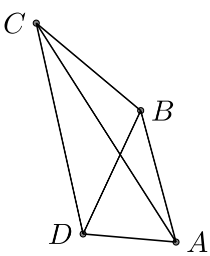


8. Punkty A, B, C na rysunku obok leżą na okręgu o środku w punkcie O, przy czym $\sphericalangle CAB = 27°$, $\sphericalangle CBA = 29°$. Wyznacz $\sphericalangle COB$, $\sphericalangle COA$, $\sphericalangle OBA$.

9. Na rysunku obok punkt O jest środkiem okręgu. Punkty A, B, C leżą na tym okręgu. Wiedząc, że $\sphericalangle ABC = 20°$, wyznacz $\sphericalangle CAO$.

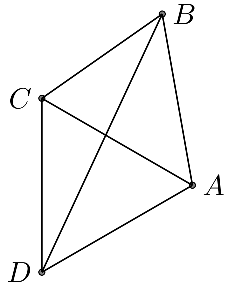


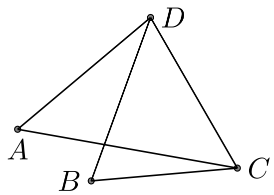
10. Odległość cięciwy od środka okręgu równa jest połowie jej długości. Wyznacz miarę kąta ostrego wpisanego w ten okrąg i opartego na tej cięciwie. Przypomnijmy, że *odległość punktu od prostej jest to długość odcinka łączącego ten punkt z tą prostą, a przy tym prostopadłego do tej prostej.*



11. Na rysunku obok $|BA| = |BC| = |BD|$, a przy tym $\sphericalangle DCA = 20°$. Wyznacz miary kątów DBA i BAD.

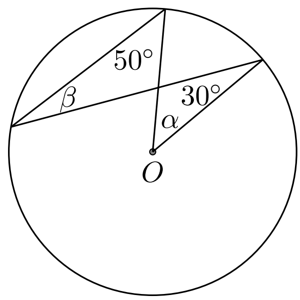
12. Na rysunku obok $|AB| = |AC| = |AD|$, a przy tym $\sphericalangle BCA = 65°$. Wyznacz $\sphericalangle CDB$.

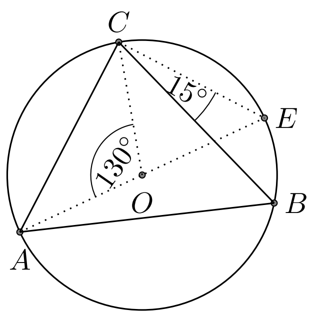




13. Na rysunku obok $|DA| = |DB| = |DC|$, a przy tym $\sphericalangle ADB = 30°$. Wyznacz miary kątów ACB i ABD.

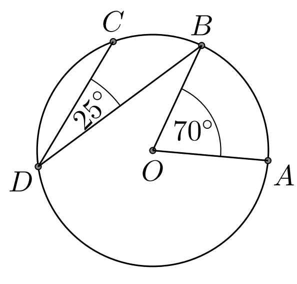
14. Na rysunku obok punkt O jest środkiem okręgu. Wyznacz miary kątów α i β.

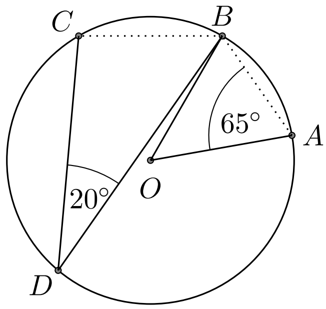




15. Na rysunku obok trójkąt ABC wpisany jest w okrąg o środku w punkcie O, zaś AE jest średnicą tego okręgu. Wyznacz kąty trójkąta ABC.

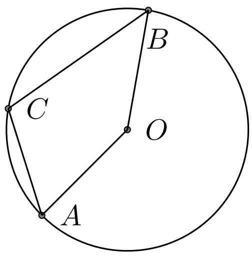
16. Wyznacz miary kątów OAB, OCB i ABC na rysunku obok, wiedząc, że O jest środkiem okręgu.





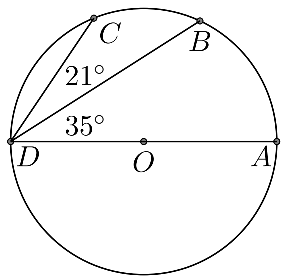
17. Znajdź miary kątów ABC i AOC na rysunku obok wiedząc, że O jest środkiem okręgu.

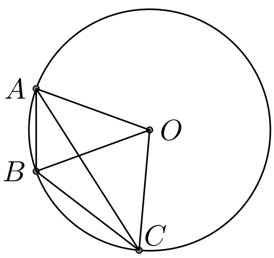
18. Trójkąt ABC wpisany jest w okrąg o środku O. Znajdź miarę kąta AOB, jeśli: $\sphericalangle ABC = 40°$, a przy tym $|AB| = |BC|$.



19. Na rysunku obok punkt O jest środkiem okręgu. Punkty A, B, C leżą na tym okręgu. Wiedząc, że $\sphericalangle BCO = 55°$, wyznacz $\sphericalangle CAB$.

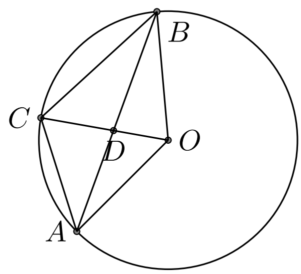
20. Na rysunku obok punkt O jest środkiem okręgu, punkty A, B, C, D leżą na tym okręgu, przy czym AD jest jego średnicą. Wiedząc, że $\sphericalangle ADB = 35°$, $\sphericalangle BDC = 21°$, wyznacz $\sphericalangle COD$, $\sphericalangle CAB$, $\sphericalangle COB$ i $\sphericalangle ABC$. Wyznacz miarę x kąta ostrego pod jakim przecinają się odcinki OC i BD.



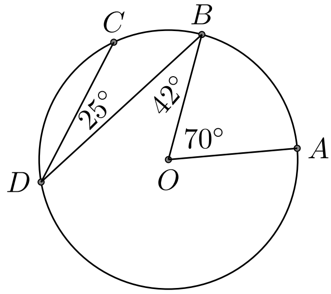


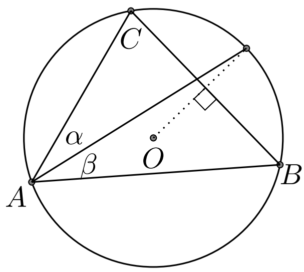
21. Na rysunku obok punkty A, B, C leżą na okręgu, którego środkiem jest punkt O. Wiedząc, że $\sphericalangle BCA = 15°$, $\sphericalangle ACO = 50°$, wyznacz kąty czworokąta $ABCO$.

22. Punkty A, B, C na rysunku obok leżą na okręgu o środku w punkcie O. Przekątne AB i OC przecinają się w punkcie D. Wiedząc, że $\sphericalangle BCO = 50°$, $\sphericalangle CDB = 100°$. Wyznacz kąty czworokąta $AOBC$.



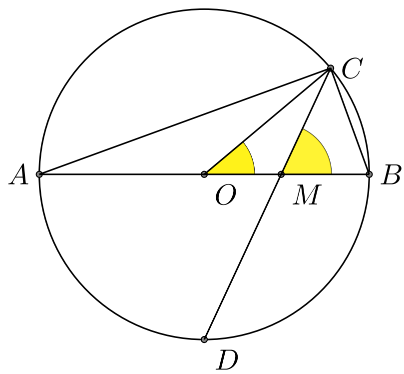
23. Wyznacz miary kątów $\sphericalangle ABO$, $\sphericalangle BOC$, $\sphericalangle BCO$, $\sphericalangle CBD$, $\sphericalangle COD$, $\sphericalangle DCO$ oraz kąt ostry pod jakim przecinają się odcinki BD i CO.

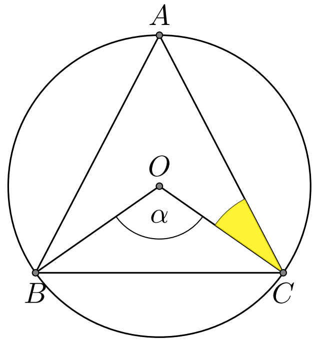




24. Na rysunku obok O oznacza środek okręgu, zaś kąt α jest danym kątem. Wyznacz miarę kąta β raz przyjmując, że $\alpha = 33°$, a drugi raz przyjmując, że α jest dowolnym katem.

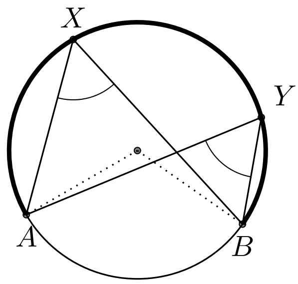
25. Średnica AB i cięciwa CD na rysunku obok przecinają się w punkcie M. Miara kąta CMB równa jest $75°$. Punkt O jest środkiem okręgu, a miara kąta środkowego COB wynosi $50°$. Wyznacz miary kątów: OBC, BCM, BOD, MCO, ACM.





26. Trójkąt równoramienny ABC na rysunku obok wpisany jest w okrąg. Kąt środkowy BOC ma miarę α. Wyznacz $\sphericalangle OCA$.

