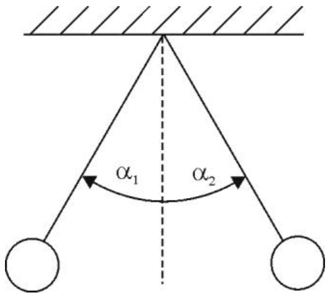
III Elektryczność i magnetyzm

14. Pole elektryczne, kondensatory, przewodniki i dielektryki.

Wybór i opracowanie zadań 14.1. – 14.53.: Andrzej Kuczkowski.

14.1. Dwie niewielkie, przewodzące kulki o masach równych odpowiednio m_1 i m_2 naładowane ładunkami q_1 i q_2 zawieszone są na równych niciach o długości l (jak na rysunku).



(a) Jakie warunki muszą spełniać masy m_1 i m_2 oraz ładunki aby kąty odchylenia nici od pionu spełniały warunek: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$? (b) Oblicz sumaryczny ładunek obu kulek, jeżeli po naładowaniu kąt między nićmi wynosi 90^0 przy założeniu, że rozmiary i masy obu kulek są równe: $m_1 = m_2 = m = 0{,}1$ g długości nici: $l = 10$ cm, a kulki przed naładowaniem stykały się ze sobą.

14.2. Dwie niewielkie, przewodzące kulki o jednakowych rozmiarach i ciężarach: $G = 0{,}05$ N zawieszono na równych niciach o długościach: $l = 10$ cm tak, że powierzchnie stykały się. Jakim ładunkiem q_c należy naładować kulki aby naprężenie nici N wynosiło 0,1 N?

14.3. Czy dwa rozciągłe, przewodzące ciała naładowane ładunkami jednoimiennymi, będą zawsze się odpychały?

14.4. Jak należy rozdzielić ładunek Q na dwie kulki, aby siła wzajemnego oddziaływania między kulkami była największa? Oblicz wartość tej siły.

14.5. Jaś zrobił sobie smalec ze skwarkami i stopiony, jeszcze przed wlaniem do słoiczka, posolił. Niestety sól nie rozpuściła się w tłuszczu i opadła na dno patelni. Spróbuj wyjaśnić Jasiowi dlaczego tak się stało.

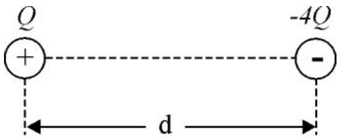
14.6. Czy można bezpośrednio posłużyć się prawem Coulomba w celu obliczenia siły, z jaką przyciągają się okładki naładowanego kondensatora?

14.7. Oblicz siłę działającą na punktowy ładunek $q = 5\cdot10^{-9}$ C, znajdujący się w środku równomiernie naładowanego ładunkiem $Q = 3\cdot10^{-7}$ C półokręgu o promieniu $R = 5$ cm.

14.8. Cztery jednakowe ładunki Q umieszczono w wierzchołkach kwadratu. Gdzie i jaki ładunek q należy umieścić, aby układ znalazł się w równowadze? W jakiej równowadze znajdują się ładunki?

14.9. Pole elektryczne jest wytwarzane przez trzy ładunki Q, $2Q$ i $-3Q$, umieszczone w wierzchołkach trójkąta równobocznego o boku a. Oblicz potencjał w środku odcinka łączącego ładunki Q i $2Q$.

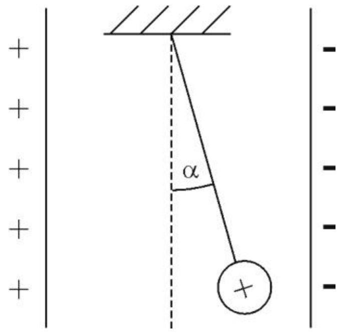
14.10. Na końcach odcinka o długości d znajdują się ładunki $Q > 0$ i $-4Q$.



W jakich punktach prostej przechodzącej przez ładunki: (a) natężenie pola równa się zeru, (b) potencjał pola równa się zeru, (c) występuje minimum (lokalne) potencjału?

14.11. Potencjał w pewnym punkcie pola pochodzącego od ładunku punktowego wynosi V = 600 V, a natężenie pola wynosi E = 200 N/C. Oblicz wielkość ładunku i odległość tego punktu od ładunku. Przyjmij $\varepsilon_r = 1$.

14.12. Mała kulka o masie m = 0,2 g wisi na nici między dwiema naładowanymi płytami. Kulka naładowana jest ładunkiem $q = 6{\cdot}10^{-9}$ C.



Ile wynosi różnica potencjałów między płytami, jeżeli nić tworzy z pionem kąt $\alpha = 10^0$, a odległość między płytami d = 0,1 m?

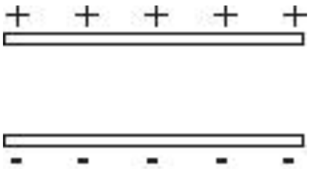
14.13. Narysuj linie sił pola elektrycznego oraz powierzchnie stałego potencjału dla przedstawionych poniżej układów ładunków elektrycznych:

(a)

(b)

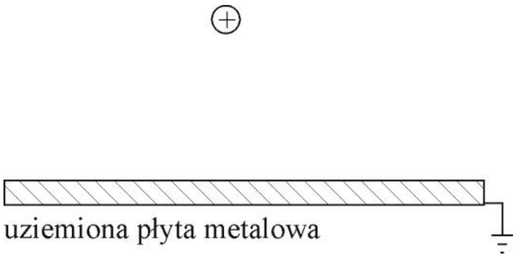
(c)

(d)

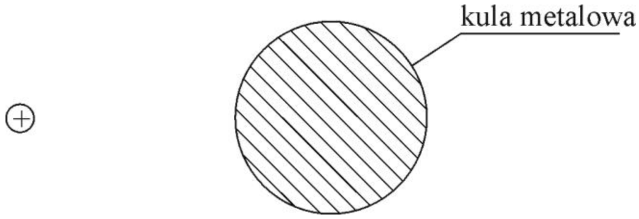


14.14. Jak wpływają przedmioty przewodzące na rozkład pola elektrycznego? Narysuj linie sił pola elektrycznego i powierzchnie ekwipotencjalne dla poniższych układów:

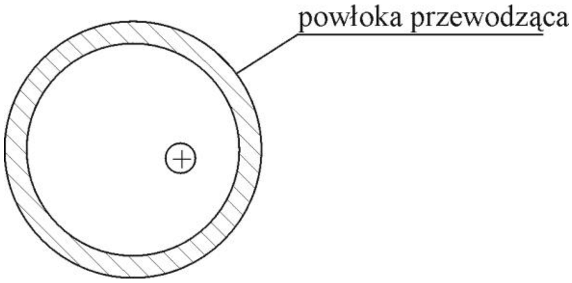
(a)



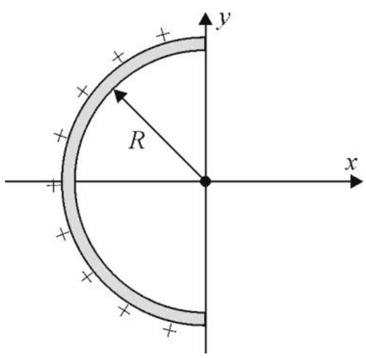
(b)



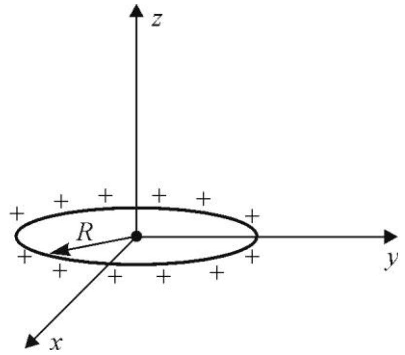
(c)



15.15. Oblicz potencjał i natężenie pola elektrycznego w środku półpierścienia o promieniu R naładowanego równomiernie ładunkiem Q.



14.16. Druciany pierścień o promieniu *R* naładowany jest równomiernie ładunkiem *Q*. Oblicz i wykreśl zależność potencjału i natężenia pola elektrycznego od tego pierścienia dla punktów znajdujących się na osi prostopadłej do powierzchni pierścienia. Wartości natężenia pola elektrycznego wyznacz dwoma metodami: (a) metodą superpozycji pól oraz (b) ze związku $\vec{E} = -gradV$.



14.17.* Oblicz natężenie pola elektrycznego na symetralnej odcinka o długości $2a$ naładowanego ze stałą gęstością ładunku liniowego λ. Wykaż, że pole to staje się w granicznych przypadkach polem elektrycznym: (a) nieskończenie długiego przewodnika, (b) ładunku punktowego.

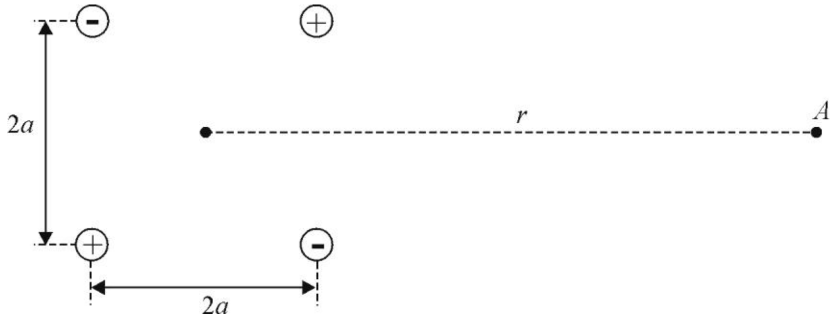
14.18.* Oblicz potencjał i natężenie pola elektrycznego na osi symetrii prostopadłej do powierzchni naładowanego ładunkiem *Q* krążka o promieniu *R*. Wykaż, że pole to staje się w skrajnym przypadku polem elektrycznym: (a) płaszczyzny nieskończonej, (b) ładunku punktowego.

