PRACA KONTROLNA nr 3

grudzień 1999r

1. Nie korzystając z metod rachunku różniczkowego wyznaczyć dziedzinę i zbiór wartości funkcji
$$y = \sqrt{2 + \sqrt{x} - x}.$$

2. Jednym z wierzchołków rombu o polu 20 cm^2 jest $A(6,3)$, a jedna z przekątnych zawiera się w prostej o równaniu $2x + y = 5$. Wyznaczyć równania prostych, w których zawierają się boki $\overline{AB}$ i $\overline{AD}$.

3. Stosując zasadę indukcji matematycznej udowodnić prawdziwość wzoru
$$3(1^5 + 2^5 + \ldots + n^5) + (1^3 + 2^3 + \ldots + n^3) = \frac{n^3(n+1)^3}{2}.$$

4. Ostrosłup prawidłowy trójkątny ma pole powierzchni całkowitej $P = 12\sqrt{3}\text{cm}^2$, a kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy $\alpha = 60^0$. Obliczyć objętość tego ostrosłupa.

5. Wśród trójkątów równoramiennych wpisanych w koło o promieniu R znaleźć ten, który ma największe pole.

6. Przeprowadzić badanie przebiegu funkcji $y = \frac{1}{2}x^2\sqrt{5-2x}$ i wykonać jej staranny wykres.

7. W trapezie równoramiennym dane są ramię r, kąt ostry przy podstawie α oraz suma długości przekątnej i dłuższej podstawy wynosząca d. Obliczyć pole trapezu oraz promień okręgu opisanego na tym trapezie. Ustalić warunki istnienia rozwiązania. Następnie podstawić $\alpha = 30^0$, $r = \sqrt{3}$ cm i $d = 6$ cm.

8. Rozwiązać nierówność
$$|\cos x + \sqrt{3}\sin x| \leqslant \sqrt{2}, \quad x \in [0, 3\pi].$$