

Praca kontrolna nr 4

- 25.1.** Dla jakich wartości parametru rzeczywistego t równanie $x + 3 = -(tx + 1)^2$ ma dokładnie jeden pierwiastek.
- 25.2.** Czworoscian foremny o krawędzi a przecięto płaszczyzną równoległą do dwóch przeciwległych krawędzi. Wyrazić pole otrzymanego przekroju jako funkcję długości odcinka wyznaczonego przez ten przekrój na jednej z pozostałych krawędzi. Uzasadnić postępowanie. Przedstawić znalezioną funkcję na wykresie i podać jej największą wartość.
- 25.3.** Zaznaczyć na wykresie zbiór punktów (x, y) płaszczyzny spełniających warunek $\log_{xy} |y| \geq 1$.
- 25.4.** Wyznaczyć równanie linii utworzonej przez wszystkie punkty płaszczyzny, których odległość od okręgu $x^2 + y^2 = 81$ jest o 1 mniejsza niż od punktu $P(8, 0)$. Sporządzić rysunek.
- 25.5.** Na dziesiątym piętrze pewnego bloku mieszkają Kowalscy i Nowakowie. Kowalscy mają dwóch synów i dwie córki, a Nowakowie jednego syna i dwie córki. Postanowili oni wybrać młodzieżowego przedstawiciela swojego piętra. W tym celu Kowalscy wybrali losowo jedno ze swoich dzieci i Nowakowie jedno ze swoich. Następnie spośród tej dwójki wylosowano jedną osobę. Obliczyć prawdopodobieństwo, że przedstawicielem został chłopiec.
- 25.6.** Uzasadnić prawdziwość nierówności $n + \frac{1}{2} \geq \sqrt{n(n+1)}$, $n \geq 1$. Korzystając z niej oraz z zasady indukcji matematycznej, udowodnić, że

$$\binom{2n}{n} \geq \frac{4^n}{2\sqrt{n}}$$

dla każdej liczby naturalnej n .

- 25.7.** Zbadać przebieg zmienności i narysować wykres funkcji

$$f(x) = \sqrt{\frac{3x-3}{5-x}}.$$

- 25.8.** W trójkącie ABC kąt A ma miarę α , kąt B miarę 2α , a $|BC| = a$. Oznaczmy kolejno przez A_1 punkt na boku AC taki, że BA_1 jest dwusieczną kąta B ; B_1 punkt na boku BC taki, że A_1B_1 jest dwusieczną kąta A_1 , itd. Wyznaczyć długość nieskończonej łamanej $ABA_1B_1A_2\dots$