

**LIGA MATEMATYCZNA**  
**im. Zdzisława Matuskiego**  
**GRUDZIEŃ 2019**  
**SZKOŁA PONADPODSTAWOWA**

**ZADANIE 1.**

Długości  $x$ ,  $y$ ,  $z$  boków trójkąta są liczbami naturalnymi oraz  $z = xy$ . Wykaż, że ten trójkąt jest równoramienny.

**ZADANIE 2.**

Znajdź takie liczby całkowite dodatnie  $n$ , że  $5^n - 2$  i  $5^n + 2$  są liczbami pierwszymi.

**ZADANIE 3.**

Dane są liczby całkowite  $a_1, a_2, \dots, a_{2019}$ . Liczby  $b_1, b_2, \dots, b_{2019}$  to liczby  $a_1, a_2, \dots, a_{2019}$ , ale ustawione w innej, przypadkowej, kolejności. Wykaż, że iloczyn

$$(a_1 - b_1)(a_2 - b_2) \dots (a_{2019} - b_{2019})$$

jest liczbą parzystą.

**ZADANIE 4.**

Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej  $n$  liczba  $n^4 - n^2$  jest podzielna przez 12.

**ZADANIE 5.**

W zbiorze liczb rzeczywistych rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x^2 = y + z + 2 \\ y^2 = z + x + 2 \\ z^2 = x + y + 2. \end{cases}$$