$$= x^4(x^{4n-2}+1) - (x^2+1)(x^2-1) = x^4(x^2+1)v_n(x) - (x^2+1)(x^2-1)$$
$$= (x^2+1)(x^4 v_n(x) - x^2 + 1).$$

Ponieważ $x^4 v_n(x) - x^2 + 1$ jest wielomianem, więc powyższa równość oznacza, że $w_{n+1}(x)$ dzieli się przez x^2+1. To kończy dowód 2°.

Z wykazanej prawdziwości warunków 1° i 2° oraz z zasady indukcji matematycznej wynika, że $T(n)$ jest prawdziwe dla każdej liczby naturalnej n.

Rozwiązanie zadania 3.8

Dziedziną nierówności jest $\mathbf{R}$. Ponieważ $\sqrt{3} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$, więc ze wzoru na cosinus różnicy kątów mamy

$$\cos x + \sqrt{3}\sin x = \cos x \ + \ \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\sin x =$$

$$\frac{\cos x\cos\frac{\pi}{3} + \sin x\sin\ \frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}} = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right).$$

Nierówność przyjmuje zatem postać $\left|2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right| \le \sqrt{2}$. Obie strony nierówności są nieujemne, więc po podniesieniu do kwadratu dostajemy nierówność równoważną $2\cos^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right) \le 1$. Stosujemy wzór $1+\cos 2\gamma = 2\cos^2\gamma$ i przekształcamy ją do prostszej postaci $\cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right) \le 0$. Wiemy, że cosinus jest ujemny w II i III ćwiartce, otrzymujemy więc $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \le 2x - \frac{2\pi}{3} \le \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, czyli

$$\frac{7\pi}{12} + k\pi \le x \le \frac{13\pi}{12} + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}. \tag{2}$$

Wyznaczamy część wspólną zbioru rozwiązań (2) i przedziału $[0, 3\pi]$, dostajemy (podstawiamy kolejno $k = -1,\ 0,\ 1,\ 2$) odpowiedź.

Odp. $x \in \left[0, \frac{\pi}{12}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}\right] \cup \left[\frac{19\pi}{12}, \frac{25\pi}{12}\right] \cup \left[\frac{31\pi}{12}, 3\pi\right].$