



I Liceum Ogólnokształcące
w Słupsku



Akademia Pomorska
w Słupsku

LIGA MATEMATYCZNA
FINAŁ
11 kwietnia 2012
SZKOŁA PONADGIMNAZJALNA

ZADANIE 1.

Liczby naturalne od 1 do 1000 pomnożono kolejno każda przez każdą. Wykaż, że wśród tych iloczynów więcej jest liczb parzystych niż nieparzystych.

ZADANIE 2.

Uzasadnij, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $n^3 + 5n$ jest podzielna przez 6.

ZADANIE 3.

Wyznacz wszystkie funkcje $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające równanie

$$2f(x) + f(-x) = 3x^2 + x + 3$$

dla każdej liczby rzeczywistej x .

ZADANIE 4.

Na bokach AB , BC i AC trójkąta wybrano odpowiednio punkty P , Q i R tak, że $AP = CQ$ oraz na czworokącie $RPBQ$ można opisać okrąg. Styczne do okręgu opisanego na trójkącie ABC w punktach A i C przecinają proste RP i RQ odpowiednio w punktach X i Y . Wykaż, że $RX = RY$.

ZADANIE 5.

W wierzchołkach siedmiokąta foremnego ustawiono pionki czerwone lub niebieskie - po jednym w każdym wierzchołku. Uzasadnij, że znajdują się trzy wierzchołki z pionkami tego samego koloru takie, że będą wierzchołkami trójkąta równoramiennego.

ZADANIE 6.

Znajdź wszystkie liczby pierwsze p takie, że $2p - 1$, $2p + 1$ są również liczbami pierwszymi.

ZADANIE 7.

Tarczę podzielono na sześć sektorów i w każdy wpisano inną liczbę naturalną od 1 do 6. Zmieniamy te liczby przez dodanie do dwóch z nich tej samej liczby. Operację tę powtarzamy wielokrotnie. Czy w którymś momencie we wszystkich sektorach będzie ta sama liczba?