

Tematy I części egzaminu z matematyki
dla kandydatów ubiegających się o przyjęcie na I rok studiów dziennych.
Kandydat wybierał 3 dowolne zadania. Rozwiązania wybranych zadań oceniane
były w skali 0–10 punktów. Egzamin trwał 120 minut.

1. Zbadać przebieg zmienności funkcji

$$y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1},$$

sporządzić jej wykres i na tej podstawie ustalić ile pierwiastków posiada równanie

$$\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} = m$$

w zależności od parametru m .

2. Dla jakich wartości parametru t , przy dowolnej wartości parametru k , równanie

$$x^2 + x\sqrt{k^2 + 4} - k \log_{\frac{1}{2}}(t + 1) = 0$$

posiada dwa różne pierwiastki?

3. Rozwiązać nierówność

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + (2 + \sin 2x)n + 4} - n) < 1 + \frac{1}{2} \cos 2x.$$

4. Dwie kule o promieniach R i x ($R > x$) są styczne zewnętrznie. Przy jakim x objętość stożka opisanego na tych kulach będzie najmniejsza?
5. W urnie U_1 znajdują się dwie kule czarne i pewna ilość kul białych. W urnie U_2 znajduje się 5 kul białych i 3 czarne. Z pierwszej urny losujemy dwie kule i przekładamy je do urny drugiej. Następnie z urny drugiej losujemy jedną kulę. Podać minimalną ilość białych kul znajdujących się w urnie U_1 , jeśli wiadomo, że prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej z urny U_2 jest większe od 0,6.