PRACA KONTROLNA nr 6

marzec 2005r.

1. Suma cyfr liczby trzycyfrowej wynosi 9. Cyfra setek jest równa 1/8 liczby złożonej z dwu pozostałych cyfr, a cyfra jednostek jest także równa 1/8 liczby złożonej z dwu pozostałych cyfr. Co to za liczba?

2. Obliczyć $\operatorname{tg}\beta$, gdzie $\beta \in [0, \pi]$, wiedząc, że $\cos\beta = \sin\alpha + \cos\alpha$ oraz że $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$, $\alpha \in [0, \pi]$. W której ćwiartce leży kąt $\alpha+\beta$? Odpowiedź uzasadnić nie wykonując obliczeń przybliżonych.

3. Wyznaczyć równania wszystkich parabol przechodzących przez punkt $P(1, \sqrt{3})$, których wierzchołek i punkty przecięcia z osią Ox tworzą trójkąt równoboczny o polu $\sqrt{3}$. Sporządzić rysunek.

4. Rzucamy trzy razy kostką do gry. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wyniki **kolejnych** rzutów utworzą a) ciąg arytmetyczny; b) ciąg rosnący?

5. Z punktu P leżącego w odległości R od powierzchni kuli o promieniu R poprowadzono trzy półproste styczne do tej kuli tworzące kąt trójścienny o jednakowych kątach płaskich. Obliczyć cosinus kąta płaskiego tego trójścianu.

6. Okrąg o promieniu r przecina każde z ramion kąta ostrego 2γ w dwóch punktach w taki sposób, że wyznaczają one dwie cięciwy jednakowej długości, a czworokąt utworzony przez te cztery punkty ma największe pole. Obliczyć odległość środka okręgu od wierzchołka kąta?

7. Rozwiązać nierówność
$$\log_x \frac{1-2x}{2-x} \geqslant 1.$$

8. Wyznaczyć i narysować zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których suma odległości od osi Ox i od okręgu $x^2 + (y-1)^2 = 1$ wynosi 2.

9. Dana jest funkcja $f(x) = \cos 2x + \frac{2}{3}\sin x \cdot |\sin x|$. a) Korzystając z definicji uzasadnić, że $f'(0) = 0$. b) Znaleźć wszystkie punkty z przedziału $[-\pi, \pi]$, w których styczna do wykresu funkcji $f(x)$ jest równoległa do stycznej w punkcie $x = \frac{\pi}{4}$. Rozwiązanie zilustrować odpowiednim rysunkiem.