

PRACA KONTROLNA nr 5 - POZIOM ROZSZERZONY

1. Zbadać, dla jakich argumentów funkcja $g(x) = 2^{x^3-5} \cdot 3^{7x^2} \cdot 4^{7x-1} - 2^{7x^2+1} \cdot 3^{x^3-2} \cdot 9^{7x-3}$ przyjmuje wartości ujemne.

2. Rozwiązać nierówność

$$2^{-\sin x} + 2^{-2 \sin x} + 2^{-3 \sin x} + \dots \leq \sqrt{2} + 1,$$

której lewa strona jest sumą nieskończonego ciągu geometrycznego.

3. Podać dziedzinę i wyznaczyć wszystkie miejsca zerowe funkcji

$$f(x) = \log_{x+1}(x-1) - \log_{x+1}\left(2x - \frac{2}{x}\right) + 1.$$

4. Dany jest ciąg liczbowy (a_n) , w którym każdy wyraz jest sumą podwojonego wyrazu poprzedniego i 4, a jego czwarty wyraz wynosi 36. Podać wzór na n -ty wyraz ciągu i udowodnić go, wykorzystując zasadę indukcji matematycznej.

5. Niech $A = \{(x, y) : |x| + 2|y| \leq 2\}$. Zbiór B otrzymano przez obrót A o kąt $\frac{\pi}{2}$ (w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara) wokół początku układu współrzędnych, a zbiór C - przez obrót zbioru $A \cup B$ o kąt $\frac{\pi}{4}$ wokół początku układu współrzędnych. Wykonać staranny rysunek zbioru $A \cup B \cup C$ oraz obliczyć jego pole.

6. Boki $\triangle ABC$ zawarte są w prostych $y = 2x + m$, $y = mx + 1$ oraz $2y = 2 - x$. Podać wartość rzeczywistego parametru $m \in (-\frac{1}{2}, 2)$, dla której pole rozważanego trójkąta wynosi $\frac{1}{5}$. Dla wyznaczonego m wykonać staranny rysunek (przyjąć jednostkę równą 3 cm).