14.19.* Potencjał pola elektrycznego określony jest równaniem: $V = a(x^2+y^2)+bz^2$, gdzie $a > 0$, $b > 0$. (a) Jaki jest kształt powierzchni ekwipotencjalnych? (b) Wyznacz wektor natężenia pola elektrycznego $\vec{E}$ i jego moduł *E*. (c) Jaki jest kształt powierzchni, na których $E = const$? (d) Jaki kształt będą miały powierzchnie ekwipotencjalne gdy potencjał będzie określony równaniem: $V = a(x^2+y^2)-bz^2$ gdzie $a > 0$, $b > 0$?

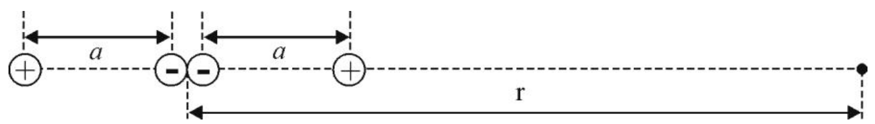
14.20. Korzystając z zasady superpozycji oddziaływań, oblicz potencjał i natężenie pola elektrycznego od układu dwóch ładunków $+Q$ i $-Q$ odległych od siebie o *d* (dipol elektryczny) w odległości *r* od środka dipola: (a) na symetralnej odcinka łączącego obydwa ładunki, (b) na prostej łączącej obydwa ładunki.

14.21.* Oblicz potencjał i wartości bezwzględne natężenia pola elektrycznego dipola o momencie *p* jako funkcję *r* i ϕ, gdzie *r* oznacza odległość od środka a ϕ kąt między osią dipola i prostą łączącą środek dipola z danym punktem.

14.22. Układ czterech ładunków q rozmieszczonych w narożach kwadratu o boku $2a$ jak na rysunku tworzy kwadrupol. Oblicz potencjał i natężenie pola elektrycznego w punkcie leżącym w odległości $r > a$ od środka kwadrupola (patrz rysunek):



14.23. Kwadrupolem <u>liniowym</u> nazywamy układ czterech ładunków q umieszczonych na jednej prostej, jak na rysunku. Układ ten możemy traktować jako składający się z dwóch stykających się dipoli. Oblicz potencjał i natężenie pola elektrycznego na osi kwadrupola w odległości $r >> a$.



14.24. W jednorodnym polu elektrycznym o natężeniu $E = 2 \cdot 10^3$ V/m znajduje się dipol elektryczny o momencie dipolowym $p = 5 \cdot 10^{-3}$ $C \cdot m$. Narysuj siły działające na dipol oraz oblicz moment tych sił, jeżeli oś dipola tworzy z polem elektrycznym kąt $\alpha = 30^0$.

14.25 Dipol o momencie $p = 5 \cdot 10^{-3}\, C \cdot m$ znajduje się w niejednorodnym polu elektrycznym o gradiencie $\frac{\Delta E}{\Delta x} = 1\frac{V}{m^2}$. Oblicz siłę wywieraną przez pole na dipol w tym polu.

14.26 Na dipol elektryczny w <u>niejednorodnym</u> polu elektrycznym działa siła wciągająca lub wypychająca go z pola w zależności od ustawienia dipola. Wyjaśnij, dlaczego skrawki papieru są zawsze przyciągane do naelektryzowanej pałeczki.

14.27. W polu elektrycznym wytworzonym przez punktowy ładunek q w odległości r od niego znajduje się dipol elektryczny o momencie p. Oblicz siłę, jakiej doznaje dipol od ładunku punktowego, w przypadku, gdy ładunek q znajduje się: (a) na osi dipola, (b) na symetralnej dipola.

14.28. Wyznaczyć wartość momentu siły działającego na dipol o momencie dipolowym p umieszczony w odległości r od bardzo dużej okrągłej płyty metalowej o promieniu R ($R >> r$) naładowanej ładunkiem ujemnym o gęstości powierzchniowej $-\sigma$. Dipol jest ustawiony pod kątem 45^0 do płyty.

14.29. Korzystając z prawa Gaussa, wyznaczyć natężenie pola elektrycznego wytworzonego przez płaszczyznę naładowaną równomiernie ładunkiem o gęstości powierzchniowej σ.

14.30. Nieprzewodzącą kulę o promieniu R naładowano jednorodnie ładunkiem o gęstości objętościowej ρ. Oblicz zależność potencjału i natężenia pola elektrycznego w funkcji odległości od środka kuli. Przedstaw graficznie otrzymane zależności. Przyjmij $\varepsilon_r = 1$ wewnątrz kuli.

14.31. Metalową kulę o promieniu R naładowano ładunkiem q. (a) Oblicz i wykreśl zależność potencjału i natężenia pola elektrycznego w funkcji odległości od środka kuli. (b) Jak zmieni się rozkład pola elektrycznego, gdy zamiast metalowej, użyjemy kuli z dielektryka naładowanej powierzchniowo ładunkiem q.

14.32. Nieskończenie długą prostą nić znajdującą się w próżni naładowano ze stałą gęstością liniową ładunku $\lambda = 2{\cdot}10^{-6}$C/m. (a) Wyznacz moduł natężenia pola E i potencjał V jako funkcję odległości r od nici. (b) Oblicz E i V dla $r = 10$m.

14.33. Ładunki o przeciwnych znakach są rozłożone ze stałymi gęstościami powierzchniowymi $+\sigma$ i $-\sigma$ odpowiednio na dwóch metalowych płaszczyznach nieskończonych, równoległych względem siebie i odległych o d. (a) Oblicz i wykreśl zależność potencjału i natężenia pola elektrycznego w funkcji odległości między płytami. (b) Jak zmieni się rozkład pola, gdy jedną z płyt połączymy z ziemią?

14.34. Oblicz pojemność odosobnionej kulki metalowej o promieniu R.

14.35. Oblicz, korzystając z definicji pojemności elektrycznej, pojemność kondensatora: (a) płaskiego, (b) kulistego, (c) walcowego.

14.36. Płaski kondensator naładowano do napięcia U_0 i odłączono od źródła. Jak zmieni się: (a) napięcie na kondensatorze, (b) natężenie pole elektrycznego, (c) ładunek na okładkach, jeżeli okładki zsuniemy na n razy mniejszą odległość?

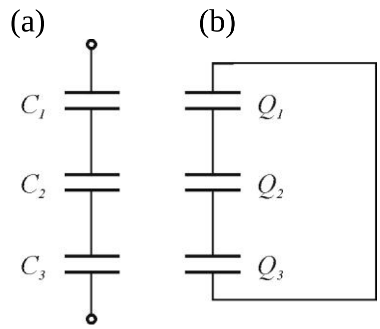
14.37. Płaski kondensator połączono z biegunami akumulatora o sile elektromotorycznej $\mathcal{E}$. Jak zmieni się ładunek Q na kondensatorze, jeżeli zsuniemy okładki na n razy mniejszą odległość? Jak zmieni się wówczas natężenie pola elektrycznego?

14.38. Do dwóch szeregowo połączonych kondensatorów o pojemnościach $C_1 = 100$pF i $C_2 = 200$pF przyłożono stałe napięcie $U = 300$V. Oblicz napięcia U_1 i U_2 na kondensatorach i ładunki q_1 i q_2 na ich okładkach. Jaka jest pojemność C tego układu?

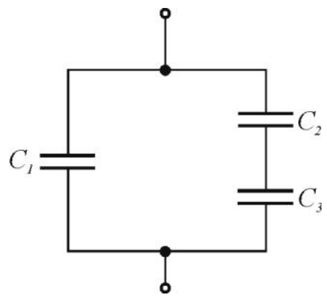
14.39. Płaski kondensator powietrzny, o odległości między okładkami d, naładowano ładunkiem Q. (a) Jak zmieni się natężenie pola elektrycznego po wprowadzeniu między okładki, równolegle do nich, metalowej płytki o grubości l? Powierzchnie okładek i płytki wynoszą S. (b) Oblicz pojemność C układu z płytką. (c) Jak zmieni się napięcie między okładkami w wyniku wprowadzenia płytki?

14.40. Kulka rtęci, naładowana do potencjału V, podzieliła się na dwie kulki, z których jedna ma n razy większą objętość od drugiej. Do jakich potencjałów będą naładowane te kulki?

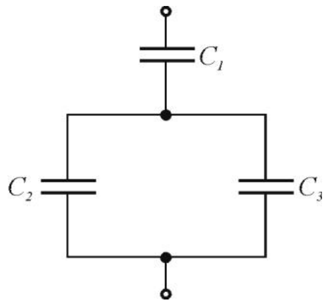
14.41. Każdy z trzech kondensatorów o pojemnościach C_1, C_2, C_3 naładowano do napięcia U i następnie, po odłączeniu źródła napięcia, wszystkie połączono szeregowo (rys. a) Oblicz ładunki Q_1, Q_2, Q_3 na okładkach kondensatorów tak otrzymanego układu kondensatorów po zwarciu ich przewodnikiem (rys. b).



14.42. Trzy kondensatory o pojemnościach C_1, C_2, i C_3 połączono jak na rysunku i naładowano ładunkiem Q. Oblicz ładunki na okładkach każdego z kondensatorów.