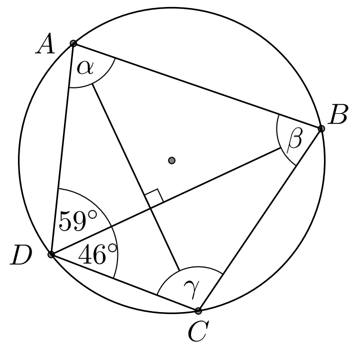
Zauważmy, że z twierdzenia o kątach w okręgu wynika następujący



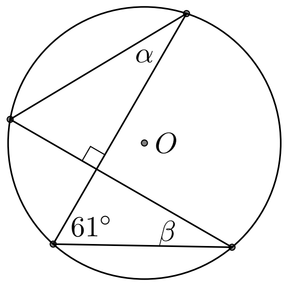
WNIOSEK 1 (Twierdzenie Apoloniusza)
Jeżeli A i B są dwoma różnymi punktami na okręgu, zaś X i Y dwoma punktami leżącymi na tym samym łuku pomiędzy punktami A i B, to wówczas

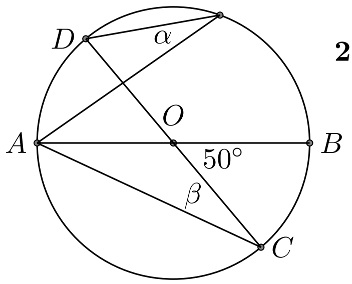
$$\sphericalangle AXB = \sphericalangle AYB$$

A zatem wszystkie kąty wpisane w okrąg i oparte na tym samym łuku są równe.



27. Czworokąt $ABCD$ na rysunku obok wpisany jest w okrąg. Cięciwy AC i BD przecinają się pod kątem prostym. Wyznacz miary kątów α, β i γ.





28. Na rysunkach a) punkt O jest środkiem okręgu. Na rysunku b) odcinki AB i CD są średnicami okręgu. Wyznacz kąty α i β.

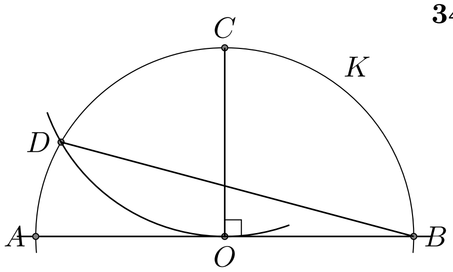
29. Trójkąt ABC wpisany jest w okrąg. Dwusieczna kąta C przecina bok AB w punkcie D, a okrąg w punkcie E. Przyjmij, że $\sphericalangle ACB = 66°$, $\sphericalangle AEC = 77°$ Sporządź duży rysunek i zapisz na nim miary wszystkich kątów w trójkątach ADC, BDE, AED, BCD.

30. Trójkąt ABC wpisany jest w okrąg. Półprosta wychodząca z wierzchołka C przecina bok AB w punkcie D, a okrąg w punkcie E, przy czym $\sphericalangle ACE = 27°$, $\sphericalangle BCE = 35°$, $\sphericalangle AEC = 72°$. Sporządź duży rysunek i zapisz na nim miary kątów ABC, BAC, BEC, ABE, AEB, BAE.

31. Trójkąt ABC wpisany jest w okrąg. Dwusieczna kąta A przecina okrąg w punkcie D. Uzasadnij, że trójkąt BCD jest równoramienny.

32. Dwa okręgi przecinają się w punktach A i B. Przez punkt A prowadzimy prostą, która przecina pierwszy okrąg w punkcie K, a drugi w punkcie L, zaś przez punkt B prostą, która przecina pierwszy okrąg w punkcie M, a drugi w punkcie N. Pokaż, że $\sphericalangle MAN = \sphericalangle KBL$.

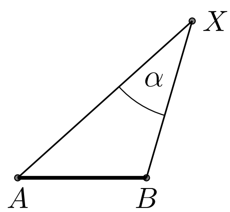
33.* Wierzchołek A trójkąta ostrokątnego ABC połączono odcinkiem ze środkiem O okręgu opisanego. Z wierzchołka A poprowadzono wysokość AH. Pokaż, że $\sphericalangle BAH = \sphericalangle OAC$.



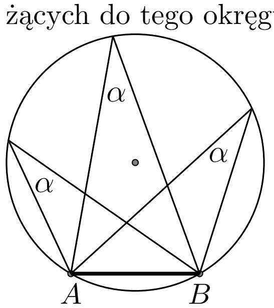
34. Na rysunku obok punkt O jest środkiem okręgu K, AB jest jego średnicą, zaś OC jest promieniem prostopadłym do średnicy AB. Z punktu C promieniem długości CO zataczamy okrąg, który przecina okrąg K w punkcie D. Wyznacz miarę kąta ABD oraz kąta ADC.

35. Dwa kąty wpisane w okrąg oparte są na tym samym łuku. Uzasadnij, że dwusieczne tych kątów przecinają się w punkcie leżącym na tym okręgu.

Mówimy, że odcinek AB widać z punktu X pod kątem α, gdy $\sphericalangle AXB = \alpha$.



Przypomnijmy, że *cięciwą okręgu* nazywamy każdy odcinek o końcach należących do tego okręgu.



Używając powyższej terminologii możemy sformułować **twierdzenie Apoloniusza** następująco: Daną cięciwę okręgu widać z każdego punktu ustalonego łuku okręgu pod tym samym kątem.

36. Jeden z kątów ostrych trójkąta prostokątnego ma $25°$. Pod jakim kątem widać przyprostokątne tego trójkąta ze środka okręgu opisanego na tym trójkącie?

Ma miejsce następujące

TWIERDZENIE

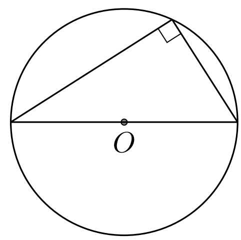
Niech dany będzie odcinek AB, wówczas prosta AB dzieli płaszczyznę na dwie półpłaszczyzny. Jeżeli punkty P i Q leżą w jednej półpłaszczyźnie i z punktów tych widać odcinek AB pod takim samym kątem, to wówczas punkty A, B, P, Q leżą na jednym okręgu.

37. W trójkącie ostrokątnym ABC punkty A_1, B_1 i C_1 są spodkami wysokości wychodzących, odpowiednio, z wierzchołków A, B i C. Uzasadnij, że $\sphericalangle B_1A_1A = \sphericalangle C_1A_1A$ czyli, że półprosta A_1A jest dwusieczną kąta $C_1A_1B_1$. (Zrób staranny rysunek.)

Przypomnijmy, że *średnicą okręgu* nazywamy każdą cięciwę okręgu przechodzącą przez środek okręgu. Zauważmy następnie, że z twierdzenia Apoloniusza wynika następujący:

WNIOSEK 2

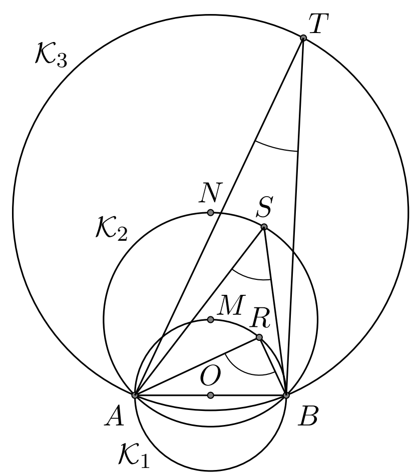
Średnicę okręgu widać z punktu na okręgu pod kątem prostym.

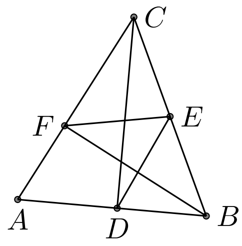


38. Dwa okręgi przecinają się w punktach A i B. Przez punkt A poprowadzono średnicę AC jednego okręgu i średnicę AD drugiego okręgu. Uzasadnij, że punkty B, C, D leżą na jednej prostej.

39. Trzy okręgi K_1, K_2 i K_3 o środkach – odpowiednio – O, M, N, tak jak na rysunku obok, mają wspólną cięciwę AB. Punkty R, S, T leżą odpowiednio na K_1, K_2 i K_3. Wyznacz miary kątów ARB, ASB i ATB.

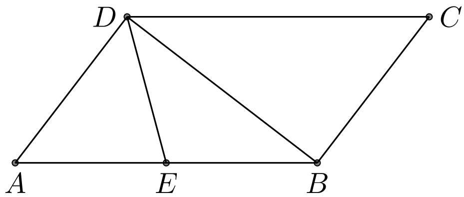
40. Przekątna AC czworokąta $ABCD$ jest średnicą okręgu opisanego na tym czworokącie. Punkt O jest środkiem tego okręgu, $\sphericalangle CDO = \alpha$, $\sphericalangle DAB = \beta$. Wyznacz $\sphericalangle CBO$.





41. W trójkącie ABC na rysunku obok $|EC| = |EF| = |ED| = |EB|$, $\sphericalangle CAB = 64°$. Wyznacz $\sphericalangle FED$.

