LIGA MATEMATYCZNA
im. Zdzisława Matuskiego
GRUDZIEŃ 2017
SZKOŁA PONADGIMNAZJALNA

ZADANIE 1.
Trapez prostokątny o podstawach a, b opisany jest na okręgu o średnicy d. Wykaż, że prawdziwa jest nierówność

$$d \leqslant \sqrt{\tfrac{a^2+b^2}{2}}.$$

ZADANIE 2.
W zbiorze liczb rzeczywistych rozwiąż równanie

$$x^2 - 8[x] + 7 = 0,$$

gdzie $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie przekraczającą liczby x.

ZADANIE 3.
Czy istnieją liczby $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{1001}$ równe (-1) lub 1 takie, że

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + \ldots + x_{1000}x_{1001} + x_{1001}x_1 = 499?$$

ZADANIE 4.
W zbiorze liczb rzeczywistych rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x(y+z) = 6 - x^2 \\ y(z+x) = 12 - y^2 \\ z(x+y) = 18 - z^2. \end{cases}$$

ZADANIE 5.
Mikołaj wybrał trzy liczby rzeczywiste a, b, c i określił działanie $\star$ wzorem

$$x \star y = ax + by + cxy$$

dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y. Obliczył $1 \star 2 = 3$ i $2 \star 3 = 4$ oraz zauważył, że istnieje niezerowa liczba rzeczywista t taka, że $x \star t = x$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Wyznacz t.