14.43. Trzy kondensatory o pojemnościach C_1, C_2, i C_3 połączono jak na rysunku i naładowano ładunkiem Q. Oblicz ładunki na okładkach każdego z kondensatorów.



14.44. Ile razy trwały moment dipolowy cząsteczki tlenku węgla CO, który wynosi $p_0 = 0{,}37\cdot10^{-30}$ C·m, jest większy od momentu dipolowego indukowanego w tej cząsteczce przez zewnętrze pole elektryczne o natężeniu $E = 10^4$ V/cm? Średnia polaryzowalność elektronowa cząsteczki CO wynosi $\alpha = 2{,}2\cdot 10^{-40}$ F·m^2.

14.45. W odległości $r = 15\cdot10^{-10}$ m od atomu argonu znajduje się elektron. Oszacuj moment dipolowy indukowany w atomie argonu przez pole elektryczne elektronu. Polaryzowalność elektronowa atomu argonu wynosi $\alpha = 1{,}8\cdot10^{-40}$ F·m^2.

14.46. Momenty dipolowe molekuł równają się sumie wektorowej odpowiednich momentów dipolowych wiązań. Oblicz moment dipolowy wiązania OH w molekule wody, jeżeli moment dipolowy molekuły wody równa się $6{,}2\cdot10^{-30}$ C·m, a kąt między wiązaniami OH wynosi 104^0.

14.47. Stała elektryczna diamentu wynosi ε = 1,46·10^{-10} C^2/(N·m^2). Znajdź względną przenikalność ε_r i podatność dielektryczną χ diamentu. Ile wynosi polaryzowalność jednostki objętości i jednego mola diamentu? Gęstość diamentu ρ = 3,51 g/cm^3, masa molowa μ = 12 g/mol. Skorzystaj ze wzorów na wektor polaryzacji: $\vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E} = n_0\alpha\vec{E}$, gdzie n_0 oznacza koncentrację dipoli.

14.48. Jak zmieni się: (a) pojemność elektryczna, (b) ładunek na okładkach, (c) napięcie, (d) natężenie pola elektrycznego, jeżeli między elektrody kondensatora płaskiego o pojemności C_0 wsuniemy dielektryk o przenikalności ε_r i grubości d równej odległości między okładkami kondensatora? Rozpatrzyć dwa przypadki: (I) Kondensator po naładowaniu do napięcia U_0 odłączono od źródła. (II) Kondensator jest cały czas podłączony do źródła o napięciu U_0.

14.49. Kondensator płaski, którego okładki są oddalone o l = 1cm wypełniony jest olejem (ε_r = 5). Jakie napięcie należy przyłożyć do kondensatora, aby gęstość ładunków polaryzacyjnych na oleju wynosiła σ = 6,2·10^{-10} C/cm^2?

14.50. Płaski kondensator próżniowy naładowano tak, że natężenie pola wynosi w nim E_0 = 100 MV/m. Następnie wypełniono go dielektrykiem, którego drobiny są sztywnymi dipolami o momencie p_e = 0,5·10^{-29} C·m. Koncentracja dipoli n = 10^{26} m^{-3}. Oblicz średnią wartość natężenia pola elektrycznego wewnątrz dielektryka, pomijając wpływ ruchów cieplnych drobin.

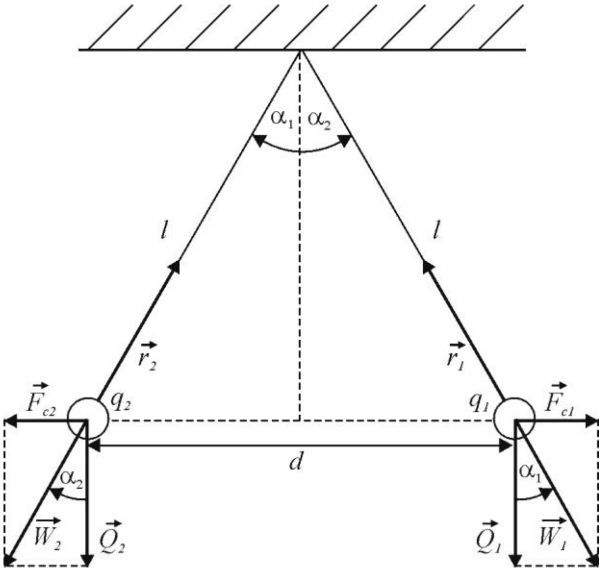
14.51. Oblicz gęstość ładunków polaryzacyjnych na powierzchni płytki mikowej (ε_r = 7) o grubości l = 0,2 mm, wypełniającej całkowicie płaski kondensator naładowany do napięcia U_0 = 400 V. Jak i o ile zmieni się napięcie na kondensatorze po wyjęciu płytki?

14.52. Płaski kondensator powietrzny, o pionowo ustawionych okładkach odległych o d, naładowano i zanurzono częściowo w cieczy o względnej przenikalności dielektrycznej ε_r. Oblicz stosunek ładunków elektrycznych i natężeń pól elektrycznych w obu częściach kondensatora, jeżeli wysokość okładek wynosi H, a wysokość zanurzonej części jest h.

14.53. Płaski kondensator o powierzchni elektrod S = 100 cm^2 oddalonych od siebie o d = 1 cm naładowano do napięcia U_0 = 100 V i odłączono od źródła. Następnie obszar między okładkami kondensatora ściśle wypełniono dwiema płytkami dielektrycznymi o grubościach d_1 = 2 mm i d_2 = 8 mm, oraz stałych dielektrycznych ε_{r1} = 2 i ε_{r2} = 4. Oblicz: (a) Ładunek swobodny na okładkach kondensatora. (b) Wartości wektorów natężenia pola elektrycznego $\vec{E}$, indukcji elektrostatycznej $\vec{D}$ i polaryzacji elektrycznej $\vec{P}$ w obu dielektrykach. (c) Napięcie na kondensatorze po włożeniu płytki. (d) Pojemność kondensatora z obu dielektrykami.

Rozwiązania:

14.1.R.



(a) Jednoimiennie naładowane kulki odpychają się siłami $F_{c1} = F_{c2} = F_c$ (zgodnie z III zasadą dynamiki).

$$F_c = k\frac{q_1 q_2}{d^2},$$

gdzie:

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.$$

$$\left.\begin{aligned} tg\alpha_1 &= \frac{F_c}{Q_1} = \frac{F_c}{m_1 g} \\ tg\alpha_2 &= \frac{F_c}{Q_2} = \frac{F_c}{m_2 g} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\alpha_1 = \alpha_2$ wtedy, gdy
$m_1 = m_2 = m.$
Ładunki q_1 i q_2
mogą być różne.

(b) Ponieważ kąt $\alpha_1 + \alpha_2 = 2\alpha = 90^0$, więc kąt $\alpha = 45^0$, stąd:

$$(1) \qquad tg\alpha = tg45^0 = 1$$

$$(2) \qquad tg\alpha = \frac{F_c}{Q} = \frac{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{d^2}}{mg} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 mgd^2}.$$

Ładunki obu kulek są równe: $q_1 = q_2 = q$, bo kulki mają te same rozmiary, są przewodzące, oraz stykały się ze sobą przed naładowaniem.

Z równań (1) i (2) otrzymujemy:

$$(3) \qquad q^2 = 4\pi\varepsilon_0 mgd^2 .$$

Ponieważ $d = \sqrt{2} \cdot l$ (przekątna kwadratu), więc równanie (3) możemy zapisać w postaci:

$$q = 2l\sqrt{2\pi\varepsilon_0 mg} = 4{,}7 \cdot 10^{-6}\, C .$$

Sumaryczny ładunek obu kulek q_c równa się:

$$q_c = 2q = 9{,}4 \cdot 10^{-8}\, C .$$

14.2.R.

$$q_c = 2q = 2\frac{(N^2 - G^2)^{\frac{3}{4}}}{k^{\frac{1}{2}}} \frac{2l}{N} \approx 1{,}1 \cdot 10^{-6}\, C ,$$

gdzie:

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}$$

Wskazówka: Patrz rozwiązanie zad. 14.1. Skorzystaj z podobieństwa trójkątów sił i odległości oraz prawa Pitagorasa.

14.3.R. Nie. W przypadku przewodzących ciał rozciągłych, gdy ładunek jednego z ciał będzie znacznie większy od ładunku drugiego ciała, efekt indukcji elektrostatycznej (rozdzielenia ładunków w przewodniku pod wpływem pola elektrostatycznego) może być silniejszy i naładowane jednoimiennie ciała będą się przyciągały!

14.4.R.

$$q_1 = q_2 = \frac{Q}{2}$$

Wskazówka: Skorzystaj z warunku ekstremum siły coulombowskiej.

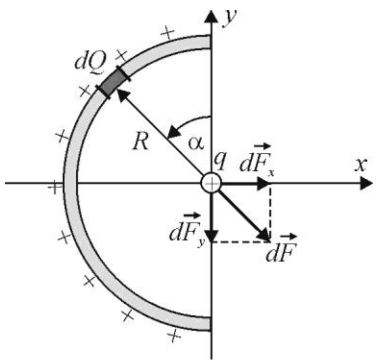
14.5.R. W soli występuje wiązanie jonowe. Zgodnie z prawem Coulomba, siła oddziaływania dwóch ładunków F_c równa się:

$$F_c = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \frac{q_1 q_2}{r^2} .$$

Dla tłuszczu $\varepsilon_r = 2$, w przeciwieństwie do wody, dla której $\varepsilon_r = 81$, dlatego też w wodzie następuje rozpuszczanie się soli, a w tłuszczu nie. Jest to interpretacja jakościowa. W ciele stałym o wiązaniu jonowym występują bardziej złożone oddziaływania.

