KURATORIUM OŚWIATY
W KRAKOWIE

Kod ucznia

Miejsce na metryczkę ucznia

Małopolski Konkurs Matematyczny
dla uczniów szkół podstawowych województwa małopolskiego
Etap wojewódzki
Rok szkolny 2022/2023

Drogi Uczniu !

1. Przed Tobą zestaw 16 zadań konkursowych, za które łącznie możesz uzyskać 60 punktów.
2. Na rozwiązanie zestawu masz **120 minut**. Komisja konkursowa 15 minut przed końcem przypomni Ci o upływającym czasie.
3. Nie używaj korektora, ołówka ani żadnych przyborów zmazywalnych – zadanie, w którym ich użyjesz nie będzie oceniane.
4. Brudnopis nie podlega ocenie.
5. Nie podpisuj się imieniem i nazwiskiem, zakoduj pracę zgodnie z poleceniami Komisji Konkursowej.
6. Nie używaj kalkulatora.
7. Przekaż w depozyt członkom Komisji telefon komórkowy, jeśli go posiadasz przy sobie.
8. Staraj się, aby Twoja praca była czytelna. Pisz i rysuj wyraźnie, nie stosuj skrótów, zapisuj słowa w pełnym brzmieniu.
9. Stwierdzenie niesamodzielności pracy, korzystanie z kalkulatora lub przeszkadzanie innym spowoduje wykluczenie z udziału w konkursie.

Życzymy Ci satysfakcji z uczestnictwa w konkursie i powodzenia!

Organizatorzy Konkursu

Kod ucznia

Karta odpowiedzi

Numer zadania	Liczba punktów za zadanie	Miejsce na odpowiedź					WYPEŁNIA KOMISJA
		A	B	C	D	E	Przyznane punkty
1.	2						
2.	2						
3.	2						
4.	2						
5.	2						
6.	2						
7.	3						
8.	3						
9.	3						
10.	3						
11.	3						
12.	3						
13.	3						
						Suma punktów za zadania zamknięte:	

Numer zadania	1. – 13.	14.	15.	16.	SUMA
Liczba punktów za zadanie	33	8	10	9	60
Uzyskane punkty					

Kody sprawdzających:

Informacje dla ucznia – zadania zamknięte

1. W zadaniach od **1.** do **6.** podane są 4 odpowiedzi: A, B, C, D. W zadaniach od **7.** do **13.** podanych jest 5 odpowiedzi: A, B, C, D, E. Wybierz **tylko jedną** odpowiedź i wpisz wyraźnie znak **X** w odpowiedniej kratce w tabeli na karcie odpowiedzi.
   Jeśli zaznaczysz błędną odpowiedź, otocz ją kółkiem i wpisz **X** w inną kratkę.
2. Pamiętaj o wypełnieniu karty odpowiedzi!
3. Ostatnie cztery strony tego arkusza są przeznaczone na brudnopis.

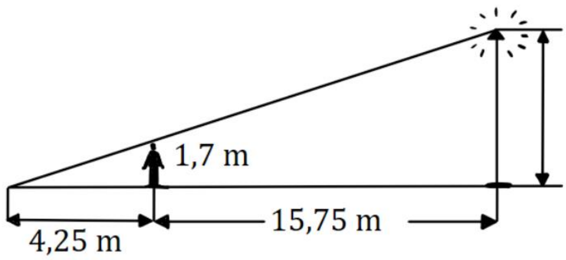
Zadanie 1. 2p

Pięć królików zjada sto marchewek w ciągu pięciu minut. Ile marchewek zje sto królików w ciągu stu minut?

A. 2000 **B.** 20000 **C.** 40000 **D.** 400000

Zadanie 2. 2p

Mężczyzna o wzroście 1,7 m rzuca cień o długości 4,25 m stojąc w linii prostej w odległości 15,75 m od podstawy zapalonej latarni (patrz rysunek poniżej). Jaka jest wysokość latarni?



