PRACA KONTROLNA nr 8 - POZIOM ROZSZERZONY

1. Rozwiązać nierówność

$$\frac{1}{x^2 - 2x - 3} \geqslant \frac{1}{|x - 2| + 3}.$$

2. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 8, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1. \end{cases}$$

Obliczyć pole wielokąta o wierzchołkach, których współrzędne spełniają powyższy układ. Podać ilustrację graficzną tego układu.

3. Wyznaczyć wszystkie wartości parametru $\alpha \in [-\pi, \pi)$, dla których równanie kwadratowe

$$(\sin 4\alpha) x^2 - 2(\cos \alpha) x + \sin 2\alpha = 0$$

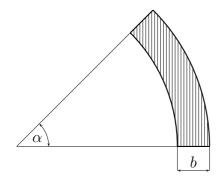
ma dwa różne nieujemne pierwiastki rzeczywiste. Rozwiązania zaznaczyć na kole trygonometrycznym.

4. Udowodnić, że jeżeli liczby rzeczywiste a,b,c spełniają warunki $a^2+b^2=(a+b-c)^2$ oraz $b,c\neq 0$, to

$$\frac{a^2 + (a-c)^2}{b^2 + (b-c)^2} = \frac{a-c}{b-c}.$$

5. Trójkąt równoboczny ABC o boku a wpisano w okrąg. Na łuku BC wybrano punkt D tak, że proste AB i CD przecinają się w punkcie E i |BE|=2a. Obliczyć pole S czworokąta ABCD i wykazać, że $S=\frac{1}{4}(|BD|+|CD|)^2\sqrt{3}$.

6. Rozwinięcie, powierzchni, bocznej, stożka, ściętego, opisanego na kuli jest przedstawione



na rysunku. Obliczyć objętość tego stożka ściętego i promień kuli opisanej na nim. Podać wynik liczbowy dla $\alpha = \frac{\pi}{4}, \ b = 4 \, \mathrm{cm}.$