

PRACA KONTROLNA nr 5 - POZIOM ROZSZERZONY

1. W rozwinięciu $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ dla $a = \sqrt{x}$, $b = \frac{1}{2\sqrt[4]{x}}$ trzy pierwsze współczynniki przy potęgach x tworzą ciąg arytmetyczny. Znaleźć wszystkie składniki rozwinięcia, w którym x występuje w potędze o wykładniku całkowitym.
2. Punkty K, L, M dzielą boki AB, BC, CA trójkąta ABC (odpowiednio) w tym samym stosunku, tzn.

$$\frac{|KB|}{|AB|} = \frac{|LC|}{|BC|} = \frac{|MA|}{|CA|} = s$$

Wykazać, że dla dowolnego punktu P znajdującego się wewnątrz trójkąta zachodzi równość

$$\overrightarrow{PK} + \overrightarrow{PL} + \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}.$$

3. Narysować wykres funkcji $f(x) = \frac{(x+1)^2 - 1}{x|x-1|}$. Wyznaczyć styczną do wykresu w punkcie $(-2, f(-2))$ oraz styczną do niej prostopadłą.
4. Końce odcinka AB o długości l poruszają się po okręgu o promieniu R ($l < 2R$). Na odcinku obrano punkt P tak, że $\frac{|AP|}{|PB|} = \frac{1}{3}$. Uzasadnić, że poruszający się punkt P zakreśla okrąg o tym samym środku. Dla jakiego l wycięte w ten sposób koło ma pole dwa razy mniejsze od pola dużego koła.
5. Rozważamy zbiór wszystkich trójkątów o polu 10, których jednym z wierzchołków jest $A(5, 0)$ a pozostałe dwa leżą na osi Oy . Wyznaczyć zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, które są środkami okręgów opisanych na tych trójkątach.
6. W przeciwległe narożniki sześcianu o boku 1 wpisano dwie kule o takich samych promieniach tak, że każda z nich jest styczna do drugiej i do trzech ścian wychodzących z odpowiedniego wierzchołka. Jaka jest odległość ich środków?

Rozwiązania (rękopis) zadań z wybranego poziomu prosimy nadsyłać do **18 stycznia 2018r.** na adres:

Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska
Wybrzeże Wyspiańskiego 27
50-370 WROCŁAW.

Na kopercie prosimy **koniecznie** zaznaczyć **wybrany poziom! (np. poziom podstawowy lub rozszerzony)**. Do rozwiązań należy dołączyć zaadresowaną do siebie kopertę zwrotną z naklejonym znaczkiem, odpowiednim do wagi listu. Prace niespełniające podanych warunków nie będą poprawiane ani odsyłane.

Adres internetowy Kursu: <http://www.im.pwr.wroc.pl/kurs>