



I Liceum Ogólnokształcące  
w Słupsku



Akademia Pomorska  
w Słupsku

**LIGA MATEMATYCZNA**  
**FINAŁ**  
**11 kwietnia 2012**  
**SZKOŁA PONADGIMNAZJALNA**

**ZADANIE 1.**

Liczby naturalne od 1 do 1000 pomnożono kolejno każda przez każdą. Wykaż, że wśród tych iloczynów więcej jest liczb parzystych niż nieparzystych.

**ZADANIE 2.**

Uzasadnij, że dla każdej liczby naturalnej  $n$  liczba  $n^3 + 5n$  jest podzielna przez 6.

**ZADANIE 3.**

Wyznacz wszystkie funkcje  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  spełniające równanie

$$2f(x) + f(-x) = 3x^2 + x + 3$$

dla każdej liczby rzeczywistej  $x$ .

**ZADANIE 4.**

Na bokach  $AB$ ,  $BC$  i  $AC$  trójkąta wybrano odpowiednio punkty  $P$ ,  $Q$  i  $R$  tak, że  $AP = CQ$  oraz na czworokącie  $RPBQ$  można opisać okrąg. Styczne do okręgu opisanego na trójkącie  $ABC$  w punktach  $A$  i  $C$  przecinają proste  $RP$  i  $RQ$  odpowiednio w punktach  $X$  i  $Y$ . Wykaż, że  $RX = RY$ .

**ZADANIE 5.**

W wierzchołkach siedmiokąta foremnego ustawiono pionki czerwone lub niebieskie - po jednym w każdym wierzchołku. Uzasadnij, że znajdują się trzy wierzchołki z pionkami tego samego koloru takie, że będą wierzchołkami trójkąta równoramiennego.

**ZADANIE 6.**

Znajdź wszystkie liczby pierwsze  $p$  takie, że  $2p - 1$ ,  $2p + 1$  są również liczbami pierwszymi.

**ZADANIE 7.**

Tarczę podzielono na sześć sektorów i w każdy wpisano inną liczbę naturalną od 1 do 6. Zmieniamy te liczby przez dodanie do dwóch z nich tej samej liczby. Operację tę powtarzamy wielokrotnie. Czy w którymś momencie we wszystkich sektorach będzie ta sama liczba?