

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
im. Stanisława Staszica w Krakowie
OLIMPIADA „O DIAMENTOWY INDEKS AGH” 2017/18

MATEMATYKA - ETAP I

ZADANIA PO 10 PUNKTÓW

1. Udowodnij, że spośród dowolnych pięciu punktów na płaszczyźnie, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej, można wybrać trzy punkty, które są wierzchołkami trójkąta rozwartokątnego.
2. Ile jest trójek (x_1, x_2, x_3) liczb całkowitych niedodatnich spełniających równanie $x_1 + x_2 + x_3 + 37 = 0$?
3. Do zbiornika, w którym znajdowało się p_0 hl wody, pierwszego dnia dolano 70 hl wody, po czym każdego dnia dolewano o 7 hl wody więcej niż dnia poprzedniego. Jednocześnie codziennie ze zbiornika ubywało 170 hl wody. Jaka powinna być początkowa ilość p_0 wody w zbiorniku, aby nigdy nie brakło w nim wody? Którego dnia w zbiorniku było najmniej wody?
4. Stopień wielomianu $W(x)$ jest równy 2015. Wiedząc, że $W(n) = \frac{1}{n}$ dla $n = 1, 2, \dots, 2016$, oblicz $W(2017)$.

ZADANIA PO 20 PUNKTÓW

5. Dane jest równanie $(m+1)x^2 - 2(m-3)x + m+1 = 0$. Dla jakich wartości parametru m
 - a) liczba 1 leży między sumą różnych pierwiastków równania a sumą ich kwadratów?
 - b) wartość bezwzględna przynajmniej jednego pierwiastka równania jest mniejsza od 0,9?
6. Znajdź sumę długości wszystkich przedziałów zawartych w $\langle 0; 2\pi \rangle$, w których spełniona jest nierówność

$$|\operatorname{ctg} 2x - \operatorname{tg} 2x| \geq \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

7. Z wierzchołka O paraboli $y^2 = 3x$ poprowadzono dwie proste wzajemnie prostopadłe, przecinające parabolę w punktach M i N . Znajdź równanie (we współrzędnych kartezjańskich) zbioru środków ciężkości wszystkich trójkątów OMN .