CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

Rodzaj dokumentu:	**Zasady oceniania rozwiązań zadań**
Egzamin:	**Egzamin maturalny (SF)**
Przedmiot:	**Matematyka**
Poziom:	**Poziom rozszerzony**
Forma arkusza:	MMA-R1_1P-202
Termin egzaminu:	Termin główny – czerwiec 2020 r.
Data publikacji dokumentu:	3 sierpnia 2020 r.

Warszawa 2020

Uwaga: Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.

Zadanie 1. (*4 pkt*)

Obszar standardów	Opis wymagań
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje proste równania i nierówności wymierne (R3.d).

Zasady oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ....1p.

Zdający zapisze, że $x \neq 0$ i $x \neq 1$ i doprowadzi nierówność do postaci $\frac{x}{1-x} \leq 1$
i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2p.

Zdający zapisze nierówność w postaci

$$\frac{2x-1}{1-x} \leq 0 \text{ i } x \neq 1, \quad \textbf{albo} \quad -x(x-1) \leq (x-1)^2 \text{ i } x \neq 1$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie prawie pełne .... 3p.

Zdający poda pierwiastki $x = \frac{1}{2}$ lub $x = 1$
i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne.. 4p.

Zdający zapisze rozwiązanie nierówności z uwzględnieniem założeń $x \neq 0$, $x \neq 1$:
$x \in (-\infty, 0) \cup \left(0, \tfrac{1}{2}\right\rangle \cup (1, +\infty)$.

Przykładowe rozwiązanie

Zakładamy, że $x \neq 0$ i $\frac{1}{x} - 1 \neq 0$. Stąd $x \neq 0$ i $x \neq 1$.

Wykonując równoważne przekształcenia nierówności otrzymujemy:

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x}\right)^{-1} \leq 1, \quad \left(\frac{1-x}{x}\right)^{-1} \leq 1, \quad \frac{x}{1-x} \leq 1,$$

$$\frac{x}{1-x} - 1 \leq 0, \quad \frac{x}{1-x} - \frac{1-x}{1-x} \leq 0.$$

Zatem nierówność $\left(\frac{1}{x}-1\right)^{-1} \le 1$ możemy zapisać w następującej postaci $\frac{2x-1}{1-x} \le 0$ dla $x \ne 0$ i $x \ne 1$.

Znak ilorazu $\frac{2x-1}{1-x} \le 0$ jest taki sam jak znak iloczynu $(2x-1)(1-x) \le 0$.

Pierwiastkami trójmianu $(2x-1)(1-x)$ są liczby: $x = \frac{1}{2}$ lub $x = 1$.

Stąd wynika, że rozwiązaniem nierówności $\left(\frac{1}{x}-1\right)^{-1} \le 1$, po uwzględnieniu założeń $x \ne 0$ i $x \ne 1$, jest suma przedziałów: $(-\infty, 0) \cup \left(0, \tfrac{1}{2}\right\rangle \cup (1, +\infty)$.

Zadanie 2. (*3 pkt*)

Obszar standardów	Opis wymagań
IV. Użycie i tworzenie strategii.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający wykorzystuje pojęcie wartości bez względnej i jej interpretację geometryczną (1.f). 4. Funkcje. Zdający mając dany wykres funkcji $y = f(x)$ potrafi naszkicować wykres funkcji $y = \lvert f(x) \rvert$ (R4.a).

Zasady oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ....1p.

Zdający naszkicuje wykres funkcji *f* określonej wzorem:

- $f(x) = |x-5|$

albo

- $f(x) = |x-5| + 4$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2p.

Zdający zapisze układ nierówności

- $0 < (a-1)^2 - 4 < 5$ **oraz** rozwiąże poprawnie jedną z nierówności tego układu

albo

- $4 < (a-1)^2 < 9$ **oraz** rozwiąże poprawnie jedną z nierówności tego układu

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne .... 3p.

Zdający rozwiąże układ nierówności i zapisze, że $a \in (-2, -1) \cup (3, 4)$.

Zasady oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ....1p.

Zdający zapisze, że podane równanie ma dwa rozwiązania dodatnie, gdy spełniona jest nierówność

$$0<|x-5|<5$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2p.

Zdający zapisze układ nierówności $0<(a-1)^2-4<5$ **oraz** rozwiąże poprawnie jedną z dwóch nierówności tego układu i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne.. 3p.

Zdający rozwiąże układ nierówności i zapisze, że $a\in(-2,-1)\cup(3,4)$.

Zasady oceniania III sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ....1p.

Zdający:

- zapisze, że podane równanie ma więcej niż jedno rozwiązanie wtedy, gdy spełniona jest nierówność

$$(a-1)^2-4>0,$$

albo

- zapisze podane równanie w postaci alternatywy równań

$$x-5=(a-1)^2-4 \quad \text{lub} \quad x-5=-(a-1)^2+4$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2p.

Zdający:

- zapisze, że podane równanie ma więcej niż jedno rozwiązanie wtedy, gdy spełniona jest nierówność

$$(a-1)^2-4>0,$$

i

- zapisze podane równanie w postaci alternatywy równań

$$x-5=(a-1)^2-4 \text{ lub } x-5=-(a-1)^2+4$$

i

- rozwiąże poprawnie przynajmniej jedną z trzech nierówności:

$$(a-1)^2-4>0,\ (a-1)^2+1>0,\ 9-(a-1)^2>0$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne.. 3p.

Zdający zapisze, że $a\in(-2,-1)\cup(3,4)$.

Zasady oceniania IV sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ....1p.
Zdający

- zapisze warunek istnienia rozwiązań rzeczywistych równania $|x-5|=(a-1)^2-4$:

$$(a-1)^2-4\geq 0$$

albo

- zdający zapisze układ nierówności:
$$(-10)^2-4\left(25-\left((a-1)^2-4\right)^2\right)>0 \quad \text{i} \quad \frac{-(-10)}{1}>0 \quad \text{i} \quad 25-\left((a-1)^2-4\right)^2>0$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2p.

Zdający zapisze układ nierówności

$$(a-1)^2-4\geq 0 \text{ i } (-10)^2-4\left(25-\left((a-1)^2-4\right)^2\right)>0 \text{ i } \frac{-(-10)}{1}>0 \text{ i } 25-\left((a-1)^2-4\right)^2>0$$

i poprawnie rozwiąże drugą lub czwartą z nich i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne.. 3p.

Zdający rozwiąże układ nierówności i zapisze, że $a\in(-2,-1)\cup(3,4)$.

Zasady oceniania V sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ....1p.

Zdający zastosuje definicję wartości bezwzględnej i zapisze równanie w każdym z dwóch przypadków:

gdy $x-5\geq 0$, to $x-5=(a-1)^2-4$,

gdy $x-5<0$, to $5-x=(a-1)^2-4$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2p.

Zdający zapisze warunki na to, żeby rozwiązaniem równania była liczba dodatnia w każdym z dwóch rozpatrywanych przypadków i wyznaczy wszystkie wartości parametru *a*, dla których rozwiązaniem równania jest liczba dodatnia w jednym z tych przypadków:

- gdy $x-5\geq 0$, to $(a-1)^2+1>0$ i $(a-1)^2+1\geq 5$, skąd $a\in(-\infty,-1\rangle\cup\langle 3,+\infty)$

albo

- gdy $x-5<0$, to $9-(a-1)^2>0$ i $9-(a-1)^2<5$, skąd $a\in(-2,-1)\cup(3,4)$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne.. 3p.

Zdający wyznaczy wszystkie wartości parametru *a*, dla których równanie $|x-5|=(a-1)^2-4$ ma dwa rozwiązania dodatnie: $a\in(-2,-1)\cup(3,4)$.

Uwaga
Jeżeli zdający rozpatrzy oba przypadki, ale w pierwszym przypadku nie skomentuje, że nierówność $(a-1)^2+1>0$ jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej *a*, to może otrzymać **3 punkty** za całe rozwiązanie.

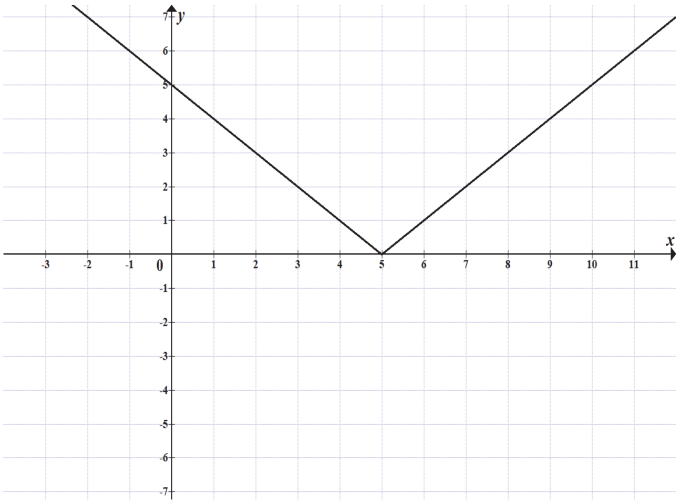
Uwagi:

1. Jeśli zdający zapisze nierówność $(a-1)^2-4\geq 0$ i konsekwentnie do tego błędu rozwiąże zadanie do końca, otrzymując w odpowiedzi zbiór $(-2,-1\rangle\cup\langle 3,4)$, to otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający rozwiązuje zadanie I sposobem i naszkicowany wykres zawiera usterki, ale dalsze rozumowanie jest prawidłowe, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty.**
3. Jeżeli zdający, sporządzając wykres funkcji $f(x)=|x-5|+4$, błędnie przesunie wykres funkcji $y=|x-5|$ o 4 jednostki w dół i konsekwentnie przeprowadzi rozumowanie do końca, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.
4. Jeżeli zdający, sporządzając wykres funkcji $f(x)=|x-5|+4$, zamieni miejscami współrzędne wektora przesunięcia, otrzyma wykres funkcji, dla której istnieją dwa rozwiązania dodatnie równania $f(x)=(a-1)^2$ i konsekwentnie przeprowadzi rozumowanie do końca, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt** za całe rozwiązanie.
5. Jeżeli zdający, sporządzając wykres funkcji $f(x)=|x-5|$, błędnie przesunie wykres funkcji $y=|x|$, i otrzyma wykres funkcji *g* takiej, że nie istnieją dwa dodatnie rozwiązania równania $g(x)=(a-1)^2-4$, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Przykładowe rozwiązanie

I sposób

Rozważmy funkcję *f* określoną wzorem $f(x)=|x-5|$ i naszkicujmy jej wykres.



Wnioskujemy stąd, że podane równanie ma dwa pierwiastki dodatnie, jeśli spełniona jest nierówność

$0<(a-1)^2-4<5$, czyli nierówność $4<(a-1)^2<9$.

Stąd otrzymujemy, że $2<|a-1|<3$, zatem

$$(a-1)\in(-3,-2)\cup(2,3).$$

Ostatecznie $a\in(-2,-1)\cup(3,4)$.

