9. Akustyka.

Wybór i opracowanie zadań 9.1-9.14: Ryszard J. Barczyński

9.1. W roku 2146 policjant zamierzał ukarać mandatem kierowcę, który nie zatrzymał się na dźwięk jego gwizdka o częstotliwości $f_0=1000Hz$. Kierowca tłumaczył się, że nie mógł usłyszeć gwizdka, gdyż na skutek zjawiska Dopplera wysokość docierającego do niego dźwięku wyszła poza zakres słyszalności. Policjant ukarał go wtedy mandatem za przekroczenie maksymalnej dopuszczalnej na obszarze zabudowanym prędkości $180m/s$. Czy miał rację?

9.2. Okręt podwodny płynący ze stałą prędkością $v_z=10m/s$ wysyła w kierunku swojego ruchu impuls ultradźwiękowy o częstotliwości $f=30kHz$, który wraca po upływie czasu $t=0,6s$ i ma częstotliwość $f_1=30,3kHz$. W jakiej odległości znajduje się obiekt, od którego odbił się impuls i z jaką prędkością się porusza? Prędkość dźwięku w wodzie wynosi $c=1450m/s$.

9.3. Samochód straży pożarnej wyposażony w sygnał o częstotliwości dźwięku $f_0=1200Hz$ wyrusza z remizy ruchem jednostajnie przyspieszonym. Po czasie $t=20s$ dyżurujący w remizie strażak zarejestrował dźwięk o częstotliwości $f=1100Hz$. Jak daleko od remizy znajdował się wtedy samochód? Prędkość dźwięku wynosi $c=340m/s$.

9.4. Policyjny radiowóz i uciekający przed nim samochód poruszają się w tym samym kierunku z tą samą prędkością v. Czy pasażerowie uciekającego samochodu usłyszą zmianę wysokości dźwięku syreny radiowozu? Jak zmieni się wysokość dźwięku syreny gdy to oni będą gonili uciekający radiowóz?

9.5. Dwie gitarowe struny E1, stalowa i nylonowa, nastrojone są na ta samą częstotliwość ($329,6kHz$). Ich długość jest taka sama, a struna stalowa ma siedmiokrotnie większą gęstość i dwukrotnie mniejszą średnicę. Która struna jest napięta większą siłą?

9.6. Jaka jest długość struny, jeżeli po skróceniu jej o $d=3,6cm$ (przy zachowaniu stałego napięcia) częstotliwość drgań wzrosła $1,059$ razy? (dla zainteresowanych muzyką: jest to odległość między półtonami w stroju temperowanym).

9.7. Struna o długości $l=97cm$ i kamerton wydają równocześnie dźwięk, który charakteryzuje się dudnieniami o częstotliwości $f_d=1,5Hz$. Po skróceniu struny o $dl=0,3cm$ tony obu źródeł pokrywają się. Jaka jest częstotliwość drgań kamertonu?

9.8. Jaka jest prędkość dźwięku w wodorze przy normalnym ciśnieniu ($p=10^5Pa$) i w temperaturze 0^oC, jeżeli gęstość wodoru w tych warunkach wynosi $\rho=89,8g/m^3$, zaś $\kappa = 1,41$?

9.9. Prędkość dźwięku w powietrzu przy normalnym ciśnieniu i w temperaturze $t_0=20^oC$ wynosi $c=340m/s$. Jak się zmieni prędkość dźwięku zimą, przy tym samym ciśnieniu i mrozach o temperaturze $t_1=-20^oC$?

9.10. Częstotliwość najniższego dźwięku (A_4) wydawanego przez organy w Katedrze Oliwskiej wynosi $f_d=27,5Hz$. Jaka jest długość piszczałki organowej odpowiadającej tej częstotliwości? Prędkość dźwięku w powietrzu w warunkach normalnych wynosi $v=340m/s$.

9.11. W rurze wypełnionej powietrzem (przyrząd Kundta) przy pewnej częstotliwości pobudzania drganiami akustycznymi wytwarza się fala stojąca o odległości między węzłami $L_1=5cm$. Po wypełnieniu rury wodorem ta sama częstotliwość pobudzenia powoduje powstanie fali stojącej o odległości między węzłami równej $L_2=19cm$. Jaka jest prędkość dźwięku w wodorze, jeżeli w powietrzu wynosi ona $c=300m/s$?