A. 7 m **B.** 8 m **C.** 9 m **D.** 10 m

Zadanie 3. 2p

W równoległoboku $ABCD$ dwusieczna kąta wewnętrznego ADC przecięła przekątną AC w punkcie K, a dwusieczna kąta wewnętrznego ABC przecięła przekątną AC w punkcie L. Ile wynosi stosunek długości odcinka AK do długości odcinka KL, jeśli stosunek długości boku AD do długości boku AB jest równy 3:8?

A. 3:4 **B.** 2:3 **C.** 1:2 **D.** 3:5

Zadanie 4. 2p

Liczby a i b są naturalne dodatnie, liczba b jest podzielna przez 5. Przy dzieleniu a przez b otrzymano iloraz 25 i resztę 15. Ile jest równy iloraz i reszta z dzielenia liczby $\frac{a}{5}$ przez $\frac{b}{5}$?

A. 25 i reszta 15 **B.** 5 i reszta 3 **C.** 25 i reszta 5 **D.** 25 i reszta 3

Zadanie 5. 2p

Długości trzech krawędzi pierwszego prostopadłościanu są równe $n,\ n+2,\ n+4$, a długości krawędzi drugiego prostopadłościanu są równe $n+2,\ n+4,\ n+6$, gdzie n jest pewną dodatnią liczbą naturalną. Niech V_1 i V_2 oznaczają odpowiednio objętość pierwszego i drugiego prostopadłościanu. Wówczas równanie

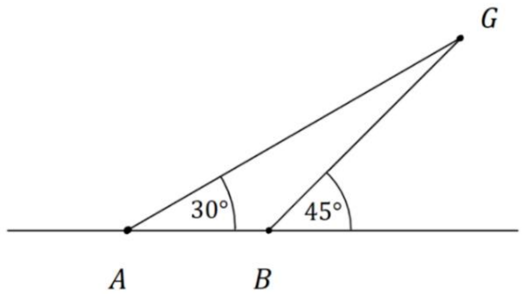
$$V_2 = a \cdot V_1$$

ma rozwiązanie dla

A. $a = 1$ **B.** $a = 5$ **C.** $a = 7$ **D.** $a = 9$

Zadanie 6. 2p

Ile wynosi stosunek długości odcinka AB do długości odcinka AG?



A. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ **B.** $\sqrt{3}+1$ **C.** $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ **D.** $\sqrt{3}-1$

Zadanie 7. 3p

Karol mieszka w Karolowie a Władysław we Władysławowie. Karolowo i Władysławowo łączy prosta droga o długości 300 km. O godzinie 9:00 rano z Karolowa do Władysławowa tą drogą wyjechał Karol na rowerze z prędkością 15 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Godzinę później z Władysławowa do Karolowa tą samą drogą wyjechał Władysław samochodem z prędkością 60 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Obaj chłopcy poruszali się ze stałymi prędkościami. Po pewnym czasie chłopcy znaleźli się w odległości **mniejszej niż** 100 km od siebie nawzajem i wtedy jednocześnie zrobili pierwszy postój. Która z poniższych wartości może określać czas jazdy Karola do chwili pierwszego postoju?

A. 155 min **B.** 215 min **C.** 148 min **D.** 208 min **E.** 168 min

Zadanie 8. 3p

Jakim dniem tygodnia będzie 1 maja 3000 roku, jeśli w roku 3000 będzie mniej niedziel niż śród?

A. niedziela **B.** środa **C.** wtorek **D.** sobota **E.** czwartek

Zadanie 9. 3p

Na okręgu o promieniu 1 wybrano trzy punkty A, B, C, które podzieliły ten okrąg na łuki o długościach pozostających do siebie w stosunku 3 : 4 : 5. Trójkąt ABC jest

A. różnoboczny **B**. rozwartokątny **C.** prostokątny **D.** równoboczny **E.** równoramienny

Zadanie 10. 3p

Szklanka ma kształt graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego, którego wszystkie krawędzie mają taką samą długość. Kieliszek ma kształt ostrosłupa prawidłowego trójkątnego, którego wszystkie krawędzie mają taką samą długość, co krawędź szklanki. Napełniamy szklankę wodą za pomocą kieliszka. Ile najwięcej pełnych kieliszków wody pomieści ta szklanka?