II sposób („*podstawianie*")

Równanie $|x-5|=(a-1)^2-4$ ma dwa dodatnie rozwiązania rzeczywiste, gdy prawdziwa jest nierówność

$$0<|x-5|<5.$$

Ponieważ $|x-5|=(a-1)^2-4$, więc prawdziwa jest nierówność

$$0<(a-1)^2-4<5$$

Nierówność ta jest równoważna koniunkcji nierówności

$$(a-3)(a+1)>0 \quad \text{i} \quad (a+2)(a-4)<0,$$

skąd otrzymujemy

$$a\in(-\infty,-1)\cup(3,+\infty) \quad \text{i} \quad a\in(-2,4).$$

Zatem dla $a\in(-2,-1)\cup(3,4)$ równanie $|x-5|=(a-1)^2-4$ ma dwa rozwiązania dodatnie.

III sposób

Równanie $|x-5|=(a-1)^2-4$ ma dwa rozwiązania, gdy spełniona jest nierówność

$$(a-1)^2-4>0.$$

Nierówność ta jest równoważna nierówności $(a-3)(a+1)>0$ skąd otrzymujemy

$$a<-1 \text{ lub } a>3. \qquad \textbf{(1)}$$

Równanie $|x-5|=(a-1)^2-4$ jest równoważne alternatywie równań:

$$x-5=(a-1)^2-4 \quad \text{lub} \quad x-5=-(a-1)^2+4$$

$$x=(a-1)^2+1 \quad \text{lub} \quad x=-(a-1)^2+9$$

Rozwiązanie pierwszego z równań jest liczbą dodatnią dla każdej liczby rzeczywistej a.
Zatem, aby równanie miało dwa dodatnie rozwiązania musi być spełniony warunek:

$$-(a-1)^2+9>0.$$

Stąd otrzymujemy $(3+a-1)(3-a+1)>0$, czyli $(a+2)(4-a)>0$, a zatem

$$-2<a<4. \qquad \textbf{(2)}$$

Uwzględniając **(1)** i **(2)** otrzymujemy $a\in(-2,-1)\cup(3,4)$.

<u>IV sposób</u>

Ponieważ lewa strona równania $|x-5|=(a-1)^2-4$ jest nieujemna, więc równanie ma co najmniej jedno rozwiązanie rzeczywiste wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(a-1)^2-4\ge 0,$$

$$(a-1-2)(a-1+2)\ge 0,$$

$$(a-3)(a+1)\ge 0,$$

$$a\le -1 \quad \text{lub} \quad a\ge 3.$$

Wtedy, podnosząc obie strony równania $|x-5|=(a-1)^2-4$ do kwadratu, otrzymujemy równanie równoważne

$$|x-5|^2=\left((a-1)^2-4\right)^2,$$

$$(x-5)^2=\left((a-1)^2-4\right)^2,$$

$$x^2-10x+25-\left((a-1)^2-4\right)^2=0.$$

Równanie to ma dwa dodatnie rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2, gdy spełnione są jednocześnie trzy warunki

$$\Delta>0 \quad \text{i} \quad x_1+x_2>0 \quad \text{i} \quad x_1x_2>0.$$

Ze wzorów Viète'a otrzymujemy

$$(-10)^2-4\left(25-\left((a-1)^2-4\right)^2\right)>0 \quad \text{i} \quad \frac{-(-10)}{1}>0 \quad \text{i} \quad 25-\left((a-1)^2-4\right)^2>0,$$

Druga z tych nierówności jest prawdziwa dla każdej wartości rzeczywistej *a*.
Rozwiązujemy pierwszą z tych nierówności

$$100-4\left(25-\left((a-1)^2-4\right)^2\right)>0,$$

$$25-\left(25-\left((a-1)^2-4\right)^2\right)>0,$$

$$\left((a-1)^2-4\right)^2>0,$$

$$(a-1)^2-4\neq 0,$$

$$(a-1-2)(a-1+2)\neq 0,$$

$$(a-3)(a+1)\neq 0,$$

$$a\neq 3 \quad \text{i} \quad a\neq -1.$$

Rozwiązujemy trzecią z nierówności

$$25-\left((a-1)^2-4\right)^2>0,$$

$$\left(5-\left((a-1)^2-4\right)\right)\left(5+\left((a-1)^2-4\right)\right)>0,$$

$$\left(9-(a-1)^2\right)\left((a-1)^2+1\right)>0,$$

Ponieważ $(a-1)^2+1>0$ dla każdej wartości *a*, więc

$$9-(a-1)^2>0,$$

$$\left(3-(a-1)\right)\left(3+(a-1)\right)>0,$$

$$(4-a)(2+a)>0,$$

$$-2<a<4.$$

W rezultacie otrzymujemy

$$(a\le -1 \text{ lub } a\ge 3) \quad \text{i} \quad a\neq 3 \quad \text{i} \quad a\neq -1 \quad \text{i} \quad -2<a<4.$$

Stąd

$$a\in(-2,-1)\cup(3,4).$$

V sposób

Rozważmy dwa przypadki.

1. Gdy $x-5\ge 0$, czyli $x\ge 5$, to wtedy $|x-5|=x-5$, a równanie ma postać $x-5=(a-1)^2-4$. Stąd $x=(a-1)^2+1$. Rozwiązanie to jest dodatnie dla każdej wartości rzeczywistej *a*. Ponieważ $x\ge 5$, więc $(a-1)^2+1\ge 5$, czyli $(a-1)^2\ge 4$, skąd $|a-1|\ge 2$, a więc $a\le -1$ lub $a\ge 3$. W tym przypadku otrzymujemy
$$a\in\left(-\infty,-1\right\rangle\cup\left\langle 3,+\infty\right).$$
2. Gdy $x-5<0$, czyli $x<5$, to wtedy $|x-5|=5-x$, a równanie ma postać $5-x=(a-1)^2-4$. Stąd $x=9-(a-1)^2$. Rozwiązanie to jest dodatnie, gdy $9-(a-1)^2>0$, czyli $(a-1)^2<9$, skąd $|a-1|<3$, a więc $-2<a<4$. Rozwiązanie to jest

mniejsze od 5, gdy $9-(a-1)^2<5$, czyli $(a-1)^2>4$, skąd $|a-1|>2$, a więc $a<-1$ lub $a>3$. Zatem w tym przypadku otrzymujemy $a\in(-2,-1)\cup(3,4)$.

W rezultacie rozpatrzonych przypadków otrzymujemy

$$a\in(-\infty,-1\rangle\cup\langle 3,+\infty) \quad \text{i} \quad a\in(-2,-1)\cup(3,4),$$

a więc

$$a\in(-2,-1)\cup(3,4).$$

Zadanie 3. (*3 pkt*)

Obszar standardów	Opis wymagań
V. Rozumowanie i argumentacja.	2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający posługuje się wzorami skróconego mnożenia: $(a\pm b)^2$, $(a\pm b)^3$, a^2-b^2, $a^3\pm b^3$ (2.a).

Zasady oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ....1p.

Zdający zapisze równanie $(a+1)^2=(2b+1)^2$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2p.

Zdający zapisze wniosek $a=2b$ (bez uzasadnienia lub z niepełnym uzasadnieniem)

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne.. 3p.

Zdający zapisze pełne uzasadnienie.

Zasady oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania..1p.

Zdający zapisze równanie $(a-2b)(a+2b)=-2(a-2b)$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2p.

Zdający zapisze wniosek $a=2b$ (bez uzasadnienia lub z niepełnym uzasadnieniem)

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne.. 3p.

Zdający zapisze pełne uzasadnienie.

Zasady oceniania III sposobu rozwiązania
Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1p.

Zdający obliczy wyróżnik trójmianu kwadratowego $a^2+2a-4b^2-4b$ np. zmiennej *a*, obliczy jego wyróżnik $\Delta=(4b+2)^2$ i zapisze, że jest on nieujemny dla każdej wartości *b* albo, że jest on dodatni dla każdej wartości $b>0$
i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2p.

Zdający obliczy pierwiastki trójmianu $a^2+2a-4b^2-4b$: $a=-2-2b$ lub $a=2b$
i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne.. 3p.

Zdający zapisze pełne uzasadnienie.

Uwaga
Jeżeli zdający sprawdza prawdziwość równania jedynie dla wybranych wartości *a* i *b,* to otrzymuje **0 punktów**.

Przykładowe rozwiązanie

<u>I sposób</u>
Zapisujemy równanie równoważne równaniu z założenia: $a^2+2a+1=4b^2+4b+1$.
Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia i zapisujemy to równanie w postaci $(a+1)^2=(2b+1)^2$. Oba wyrażenia w nawiasach są dodatnie, zatem równość kwadratów jest równoważna równości tych wyrażeń, stąd $a+1=2b+1$ i dalej, $a=2b$.

To kończy dowód.

<u>II sposób</u>
Przekształcamy założenie równoważnie:

$$a^2-4b^2=4b-2a.$$
$$(a-2b)(a+2b)=-2(a-2b)$$
$$(a-2b)(a+2b+2)=0.$$

Liczby *a* i *b* są dodatnie, zatem $a+2b+2\neq 0$. Stąd $a-2b=0$, czyli $a=2b$.

To kończy dowód.

III sposób

Wyrażenie $a^2+2a-4b^2-4b$ traktujemy jako trójmian kwadratowy jednej zmiennej np. *a*.

Wyróżnik trójmianu kwadratowego $a^2+2a-4b^2-4b$ jest równy: $\Delta=(4b+2)^2$.

Ten wyróżnik jest nieujemny dla każdej rzeczywistej wartości *b*.

Obliczamy pierwiastki tego trójmianu

$$a=-2-2b \text{ lub } a=2b.$$

Ponieważ $b>0$, więc liczba $-2-2b<0$, co jest sprzeczne z założeniem, że $a>0$.

Zatem $a=2b$.

To kończy dowód.

Zadanie 4. (*3 pkt*)

Obszar standardów	Opis wymagań
V. Rozumowanie i argumentacja.	7. Planimetria. Zdający wykorzystuje własności figur podobnych w zadaniach, w tym umieszczonych w kontekście praktycznym (7.b).

Zasady oceniania I i II sposobu

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania

...1p.

Zdający:

- skorzysta z podobieństwa trójkątów i zapisze, np.: $|AD|=3|KP|$ lub zapisze $|CP|=x$ i $|DP|=2x$

albo

- skorzysta z twierdzenia o odcinkach stycznych i zapisze, np.: $|KM|=|KP|$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2p.

Zdający:

- skorzysta z podobieństwa trójkątów *CPK* i *CMD* i zapisze poprawne równanie pozwalające obliczyć długość odcinka *PK*: $\frac{|PK|}{2}=\frac{2x}{3x}$

albo

- skorzysta z podobieństwa trójkątów ADM i ACD oraz zapisze poprawne równanie z jedną niewiadomą, np. $\frac{4-t}{3t}=\frac{3t}{6}$, gdzie $t=|KM|=|KP|$

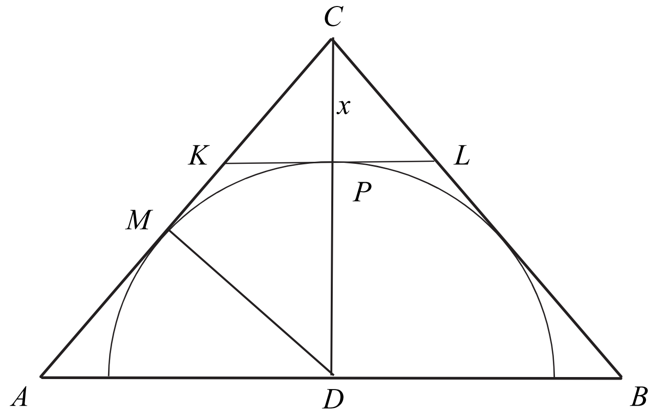
i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne.. 3p.