42. Czworokąt na rysunku obok jest równoległobokiem, przy czym $|EA| = |EB| = |ED|$, $\sphericalangle AED = 80°$. Wyznacz $\sphericalangle BDC$.

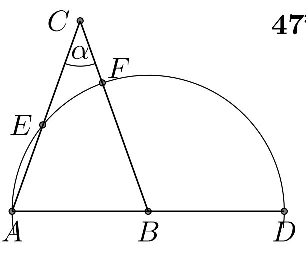


43. Dany jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 12 i 5. Na krótszej przyprostokątnej jako na średnicy budujemy okrąg, który przecina przeciwprostokątną w pewnym punkcie. Wyznacz długości odcinków na jakie ten punkt podzielił przeciwprostokątną.

44* Udowodnij, że dla dowolnego trójkąta ostrokątnego ABC okrąg o średnicy AC i okrąg o średnicy AB przecinają się w punkcie A' leżącym na prostej BC. W razie potrzeby zobacz wskazówkę do zadania.

45. Uzasadnij, że końce dwóch przecinających się średnic okręgu są wierzchołkami prostokąta.

46. W trójkącie równoramiennym ABC mamy: $|AC| = |BC|$, $\sphericalangle ACB = 45°$. Okrąg, którego średnicą jest AC, przecina podstawę AB w punkcie D, zaś ramię BC w punkcie E. Jakie są miary katów AEC i ADC. Jaka jest wobec tego miara kąta BAE?



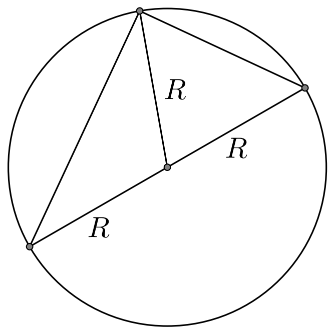
47* Trójkąt ABC na rysunku obok jest równoramienny, przy czym $|AC| = |BC|$, zaś $\sphericalangle C = \alpha$. Promieniem o długości $|AB|$ zataczamy okrąg o środku w punkcie B. Przecina on prostą AB w punkcie D, ramię AC – w punkcie E, zaś ramię BC w punkcie F. Wyznacz $\sphericalangle EDF$ oraz $\sphericalangle BED$. Zrób zadanie dwukrotnie: raz dla obliczeń przyjmij $\alpha = 40°$, a drugi raz przyjmij, że α jest dowolnym kątem.

WNIOSEK 3

Jeżeli cięciwę widać z punktu na okręgu pod kątem prostym, to ta cięciwa jest średnicą tego okręgu.

Wniosek 3 można sformułować inaczej następująco:
Jeżeli trójkąt prostokątny wpisany jest w okrąg, to przeciwprostokątna jest średnicą tego okręgu.

Z powyższego wynika, że w trójkącie prostokątnym środek przeciwprostokątnej jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie, a odcinek łączący wierzchołek kąta prostego ze środkiem przeciwprostokątnej jest promieniem tego okręgu.



48. Pokaż, że w trójkącie prostokątnym środkowa wychodząca z wierzchołka kąta prostego ma długość równą połowie długości przeciwprostokątnej. **! ⇐**

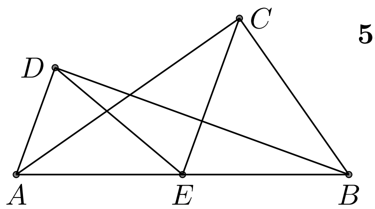
49. W trójkącie prostokątnym jeden z kątów ostrych ma $60°$. Wyznacz miarę kąta pomiędzy wysokością i środkową poprowadzonymi z wierzchołka kąta prostego.

50. Uzasadnij, że w trójkącie prostokątnym środkowa poprowadzona z wierzchołka kąta prostego dzieli ten trójkąt na dwa trójkąty równoramienne.

51. W trójkącie prostokątnym ABC kąt przy wierzchołku A ma miarę α i jest najmniejszym kątem w tym trójkącie. Kąt $\sphericalangle C$ jest prosty. Z wierzchołka C poprowadzono wysokość CD oraz środkową CE. Wyznacz $\sphericalangle DCE$ w zależności od α.

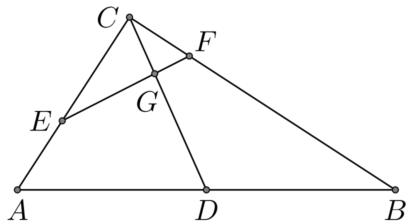
52. Pokaż, że dwusieczna kąta prostego w trójkącie prostokątnym jest też dwusieczną kąta pomiędzy wysokością a środkową opuszczonymi na przeciwprostokątną.

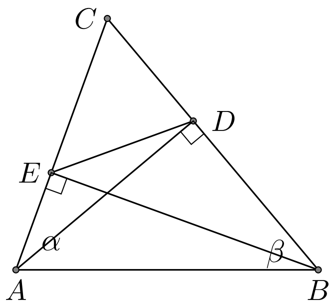
53. Dany jest trójkąt równoramienny ABC, w którym $|AC| = |BC|$, $|AB| = 10$. Punkt D jest środkiem podstawy, zaś E i F są środkami ramion BC i AC. Dodatkowo wiadomo, że $|DE| = |DC| = |DF|$. Wyznacz $|BC|$.



54. Na rysunku obok punkt E jest środkiem odcinka AB, $\overline{AD} \perp \overline{BD}$, $\overline{AC} \perp \overline{CB}$, $\sphericalangle DEC = 70°$, $\sphericalangle EDA = 70°$. Wyznacz miary kątów $\sphericalangle DAC$, $\sphericalangle DEA$, $\sphericalangle EDB$, $\sphericalangle CDB$.

55. W trójkącie ABC na rysunku obok $|DA| = |DB|$, $\overline{AC} \perp \overline{BC}$, $\sphericalangle CEF = 35°$, $\sphericalangle ABC = 28°$. Wyznacz $\sphericalangle EGD$.





56. Trójkąt ABC na rysunku obok jest ostrokątny, $\overline{BE}$ i $\overline{AD}$ są wysokościami. Pokaż, że $\sphericalangle CDE = \alpha$, $\sphericalangle CED = \beta$.

57* W trójkącie prostokątnym ABC, kąt $\sphericalangle C$ jest prosty, zaś $\sphericalangle A$ jest najmniejszym kątem. Punkt D jest środkiem boku AB, E – środkiem boku BC, F – środkiem boku AC, zaś H jest spodkiem wysokości wychodzącej z wierzchołka C. Pokaż, że punkty D, H, E, C, F leżą na jednym okręgu.

58* W trójkącie prostokątnym ABC, kąt $\sphericalangle C$ jest prosty, zaś $\sphericalangle A$ jest najmniejszym kątem w tym trójkącie. Niech M_c oznacza środek boku AB, M_a – środek boku BC, M_b – środek boku AC. Niech M_1 będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie AM_cC, M_2 – środkiem okręgu opisanego na trójkącie BCM_c. Pokaż, że $\overline{M_1M_2} \perp \overline{CM_c}$ oraz, że proste AM_1 i BM_2 przecinają się na okręgu opisanym na trójkącie ABC.

59* Niech ABC będzie trójkątem prostokątnym, w którym $\sphericalangle C = 90°$, zaś kąt $\sphericalangle A$ jest najmniejszym kątem i ma miarę α. Niech C' będzie rzutem prostopadłym wierzchołka C na AB. Obierzmy na AB dowolny punkt W różny od C'. Przez punkt W prowadzimy prostą prostopadłą do AB. Przecina ona bok AC w punkcie D, zaś prostą BC w punkcie E. Niech

N będzie środkiem odcinka DE. Pokaż, że punkty W, D, C, B leżą na jednym okręgu, jak również punkty A, E, C, W leżą na jednym okręgu oraz, że $\sphericalangle NCE = \alpha$.

60. Odcinek AB jest podstawą trójkąta ostrokątnego ABC, przy czym $\sphericalangle ACB = \alpha$. Okrąg, którego średnicą jest AB przecina ramiona AC i BC odpowiednio w punktach E i D. Uzasadnij, że przekątne czworokąta $ABDE$ tworzą taki sam kąt jak ramiona trójkąta lub uzasadnij, że kąt ostry pod jakim przecinają się przekątne czworokąta $ABDE$ jest równy α.

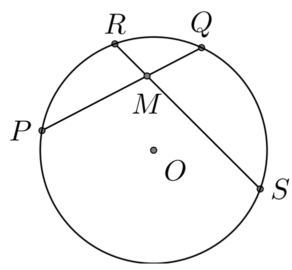
61. W trójkącie prostokątnym ABC kąt ACB jest prosty, zaś ABC jest najmniejszym kątem tego trójkąta. Niech M_a, M_b, M_c będą odpowiednio środkami boków BC, AC i AB, zaś C' niech będzie spodkiem wysokości wychodzącej z wierzchołka C. Uzasadnij, że wierzchołki pięciokąta $M_cC'M_bCM_a$ leżą na jednym okręgu.

