

PRACA KONTROLNA nr 6 - POZIOM PODSTAWOWY

1. Na ile różnych sposobów może się ustawić do zdjęcia sześciuosobowa rodzina, jeżeli wszyscy mają stać w jednym rzędzie, a najmłodsza córka musi stać obok mamy?
2. Jeżeli w dwóch rzutach sześcienną kostką do gry gracz otrzyma sumę oczek wynoszącą przynajmniej 10, to wygrywa 100 zł., a jeżeli otrzyma mniej niż 10 i więcej niż 6, to wygrywa 50 zł. W pozostałych przypadkach przegrywa i musi zapłacić 80zł. Wyznacz wartość oczekiwaną wygranej gracza w tej grze. Jak organizator takiej gry powinien zmienić opłatę za przegraną żeby mógł liczyć na zarobek po wzięciu w niej udziału przez wielu graczy?
3. Uzasadnij, że dla każdego n naturalnego liczba $2n^3 + 3n^2 + n$ jest podzielna przez 6.
4. Oblicz piąty wyraz ciągu arytmetycznego

$$\log_2 x_1, \log_2 x_2, \log_2 x_3, \dots$$

wiedząc, że $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{7}{4}$ oraz $x_2 = \frac{1}{2}$.

5. Oblicz prawdopodobieństwo, że w 8 rzutach monetą pojawi się seria przynajmniej 5 reszek lub 5 orłów pod rząd.
6. Losujemy jedną liczbę spośród liczb $1, 2, \dots, 2023$. Znajdź prawdopodobieństwo, że a) wybrana liczba będzie podzielna przez 5 i przez 11, b) wybrana liczba będzie podzielna przez 5 lub przez 11.

PRACA KONTROLNA nr 6 - POZIOM ROZSZERZONY

1. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w sześciu rzutach standardową kostką do gry wypadną wszystkie możliwe liczby oczek?
2. Dla jakich wartości parametru p równanie

$$x^2 - (2^p - 1)x - 3(4^{p-1} - 2^{p-2}) = 0$$

ma dwa pierwiastki rzeczywiste różnych znaków?

3. Z pierwszej urny zawierającej n kul białych i cztery czarne losujemy dwie kule i wrzucamy je do drugiej urny, początkowo pustej. Z tej drugiej losujemy wtedy jedną kulę.
 - a) Dla jakich wartości n prawdopodobieństwo wyciągnięcia białej kuli z drugiej urny jest większe od $3/4$?
 - b) Przyjmując $n = 6$ oblicz prawdopodobieństwo, że z pierwszej urny wylosowano dwie białe kule, jeśli wiadomo, że z drugiej urny wylosowano białą kulę.
4. W urnie jest 15 kul ponumerowanych liczbami od 1 do 15. Wyciągamy z niej kolejno pięć kul bez zwracania. Obliczyć prawdopodobieństwo, że numer na drugiej kuli jest liczbą podzielną przez trzy i jednocześnie numer na piątej kuli jest liczbą podzielną przez pięć.
5. Znajdź dziedzinę oraz wartości największą i najmniejszą (jeśli istnieją) funkcji

$$f(x) = \frac{2 - x^2}{x^2} + (2 - x^2) + (2x^2 - x^4) + \dots,$$

która jest sumą szeregu geometrycznego.

6. W urnie jest 99 kul białych i jedna czarna. Agnieszka i Jacek losują z tej urny na przemian po jednej kuli bez zwracania. Wygrywa ten, kto wylosuje czarną kulę. Pierwszą kulę wyciąga Agnieszka. Jakie jest prawdopodobieństwo, że to ona wygra?

Rozwiązania (rękopis) zadań z wybranego poziomu prosimy nadsyłać do **20.02.2023r.** na adres:

Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska
Wybrzeże Wyspiańskiego 27
50-370 WROCŁAW,

lub **elektronicznie**, za pośrednictwem portalu talent.pwr.edu.pl

Na kopercie prosimy **koniecznie** zaznaczyć **wybrany poziom!** (np. **poziom podstawowy lub rozszerzony**). Do rozwiązań należy dołączyć zaadresowaną do siebie kopertę zwrotną z naklejonym znaczkiem, odpowiednim do formatu listu. Prace niespełniające podanych warunków nie będą poprawiane ani odsyłane.

Uwaga. Wysyłając nam rozwiązania zadań uczestnik Kursu udostępnia Politechnice Wrocławskiej swoje **dane osobowe**, które przetwarzamy **wyłącznie** w zakresie niezbędnym do jego prowadzenia (odesłanie zadań, prowadzenie statystyki). Szczegółowe informacje o przetwarzaniu przez nas danych osobowych są dostępne na stronie internetowej Kursu.

Adres internetowy Kursu: <http://www.im.pwr.edu.pl/kurs>