Zdający rozwiąże powyższe równanie i uzasadni, że $|AM|:|MC|=4:5$.

Przykładowe rozwiązanie

I sposób
Najpierw uzupełnimy rysunek.



Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa wnosimy, że odcinek KL jest równoległy do odcinka AB.

Oznaczmy środek odcinka *KL* przez *P* i niech $|CP| = x$.

Trójkąty *CKP* i *CAD* są podobne (cecha *KKK*) w skali 1:3. Wtedy $|PD| = 2x$ i $|MD| = 2x$.

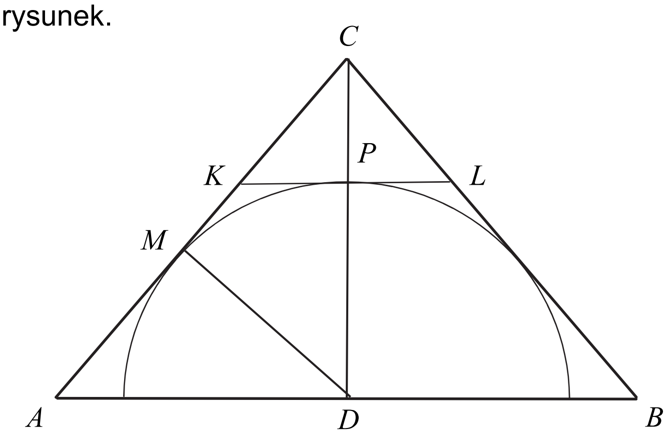
Trójkąty *CPK* i *CMD* są podobne (cecha *KKK*). Stąd $\frac{|PK|}{|CK|} = \frac{|MD|}{|CD|}$, czyli $\frac{|PK|}{2} = \frac{2x}{3x}$.

Stąd $|PK| = \frac{4}{3}$, więc $|AM| = \frac{8}{3}$ oraz $|MC| = 6 - \frac{8}{3} = \frac{10}{3}$.

Zatem $\frac{|AM|}{|MC|} = \frac{\frac{8}{3}}{\frac{10}{3}} = \frac{4}{5}$.

To kończy dowód.

II sposób
Najpierw uzupełnimy rysunek.



Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa wnosimy, że odcinek KL jest równoległy do odcinka AB.

Niech punkt *P* będzie środkiem odcinka *KL*.

Zauważamy, że $|KM| = |KP|$, z twierdzenia o równości odcinków stycznych, łączących punkt leżący poza okręgiem z punktami styczności.

Niech $|KM|=|KP|=t$. Wtedy $|AD|=3t$ i $|AM|=4-t$. Trójkąt ADM jest podobny do trójkąta ACD, na mocy cechy (*kąt*, *kąt*, *kąt*); są to trójkąty prostokątne, a kąt MAD jest wspólny dla obu trójkątów.

Możemy zatem zapisać równość:

$$\frac{|AM|}{|AD|}=\frac{|AD|}{|AC|}\text{, czyli } \frac{4-t}{3t}=\frac{3t}{6}\text{, skąd otrzymujemy równanie } 9t^2+6t-24=0.$$

Równanie to ma dwa rozwiązania: $t=-2$, $t=\frac{4}{3}$. Odrzucamy ujemne rozwiązanie tego równania.

Zatem $t=\frac{4}{3}$. Ostatecznie $\frac{|AM|}{|MC|}=\frac{4-\frac{4}{3}}{2+\frac{4}{3}}=\frac{\frac{8}{3}}{\frac{10}{3}}=\frac{4}{5}$.

To kończy dowód.

Zadanie 5. (*5 pkt*)

Obszar standardów	Opis wymagań
V. Rozumowanie i argumentacja.	5. Ciągi. Zdający stosuje wzory na *n*-ty wyraz i na sumę *n*-początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego, również umieszczone w kontekście praktycznym (5.c).

Zasady oceniania I, II i III sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania...1p.

Zdający

- wykorzystał wzór na *n*-ty wyraz ciągu geometrycznego lub własność ciągu geometrycznego i zapisze np.:
  - $a_2=a_1q$ i $a_3=a_1q^2$

  lub
  - $a_1+a_1q+a_1q^2=\frac{21}{4}$

  lub
  - $a_2^2=a_1\cdot a_3$

albo

- wykorzysta wzór na *n*-ty wyraz ciągu arytmetycznego lub własność ciągu arytmetycznego i zapisze np.:
  - ($a_2=a_3+r$ i $a_1=a_3+3r$) lub ($b_2=a_3+r$ i $b_4=a_3+3r$) lub ($b_2=b_1+r$ i $b_4=b_1+3r$)

  lub
  - $a_1-a_2=2(a_2-a_3)$ lub $b_4-b_2=2(b_2-b_1)$

lub

- $b_3 = \frac{b_4 + b_2}{2}$ i $b_2 = \frac{b_1 + b_3}{2}$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2p.

Zdający

- zapisze układ równań, z którego można otrzymać równanie z jedną niewiadomą, np.:
  - $a_1 + a_1 q + a_1 q^2 = \frac{21}{4}$ i $a_1 = a_1 q^2 + 3\left(a_1 q - a_1 q^2\right)$

  lub

  - $a_1 + a_1 q + a_1 q^2 = \frac{21}{4}$ i $a_1 q = \frac{\frac{a_1 + a_1 q}{2} + a_1 q^2}{2}$

albo

- zapisze równanie pozwalające wyznaczyć związek między a_3 i r, np.:

  $\left(a_3 + r\right)^2 = \left(a_3 + 3r\right) \cdot a_3$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3p.

Zdający

- zapisze równanie z jedną niewiadomą, np.: $2q^2 - 3q + 1 = 0$

albo

- zapisze $r = a_3$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie prawie pełne .... 4p.

Zdający

- rozwiąże równanie z jedną niewiadomą, np. $2q^2 - 3q + 1 = 0$: $q = 1$ lub $q = \frac{1}{2}$

albo

- obliczy trzeci wyraz ciągu geometrycznego $\left(a_n\right)$: $a_3 = \frac{3}{4}$

Rozwiązanie pełne.. 5 p.

Zdający obliczy pierwszy wyraz ciągu geometrycznego $a_1 = 3$.

Uwagi

1. Jeśli zdający zamienia (myli) własności ciągu geometrycznego z własnościami ciągu arytmetycznego, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeśli zdający zapisuje tylko odpowiedź $a_1 = 3$, to otrzymuje **0 punktów**.
3. Jeśli zdający odgadnie iloraz ciągu geometrycznego, a następnie obliczy na tej podstawie pierwszy wyraz tego ciągu, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.
4. Jeśli zdający błędnie stosuje wzór na *n*-ty wyraz ciągu geometrycznego (np. zapisuje $a_3 = a_1 q^3$) lub ciągu arytmetycznego i korzysta z tego w rozwiązaniu, to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **3 punkty**.
5. Jeśli zdający stosuje poprawną strategię rozwiązania zadania, a jedynymi błędami w rozwiązaniu są błędy rachunkowe, to otrzymuje maksymalnie **4 punkty**.

6. Akceptujemy sytuacje, w których zdający dzieli obie strony zbudowanych przez siebie równań przez a_1 albo przez r, albo też przez $q-1$ bez zapisania jakiegokolwiek komentarza.
7. Jeżeli zdający rozwiąże równanie z jedną niewiadomą, np. $2q^2-3q+1=0$: $q=1$ lub $q=\frac{1}{2}$ oraz obliczy dwie wartości a_1: $a_1=3$, $a_1=\frac{7}{4}$ i nie odrzuci $a_1=\frac{7}{4}$, to otrzymuje **4 punkty**.

Przykładowe rozwiązanie

I sposób

Sumując wyrazy ciągu geometrycznego otrzymujemy równość

$$a_1+a_1q+a_1q^2=\frac{21}{4}. \qquad \textbf{(1)}$$

Niech (b_n) będzie rosnącym ciągiem arytmetycznym.

Zatem $b_1=a_1q^2$, $b_2=a_1q$, $b_4=a_1$, więc różnica tego ciągu $r=a_1q-a_1q^2$ oraz $b_4=b_1+3r$, czyli $a_1=a_1q^2+3\left(a_1q-a_1q^2\right)$.

Stąd wynika, że $a_1=3a_1q-2a_1q^2$ i $a_1\left(2q^2-3q+1\right)=0$.

Ponieważ z równości **(1)** wynika, że $a_1\neq 0$, więc $2q^2-3q+1=0$. Zatem $q=1$ lub $q=\frac{1}{2}$.

Dla $q=1$ ciąg (a_n) jest stały. Stąd ciąg (b_n) też jest stały. Zatem tylko dla $q=\frac{1}{2}$ ciąg (b_n) może być ciągiem rosnącym. Otrzymujemy wtedy $r=\frac{1}{4}a_1$. Z równości **(1)** otrzymujemy

$a_1+\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{4}a_1=\frac{21}{4}$, a stąd wynika, że $a_1=3$.

II sposób

W ciągu arytmetycznym $b_1=a_3$, $b_2=a_3+r$, $b_4=a_3+3r$, gdzie $r>0$.

Ponieważ ciąg $(a_3+3r,\ a_3+r,\ a_3)$ jest ciągiem geometrycznym, więc zachodzi równość

$$\left(a_3+r\right)^2=\left(a_3+3r\right)\cdot a_3,$$

skąd wynika, że $a_3^2+2a_3r+r^2=a_3^2+3a_3r$,

a zatem $r^2=a_3r$.

Ponieważ z założenia $r>0$, więc $r=a_3$. Podana suma trzech wyrazów jest zatem równa

$$4a_3+2a_3+a_3=\frac{21}{4}.$$

Otrzymujemy zatem $a_3=\frac{3}{4}$. Wtedy $a_1=b_4=4a_3=3$.

III sposób

Z danych w treści zadania wynikają równości:

$$b_1=a_1q^2,\ b_2=a_1q,\ b_4=a_1.$$

Ponieważ (b_n) jest ciągiem arytmetycznym, więc możemy zapisać równości

$$b_3 = \frac{b_4 + b_2}{2} = \frac{a_1 + a_1 q}{2}$$

oraz

$$b_2 = \frac{b_3 + b_1}{2} = \frac{\frac{a_1 + a_1 q}{2} + a_1 q^2}{2} = a_1 q$$

Rozwiążemy równanie

$$\frac{\frac{a_1 + a_1 q}{2} + a_1 q^2}{2} = a_1 q$$

Ponieważ $a_1 + a_1 q + a_1 q^2 = \frac{21}{4}$, więc możemy założyć, że $a_1 \neq 0$. Powyższe równanie jest zatem równoważne równaniu

$$\frac{\frac{1+q}{2} + q^2}{2} = q \text{, czyli równaniu } 1 + q + 2q^2 = 4q .$$

Równanie kwadratowe $2q^2 - 3q + 1 = 0$ ma dwa rozwiązania: $q = 1$ oraz $q = \frac{1}{2}$.

Jeśli $q = 1$, to obydwa ciągi są ciągami stałymi. Zatem tylko dla $q = \frac{1}{2}$ ciąg (b_n) może być ciągiem rosnącym.

Z równości $a_1 + a_1 q + a_1 q^2 = \frac{21}{4}$ otrzymujemy równanie $\frac{7}{4} a_1 = \frac{21}{4}$, czyli $a_1 = 3$.

