PRACA KONTROLNA nr 5

luty 2000r

1. Narysować na płaszczyźnie zbiór A wszystkich punktów (x, y), których współrzędne spełniają warunki
$$||x| - y| \leqslant 1, \quad -1 \leqslant x \leqslant 2,$$
i znaleźć punkt zbioru A leżący najbliżej punktu $P(0, 4)$.

2. Obliczyć $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha$ wiedząc, że $\sin 2\alpha = \frac{1}{4}$ oraz $\alpha \in (0, 2\pi)$.

3. Rozważmy rodzinę prostych przechodzących przez punkt $P(0, -1)$ i przecinających parabolę $y = \frac{1}{4}x^2$ w dwóch punktach. Wyznaczyć równanie środków powstałych w ten sposób cięciw paraboli. Sporządzić rysunek i opisać otrzymaną krzywą.

4. Rozwiązać równanie
$$\sqrt{x + \sqrt{x^2 - x + 2}} - \sqrt{x - \sqrt{x^2 - x + 2}} = 4.$$

5. Dwóch strzelców wykonuje strzelanie. Pierwszy trafia do celu z prawdopodobieństwem $\frac{2}{3}$ w każdym strzale i wykonuje 4 strzały, a drugi trafia z prawdpodobieństwem $\frac{1}{3}$ i wykonuje 8 strzałów. Który ze strzelców ma większe prawdopodobieństwo uzyskania co najmniej trzech trafień do celu, jeśli wyniki kolejnych strzałów są wzajemnie niezależne?

6. Do naczynia w kształcie walca o promieniu podstawy R wrzucono trzy jednakowe kulki o promieniu r, przy czym $R < 2r < 2R$. Okazało się, że płaska pokrywa naczynia jest styczna do kulki znajdującej się najwyżej w naczyniu. Obliczyć wysokość naczynia.

7. Dla jakich wartości parametru m funkcja
$$f(x) = \frac{x^3}{mx^2 + 6x + m}$$
jest określona i rosnąca na całej prostej rzeczywistej.

8. Dany jest trójkąt o wierzchołkach $A(-2, 1)$, $B(-1, -6)$, $C(2, 5)$. Posługując się rachunkiem wektorowym obliczyć cosinus kąta pomiędzy dwusieczną kąta A i środkową boku $\overline{BC}$. Wykonać rysunek.