Miejsca zerowe pochodnej spełniają równanie $-x^2-2x+1=0$. Stąd dostajemy $\Delta = 8$ oraz $x_1 = -1-\sqrt{2}$, $x_2 = -1+\sqrt{2}$. Tylko $x_2 \in D$. Mamy $S(x_2) = \dfrac{\sqrt{2}}{1+2-2\sqrt{2}+1} = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$ oraz $\lim\limits_{x\to 1^-} S(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x+1}{x^2+1} = 1$. Ponieważ $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2} > 1$, więc największą wartością funkcji jest $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$.

Odp. Wartość najmniejsza sumy danego nieskończonego ciągu geometrycznego wynosi 0 i jest osiągana dla $x=-1$, a wartość największa tej sumy wynosi $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$ i jest osiągana dla $x=-1+\sqrt{2}$.

Rozwiązanie zadania 30.7

Dziedziną nierówności

$$|2^x - 3| \le 2^{1-x} \tag{14}$$

jest $\mathbf{R}$. Nierówność tę rozwiążemy przez podstawienie $2^x = t,\ t>0$. Mamy $2^{1-x} = 2\,2^{-x} = 2\,\dfrac{1}{t}$, więc po podstawieniu nierówność (14) przyjmie postać $|t-3| \le \dfrac{2}{t}$. Stąd od razu przechodzimy do nierówności podwójnej

$$-\frac{2}{t} \le t-3 \le \frac{2}{t},\ \ t>0. \tag{15}$$

Ze względu na dodatni znak niewiadomej t możemy tę nierówność pomnożyć przez t i otrzymamy następujący układ nierówności kwadratowych

$$\begin{cases} t^2-3t+2 \ge 0 \\ t^2-3t-2 \le 0 \end{cases},\ \ t>0.$$

Pierwsza nierówność powyższego układu jest spełniona dla $t\le 1$ i $t \ge 2$, czyli po uwzględnieniu warunku $t>0$ dla $t \in (0,1] \cup [2,\infty)$. Dla drugiej nierówności mamy $\Delta_2 = 17$, $t_1'' = \dfrac{3-\sqrt{17}}{2} < 0$, $t_2'' = \dfrac{3+\sqrt{17}}{2} \in (3,4)$. Druga nierówność jest zatem spełniona dla $t \in (0, t_2'']$. Część wspólną zbiorów rozwiązań obu nierówności ma postać $(0,1[\cup[2,t_2'']$. Ponieważ funkcja $t=2^x$ jest rosnąca, więc zbiór rozwiązań nierówności (14) ma postać $(-\infty,0]\cup[1,x_0]$, gdzie $x_0 = \log_2 t_2'' \in (1,2)$.