62.* Niech ABC będzie trójkątem prostokątnym, w którym $\sphericalangle C = 90°$, zaś $\sphericalangle A$ jest najmniejszym kątem w tym trójkącie. Niech C' będzie spodkiem wysokości wychodzącej z wierzchołka C. Obierzmy na przeciwprostokątnej AB taki punkt D, że $DC' = C'B$. Poprowadźmy następnie prostą CD oraz prostopadłą do niej prostą przechodzącą przez punkt A. Obie te proste przecinają się w punkcie E. Pokaż, że

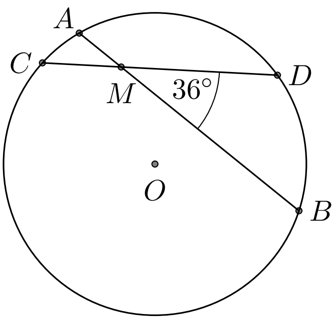
(a) trójkąt DBC jest równoramienny,
(b) $\sphericalangle EAB = \sphericalangle BAC$,
(c) Punkty A, E, C', C leżą na jednym okręgu,
(d) $HC = HE$.

63.* Dwa okręgi przecinają się w punktach A i B. Przez punkt B poprowadzono sieczną, która przecina okręgi w punktach C i D. Uzasadnij, że miara kąta CAD jest stała dla wszystkich siecznych przechodzących przez punkt B.

64. Cięciwy PQ i RS przecinają się w punkcie M niekoniecznie będącym środkiem okręgu. Pokaż, że miara kąta $\sphericalangle RMP$ równa jest połowie sumy miar kątów środkowych opartych na łukach RP i QS.

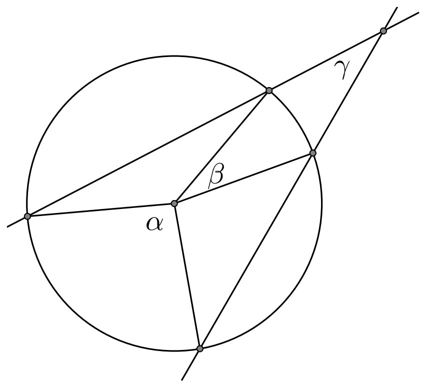


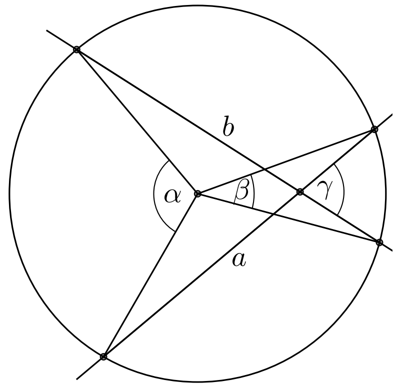
65.* Okrąg, którego średnicą jest jeden z boków równoległoboku, przechodzi przez środek sąsiedniego boku oraz przez punkt przecięcia przekątnych. Wyznacz kąty równoległoboku.



66. Kąt środkowy oparty na łuku BD jest trzy razy większy od kąta środkowego opartego na łuku AC, zaś $\sphericalangle BMD = 36°$. Wyznacz kąty środkowe $\sphericalangle BOD$ i $\sphericalangle AOC$.

67* Proste a i b na poniższych rysunkach przecinają się pod kątem γ i wycinają z okręgu łuki odpowiadające kątom środkowym α i β. Wyznacz kąt γ w zależności od kątów α i β w każdym z obu przypadków:





68. Trójkąt ABC jest równoramienny, przy czym $|AC| = |BC|$. Dwusieczna kąta A przecina okrąg opisany na trójkącie w punkcie U, zaś dwusieczna kąta B przecina okrąg w punkcie K. Punkt R jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Pokaż, że

(a) $\triangle BCU \equiv \triangle ACK$,

(b) czworokąt $RUCK$ jest rombem.

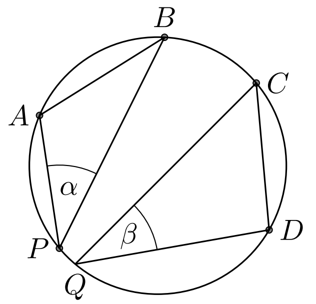
69. ABC jest trójkątem równobocznym wpisanym w okrąg. Punkt D leży na tym okręgu tak, że odcinek BD przecina bok AC. Punkt E leży na odcinku BD tak, że $|DE| = |DC|$. Pokaż, że

(a) trójkąt DEC jest równoramienny,

(b) $\triangle ACD \equiv \triangle BCE$,

(c) $|AD| + |DC| = |BD|$.

TWIERDZENIE

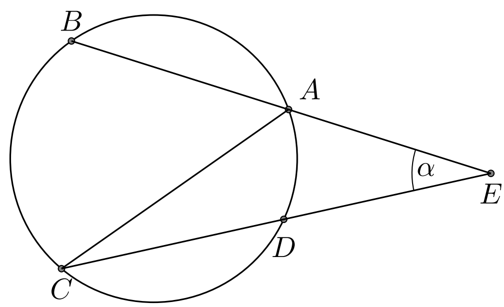


Niech AB i CD będą cięciwami w okręgu, a α i β kątami wpisanymi opartymi na tych cięciwach. Wówczas:

(1) jeżeli $AB = CD$, to $\alpha = \beta$;

(2) jeżeli $\alpha = \beta$, to $AB = CD$.

70. Punkty A, B, C, D na rysunku obok leżą na okręgu, przy czym $AB = BC = CD$, zaś $\sphericalangle DEA = \alpha$. Pokaż, że trójkąt BCE jest równoramienny oraz wyznacz miary kątów $\sphericalangle ACD$ i $\sphericalangle AED$.



Odpowiedzi i wskazówki

1. $\sphericalangle A = 60°$, $\sphericalangle B = 100°$, $\sphericalangle C = 120°$, $\sphericalangle D = 80°$

2. $\sphericalangle AOC = 50°$, $\sphericalangle ACO = 65°$, $\alpha = 112{,}5°$

3. a) $\sphericalangle A = 55°$, $\sphericalangle B = 65°$, $\sphericalangle C = 60°$

b) $\sphericalangle A = 74{,}5°$, $\sphericalangle B = 57{,}5°$, $\sphericalangle C = 48°$

c) $\sphericalangle A = 119°$, $\sphericalangle B = 20°$, $\sphericalangle C = 41°$

4. $\sphericalangle DAC = 25°$

5. $\sphericalangle ACO = 73°$

6. $\sphericalangle AOB = 120°$, $\sphericalangle BCO = 40°$

7. $\sphericalangle DOB = 2\alpha = 110°$

8. $\sphericalangle COB = 54°$, $\sphericalangle COA = 58°$, $\sphericalangle OBA = 34°$

9. $\sphericalangle CAO = 70°$

10. $45°$

11. Co znaczy, że $BA = BC = BD$? $\sphericalangle DBA = 40°$, $\sphericalangle BAD = 70°$

12. Co oznacza, że $AB = AC = AD$? $\sphericalangle CDB = 25°$

13. $\sphericalangle ACB = 15°$, $\sphericalangle ABD = 75°$

14. $\alpha = 40°, \beta = 20°$

15. $\sphericalangle A = 40°$, $\sphericalangle B = 65°$, $\sphericalangle C = 75°$

16. $\sphericalangle OAB = 55°$, $\sphericalangle OCB = 65°$, $\sphericalangle ABC = 120°$

17. $\sphericalangle ABC = 135°$, $\sphericalangle AOC = 90°$

18. $\sphericalangle AOB = 140°$

19. $\sphericalangle CAB = 35°$

20. $\sphericalangle COD = 68°$, $\sphericalangle CAB = 21°$, $\sphericalangle COB = 42°$, $\sphericalangle ABC = 124°$, $x = 77°$

21. $\sphericalangle AOC = 80°$, $\sphericalangle BAO = 75°$, $\sphericalangle CBA = 140°$, $\sphericalangle BCO = 65°$

22. $\sphericalangle A = 60°$, $\sphericalangle B = 50°$, $\sphericalangle C = 110°$, $\sphericalangle O = 140°$

23. $\sphericalangle ABO = 55°$, $\sphericalangle BOC = 50$, $\sphericalangle BCO = 65°$, $\sphericalangle CBD = 23°$, $\sphericalangle COD = 46°$, $\sphericalangle DCO = 67°$, odcinki BD i CO przecinają się pod kątem $88°$

24. $\alpha = \beta = 33°$

25. $\sphericalangle OBC = 65°, \sphericalangle BCM = 40°$, $\sphericalangle BOD = 80°, \sphericalangle MCO = 25°$, $\sphericalangle ACM = 50°$

26. $\sphericalangle OCA = \frac{1}{4}\alpha$

27. $\alpha = 77°$, $\beta = 75°$, $\gamma = 103°$

28. a) $\alpha = \beta = 29°$, b) $\alpha = \beta = 25°$

29. np. w trójkącie BDE $\sphericalangle B = 33°$, $\sphericalangle D = 110°$, $\sphericalangle E = 37°$

30. $\sphericalangle ABC = 72°$, $\sphericalangle BAC = 46°$, $\sphericalangle BEC = 46°$, $\sphericalangle ABE = 27°$, $\sphericalangle AEB = 118°$, $\sphericalangle BAE = 35°$.