14.6.R. Nie. Prawo Coulomba stosuje się ściśle tylko do ładunków punktowych. W przypadku przewodzących ciał rozciągłych, rzeczywiste oddziaływanie może różnić się nie tylko co do wartości, ale też co do znaku siły. Patrz przykład 14.3.

14.7.R.



Korzystamy z zasady superpozycji oddziaływań. Na długości *dl* półokręgu znajduje się ładunek punktowy *dQ*:

$$(1) \qquad dQ = \frac{Q}{\pi R} dl,$$

gdzie *dl* – element długości półokręgu.

Ładunek *q* w środku półokręgu doznaje oddziaływania od tego punktowego ładunku:

$$(2) \qquad dF = k\frac{q \cdot dQ}{R^2}.$$

Siłę *dF* możemy rozłożyć na dwie składowe: dF_x i dF_y. Składowe siły dF_y pochodzące od punktów położonych symetrycznie względem osi *x* będą się kompensowały. Dlatego też wypadkowa siła *F* będzie skierowana wzdłuż osi *x* i pochodzić będzie od składowych siły dF_x.

$$F = F_x = \int dF_x = \int_0^{\pi} dF \cdot \sin\alpha$$

Podstawiając za *dl*: $dl = R{\cdot}d\alpha$ we wzorze (1) i (2) otrzymamy:

$$F = \int_0^{\pi} k \frac{q\frac{Q}{\pi R} R \sin\alpha}{R^2} d\alpha = \frac{2k \cdot q \cdot Q}{\pi R^2} = 3{,}42 \cdot 10^{-3}\ N.$$

14.8.R. Układ znajduje się w równowadze, gdy w środku kwadratu umieścimy ładunek:

$$q = -\frac{Q}{4}(1 + 2\sqrt{2}).$$

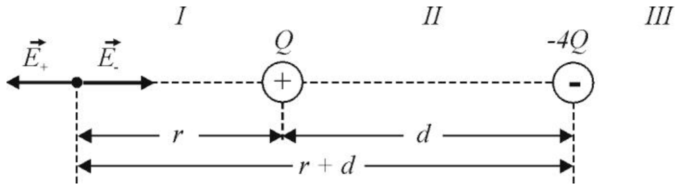
Będzie to równowaga chwiejna. Najmniejsze zakłócenie równowagi powoduje, że układ nie będzie już w równowadze.

14.9.R.

$$V = k\frac{2Q}{a}(3-\sqrt{3}),$$

gdzie: $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}$.

14.10.R.



(a) Oznaczając przez E_+ natężenie pola elektrycznego od ładunku dodatniego, a przez E_- natężenie pola elektrycznego od ładunku ujemnego, oraz przez r odległość od ładunku dodatniego, możemy stwierdzić, że natężenie wypadkowe może być równe zeru tylko w obszarze *I*. Dla tego obszaru:

$$E_+ = k\frac{Q}{r^2},$$

$$E_- = k\frac{4Q}{(r+d)^2}$$

i $E_+ = E_-$, czyli:

$$k\frac{Q}{r^2} = k\frac{4Q}{(r+d)^2}.$$

Stąd otrzymujemy równanie kwadratowe na r:

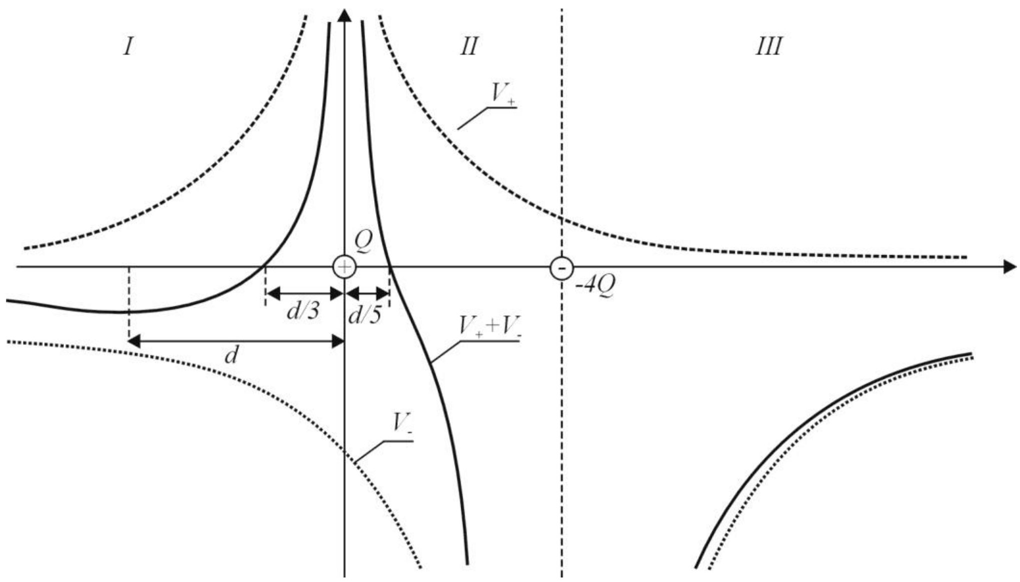
$$3r^2 - 2dr - d^2 = 0.$$

Z równania tego otrzymujemy dwa rozwiązania:

$$r_1 = d \qquad \text{i } r_2 = -\tfrac{1}{3}d,$$

czyli natężenie pola elektrostatycznego równe zero wystąpi z lewej strony ładunku Q w odległości $r = r_1 = d$. Drugie rozwiązanie $r = r_2 = -\frac{1}{3}d$ będzie odpowiadało położeniu na prawo od ładunku Q. W punkcie tym natężenia E_+ i E_- są również równe, lecz są zgodnie skierowane (sprawdź to!).

(b)



Korzystamy z zasady superpozycji pól:

$$V = V_+ + V_-,$$

gdzie:

$V_+ = k\dfrac{Q}{|r|}$ - wartość potencjału elektrycznego w punkcie odległym o r od ładunku Q,

$V_- = -k\dfrac{4Q}{|r'|}$ - wartość potencjału elektrycznego w punkcie odległym o r' od ładunku $-4Q$.

Wartość odległości r' związana jest z odległością r następującą zależnością:

$$r' = \begin{cases} |r| + d & w\ obszarze I \\ d - |r| & w\ obszarze\ II \\ |r| - d & w\ obszarze\ III \end{cases}$$

W dalszych rozważaniach zamiast $|r|$ będziemy pisać r pamiętając, że jest to wartość bezwzględna. W obszarze *I* wartość wypadkowego potencjału V wyraża się wzorem:

$$V = V_+ + V_- = k\frac{Q}{r} - k\frac{4Q}{r+d} = kQ\left(\frac{1}{r} - \frac{4}{r+d}\right)$$

$$V = 0 \Leftrightarrow r = \frac{d}{3}$$

w obszarze *II* zaś:

$$V = V_+ + V_- = k\frac{Q}{r} - k\frac{4Q}{d-r} = kQ\left(\frac{1}{r} - \frac{4}{d-r}\right)$$

$$V = 0 \Leftrightarrow r = \frac{d}{5}$$

Jak łatwo sprawdzić, w obszarze *III* wypadkowy potencjał nie przyjmuje wartości równej zeru.

(c) Minimum lokalne potencjału wypadkowego może wystąpić tylko w obszarze *I*. Korzystając z warunku ekstremum funkcji: $\frac{dV}{dr} = 0$, znajdujemy wartość odległości tego punktu od ładunku Q: $r = d$. Jest to równocześnie wartość odległości, w której $E = 0$. Wynika to ze związku $\vec{E} = -grad V$, który w przypadku jednowymiarowym wyraża się wzorem:

$$E = \frac{-dV}{dr}.$$

14.11.R.

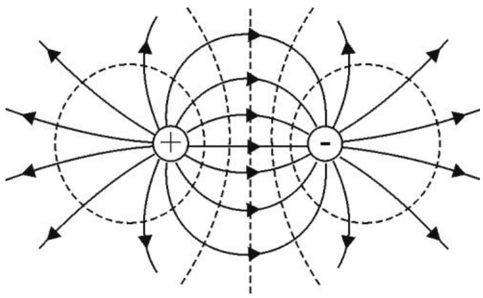
$$r = 3 \text{ m}, Q = 2 \cdot 10^{-7} \text{ C}.$$

14.12.R.

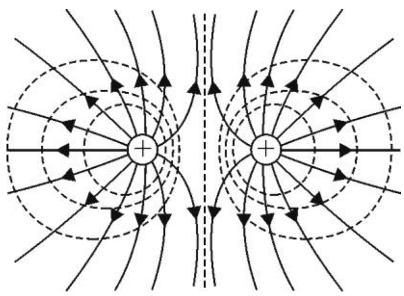
$$U = \frac{tg\,\alpha \cdot m \cdot g \cdot d}{q} = 5{,}77 \cdot 10^{3}\,V$$

14.13.R.

