Praca kontrolna nr 3

31.1. Z talii 24 kart do gry wylosowano 7 kart. Jakie jest prawdopodobieństwo otrzymania dokładnie czterech kart w jednym z czterech kolorów, w tym asa, króla i damę.

31.2. Pewien ostrosłup podzielono na trzy części dwiema płaszczyznami równoległymi do jego podstawy. Pierwsza płaszczyzna leży w odległości $d_1 = 2$ cm, a druga w odległości $d_2 = 3$ cm od podstawy. Pola przekrojów ostrosłupa tymi płaszczyznami równe są odpowiednio $S_1 = 25\ \mathrm{cm}^2$ oraz $S_2 = 16\ \mathrm{cm}^2$. Obliczyć objętość tego ostrosłupa oraz objętość najmniejszej części.

31.3. Rozwiązać układ równań $\begin{cases} x^2 + y^2 = 24 \\ \dfrac{2\log x + \log y^2}{\log(x+y)} = 2. \end{cases}$

31.4. W trójkącie równoramiennym ABC odległość środka okręgu wpisanego od wierzchołka C wynosi d, a podstawę AB widać ze środka okręgu wpisanego pod kątem α. Obliczyć pole tego trójkąta.

31.5. Stosując zasadę indukcji matematycznej, udowodnić prawdziwość dla $n \geq 1$ wzoru

$$\cos x + \cos 3x + ... + \cos(2n-1)x = \frac{\sin 2nx}{2\sin x}, \quad \sin x \neq 0.$$

31.6. Wyznaczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym

$$a_n = \frac{\sqrt[6]{4n}}{\sqrt{n} - \sqrt{n + \sqrt[3]{4n^2}}}, \quad n \geq 1.$$

31.7. Dany jest wierzchołek $A(6,1)$ kwadratu. Wyznaczyć pozostałe wierzchołki tego kwadratu, gdy wierzchołki sąsiadujące z A leżą jeden na prostej $l : x - 2y + 1 = 0$, a drugi na prostej $k : x + 3y - 4 = 0$. Sporządzić rysunek.

31.8. Zbadać przebieg zmienności i narysować wykres funkcji

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}}.$$