A. 19 **B.** 20 **C.** 21 **D.** 22 **E.** 23

Zadanie 11. 3p

W pewnej fabryce 880 jednakowych ołówków zapakowano do 100 pudełek. Każde z pudełek mieściło dokładnie 12 takich ołówków albo dokładnie 8 takich ołówków. Wszystkie pudełka zostały wypełnione. Ile było pudełek, w których było dokładnie 8 ołówków?

A. 10 **B.** 20 **C.** 40 **D.** 60 **E.** 80

Zadanie 12. 3p

Ania mówi, że Basia kłamie. Celina mówi, że Danusia kłamie. Basia mówi, że Celina i Danusia kłamią. Danusia mówi, że Ania i Basia kłamią. Wybierz zdanie prawdziwe.

A. Ania kłamie i Basia mówi prawdę.
B. Danusia kłamie i Celina mówi prawdę.
C. Ania kłamie i Danusia mówi prawdę
D. Celina i Danusia mówią prawdę.
E. Ania mówi prawdę i Celina kłamie.

Zadanie 13. 3p

Miasta A i B łączą dwie drogi dwukierunkowe, ponadto z miasta B do miasta A prowadzi jedna droga jednokierunkowa. Miasta B i C łączy jedna droga dwukierunkowa, a z miasta B do C prowadzi jedna droga jednokierunkowa. Miasta C i A są połączone jedną drogą dwukierunkową. Dodatkowo z miasta C do A prowadzi jedna droga jednokierunkowa, a z miasta A do C prowadzą dwie drogi jednokierunkowe. Wszystkie powyższe drogi są drogami bezpośrednimi, tzn. łączą dwa wskazane miasta bez przebiegania przez trzecie miasto. Ile jest różnych tras objazdowych tymi drogami, pozwalających odwiedzić miasta B i C dokładnie jeden raz, a miasto A dokładnie dwa razy: na początku i na końcu każdej trasy?

A. 8 **B**. 9 **C.** 16 **D**. 17 **E**. 72

Informacje dla ucznia – zadania otwarte

1. Rozwiązania i odpowiedzi do zadań otwartych od **14.** do **16.** zapisz czytelnie pod zadaniami w miejscu do tego przeznaczonym.
2. Wpisz swój kod ucznia w miejsca na górze stron **6**, **8** i **10**.
3. Pamiętaj o zapisaniu wszystkich obliczeń i odpowiedzi. Błędne obliczenia przekreślaj i zapisuj nowe.

Kod ucznia

Zadanie 14. **8p**

a) **(4p)** W pewnej liczbie dwucyfrowej potrojona cyfra jedności jest o 1 większa od podwojonej cyfry dziesiątek, natomiast potrojona cyfra dziesiątek jest o 11 większa od podwojonej cyfry jedności. Znajdź tę liczbę dwucyfrową. Zapisz obliczenia, które uzasadniają Twoją odpowiedź.

