Dla $p=1$ lewa strona (12) jest równa -1 i nierówność nie jest spełniona dla żadnego x. Gdy $p<1$ tzn. współczynnik przy x^2 jest ujemny, nierówność (12) nie może być spełniona dla wszystkich x (gdyż ,,ramiona paraboli są skierowane w dół"). Natomiast dla $p>1$, nierówność (12) będzie spełniona dla wszystkich liczb rzeczywistych wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta_1 = 4(p-1)^2 - 8(p-1)(2p^2-3) \leq 0$. Po podzieleniu obu stron przez wyrażenie dodatnie $4(p-1)$ otrzymujemy $-4p^2+p+5 \leq 0$, skąd od razu mamy $p \leq -1$ lub $p \geq \frac{5}{4}$. Ponieważ $\frac{5}{4} < \frac{\sqrt{7}}{2}$ i założyliśmy, że $p>1$, więc łącząc wszystkie otrzymane warunki dostajemy ostatecznie $p \in \left[\frac{5}{4}, \frac{\sqrt{7}}{2}\right)$.

Odp. Nierówność jest spełniona dla każdej liczby rzeczywistej, gdy $p \in \left[\frac{5}{4}, \frac{\sqrt{7}}{2}\right)$.

Rozwiązanie zadania 29.8

Z postaci ciągu odczytujemy wyraz początkowy $a_0 = x+1$ oraz iloraz $q=-x^2$. Jeśli $x=-1$, to wszystkie wyrazy ciągu są zerami i suma $S(-1)=0$. Gdy $x \neq -1$, wówczas warunkiem istnienia sumy nieskończonego ciągu geometrycznego jest $|q|<1$, czyli $|-x^2| = x^2 < 1$, skąd od razu otrzymujemy $x \in (-1,1)$. Ostatecznie dziedziną sumy $S(x)$ jest $D=[-1,1)$.

Korzystając ze wzoru na sumę nieskończonego ciągu geometrycznego, dostajemy $S(x) = \dfrac{x+1}{1-(-x^2)} = \dfrac{x+1}{x^2+1}$, $x \in (-1,1)$. Wzór ten pozostaje prawdziwy także dla $x=-1$. Dlatego można napisać

$$S(x) = \frac{x+1}{x^2+1}, \quad x \in D = [-1,1). \tag{13}$$

Dalsze postępowanie sprowadza się do wyznaczenia wartości namniejszej i największej funkcji wymiernej $S(x)$, danej wzorem (13). Zauważmy, że mianownik jest dodatni, a licznik nieujemny, zatem $S(x) \geq 0$ dla wszystkich x. Stąd wynika, że najmniejszą wartością tej funkcji jest 0 i jest ona osiągana dla $x=-1$.

Dla znalezienia wartości największej wykorzystamy pochodną funkcji $S(x)$.

$$S'(x) = \frac{1\cdot(x^2+1) - 2x(x+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}.$$