Zadanie 6. (*4 pkt*)

Obszar standardów	Opis wymagań
IV. Użycie i tworzenie strategii.	6. Trygonometria. Zdający rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne (R6.e).

Zasady oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ....1p.

Zdający doprowadzi równanie do postaci równoważnej, w której występuje tylko jedna funkcja trygonometryczna tego samego kąta, np.:

$$3 - 6\sin^2 x + 10 - 10\sin^2 x = 24\sin x - 3$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2p.

Zdający rozwiąże równanie kwadratowe $2t^2 + 3t - 2 = 0$: $t = -2$ oraz $t = \frac{1}{2}$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3p.

Zdający

- zapisze, że równanie $\sin x = -2$ nie ma rozwiązań i poda co najmniej jedną serię rozwiązań równania $\sin x = \frac{1}{2}$ w zbiorze liczb rzeczywistych:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ lub } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{, gdzie } k \text{ jest liczbą całkowitą}$$

albo

- zapisze, że równanie $\sin x = -2$ nie ma rozwiązań i poda jedno rozwiązanie równania $\sin x = \frac{1}{2}$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy

Rozwiązanie pełne.. 4p.

Zdający wyznaczy oba rozwiązania równania: $x_1 = \frac{\pi}{6}$ oraz $x_2 = \frac{5\pi}{6}$.

Uwagi

1. Akceptujemy przybliżone rozwiązania elementarnych równań trygonometrycznych.
2. Jeżeli zdający wyznaczy poprawnie obydwa rozwiązania równania $\sin x = \frac{1}{2}$ należące do przedziału $(0, 2\pi)$ i nie zapisze komentarza dotyczącego równania $\sin x = -2$, to otrzymuje **4 punkty**.
3. Jeżeli zdający przed uzyskaniem równań elementarnych popełni błędy rachunkowe i otrzyma równania elementarne, z których co najmniej jedno ma dwie serie rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych, to otrzymuje co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.
4. Jeżeli zdający przed uzyskaniem elementarnych równań trygonometrycznych popełni błąd polegający na niepoprawnym zastosowaniu wzoru na cosinus kąta podwojonego lub błąd polegający na podstawieniu w miejsce $\sin x$ wyrażenia $\sqrt{1-\cos^2 x}$, ale otrzyma co najmniej jedno równanie typu $\sin x = a$, gdzie $a \in (-1,0) \cup (0,1)$, i konsekwentnie to równanie rozwiąże, to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **2 punkty**. Jeżeli jednak zdający otrzyma co najmniej jedno równanie typu $\sin x = a$, gdzie $a \in \{-1, 0, 1\}$, i to równanie konsekwentnie rozwiąże, to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **1 punkt**.
5. Jeżeli zdający zapisze równanie $\sin x = \frac{2}{3}\cos^2 x$, równoważne równaniu $3\cos 2x + 10\cos^2 x = 24\sin x - 3$, a następnie rozwiąże równanie $\frac{4}{9}\cos^4 x + \cos^2 x - 1 = 0$, otrzymując 4 rozwiązania tego równania należące do przedziału $\langle 0, 2\pi \rangle$: $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{5}{6}\pi$, $x = \frac{7}{6}\pi$, $x = \frac{11}{6}\pi$ i nie odrzuci „obcych” rozwiązań: $x = \frac{7}{6}\pi$, $x = \frac{11}{6}\pi$, to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.

Przykładowe rozwiązanie
Przekształcamy dane równanie w sposób równoważny:

$$3\cos 2x + 10\cos^2 x = 24\sin x - 3,$$
$$3\left(1 - 2\sin^2 x\right) + 10\left(1 - \sin^2 x\right) = 24\sin x - 3,$$
$$3 - 6\sin^2 x + 10 - 10\sin^2 x = 24\sin x - 3,$$
$$16 - 16\sin^2 x = 24\sin x,$$
$$16\sin^2 x + 24\sin x - 16 = 0$$
$$2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$$

Niech $t = \sin x$. Rozwiązujemy równanie kwadratowe:

$$2t^2 + 3t - 2 = 0,$$
$$\Delta = 3^2 + 4\cdot 2\cdot 2 = 9 + 16 = 25,$$
$$\sqrt{\Delta} = 5,$$
$$t_1 = \frac{-3-5}{4} = \frac{-8}{4} = -2 \quad , \quad t_2 = \frac{-3+5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Równanie $\sin x = -2$ jest sprzeczne, a równanie $\sin x = \frac{1}{2}$ ma w przedziale $\langle 0, 2\pi\rangle$ dwa rozwiązania: $x_1 = \frac{\pi}{6}$ oraz $x_2 = \frac{5\pi}{6}$.

Zadanie 7. (*4 pkt*)

Obszar standardów	Opis wymagań
III. Modelowanie matematyczne.	3. Równania i nierówności. Zdający stosuje wzory Viète'a (R3.a). 3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe z parametrem, przeprowadza dyskusję i wyciąga z niej wnioski (R3.b).

Zasady oceniania I i II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie zadania składa się z dwóch części.
Pierwsza z nich polega na:

- rozwiązaniu nierówności $\Delta > 0 : m \in R \setminus \{8\}$

albo

- sprawdzeniu, że dla każdej obliczonej wartości parametru *m* równanie $x^2 - (3m+2)x + 2m^2 + 7m - 15 = 0$ ma dwa rozwiązania rzeczywiste.

Za poprawne rozwiązanie tej części zdający otrzymuje **1 punkt**.

Druga część polega na wyznaczeniu tych wartości parametru *m*, dla których jest spełniony warunek $2x_1^2+5x_1x_2+2x_2^2=2$. Za tę część rozwiązania zdający otrzymuje **3 punkty**.
Podział punktów za drugą część rozwiązania:

1 punkt zdający otrzymuje za:

- obliczenie dwóch pierwiastków trójmianu $x^2-(3m+2)x+2m^2+7m-15$:

$$x_1=m+5 \text{ oraz } x_2=2m-3.$$

albo

- przekształcenie wyrażenia $2x_1^2+5x_1x_2+2x_2^2$ do postaci: $2(x_1+x_2)^2+x_1x_2$ lub równoważnej, ale zawierającej jedynie zmienne x_1+x_2 oraz $x_1\cdot x_2$.

2 punkty zdający otrzymuje za:

- zapisanie równania $2x_1^2+5x_1x_2+2x_2^2=2$ w postaci równania z jedną niewiadomą *m*, np.:

$$2(m+5)^2+5(m+5)(2m-3)+2(2m-3)^2=2$$

albo

- zapisanie równania $2(x_1+x_2)^2+x_1x_2=2$ w postaci równania z jedną niewiadomą *m*, np.: $2(3m+2)^2+2m^2+7m-15=2$

3 punkty zdający otrzymuje za rozwiązanie równania $20m^2+31m-9=0$:

$$m_1=-\frac{9}{5} \text{ oraz } m_2=\frac{1}{4}.$$

Uwagi

1. Jeżeli zdający zamienia wzory Viète'a przy przekształcaniu lewej strony równania $2x_1^2+5x_1x_2+2x_2^2=2$, to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **2 punkty.**
2. Jeżeli zdający rozpatruje warunek $\Delta\geq 0$ i nie sprawdzi, że dla każdej z otrzymanych wartości parametru *m* równanie ma dwa rozwiązania rzeczywiste, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.
3. Jeżeli zdający przekształci warunek $2x_1^2+5x_1x_2+2x_2^2=2$, otrzyma $2(x_1+x_2)^2+3x_1x_2=2$ i rozwiąże zadanie konsekwentnie do końca, to za drugą część rozwiązania może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.
4. Jeżeli zdający wykorzystuje niepoprawny wzór „kwadrat sumy dwóch wyrażeń jest równy sumie kwadratów tych wyrażeń", przekształci warunek $2x_1^2+5x_1x_2+2x_2^2=2$ do postaci $2(x_1+x_2)^2+5x_1x_2=2$, i rozwiąże zadanie konsekwentnie do końca, to za drugą część rozwiązania może otrzymać co najwyżej **1 punkt**.
5. Jeżeli zdający rozpatrując równość $2x_1^2+5x_1x_2+2x_2^2=2$ zmieni liczbę po prawej stronie i zapisze równanie, wynikające ze wzorów Viete'a, w postaci $2(3m+2)+2m^2+7m-15=0$, pomijając wykładnik 2 potęgi o podstawie $(3m+2)$, to za drugą część rozwiązania zadania może otrzymać co najwyżej **1 punkt**.

Przykładowe rozwiązania

<u>I sposób</u>

1. Równanie ma dwa różne rozwiązania, gdy wyróżnik trójmianu jest dodatni: $\Delta>0$.

Obliczamy wyróżnik trójmianu:

$$\Delta=\left(-\left(3m+2\right)\right)^2-4\left(2m^2+7m-15\right)=m^2-16m+64=\left(m-8\right)^2.$$

$$\left(m-8\right)^2>0, \text{ gdy } m\neq 8.$$

Stąd wynika, że trójmian ma następujące pierwiastki:

$$x_1=m+5 \text{ oraz } x_2=2m-3.$$

Mamy zatem rozwiązać równanie

$$2\left(m+5\right)^2+5\left(m+5\right)\left(2m-3\right)+2\left(2m-3\right)^2=2.$$

To równanie doprowadzamy do postaci równoważnej:

$$20m^2+31m-9=0.$$

Ma ono dwa rozwiązania:

$$m_1=-\frac{9}{5} \text{ oraz } m_2=\frac{1}{4}$$

Każde z otrzymanych rozwiązań jest różne od 8.

Warunki zadania spełniają dwie wartości parametru *m*: $m_1=-\frac{9}{5}$ oraz $m_2=\frac{1}{4}$.

II sposób

Przekształcamy równość $2x_1^2+5x_1x_2+2x_2^2=2$ w sposób równoważny:

$$2\left(x_1^2+x_2^2\right)+5x_1x_2=2,$$

$$2\left(\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2\right)+5x_1x_2=2,$$

$$2\left(x_1+x_2\right)^2+x_1x_2=2.$$

Ze wzorów Viète'a wynika, że

$$x_1+x_2=3m+2 \text{ oraz } x_1x_2=2m^2+7m-15,$$

o ile pierwiastki x_1 i x_2 trójmianu istnieją.

Mamy zatem rozwiązać równanie

$$2\left(3m+2\right)^2+2m^2+7m-15=2.$$

To równanie doprowadzamy do postaci równoważnej

$$20m^2+31m-9=0.$$

Ma ono dwa rozwiązania:

$$m_1=-\frac{9}{5} \text{ oraz } m_2=\frac{1}{4}.$$

Pozostaje sprawdzić, czy dla tych wartości *m* dany trójmian kwadratowy ma dwa różne pierwiastki. Możemy, tak jak w sposobie pierwszym, obliczyć wyróżnik i przekonać się, że jest on nieujemny. Możemy także podstawić znalezione wartości parametru *m* do danego trójmianu i przekonać się, że otrzymane trójmiany mają dwa różne pierwiastki.