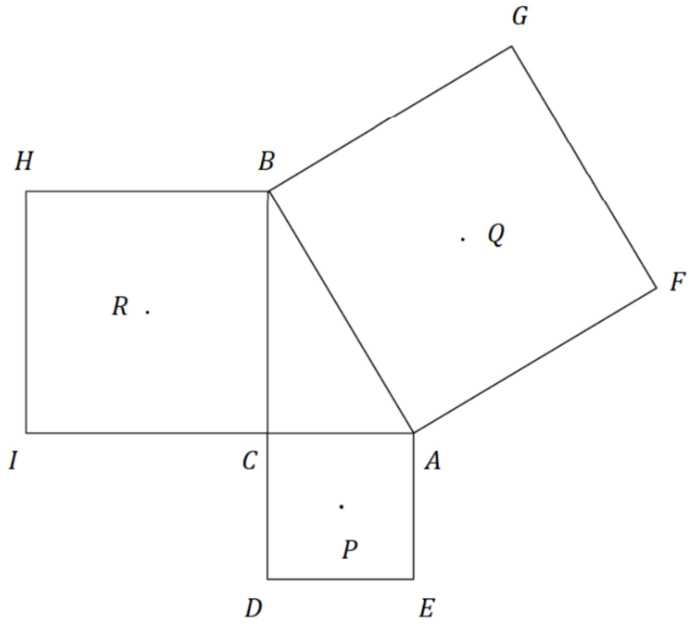
b) **(4p)** Przed liczbą dwucyfrową otrzymaną w podpunkcie **a)** dopisano **zaokrąglenie** do pełnych jedności liczby $\sqrt[3]{250}$. Następnie na końcu tak otrzymanej nowej liczby trzycyfrowej dopisano dwie cyfry w sposób losowy. Oblicz, jakie jest prawdopodobieństwo, że w wyniku tych wszystkich operacji otrzymano liczbę podzielną przez 18. Zapisz obliczenia i uzasadnij odpowiedź.

Rozwiązanie:

Kod ucznia

Zadanie 15. **10p**

Dany jest trójkąt prostokątny ABC, w którym kąt ACB jest prosty. Na bokach AC, AB i BC zbudowano kwadraty $ACDE$, $AFGB$, $BHIC$, a środki przekątnych tych kwadratów oznaczono odpowiednio przez P, Q i R (patrz rysunek obok). Oznaczmy długości boków BC, AC i AB odpowiednio a, b i c.



a) **(3p)** Udowodnij, że czworokąt $ABRP$ jest trapezem i zapisz jego pole w zależności od długości a i b.

b) **(3p)** Udowodnij, że

$$\text{pole } \Delta AQB + \text{pole } \Delta ABC = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2.$$

c) **(4p)** Wykaż, że

$$\text{obwód } \Delta PQR < (a+b+c)\cdot\sqrt{2}.$$

Rozwiązanie:

Kod ucznia

Zadanie 16. 9p

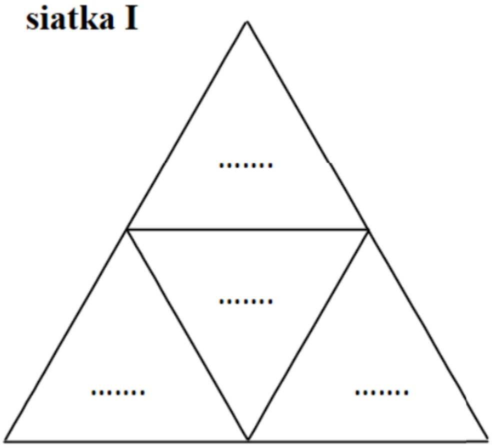
Adam, Bartek, Czesiek i Darek mieli po dwa ostrosłupy trójkątne, których wszystkie ściany były przystającymi trójkątami równobocznymi. W każdym ostrosłupie ściany były z zewnątrz pomalowane na kolor biały, zielony, niebieski lub czerwony i każda ściana była w innym kolorze. Następnie każdy z chłopców skleił swoje dwa ostrosłupy białymi podstawami tak, że wierzchołki ścian pomalowanych na biało się pokryły.

W dalszej części zadania ***parą zgodną*** nazywamy takie dwie ściany, po jednej z każdego z dwóch sklejonych czworościanów, które mają wspólną krawędź i są pomalowane tym samym kolorem.

