

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
im. Stanisława Staszica w Krakowie
OLIMPIADA „O DIAMENTOWY INDEKS AGH” 2011/12

MATEMATYKA - ETAP I

ZADANIA PO 10 PUNKTÓW

1. Pary (x, y) liczb całkowitych spełniające równanie

$$xy^2 - y^3 - xy + x^2 + 5 = 0$$

są współrzędnymi wierzchołków pewnego wielokąta. Oblicz jego pole.

2. Oblicz sumę n początkowych wyrazów ciągu (a_n) , w którym

$$a_1 = 3, \quad a_2 = 33, \quad a_3 = 333, \quad a_4 = 3333, \quad \dots$$

3. W półokrąg o promieniu R wpisano trapez, w którym ramię jest nachylone pod kątem α do podstawy będącej średnicą okręgu. Oblicz pole trapezu.

4. Rozwiąż równanie

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (x + x^3 + x^5 + \dots + x^{2n-1}) = \frac{2}{3}.$$

ZADANIA PO 20 PUNKTÓW

5. Wyznacz równanie krzywej będącej zbiorem środków wszystkich cięciw paraboli $y = x^2 - 2$ przechodzących przez początek układu współrzędnych. Naszkicuj tę krzywą.

6. Narysuj w układzie współrzędnych zbiór

$$S = \{(x, y) : \log_x |y - 2| > \log_{|y-2|} x\}.$$

7. a) Zbadaj w zależności od parametru k , ile rozwiązań ma układ równań

$$\begin{cases} kx + (k+1)y = k-1 \\ 4x + (k+4)y = k. \end{cases}$$

- b) Dla jakich wartości parametru k ten układ ma dokładnie jedno rozwiązanie należące do wnętrza trójkąta o wierzchołkach

$$A = (0, 0), \quad B = \left(\frac{2}{3}, 0\right), \quad C = (0, 2).$$