

PRACA KONTROLNA nr 1 - POZIOM ROZSZERZONY

1. Narysować wykres funkcji $f(x) = \begin{cases} |3^x - 1| & \text{dla } x \leq 1 \\ \frac{3-x}{x} & \text{dla } x > 1 \end{cases}$. Posługując się nim podać wzór i narysować wykres funkcji $g(m)$ określającej liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$, gdzie m jest parametrem rzeczywistym.
2. Rozwiązać równanie $\frac{\sin 3x}{\cos x} = \operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x$.
3. Napisać równanie stycznej k do wykresu funkcji $f(x) = x^2 - 4x + 3$ w punkcie $(x_1, 0)$, gdzie x_1 jest najmniejszym miejscem zerowym tej funkcji. Znaleźć punkt przecięcia tej stycznej ze styczną do niej prostopadłą. Sporządzić staranny rysunek.
4. Rozwiązać nierówność $\log_2(x-1) - \log_{\frac{1}{2}}(4-x) - \log_{\sqrt{2}}(x-2) \leq 0$.
5. Rozwiązać nierówność $\sqrt{x^2-1} + 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} + \dots \geq \frac{9}{2}$, gdzie lewa strona jest sumą wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego.
6. W stożek wpisano kulę, a następnie w obszar zawarty między tą kulą i wierzchołkiem stożka wpisano kulę o objętości 8 razy mniejszej. Obliczyć stosunek objętości stożka do objętości kuli na nim opisanej.