

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
im. Stanisława Staszica w Krakowie
OLIMPIADA „O DIAMENTOWY INDEKS AGH” 2017/18

MATEMATYKA - ETAP III

ZADANIA PO 10 PUNKTÓW

1. W układzie współrzędnych narysuj zbiór

$$\{(x, y) : x^3 - y^3 \geq xy^2 - x^2y\}.$$

2. Na ile sposobów możemy n początkowych liczb naturalnych $1, 2, \dots, n$ ustawić w ciąg, tak by choć jedna liczba parzysta nie miała dwóch sąsiednich wyrazów nieparzystych?
3. Napisz równanie obrazu okręgu $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 8 = 0$ przez translację o wektor $\vec{v} = [2, -4]$. Czy te dwa okręgi mają punkty wspólne?
4. Z punktu P na okręgu o promieniu $r = 4$ cm poprowadzono cięciwę PQ nachyloną do średnicy PR pod kątem $\alpha = 15^\circ$. Oblicz pole trójkąta PQR .

ZADANIA PO 20 PUNKTÓW

5. Znajdź sumę wszystkich pierwiastków równania

$$\sqrt{3} |\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} x| = 4$$

spełniających nierówność

$$\left(\sqrt{2 - \sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2 + \sqrt{3}}\right)^x \leq 4.$$

6. Jaka największą objętość może mieć stożek wpisany w kulę o promieniu R ?
7. Rzucamy sześcienną kostką do momentu uzyskania „szóstki”. Niech k będzie dowolną, dodatnią liczbą całkowitą. Oblicz prawdopodobieństwo, że liczba rzutów będzie
 A : równa k , B : mniejsza niż k , C : parzysta.