7. Szczególna teoria względności.

Wybór i opracowanie zadań 7.1-7.9: Barbara Kościelska
Więcej zadań z tej tematyki znajduje się w II części skryptu.

7.1. Czy można znaleźć taki układ odniesienia, w którym Chrzest Polski i Bitwa pod Grunwaldem zaszłyby:
a) w tym samym miejscu,
b) w tym samym czasie?

7.2. W tym samym miejscu korony słonecznej w obrębie 12 s nastąpiły dwa wybuchy. Rakieta poruszająca się ze stałą prędkością względem Słońca zarejestrowała obydwa te zdarzenia w odstępie 13 s.
a) Z jaką prędkością porusza się rakieta?
b) Ile wynosi odległość przestrzenna między wybuchami w układzie związanym z poruszającą się rakietą?

7.3. Dwie cząstki o jednakowych prędkościach v = 0,75 c poruszają się po jednej prostej i padają na tarczę. Jedna z nich uderzyła w tarczę o $\Delta t = 10^{-8}$ s później niż druga. Obliczyć odległość między tymi cząstkami w locie w układzie odniesienia związanym z nimi.

7.4. Długość nieruchomego pociągu jest dokładnie taka sama jak długość tunelu i wynosi L_0. Pociąg ten jedzie z prędkością v. Jak długo będzie trwał przejazd pociągu przez tunel według pasażera siedzącego w pociągu oraz według turysty stojącego koło tunelu? Czas przejazdu określamy jako odstęp czasu pomiędzy momentem, kiedy czoło pociągu mija wlot tunelu i chwilą gdy koniec ostatniego wagonu znajduje się przy końcowej krawędzi tunelu.

7.5. Mezony μ, które powstają w górnych warstwach atmosfery poruszają się w kierunku Ziemi z prędkością $v = 0{,}9c$ (c-prędkość światła w próżni). Po przebyciu drogi L (mniejszej niż grubość atmosfery) mezony rozpadają się. Obliczyć:
(a) czas życia mezonu mierzony w układzie związanym z Ziemią oraz w układzie związanym z mezonem,
(b) grubość warstwy atmosfery, jaką przebędzie mezon, mierzoną w układzie mierzonym z mezonem.

7.6. Układ K' porusza się z prędkością u względem nieruchomego układu odniesienia K. W układzie K pręt poruszający się względem niego z prędkością $v = 2u$ ma długość L. Jaka jest długość tego pręta w układzie K'? Długość spoczynkowa pręta w obu układach jest taka sama.

7.7. Sztywny pręt o długości L_2 = 1,5 m znajduje się w spoczynku względem układu K_2. Jaka będzie długość L_1 i orientacja pręta θ_1 w układzie K_1, jeżeli w układzie K_2 pręt tworzy kąt θ_2 = 45° z osią x_2 i układ ten porusza się z prędkością v = 0,98c.

7.8.* Jaką maksymalną prędkość musi mieć cząstka, aby jej energia kinetyczna mogła być napisana w postaci $E = 0{,}5 m_0 v^2$ z błędem nie przekraczającym 1%.

7.9. Dowieść, że cząstka o ładunku q poruszająca się prostopadle do pola magnetycznego o indukcji B będzie zataczać okrąg o promieniu $R = (2E_0E_K + E_K^2)^{1/2}/(qcB)$, gdzie E_0 jest energią spoczynkową, a E_K energią kinetyczną cząstki.

Rozwiązania:

7.1.R. Załóżmy, że Gniezno, w którym odbył się w roku 966 (chwila czasu t_1) Chrzest Polski, ma w przestrzeni w układzie współrzędnych związanym z Ziemią położenie x_1, natomiast w chwili czasu t_2 (1410 rok) odbyła się w punkcie o współrzędnej x_2 Bitwa pod Grunwaldem. Wiemy, że w układzie współrzędnych związanym z Ziemią oba zdarzenia zaszły w innych miejscach i innym czasie. Załóżmy, że istnieje jakiś inny układ odniesienia, poruszający się względem naszego z prędkością v. Przyjmijmy, że w tym nowym układzie współrzędnych Chrzest Polski miał miejsce w punkcie x_1' w chwili czasu t_1', zaś Bitwa pod Grunwaldem w punkcie x_2' w chwili t_2'.

(a) Zgodnie z transformacją Lorentza:

$$(1) \quad x_1' = \frac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \qquad x_2' = \frac{x_2 - vt_2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}.$$

W nowym układzie współrzędnych oba zdarzenia miałyby zajść w tym samym miejscu, czyli:

$$x_1' = x_2' .$$

Wówczas prawe strony równań (1) też będą sobie równe:

$$\frac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{x_2 - vt_2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}},$$

$$x_1 - vt_1 = x_2 - vt_2 ,$$

skąd:

$$(2) \quad v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}.$$

Układ, w którym oba zdarzenia zaszłyby w tym samym miejscu przestrzeni musiałby poruszać się względem naszego układu z prędkością v opisaną wzorem (2).

