

PRACA KONTROLNA nr 5 - POZIOM ROZSZERZONY

1. Stosując zasadę indukcji matematycznej wykazać, że liczba $7^n - (-3)^n$ jest podzielna przez 10 dla każdego naturalnego n .
2. Rozwiązać nierówność $4 \log_{16} \cos 2x + 2 \log_4 \sin x + \log_2 \cos x + 3 < 0$ dla $x \in (0, \frac{\pi}{4})$.
3. Różnica ciągu arytmetycznego (a_n) jest liczbą mniejszą od 1. Wyznaczyć najmniejszą wartość wyrażenia $\frac{a_{1049}}{a_{50}}$, wiedząc, że $a_{51} = 1$.
4. Cięciwa paraboli o równaniu $y = -a^2x^2 + 5ax - 4$ jest styczna do krzywej $y = \frac{1}{-x+1}$ w punkcie o odciętej $x_0 = 2$, który dzieli tę cięciwę na połowy. Wyznaczyć parametr a . Podać ilustrację graficzną rozwiązania zadania.
5. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{2x^2}{(2-x)^2}$.

- a) Zbadać przebieg zmienności funkcji f i naszkicować jej wykres.
- b) Sporządzić wykres funkcji $k = g(m)$, gdzie k jest liczbą rozwiązań równania

$$\frac{2x^2}{(2-|x|)^2} = m$$

w zależności od parametru rzeczywistego m .

6. W kulę o promieniu R wpisano stożek, w którym tworząca jest równa średnicy podstawy. Obydwie bryły przecięto płaszczyzną równoległą do podstawy stożka. Szerokość otrzymanego w przecięciu pierścienia kołowego zawartego między powierzchnią kulistą a powierzchnią boczną stożka równa się m .
- a) Znaleźć odległość płaszczyzny tnącej od wierzchołka stożka.
- b) Przedyskutować liczbę rozwiązań w zależności od m i podać interpretację geometryczną przypadków szczególnych.