LII
KORESPONDENCYJNY KURS
Z MATEMATYKI

listopad 2022 r.

PRACA KONTROLNA nr 3 - POZIOM PODSTAWOWY

1. W trójkącie ABC wpisanym w okrąg o środku S i promieniu r dany jest kąt $\alpha = \angle ABC$. Oblicz pole trójkąta ASC.

2. Rozwiąż równanie
$$|\sin x| + |\cos x| = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

3. Dana jest funkcja
$$f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right).$$
Narysuj starannie wykres funkcji $f(x)$. Rozwiąż nierówność $(f(x))^2 \geqslant \frac{1}{2}$.

4. Niech α, β i γ oznaczają kąty pewnego trójkąta. Wykaż, że jeżeli
$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = 2\cos\gamma,$$
to ten trójkąt jest równoramienny.

5. Na okręgu o promieniu r opisano trapez prostokątny, którego najkrótszy bok jest równy $\frac{4}{3}r$. Oblicz pole tego trapezu.

6. Pewną górę widać najpierw pod kątem α (jest to kąt między linią poziomą, a odcinkiem łączącym szczyt z obserwatorem), a po przybliżeniu się do niej o d metrów widać ją pod nieco większym kątem β. Wyznaczyć względną wysokość tej góry. Wykonać obliczenia dla wartości $\alpha = 41°$, $\beta = 45°$, $d = 90$m.

PRACA KONTROLNA nr 3 - POZIOM ROZSZERZONY

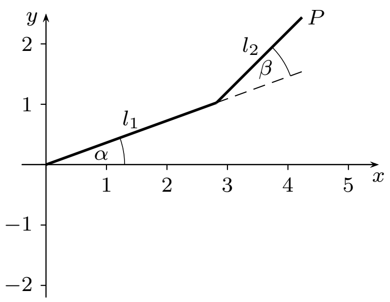
1. Udowodnij, że
$$\cos 4x = 1 - 8\cos^2 x + 8\cos^4 x.$$
Wykorzystując ten wzór, znajdź wartość $\cos\frac{\pi}{24}$.

2. Wykaż, że dla każdego trójkąta zachodzi nierówność
$$\frac{1}{2r} < \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} < \frac{1}{r},$$
gdzie h_a, h_b są wysokościami, a r promieniem okręgu wpisanego w ten trójkąt.

3. Dana jest funkcja $f(x) = \sin 4x \operatorname{ctg} 2x - \frac{1}{2}$. Rozwiąż nierówność $f(x) \geqslant 1$ i narysuj staranny wykres $f(x)$.

4. Przekątne trapezu dzielą ten trapez na cztery trójkąty. Pola tych dwóch trójkątów, których bokami są podstawy trapezu równe są S_a i S_b. Oblicz pole tego trapezu.

5. Manipulator robota składa się z dwóch ramion o długościach l_1 i l_2, połączonych przegubem. Pierwsze ramię umieszczono w początku układu współrzędnych.
Niech α oznacza kąt między pierwszym ramieniem i osią Ox, a β - kąt między drugim ramieniem i kierunkiem pierwszego ramienia (patrz rysunek). Wyznacz współrzędne końca drugiego ramienia (punktu P) w zależności od kątów α i β. Sprawdź, czy punkt P może przesunąć się do punktów $S(2,1)$ oraz $Q(3,-1)$ jeżeli $l_1 = 3$, $l_2 = 2$ oraz ruchy manipulatora ograniczone są tak, że $\alpha, \beta \in \left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$. Jeżeli tak, to wskaż konkretne kąty α i β (podaj przybliżenia, jeśli nie można określić dokładnej ich wartości), a jeśli nie, to uzasadnij dlaczego.



6. Okrąg o promieniu r toczy się wewnętrznie bez poślizgu po okręgu o promieniu $2r$. Jaką linię zakreśla ustalony (dowolnie wybrany) punkt P ruchomego okręgu? Wskazówka: rozważ dwa różne położenia mniejszego okręgu i sprawdź gdzie przesuwa się punkt styczności, skorzystaj ze związku między długością łuku, kątem środkowym opartym na tym łuku i promieniem okręgu.

Rozwiązania (rękopis) zadań z wybranego poziomu prosimy nadsyłać do **20.11.2022r.** na adres:

`Wydział Matematyki`
`Politechnika Wrocławska`
`Wybrzeże Wyspiańskiego 27`
`50-370 WROCŁAW,`

lub **elektronicznie**, za pośrednictwem portalu `talent.pwr.edu.pl`

Na kopercie prosimy <u>koniecznie</u> zaznaczyć wybrany poziom! (np. poziom podstawowy lub rozszerzony). Do rozwiązań należy dołączyć zaadresowaną do siebie kopertę zwrotną z naklejonym znaczkiem, odpowiednim do formatu listu. Prace niespełniające podanych warunków nie będą poprawiane ani odsyłane.

Uwaga. Wysyłając nam rozwiązania zadań uczestnik Kursu udostępnia Politechnice Wrocławskiej swoje **dane osobowe**, które przetwarzamy **wyłącznie** w zakresie niezbędnym do jego prowadzenia (odesłanie zadań, prowadzenie statystyki). Szczegółowe informacje o przetwarzaniu przez nas danych osobowych są dostępne na stronie internetowej Kursu.

Adres internetowy Kursu: `http://www.im.pwr.edu.pl/kurs`