

PRACA KONTROLNA nr 7 - POZIOM ROZSZERZONY

1. Rozwiązać równanie

$$\sin x + \cos x = \frac{\cos 2x}{\sin 2x - 1}.$$

2. Wyrażenie

$$w(x, y) = \frac{x}{x^3 + x^2y + xy^2 + y^3} + \frac{y}{x^3 - x^2y + xy^2 - y^3} + \frac{1}{x^2 - y^2} - \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{x^2 + 2y^2}{x^4 - y^4}$$

doprowadzić do najprostszej postaci. Przy jakich założeniach ma ono sens? Obliczyć $w(\cos 15^\circ, \sin 15^\circ)$.

3. Narysować wykres funkcji

$$f(x) = \begin{cases} 2^{-x} - 1 & \text{dla } x \leq 1, \\ \log_2(x - \frac{1}{2}) & \text{dla } x > 1 \end{cases}$$

i posługując się nim wyznaczyć zbiór wartości funkcji $|f(x)|$ w przedziale $[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$.

4. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} y + x^2 = 4 \\ 4x^2 - y^2 + 2y = 1 \end{cases}$$

Podać interpretację geometryczną tego układu i wykazać, że cztery punkty, które są jego rozwiązaniem, wyznaczają na płaszczyźnie trapez równoramienny. Znaleźć równanie okręgu opisanego na tym trapezie.

5. Odcinek o końcach $A(0, 7)$ i $B(5, 2)$ jest przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego, którego wierzchołek C leży na prostej $x = 3$. Posługując się rachunkiem wektorowym obliczyć cosinus kąta między dwusieczną kąta prostego a wysokością opuszczoną z wierzchołka C .
6. Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest dziesięć razy większe niż pole jego podstawy. Wyznaczyć cosinus kąta między ścianami bocznymi oraz stosunek objętości ostrosłupa do objętości wpisanej w niego kuli.