9.12. Poziom natężenia dźwięku wywoływanego przez pojedynczy silnik samolotu w odległości $l = 50m$ wynosi $L = 80dB$. Jaki będzie poziom natężenia dźwięku w tej samej odległości gdy samolot uruchomi jeszcze drugi silnik?

9.13. Poziom natężenia dźwięku wywoływanego przez jadący samochód w odległości $l = 50m$ wynosi $50dB$. Jaki będzie poziom natężenia dźwięku w odległości $l_2 = 100m$?

9.14. Gwizdek sędziego piłkarskiego wywołuje w odległości $l_g = 1m$ dźwięk o natężeniu $B_g = 80dB$, a syrena sygnalizująca koniec meczu w odległości $l_s = 10m$ dźwięk o natężeniu $B_s = 90\ dB$. Który dźwięk osiągnie większe natężenie na środku boiska, odległym o $l_1 = 10m$ od sędziego i $l_2 = 100m$ od syreny?

Rozwiązania:

Komentarz do zadań z efektem Dopplera.
Ogólny wzór opisujący zmiany częstotliwości dźwięku gdy porusza się jego źródło i odbiorca wygląda tak:

$$f = f_0 \frac{c \pm v_{obs}}{c \pm v_{zr}}$$

c jest prędkością dźwięku, v_{obs} prędkością obserwatora, a v_{zr} – prędkością źródła. Zapamiętanie znaków oraz, która z prędkości ma być w liczniku, a która w mianowniku często sprawia trudności. Można temu zaradzić pamiętając, że źródło poruszające się z prędkością dźwięku powoduje falę uderzeniową, która w powyższym wzorze wyraża się osobliwością (dzielenie przez zero), zatem prędkość źródła musi być w mianowniku. Znaki można ustalić pamiętając, że gdy źródło i obserwator się zbliżają, to częstotliwość rośnie. Takiemu przypadkowi odpowiada zatem plus w liczniku i minus w mianowniku.

9.1.R. Przyjmijmy, że zakres słyszalności dźwięku rozciąga się od częstotliwości $f_d = 20Hz$ do $f_g = 16000Hz$ (w rzeczywistości jest on dosyć indywidualny). Na skutek zjawiska Dopplera częstotliwość dźwięku może wzrastać (gdy kierowca zbliża się do policjanta)

$$f = f_0 \frac{c+v}{c}$$

lub zmniejszać się (gdy kierowca oddala się od policjanta)

$$f = f_0 \frac{c-v}{c}$$

W powyższych wzorach c oznacza prędkość dźwięku (około $340m/s$), v – prędkość kierowcy, a f – częstotliwość, którą usłyszy kierowca. Po wstawieniu częstotliwości granicznych zakresu słyszalności, gdy kierowca się oddala od policjanta otrzymujemy

$$f_g = f_0 \frac{c+v}{c} \Rightarrow v = c\frac{f_g - f_0}{f_0}$$

a gdy się zbliża

$$f_d = f_0 \frac{c-v}{c} \Rightarrow v = c\frac{f_0 - f_d}{f_0}$$

Po podstawieniu danych liczbowych widzimy, że pierwsza prędkość jest znacznie większa od prędkości dźwięku, a druga do niej zbliżona. Obie prędkości są zdecydowanie większe od dozwolonej, zatem policjant miał rację.