Po podstawieniu $m=-\frac{9}{5}$ otrzymamy trójmian:

$$x^2+\frac{17}{5}x-\frac{528}{25}.$$

Po podstawieniu $m=\frac{1}{4}$ otrzymamy trójmian:

$$x^2+\frac{11}{4}x-\frac{105}{8}.$$

Oba trójmiany mają dwa różne pierwiastki. Można się o tym przekonać, obliczając wyróżniki lub zauważając, że oba trójmiany mają dodatni współczynnik przy x^2 i ujemny wyraz wolny.

Warunki zadania spełniają dwie wartości parametru *m*,:

$$m_1=-\frac{9}{5} \text{ oraz } m_2=\frac{1}{4}.$$

Zadanie 8. (*4 pkt*)

Obszar standardów	Opis wymagań
IV. Użycie i tworzenie strategii.	7. Planimetria. Zdający znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów (R7.d).

Zasady oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki,

ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1p.
Zdający obliczy długości odcinków *CP* i *PB* oraz wyznaczy miary kątów *BAC* i *CAB*: $|CP|=6$, $|PB|=4$, $|\sphericalangle ABC|=|\sphericalangle BAC|=30^\circ$ oraz $|\sphericalangle ACB|=120^\circ$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2p.
Zdający obliczy długość odcinka *AP*: $|AP|=14$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3p.
Zdający zapisze związek, z którego może obliczyć $\sin\alpha$, np.: $\frac{4}{\sin\alpha}=\frac{14}{\sin 30^\circ}$.

Rozwiązanie pełne .... 4p.
Zdający obliczy sinusa kąta α: $\sin\alpha=\frac{1}{7}$.

Zasady oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki,

ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1p.
Zdający obliczy długości odcinków *CP* i *PB* oraz wyznaczy miary kątów *BAC* i *CAB*: $|CP|=6$, $|PB|=4$, $|\sphericalangle ABC|=|\sphericalangle BAC|=30^\circ$ oraz $|\sphericalangle ACB|=120^\circ$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2p.
Zdający obliczy długość odcinka *AP*: $|AP|=14$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3p.
Zdający obliczy długości odcinków *AP* i *PR* $|AP|=14$, $|PR|=2$.

Rozwiązanie pełne .... 4p.
Zdający obliczy sinusa kąta α: $\sin\alpha = \frac{1}{7}$.

Zasady oceniania III sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki,

ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1p.
Zdający obliczy długość odcinka *PB*
oraz zauważy, że miary kątów *ACD* i *BCD* są równe $60°$: $|PB| = 4$.

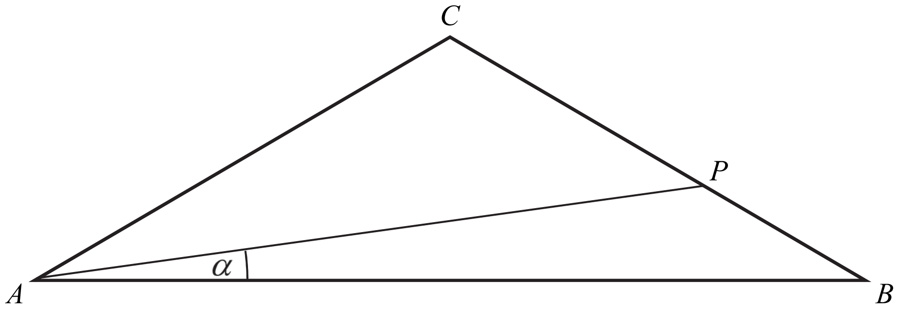
Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2p.
Zdający obliczy długość odcinka *AR*: $|AR| = 8\sqrt{3}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3p.
Zdający obliczy długości odcinków *AP* i *PR* $|AP| = 14$, $|PR| = 2$.

Rozwiązanie pełne .... 4p.
Zdający obliczy sinusa kąta α: $\sin\alpha = \frac{1}{7}$.

Przykładowe rozwiązania

<u>I sposób</u>



Oznaczamy $|\sphericalangle PAB| = \alpha$. Ponieważ trójkąt *ABC* jest równoramienny, więc

$$|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle BAC| = 30° \text{ oraz } |\sphericalangle ACB| = 180° - 2\cdot 30° = 120°.$$

Długości odcinków *CP* i *PB* są równe:

$$|CP| = \frac{3}{5}\cdot 10 = 6 \text{ oraz } |PB| = \frac{2}{5}\cdot 10 = 4.$$

Z twierdzenia cosinusów w trójkącie APC otrzymujemy

$$|AP|^2 = |AC|^2 + |CP|^2 - 2|AC|\cdot|CP|\cdot\cos 120°,$$

$$|AP|^2 = 100 + 36 - 2\cdot 10\cdot 6\cdot \sin(-30°),$$

$$|AP|^2 = 196, \text{ czyli } |AP| = 14.$$

Z twierdzenia sinusów w trójkącie *ABP* otrzymujemy

$$\frac{|PB|}{\sin\alpha}=\frac{|AP|}{\sin 30^\circ},$$
$$\frac{4}{\sin\alpha}=\frac{14}{\frac{1}{2}},$$
$$\sin a=\frac{1}{7}.$$

Uwaga
Zdający może obliczyć długość boku *AB*, wykorzystując np. twierdzenie cosinusów w trójkącie *ABC*

$$|AB|^2=|AC|^2+|BC|^2-2|AC|\cdot|BC|\cdot\cos 120^\circ,$$
$$|AB|^2=10^2+10^2-2\cdot 10\cdot 10\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right),$$
$$|AB|^2=300,$$
$$|AB|^2=300,$$
$$|AB|=10\sqrt{3}.$$

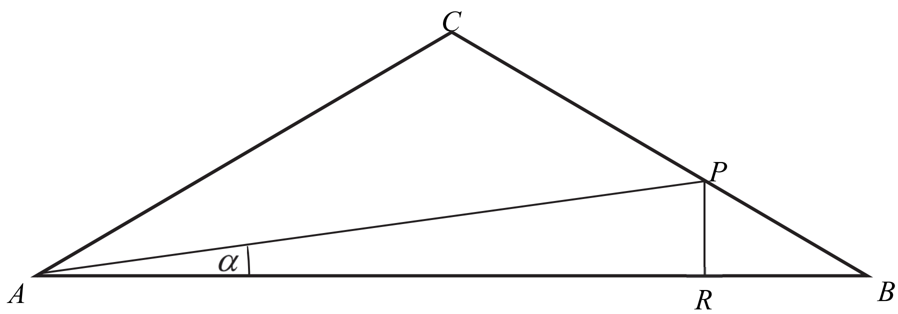
Ponownie z twierdzenia cosinusów w trójkącie *ABP*

$$|PB|^2=|AP|^2+|AB|^2-2|AP|\cdot|AB|\cdot\cos\alpha,$$
$$4^2=14^2+\left(10\sqrt{3}\right)^2-2\cdot 14\cdot 10\sqrt{3}\cdot\cos\alpha,$$
$$\cos\alpha=\frac{196+300-16}{2\cdot 14\cdot 10\sqrt{3}}=\frac{480}{280\sqrt{3}}=\frac{12}{7\sqrt{3}}.$$

Ponieważ α jest kątem ostrym, więc

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{12}{7\sqrt{3}}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{144}{147}}=\sqrt{\frac{3}{147}}=\frac{1}{7}.$$

<u>II sposób</u>



Oznaczamy $|\sphericalangle PAB|=\alpha$ oraz *R* będzie rzutem prostokątnym punktu P na podstawę AB trójkąta *ABC*. Ponieważ trójkąt *ABC* jest równoramienny, więc

$$|\sphericalangle ABC|=|\sphericalangle BAC|=30^\circ \text{ oraz } |\sphericalangle ACB|=180^\circ-2\cdot 30^\circ=120^\circ.$$

Długości odcinków *CP* i *PB* są równe:

$$|CP| = \frac{3}{5} \cdot 10 = 6 \text{ oraz } |PB| = \frac{2}{5} \cdot 10 = 4.$$

Z twierdzenia cosinusów w trójkącie APC obliczamy długość odcinka AP:

$$|AP|^2 = |AC|^2 + |CP|^2 - 2|AC| \cdot |CP| \cdot \cos 120°,$$

$$|AP|^2 = 100 + 36 - 2 \cdot 10 \cdot 6 \cdot \sin(-30°),$$

$$|AP|^2 = 196, \text{ czyli } |AP| = 14.$$

Trójkąt *PBR* jest połową trójkąta równobocznego, więc

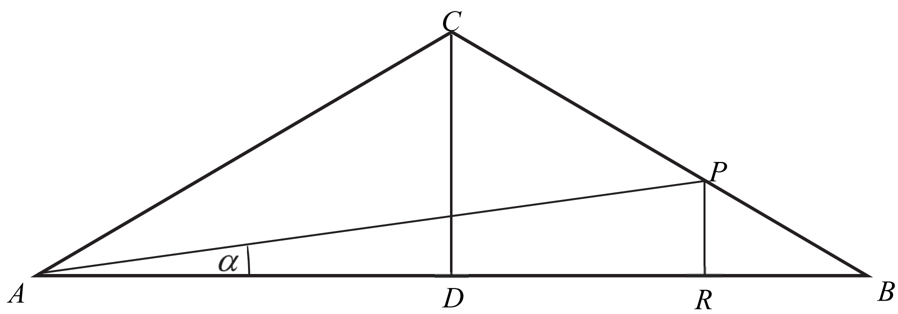
$$|PR| = \frac{1}{2}|PB| = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2.$$

Zatem

$$\sin\alpha = \frac{|PR|}{|AP|} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7}.$$

<u>**III sposób**</u>

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Zauważmy, że trójkąt *ABC* składa się z dwóch „połówek” trójkątów równobocznych o boku długości 10, więc

$$|AD| = \frac{|AC|\sqrt{3}}{2} = \frac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}.$$

Długości odcinków *CP* i *PB* są równe:

$$|CP| = \frac{3}{5} \cdot 10 = 6 \text{ oraz } |PB| = \frac{2}{5} \cdot 10 = 4.$$

Trójkąt *BPR* także jest połową trójkąta równobocznego, więc

$$|PR| = \frac{|BP|}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ oraz } |BP| = |PR|\sqrt{3} = 2\sqrt{3}.$$

Zatem

$$|AR| = |AB| - |BR| = 10\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 8\sqrt{3}.$$

Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie *APR* otrzymujemy

$$|AP| = \sqrt{|AR|^2 + |PR|^2} = \sqrt{\left(8\sqrt{3}\right)^2 + 2^2} = \sqrt{196} = 14.$$

Zatem

$$\sin\alpha = \frac{|PR|}{|AP|} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7}.$$

Uwaga

Po obliczeniu długości odcinków *PR* i *AR*, możemy obliczyć tangens kąta α

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{|PR|}{|AR|}=\frac{2}{8\sqrt{3}}=\frac{1}{4\sqrt{3}},$$

a następnie, wykorzystując związki między funkcjami trygonometrycznymi, możemy obliczyć sinus tego kąta.

Zadanie 9. (*5 pkt*)

Obszar standardów	Opis wymagań
IV. Użycie i tworzenie strategii.	7. Planimetria. Zdający stosuje własności figur podobnych i jednokładnych w zadaniach, także umieszczonych w kontekście praktycznym (R7.c). 8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający posługuje się równaniem okręgu $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ (8.g).

