

**AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA im. Stanisława Staszica
w Krakowie**

OLIMPIADA „O DIAMENTOWY INDEKS AGH” 2008/9

MATEMATYKA - ETAP II

ZADANIA PO 10 PUNKTÓW

1. Suma dwóch liczb rzeczywistych wynosi 6. Jaką największą wartość może mieć ich iloczyn?
2. Sprowadź do najprostszej postaci wyrażenie

$$\frac{(a^3 + b^3)(a^{-1} - b^{-1})}{(a^{-1} + b^{-1})[(a - b)^2 + ab]}.$$

3. Odległość środka okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym od przyprostokątnych wynosi odpowiednio p i q . Oblicz obwód tego trójkąta.
4. Oblicz $\log_9 \cos \frac{11\pi}{6} - \log_9 \sin \frac{29\pi}{6}$.

ZADANIA PO 20 PUNKTÓW

5. Dla jakich m proste $mx + (m + 1)y = 2$ i $4x + (m + 4)y = 1$ przecinają się w punkcie leżącym wewnątrz II lub IV ćwiartki układu współrzędnych?
6. k pasażerów wsiada do pociągu złożonego z 3 wagonów, przy czym każdy wybiera wagon niezależnie i z jednakowym prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$. Zakładając, że $k \geq 3$, oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń:
 A - wszyscy wsiadają do jednego wagonu,
 B - dokładnie jeden wagon będzie pusty,
 C - żaden wagon nie będzie pusty.
7. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt ABC , w którym bok AB ma długość a , a kąty wewnętrzne do niego przyległe mają miary β i γ . Krawędź boczna ostrosłupa wychodząca z wierzchołka C jest prostopadła do podstawy i ma długość d . Oblicz objętości brył, na które ten ostrosłup dzieli płaszczyzna równoległa do podstawy i odległa od niej o $\frac{d}{3}$.