

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
im. Stanisława Staszica w Krakowie
OLIMPIADA „O DIAMENTOWY INDEKS AGH” 2012/13
MATEMATYKA - ETAP II

ZADANIA PO 10 PUNKTÓW

1. Rozwiąż równanie $(5\sqrt{2} - 7)^{x-1} = (5\sqrt{2} + 7)^{3x}$.
2. Jedna z krawędzi bocznych ostrosłupa jest prostopadła do jego podstawy, będącej prostokątem o bokach długości 5 cm i 12 cm. Najdłuższa krawędź boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60° . Oblicz pole powierzchni bocznej ostrosłupa.
3. Wyznacz dziedzinę funkcji określonej wzorem

$$f(x) = \sqrt{\log_{\pi-1}(2x-1) - \log_{\pi-1}(5-3x)}.$$

4. Oblicz granicę ciągu (a_n) , gdzie

$$a_n = \frac{3 + 6 + 9 + \dots + 3n}{(2n+1)^2}.$$

ZADANIA PO 20 PUNKTÓW

5. Wykaż, że $(2n+2)$ -cyfrowa liczba $\underbrace{11\dots1}_n \underbrace{22\dots2}_{n+1} 5$ jest kwadratem liczby naturalnej (dla dowolnego n).
6. Dane są punkty $A = (-5, 0)$, $B = (-3, -4)$, $C = (3, 4)$, $M = (7, 1)$. Z punktu M poprowadzono styczne k i l do okręgu opisanego na trójkącie ABC . Oblicz pole trójkąta KLM , gdzie K i L są punktami styczności prostych k i l z tym okręgiem.
7. Rzucamy monetą n razy ($n \geq 2$). Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń:
 A : reszka wypadła dokładnie k razy;
 B : reszka wypadła więcej razy niż orzeł;
 C : przynajmniej dwa razy pod rząd moneta upadła tą samą stroną.