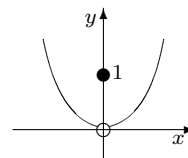
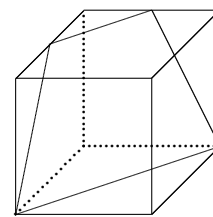


16. Pokazać, że funkcja  $f(x) = x^2$  ma minimum lokalne w punkcie  $x_0 = 0$ . Uzasadnić, że funkcja  $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \neq 0 \\ 1 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$  ma maksimum lokalne w punkcie  $x_0 = 0$ , zob. rys. 1.



Rys. 1

17. Napisać równania tych stycznych do wykresu funkcji  $y = \frac{x^2}{x-2}$ , które są równoległe do prostej  $3x + y = 0$ .
18. Wyznaczyć największą i najmniejszą wartość funkcji  $f(x) = x + \sqrt{1-x^2}$ .
19. Znaleźć asymptoty wykresu funkcji  $y = \frac{4x^2 + 9x}{x-4}$ .
20. Rozwiązać równanie  $3^{2x} - 2 \cdot 3^x + a = 0$ , w którym  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 3} - 4n}{n-1}$ .
21. W prostokątnym układzie współrzędnych zaznaczyć zbiór punktów  $(x, y)$ , których współrzędne spełniają równanie  $\log_2(x+y) = \log_2 x + \log_2 y$ .
22. Obliczyć średnią arytmetyczną tych spośród liczb naturalnych  $1, 2, 3, \dots, 2000$ , które nie są podzielne przez 5.
23. Wyznaczyć ciąg geometryczny  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ , jeżeli wiadomo, że  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 30$  i  $a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 60$ . Znaleźć taką liczbę  $n$ , że  $a_n < 500000 < a_{n+1}$ .
24. Rozwiązać równanie  $2 \sin^2 x + \sin 2x = 2$ .
25. Rozwiązać nierówność  $\sin^2 x > \frac{3}{4}$  dla  $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$ .
26. Znaleźć równania prostych przechodzących przez punkt  $A(7, 3)$  i przecinających prostą  $x - 3y - 1 = 0$  pod kątem  $45^\circ$ .
27. Obliczyć długość najkrótszej drogi poprowadzonej po powierzchni sześcianu o krawędziach długości 1 i łączącej dwa przeciwległe wierzchołki tego sześcianu. Ile najkrótszych dróg łączy dwa wybrane przeciwległe wierzchołki tego sześcianu?
28. Obliczyć iloczyn skalarny wektorów  $\vec{a} = [-1, 1+x]$  i  $\vec{b} = [\sqrt{x+3}, 1]$ . Dla jakich  $x$  wektory  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  są prostopadłe? Jaki kąt (ostry, prosty, czy rozwarty) tworzą te wektory dla  $x = -2$ ?
29. Rzucono pięć razy dwiema kostkami do gry. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że co najmniej dwa razy suma oczek na obu kostkach jest nie mniejsza od 10.
30. Sześcian o krawędzi długości  $a$  podzielono płaszczyzną przechodzącą przez przekątną jednej z jego ścian i przez środki dwóch krawędzi leżących na przeciwległej ścianie na dwie bryły, zob. rys. 2. Obliczyć objętości obu otrzymanych brył.



Rys. 2