

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
im. Stanisława Staszica w Krakowie
OLIMPIADA „O DIAMENTOWY INDEKS AGH” 2009/10

MATEMATYKA - ETAP II

ZADANIA PO 10 PUNKTÓW

1. Pole powierzchni bocznej stożka jest trzy razy większe od pola jego podstawy. Ile razy objętość stożka jest większa od objętości kuli wpisanej w ten stożek?
2. Dane są funkcje $f(x) = 2^{x+1} + 5^{x-5}$ i $g(x) = 25^x + 4^x$. Rozwiąż równanie $g(\frac{x}{2}) = f(x+3)$.
3. Oblicz $\sin 2\alpha$, jeżeli $\sin \alpha = 0,75$ i $\alpha \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$.
4. Wyznacz granicę ciągu

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{n^6 + 5n^4} - n^2).$$

ZADANIA PO 20 PUNKTÓW

5. Znajdź równania stycznych do okręgu $x^2 + y^2 - 8y + 12 = 0$ przechodzących przez początek układu współrzędnych. Znajdź równania obrazów tego okręgu i jednej z wyznaczonych stycznych w jednokładności o środku w punkcie $S = (1, 2)$ i skali $k = -3$.
6. Funkcja f spełnia dla każdego x należącego do jej dziedziny równanie

$$1 + f(x) + (f(x))^2 + (f(x))^3 + \dots = \frac{x}{2} + 1,$$

gdzie lewa strona jest sumą nieskończonego ciągu geometrycznego. Wyznacz dziedzinę i wzór funkcji f . Naszkicuj jej wykres.

7. Liczby $1, 2, 3, \dots, n$, gdzie $n \geq 3$, losowo ustawiamy w ciąg. Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń
 A : liczba n nie będzie ostatnim wyrazem tego ciągu;
 B : liczby $1, 2, 3$ wystąpią obok siebie w kolejności wzrastania;
 C : iloczyn każdej pary sąsiednich wyrazów tego ciągu jest liczbą parzystą.
Wyniki zapisz w najprostszej postaci.