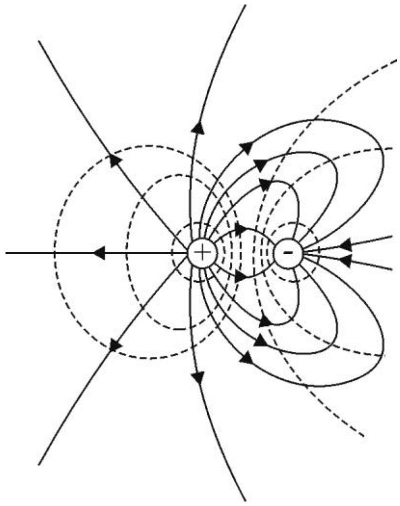
(a)



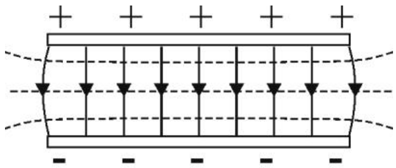
(b)



(c)

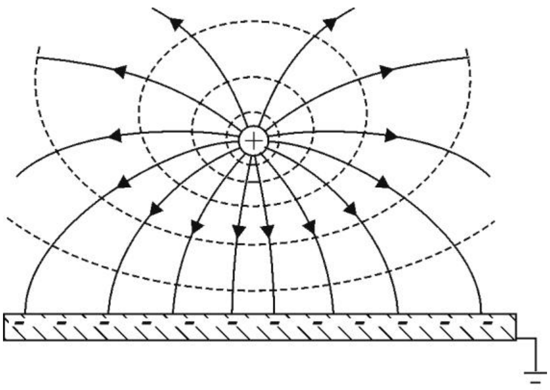


(d)

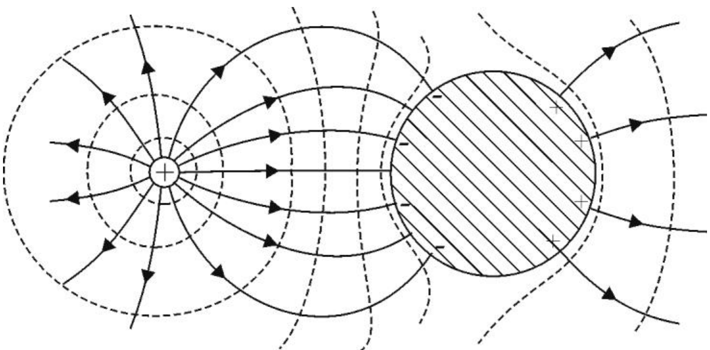


14.14.R.

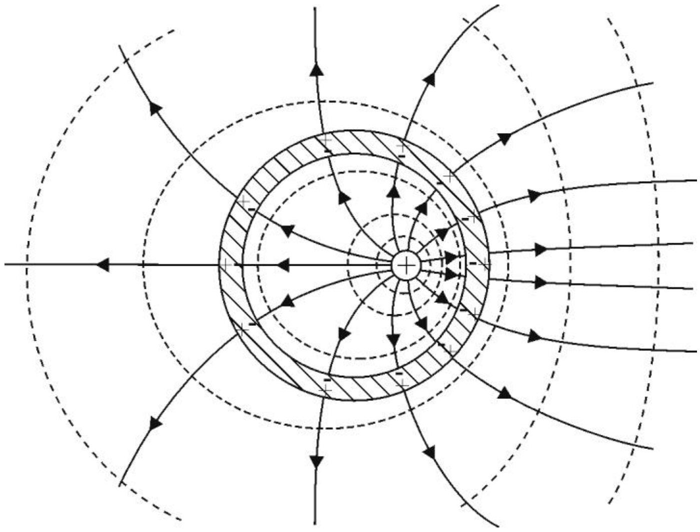
(a)



(b)



(c)



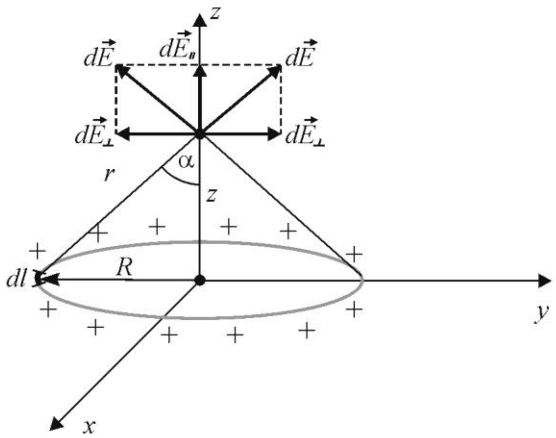
14.15.R.

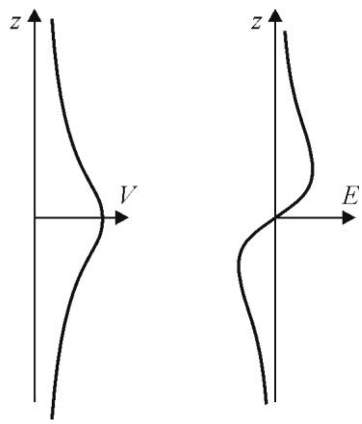
$$V = k\frac{Q}{R}$$

$$E = k\frac{Q}{\pi R^2}\cdot 2\,.$$

Wskazówka: Należy skorzystać z zasady superpozycji oddziaływań, podobnie jak w zad. 14.7. Potencjały należy sumować skalarnie, a natężenia wektorowo.

14.16.R.





Ładunek dq znajdujący się na elemencie długości pierścienia dl wytwarza na osi z w odległości r od niego potencjał dV:

$$dV = \frac{dQ}{r}\,,$$

ponieważ: $dQ = \dfrac{Q}{2\pi R}dl$, a $r = \sqrt{R^2 + z^2}$, więc:

$$V = k\frac{Q}{2\pi R}\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}dl\ .$$

Po scałkowaniu:

$$V = k\frac{Q}{2\pi R}\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}\int_0^{2\pi R} dl\ ,$$

skąd:

$$V = k\frac{Q}{\sqrt{R^2+z^2}}\ .$$

Z symetrii układu widać, że składowe natężenia pola elektrycznego prostopadłe do osi z skompensują się, dlatego $E = E_z$.

(a) Korzystając z zasady superpozycji możemy napisać:

$$dE = k\frac{dQ}{r^2},\ dE_z = dE\cos\alpha\ ,$$

ale: $\cos\alpha = \frac{z}{r}$, więc:

$$dE_z = k\frac{dQ}{r^2}\frac{z}{r} = k\frac{z}{r^3}\frac{Q}{2\pi R}dl\ ,$$

skąd:

$$E_z = k\frac{z}{\left(\sqrt{R^2+z^2}\right)^3}\frac{Q}{2\pi R}\int_0^{2\pi R} dl = k\frac{Qz}{\left(\sqrt{R^2+z^2}\right)^3}$$

$$E = E_z = k\frac{Qz}{\left(\sqrt{R^2+z^2}\right)^3}$$

(b) $\vec{E} = -grad V$. W naszym przypadku wyrażenie to możemy zapisać w postaci:

$$E = E_z = \frac{-dV}{dz} = -\frac{d}{dz}\left(k\frac{Q}{\sqrt{R^2+z^2}}\right),$$

stąd:

$$E = E_z = k\frac{Qz}{\left(\sqrt{R^2+z^2}\right)^3}$$

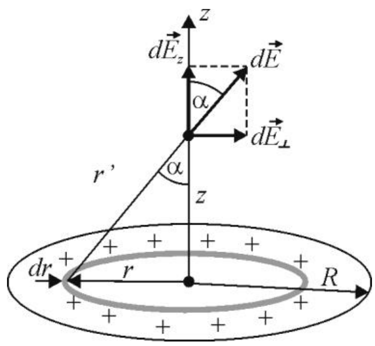
14.17.R.

$$E = k\frac{2a\lambda}{r\sqrt{a^2+r^2}}$$

(a) dla $\frac{r}{a} >> 1$ $\qquad E = k\frac{2a\lambda}{r^2} = k\frac{q}{r^2}$, gdzie $q = 2a\lambda$.

(b) dla $\frac{a}{r} >> 1$ $\qquad E = k\frac{2\lambda}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon r}$.

14.18.R. Posługując się zasadą superpozycji pól znajdujemy podobnie jak w zad. 14.14. wartości potencjału i natężenia pola elektrycznego dla punktów znajdujących się na osi z.



Potencjał *dV* od ładunku *dQ*, znajdującego się na pierścieniu o promieniu *r* i szerokości *dr*, w punkcie znajdującym się na osi z w odległości *r'* od promienia, równa się:

$$dV = k\frac{dQ}{r'},$$

ale: $dQ = 2\pi r \cdot dr \cdot \sigma$, gdzie σ– gęstość powierzchniowa ładunku, a $r' = \sqrt{r^2+z^2}$. Stąd:

$$dV = k\frac{2\pi r \cdot dr \cdot \sigma}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

Wartość potencjału *V* od całego krążka równa się więc:

$$V = k2\pi\sigma\int_0^R \frac{r\cdot dr}{\sqrt{r^2+z^2}}.$$

Całkując przez podstawienie otrzymujemy:

$$V = k2\pi\sigma\left(\sqrt{R^2+z^2} - |z|\right)$$

Podstawiając za $\sigma : \sigma = \frac{Q}{\pi R^2}$, otrzymujemy:

$$(1) \qquad V = k\frac{2Q}{R^2}\left(\sqrt{R^2+z^2} - |z|\right).$$

Ponieważ natężenie pola elektrycznego jest wielkością wektorową, dlatego też składową pola w kierunku osi z od ładunku znajdującego się na pierścieniu, można wyrazić wzorem:

$$dE_z = dE\cos\alpha = k\frac{dQ}{r'^2}\frac{z}{r'} = k\frac{dQz}{r'^3}.$$

Podstawiając za $dQ : dQ = 2\pi r \cdot dr \cdot \sigma$ oraz za $r' : r' = \sqrt{r^2+z^2}$ otrzymamy:

$$E_z = k \cdot 2\pi\sigma z \int_0^R \frac{r \cdot dr}{\left(\sqrt{r^2+z^2}\right)^3}$$

skąd:

$$E_z = k \cdot 2\pi\sigma z\left(\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}\right),$$

lub kładąc $\sigma = \frac{Q}{\pi R^2}$:

$$(2) \qquad \mathrm{E}_z = k\frac{2Q}{R^2}\left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right).$$

Dla $z >> R$, czyli dla dużych odległości wyrażenie na potencjał (1) można zapisać w postaci:

$$V = k\frac{2Q}{R^2}\left(|z|\sqrt{1+\left(\frac{R}{z}\right)^2} - |z|\right)$$

Wyłączając $|z|$ przed nawias i stosując przybliżenie $\sqrt{1+\left(\frac{R}{z}\right)^2} \approx 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{R}{z}\right)^2$ słuszne dla $\frac{R}{z} << 1$, otrzymamy: $V = k\frac{Q}{|z|}$.

