PRACA KONTROLNA nr 2 - POZIOM ROZSZERZONY

1. Dane są liczby $m = \dfrac{\binom{6}{4} \cdot \binom{8}{2}}{\binom{7}{3}}$, $n = \dfrac{(\sqrt{2})^{-4}\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{5}{2}}\sqrt[4]{3}}{\left(\sqrt[4]{16}\right)^{3} \cdot 27^{-\frac{1}{4}}}$.

   Wyznaczyć sumę wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego, którego pierwszym wyrazem jest m, a piątym n. Ile wyrazów tego ciągu należy wziąć, by ich suma przekroczyła 99% sumy wszystkich wyrazów?

2. Narysować zbiory: $A = \{(x, y) : x^2 + 2x + y^2 \leqslant 3\}$, $B = \{(x, y) : |y| \leqslant \sqrt{3}x + \sqrt{3}\}$ oraz $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Wyznaczyć równanie okręgu wpisanego w figurę $A \cap B$.

3. Liczby: $a_1 = \log_{(3-2\sqrt{2})^2}(\sqrt{2} - 1)$, $a_2 = \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{6}$, $a_3 = 3^{\log_{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{6}}{2}}$, $a_4 = \log_{(\sqrt{2}-1)}(\sqrt{2} + 1)$, $a_5 = \left(2^{\sqrt{2}+1}\right)^{\sqrt{2}-1}$, $a_6 = \log_3 2$ są wszystkimi pierwiastkami wielomianu $W(x)$, którego wyraz wolny jest dodatni.

   a) Które z tych pierwiastków są niewymierne? Odpowiedź uzasadnić.

   b) Wyznaczyć dziedzinę funkcji $f(x) = \sqrt{W(x)}$, nie wykonując obliczeń przybliżonych.

4. Narysować wykres funkcji f zadanej wzorem $f(x) = \begin{cases} |2^{x-1} - 1| & \text{dla} \quad x \leqslant 1, \\ -x^2 + 4x - 3 & \text{dla} \quad x > 1. \end{cases}$

   Posługując się wykresem i odpowiednimi obliczeniami rozwiązać nierówność

   $$\left|f(x) - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{4}$$

5. Na prostej $x + 2y = 5$ wyznaczyć punkty, z których okrąg $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ jest widoczny pod kątem $60°$. Obliczyć pole obszaru ograniczonego łukiem okręgu i stycznymi do niego poprowadzonymi w znalezionych punktach. Sporządzić rysunek.

6. Na dnie naczynia w kształcie walca umieszczono cztery jednakowe metalowe kulki o możliwie największej objętości. Następnie do naczynia wrzucono jeszcze jedną kulkę i okazało się, że jest ona styczna do płaskiej pokrywy naczynia. Wyznaczyć promienie kulek wiedząc, że przekrój osiowy walca jest kwadratem o boku d.