

LIGA MATEMATYCZNA
FINAŁ
25 kwietnia 2009
SZKOŁA PONADGIMNAZJALNA

ZADANIE 1.

Znajdź wszystkie funkcje $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające warunek $2f(x) + f(1 - x) = x$ dla wszystkich liczb rzeczywistych x .

ZADANIE 2.

Wypisujemy kolejne liczby naturalne od 1 do 2009. Każdą z tych liczb zastępujemy sumą jej cyfr i powtarzamy to aż do momentu uzyskania liczb jednocyfrowych. Jakich liczb w tym ciągu jest więcej: jedynek czy ósemek?

ZADANIE 3.

Wyznacz wszystkie wartości naturalne n , dla których $3^n - 1$ jest liczbą podzielną przez 13. Wykaż, że dla żadnej wartości naturalnej n liczba $3^n + 1$ nie jest podzielna przez 13.

ZADANIE 4.

Liczby $n + 2$ oraz $n - 10$ są kwadratami liczb naturalnych. Znajdź n .

ZADANIE 5.

W czworokącie wypukłym $ABCD$ trójkąty ABC , BCD , CDA , DAB mają równe obwody. Udowodnij, że ten czworokąt jest prostokątem.

ZADANIE 6.

Wykaż, że wśród 40 liczb naturalnych można wybrać 4, z których każde dwie dają różnicę podzielną przez 13.

ZADANIE 7.

Trapez prostokątny opisano na okręgu. Oblicz długości boków nierównoległych, jeżeli podstawy są równe a i b .