Stosując analogiczne przybliżenie do wyrażenia (2) na składową E_z pola elektrycznego otrzymamy:

$$E_z = k\frac{Q}{z^2}.$$

Dla drugiego skrajnego przypadku, czyli dla wartości z odpowiadającym punktom leżącym w pobliżu krążka, spełniona jest relacja $z << R$, lub równoważna $\frac{z}{R} << 1$. Wartość potencjału dla tych punktów możemy otrzymać przez zastosowanie następującego przybliżenia w wyrażeniu (1): $\sqrt{R^2 + z^2} \approx R$ dla $R >> z$. Stąd:

$$V = k\frac{2Q}{R^2}(R - |z|).$$

Natomiast dla $R >> z$, w wyrażeniu na składową E_z pola, możemy zaniedbać drugi człon w nawiasie, co prowadzi do wyrażenia na natężenie pola elektrycznego od naładowanej nieskończonej powierzchni:

$$E = k\frac{2Q}{R^2}\frac{z}{|z|} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{z}{|z|}.$$

14.19.R.

(a) Powierzchnie ekwipotencjalne mają kształt elipsoidy obrotowej o półosiach: $\sqrt{\frac{V}{a}}$, $\sqrt{\frac{V}{a}}, \sqrt{\frac{V}{b}}$.

(b) $\vec{E} = -2(ax\vec{i} + ay\vec{j} + bz\vec{k})$, $E = 2\sqrt{a^2(x^2 + y^2) + b^2 z^2}$.

Wskazówka: Skorzystać ze związku $\vec{E} = -grad V$.

(c) Powierzchnie, na których $E = const$ mają również kształt elipsoidy obrotowej o innych półosiach: $\frac{E}{2a}, \frac{E}{2a}, \frac{E}{2b}$.

(d) W tym przypadku dla wartości potencjału $V > 0$ powierzchnie ekwipotencjalne będą miały kształt jednopłatowej hiperboloidy obrotowej, dla $V = 0$ kształt stożka, a dla $V < 0$ kształt dwupłatowej hiperboloidy obrotowej.

14.20.R.

(a) $V = 0$, $E = k\frac{p}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3}$, gdzie $p = Qd$.

(b) $V = k\frac{p}{r^2}$, $E = k\frac{2p}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p}{r^3}$.

Wzory te słuszne są przy założeniu: $r >> d$.

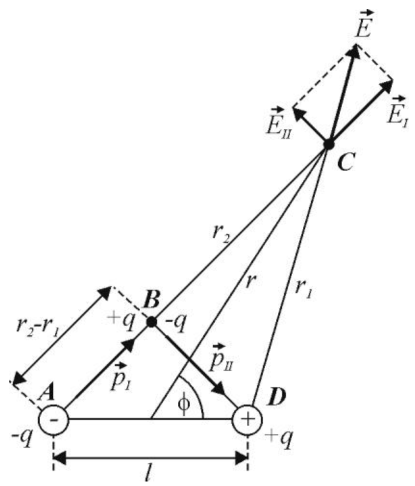
14.21.R. Potencjał w dowolnym punkcie C, odległym od dipola o r, liczymy sumując potencjały od obu ładunków.

$$V = k\frac{Q}{r_1} - k\frac{Q}{r_2} = kQ\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}.$$

Dla $r >> l$ $r_1 \approx r_2 \approx r$, a $r_2 - r_1 = l\cos\phi$, skąd:

$$V = k\frac{Ql\cos\phi}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\phi}{r^2},$$

gdzie: $p = q \cdot l$ – moment dipolowy.



Wartość natężenia pola elektrycznego w punkcie C liczymy posługując się następującym rozumowaniem: Załóżmy, że w punkcie B umieścimy obok siebie dwa ładunki: $+q$ i $-q$. Nie wpłyną one na pole pierwotne, lecz teraz już nasz układ można traktować jak dwa dipole: p_I i p_{II}. Z trójkąta prostokątnego ABD wynika, że długość boku $AB \approx l\,cos\,\phi$, a boku $BD \approx l\,sin\,\phi$. Stąd wartość dipola $p_I = ql\cos\phi = p\cos\phi$, a dipola $p_{II} = ql\sin\phi = p\sin\phi$. Natężenie pola elektrycznego w punkcie C można traktować jako sumę wektorową pól: E_I – pochodzącego od dipola p_I (na jego osi), oraz pola E_{II} – pochodzącego od dipola p_{II} (na jego osi symetrii), czyli:

$$E_I = k\frac{2p_I}{r^3} = k\frac{2p\cos\phi}{r^3},$$
$$E_{II} = k\frac{p_{II}}{r^3} = k\frac{2p\sin\phi}{r^3}.$$

stąd:

$$E = \sqrt{E_I{}^2 + E_{II}{}^2} = k\frac{p}{r^3}\sqrt{4\cos^2\phi + \sin^2\phi} =$$
$$= k\frac{p}{r^3}\sqrt{3\cos^2\phi + 1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3}\sqrt{3\cos^2\phi + 1}.$$

14.22.R.

$$V = 0,\ E = k\frac{6Q}{r^4} = \frac{3Q}{2\pi\varepsilon_0 r^4},$$

gdzie: Q = $2qa^2$ – moment kwadrupolowy.

Wskazówka: Natężenie pola elektrycznego kwadrupola możemy traktować jako złożenie dwu pól dipolowych w punkcie leżącym na ich osi symetrii. Należy zwrócić uwagę, że odległości między ładunkami wynoszą 2a.

14.23.R.

$$V = k\frac{Q}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^3},\ E = k\frac{3Q}{r^4} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3Q}{r^4},$$

gdzie: $Q = 2qa^2$.

14.24.R.

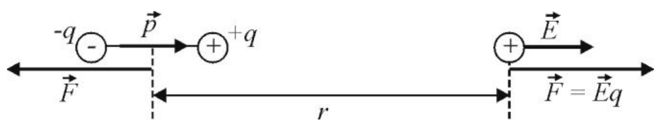
$$\vec{M} = \vec{p}\times\vec{E}$$
$$M = p\cdot E\cdot\sin\alpha = 5N\cdot m$$

14.25.R.

$$F = p\frac{\Delta E}{\Delta x} = 5\cdot 10^{-3}\ N$$

14.26.R. Skrawki papieru są elektrycznie obojętne. Dopiero pod wpływem pola elektrycznego skrawki papieru stają się dipolami indukowanymi. Przy takim zaś ustawieniu dipola, będzie on wciągany przez niejednorodne pole elektryczne. (Zrób rysunek i narysuj siły działające na poszczególne ładunki dipola).

14.27.R.



(a) W punkcie, w którym znajduje się ładunek q występuje pole elektryczne od dipola o natężeniu E: $E = k\frac{2p}{r^3}$. Dlatego też na ładunek będzie działała siła:

$$F = qE = k\frac{2pq}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2pq}{r^3}.$$

Na dipol zaś, zgodnie z III zasadą dynamiki, będzie działała siła równa, przeciwnie skierowana.

(b) Stosując podobne rozumowanie jak w punkcie (a), otrzymujemy wartość siły:

$$F = k\frac{pq}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{pq}{r^3}.$$

14.28.R.

$$M = pE\sin\alpha,$$

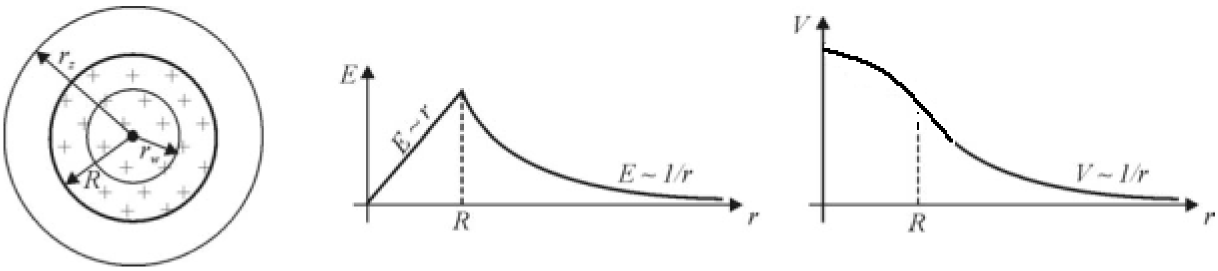
gdzie: E – natężenie pola elektrycznego od naładowanej płyty. Dla $R >> r$, $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$. Patrz zad. 14.18. Stąd:

$$M = p\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}sin\alpha.$$

14.29.R.