Zasady oceniania I, II, III, IV i V sposobu rozwiązania

Rozwiązanie składa się z dwóch etapów.
Pierwszy etap polega na wyznaczeniu współrzędnych środka danego okręgu. Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

Drugi etap polega na wyznaczeniu równania/układu równań prowadzących do wyznaczenia współrzędnych środka jednokładności oraz współrzędnych środka obrazu danego okręgu w tej jednokładności.
Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **4 punkty**.

Podział punktów za pierwszy etap rozwiązania
Zdający otrzymuje 1 punkt, gdy

- zapisze współrzędne środka: $P=(4,3)$

lub

- zapisze równanie okręgu $x^2+y^2-8x-6y+8=0$ w postaci $(x-4)^2+(y-3)^2=17$.

Podział punktów za drugi etap rozwiązania
Zdający otrzymuje
1 punkt, gdy

- obliczy i zapisze współrzędne punktów K i L: $K=(3,7)$ i $L=(8,2)$

albo

- obliczy odległość punktu *P* od prostej o równaniu $x+y-10=0$: $d=|SP|=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

albo

- zapisze równanie prostej przechodzącej przez punkt $P=(4,3)$ prostopadłej do prostej $x+y-10=0$: $x-y-1=0$

albo

- poda tylko promień obrazu okręgu: $R=3\sqrt{17}$,

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje
2 punkty, gdy

- zapisze współrzędne środka jednokładności: $S=\left(\frac{11}{2},\frac{9}{2}\right)$

albo

- zapisze $P'=(x,x-1)$ i zapisze $|SP'|=3\cdot|SP|=\frac{9\sqrt{2}}{2}$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje
3 punkty, gdy

- zapisze równanie, wynikające z równości $\overrightarrow{SP'}=-3\cdot\overrightarrow{SP}$, prowadzące do wyznaczenia współrzędnych środka $P'=(a,b)$ okręgu, będącego obrazem punktu $P=(4,3)$ w jednokładności:
$$\left[a-\frac{11}{2},\, b-\frac{9}{2}\right]=-3\cdot\left[4-\frac{11}{2},3-\frac{9}{2}\right]$$

albo

- wykona poprawne podstawienie do odpowiedniego wzoru w zestawie *Wybranych wzorów matematycznych* i zapisze:
$$a=-3\cdot4+(1-(-3))\cdot\frac{11}{2} \quad \text{oraz} \quad b=-3\cdot3+(1-(-3))\cdot\frac{9}{2}$$

albo

- zapisze równanie, wynikające z równości $\overrightarrow{PP'}=-4\cdot\overrightarrow{SP}$, prowadzące do wyznaczenia współrzędnych środka $P'=(a,b)$ okręgu, będącego obrazem punktu $P=(4,3)$ w tej jednokładności:
$$[a-4,\, b-3]=-4\cdot\left[4-\frac{11}{2},3-\frac{9}{2}\right]$$

albo

- zapisze równanie $\sqrt{(a-4)^2+(a-1-3)^2}=6\sqrt{2}$

albo

- zapisze równanie $\frac{|a+a-1-10|}{\sqrt{2}}=\frac{9\sqrt{2}}{2}$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje
4 punkty, gdy zapisze równanie szukanego okręgu
$$(x-10)^2+(y-9)^2=153.$$

Uwagi:

1. Jeśli zdający realizuje poprawną strategię rozwiązania zadania, a jedynymi błędami w rozwiązaniu są błędy rachunkowe, to za takie rozwiązanie otrzymuje co najwyżej **4 punkty**.

2. Jeśli zdający zakłada błędnie, że środkiem jednokładności jest środek danego okręgu, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt** za drugą część rozwiązania.
3. Jeśli zdający podczas obliczania współrzędnych punktów *K*, *L* lub *S* popełnia błąd polegający na zamianie współrzędnych i konsekwentnie do tego błędu rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje co najwyżej **4 punkty**.
4. Jeśli zdający stosuje błędne równanie $\overrightarrow{SP} = -3 \cdot \overrightarrow{SP'}$ i konsekwentnie do tego błędu rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje co najwyżej **2 punkty** za drugą część rozwiązania.
5. Jeśli zdający zakłada błędnie, że trójkąt KLP jest trójkątem prostokątnym i w rozwiązaniu stosuje tę własność, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za drugą część rozwiązania.
6. Jeżeli zdający narysuje w układzie współrzędnych dany okrąg i daną prostą, a następnie wyznaczy graficznie obraz środka P' danego okręgu w jednokładności o środku *S* i skali $k = -3$ oraz zapisze równanie tego otrzymanego okręgu, to może otrzymać **4 punkty** za drugą część rozwiązania.

Przykładowe rozwiązania

<u>I sposób</u>

Wyznaczamy współrzędne środka okręgu oraz obliczamy promień tego okręgu, doprowadzając równanie okręgu do postaci $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 17$.

Stąd odczytujemy, że środkiem okręgu jest punkt $P = (4,3)$, a promień okręgu jest równy $r = \sqrt{17}$.

Obliczamy współrzędne punktów *K* i *L* rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 8x - 6y + 8 = 0 \\ y = 10 - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + (10-x)^2 - 8x - 6(10-x) + 8 = 0 \\ y = 10 - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 11x + 24 = 0 \\ y = 10 - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 7 \end{cases} \text{lub} \begin{cases} x = 8 \\ y = 2 \end{cases}.$$

Zatem $K = (3,7)$ i $L = (8,2)$.

Środek cięciwy KL, który jest środkiem jednokładności to punkt $S = \left(\frac{11}{2}, \frac{9}{2}\right)$.

Obrazem danego okręgu w jednokładności o środku S i skali $k = -3$ jest okrąg o promieniu $R = 3\sqrt{17}$ oraz środku $P' = (a,b)$ takim, że $\overrightarrow{SP'} = -3 \cdot \overrightarrow{SP}$. Otrzymujemy równość:

$$\left[a - \frac{11}{2}, b - \frac{9}{2}\right] = -3 \cdot \left[4 - \frac{11}{2}, 3 - \frac{9}{2}\right]$$

Zatem

$$\left[a - \frac{11}{2}, b - \frac{9}{2}\right] = \left[\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right],$$

a stąd $a = 10$ i $b = 9$.

Szukany okrąg ma równanie $(x-10)^2+(y-9)^2=153$.

Uwaga

Zdający może z równania prostej wyznaczyć $x=10-y$ i wtedy otrzyma $\begin{cases}2y^2-18y+28=0\\x=10-y\end{cases}$.

<u>II sposób</u>

Wyznaczamy współrzędne środka okręgu oraz obliczamy promień tego okręgu, doprowadzając równanie okręgu do postaci $(x-4)^2+(y-3)^2=17$.

Stąd odczytujemy, że środkiem okręgu jest punkt $P=(4,3)$, a promień okręgu jest równy $r=\sqrt{17}$.

Obliczamy współrzędne punktów *K* i *L* rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases}x^2+y^2-8x-6y+8=0\\y=10-x\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2+(10-x)^2-8x-6(10-x)+8=0\\y=10-x\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2-11x+24=0\\y=10-x\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=3\\y=7\end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases}x=8\\y=2\end{cases}.$$

Zatem $K=(3,7)$ i $L=(8,2)$. Środek cięciwy KL, który jest środkiem jednokładności to punkt $S=\left(\frac{11}{2},\frac{9}{2}\right)$.

Obrazem danego okręgu w jednokładności o środku S i skali $k=-3$ jest okrąg o promieniu $R=3\sqrt{17}$ oraz środku $P'=(a,b)$ takim, że $\overrightarrow{PP'}=-4\cdot\overrightarrow{SP}$. Otrzymujemy zatem równość:

$$[a-4,\ b-3]=-4\cdot\left[4-\frac{11}{2},3-\frac{9}{2}\right]$$

Zatem

$$[a-4,\ b-3]=[6,6],$$

a stąd $a=10$ i $b=9$.

Szukany okrąg ma równanie $(x-10)^2+(y-9)^2=153$.

<u>III sposób</u>

Wyznaczamy współrzędne środka okręgu oraz obliczamy promień tego okręgu, doprowadzając równanie okręgu do postaci $(x-4)^2+(y-3)^2=17$.

Stąd odczytujemy, że środkiem okręgu jest punkt $P=(4,3)$, a promień okręgu jest równy $r=\sqrt{17}$.

Wyznaczamy równanie prostej *l* przechodzącej przez punkt $P=(4,3)$ i prostopadłej do danej prostej $x+y-10=0$. Prosta *l* ma zatem równanie $x-y-1=0$. Środek jednokładności *S* jest punktem wspólnym obu tych prostych, więc jego współrzędne obliczamy rozwiązując układ równań $\begin{cases} x+y-10=0 \\ x-y-1=0 \end{cases}$.

Stąd $S=\left(\frac{11}{2},\frac{9}{2}\right)$.

Obrazem danego okręgu w jednokładności o środku S i skali $k=-3$ jest okrąg o promieniu $R=3\sqrt{17}$ oraz środku $P'=(a,b)$ takim, że $\overrightarrow{SP'}=-3\cdot\overrightarrow{SP}$. Otrzymujemy zatem równość:

$$\left[a-\frac{11}{2},\, b-\frac{9}{2}\right]=-3\cdot\left[4-\frac{11}{2},3-\frac{9}{2}\right]$$

Zatem

$$\left[a-\frac{11}{2},\, b-\frac{9}{2}\right]=\left[\frac{9}{2},\frac{9}{2}\right],$$

a stąd $a=10$ i $b=9$.

Szukany okrąg ma równanie $(x-10)^2+(y-9)^2=153$.

<u>IV sposób</u>

Wyznaczamy współrzędne środka okręgu oraz obliczamy promień tego okręgu, doprowadzając równanie okręgu do postaci $(x-4)^2+(y-3)^2=17$.

Stąd odczytujemy, że środkiem okręgu jest punkt $P=(4,3)$, a promień okręgu jest równy $r=\sqrt{17}$.

Obliczamy odległość *d* punktu *P* od danej prostej o równaniu $x+y-10=0$.

$$d=\frac{|1\cdot4+1\cdot3-10|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Obrazem danego okręgu w jednokładności o środku S i skali $k=-3$ jest okrąg o promieniu $R=3\sqrt{17}$ oraz środku $P'=(a,b)$.

Zauważamy, że $|PP'|=4\cdot d$, zatem $|PP'|=6\sqrt{2}$. Wyznaczamy równanie prostej *l* przechodzącej przez punkt $P=(4,3)$ i prostopadłej do danej prostej $x+y-10=0$. Prosta *l* ma zatem równanie $x-y-1=0$. Ponieważ punkt $P'=(a,b)$ leży na tej prostej prostopadłej, więc $P'=(a,a-1)$. Stąd otrzymujemy kolejno

$$\sqrt{(a-4)^2+(a-1-3)^2}=6\sqrt{2}$$

$$(a-4)^2+(a-4)^2=36\cdot2$$

$$(a-10)(a+2)=0,$$

skąd $a=10$ lub $a=-2$.

Ponieważ skala jednokładności $k=-3$, więc jednokładność jest odwrotna. Zatem $a=-2$ nie spełnia warunków zadania. Stąd $P'=(10,9)$.

Szukany okrąg ma równanie $(x-10)^2+(y-9)^2=153$.

V sposób

Wyznaczamy współrzędne środka okręgu oraz obliczamy promień tego okręgu, doprowadzając równanie okręgu do postaci $(x-4)^2+(y-3)^2=17$.

