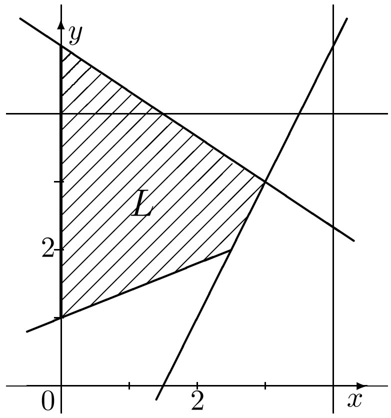
PRACA KONTROLNA nr 4

styczeń 2005r.

1. Krawędzie oraz przekątna prostopadłościanu tworzą cztery kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego, przy czym przekątna ma długość 7 cm. Jaką najkrótszą drogę musi przebyć mucha, aby wędrując po krawędziach tego prostopadłościanu odwiedziła wszystkie jego wierzchołki.

2. Dany jest wielomian $w(x) = x^4 - 2x^2 - x + 2$. Rozłożyć na czynniki możliwie najniższego stopnia wielomian $p(x) = w(x+1) - w(x)$.

3. Na rysunku obok przedstawiono fragment mapy w skali 1:25000, który zawiera obszar lasu L ograniczony czterema drogami. Na mapę jest naniesiona siatka kilometrowa, a dodatkowo umieszczono na niej układ współrzędnych pokrywający się z wybranymi liniami siatki. Zapisać obszar L w postaci układu nierówności liniowych (w skali mapy). Obliczyć rzeczywiste pole obszaru L wyrażając go w hektarach.



4. Na ile sposobów może Krzyś rozdzielić 12 jednakowych cukierków pomiędzy siebie i trójkę rodzeństwa, jeśli każdy ma otrzymać co najmniej dwa cukierki.

5. W stożek wpisano sześcian o krawędzi a. Rozwinięcie powierzchni bocznej stożka tworzy wycinek koła o kącie środkowym 120^0. Obliczyć tangens kąta pod jakim tworzącą tego stożka widać ze środka sześcianu.

6. W trójkącie ABC dane są kąty α i β przy podstawie $\overline{AB}$ oraz środkowa $CD = s$ podstawy. Obliczyć pole tego trójkąta.

7. Rozwiązać równanie $3^{\sin x} + 9^{\sin x} + 27^{\sin x} + \ldots = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$, którego lewa strona jest sumą nieskończonego ciągu geometrycznego.

8. Stosując zasadę indukcji matematycznej udowodnić nierówność:

$$1 - \sqrt{2} + \sqrt{3} - \ldots + \sqrt{2n-1} > \sqrt{\frac{n}{2}}, \quad n \geqslant 1.$$

9. Wyznaczyć wszystkie wartości parametru rzeczywistego p, dla których krzywe o równaniach $y = \sqrt[3]{x}$, $y = x^p$ przecinają się w pewnym punkcie pod kątem 45^0. Rozwiązanie zilustrować odpowiednim rysunkiem.