34. $\sphericalangle ABD = 15°$, $\sphericalangle ADC = 135°$

36. $50°$ i $130°$

38. wsk. wystarczy pokazać, że $\sphericalangle CBD = 180°$

39. $\sphericalangle ARB = 90°$, $\sphericalangle ASB = 45°$, $\sphericalangle ATB = 22{,}5°$

40. $\sphericalangle CBO = 180° - (\alpha + \beta)$

41. $\sphericalangle FED = 52°$

42. $\sphericalangle BDC = 40°$

43. $1\frac{12}{13}$, $11\frac{1}{13}$

44. wystarczy pokazać iż $\sphericalangle BA'C = 180°$.

45. Czyli wykaż, że wszystkie kąty otrzymanego czworokąta są proste.

46. $\sphericalangle AEC = \sphericalangle ADC = 90°$, $\sphericalangle BAE = 22{,}5°$

47. $\sphericalangle EDF = 45° - \frac{3}{4}\alpha$, $\sphericalangle BED = \dfrac{\alpha}{2}$

49. $30°$

51. $90° - 2\alpha$

53. Wsk. zrób realistyczny rysunek.

54. $\sphericalangle DAC = 35°$, $\sphericalangle DEA = 40°$, $\sphericalangle EDB = 20°$, $\sphericalangle CDB = 35°$

55. $\sphericalangle EGD = 97°$

61. Przecież to jest zadanie ..., no które?

63. wsk. przez punkt B poprowadź drugą sieczną, przecinającą okręgi w punktach C_1, D_1 i uzasadnij, że $\sphericalangle C_1AD_1 = \sphericalangle CAD$.

64. Wsk: wykreśl cięciwę PS i rozważ kąty wpisane $\sphericalangle RSP$ i $\sphericalangle QPS$ oraz trójkąt PMS.

65. $45°$ i $135°$

66. $18°, 54°$

67. a) $\gamma = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, b) $\gamma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$

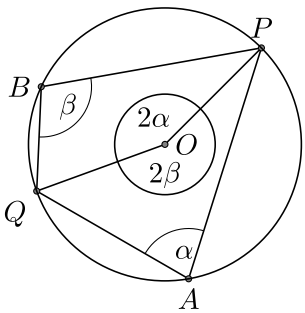
Rozdział 13

CZWOROKĄT WPISANY W OKRĄG.

DEFINICJA Czworokąt, którego wszystkie cztery wierzchołki leżą na jednym okręgu, nazywamy czworokątem wpisanym w okrąg.

Mają miejsce dwa twierdzenia związane z czworokątem wpisanym w okrąg. Twierdzenia te wynikają z twierdzeń o kątach w okręgu.

TWIERDZENIE Jeżeli czworokąt jest wpisany w okrąg, to sumy miar przeciwległych kątów równe są $180°$.



Dowód: Niech czworokąt $APBQ$ będzie wpisany w okrąg o środku w punkcie O. Niech kąty przy wierzchołkach A i B mają odpowiednio miary α i β. Wówczas kąt środkowy POQ oparty na łuku PBQ ma miarę 2α, zaś kąt środkowy POQ oparty na łuku PAQ ma miarę 2β. Ponieważ suma miar tych dwóch kątów środkowych jest kątem pełnym wobec tego mamy

$$2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta) = 360°$$

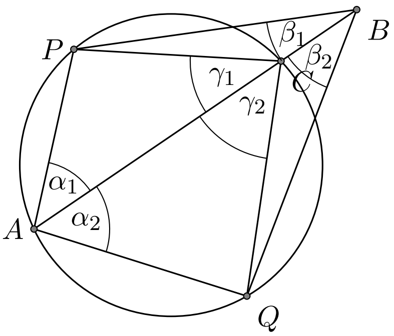
zatem

$$\alpha + \beta = 180°.$$

Ma miejsce również twierdzenie odwrotne do poprzedniego twierdzenia, a mianowicie:

TWIERDZENIE Jeżeli w czworokącie sumy miar przeciwległych kątów są równe $180°$, to czworokąt ten można wpisać w okrąg.

Dowód: (nie wprost) Przypuśćmy, że w czworokącie $APBQ$ kąt $\sphericalangle A$ ma miarę α, zaś kąt $\sphericalangle B$ ma miarę β, a przy tym $\alpha + \beta = 180°$, natomiast



okrąg przechodzący przez punkty P, A, Q nie przechodzi przez punkt B, czyli że punkt B leży albo na zewnątrz albo wewnątrz tego okręgu. Wpierw przeanalizujmy przypadek, gdy punkt B leży na zewnątrz okręgu.
Odcinek AB przecina okrąg jakimś punkcie – nazwijmy go C. Oznaczmy miary kątów tak jak na rysunku obok. Mamy wówczas

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 = 180° \text{ – bo } \alpha + \beta = 180° \quad (1)$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \gamma_1 + \gamma_2 = 180° \text{– bo czworokąt } PAQC \text{jest wpisany w okrąg} \quad (2)$$
$$\gamma_1 > \beta_1 \text{ – bo } \gamma_1 \text{ jest kątem zewnętrznym w trójkącie } BCP \quad (3)$$
$$\gamma_2 > \beta_2 \text{ – bo } \gamma_1 \text{ jest kątem zewnętrznym w trójkącie } BCQ \quad (4)$$

Odejmując od równości (2) równość (1) dostajemy

$$\gamma_1 - \beta_1 + \gamma_2 - \beta_2 = 0 \tag{13.1}$$

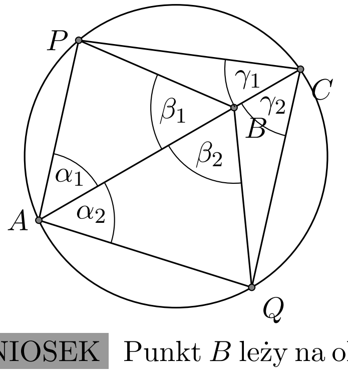
Z drugiej strony z (3) i (4) wynika, że

$$\gamma_1 + \gamma_2 > \beta_1 + \beta_2$$

czyli, że

$$\gamma_1 - \beta_1 + \gamma_2 - \beta_2 > 0 \tag{13.2}$$

Czyli przypuszczenie, że punkt B leży poza okręgiem doprowadziło do sprzeczności, bowiem żadna wielkość nie może być równa 0 i równocześnie większa od 0.



Zadanie.
Przeprowadź podobne rozumowanie jak powyżej przypuszczając, że punkt B leży wewnątrz okręgu. Tu również dojdziemy do sprzeczności.

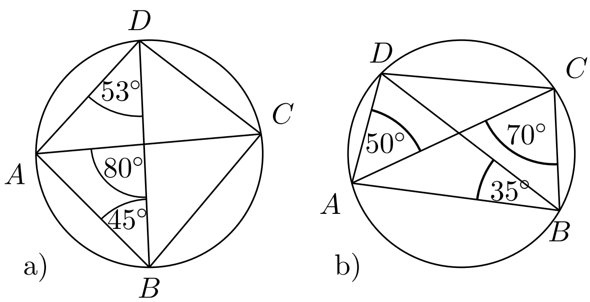
WNIOSEK Punkt B leży na okręgu przechodzącym przez punkty P, A i Q.

Powyższe dwa twierdzenia można sformułować krótko w postaci jednego twierdzenia:

TWIERDZENIE . Czworokąt można wpisać w okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy miar przeciwległych kątów w tym czworokącie wynoszą 180°.

1. Wyznacz kąty czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg jeśli: $\sphericalangle C = 2\sphericalangle A$ i $\sphericalangle D = 3\sphericalangle B$.

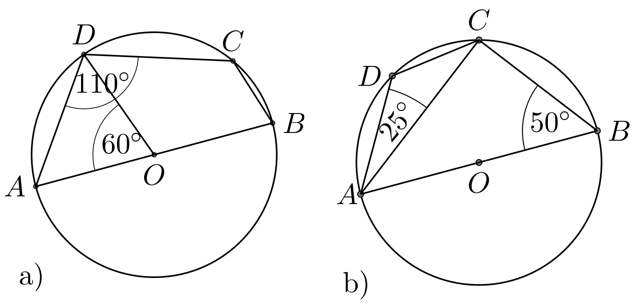
2. Na okręgu o środku w punkcie O obrano kolejno, zgodnie z ruchem wskazówek zegara, punkty: A, B, C, D, tak, że długość każdego łuku AB, BC, CD jest równa $\frac{1}{5}$ długości pozostałego łuku DA tego okręgu. Oblicz miary kątów czworokąta $ABCD$.



3. Czworokąty $ABCD$ wpisane są w okrąg. Wyznacz miary kątów każdego czworokąta.

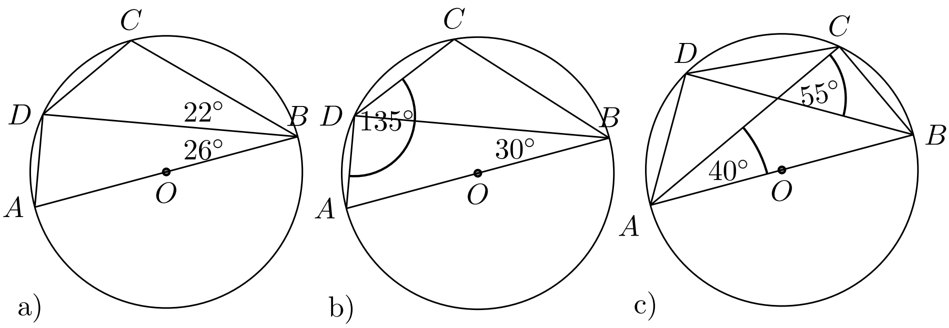
4. Czworokąty $ABCD$ na rysunkach poniżej wpisane są w okrąg o środku w punkcie O.

