

PRACA KONTROLNA nr 4 - POZIOM ROZSZERZONY

1. Dany jest romb $ABCD$ o boku a i kącie ostrym α . Z wierzchołka A kąta ostrego poprowadzono dwa jednakowej długości odcinki o końcach zawartych w bokach BC i CD . Wyznaczyć długości tych odcinków oraz sinusy kątów, na jaki został podzielony kąt α wiedząc, że pole środkowego deltoidu jest równe połowie pola danego rombu.
2. Napisać równanie stycznej do krzywej $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$ w punkcie $x_0 = 2$. Wykazać, że obrazem tej stycznej w symetrii względem punktu $(0, 0)$ jest prosta, która jest styczną do tej samej krzywej. Wyznaczyć odległość między tymi stycznymi.

3. Niech

$$A = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, |x - 1| + x \geq y + |y - 2|\},$$
$$B = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, |x - 1| + \frac{1}{4}|y| \leq 1\}.$$

Na płaszczyźnie OXY narysować zbiory $A \cap B$ oraz $B' \setminus A$.

4. Dane jest równanie

$$8(\sin \alpha + 4)x^2 - 8(\sin \alpha + 1)x + 1 = 0,$$

gdzie $\alpha \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Dla jakich wartości kąta α suma odwrotności pierwiastków tego równania jest równa co najmniej $8(\cos \alpha - (\cos \alpha)^{-1} + 1)$?

5. Zbadać funkcję $f(m) = \frac{y}{x}$, gdzie para x i y jest rozwiązaniem układu równań

$$\begin{cases} (m - 2)x + (m + 2)y = m^2 - 1 \\ (m + 2)x + (m - 2)y = m^2 + 1, \end{cases}$$

z parametrem rzeczywistym m . Sporządzić wykres funkcji $f(m)$.

6. W stożek o promieniu podstawy r i tworzącej l wpisano ostrosłup prawidłowy trójkątny tak, że wierzchołek tego ostrosłupa pokrywa się ze środkiem podstawy stożka, a pozostałe wierzchołki leżą na ścianie bocznej stożka. Jaka jest maksymalna objętość tego ostrosłupa? Sporządzić staranny rysunek.