AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA im. Stanisława Staszica w Krakowie OLIMPIADA "O DIAMENTOWY INDEKS AGH" 2022/23

MATEMATYKA - ETAP I

ZADANIA PO 10 PUNKTÓW

- 1. W prostokącie ABCD wierzchołek A połączono odcinkami ze środkami boków BC i CD. Udowodnij, że te odcinki dzielą przekątną BD na trzy odcinki równej długości.
- 2. Oblicz sumę stu największych ujemnych rozwiązań równania

$$4\cos 2x - \sin 4x = 4\cos^3 2x.$$

3. Rozwiąż równanie

$$\sqrt[6]{-x^2+5x-6} = \sqrt[4]{x^3-4x^2+x+6}$$
.

4. W wypukłym pięciokącie ABCDE każda przekątna odcina trójkąt o polu równym 1. Oblicz pole tego pięciokąta.

ZADANIA PO 20 PUNKTÓW

- 5. Znajdź równanie stycznej do paraboli $y=2-x^2$, która ogranicza wraz z dodatnimi półosiami układu współrzędnych trójkąt o najmniejszym polu.
- 6. Niech S będzie zbiorem wszystkich ciągów (a, b, c, d, e) o wyrazach należących do zbioru liczb $\{0, 1, \dots, 9\}$. Ile jest w zbiorze S ciągów
 - a) malejących?
 - b) których iloczyn *abcde* jest liczbą parzystą?
 - c) w których suma cyfr iloczynu *abcde* w zapisie dziesiętnym jest podzielna przez 9?
- 7. Znajdź równania prostych stycznych do okręgu $x^2 + y^2 + 4x 12 = 0$ i jednocześnie do jego obrazu w symetrii osiowej względem prostej 2x 3y 22 = 0.