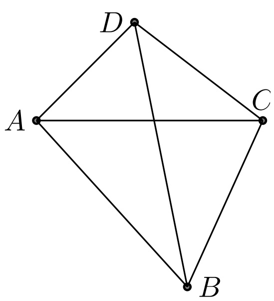
Odcinek AB jest średnicą tego okręgu. Wyznacz miary kątów tego czworokąta oraz kąty trójkątów ABC, ACD, ABD, BCD.



5. Zbadaj, czy na czworokącie można opisać okrąg, jeśli miary kolejnych jego kątów są w stosunku: a) 4 : 5 : 2 : 1 b) 1 : 2 : 3 : 4

6. Czworokąt $ABCD$ na rysunkach poniżej wpisany jest w okrąg o środku w punkcie O, AB jest średnicą tego okręgu. Wyznacz miary kątów tego czworokąta oraz kąty trójkąta ACD.

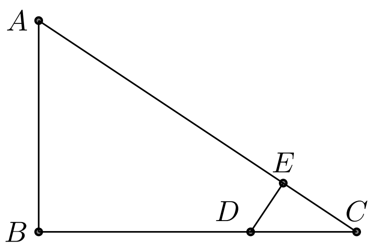




7. W czworokącie $ABCD$ na rysunku obok $\sphericalangle ABD = 35°$, $\sphericalangle ABC = 75°$, $\sphericalangle ADC = 105°$. Wyznacz miarę kąta CAD.

8. Przekątne AC i BD czworokąta $ABCD$, wpisanego w okrąg, przecinają się w punkcie S. Oblicz miarę kąta ACD mając dane: $\sphericalangle DAB = 80°$, $\sphericalangle BSC = 50°$, $\sphericalangle ABC = 110°$.

9. Na rysunku obok $AB = DB$. Kąty ABC i DEC są proste. Wyznacz $\sphericalangle BEA$.



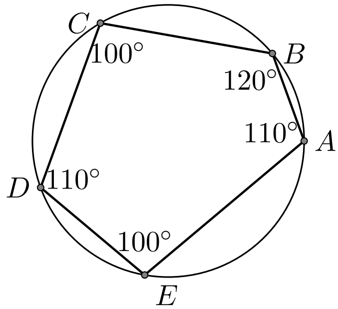
10. Punkty A, B, C leżą na okręgu o środku w punkcie D. Są one kolejnymi wierzchołkami czworokąta $ABCD$, w którym kąty ABC i ADC są równe. Wyznacz miarę kąta ABC.

11. Uzasadnij, że trapez równoramienny można wpisać w okrąg.

12. Pokaż, że jeżeli trapez można wpisać w okrąg, to jest on równoramienny.

13. Trapez $ABCD$, w którym $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ wpisany jest w okrąg. Przekątne AC i BD przecinają się w punkcie E, $\sphericalangle BAC = 47°$, $\sphericalangle CAD = 25°$. Wypisz miary kątów w trójkątach ACD, BCD, ABD, CDE, AED, ABC.

14. Kolejne kąty pięciokąta wpisanego w okrąg mają miary $100°$, $120°$, $110°$, $100°$, $110°$. Z wierzchołka kąta $120°$ poprowadzono przekątne. Na jakie kąty przekątne te podzieliły kąt $120°$?



15. Oblicz pole trapezu równoramiennego wpisanego w okrąg o promieniu r tak, że jedna z jego podstaw jest średnicą okręgu, a druga jest równej długości z promieniem. Obliczenia przeprowadź dla $r = 2$.

16. Jedna z podstaw trapezu wpisanego w okrąg (czyli trapezu równoramiennego) ma długość równą długości promienia tego okręgu, zaś druga podstawa jest dwa razy dłuższa. Pole trapezu jest równe $48\sqrt{3}$. Wyznacz promień r tego okręgu oraz kąty trapezu.

17. Przekątna AC czworokąta $ABCD$ jest średnicą okręgu opisanego na tym czworokącie. Punkt O jest środkiem tego okręgu, $\sphericalangle CDO = \alpha$, $\sphericalangle CBO = \beta$. Wyznacz $\sphericalangle BAD$.

18. Odcinki AB i CD przecinają się w punkcie P, przy czym $AB = CD$ i $AP = PC$. Udowodnij, że punkty A, B, C, D leżą na jednym okręgu.

19. Z punktu P położonego wewnątrz kąta ostrego BAC opuszczono proste prostopadłe PC_1 i PB_1 odpowiednio na ramiona AC i AB. Pokaż, że $\sphericalangle C_1AP = \sphericalangle C_1B_1P$.

20. W trójkącie prostokątnym ABC punkt D jest środkiem przeciwprostokątnej AB. Symetralna tej przeciwprostokątnej przecina przyprostokątną BC w punkcie E tak, że $|BE| = 5$, $|CE| = 3$. Wyznacz:

(a) promień okręgu opisanego na trójkącie ABC;

(b) pole prostokąta, w którym $\overline{CD}$ jest przekątną, a którego pozostałe dwa wierzchołki leżą na przyprostokątnych trójkąta ABC;

(c) promień okręgu opisanego na czworokącie $ACED$.

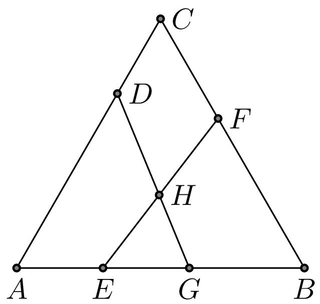
21. Na przeciwprostokątnej $\overline{AB}$ trójkąta prostokątnego ABC po przeciwnej stronie boku $\overline{AB}$ niż punkt C, zbudowano kwadrat o boku długości AB. Niech O oznacza punkt przecięcia się przekątnych kwadratu. Udowodnij, że

(a) na czworokącie $AOBC$ można opisać okrąg

(b) półprosta h_{CO} jest dwusieczną kąta prostego $\sphericalangle C$.

22. Udowodnij, że jeżeli dwusieczne kątów wewnętrznych trapezu równoramiennego tworzą czworokąt, to na tym czworokącie można opisać okrąg.

23. Niech AB będzie średnicą okręgu, a CD jego cięciwą równoległą do tej średnicy. Pokaż, że w trójkącie ACD różnica miar kątów przy wierzchołkach C i D wynosi $90°$.



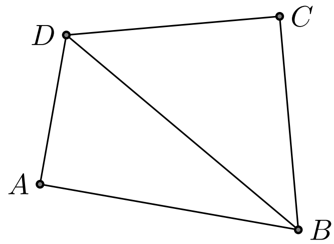
24. W trójkącie równobocznym ABC na boku AC obrano punkt D, a na boku AB punkt E tak, że $|CD| = |AE|$. Na boku BC obrano punkt F, zaś na boku AB punkt G tak, że $|CF| = |BG|$. Odcinki EF i DG przecinają się w punkcie H. Pokaż, że

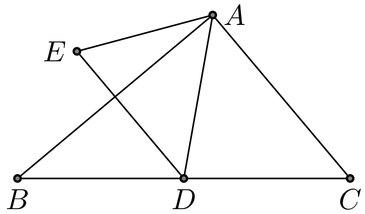
(a) $\triangle BEF \equiv \triangle AGD$,

(b) $\sphericalangle EHG = 60°$

(c) czworokąt $BFHG$ można wpisać w okrąg,

25. W czworokącie $ABCD$ na rysunku obok $|DC| = |CB|$, kąty DAB i DCB są proste. Wyznacz $\sphericalangle DAC$.





26. Na rysunku obok $|DB| = |DE| = |DC|$, $\sphericalangle ACB = 50°$, $\overline{BA} \perp \overline{AC}$, $\sphericalangle ADE = \sphericalangle EDB$. Wyznacz $\sphericalangle EAB$.

27. Dwa okręgi przecinają się w punktach M i K. Przez punkty te prowadzimy proste, odpowiednio l_{AB} i l_{CD}, które przecinają pierwszy okrąg w punktach A i C, a drugi okrąg w dwóch różnych punktach B i D. Pokaż, że $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$. Rozważ dwa przypadki: 1) odcinki AB i CD nie przecinają się, 2) odcinki AB i CD przecinają się

28.* Dwusieczna kąta zewnętrznego przy wierzchołku C trójkąta ABC przecina okrąg opisany w punkcie D. Pokaż, że $AD = BD$.

29.* Dwa okręgi przecinają się w punktach A i B. Przez punkt K leżący na pierwszym okręgu prowadzimy proste KA i KB, które przecinają drugi okrąg odpowiednio w punktach P i Q. Niech M będzie środkiem pierwszego okręgu. Pokaż, że $\overline{KM} \perp \overline{PQ}$.

