

## PRACA KONTROLNA nr 3 - POZIOM ROZSZERZONY

1. Rozwiązać równanie  $\left(\frac{1}{x}\right)^{2-3\log_2 x} = \frac{1}{2}x^{1+\log_x 2}$ .
2. Dla jakich wartości parametru  $m$  równanie  $x^3 + (m-2)x^2 + (2-m-m^2)x - (1-m^2) = 0$  ma trzy różne pierwiastki, których suma kwadratów nie przekracza 5?
3. Czworokąt wypukły  $ABCD$ , w którym  $AB = 1, BC = 2, CD = 4, DA = 3$  jest wpisany w okrąg. Obliczyć promień  $R$  tego okręgu. Sprawdzić, czy w czworokąt ten można wpisać okrąg. Jeżeli tak, to obliczyć promień  $r$  tego okręgu. Sporządzić rysunek.
4. Podstawą graniastoslupa prostego o wszystkich krawędziach równych jest romb o kącie ostrym  $\frac{\pi}{3}$ . Graniastosłup ten przecięto dwiema płaszczyznami: płaszczyzną przechodzącą przez bok  $AB$  podstawy dolnej i wierzchołek  $C'$  oraz płaszczyzną przechodzącą przez bok  $AD$  podstawy dolnej i ten sam wierzchołek  $C'$ . Wyznaczyć kąt dwuścienny między tymi płaszczyznami oraz stosunek objętości brył, na jakie został podzielony graniastosłup. Sporządzić rysunek.
5. W zależności od parametru rzeczywistego  $p$  przedyskutować liczbę rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 4x^2 &= 0, \\ x^2 + y^2 - 2\sqrt{3}y &= p \end{cases}$$

Sporządzić ilustrację graficzną układu dla kilku charakterystycznych  $p$ .

6. Wykorzystując wzór Newtona i obliczając pochodną wielomianu  $w(x) = (1-x)^n$ , wykazać, że dla dowolnego  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$  zachodzi równość

$$\binom{n}{1} - 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} - 4\binom{n}{4} + \dots + (-1)^{n-1}n\binom{n}{n} = 0$$

Wynioskować stąd, że jeżeli liczby  $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$  tworzą ciąg arytmetyczny, to dla dowolnego  $n \in \mathbb{N}$  zachodzi równość

$$a_1 - \binom{n}{1}a_2 + \binom{n}{2}a_3 - \binom{n}{3}a_4 + \dots + (-1)^n\binom{n}{n}a_{n+1} = 0$$

---

Rozwiązania (rękopis) zadań z wybranego poziomu prosimy nadsyłać do **18 listopada 2019r.** na adres:

Wydział Matematyki  
Politechnika Wrocławska  
Wybrzeże Wyspiańskiego 27  
50-370 WROCŁAW.

Na kopercie prosimy **koniecznie** zaznaczyć **wybrany poziom!** (np. **poziom podstawowy lub rozszerzony**). Do rozwiązań należy dołączyć zaadresowaną do siebie kopertę zwrotną z naklejonym znaczkiem, odpowiednim do formatu listu. Polecamy stosowanie kopert formatu C5 (160x230mm) ze znaczkiem o wartości 3,30 zł. Na każdą większą kopertę należy nakleić droższy znaczek. Prace niespełniające podanych warunków nie będą poprawiane ani odsyłane.

**Uwaga.** Wysyłając nam rozwiązania zadań uczestnik Kursu udostępnia Politechnice Wrocławskiej swoje **dane osobowe**, które przetwarzamy **wyłącznie** w zakresie niezbędnym do jego prowadzenia (odesłanie zadań, prowadzenie statystyki). Szczegółowe informacje o przetwarzaniu przez nas danych osobowych są dostępne na stronie internetowej Kursu.

Adres internetowy Kursu: <http://www.im.pwr.edu.pl/kurs>