

**AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA im. Stanisława Staszica  
w Krakowie**

**OLIMPIADA „O DIAMENTOWY INDEKS AGH” 2007/8**

**MATEMATYKA - ETAP I**

**ZADANIA PO 10 PUNKTÓW**

1. W trójkącie równoramiennym dane są długości podstawy  $a$  i ramienia  $b$ . Oblicz długość wysokości tego trójkąta opuszczonej na jego ramię.

2. Rozwiąż nierówność

$$|2x^4 - 17| < 15.$$

3. Oblicz granicę ciągu, którego  $n$ -ty wyraz jest równy

$$a_n = n^3 - \sqrt{n^6 - 5n^3}.$$

4. Na ile sposobów można rozmieścić  $k$  kul ( $k \geq 4$ , każda kula innego koloru) w  $k$  ponumerowanych pudełkach tak , aby

- a) żadne pudełko nie było puste?
- b) dokładnie jedno pudełko było puste?
- c) dokładnie  $k - 2$  pudełka były puste?

**ZADANIA PO 20 PUNKTÓW**

5. Długość wysokości ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa długości krawędzi podstawy. Oblicz stosunek objętości kuli wpisanej w ten ostrosłup do objętości kuli opisanej na nim.

6. Wyznacz liczbę rozwiązań równania

$$(m - 3)x^4 - 3(m - 3)x^2 + m + 2 = 0$$

w zależności od parametru  $m$ .

7. Rozłóż na czynniki wielomian

$$W(x) = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x.$$

Udowodnij, że wartość  $W(n)$  tego wielomianu dla dowolnej liczby naturalnej  $n$  jest podzielna przez 12. Dla jakich naturalnych  $n$  liczba  $W(n)$  nie jest podzielna przez 60?