(b) Zgodnie z transformacją Lorentza:

$$(3) \quad t_1' = \frac{t_1 - \frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \qquad t_2' = \frac{t_2 - \frac{v}{c^2}x_2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}.$$

W nowym układzie współrzędnych oba zdarzenia miałyby zajść w tym samym czasie, czyli:

$$t_1' = t_2' .$$

Wówczas prawe strony równań (3) też będą sobie równe:

$$\frac{t_1 - \frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{t_2 - \frac{v}{c^2}x_2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}},$$

$$t_1 - \frac{v}{c^2}x_1 = t_2 - \frac{v}{c^2}x_2 ,$$

skąd:

$$(4) \quad v = c^2 \frac{t_2 - t_1}{x_2 - x_1}.$$

Otrzymana prędkość (4) nowego układu współrzędnych jest większa od prędkości światła w próżni, czyli układ, w którym oba zdarzenia zaszłyby w tym samym czasie nie istnieje.

7.2.R. Oznaczmy współrzędną miejsca w którym zaszły na Słońcu dwa wybuchy przez x_1, a przedział czasu między nimi t_2 - t_1 = Δt = 12 s (gdzie t_1 i t_2 są chwilami czasu, w których nastąpił odpowiednio pierwszy i drugi wybuch. Przyjmijmy, że w układzie związanym z rakietą wybuchy na Słońcu nastąpiły w miejscach o współrzędnych x_1' oraz x_2', w chwilach czasu odpowiednio t_1' oraz t_2' (t_2' - t_1' = $\Delta t'$ =13 s).

(a) Zgodnie z transformacją Lorentza:

$$t_1' = \frac{t_1 - \frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \qquad t_2' = \frac{t_2 - \frac{v}{c^2}x_2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}.$$

Wówczas czas między wybuchami w układzie współrzędnych związanym z rakietą:

$$t_2' - t_1' = \frac{t_2 - \frac{v}{c^2}x_1 - t_1 - \frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}},$$

czyli:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}},$$

skąd prędkość, z jaką porusza się rakieta:

$$(1) \quad v = c\sqrt{1 - \frac{\Delta t^2}{\Delta t'^2}}.$$

(a) Zgodnie z transformacją Lorentza:

$$x_1' = \frac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \qquad x_2' = \frac{x_1 - vt_2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}.$$

Wówczas odległość między wybuchami w układzie współrzędnych związanym z rakietą:

$$x_1' - x_2' = \frac{x_1 - vt_1 - x_1 + vt_2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{v\,\Delta t}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}.$$

gdzie v jest prędkością rakiety opisaną równaniem (1).

7.3.R. Niech x_1 i x_2 oznaczają współrzędne cząstek w układzie odniesienia związanym z tarczą, natomiast x_1' i x_2' współrzędne cząstek u układzie odniesienia związanym z nimi. Zgodnie z transformacją Lorentza:

$$x_1' = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \qquad x_2' = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}.$$

Wówczas odległość między cząstkami w układzie odniesienia związanym z nimi:

$$(1) \quad x_2' - x_1' = \frac{x_2 - vt - x_1 + vt}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}.$$

Odległość między cząstkami w układzie związanym z tarczą:

$$(2) \quad x_2 - x_1 = v\,\Delta t,$$

gdzie Δt jest czasem zmierzonym pomiędzy uderzeniami cząstek o tarczę w układzie współrzędnych związanym z tarczą. Wstawiając (2) do (1) otrzymamy:

$$x_2' - x_1' = \frac{v\,\Delta t}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = 3{,}4\ m.$$

7.4.R. Odpowiedź: według obu obserwatorów (pasażera pociągu i turysty stojącego koło tunelu) czas przejazdu pociągu wynosi:

$$t = \frac{L_0}{v}\left(1 + \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\right).$$

7.5.R. Odpowiedź:

(a) Czas życia mezonu mierzony w układzie związanym z Ziemią:

$$t = \frac{L}{v}.$$

Czas życia mezonu mierzony w układzie związanym z mezonem:

$$t = \frac{L}{v}\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}.$$

(b)

$$L_{atm.} = L_0\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}.$$

7.6.R. Długość L' pręta w układzie K' wynosi:

$$(1) \quad L' = L_0\sqrt{1-\left(\frac{v'}{c}\right)^2},$$

gdzie v' jest prędkością pręta w układzie K', a L_0 jego długością spoczynkową. Długość L_0 pręta możemy obliczyć znając jego długość L oraz prędkość $2u$ w układzie K:

$$(2) \quad L_0 = \frac{L}{\sqrt{1-\left(\frac{2u}{c}\right)^2}}.$$

Prędkość pręta w układzie K':

$$(3) \quad v' = \frac{2u-u}{1-\frac{2u^2}{c^2}} = \frac{u}{1-\frac{2u^2}{c^2}}.$$

Podstawiając (2) i (3) do (1) otrzymamy:

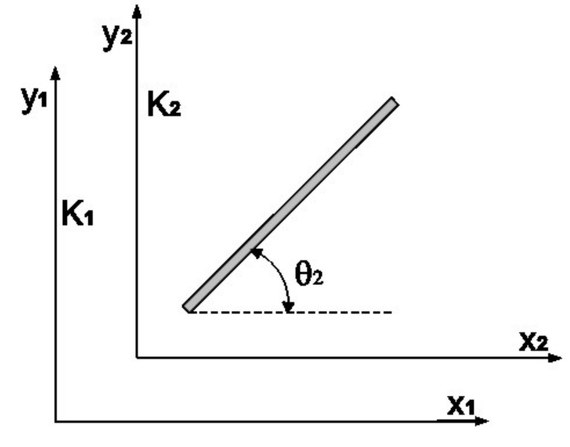
$$L' = L\frac{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}{1-2\left(\frac{u}{c}\right)^2}.$$

7.7.R. Długość L_1 pręta rozkładamy na dwie składowe L_{1x} i L_{1y}, równoległe odpowiednio do osi x_1 i y_1 układu K_1. Wówczas otrzymamy:

$$(1) \quad L_1 = \sqrt{L_{1x}^2 + L_{1y}^2}.$$

Składowa L_{1y} jest prostopadła do kierunku wektora prędkości v układu K_2, i mierzona z układu K_1 nie będzie doznawać skrócenia. Czyli:

$$(2) \quad L_{1y} = L_{2y} = L_2 \sin\theta_2,$$



gdzie L_{2y} jest składową długości pręta L_2 równoległą do osi y_2 układu K_2. Składowa L_{1x} jest równoległa do kierunku wektora prędkości v układu K_2, i mierzona z układu K_1 ulegnie skróceniu:

$$(3)\quad L_{1x} = L_{2x}\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} = L_2\cos\theta_2\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\ ,$$

gdzie L_{2x} jest składową długości pręta L_2 równoległą do osi x_2 układu K_2. Podstawiając (2) i (3) do (1) otrzymamy:

$$L_1 = L_2\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\cos^2\theta_2} = 1{,}08\,m.$$

Orientacja pręta w układzie K_1 będzie określona wzorem:

$$\tan\theta_1 = \frac{L_{1y}}{L_{1x}} = \frac{\tan\theta_2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\ ,$$

skąd po podstawieniu wartości liczbowych:

$$\theta_1 = 78{,}7°.$$

7.8.R.* Oznaczmy przez E_{kl} energię kinetyczną w ujęciu klasycznym, zaś przez E_{rel} energię kinetyczną w ujęciu relatywistycznym. Wówczas:

$$(1)\quad E_{kl} = \frac{1}{2}m_0v^2\ ,$$

$$(2)\quad E_{rel} = mc^2 - m_0c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} - m_0c^2 = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}-1\right).$$

Rozwijając pierwszy składnik równania (2) w szereg dwumianowy i biorąc pod uwagę pierwsze trzy składniki rozwinięcia otrzymamy:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(\frac{v}{c}\right)^4.$$

Podstawiając powyższe rozwinięcie do równania (2) otrzymamy:

$$E_{rel} = m_0c^2\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(\frac{v}{c}\right)^4 - 1\right) = \frac{m_0c^2v^2}{2c^2} + \frac{3m_0c^2v^4}{8c^4}\ ,$$

$$(3)\quad E_{rel} = \frac{1}{2}m_0v^2 + \frac{3m_0v^4}{8c^2} = E_{kl} + \frac{3m_0v^4}{8c^2}.$$

Dzieląc równanie (3) stronami przez E_{kl} otrzymamy:

$$\frac{E_{rel}}{E_{kl}} = 1 + \frac{3}{4}\left(\frac{v}{c}\right)^2 ,$$

czyli aby energia kinetyczna mogła być zapisana klasycznie z błędem nie większym niż 1%:

$$\frac{3}{4}\left(\frac{v}{c}\right)^2 \leq 0{,}01,$$

$$v \leq 0{,}12c .$$

7.9.R. Cząstka o ładunku q poruszająca się prostopadle do pola magnetycznego o indukcji B będzie poruszać się po okręgu o promieniu R. Mamy więc:

$$\frac{mv^2}{R} = qvB ,$$

$$mv = p = qBR ,$$

gdzie p jest pędem cząstki. Wówczas:

$$(1) \quad R = \frac{p}{qB} .$$

Energię całkowitą E cząstki można wyrazić poprzez jej pęd:

$$(2) \quad E^2 = E_0^2 + p^2c^2 ,$$

lub przez sumę energii spoczynkowej E_0 i kinetycznej E_K:

$$E = E_0 + E_K ,$$

skąd po podniesieniu stronami do kwadratu otrzymamy:

$$(3) \quad E^2 = E_0^2 + 2E_0E_K + E_K^2 .$$

Z równań (2) i (3):

$$E_0^2 + p^2c^2 = E_0^2 + 2E_0E_K + E_K^2 ,$$

$$(4) \quad p = \frac{1}{c}\sqrt{2E_0E_K + E_K^2} .$$

Podstawiając (4) do (1) otrzymamy:

$$R = \frac{\sqrt{2E_0E_K + E_K^2}}{qcB} .$$