



LI KORRESPONDENCYJNY KURS  
Z MATEMATYKI

wrzesień 2021 r.

### PRACA KONTROLNA nr 1 - POZIOM PODSTAWOWY

1. Wykaż, że różnica kwadratów dwóch liczb nieparzystych jest podzielna przez 8.
2. Określ dziedzinę wyrażenia  $w(x, y) = \left[ \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} - \frac{4\sqrt{x}\sqrt{y}}{x - y} \right] : \left[ \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} - \frac{1}{x - y} \right]$ .

Sprowadź je do najprostszej postaci i oblicz  $w(3 + 2\sqrt{2}, 3 - 2\sqrt{2})$ .

3. Dwie drużyny harcerskie postanowiły zebrać dla ogrodu zoologicznego określoną ilość żołądzi. Pierwsza z nich rozpoczęła pracę półtora dnia wcześniej. W ciągu siedmiu następnych dni pracowały razem i zebrały zaplanowaną ilość żołądzi. Gdyby każda z drużyn pracowała oddzielnie, to druga wykonałaby całą pracę o 3 dni wcześniej od pierwszej. Ile dni potrzebuje każda z drużyn na zebranie tej ilości żołądzi?
4. Wyznacz wartości wszystkich funkcji trygonometrycznych kąta ostrego  $\alpha$ , wiedząc, że spełnione jest równanie

$$\frac{2 \sin \alpha + 3 \cos \alpha}{\cos \alpha} = 2 \operatorname{ctg} \alpha.$$

5. Funkcja liniowa  $f(x) = ax + b$  spełnia warunek  $f(5) - f(3) = 4$ . Wyznacz jej wzór, wiedząc, że pole obszaru ograniczonego wykresami funkcji  $g(x) = a|x| - b$  oraz  $h(x) = -a|x| + b$  jest równe 16. Sporządź rysunek.
6. Niech  $A = \{(x, y) : |x| \leq 2, |y| \leq 2\}$  oraz  $B_p = \{(x, y) : |x| + |y| \leq p\}$  dla  $p > 2$ . Narysuj w jednym układzie współrzędnych zbiory  $A$  i  $B_3$ . Oblicz pole zbiorów  $A \cap B_3$  i  $A \cup B_3$ . Dla jakiego  $p$  zbiór  $A \cap B_p$  jest wielokątem foremnym?

## PRACA KONTROLNA nr 1 - POZIOM ROZSZERZONY

1. Wykaż, że jeżeli  $p$  jest liczbą pierwszą większą niż 3, to jej czwarta potęga pomniejszona o 1 jest wielokrotnością 48.
2. Określ dziedzinę wyrażenia:

$$w(x, y) = \left( \frac{\sqrt[6]{y}}{\sqrt{y} - \sqrt[6]{x^3 y^2}} - \frac{x}{\sqrt{xy} - x \sqrt[3]{y}} \right) \cdot \left[ \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \left( \sqrt[6]{x^5} - \frac{y}{\sqrt[6]{x}} \right) - \frac{x - y}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x} \sqrt{y}} \right]$$

i sprowadź je do najprostszej postaci. Oblicz  $w(7 + 5\sqrt{2}, -7 + 5\sqrt{2})$ .

*Wskazówka:* Oblicz najpierw  $(\sqrt{2} + 1)^3$ .

3. Trzech informatyków podjęło się naprawy awarii dużego systemu komputerowego. Z wcześniejszych doświadczeń wiadomo, że pierwszy z nich potrzebowałby na realizację tego zlecenia 4 godziny więcej niż drugi, a trzeci pracowałby nad nim dwa razy krócej niż pierwszy. W jakim czasie wykonałby to zadanie każdy z informatyków, jeżeli wiadomo, że, pracując razem, naprawili awarię w ciągu 2 godzin i 40 minut?
4. Wyznacz wartości wszystkich funkcji trygonometrycznych kąta  $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ , wiedząc, że spełnione jest równanie

$$3 \cos \alpha - \frac{1}{\cos \alpha} = \sin \alpha.$$

5. Dla jakich wartości parametru rzeczywistego  $m$  wielomian

$$w(x) = 2x^3 - (2 + m)x^2 + (2m + 2)x - m - 2$$

ma trzy parami różne pierwiastki rzeczywiste  $x_1, x_2, x_3$ , których suma odwrotności jest nieujemna? Sporządź wykres funkcji  $f(m) = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$ .

6. Niech  $A = \{(x, y) : \sqrt{3}|x| + |y| \leq \sqrt{3}\}$ ,  $B = \{(x, y) : (|x| - 1)^2 + y^2 \leq 1\}$  oraz  $C = \{(x, y) : x^2 + (|y| - \sqrt{3})^2 \leq 1\}$ . Narysuj w jednym układzie współrzędnych zbiory  $A$ ,  $B$  i  $C$ . Oblicz pole zbioru  $A \setminus (B \cup C)$ .

---

Rozwiązania (rękopis) zadań z wybranego poziomu prosimy nadsyłać do **28.09.2021r.** na adres:

Wydział Matematyki  
Politechnika Wrocławska  
Wybrzeże Wyspiańskiego 27  
50-370 WROCŁAW.

Na kopercie prosimy **koniecznie** zaznaczyć **wybrany poziom!** (np. **poziom podstawowy lub rozszerzony**). Do rozwiązań należy dołączyć zaadresowaną do siebie kopertę zwrotną z naklejonym znaczkiem, odpowiednim do formatu listu. Polecamy stosowanie kopert formatu C5 (160x230mm) ze znaczkiem o wartości 3,30 zł. Na każdą większą kopertę należy nakleić droższy znaczek. Prace niespełniające podanych warunków nie będą poprawiane ani odsyłane.

**Uwaga.** Wysyłając nam rozwiązania zadań uczestnik Kursu udostępnia Politechnice Wrocławskiej swoje **dane osobowe**, które przetwarzamy **wyłącznie** w zakresie niezbędnym do jego prowadzenia (odesłanie zadań, prowadzenie statystyki). Szczegółowe informacje o przetwarzaniu przez nas danych osobowych są dostępne na stronie internetowej Kursu.

Adres internetowy Kursu: <http://www.im.pwr.edu.pl/kurs>