

PRACA KONTROLNA nr 7 - POZIOM ROZSZERZONY

1. Rozwiązać nierówność

$$\sqrt{\sin 2x - \cos 2x + 1} \leq 2 \sin x.$$

2. Ze zbioru $\{1, 2, \dots, 3n\}$, $n \geq 1$, wylosowano bez zwracania dwie liczby. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że suma otrzymanych liczb jest mniejsza od $4n$ i co najmniej jedna z nich jest większa od n .
3. Stosując zasadę indukcji matematycznej, udowodnić prawdziwość wzoru

$$1^4 + 2^4 + \dots + n^4 + \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{5} = \frac{n^2(n+1)^2(2n+1)}{10}, \quad n \geq 1.$$

4. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x$. Styczna do wykresu tej funkcji w punkcie $A(1, -1)$ przecina wykres w punkcie $B(x_1, f(x_1))$, a styczna do jej wykresu w punkcie B przecina wykres w punkcie $C(x_2, f(x_2))$. Znaleźć punkty B i C oraz obliczyć tangensy kątów trójkąta $\triangle ABC$. Sporządzić rysunek, dobierając odpowiednie skale na obu osiach.
5. W czworokącie $ABCD$ o bokach $|AB| = a$, $|AD| = 2a$ mamy $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ oraz $\cos \angle BCD = \frac{1}{4}$. Wykazać, że na tym czworokącie można opisać okrąg. Obliczyć promień tego okręgu. Sporządzić rysunek.
6. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt równoramienny o kącie przy wierzchołku 2α , $\alpha < \pi/4$, i podstawie $2a$. Dwie ściany boczne są przystającymi do siebie trójkątami podobnymi, ale nie przystającymi, do podstawy ostrosłupa. Znaleźć cosinus kąta płaskiego przy wierzchołku trzeciej ściany bocznej oraz objętość ostrosłupa. Narysować starannie siatkę tego ostrosłupa dla $\alpha = \frac{\pi}{5}$.

Rozwiązania (rękopis) zadań z wybranego poziomu prosimy nadsyłać do **18 marca 2019 r.** na adres:

Wydział Matematyki
Politechniki Wrocławskiej,
Wybrzeże Wyspiańskiego 27,
50-370 WROCŁAW.

Na kopercie prosimy **koniecznie** zaznaczyć wybrany poziom! (np. poziom podstawowy lub rozszerzony). Do rozwiązań należy dołączyć zaadresowaną do siebie kopertę zwrotną z naklejonym znaczkiem, odpowiednim do wagi listu. Prace nie spełniające podanych warunków nie będą poprawiane ani odsyłane.

Uwaga. Wysyłając nam rozwiązania zadań uczestnik Kursu udostępnia nam swoje **dane osobowe**, które przetwarzamy **wyłącznie** w zakresie niezbędnym do jego prowadzenia (odesłanie pracy, prowadzenie statystyki). Szczegółowe informacje o przetwarzaniu przez nas danych osobowych są dostępne na stronie internetowej Kursu.

Adres Internetowy Kursu: <http://www.im.pwr.edu.pl/kurs>