

## Praca kontrolna nr 5

**5.1.** Narysować na płaszczyźnie zbiór

$$A = \{(x, y) : ||x| - y| \leq 1, -1 \leq x \leq 2\}$$

i znaleźć punkt zbioru  $A$  leżący najbliżej punktu  $P(0, 4)$ .

**5.2.** Obliczyć  $\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha$ , mając dane  $\sin 2\alpha = \frac{1}{4}$ ,  $\alpha \in (0, 2\pi)$ .

**5.3.** Rozważmy rodzinę prostych przechodzących przez punkt  $P(0, -1)$  i przecinających parabolę  $y = \frac{1}{4}x^2$  w dwóch punktach. Wyznaczyć równanie środków powstałych w ten sposób cięciw paraboli. Sporządzić rysunek i opisać otrzymaną krzywą.

**5.4.** Rozwiązać równanie

$$\sqrt{x + \sqrt{x^2 - x + 2}} - \sqrt{x - \sqrt{x^2 - x + 2}} = 4.$$

**5.5.** Dwaj strzelcy strzelają do tarczy. Pierwszy trafia z prawdopodobieństwem  $\frac{2}{3}$  w każdym strzale i wykonuje 4 strzały, a drugi trafia z prawdopodobieństwem  $\frac{1}{3}$  i oddaje 8 strzałów. Który ze strzelców ma większe prawdopodobieństwo uzyskania co najmniej trzech trafień, jeśli wyniki kolejnych strzałów są wzajemnie niezależne?

**5.6.** Do naczynia w kształcie walca o promieniu podstawy  $R$  wrzucono trzy jednakowe kulki o promieniu  $r$ , gdzie  $2r < 2R \leq r(2 + \sqrt{3})$ . Okazało się, że płaska pokrywa naczynia jest styczna do kulki znajdującej się najwyżej w naczyniu. Obliczyć wysokość naczynia.

**5.7.** Dla jakich wartości parametru  $m$  funkcja

$$f(x) = \frac{x^3}{mx^2 + 6x + m}$$

jest określona i rosnąca na całej prostej rzeczywistej.

**5.8.** Dany jest trójkąt o wierzchołkach  $A(-2, 1)$ ,  $B(-1, -6)$ ,  $C(2, 5)$ . Za pomocą rachunku wektorowego obliczyć cosinus kąta między dwusieczną kąta  $A$  i środkową boku  $BC$ . Sporządzić rysunek.