

**AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA**  
**im. Stanisława Staszica w Krakowie**  
**OLIMPIADA „O DIAMENTOWY INDEKS AGH” 2022/23**

**MATEMATYKA - ETAP I**

**ZADANIA PO 10 PUNKTÓW**

1. W prostokącie  $ABCD$  wierzchołek  $A$  połączono odcinkami ze środkami boków  $BC$  i  $CD$ . Udowodnij, że te odcinki dzielą przekątną  $BD$  na trzy odcinki równej długości.
2. Oblicz sumę stu największych ujemnych rozwiązań równania

$$4 \cos 2x - \sin 4x = 4 \cos^3 2x.$$

3. Rozwiąż równanie

$$\sqrt[6]{-x^2 + 5x - 6} = \sqrt[4]{x^3 - 4x^2 + x + 6}.$$

4. W wypukłym pięciokącie  $ABCDE$  każda przekątna odcina trójkąt o polu równym 1. Oblicz pole tego pięciokąta.

**ZADANIA PO 20 PUNKTÓW**

5. Znajdź równanie stycznej do paraboli  $y = 2 - x^2$ , która ogranicza wraz z dodatnimi półosiami układu współrzędnych trójkąt o najmniejszym polu.
6. Niech  $S$  będzie zbiorem wszystkich ciągów  $(a, b, c, d, e)$  o wyrazach należących do zbioru liczb  $\{0, 1, \dots, 9\}$ . Ile jest w zbiorze  $S$  ciągów
  - a) malejących?
  - b) których iloczyn  $abcde$  jest liczbą parzystą?
  - c) w których suma cyfr iloczynu  $abcde$  w zapisie dziesiętnym jest podzielna przez 9?
7. Znajdź równania prostych stycznych do okręgu  $x^2 + y^2 + 4x - 12 = 0$  i jednocześnie do jego obrazu w symetrii osiowej względem prostej  $2x - 3y - 22 = 0$ .