PRACA KONTROLNA nr 3

grudzień 2000 r

1. Stosując zasadę indukcji matematycznej udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n suma $2^{n+1} + 3^{2n-1}$ jest podzielna przez 7.

2. Tworząca stożka ma długość l i widać ją ze środka kuli wpisanej w ten stożek pod kątem α. Obliczyć objętość i kąt rozwarcia stożka. Określić dziedzinę dla kąta α.

3. Nie korzystając z metod rachunku różniczkowego wyznaczyć dziedzinę i zbiór wartości funkcji
$$y = \sqrt{2 + \sqrt{x} - x}.$$

4. Z talii 24 kart wylosowano (bez zwracania) cztery karty. Jakie jest prawdopodobieństwo, że otrzymano dokładnie trzy karty z jednego koloru (z czterech możliwych)?

5. Rozwiązać nierówność
$$\log_{1/3}(\log_2 4x) \geqslant \log_{1/3}(2 - \log_{2x} 4) - 1.$$

6. Z punktu $C(1, 0)$ poprowadzono styczne do okręgu $x^2 + y^2 = r^2, \quad r \in (0, 1)$. Punkty styczności oznaczono przez A i B. Wyrazić pole trójkąta ABC jako funkcję promienia r i znaleźć największą wartość tego pola.

7. Rozwiązać układ równań
$$\begin{cases} x^2 + y^2 & = 5|x| \\ |4y - 3x + 10| & = 10 \end{cases}.$$
Podać interpretację geometryczną każdego z równań i wykonać staranny rysunek.

8. Rozwiązać w przedziale $[0, \pi]$ równanie
$$1 + \sin 2x = 2\sin^2 x,$$
a następnie nierówność $1 + \sin 2x > 2\sin^2 x$.