LIGA MATEMATYCZNA
im. Zdzisława Matuskiego
GRUDZIEŃ 2014
SZKOŁA PONADGIMNAZJALNA

ZADANIE 1.
W trójkącie równoramiennym ABC ($|AC| = |BC|$) na boku AC obrano punkt D. Na trójkątach ABD i DBC opisano okręgi o_1 oraz o_2. Styczna do okręgu o_1 w punkcie D przecina okrąg o_2 w punkcie M. Wykaż, że prosta CM jest równoległa do prostej AB.

ZADANIE 2.
Znajdź liczby naturalne a, b, których najmniejsza wspólna wielokrotność jest równa 630, a największy wspólny dzielnik 18, wiedząc, że te liczby nie dzielą się przez siebie.

ZADANIE 3.
Oblicz sumę

$$\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt{7-2\sqrt{12}}+\ldots+\sqrt{4029-2\sqrt{2014\cdot 2015}}.$$

ZADANIE 4.
Dodatnie liczby a, b, c spełniają warunki $a+b+c=9$ oraz $\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}=\frac{10}{9}$. Oblicz

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}.$$

ZADANIE 5.
W kwadracie o boku 2 wybrano w sposób dowolny 9 punktów. Wykaż, że istnieje taka trójka punktów wśród nich, że pole figury, której wierzchołkami są te trzy punkty nie przekracza $\frac{1}{2}$.