30.* Niech ABC będzie trójkątem równoramiennym o podstawie $\overline{AB}$, w którym $\sphericalangle C = \gamma < 90°$. Niech H_a, H_b, H_c będą spodkami wysokości wchodzących odpowiednio z wierzchołków A, B, C, zaś H niech będzie punktem przecięcia tych wysokości. Uzasadnij, że punkty C, H_b, H, H_a leżą na jednym okręgu. Niech O będzie środkiem tego okręgu. Pokaż, że $\sphericalangle OH_bH_c = 90°$. Dla jakiego γ czworokąt $OH_bH_cH_a$ jest kwadratem?

Wskazówki i odpowiedzi.

1. $\sphericalangle C = 120°$, $\sphericalangle A = 60°$, $\sphericalangle B = 45°$, $\sphericalangle D = 135°$

2. $\sphericalangle DCB = \sphericalangle CBA = 135°$, $\sphericalangle CDA = \sphericalangle DAB = 45°$

3. a) $\sphericalangle ADC = 108°$, $\sphericalangle CBA = 72°$, $\sphericalangle DCB = 98°$, $\sphericalangle DAB = 82°$
b) $\sphericalangle DCB = 105°$, $\sphericalangle ABC = 85°$, $\sphericalangle DAB = 75°$, $\sphericalangle ADC = 95°$

4. a) w $ABCD$: $\sphericalangle ABC = 70°$, $\sphericalangle DAB = 60°$, $\sphericalangle DCB = 120°$,
w trójkącie ABC: $90°, 70°, 20°$
w trójkącie ACD: $110°, 30°, 40°$,
w trójkącie ABD: $90°, 60°, 30°$,
w trójkącie BCD: $40°, 120°, 20°$
b) w $ABCD$ $\sphericalangle DCB = 115°$, $\sphericalangle ADC = 130°$, $\sphericalangle DAB = 65°$,
w trójkącie ABC: $40°, 90°, 50°$,
w trójkącie ACD: $25°, 130°, 25°$
w trójkącie ABD: $90°, 65°, 25°$,
w trójkącie BCD: $25°, 115°, 40°$

5. a) tak, b) nie

6. a) czw. $\sphericalangle A = 64°$, $\sphericalangle B = 48°$, $\sphericalangle C = 116°$, $\sphericalangle D = 132°$
tr. $\sphericalangle D = 132°$, $\sphericalangle C = 26°$, $\sphericalangle A = 22°$,
b) w czw. $\sphericalangle A = 60°$, $\sphericalangle B = 45°$, $\sphericalangle C = 120°$, $\sphericalangle D = 135°$,
w trójk. $\sphericalangle A = 30°$, $\sphericalangle C = 15°$, $\sphericalangle D = 135°$
c) w czw. $\sphericalangle A = 75°$, $\sphericalangle B = 50°$, $\sphericalangle C = 105°$, $\sphericalangle D = 130°$
w trójk. $\sphericalangle A = 35°$, $\sphericalangle C = 15°$, $\sphericalangle D = 135°$

7. $\sphericalangle CAD = 40°$

8. $\sphericalangle ACD = 40°$

9. $\sphericalangle BEA = 45°$

10. $\sphericalangle ABC = 120°$

13. $\triangle ACD$: $25°, 47°, 108°$;
$\triangle BCD$: $25°, 47°, 108°$;
$\triangle CDE$: $47°, 47°, 86°$;
$\triangle AED$: $94°, 61°, 25°$;
$\triangle ABC$: $61°, 47°, 72°$

14. $10°$, $20°$, $90°$.

15. $P = 3\sqrt{3}$

16. $r = 8$, $60°, 120°$

17. $\sphericalangle BAD = \alpha + \beta$

20. a) $2\sqrt{5}$, b) 8, c) $2\frac{1}{2}$

25. $\sphericalangle DAC = 45°$

26. $\sphericalangle EAB = 25°$

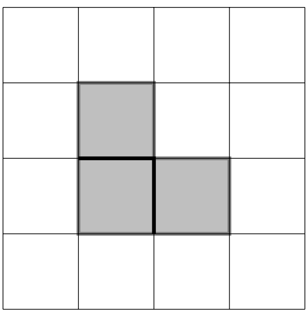
30. dla $\gamma = 45°$

Rozdział 14

SYMETRIE.

W poniższych ćwiczeniach

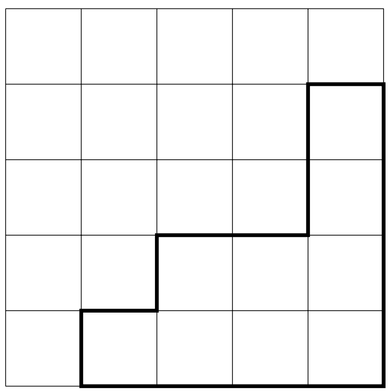
- dorysowywane kwadraty mają mieć bok o długości 1,
- nie muszą dotykać narysowanej już figury
- muszą należeć do już narysowanej siatki



1. Figura na rysunku obok zbudowana jest z 3 kwadratów. Ma ona jedną oś symetrii. Na ile sposobów można do niej dorysować jeszcze jeden kwadrat o bokach należących do narysowanej już siatki 4×4, tak aby uzyskana figura miała:
a) dokładnie jedną oś symetrii,

b) więcej niż jedną oś symetrii,

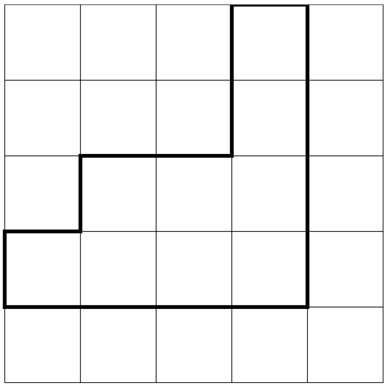
c) środek symetrii.



2. Figura na rysunku obok zbudowana jest z 9 kwadratów.

a) Ile kwadratów wystarczy dorysować, aby nowo powstała figura miała oś symetrii?

b) Na ile sposobów można dorysować 2 kwadraty, tak aby nowo powstała figura miała oś symetrii?

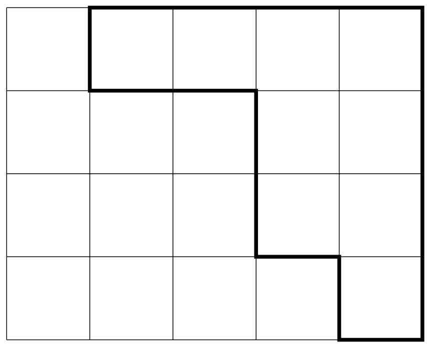


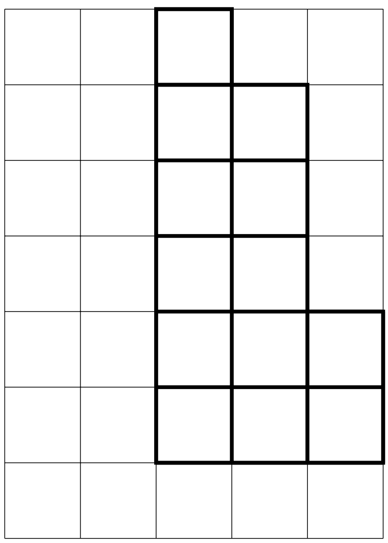
3. Figura na rysunku obok zbudowana jest z 9 kwadratów.

a) Ile kwadratów o bokach należących do narysowanej już siatki wystarczy dorysować, aby uzyskana figura miała oś symetrii?

b) Na ile sposobów można do niej dorysować 3 kwadraty, tak aby uzyskana figura miała oś symetrii?

4. Figura na rysunku obok zbudowana jest z 9 kwadratów. Na ile sposobów można do niej dorysować 5 kwadratów, tak aby uzyskana figura miała oś symetrii?



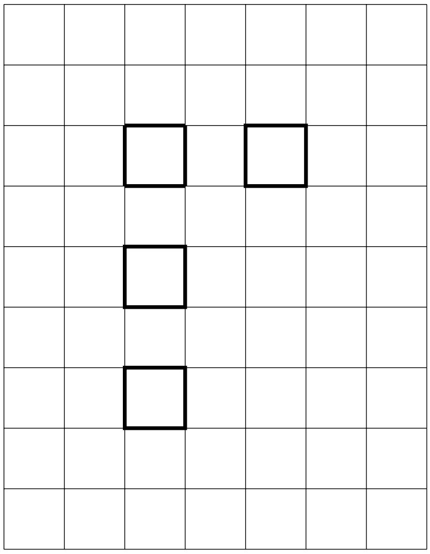


5. Figura na rysunku obok składa się z 13 kwadratów.

a) Dorysuj na dwa sposoby 3 kwadraty, tak aby uzyskana figur miała oś symetrii.

b) Dorysuj trzy kwadraty tak, aby uzyskana figura miała środek symetrii.

