



LI KORESPONDENCYJNY KURS  
Z MATEMATYKI

marzec 2022 r.

### PRACA KONTROLNA nr 7 - POZIOM PODSTAWOWY

1. Grupa przyjaciół postanowiła kupić wspólnie ciekawą grę komputerową za 1920 złotych. Gdy zgłosiło się jeszcze czterech chętnych do korzystania z tego oprogramowania, okazało się, że, przy równym podziale kosztów, każdy będzie mógł zapłacić 80 złotych mniej. Ile osób będzie korzystało z tej gry i ile każdy z nich musi za nią zapłacić?
2. Liczby  $a, b, c$  dają przy dzieleniu przez 7 reszty (odpowiednio) - 1, 2, 3. Wykaż, że suma kwadratów tych liczb jest podzielna przez 7.
3. Dla jakiego parametru  $m$  pierwiastkiem równania

$$x^2 + (2m + 1)x + m + 4 = 0$$

jest liczba  $(-2)$ ? Dla znalezionej  $m$  wyznacz drugi pierwiastek tego równania i sprawdź, dla jakich argumentów otrzymana funkcja kwadratowa  $f(x) = x^2 + (2m + 1)x + m + 4$  spełnia nierówność

$$2f(x) > 1 + \sqrt{2}.$$

4. Oblicz wartość wyrażeń

$$a = \frac{\sin 45^\circ \cos 15^\circ - \cos 45^\circ \sin 15^\circ}{\sin^2 20^\circ + \sin^2 70^\circ}, \quad b = \frac{\sin 75^\circ \cos 15^\circ - \cos 75^\circ \sin 15^\circ}{\sin 20^\circ \cos 70^\circ + \cos 20^\circ \sin 70^\circ}.$$

Wyznacz stosunek promieni okręgów wpisanego i opisanego na trójkącie prostokątnym, którego przyprostokątne mają długości  $a$  i  $b$ .

5. Punkty  $A(1, 0)$ ,  $B(5, 2)$ ,  $C(3, 3)$  są trzema kolejnymi wierzchołkami trapezu prostokątnego, w którym  $AB \parallel CD$ . Wyznacz współrzędne wierzchołka  $D$  oraz równania przekątnych trapezu. W jakim stosunku każda z tych przekątnych dzieli pole trapezu?
6. Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest dwa razy dłuższa niż krawędź podstawy. Oblicz objętość ostrosłupa i cosinus kąta nachylenia ściany bocznej do podstawy, wiedząc, że suma długości wszystkich jego krawędzi jest równa 18.

## PRACA KONTROLNA nr 7 - POZIOM ROZSZERZONY

1. Dla jakich wartości parametru  $a$  równanie  $4 - |x - 1| = (a + 2)^2$  ma dwa różne rozwiązania?
2. Wykorzystując dwumian Newtona, uzasadnij, że liczba  $11^{2k} - 9^{2k}$  jest podzielna przez 100 dla dowolnej liczby naturalnej  $k$  podzielnej przez 5.
3. Wykaż, że w dowolnym trójkącie prostokątnym wartość bezwzględna różnicy tangensów kątów ostrych jest dwa razy większa niż wartość bezwzględna tangensa kąta, jaki tworzą wysokość i środkowa poprowadzone z wierzchołka kąta prostego.
4. Dany jest trapez prostokątny o podstawach długości  $a$  i  $b$  oraz wysokości  $2h$ . Wykaż, że jeżeli  $h^2 = ab$ , to dłuższe ramię trapezu jest równe  $a + b$ , a okrąg, którego jest ono średnicą, jest styczny do drugiego ramienia.
5. Narysuj wykres funkcji

$$f(x) = 1 - \frac{x}{x+2} + \left(\frac{x}{x+2}\right)^2 - \left(\frac{x}{x+2}\right)^3 + \dots$$

która jest sumą nieskończonego szeregu geometrycznego i wyznacz równanie prostej stycznej do wykresu prostopadłej do prostej  $2x - y = 0$ . Sporządź staranny rysunek.

6. Podstawą ostrosłupa jest trapez o obwodzie 32, którego jedna podstawa jest trzy razy dłuższa niż druga. Wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa są nachylone do podstawy pod kątem  $60^\circ$ . Oblicz objętość ostrosłupa, wiedząc, że w jego podstawę można wpisać okrąg.

---

Rozwiązania (rękopis) zadań z wybranego poziomu prosimy nadsyłać do **20 marca 2022r.** na adres:

Wydział Matematyki  
Politechnika Wrocławska  
Wybrzeże Wyspiańskiego 27  
50-370 WROCŁAW,

lub **elektronicznie**, za pośrednictwem portalu [talent.pwr.edu.pl](http://talent.pwr.edu.pl)

Na kopercie prosimy **koniecznie** zaznaczyć **wybrany poziom!** (np. **poziom podstawowy lub rozszerzony**). Do rozwiązań należy dołączyć zaadresowaną do siebie kopertę zwrotną z naklejonym znaczkiem, odpowiednim do formatu listu. Polecamy stosowanie kopert formatu C5 (160x230mm) ze znaczkiem o wartości 3,30 zł. Na każdą większą kopertę należy nakleić droższy znaczek. Prace niespełniające podanych warunków nie będą poprawiane ani odsyłane.

**Uwaga.** Wysyłając nam rozwiązania zadań uczestnik Kursu udostępnia Politechnice Wrocławskiej swoje **dane osobowe**, które przetwarzamy **wyłącznie** w zakresie niezbędnym do jego prowadzenia (odesłanie zadań, prowadzenie statystyki). Szczegółowe informacje o przetwarzaniu przez nas danych osobowych są dostępne na stronie internetowej Kursu.

Adres internetowy Kursu: <http://www.im.pwr.edu.pl/kurs>