Stąd odczytujemy, że środkiem okręgu jest punkt $P=(4,3)$, a promień okręgu jest równy $r=\sqrt{17}$.

Obliczamy odległość *d* punktu *P* od danej prostej o równaniu $x+y-10=0$.

$$d=\frac{|1\cdot 4+1\cdot 3-10|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Obrazem danego okręgu w jednokładności o środku S i skali $k=-3$ jest okrąg o promieniu $R=3\sqrt{17}$ oraz środku $P'=(a,b)$.

Wyznaczamy równanie prostej *l* przechodzącej przez punkt $P=(4,3)$ i prostopadłej do danej prostej $x+y-10=0$. Prosta *l* ma zatem równanie $x-y-1=0$. Ponieważ punkt $P'=(a,b)$ leży na tej prostej prostopadłej, więc $P'=(a,a-1)$.

Skala jednokładności $k=-3$, więc $|SP'|=|-3|\cdot d=3\cdot d$, zatem $|SP'|=\frac{9\sqrt{2}}{2}$.

Obliczamy odległość punktu $P'=(a,a-1)$ od danej prostej o równaniu $x+y-10=0$

$$|SP'|=\frac{|a+a-1-10|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|2a-11|}{\sqrt{2}}=\frac{|2a-11|\sqrt{2}}{2}.$$

Otrzymujemy równanie

$$\frac{|2a-11|\sqrt{2}}{2}=\frac{9\sqrt{2}}{2}$$

$$|2a-11|=9$$

Jednokładność jest odwrotna, zatem $a=10$. Stąd $P'=(10,9)$.

Szukany okrąg ma równanie: $(x-10)^2+(y-9)^2=153$.

Zadanie 10. (*5 pkt*)

Obszar standardów	Opis wymagań
IV. Użycie i tworzenie strategii.	4. Funkcje. Zdający rozwiązuje zadania (również umieszczone w kontekście praktycznym), prowadzące do badania funkcji kwadratowej (4.l)

Zasady oceniania

Rozwiązanie, w którym jest niewielki postęp, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ....1p.

Zdający zauważy, że pole trójkąta *APQ* jest różnicą pola kwadratu *ABCD* i sumy pól trzech trójkątów prostokątnych: *ABP*, *QCP*, *ADQ*

$$P_{APQ}=P_{ABCD}-\left(P_{ABP}+P_{ADQ}+P_{QCP}\right).$$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2p.

Zdający zapisze pole trójkąta *APQ* jako funkcję zmiennej *x*

$$f(x)=4-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot(2-x)-\frac{1}{2}\cdot x\cdot(2-x)-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot x$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3p.

Zdający zapisze wzór funkcji f w postaci $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+2$ i wyznaczy dziedzinę funkcji *f*: $(0,2)$.

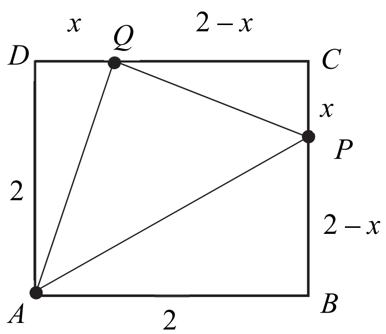
Rozwiązanie prawie pełne .... 4p.

Zdający wyznaczy argument *x*, dla którego funkcja f przyjmuje wartość najmniejszą: $x=1$ lub rozwiąże zadanie do końca, ale z błędami rachunkowymi.

Rozwiązanie pełne .... 5p.

Zdający obliczy pole trójkąta *APQ*: $f(1)=\frac{1}{2}\cdot 1^2-1+2=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$.

Przykładowe rozwiązanie



Pole trójkąta *APQ* jest różnicą pola kwadratu *ABCD* i sumy pól trzech trójkątów prostokątnych: *ABP*, *QCP*, *ADQ*

$$P_{APQ}=P_{ABCD}-\left(P_{ABP}+P_{ADQ}+P_{QCP}\right).$$

Pole kwadratu *ABCD* i trójkątów *ABP*, *QCP*, *ADQ* są równe odpowiednio:

$$P_{ABCD}=2^2=4,$$

$$P_{ABP}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot(2-x),$$

$$P_{QCP}=\frac{1}{2}\cdot x\cdot(2-x),$$

$$P_{ADQ}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot x.$$

Stąd wynika, że pole trójkąta *APQ*, jako funkcja f zmiennej x, jest równe

$f(x)=4-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot(2-x)-\frac{1}{2}\cdot x\cdot(2-x)-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot x$, gdzie $x\in(0,2)$.

Przekształcając równoważnie wzór funkcji f możemy zapisać w postaci: $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+2$.

Najmniejsza wartość funkcja f przyjmuje dla argumentu $x=1$.

Stąd $f(1)=\frac{1}{2}\cdot 1^2-1+2=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$.

Dla $x=1$ pole trójkąta *APQ* jest najmniejsze i równe $\frac{3}{2}$.

Zadanie 11. (*4 pkt*)

Obszar standardów	Opis wymagań
III. Modelowanie matematyczne.	10. Elementy statystyki opisowej; teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji i wariacji do zliczania obiektów w sytuacjach kombinatorycznych (R10).

Zasady oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie składa się z następujących części.
Pierwsza polega na wyróżnieniu trzech przypadków i dodaniu – w końcowej fazie rozwiązania – otrzymanych trzech wyników.
Druga część polega na zapisaniu liczby rozważanych w każdym przypadku liczb i obliczeniu liczby tych liczb.

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1p.

Zdający
- poprawnie wskaże trzy przypadki

albo
- pominie jeden z przypadków, ale zapisze liczbę liczb rozważanych w jednym przypadku, np.: $\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot 8^2$ lub $\binom{6}{3}\cdot\binom{3}{1}\cdot 8^2$ lub $7\cdot\binom{6}{3}\cdot\binom{3}{2}\cdot 8$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2p.

Zdający poprawnie wskaże trzy przypadki oraz zapisze liczbę liczb rozważanych w jednym przypadku lub pominie jeden przypadek, zapisze liczbę liczb w dwóch wskazanych przez siebie przypadkach.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3p.

Zdający poprawnie wskaże trzy przypadki i zapisze liczbę liczb rozważanych w dwóch przypadkach.

Rozwiązanie pełne.. 4p.

Zdający poprawnie wskaże trzy przypadki i poprawnie obliczy liczbę rozważanych liczb: 12960.

Uwagi

1. Rozwiązanie uznajemy za pełne, jeżeli zdający zapisze liczbę rozpatrywanych liczb siedmiocyfrowych bez użycia symbolu Newtona oraz symbolu silni.
2. Jeśli zdający w każdym z trzech rozpatrywanych przypadków poprawnie zapisze jedynie liczbę sposobów rozmieszczenia:
   - cyfry 1 oraz liczbę sposobów rozmieszczenia cyfry 2

   lub
   - cyfry 1 oraz liczbę sposobów rozmieszczenia cyfry innej niż 1 i 2

   lub
   - cyfry 2 oraz liczbę sposobów rozmieszczenia cyfry innej niż 1 i 2,

   to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **2 punkty.**

Zasady oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie składa się z dwóch części.
Pierwsza polega na obliczeniu liczby wszystkich „liczb” siedmiocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie: trzy cyfry 1, dokładnie dwie cyfry 2, dokładnie dwie cyfry ze zbioru $\{0,3,4,5,6,7,8,9\}$ oraz liczby tych spośród nich, których pierwszą cyfrą jest 0.
Druga część polega na obliczeniu liczby szukanych liczb.

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1p.

Zdający zapisze, że

- liczbę wszystkich szukanych liczb można obliczyć, odejmując od liczby wszystkich „liczb” siedmiocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie: trzy cyfry 1, dokładnie dwie cyfry 2, dokładnie dwie cyfry ze zbioru $\{0,3,4,5,6,7,8,9\}$ liczbę tych spośród nich, których pierwszą cyfrą jest 0 lub z rozwiązania wynika, że zdający w ten sposób ustala liczbę szukanych liczb

albo

- wszystkich „liczb” siedmiocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie: trzy cyfry 1, dokładnie dwie cyfry 2, dokładnie dwie cyfry ze zbioru $\{0,3,4,5,6,7,8,9\}$ jest $\binom{7}{3}\cdot\binom{4}{2}\cdot 8^2$

albo

- wszystkich „liczb” siedmiocyfrowych, których pierwszą cyfrą jest 0 oraz w których zapisie występują dokładnie: trzy cyfry 1, dokładnie dwie cyfry 2, dokładnie jedna cyfra ze zbioru $\{0,3,4,5,6,7,8,9\}$ jest $\binom{6}{3}\cdot\binom{3}{2}\cdot 8$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2p.

Zdający zapisze, że

- liczbę wszystkich szukanych liczb można obliczyć, odejmując od liczby wszystkich „liczb” siedmiocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie: trzy cyfry 1, dokładnie dwie cyfry 2, dokładnie dwie cyfry ze zbioru $\{0,3,4,5,6,7,8,9\}$ liczbę tych spośród nich, których pierwszą cyfrą jest 0 lub z rozwiązania wynika, że zdający w ten sposób ustala liczbę szukanych liczb

oraz
wszystkich „liczb” siedmiocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie: trzy cyfry 1, dokładnie dwie cyfry 2, dokładnie dwie cyfry ze zbioru $\{0,3,4,5,6,7,8,9\}$ jest $\binom{7}{3}\cdot\binom{4}{2}\cdot 8^2$

albo

- liczbę wszystkich szukanych liczb można obliczyć, odejmując od liczby wszystkich „liczb” siedmiocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie: trzy cyfry 1, dokładnie dwie cyfry 2, dokładnie dwie cyfry ze zbioru $\{0,3,4,5,6,7,8,9\}$ liczbę tych spośród nich, których pierwszą cyfrą jest 0 lub z rozwiązania wynika, że zdający w ten sposób ustala liczbę szukanych liczb
  oraz
  wszystkich „liczb” siedmiocyfrowych, których pierwszą cyfrą jest 0 oraz w których zapisie występują dokładnie: trzy cyfry 1, dokładnie dwie cyfry 2 i dokładnie jedna cyfra ze zbioru $\{0,3,4,5,6,7,8,9\}$ jest $\binom{6}{3}\cdot\binom{3}{2}\cdot 8$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3p.

Zdający zapisze, że
wszystkich „liczb” siedmiocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie: trzy cyfry 1, dokładnie dwie cyfry 2, dokładnie dwie cyfry ze zbioru $\{0,3,4,5,6,7,8,9\}$ jest $\binom{7}{3}\cdot\binom{4}{2}\cdot 8^2$

oraz
wszystkich „liczb” siedmiocyfrowych, których pierwszą cyfrą jest 0 oraz w których zapisie występują dokładnie: trzy cyfry 1, dokładnie dwie cyfry 2 i dokładnie jedna cyfra ze zbioru $\{0,3,4,5,6,7,8,9\}$ jest $\binom{6}{3}\cdot\binom{3}{2}\cdot 8$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne .... 4p.

Zdający poprawnie obliczy liczbę rozważanych liczb: 12960.