9.2.R Zakładamy, że zarówno okręt podwodny, jak i obiekt poruszają się z prędkością niewielką w stosunku do prędkości dźwięku. Na przebycie podwójnej odległości do obiektu impuls dźwiękowy potrzebował czasu t, zatem odległość wynosi

$$l = \tfrac{1}{2}ct \approx 435m$$

Okręt podwodny wysyłający impuls porusza się, podobnie jak i obiekt, który odbija impuls. Zatem częstotliwość dźwięku docierającego do obiektu będzie zmieniona przez zjawisko Dopplera:

$$f_{ob} = f\frac{c+v_{ob}}{c-v_z}$$

Dodatnia wartość prędkości obiektu w liczniku będzie oznaczała, że obiekt się w kierunku okrętu, a ujemna – że w przeciwnym. Dźwięk odbija się od obiektu, który pełni teraz rolę źródła i dociera do okrętu, który pełni rolę obserwatora. Zjawisko Dopplera zachodzi ponownie

$$f_1 = f_{ob}\frac{c+v_z}{c-v_{ob}}$$

Ostatecznie częstotliwość dźwięku docierającego do okrętu

$$f_1 = f\frac{c+v_{ob}}{c-v_z}\cdot\frac{c+v_z}{c-v_{ob}}$$

Wyznaczamy prędkość obiektu

$$f_1(c-v_z)(c-v_{ob}) = f(c+v_{ob})(c+v_z)$$

$$f_1(c-v_z)c - f_1(c-v_z)v_{ob} = f\cdot v_{ob}(c+v_z) + f\cdot c(c+v_z)$$

$$v_{ob} = c\frac{(f_1-f)c-(f_1+f)v_z}{(f_1+f)c-(f_1-f)v_z} \approx -2{,}78m/s$$

Wartość prędkości jest ujemna, czyli obiekt porusza się w kierunku od okrętu. Warto zwrócić uwagę, że jest to tylko wartość składowej prędkości leżącej na prostej łączącej obiekt i okręt. O ewentualnej składowej prostopadłej do tej prostej nie jesteśmy w stanie nic powiedzieć.

9.3.R Czas, po którym dyżurny usłyszał dźwięk składa się z czasu ruchu samochodu t_s i czasu powrotu dźwięku t_d: $t = t_s + t_d$. Zależność między tymi czasami możemy znaleźć przyrównując drogi samochodu i dźwięku:

$$\frac{1}{2}at_s^2 = ct_d$$

Przyspieszenie samochodu a znajdziemy z efektu Dopplera. Po czasie t_s samochód osiągnął pewną prędkość v_s i dyżurny zarejestrował dźwięk o wysokości

$$f = f_0 \frac{c}{c + v_s}$$

Możemy stąd policzyć prędkość samochodu i jego przyspieszenie

$$v_s = c\frac{f_0 - f}{f} \text{ ponieważ } a = \frac{v_s}{t_s} \Rightarrow a = c\frac{f_0 - f}{t_s f}$$

Wstawiamy przyspieszenie do zależności pomiędzy czasami:

$$\frac{1}{2}c\frac{f_0 - f}{t_s f}t_s^2 = ct_d$$

i znajdujemy czas ruchu samochodu

$$\frac{1}{2}\frac{f_0 - f}{f}t_s = t_d = t - t_s \Rightarrow t_s = \frac{t}{1 + \frac{1}{2}\frac{f_0 - f}{f}} = \frac{2tf}{f + f_0}$$

Możemy już policzyć przyspieszenie samochodu:

$$a = \frac{v_s}{t_s} \Rightarrow a = c\frac{(f_0 - f)(f + f_0)}{2tf^2}$$

i ostatecznie jego odległość od remizy w chwili, gdy dyżurny zarejestrował dźwięk (do równania wstawiamy całkowity czas t, bo w czasie gdy dźwięk powracał samochód cały czas jechał):

$$s = \frac{at^2}{2} = ct\frac{(f - f_0)(f + f_0)}{4f^2}$$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy $s = 271m$.

Dodatek: można próbować rozwiązać to zadanie przy założeniu, że czasu ruchu samochodu t_s jest dużo większy od czasu powrotu dźwięku t_d. Rozwiązanie jest wtedy prostsze, ale mniej dokładne i wygląda tak: po czasie t samochód osiągnął pewną prędkość v_s i dyżurny zarejestrował dźwięk o wysokości

$$f = f_0 \frac{c}{c + v_s}$$

Możemy stąd policzyć prędkość samochodu i jego przyspieszenie

$$v_s = c\frac{f_0 - f}{f} \text{ ponieważ } a = v_s / t \Rightarrow a = c\frac{f_0 - f}{tf}$$

i odległość od remizy

$$s = \frac{at^2}{2} = \frac{ct}{2}\frac{f - f_0}{f}$$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy $s = 283m$, czyli zaniedbanie czasu powrotu dźwięku powoduje błąd ponad *5%*!

9.4.R Skoro radiowóz i samochód poruszają się z tą samą prędkością, to ich prędkość względem siebie jest równa zeru i zjawisko Dopplera nie zajdzie. Pewien niepokój może budzić fakt, że musimy jeszcze brać pod uwagę ośrodek, w którym rozchodzi się fala dźwiękowa (powietrze), a względem tego ośrodka zarówno źródło, jak i obserwator poruszają się. Gdy radiowóz goni samochód mamy jednak

$$f = f_0 \frac{c - v}{c - v} = f_0$$

a gdy samochód jedzie za radiowozem

$$f = f_0 \frac{c + v}{c + v} = f_0$$

W żadnym przypadku nie zaobserwujemy zmiany częstotliwości. Podobnie nie zaobserwujemy zjawiska Dopplera gdy źródło i obserwator są nieruchome, a porusza się tylko powietrze (na przykład wieje wiatr).

Komentarz: częstotliwość drgań własnych struny

Częstotliwość drgań własnych zamocowanej z obu końców struny zależy od jej długości, materiału i naprężenia:

$$f_k = \frac{k}{2l}\sqrt{\frac{F}{S\rho}}$$

gdzie $k=1,2,3,...$, l jest długością struny, F siłą napinającą, S przekrojem, a ρ gęstością materiału struny. Wartość $k=1$ odpowiada częstotliwości podstawowej, a wartości większe wyższym częstotliwościom harmonicznym.

9.5.R Częstość drgań własnych struny wyraża się zależnością

$$f_k = \frac{k}{2l}\sqrt{\frac{F}{S\rho}}$$

gdzie *k=1,2,3,...*, *l* jest długością struny, *F* siłą napinającą, *S* przekrojem, a ρ gęstością materiału struny. Porównując częstotliwość drgań struny nylonowej i stalowej otrzymujemy

$$\frac{k}{2l}\sqrt{\frac{F_{nyl}}{S_{nyl}\rho_{nyl}}} = \frac{k}{2l}\sqrt{\frac{F_{stal}}{S_{stal}\rho_{stal}}} \Rightarrow \frac{F_{nyl}}{S_{nyl}\rho_{nyl}} = \frac{F_{stal}}{S_{stal}\rho_{stal}}$$

Podstawiając dane z zadania otrzymujemy

$$\frac{F_{nyl}}{S_{nyl}\rho_{nyl}} = \frac{F_{stal}}{\frac{1}{4}S_{nyl}\cdot 7\rho_{nyl}} \Rightarrow F_{nyl} = \frac{4}{7}F_{stal}$$

Większą siłą napięta jest struna stalowa.

9.6.R Jeżeli przed skróceniem podstawowa częstotliwość drgań struny wyniosła

$$f = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{F}{S\rho}}$$

to po skróceniu możemy zapisać

$$\frac{1}{2(l-d)}\sqrt{\frac{F}{S\rho}} = 1{,}059\cdot f = \frac{1{,}059}{2l}\sqrt{\frac{F}{S\rho}} \Rightarrow \frac{1}{l-d} = \frac{1{,}059}{l}$$

$$l = \frac{1{,}059}{0{,}059}d \approx 64{,}6cm$$

Jeżeli posiadasz gitarę porównaj ten wynik z długością strun i skróceniem struny na pierwszym progu. Warto zwrócić uwagę, że do rozwiązania zadania nie jest konieczna znajomość dokładnego wyrażenia na częstotliwość drgań struny, ale wystarczy fakt, że jest ona odwrotnie proporcjonalna do długości.

9.7.R Dudnienia zachodzą z częstotliwością równą połowie różnicy częstotliwości nakładających się fal. Możemy więc zapisać:

$$f_d = \frac{f_k - f_s}{2}$$

Częstotliwość drgań struny jest odwrotnie proporcjonalna do jej długości, mamy zatem

$$f_s = \frac{A}{l}; f_k = \frac{A}{l-dl}$$

gdzie A jest stałą proporcjonalności (porównaj z poprzednim zadaniem). Stałą A możemy znaleźć następująco:

$$f_d = \frac{f_k - f_s}{2} = \frac{\frac{1}{l-dl} - \frac{1}{l}}{2}A \Rightarrow A = 2f_d\frac{1}{\frac{1}{l-dl} - \frac{1}{l}}$$

a częstotliwość drgań kamertonu

$$f_k = 2f_d \frac{1}{\frac{1}{l-dl} - \frac{1}{l}} \cdot \frac{1}{l-dl} = 2f_d \frac{l}{dl} \approx 970 Hz$$

Komentarz: częstotliwość drgań własnych słupa powietrza
Częstotliwość drgań słupa powietrza zamkniętego z jednej strony

$$f_k = \frac{2k+1}{4l} v = \frac{2k+1}{4l} \sqrt{\frac{p\kappa}{\rho}}$$

Częstotliwość drgań dwustronnie otwartego lub zamkniętego słupa powietrza

$$f_k = \frac{k+1}{2l} v = \frac{k+1}{2l} \sqrt{\frac{p\kappa}{\rho}}$$

gdzie v jest prędkością dźwięku, l długością słupa powietrza, p ciśnieniem, k stosunkiem ciepła właściwego powietrza przy stałym ciśnieniu do ciepła właściwego przy stałej objętości, zaś $k=0,1,2...$ Wartość $k=0$ odpowiada częstotliwości podstawowej, a wartości większe wyższym częstotliwościom harmonicznym.

9.8.R Odpowiedź:

$$v = \sqrt{\frac{p\kappa}{\rho}} \approx 1253 m/s$$

9.9.R Prędkość dźwięku w warunkach normalnych wynosi

$$c = \sqrt{\frac{p\kappa}{\rho}}$$

a jej zmiana przy zmianach temperatury wynika ze zmiany gęstości ρ. Zmiany gęstości znajdziemy wiedząc, że masa powietrza jest stała, a zmieniają się jego gęstość i objętość

$$\rho V = \rho_1 V_1$$

Z równania Clapeyrona mamy

$$\frac{pV}{T} = \frac{pV_1}{T_1} \Rightarrow V_1 = V\frac{T_1}{T}$$

Łącząc obydwa równania

$$\rho_1 = \rho \frac{T}{T_1}$$

Wstawiamy gęstość do wyrażenia na prędkość dźwięku:

$$c_1 = \sqrt{\frac{p\kappa}{\rho_1}} = \sqrt{\frac{p\kappa}{\rho}} \sqrt{\frac{T_1}{T}} = c\sqrt{\frac{T_1}{T}}$$

Po podstawieniu danych liczbowych (pamiętając o temperaturze w skali Kelvina) otrzymujemy około *316m/s*. Zimą dźwięk porusza się wolniej niż latem...

9.10.R Piszczałka organowa wykorzystuje drgania jednostronnie zamkniętego słupa powietrza. Częstotliwość drgań takiego słupa wyraża się przez

$$f_k = \frac{2k+1}{4l} v$$

gdzie v jest prędkością dźwięku, l długością słupa powietrza, zaś $k=0,1,2...$ Częstotliwości podstawowej drgań odpowiada $k=0$. Wyznaczamy długość piszczałki dla tego przypadku:

$$l = \frac{1}{4f_d} v \approx 3{,}1m$$

9.11.R W rurze wypełnionej powietrzem długość fali wynosi $\lambda_p = 2l_1$, a w wypełnionej wodorem $\lambda_w = 2l_2$. Możemy zapisać

$$2l_1 = \frac{v_p}{f} \quad oraz \quad 2l_2 = \frac{v_w}{f}$$

po wyłączeniu z obu równań częstotliwości i porównaniu otrzymujemy

$$v_w = \frac{l_2}{l_1} v_p = 1140 m/s$$

Komentarz: poziom natężenia dźwięku.
Natężenie akustyczne J w danym punkcie jest to wartość średnia energii fali akustycznej przepływającej w jednostce czasu przez jednostkową powierzchnię prostopadłą do kierunku rozchodzenia się fali.

