WPISUJE ZDAJĄCY

KOD ZDAJĄCEGO

symbol klasy | symbol zdającego

PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY Z NOWĄ ERĄ

MATEMATYKA – POZIOM ROZSZERZONY

dysleksja

STYCZEŃ 2022

Czas pracy: 180 minut

Liczba punktów do uzyskania: 50

Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera **22** strony (zadania **1–16**). Ewentualny brak stron zgłoś nauczycielowi nadzorującemu egzamin.
2. Rozwiązania zadań i odpowiedzi zapisz w miejscu na to przeznaczonym.
3. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadań otwartych może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.
4. Pisz czytelnie. Używaj długopisu/pióra tylko z czarnym tuszem/atramentem.
5. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
6. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
7. Podczas egzaminu możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora prostego.
8. Na tej stronie wpisz swój kod.
9. Nie wpisuj żadnych znaków w części przeznaczonej dla osoby sprawdzającej.

Powodzenia!

W zadaniach 1.–4. wybierz i zaznacz poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (0–1)
Rozwiązaniem równania $\sqrt{\log x} = \log\sqrt{x}$

A. jest tylko liczba 1.
B. jest między innymi liczba 10 000.
C. nie może być żadna liczba większa od 1.
D. nie może być żadna liczba wymierna.

Zadanie 2. (0–1)
Jedynymi miejscami zerowymi funkcji f, określonej dla każdej liczby rzeczywistej x, są liczby 0 oraz 2022. Miejscami zerowymi funkcji $g(x) = f(2022 \cdot x)$ są liczby

A. 0 i 2022^2. **B.** 0 i 1. **C.** 2022 i 2022^2. **D.** 1 i 2022.

Zadanie 3. (0–1)
Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = (x+1)(x-2)(x-3)+4$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Współczynnik kierunkowy a stycznej do wykresu tej funkcji w punkcie $A = (2, 4)$ spełnia warunek

A. $a < 0$. **B.** $0 \leqslant a < 1$. **C.** $a = 1$. **D.** $a > 1$.

Zadanie 4. (0–1)
Liczba $4\cos 75^\circ \cdot \cos 15^\circ$ jest równa

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** 1.

BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)

Wypełnia sprawdzający	**Nr zadania**	**1**	**2**	**3**	**4**
	Maks. liczba pkt	**1**	**1**	**1**	**1**
	Uzyskana liczba pkt				

Zadanie 5. (0–2)

Rozwiąż równanie $1+\frac{1}{x-1}+\left(\frac{1}{x-1}\right)^2+\left(\frac{1}{x-1}\right)^3+\ldots=\frac{9}{2}$, którego lewa strona jest sumą wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego.

W kratki poniżej wpisz kolejno – od lewej do prawej – cyfrę jedności oraz pierwszą i drugą cyfrę po przecinku nieskończonego rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 6. (0–2)

Oblicz $\lim\limits_{n \to +\infty}\left(\frac{6n^2+1}{3n-1} - \frac{4n^2-3}{2n+1}\right)$.

Odpowiedź: ....

Wypełnia sprawdzający	Nr zadania	5	6
	Maks. liczba pkt	2	2
	Uzyskana liczba pkt		

Zadanie 7. (0–2)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{1}{x-1} + 3$ dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 1$. Wyznacz wszystkie punkty leżące na wykresie funkcji f, których obie współrzędne są liczbami całkowitymi.

Odpowiedź: ....

Zadanie 8. (0–3)

Wykaż, że dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej x i każdej liczby rzeczywistej $y > 1$ prawdziwa jest nierówność

$$x^2 + y^2 > x(y + 1).$$

Wypełnia sprawdzający	Nr zadania	7	8
	Maks. liczba pkt	2	3
	Uzyskana liczba pkt		

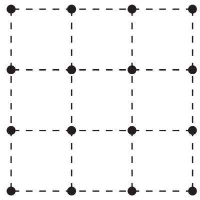
Zadanie 9. (0–3)

Rozwiąż równanie $8\sin^3 x + 4\cos^2 x = 1 + 6\sin x$.

Odpowiedź: ....

Zadanie 10. (0–4)

Spośród zaznaczonych 16 punktów sieci kwadratowej (zobacz rysunek) wybrano losowo trzy różne punkty. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wylosowane punkty są wierzchołkami trójkąta. Wynik podaj w postaci ułamka nieskracalnego.

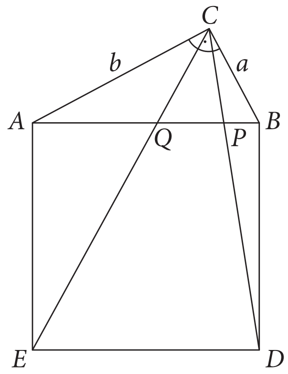


Odpowiedź: ....

Wypełnia sprawdzający	**Nr zadania**	**9**	**10**
	Maks. liczba pkt	**3**	**4**
	Uzyskana liczba pkt		

Zadanie 11. (0–3)

Na przeciwprostokątnej AB trójkąta prostokątnego ABC o przyprostokątnych długości $|BC| = a$ i $|AC| = b$ zbudowano, na zewnątrz tego trójkąta, kwadrat $ABDE$. Odcinki CD i CE przecinają przeciwprostokątną AB odpowiednio w punktach P i Q (zobacz rysunek).