Uwagi

1. Rozwiązanie uznajemy za pełne, jeżeli zdający zapisze liczbę rozpatrywanych liczb siedmiocyfrowych bez użycia symbolu Newtona oraz symbolu silni.
2. Jeśli zdający, obliczając liczbę wszystkich szukanych liczb metodą opisaną w II sposobie rozwiązania, poprawnie zapisze jedynie liczbę sposobów rozmieszczenia w całej I części rozwiązania:

- cyfry 1 oraz liczbę sposobów rozmieszczenia cyfry 2

lub

- cyfry 1 oraz liczbę sposobów rozmieszczenia cyfry innej niż 1 i 2

lub

- cyfry 2 oraz liczbę sposobów rozmieszczenia cyfry innej niż 1 i 2,

to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **2 punkty.**

Przykładowe rozwiązania

<u>I sposób</u>
Rozważamy trzy przypadki.

- I. Pierwszą cyfrą rozpatrywanej liczby jest 1. Wtedy na następnych sześciu miejscach znajdują się dokładnie dwie cyfry 1, dokładnie dwie cyfry 2 i dokładnie dwie cyfry ze zbioru {0,3,4,5,6,7,8,9}. Takich liczb istnieje
$$\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot 8^2 = 15\cdot 6\cdot 64 = 5760\,.$$
- II. Pierwszą cyfrą rozpatrywanej jest 2. Wtedy na następnych sześciu miejscach znajdują się dokładnie trzy cyfry 1, dokładnie jedna cyfra 2 i dokładnie dwie cyfry ze zbioru {0,3,4,5,6,7,8,9}. Takich liczb istnieje
$$\binom{6}{3}\cdot\binom{3}{1}\cdot 8^2 = 20\cdot 3\cdot 64 = 3840\,.$$
- III. Pierwsza cyfra rozpatrywanej liczby jest różna od 1 i od 2. Pierwsza cyfra jest też różna od 0. Zatem na pierwszym miejscu stoi jedna z siedmiu cyfr ze zbioru {3,4,5,6,7,8,9}. Wtedy na następnych sześciu miejscach znajdują się dokładnie trzy cyfry 1, dokładnie dwie cyfry 2 i dokładnie jedna cyfra ze zbioru {0,3,4,5,6,7,8,9}. Takich liczb istnieje
$$7\cdot\binom{6}{3}\cdot\binom{3}{2}\cdot 8 = 7\cdot 20\cdot 3\cdot 8 = 3360\,.$$

Łącznie istnieje zatem $5760+3840+3360=12960$ rozważanych liczb.
Istnieje 12960 siedmiocyfrowych liczb naturalnych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie trzy cyfry 1 i dokładnie dwie cyfry 2.

<u>II sposób</u>
Zliczamy wszystkie „liczby” siedmiocyfrowe, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie: trzy cyfry 1, dokładnie dwie cyfry 2 i dokładnie dwie cyfry ze zbioru {0,3,4,5,6,7,8,9}. Wtedy na siedmiu miejscach znajdują się dokładnie trzy cyfry 1, dokładnie dwie cyfry 2 i dokładnie dwie cyfry ze zbioru {0,3,4,5,6,7,8,9}.
Takich „liczb” jest
$$\binom{7}{3}\cdot\binom{4}{2}\cdot 8^2 = 35\cdot 6\cdot 64 = 13440\,.$$
Następnie zliczamy wszystkie „liczby” siedmiocyfrowe, których pierwszą cyfrą jest 0 oraz w których zapisie występują dokładnie: trzy cyfry 1, dokładnie dwie cyfry 2 i dokładnie jedna cyfra ze zbioru {0,3,4,5,6,7,8,9}.
Takich „liczb” jest
$$\binom{6}{3}\cdot\binom{3}{2}\cdot 8 = 20\cdot 3\cdot 8 = 480\,.$$
Jest zatem $13440-480=12960$ rozważanych liczb.

Zadanie 12. (*6 pkt*)

Obszar standardów	Opis wymagań
IV. Użycie i tworzenie strategii.	9. Stereometria. Zdający wyznacza związki miarowe w wielościanach i bryłach obrotowych z zastosowaniem trygonometrii (9.b). 7. Planimetria. Zdający stosuje twierdzenia charakteryzujące czworokąty wpisane w okrąg i czworokąty opisane na okręgu (R9.a).

Zasady oceniania
Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania………………………………………………………… 1p.
Zdający:

- zapisze, że spodek wysokości ostrosłupa jest środkiem okręgu wpisanego w trapez $ABCD$ lub z rozwiązania wynika, że zdający tę własność stosuje, np.: zapisze $|AB|+|CD|=10+16$

albo

- obliczy wysokość trapezu $ABCD$: $h=|CE|=8$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp………………………………………………… 2p.

Zdający:

- zapisze, że spodek wysokości ostrosłupa jest środkiem okręgu wpisanego w trapez $ABCD$ lub z rozwiązania wynika, że zdający tę własność stosuje, np.: zapisze $|AB|+|CD|=10+16$ i obliczy wysokość trapezu $ABCD: h=|CE|=8$

albo

- obliczy wysokość trapezu $ABCD$: $h=|CE|=8$ i wysokość tego ostrosłupa $H=18$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym dokonano istotnego postępu, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania…...……………………………………………………….....… 3p.

Zdający:

- zapisze, że spodek wysokości ostrosłupa jest środkiem okręgu wpisanego w trapez $ABCD$ lub z rozwiązania wynika, że zdający tę własność stosuje, np.: zapisze $|AB|+|CD|=10+16$ oraz obliczy wysokość tego ostrosłupa $H=18$

albo

- obliczy pole podstawy tego ostrosłupa: $P_{ABCD}=104$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ……………………………………………… 4p.

Zdający obliczy wysokość ostrosłupa $H=18$ i pole jego podstawy: $P_{ABCD}=104$
i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie zadania do końca z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozumowania (np. błędy rachunkowe, błędy w przepisaniu, itp.) .... 5p.

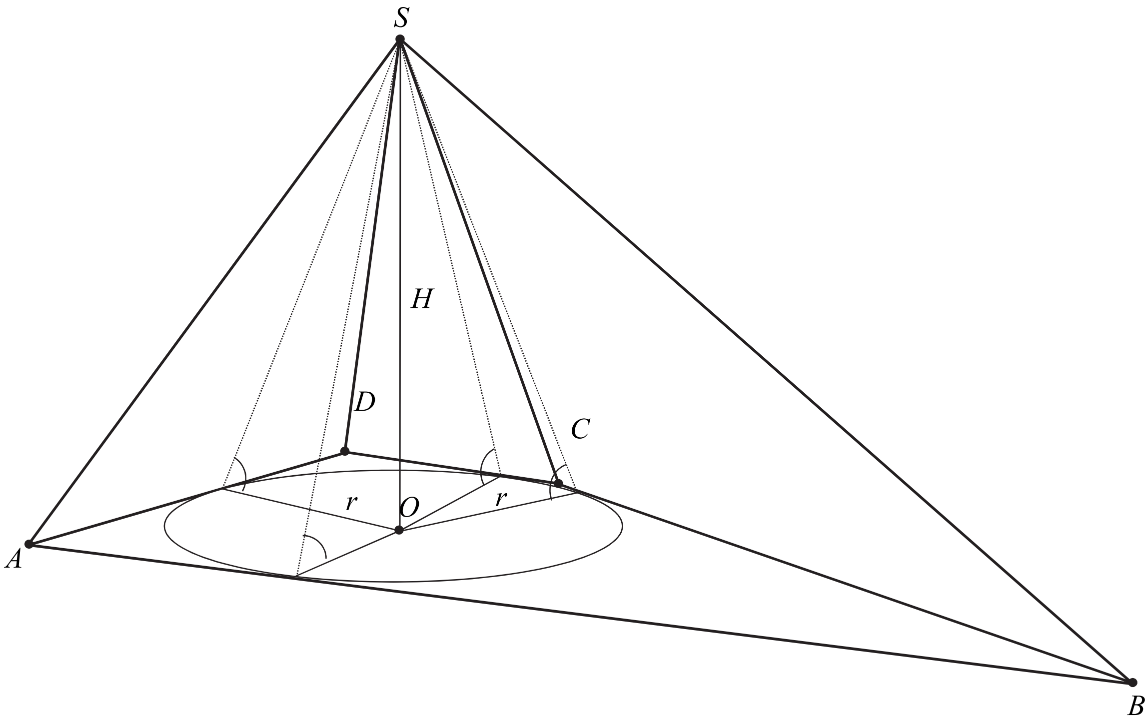
Rozwiązanie pełne……………….....……………………………..………………...……….... 6p.

Zdający obliczy objętość ostrosłupa: $V = 624$.

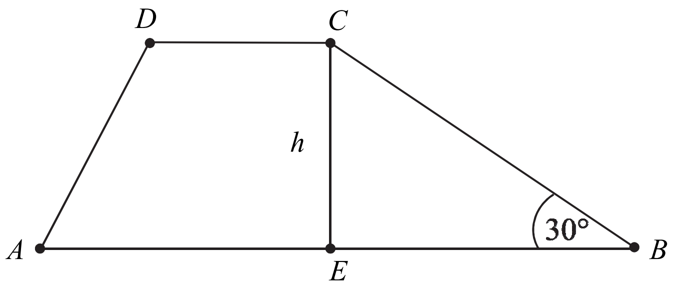
Uwaga.

1. Jeżeli zdający we wzorze na objętość ostrosłupa pominie czynnik $\frac{1}{3}$, to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **5 punktów**.
2. Jeżeli zdający popełni błąd polegający na niepoprawnym zastosowaniu definicji funkcji tangens, np.: przyjmie, ze jest to stosunek długości przyprostokątnej lezącej przy kącie do przyprostokątnej leżącej naprzeciw tego kąta, to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **4 punkty.**
3. Jeżeli zdający popełni błąd polegający na tym, że niepoprawnie ustali związki między długościami boków trójkąta prostokątnego o kątach ostrych $30°$ i $60°$, np. przyjmie, że wysokość trapezu to $8\sqrt{3}$, to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **4 punkty.**
4. Jeżeli zdający błędnie przyjmuje, że trapez *ABCD* jest równoramienny lub przyjmie, że podstawy tego trapezu mają długości 16 i 10, to za całe rozwiązanie może trzymać co najwyżej **1 punkt.**

Przykładowe rozwiązanie



Ponieważ w tym ostrosłupie wszystkie ściany boczne nachylone są do podstawy pod tym samym kątem, więc spodek *O* wysokości *H* ostrosłupa jest środkiem okręgu wpisanego w wielokąt będący podstawą ostrosłupa. Niech r oznacza promień okręgu wpisanego w podstawę, h – wysokość trapezu $ABCD$, H natomiast niech oznacza wysokość ostrosłupa.



Ponieważ w trapez można wpisać okrąg, więc spełniony jest warunek: $|AB|+|CD|=26$.
Korzystając z własności trójkąta prostokątnego EBC o kątach $30°$, $60°$, $90°$, otrzymujemy:

$h=|CE|=8$, a stąd wynika, że $r=4$.

Ponieważ $\operatorname{tg}\alpha=\frac{9}{2}$, więc $\frac{9}{2}=\frac{H}{r}$ i stąd obliczamy $H=18$.

Objętość tego ostrosłupa jest zatem równa

$$V=\frac{1}{3}\cdot P_{ABCD}\cdot H=\frac{1}{3}\cdot\frac{|AB|+|CD|}{2}\cdot h\cdot H=\frac{1}{3}\cdot\frac{26}{2}\cdot 8\cdot 18=624.$$