

PRACA KONTROLNA nr 5 - POZIOM ROZSZERZONY

1. Wykorzystując zasadę indukcji matematycznej udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \dots + \binom{2n}{2} = \frac{(2n-1)n(2n+1)}{3}.$$

2. Dla jakiego parametru m równanie $x^3 + (m-1)x^2 - (2m^2 + m)x + 2m^2 = 0$ ma trzy pierwiastki tworzące ciąg arytmetyczny?

3. Rozwiązać nierówność $\log(1 - 2^x) + x \log 5 \leq x(1 + \log 2) + \log 6$.

4. Rozwiązać równanie

$$\frac{\sin x}{1 + \cos x} = 2 - \operatorname{ctg} x.$$

Podać interpretację geometryczną, sporządzając wykresy odpowiednich funkcji.

5. Dane są liczby: $m = \frac{\binom{6}{4} \cdot \binom{8}{2}}{\binom{7}{3}}, \quad n = \frac{(\sqrt{2})^{-4} \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{5}{2}} \sqrt[4]{3}}{\left(\sqrt[4]{16}\right)^3 \cdot 27^{-\frac{1}{4}}}.$

- a) Sprawdzić, wykonując odpowiednie obliczenia, że m, n są liczbami naturalnymi.
- b) Wyznaczyć k tak, by liczby m, k, n były odpowiednio: pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu geometrycznego.
- c) Wyznaczyć sumę wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego, którego pierwszymi trzema wyrazami są m, k, n . Ile wyrazów tego ciągu należy wziąć, by ich suma przekroczyła 95% sumy wszystkich wyrazów?
6. Rozwiązać równanie

$$1 - \left(\frac{2^x}{3^x - 2^x}\right) + \left(\frac{2^x}{3^x - 2^x}\right)^2 - \left(\frac{2^x}{3^x - 2^x}\right)^3 + \dots = \frac{3^{x-2}}{2^{x-1}},$$

którego lewa strona jest sumą wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego.