PRACA KONTROLNA nr 4

styczeń 2002r

1. Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym

$$a_n = \frac{2^n + 2^{n+1} + ... + 2^{2n}}{2^2 + 2^4 + ... + 2^{2n}}.$$

2. Wyznaczyć równanie prostej prostopadłej do danej $2x+3y+3=0$ i leżącej w równej odległości od dwóch danych punktów $A(-1,1)$ i $B(3,3)$. Sporządzić rysunek.

3. Tworząca stożka ma długość l i widać ją ze środka kuli wpisanej w ten stożek pod kątem α. Obliczyć objętość i kąt rozwarcia stożka. Określić dziedzinę kąta α.

4. Bolek kupił jeden długopis i k zeszytów i zapłacił k zł i 50 gr, a Lolek kupił k długopisów i 4 zeszyty i zapłacił $2,5k$ zł. Wyznaczyć cenę długopisu i zeszytu w zależności od parametru k. Znaleźć wszystkie możliwe wartości tych cen wiedząc, że zeszyt kosztuje nie mniej niż 50 gr, długopis jest droższy od zeszytu, a ceny obydwu artykułów wyrażają się w pełnych złotych i dziesiątkach groszy.

5. Rozwiązać nierówność:

$$\mathrm{tg}^3 x \geqslant \sin 2x.$$

6. Żarówki są sprzedawane w opakowaniach po 6 sztuk. Prawdopodobieństwo, że pojedyncza żarówka jest sprawna wynosi $\frac{2}{3}$. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w jednym opakowaniu znajdą się co najmniej 4 sprawne żarówki. O ile wzrośnie to prawdopodobieństwo, jeśli jedna, wylosowana z opakowania żarówka okazała się sprawna.

7. Prosta styczna w punkcie P do okręgu o promieniu 2 i półprosta wychodząca ze środka okręgu mająca z okręgiem punkt wspólny S przecinają się w punkcie A pod kątem 60^0. Znaleźć promień okręgu stycznego do odcinków AP, AS i łuku PS. Wykonać **odpowiedni** rysunek.

8. W ostrosłupie prawidłowym, którego podstawą jest kwadrat, pole każdej z pięciu ścian wynosi 1. Ostrosłup ten ścięto płaszczyzną równoległą do podstawy tak, aby uzyskać maksymalny stosunek objętości do pola powierzchni całkowitej. Obliczyć pole powierzchni całkowitej otrzymanego ostrosłupa ściętego. Rozwiązanie zilustrować rysunkiem.