

**AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA**  
**im. Stanisława Staszica w Krakowie**  
**OLIMPIADA „O DIAMENTOWY INDEKS AGH” 2018/19**  
**MATEMATYKA - ETAP III**

**ZADANIA PO 10 PUNKTÓW**

1. Ze zbioru dziesięciu kolejnych liczb naturalnych usunięto jedną z nich. Suma pozostałych liczb wynosi 2019. Znajdź sumę wszystkich dziesięciu liczb.
2. Ostrosłup podzielono na dwie bryły płaszczyzną równoległą do podstawy i dzielącą jego wysokość na dwa przystające odcinki. Jaki procent objętości ostrosłupa stanowi objętość większej z tych brył?
3. Wyznacz liczbę  $p$ , dla której

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( n - \sqrt[3]{n^3 + pn^2} \right) = -2.$$

4. Oblicz długości przekątnych równoległoboku o bokach długości 3 i 5, przy czym sinus kąta wewnętrznego jest równy 0,8.

**ZADANIA PO 20 PUNKTÓW**

5. Wyznacz zbiór  $(A \setminus B) \cap C$ , gdzie

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \log_{\frac{1}{4}}(2^x + 10) \leq 0, 5 + 2 \log_{\frac{1}{4}}(2^x - 2)\},$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} : x + 1 \leq \sqrt{x + 3}\},$$

$$C = \{n \in \mathbb{N} : \sqrt{n} \binom{n+2}{2} > 3^{n-1}\}.$$

6. Losowo dzielimy  $n$ -elementowy zbiór  $X$  na dwa zbiory  $S$  i  $X \setminus S$ , przy czym dla dowolnego  $a \in X$  prawdopodobieństwo, że  $a$  zostanie wylosowany do zbioru  $S$  wynosi  $\frac{1}{2}$ . Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń  
 $A$  : zbiór  $S$  ma dokładnie  $k$  elementów;  
 $B$  : żaden ze zbiorów  $S$  i  $X \setminus S$  nie jest pusty;  
 $C$  : zbiór  $S$  zawiera więcej elementów niż zbiór  $X \setminus S$ .
7. Spośród wszystkich trójkątów prostokątnych o przeciwprostokątnej długości  $c$  wskazać ten, dla którego największa jest objętość bryły obrotowej, powstałej z obrotu tego trójkąta wokół przyprostokątnej,  
a) która jest krótsza.  
b) która nie jest krótsza.