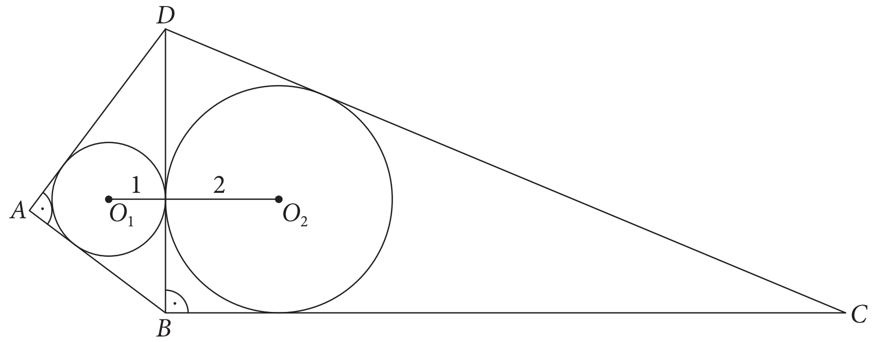


Wykaż, że stosunek pola trapezu $EDPQ$ do pola trójkąta QPC jest równy $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2 (a^2 + b^2)$.

Wypełnia sprawdzający	Nr zadania	11
	Maks. liczba pkt	3
	Uzyskana liczba pkt	

Zadanie 12. (0–4)

Kąt przy wierzchołku A czworokąta $ABCD$ jest prosty, a przekątna BD tego czworokąta jest prostopadła do boku BC. W trójkąt ABD wpisano okrąg o środku O_1 i promieniu 1, a w trójkąt BCD – okrąg o środku O_2 i promieniu 2. Odcinek O_1O_2 ma długość 3 (zobacz rysunek).



Oblicz obwód czworokąta $ABCD$.

Odpowiedź: ....

Wypełnia sprawdzający	Nr zadania	12
	Maks. liczba pkt	4
	Uzyskana liczba pkt	

Zadanie 13. (0–4)

Dany jest wielomian $W(x) = -2x^3 + x + a^2$. Liczba a jest pierwiastkiem tego wielomianu, a reszta z dzielenia tego wielomianu przez dwumian $2x + a$ jest większa od a. Oblicz a.

Odpowiedź: ....

Wypełnia sprawdzający	Nr zadania	13
	Maks. liczba pkt	4
	Uzyskana liczba pkt	

Zadanie 14. (0–6)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których przedział $(2, 3)$ jest zawarty w zbiorze rozwiązań nierówności $(m+1)x^2 + mx + 1 < 0$.

Odpowiedź: ....

Wypełnia sprawdzający	**Nr zadania**	**14**
	Maks. liczba pkt	**6**
	Uzyskana liczba pkt	

Zadanie 15. (0–6)

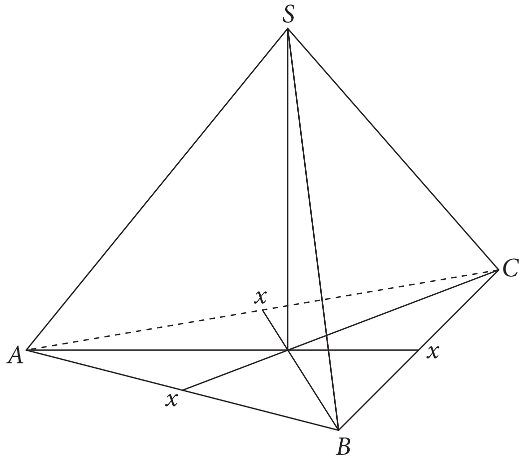
Punkt $A = (-4, 2)$ jest wierzchołkiem trójkąta równoramiennego ABC. Punkt $K = (2, 0)$ leży na podstawie AB tego trójkąta, $|AK| : |KB| = 2 : 1$. Punkt $L = (0, 6)$ leży na ramieniu AC tego trójkąta. Wyznacz współrzędne wierzchołków B i C oraz pole trójkąta ABC.

Odpowiedź: ....

Wypełnia sprawdzający	**Nr zadania**	**15**
	Maks. liczba pkt	**6**
	Uzyskana liczba pkt	

Zadanie 16. (0–7)

Rozważmy wszystkie ostrosłupy prawidłowe trójkątne *ABCS*, których suma długości wszystkich krawędzi jest równa 6. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt *ABC*.



a) Wykaż, że objętość *V* ostrosłupa, jako funkcja zmiennej *x* – długości krawędzi podstawy ostrosłupa, wyraża się wzorem $V(x) = \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot \sqrt{x^6 - 6x^5 + 6x^4}$. Dla jakich liczb rzeczywistych *x* liczba $V(x)$ jest objętością tego ostrosłupa?

b) Wyznacz taką wartość *x*, dla której funkcja *V* osiąga wartość największą. Oblicz tę największą wartość.

Odpowiedź: ....

Wypełnia sprawdzający	Nr zadania	16
	Maks. liczba pkt	7
	Uzyskana liczba pkt	

BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)