$$J = \frac{p^2}{c\rho_0}$$

gdzie p jest ciśnieniem akustycznym, c prędkością dźwięku, a ρ_0 gęstością ośrodka. W zastosowaniach praktycznych używa się *poziomu natężenia akustycznego* wyrażonego w skali logarytmicznej (w decybelach, dB) w odniesieniu do umownej wartości natężenia akustycznego odniesienia $J_0 = 10^{-12}$ w/m^2

$$L = 10 \cdot \log \frac{J}{J_0}$$

9.12. Poziom natężenia dźwięku wywoływanego przez pojedynczy silnik samolotu

$$L = 10 \cdot \log \frac{J}{J_0}$$

po włączeniu drugiego silnika energia fali akustycznej będzie dwukrotnie większa. Poziom natężenia dźwięku wyniesie teraz

$$L_2 = 10 \cdot \log \frac{2 \cdot J}{J_0} = 10 \cdot \log \frac{J}{J_0} + 10 \cdot \log 2 = L + 10 \cdot \log 2 \approx 83dB$$

9.13. Poziom natężenia dźwięku wywoływanego przez jadący samochód w odległości l

$$L = 10 \cdot \log \frac{J}{J_0}$$

Przyjmijmy, że samochód z odległości kilkudziesięciu metrów możemy traktować jako źródło punktowe promieniujące moc akustyczną P równomiernie we wszystkich kierunkach. W odległości l mamy wtedy $J = P/4\pi l^2$, a w odległości l_2 mamy $J_2 = P/4\pi l_2^2$. Po wyłączeniu P i porównaniu otrzymujemy

$$J 4\pi l^2 = J_2 4\pi l_2^2 \Rightarrow J_2 = J \frac{l^2}{l_2^2}$$

skąd poziom natężenia dźwięku w odległości l_2 wyniesie

$$L_2 = 10 \cdot \log \frac{J_2}{J_0} = 10 \cdot \log(\frac{J}{J_0} \cdot \frac{l^2}{l_2^2}) = 10 \cdot \log \frac{J}{J_0} + 10 \cdot \log \frac{l^2}{l_2^2} = L + 20 \cdot \log \frac{l}{l_2} \approx 44dB$$

9.14. Podobnie jak w poprzednim zadaniu przyjmujemy, że źródła dźwięku są punktowe i że promieniują równomiernie we wszystkich kierunkach. Mamy wtedy

$$J_2 = J_s \frac{l_s^2}{l_2^2} \quad oraz \quad J_1 = J_g \frac{l_g^2}{l_1^2}$$

Natężenia dźwięku J_s i J_g znajdujemy znając poziom natężenia:

$$B_g = 10 \cdot \log \frac{J_g}{J_0} \Rightarrow 10^{\frac{Bg}{10}} = \frac{J_g}{J_0} \Rightarrow J_g = 10^{\frac{Bg}{10}} \cdot J_0$$

oraz

$$B_s = 10 \cdot \log \frac{J_s}{J_0} \Rightarrow 10^{\frac{Bs}{10}} = \frac{J_s}{J_0} \Rightarrow J_s = 10^{\frac{Bs}{10}} \cdot J_0$$

Wstawiamy otrzymane wyrażenia do równań na J_1 i J_2

$$J_1 = J_g \frac{l_g^2}{l_1^2} = 10^{\frac{Bs}{10}} \cdot J_0 \cdot \frac{l_g^2}{l_1^2} = 10^8 \cdot J_0 \cdot 10^{-2} = 10^6 \cdot J_0$$

$$J_2 = J_s \frac{l_s^2}{l_1^2} = 10^{\frac{Bs}{10}} \cdot J_0 \cdot \frac{l_s^2}{l_1^2} = 10^9 \cdot J_0 \cdot 10^{-2} = 10^7 \cdot J_0$$

Większe natężenie osiągnie dźwięk syreny.