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

14.30.R.



(a) $r < R$. Korzystamy z prawa Gaussa:

$$(1) \qquad \oint \vec{E}d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0},$$

gdzie: q – ładunek zawarty wewnątrz powierzchni gaussowskiej (sfery) o promieniu $r = r_w < R$.

$$q = \tfrac{4}{3}\pi r^3\rho,$$

stąd całkując (1) otrzymamy:

$$E\cdot 4\pi r^2 = \frac{4}{3}\frac{\pi r^3\rho}{\varepsilon_0},$$

skąd:

$$E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r \, .$$

(b) Dla $r > R$:

$$(2) \qquad \oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

gdzie: $Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$ - ładunek zawarty w całej naładowanej kuli. dla sfery gaussowskiej o promieniu $r = r_z > R$ otrzymamy, całkując (2):

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{4}{3}\frac{\pi R^3 \rho}{\varepsilon_0}$$

skąd:

$$(3) \qquad E = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} \, .$$

Ze wzoru (3) wynika, że dla $r > R$ natężenie pola elektrycznego naładowanej objętościowo kuli jest identyczne z polem od ładunku punktowego, znajdującego się w środku kuli.

Potencjał pola elektrycznego w naładowanej kuli liczymy korzystając ze związku: $E = -\frac{dV}{dr}$,

dla <u>r > R</u>: $dV = -E \cdot dr = -\frac{\rho R^3 dr}{3\varepsilon_0 r^2}$, skąd: $V = V_{zew} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r} + C$: dla $r \to \infty$ $V = 0 \Rightarrow C = 0$

czyli:

$$V = V_{zew} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r}$$

dla <u>r < R</u>: $dV = -E \cdot dr = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0} r dr$, skąd, po scałkowaniu: $V = V_{wew} = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{r^2}{2} + C$.

Stałą C wyliczymy z warunku: $V_{wew}(R) = V_{zew}(R) \Rightarrow C = \frac{1}{2}\frac{\rho R^2}{\varepsilon_0}$, dlatego:

$$V = V_{wew} = -\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} + \frac{1}{2}\frac{\rho R^2}{\varepsilon_0} \, ,$$

czyli:

$$V = V_{wew} = \frac{\rho}{6\varepsilon_0}(3R^2 - r^2) \, .$$

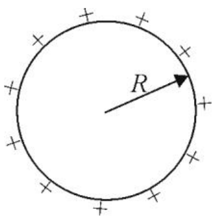
14.31.R.

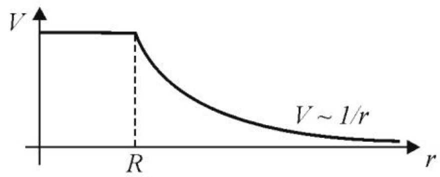
(a) Dla $r < R$:

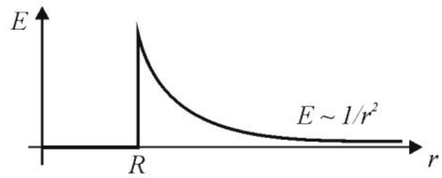
$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R} = const,\ E(r) = 0$$

dla $r > R$:

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r},\quad E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$$







(b) Na zewnątrz i wewnątrz kuli z dielektryka, naładowanej powierzchniowo ładunkiem q, pole będzie identyczne z polem od kuli metalowej o tych samych rozmiarach i naładowanej identycznym ładunkiem.

14.32.R.

(a)

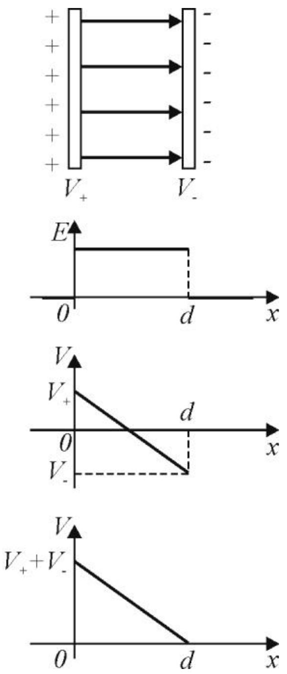
$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r},\ V = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r}{r_0}$$

(b)

$$E = 3{,}5\cdot 10^3 \text{ V/m, V} = -0{,}83\cdot 10^5 \text{ V}$$

Wskazówka: W celu obliczenia E należy posłużyć się prawem Gaussa. Potencjał należy wyznaczyć całkując zależność: $E = -\frac{dV}{dr}$. Stałej całkowania nie można jednak wyznaczyć z zależności $V = 0$ dla $r \to \infty$. Stałą C dobieramy tak, aby $V = 0$ dla $r = r_0 = 1$ m.

14.33.R.



(a) Natężenie pola elektrycznego równa się: między płytkami: $0 \le x \le d$: $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$, poza płytkami: 0 < x i x > d: E = 0. Potencjał liczymy z zależności:

$$E = -\frac{dV}{dx},$$

skąd:

$$\int_{V_+}^{V} dV = -\int_0^x E dx .$$

Po scałkowaniu:

$$V - V_+ = \frac{-\sigma}{\varepsilon_0} x ,$$

ostatecznie:

$$V = V_+ - \frac{\rho}{\varepsilon_0} x .$$

(b) Gdy jedną z płyt połączymy z ziemią, wówczas potencjał jej będzie równy zeru, a druga płyta będzie na potencjale $V_+ + V_-$.

14.34.R. Korzystając z definicji pojemności elektrycznej odosobnionego przewodnika:

$$C = \frac{Q}{V},$$

gdzie: Q – ładunek na przewodniku, a V – potencjał na powierzchni przewodnika. Pamiętając, że dla kuli o promieniu R:

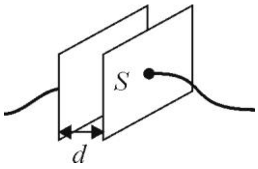
$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R},$$

otrzymamy:

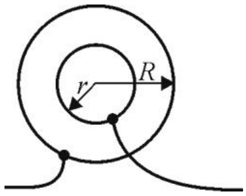
$$C = 4\pi\varepsilon_0 R .$$

14.35.R. Pojemność kondensatora:

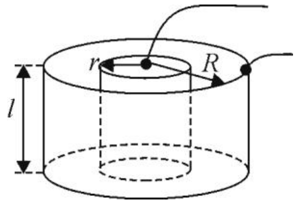
(a) Płaskiego: $C=\dfrac{\varepsilon_r\varepsilon_0 S}{d}$, dla $S >> d^2$



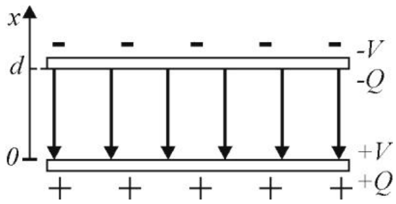
(b) Kulistego: $C=\dfrac{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0}{\frac{1}{r}-\frac{1}{R}}$,



(c) Walcowego: $C=\dfrac{2\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 l}{\ln\frac{R}{r}}$, dla $l >> R$ i r.



Sposób obliczania pojemności kondensatorów pokażemy na przykładzie kondensatora płaskiego.



Natężenie pola elektrycznego między okładkami kondensatora:

$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0},$$

gdzie: $\sigma=\dfrac{Q}{S}$ - gęstość powierzchniowa ładunku, S – powierzchnia okładki. Korzystając z zależności:

$$E=-\frac{dV}{dx}$$

otrzymamy:

$$\int_{V_+}^{V_-} dV=-\int_0^d E dx=-\int_0^d \frac{\sigma}{\varepsilon_0}dx,$$

skąd otrzymamy:

$$V_- - V_+ = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} d \qquad |\cdot(-1)$$

$$V_+ - V_- = U = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d \,,$$

Podstawiając do ostatniego wyrażenia za $\sigma = \frac{Q}{S}$, dostajemy:

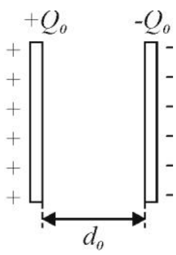
$$U = \frac{Qd}{\varepsilon_0 S} \,,$$

skąd otrzymamy wyrażenie na pojemność kondensatora płaskiego:

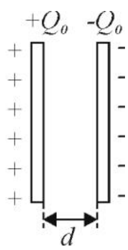
$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \,.$$

14.36.R.

przed zsunięciem:



po zsunięciu:



Pojemności:

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d_0} \,, \qquad C = \frac{\varepsilon_0 S}{d} = \frac{\varepsilon_0 S}{\frac{d_0}{n}} = nC_0$$

Ładunki:

$$Q_0 = C_0 U_0 \qquad Q = Q_0 = CU$$

(a)

$$C_0 U_0 = CU$$

$$C_0 U_0 = nC_0 U \rightarrow U = \frac{U_0}{n}$$

Napięcie zmniejsza się n razy.

(b)

$$E_0 = \frac{U_0}{d_0}$$

$$E = \frac{U}{d} = \frac{\frac{U_0}{n}}{\frac{d_0}{n}} = \frac{U_0}{d_0} = E_0$$

$$E = E_0 = const$$

Natężenie pola elektrycznego nie zmieni się.

