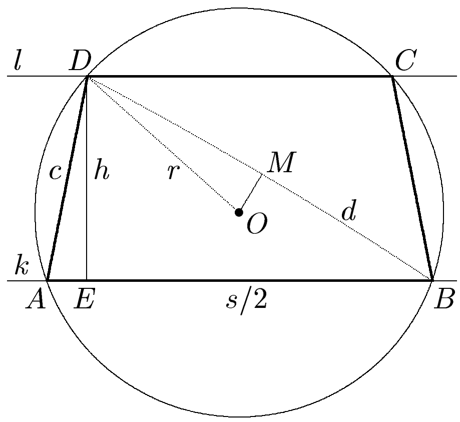
Rozwiązanie zadania 12.6

Oznaczmy przez O środek okręgu opisanego na trapezie, a przez h wysokość trapezu (rys. 25). Wówczas $P = \frac{1}{2}sh$, czyli $h = \frac{2P}{s}$. Z twierdzenia Pitagorasa w $\triangle DEB$ otrzymujemy $d^2 = h^2 + \frac{s^2}{4} = \frac{16P^2 + s^4}{4s^2}$.

Z drugiej strony z twierdzenia o kącie wpisanym w okrąg wynika, że $\angle DAE = \frac{1}{2}\angle DOB = \angle DOM$, zatem trójkąty prostokątne $\triangle DAE$ i $\triangle DOM$ mają identyczne kąty, czyli są podobne. To pozwala napisać proporcję $\frac{h}{c} = \frac{d}{2r}$, skąd otrzymujemy $c = \frac{2rh}{d}$. Po podstawieniu obliczonej wartości d mamy $c = \frac{8Pr}{\sqrt{16P^2 + s^4}}$. Ostatecznie obwód wynosi $O = s + 2c = s + \frac{16Pr}{\sqrt{16P^2 + s^4}}$. Dane P i s wyznaczają jednoznacznie h i d. Zadanie ma zatem rozwiązanie, gdy promień r jest wystarczająco duży, aby powstał trójkąt $\triangle DOM$, tzn. $r \geq \frac{1}{2}d = \frac{\sqrt{16P^2 + s^4}}{4s}$.



Rys. 25

Poprawność tego warunku, jak i jednoznaczność rozwiązania, najlepiej widać z opisu konstrukcji trapezu, który dla kompletności przedstawiamy poniżej.

Opis konstrukcji trapezu

1. Z odcinków h i $\frac{s}{2}$, jako przyprostokątnych, konstruujemy trójkąt prostokątny DEB. Odcinek BE przedłużamy i otrzymujemy prostą k, a przez punkt D prowadzimy prostą l równoległą do k.

2. Z punktów B i D kreślimy łuki okręgów o promieniu r, które przecinając się dają środek okręgu opisanego O (z dwóch punktów, w których przecinają się te łuki, wybieramy leżący bliżej prostej k, która ma zawierać dłuższą podstawę trapezu).