6. Figura na rysunku poniżej składa się z 4 kwadratów.



a) Dorysuj na 3 sposoby 1 kwadrat, tak aby uzyskana figura miała oś symetrii.

b) Dorysuj 2 kwadraty tak, aby uzyskana figura miała oś symetrii. Spróbuj policzyć na ile sposobów można to zrobić.

c) Dorysuj jeden kwadrat tak, aby uzyskana figura miała środek symetrii. Gdzie znajduje się środek symetrii tej nowo powstałej figury?

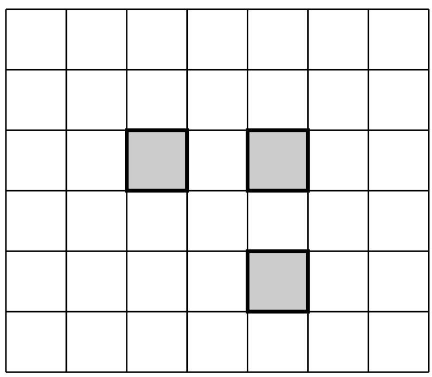
d) Dorysuj dwa kwadraty tak, aby uzyskana figura miała środek symetrii. Na ile sposobów można to zrobić?

7. Figura na rysunku poniżej składa się z 3 kwadratów.

a) Na ile sposobów można dorysować jeden kwadrat, tak aby uzyskana figur miała oś symetrii?

b) Na ile sposobów można dorysować jeden kwadrat tak, aby uzyskana figura miała środek symetrii? Gdzie jest położony (w każdym przypadku) ten środek symetrii?

c) Na ile sposobów można dorysować dwa kwadraty tak, aby uzyskana figura miała zarówno środek jak i oś symetrii.



8. Ile osi symetrii ma

a) trójkąt równoboczny?

b) kwadrat?

c) prostokąt nie będący kwadratem?

d) romb nie będący kwadratem?

e) trójkąt równoramienny nie będący trójkątem równobocznym?

f) okrąg?

g) okrąg z wyciętym jednym punktem?

h) odcinek?

i) prosta?

9. Czy ma środek symetrii figura (a jeśli tak, to gdzie on jest położony)

a) kwadrat

b) prostokąt nie będący kwadratem

c) romb nie będący kwadratem

d) trójkąt równoboczny

e) odcinek

f) okrąg

g) koło z którego usunięto jedną średnicę

h) prosta

10. Wypisz drukowane litery alfabetu łacińskiego, które mają oś symetrii.

11. Wypisz drukowane litery alfabetu łacińskiego, które mają środek symetrii.

12. Wypisz te cyfry, które mają oś symetrii.

13. Wypisz liczby 3-cyfrowe, które mają dwie osie symetrii.

14. Ile osi symetrii może mieć figur złożona z dwóch okręgów o różnych promieniach? Rozpatrz różne przypadki.

15. Ile osi symetrii może mieć figura złożona z okręgu i prostej. Rozpatrz różne przypadki.

16. Punkt M leży wewnątrz kąta ostrego o mierze α. B i C są punktami symetrycznymi do punktu M względem ramion tego kąta. Wyznacz miarę kąta BAC.

17. Punkt M jest dowolnym punktem wewnątrz kwadratu o boku długości a. Punkty A, B, C, D są punktami symetrycznymi do punktu M względem prostych zawierających boki kwadratu.
a) Wyznacz długość przekątnych czworokąta $ABCD$.
b) Wyznacz pole czworokąta $ABCD$.

18. Narysuj dowolny równoległobok i znajdź figurę do niego symetryczną względem prostej
a) zawierającej jeden z boków równoległoboku,
b) zawierającej przekątną równoległoboku,
c) przechodzącej przez jeden z wierzchołków,
d) przecinającej dwa sąsiednie boki,
e) prostopadłej do dwóch równoległych boków.

19. Narysuj trójkąt równoboczny o boku długości 3. Wykreśl trójkąt symetryczny do trójkąta ABC względem prostej zawierającej jeden z boków trójkąta. Oblicz obwód otrzymanego czworokąta.

20. Narysuj trójkąt egipski (prostokątny o bokach długości 3, 4, 5). Wykreśl trójkąty symetryczne do danego trójkąta względem prostych zawierających boki trójkąta. Oblicz obwód otrzymanego czworokąta $AB'A'BC'A$.

21. Dany jest trapez prostokątny $ABCD$ o podstawach AB i CD. Kąt przy wierzchołku D jest prosty, zaś $|AB| = 5$, $|CD| = 3$, $|AD| = 2$. Wykreśl trapez symetryczny do danego względem prostej zawierającej
a) podstawę dolną,
b) podstawę górną,
c) ramię AD.

22. Trójkąt ostrokątny ABC ma obwód d. Odbijamy ten trójkąt symetrycznie względem jego boków uzyskując sześciokąt $B'CA'BC''A$. Wyznacz obwód tego sześciokąta.

Odpowiedzi i wskazówki

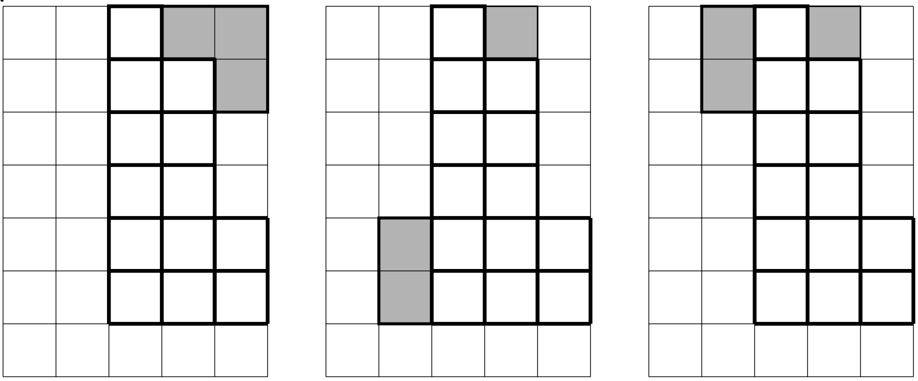
1. a) 4 b) 1 c) 3

2. a) 1 b) 2

3. a) 1, b) 10

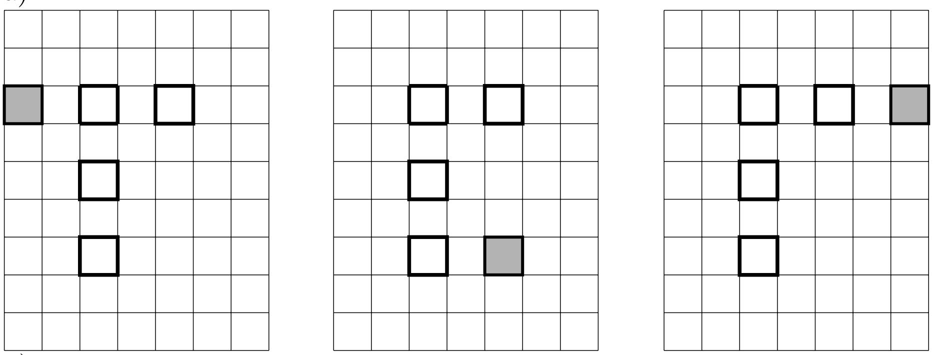
4. 10

5.



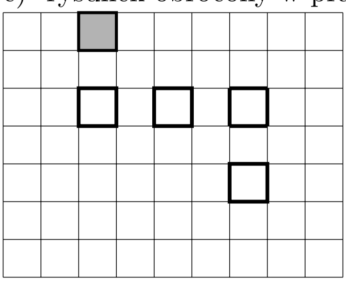
6.

a)

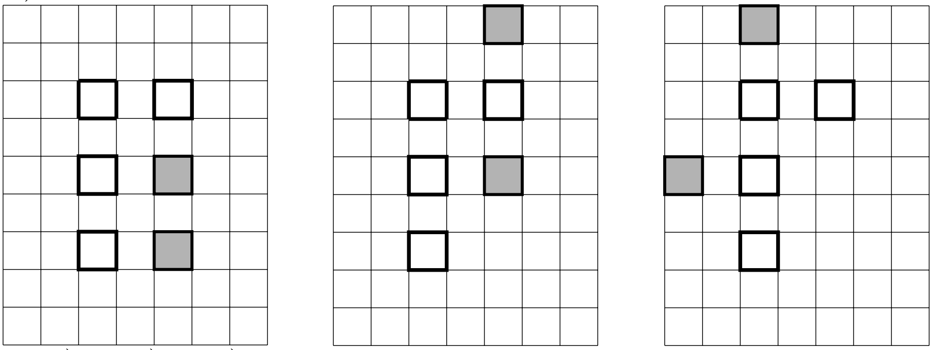


b) 18

c) rysunek obrócony w prawo o 90°



d)



7. a) 7, b) 3, c) 2

8. a) 3, b) 4, c) 2, d) 2, e) 1, f) nieskończenie wiele, g) 1, h) 2, i) nieskończenie wiele

9. a) tak, b) tak, c) tak, d) nie, e) tak, f) tak, g) tak

10. A, B, C, D, E, H, I, K, M, O, U, V, W, X

11. H, I, O, S, X, Z

12. 0, 8

13. 808, 888

14. jedną lub nieskończenie wiele

15. jedną lub dwie

16. 2α

17. a) $2a$, b) $2a^2$