



Zestaw 19

KLASY PO SZKOLE PODSTAWOWEJ

1. Dany jest kwadrat $ABCD$. Punkt E leży na przekątnej AC , przy czym $AE > EC$. Na boku AB wybrano punkt F , różny od B , dla którego $EF = DE$. Udowodnij, że kąt DEF jest prosty.
2. Dane są takie dodatnie liczby całkowite a, b , dla których liczba $5a + 3b$ jest podzielna przez liczbę $a + b$. Wykaż, że $a = b$
3. Punkty K i L znajdują się odpowiednio na bokach BC i CD równoległoboku $ABCD$, przy czym

$$AB + BK = AD + DL.$$

Udowodnij, że dwusieczna kąta BAD jest prostopadła do prostej KL .

KLASY PO GIMNAZJUM

1. Tomek zaprosił na zdalne przyjęcie urodzinowe 11 swoich znajomych, którzy kolejno będą dołączać do spotkania. Tomek dobrał gości w taki sposób, aby niezależnie od kolejności w jakiej będą dołączać, zawsze nowo przybyła osoba znała co najmniej połowę już obecnych osób, wliczając Tomka. Wykaż, że wśród zaproszonych gości istnieje taki, który zna wszystkich pozostałych 10 znajomych Tomka. Uwaga: Przyjmujemy, że jeśli osoba A zna osobę B , to również B zna A .
2. W trójkącie ABC punkty K, L, M leżą odpowiednio na bokach $AB, BC, i CD$. Udowodnij, że jeśli proste CK, AL i BM przecinają się w jednym punkcie, to

$$\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$$

Uwaga! Jeśli znasz to twierdzenie, to nie przysyłaj mi jego nazwy, tylko dowód.

3. Udowodnij, że jeżeli liczby x, y, z są dodatnie oraz

$$xyz(x + y + z) + xy + yz + xz \leq 6xyz$$

to $x + y + z = 3$.