

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
im. Stanisława Staszica w Krakowie
OLIMPIADA „O DIAMENTOWY INDEKS AGH” 2012/13
MATEMATYKA - ETAP III

ZADANIA PO 10 PUNKTÓW

1. Udowodnij, że zbiór $S = \{6n + 3 : n \in \mathbb{N}\}$, gdzie \mathbb{N} jest zbiorem wszystkich liczb naturalnych, zawiera nieskończenie wiele kwadratów liczb całkowitych.
2. Rozwiąż równanie $4 \cos^2 2x = 3$.
3. Sfera S_1 jest wpisana w sześcián, sfera S_2 jest styczna do wszystkich krawędzi tego sześciánu, a sfera S_3 jest opisana na tym sześciánie. Sprawdź, czy pola tych sfer tworzą ciąg geometryczny lub arytmetyczny.
4. Rozwiąż nierówność $\sqrt{x^2 - 16x + 64} + x \leq 7 + \sqrt{x^2 + 6x + 9}$.

ZADANIA PO 20 PUNKTÓW

5. Wykaż, że niezależnie od wartości parametru m równanie
$$x^3 - (m + 1)x^2 + (m + 3)x - 3 = 0$$
ma pierwiastek całkowity. Dla jakich m wszystkie pierwiastki rzeczywiste tego równania są całkowite?
6. Rzucamy n razy sześcienną kością do gry. Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń:
A: ani razu nie wypadła szóstka,
B: parzysta liczba oczek wypadła więcej razy niż nieparzysta,
C: suma wyrzuconych oczek jest równa $6n - 2$.
7. Rozwiąż nierówność

$$3 - \log_{0,5} x - \log_{0,5}^2 x - \log_{0,5}^3 x - \dots \geq 4 \log_{0,5} x.$$