

PRACA KONTROLNA nr 5 - POZIOM ROZSZERZONY

1. Wśród prostokątów o ustalonej długości przekątnej p znaleźć ten, którego pole jest największe. Nie stosować metod rachunku różniczkowego.

2. Znaleźć wszystkie liczby rzeczywiste $m \neq 0$, dla których równanie

$$\frac{x}{m} + m = \frac{m}{x} + x + 1$$

ma dwa różne pierwiastki x_1, x_2 spełniające warunek $|x_1 - x_2| > x_1 + x_2$.

3. Rozwiązać nierówność

$$2^{3x-1} - 2^{2x-1} - 2^{x+1} + 2 > 0.$$

4. Stosując wzór na zamianę podstawy logarytmu uzasadnić, że liczba

$$S_n = \log_{m^{2^0}} x + \log_{m^{2^1}} x + \log_{m^{2^2}} x + \cdots + \log_{m^{2^n}} x, \quad \text{gdzie } x > 0 \text{ oraz } m \in \mathbb{N}, m > 1,$$

jest sumą częściową pewnego nieskończonego ciągu geometrycznego. Obliczyć sumę wszystkich wyrazów tego ciągu i zbadać, dla jakiego x suma ta wynosi $\frac{1}{2}$.

5. Określić dziedzinę funkcji $f(x) = \log_{x^2}(1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x)$.
6. W kulę wpisano 4 identyczne małe kule wzajemnie do siebie styczne. Obliczyć, jaką część objętości dużej kuli wypełniają małe kule. Wynik wyrażony w procentach podać z dokładnością do 1 promila.