Praca kontrolna nr 6

20.1. Wyznaczyć wszystkie wartości parametru rzeczywistego m, dla których prosta $x = m$ jest osią symetrii wykresu funkcji $p(x) = (m^2 - 2m)x^2 - (2m - 4)x + 3$. Sporządzić rysunek.

20.2. Z kuli o promieniu R wycięto ósmą część trzema wzajemnie prostopadłymi płaszczyznami przechodzącymi przez środek kuli. W tak otrzymaną bryłę wpisano inną kulę. Obliczyć stosunek pola powierzchni tej kuli do pola powierzchni bryły.

20.3. W trzech pustych urnach K, L, M rozmieszczamy losowo 4 różne kule. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że żadna z urn K i L nie pozostanie pusta.

20.4. Dane są punkty $A(2, 6)$, $B(-2, 6)$ i $C(0, 0)$. Wyznaczyć równanie linii zawierającej wszystkie punkty trójkąta ABC, dla których suma kwadratów ich odległości od trzech boków jest stała i wynosi 9. Sporządzić rysunek.

20.5. Narysować dokładny wykres i napisać równania asymptot funkcji

$$f(x) = \frac{(x+1)^2 - 1}{x|x-1|}$$

nie badając jej przebiegu.

20.6. Rozwiązać nierówność

$$|x|^{2x-1} \leq \frac{1}{x^2}.$$

20.7. Styczna do wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{3+x} + \sqrt{3-x}$ w punkcie $A(x_0, f(x_0))$ przecina oś Ox w punkcie P, a oś Oy w punkcie Q tak, że $|OP| = |OQ|$. Wyznaczyć x_0.

20.8. Trójkąt równoboczny o boku a podzielono prostą l na dwie figury, których stosunek pól jest równy $1 : 5$. Prosta ta przecina bok AC w punkcie D pod kątem $15°$, a bok AB w punkcie E. Wykazać, że $|AD| + |AE| = a$.