(c)

$$Q = Q_0 = const\,.$$

14.38.R. Ładunki na okładkach obu kondensatorów połączonych szeregowo spełniają relację:

$$\begin{cases} q_1 = q_2 = q = UC \\ q_1 = C_1 U_1 \qquad q_2 = C_2 U_2 \end{cases},$$

gdzie C – pojemność zastępcza $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \rightarrow C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$, a q – ładunek wypadkowy. Z tych trzech równań otrzymujemy:

$$U_1 = \frac{C_2 U}{C_1 + C_2} = 200V\,,\ U_2 = \frac{C_1 U}{C_1 + C_2} = 100V$$

$$q_1 = q_2 = q = UC = 2 \cdot 10^{-8}\, C\,.$$

14.39.R.

(a) Natężenie pola elektrycznego nie zmieni się w wyniku wprowadzenia płytki metalowej między okładki kondensatora, bowiem: $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{S\varepsilon_0}$.

(b) Pojemność kondensatora po włożeniu płytki wzrośnie: $C = \frac{\varepsilon_0 S}{d - l}$.

(c) Ponieważ ładunek na okładkach kondensatora jest stały, a pojemność wzrośnie, w związku z tym napięcie zmaleje o: $\Delta U = -\frac{Ql}{\varepsilon_0 S}$.

14.40.R. Ponieważ kulki rtęci są przewodzące, więc ich potencjały w chwili rozdzielania i potem muszą być równe.

$$V_1 = V_2 = V\frac{\sqrt[3]{1+n}}{1+\sqrt[3]{n}}.$$

Wskazówka: Skorzystaj z prawa zachowania ładunku, definicji pojemności kulki, oraz z faktu, że objętość pierwotna kulki będzie równa sumie objętości obu kulek.

14.41.R. W wyniku zwarcia kondensatorów nastąpi przepływ jednakowego ładunku między kolejnymi kondensatorami, aż do chwili, gdy okaże się, że suma napięć na wszystkich kondensatorach stanie się równa zeru. W Wyniku tego ładunki na poszczególnych kondensatorach będą równe:

$$Q_1 = C_z U\left(\frac{C_1}{C_2} + \frac{C_1}{C_3} - 2\right)$$

$$Q_2 = C_z U\left(\frac{C_2}{C_1} + \frac{C_2}{C_3} - 2\right)$$

$$Q_3 = C_z U\left(\frac{C_3}{C_1} + \frac{C_3}{C_2} - 2\right),$$

gdzie:

$$C_z = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right)^{-1}.$$

14.42.R.

$$Q_1 = \frac{C_1(C_1 + C_3)}{C_2C_3 + C_1C_2 + C_3C_1}Q,$$

$$Q_2 = Q_3 = \frac{C_2C_3}{C_2C_3 + C_1C_2 + C_3C_1}Q.$$

14.43.R.

$$Q_1 = Q,$$

$$Q_2 = Q\frac{C_2}{C_2 + C_3},$$

$$Q_3 = Q\frac{C_3}{C_2 + C_3}.$$

14.44.R.

$$p_{ind} = \alpha E = 2{,}2 \cdot 10^{-34}\, C \cdot m$$

$$\frac{p_0}{p_{ind}} = 1680$$

14.45.R.

$$p_{ind} = \alpha E = \alpha \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = 0{,}12 \cdot 10^{-30}\, C \cdot m$$

14.46.R.

$$p_{OH} = 7{,}63 \cdot 10^{-30}\, C \cdot m$$

14.47.R.

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = 16{,}5,$$

$$\chi = \varepsilon_r - 1 = 15{,}5,$$

$$n_0\alpha = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1) = 1{,}4 \cdot 10^{-10}\, \frac{F}{m},$$

$$N_A\alpha = \frac{\mu}{\rho} n_0\alpha = 4{,}7 \cdot 10^{-16}\, \frac{F \cdot m^2}{mol}.$$

14.48.R.

(I) Kondensator po naładowaniu do napięcia U_0 odłączono od źródła. W tym przypadku ładunek na okładkach nie będzie się zmieniał $Q = Q_0 = const$.

(a) Pojemność:

Przed włożeniem dielektryka:

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d}.$$

Po włożeniu dielektryka:

$$C = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 S}{d} = \varepsilon_r C_0$$

Pojemność wzrośnie ε_r razy.

(b) Ładunek:

$$(1) \qquad Q_0 = C_0 U_0 = CU = const$$

(c) Napięcie:

Z równania (1) wynika, że:

$$U = U_0 \frac{C_0}{C} = \frac{U_0}{\varepsilon_r}$$

Napięcie zmniejszy się ε_r razy.

(d) Natężenie pola elektrycznego

$$E_0 = \frac{U_0}{d},$$
$$E = \frac{U}{d} = \frac{U_0}{\varepsilon_r d} = \frac{E_0}{\varepsilon_r}.$$

Natężenie pola elektrycznego wewnątrz dielektryka zmniejszy się ε_r razy, ponieważ ładunki polaryzacyjne na powierzchni dielektryka wytworzą pole przeciwne do pola zewnętrznego.

(II) Kondensator jest cały czas podłączony do źródła o napięciu U_0. W związku z tym napięcie $U = U_0 = const$. Napięcie nie zmieni się.

(a) Pojemność:

$$C = \varepsilon_r C_0.$$

(b) Ładunek na okładkach kondensatora:

$$Q_0 = C_0 U_0$$
$$Q = CU_0 = \varepsilon_r C_0 U_0 = \varepsilon_r Q_0$$

Ładunek wzrośnie ε_r razy. Ze źródła dopłynie na okładki dodatkowy ładunek $\Delta Q = Q - Q_0$, równy ładunkowi polaryzacyjnemu.

(c) Napięcie:

$$U = U_0 = const.$$

(d) Natężenie pola elektrycznego:

$$E_0 = \frac{U_0}{d},$$
$$E = \frac{U}{d} = \frac{U_0}{d} = E_0 = const.$$

Natężenie pola elektrycznego nie ulegnie zmianie.

14.49.R.

$$\sigma = P_n = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 \frac{U}{l}$$

$$U = \frac{\sigma \cdot l}{(\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0} = 1750V$$

Wskazówka: Gęstość ładunków polaryzacyjnych równa się składowej normalnej wektora polaryzacji.

14.50.R.

$$E = E_0 + \frac{P}{\varepsilon_0} = E_0 - \frac{np_e}{\varepsilon_0} = 43{,}4\frac{MV}{m}.$$

14.51.R.

$$\sigma = P_n = \varepsilon_0 \kappa \frac{U}{l} = 1{,}06 \cdot 10^{-4}\,\frac{C}{m^2}$$

$$U_1 = U\varepsilon_r = 2800V$$

14.52.R. Kondensator płaski o okładkach zanurzonych częściowo w cieczy dielektrycznej można rozpatrzyć jako dwa kondensatory połączone równolegle. Dlatego $U_1 = U_2$, czyli:

$$\frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2},$$

skąd:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{(H-h)}{\varepsilon_r h}.$$

Ponieważ $U_1 = U_2$, więc:

$$E_1 = E_2 = \frac{U}{d}.$$

14.53.R.

(a) Ładunki na okładkach kondensatora równają się:

$$q = C_0 U_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d} U_0 = 8{,}9 \cdot 10^{-10}\,C$$

(b) Wartości: natężenia pola elektrycznego w dielektrykach:

$$E_1 = \frac{E_0}{\varepsilon_{r1}} = \frac{U_0}{\varepsilon_{r1} d_0} = 5 \cdot 10^3 \frac{V}{m}$$

$$E_2 = \frac{E_0}{\varepsilon_{r2}} = \frac{U_0}{\varepsilon_{r2} d} = 2{,}5 \cdot 10^3 \frac{V}{m}$$

indukcji elektrycznej:

$$D_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_{r1} E_1 = \varepsilon_0 \frac{U_0}{d} = 8{,}85 \cdot 10^{-8} \frac{C}{m^2}$$

$$D_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_{r2} E_2 = \varepsilon_0 \frac{U_0}{d} = 8{,}85 \cdot 10^{-8} \frac{C}{m^2},$$

czyli $D_1 = D_2$.

wektora polaryzacji:

$$P_1 = \varepsilon_0 (\varepsilon_{r1} - 1) E_1 = 4{,}4 \cdot 10^{-8} \frac{C}{m^2}$$

$$P_2 = \varepsilon_0 (\varepsilon_{r2} - 1) E_2 = 6{,}64 \cdot 10^{-8} \frac{C}{m^2}$$

(c) Napięcie na kondensatorze po włożeniu płytek:

$$U = \int_0^{d_1} E_1 dx + \int_{d_1}^{d} E_2 dx = E_1 d_1 + E_2 d_2 =$$

$$= \frac{U_0}{\varepsilon_{r1} d} d_1 + \frac{U_0}{\varepsilon_{r2} d} d_2 = \frac{U_0}{d} \left(\frac{d_1}{\varepsilon_{r1}} + \frac{d_2}{\varepsilon_{r2}} \right)$$

Podstawiając wartości liczbowe:

$$U = 30V.$$

(d) Pojemność kondensatora z dielektrykiem liczymy z wzoru definicyjnego:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q_0}{U_0} \frac{d}{\frac{d_1}{\varepsilon_{r1}} + \frac{d_2}{\varepsilon_{r2}}} = C_0 \frac{d}{\frac{d_1}{\varepsilon_{r1}} + \frac{d_2}{\varepsilon_{r2}}} = \frac{\varepsilon_0 S}{\frac{d_1}{\varepsilon_{r1}} + \frac{d_2}{\varepsilon_{r2}}} = 3 \cdot 10^{-11} F$$