

**AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA**  
**im. Stanisława Staszica w Krakowie**  
**OLIMPIADA „O DIAMENTOWY INDEKS AGH” 2013/14**

**MATEMATYKA - ETAP II**

**ZADANIA PO 10 PUNKTÓW**

1. Urządzenie I wykonuje pewną pracę w ciągu 20 godzin, a urządzenie II w ciągu 30 godzin. W jakim czasie wykonają tę pracę oba urządzenia pracując jednocześnie?
2. Kotangens kąta rozwartego  $\alpha$  jest równy  $-3$ . Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta  $2\alpha$ .
3. Rozwiąż nierówność  $|3 \log_x 2 - 2| > 1$ .
4. Zbadaj monotoniczność ciągu  $(a_n)$ , którego  $n$ -ty wyraz jest równy

$$a_n = \frac{3^{n+2}}{3^n + 2^{2n+1}}.$$

Wyznacz granicę ciągu  $(a_n)$ .

**ZADANIA PO 20 PUNKTÓW**

5. Okrąg  $O$  ma równanie  $x^2 + y^2 + 6x + 4y - 12 = 0$ . Okrąg  $O'$  jest obrazem okręgu  $O$  przez translację o wektor  $\vec{v} = [7, 1]$ . Znajdź równania osi symetrii sumy  $O \cup O'$  tych okręgów. Wyznacz punkty wspólne obu okręgów. Znajdź równania prostych stycznych jednocześnie do  $O$  i  $O'$ .
6. Podstawą ostrosłupa o wysokości  $H$  jest trójkąt prostokątny  $ABC$  o przyprostokątnych  $|AB| = a$  i  $|AC| = b$ . Krawędź boczna wychodząca z wierzchołka  $A$  jest prostopadła do podstawy. Ostrosłup ten podzielono płaszczyzną równoległą do podstawy na dwie bryły o równych objętościach. Oblicz pole powierzchni całkowitej tej bryły, która nie jest ostrosłupem.
7. Do windy na parterze budynku czteropiętrowego wsiada osiem osób. Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń:  
 $A$  : wszyscy wysiądą na tym samym piętrze,  
 $B$  : na czwartym piętrze wysiądą co najmniej dwie osoby,  
 $C$  : na każdym piętrze wysiądą po dwie osoby.