
PRACA KONTROLNA nr 5

luty 2002r

1. W czworokącie $ABCD$ dane są wektory $\vec{AB} = (2, -1)$, $\vec{BC} = (3, 3)$, $\vec{CD} = (-4, 1)$. Punkty K i M są środkami boków \overline{CD} oraz \overline{AD} . Posługując się rachunkiem wektorowym obliczyć pole trójkąta KMB . Wykonać rysunek.
2. Krawędzie oraz przekątna prostopadłościanu tworzą cztery kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego. Wyznaczyć sumę długości wszystkich krawędzi tego prostopadłościanu, jeśli przekątna ma długość 7 cm.
3. Na płaszczyźnie Oxy dane są zbiory:

$$A = \{(x, y) : y \leq \sqrt{5x - x^2}\}, \quad B_s = \{(x, y) : 3x + 4y = s\}.$$

Dla jakich wartości parametru s zbiór $A \cap B_s$ nie jest pusty? Sporządzić rysunek.

4. Działka gruntu ma kształt trapezu o bokach 20 m, 30 m, 40 m i 60 m. Właściciel działki twierdzi, że pole jego działki wynosi ponad 11 arów. Czy właściciel ma rację? Jeśli tak, to narysować plan działki w skali 1:1000 i podać dokładną wartość jej pola.
5. Dane jest równanie kwadratowe z parametrem m :

$$(m + 2)x^2 + 4\sqrt{m}x + (m - 3) = 0.$$

Dla jakiej wartości parametru m kwadrat różnicy pierwiastków rzeczywistych tego równania jest największy. Podać tę największą wartość.

6. Stosując zasadę indukcji matematycznej udowodnić, że dla każdego $n \geq 2$ liczba $2^{2^n} - 6$ jest podzielna przez 10.
7. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 4 \\ \cos(x + y) + \cos(x - y) = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{dla } x, y \in [-\pi, \pi].$$

8. Równoramienny trójkąt prostokątny ABC zgięto wzdłuż środkowej \overline{CD} wychodzącej z wierzchołka kąta prostego C tak, aby obie połowy tego trójkąta utworzyły kąt 60° . Obliczyć sinusy wszystkich kątów dwuściennych otrzymanego czworościanu $ABCD$. Wykonać odpowiednie rysunki i uzasadnić obliczenia.