PRACA KONTROLNA nr 8 - POZIOM ROZSZERZONY

1. Rozwiązać nierówność
$$\frac{1}{x^2-2x-3} \geqslant \frac{1}{|x-2|+3}.$$

2. Rozwiązać układ równań
$$\begin{cases} x^2+y^2=8, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1. \end{cases}$$
Obliczyć pole wielokąta o wierzchołkach, których współrzędne spełniają powyższy układ. Podać ilustrację graficzną tego układu.

3. Wyznaczyć wszystkie wartości parametru $\alpha \in [-\pi, \pi)$, dla których równanie kwadratowe
$$(\sin 4\alpha)\, x^2 - 2(\cos\alpha)\, x + \sin 2\alpha = 0$$
ma dwa różne nieujemne pierwiastki rzeczywiste. Rozwiązania zaznaczyć na kole trygonometrycznym.

4. Udowodnić, że jeżeli liczby rzeczywiste a, b, c spełniają warunki $a^2+b^2=(a+b-c)^2$ oraz $b, c \neq 0$, to
$$\frac{a^2+(a-c)^2}{b^2+(b-c)^2} = \frac{a-c}{b-c}.$$

5. Trójkąt równoboczny ABC o boku a wpisano w okrąg. Na łuku BC wybrano punkt D tak, że proste AB i CD przecinają się w punkcie E i $|BE| = 2a$. Obliczyć pole S czworokąta $ABCD$ i wykazać, że $S = \frac{1}{4}(|BD|+|CD|)^2\sqrt{3}$.

6. Rozwinięcie, powierzchni, bocznej, stożka, ściętego, opisanego na kuli jest przedstawione na rysunku. Obliczyć objętość tego stożka ściętego i promień kuli opisanej na nim. Podać wynik liczbowy dla $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $b = 4\,\mathrm{cm}$.