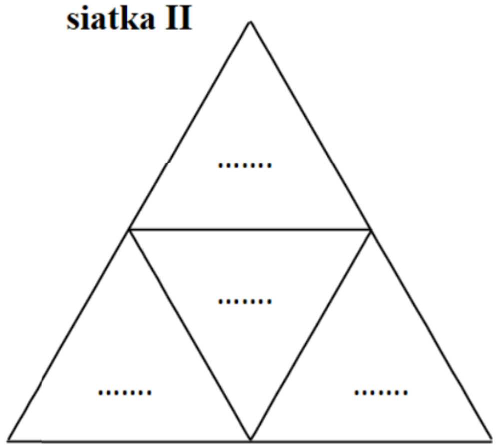
a) **(2p)** Poniżej przedstawiono siatki dwóch ostrosłupów, których wszystkie ściany są przystającymi trójkątami równobocznymi. Wpisz w wyznaczone miejsca wewnątrz ścian każdej z siatek ostrosłupów symbole kolorów: **b (biały), c (czerwony), n (niebieski), z (zielony)** tak, aby **każdy kolor wystąpił jeden raz** oraz aby można było z ostrosłupów otrzymanych z poniższych siatek, po sklejeniu tych ostrosłupów białymi podstawami tak, aby wierzchołki białych ścian się pokryły, uzyskać wielościan o **dokładnie jednej** parze zgodnej.

UWAGA: Zakładamy, że wszystkie ściany siatek malujemy tylko z jednej, wspólnej strony płaszczyzny, na której obie siatki się znajdują.

siatka I



siatka II



b) **(1p)** Czy z ostrosłupów powstałych z siatek otrzymanych w podpunkcie **a)** można, poprzez sklejenie ich białymi podstawami tak, aby wierzchołki białych ścian się pokryły, otrzymać wielościan, który **nie ma** pary zgodnej? Wpisz odpowiedź w miejsce wskazane poniżej.

Odpowiedź…………………

c) **(4p)** Gdy każdy z chłopców skleił swoje dwa ostrosłupy, okazało się, że Adam, Bartek, Czesiek i Darek otrzymali <u>**cztery różne wielościany**</u>, które spełniały łącznie następujące trzy warunki:

(i) przynajmniej jeden wielościan miał **co najmniej dwie** pary zgodne,
(ii) co najmniej dwa wielościany miały **dokładnie jedną** parę zgodną,
(iii) co najwyżej dwa wielościany miały **dokładnie tę samą liczbę** par zgodnych.

Odpowiedz na pytania dotyczące wielościanów uzyskanych przez chłopców. Wpisz odpowiedzi w miejsca wyznaczone obok.

I	Ile chłopcy otrzymali wielościanów posiadających **dokładnie trzy** pary zgodne?	……………
II	Ile chłopcy otrzymali wielościanów posiadających **dokładnie dwie** pary zgodne?	……………
III	Ile chłopcy otrzymali wielościanów posiadających **dokładnie jedną** parę zgodną?	……………
IV	Ile chłopcy otrzymali wielościanów nieposiadających **ani jednej** pary zgodnej?	……………

d) **(2p)** Wśród wielościanów otrzymanych przez Adama, Bartka, Czesia i Darka ile jest takich wielościanów, w których liczba par zgodnych jest nieparzysta i jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania takiego wielościanu spośród tych otrzymanych przez chłopców? W rozwiązaniu podaj obie wartości liczbowe, których dotyczy pytanie.

Rozwiązanie:

BRUDNOPIS

Pamiętaj! Wszelkie zapisy obliczeń i rozwiązań na tej stronie nie podlegają ocenie.

BRUDNOPIS

Pamiętaj! Wszelkie zapisy obliczeń i rozwiązań na tej stronie nie podlegają ocenie.

BRUDNOPIS

Pamiętaj! Wszelkie zapisy obliczeń i rozwiązań na tej stronie nie podlegają ocenie.

BRUDNOPIS

Pamiętaj! Wszelkie zapisy obliczeń i rozwiązań na tej stronie nie podlegają ocenie.