KORESPONDENCYJNY KURS Z MATEMATYKI

PRACA KONTROLNA nr 1

październik 2002r

1. Narysować wykres funkcji $y = 4 + 2|x| - x^2$. Korzystając z tego wykresu określić liczbę rozwiązań równania $4+2|x|-x^2 = p$ w zależności od parametru rzeczywistego p.

2. Pompa napełniająca pusty basen w pierwszej minucie pracy miała wydajność 0,2 m^3/s, a w każdej kolejnej minucie jej wydajność zwiększano o 0,01 m^3/s. Połowa basenu została napełniona po $2n$ minutach, a cały basen po kolejnych n minutach, gdzie n jest liczbą naturalną. Wyznaczyć czas napełniania basenu oraz jego pojemność.

3. Stożek ścięty jest opisany na kuli o promieniu $r = 2$ cm. Objętość kuli stanowi 25% objętości stożka. Wyznaczyć średnice podstaw i długość tworzącej tego stożka.

4. W trójkącie ABC dane są promień okręgu opisanego R, kąt $\angle A = \alpha$ oraz $AB = \frac{8}{5}R$. Obliczyć pole tego trójkąta.

5. Rozwiązać nierówność:
$$(\sqrt{x})^{\log_8 x} \geqslant \sqrt[3]{16x}.$$

6. W czworokącie $ABCD$ odcinki $\overline{AB}$ i $\overline{BD}$ są prostopadłe, $AD = 2AB = a$ oraz $\vec{AC} = \frac{5}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AD}$. Wyznaczyć cosinus kąta $\angle BCD = \alpha$ oraz obwód czworokąta $ABCD$. Sporządzić rysunek.

7. Rozwiązać równanie:
$$\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = \sqrt{8}.$$

8. Wyznaczyć równanie prostej stycznej do wykresu funkcji $y = \frac{1}{x^2}$ w punkcie $P(x_0, y_0)$, $x_0 > 0$, takim, że odcinek tej stycznej zawarty w I ćwiartce układu współrzędnych jest najkrótszy. Rozwiązanie zilustrować stosownym wykresem.