

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
im. Stanisława Staszica w Krakowie
OLIMPIADA „O DIAMENTOWY INDEKS AGH” 2016/17

MATEMATYKA - ETAP II

ZADANIA PO 10 PUNKTÓW

1. Udowodnij, że spośród dowolnych pięciu liczb naturalnych można wybrać trzy, których suma jest podzielna przez 3.
2. Rozwiąż równanie
$$\frac{\log_x(x^3 + 3)}{\log_x(x + 1)} = 2.$$
3. Ile jest sześciocyfrowych liczb naturalnych, w których liczba cyfr parzystych jest równa liczbie cyfr nieparzystych?
4. Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie ABC , w którym $|AB| = 10$ cm, $|AC| = 8$ cm i miara kąta przy wierzchołku A jest równa 60° .

ZADANIA PO 20 PUNKTÓW

5. Wykres funkcji kwadratowej $f(x)$ przechodzi przez punkty $(-2, 16)$, $(1, -2)$, $(3, 6)$. Po przesunięciu go o wektor $\vec{v} = [2, -6]$ i przekształceniu przez symetrię względem prostej $x = 0$ otrzymano wykres funkcji $g(x)$. Wykres funkcji $g(x)$ przekształcono przez symetrię względem prostej $y = 3$, otrzymując wykres funkcji $h(x)$. Napisz wzory funkcji $f(x)$, $g(x)$ i $h(x)$.
6. W prawidłowym ostrosłupie czworokątnym krawędzie boczne są nachylone do podstawy pod kątem α . W ostrosłup wpisano półkulę o promieniu R tak, że jest ona styczna do ścian bocznych, a koło wielkie zawiera się w podstawie ostrosłupa. Oblicz objętość ostrosłupa.
7. Suma wszystkich współczynników wielomianu $W(x)$ jest równa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{-2-n} + 2^{1-2n}}{5^{2-n} + 2^{-1-2n}}.$$

Suma współczynników przy parzystych potęgach zmiennej x jest 3 razy większa niż suma współczynników przy potęgach nieparzystych. Znajdź reszty z dzielenia $W(x)$ przez dwumiany: a) $x - 1$, b) $x + 1$, c) $x^2 - 1$.