

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
im. Stanisława Staszica w Krakowie
OLIMPIADA „O DIAMENTOWY INDEKS AGH” 2019/20

MATEMATYKA - ETAP I

ZADANIA PO 10 PUNKTÓW

1. Udowodnij, że jeżeli czworokąt wypukły ma oś symetrii, to można na nim opisać okrąg lub można weń okrąg wpisać.
2. Wyznacz dziedzinę funkcji danej wzorem

$$f(x) = (32x^2 + 28x^5 + 4x^8 - x^{11})^{-\frac{3}{4}}.$$

3. W worku znajduje się 50 skarpet czarnych, 40 brązowych, 30 zielonych i 20 niebieskich. Jaka jest najmniejsza liczba skarpet, które musimy wyjąć na chybił trafił, aby mieć pewność, że wśród nich znajdziemy jednokolorowe pary skarpet dla 20 osób? Odpowiedź uzasadnij.
4. Rozwiąż nierówność $|1 - \log_x(x - \frac{1}{4})| \leq 1$.

ZADANIA PO 20 PUNKTÓW

5. Ile jest par (a, b) liczb rzeczywistych, dla których układ równań

$$\begin{cases} ax + by + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 = 50 \end{cases}$$

ma co najmniej jedno rozwiązanie, przy czym każde jego rozwiązanie jest parą (x, y) liczb całkowitych? Podaj przykład pary (a, b) , dla której układ ten ma dwa rozwiązania w liczbach całkowitych oraz przykład pary (a, b) , dla której ten układ ma dokładnie jedno rozwiązanie i to rozwiązanie jest parą liczb całkowitych.

6. Długości dwóch boków trójkąta wpisanego w okrąg o średnicy D są odpowiednio równe $\frac{3}{4}D$ oraz $\frac{\sqrt{3}}{2}D$. Oblicz długość trzeciego boku.
7. Zbiór S jest zbiorem wszystkich dodatnich liczb całkowitych n , dla których istnieje permutacja (a_1, a_2, \dots, a_n) liczb $1, 2, \dots, n$, taka że $a_1 + a_2 + \dots + a_k$ jest wielokrotnością liczby k dla każdego $k = 1, 2, \dots, n$. Wykaż, że każda liczba należąca do zbioru S jest nieparzystą. Znajdź dwie liczby tego zbioru. Zbadaj, czy liczba 2019 należy do zbioru S .