



LIGA MATEMATYCZNA
im. Zdzisława Matuskiego
FINAŁ 20 kwietnia 2021
SZKOŁA PONADPODSTAWOWA

ZADANIE 1.

Wykaż, że spośród dowolnych siedmiu liczb naturalnych można wybrać dwie liczby a, b takie, że różnica $a^2 - b^2$ jest podzielna przez 10.

ZADANIE 2.

W zbiorze liczb rzeczywistych rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x^2 + x(y - 4) = -2 \\ y^2 + y(x - 4) = -2. \end{cases}$$

ZADANIE 3.

a, b, c, d, e są to liczby 7, 8, 9, 10, 11, ale ustawione w innej, przypadkowej kolejności. Wykaż, że iloczyn $(a - 1)(b - 2)(c - 3)(d - 4)(e - 5)$ jest liczbą parzystą.

ZADANIE 4.

W wycinek koła o promieniu R wpisano okrąg o promieniu r . Cięciwa łącząca końce promieni wycinka koła ma długość $2a$. Wykaż, że $\frac{1}{r} = \frac{1}{R} + \frac{1}{a}$.

ZADANIE 5.

Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości a, b . Wyznacz długość odcinka wyciętego z dwusiecznej kąta prostego przez przeciwprostokątną.

ZADANIE 6.

Adam użył dwukrotnie każdej z cyfr $1, 2, 3, \dots, 9$ i utworzył kilka parami różnych liczb pierwszych w taki sposób, że suma tych liczb jest możliwie najmniejsza. Oblicz tę sumę.

ZADANIE 7.

Funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia warunek

$$2f(x) + 3f\left(\frac{2022}{x}\right) = 5x$$

dla dowolnej dodatniej liczby rzeczywistej x . Oblicz $f(6)$.