**AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA**
**im. Stanisława Staszica w Krakowie**
**OLIMPIADA „O DIAMENTOWY INDEKS AGH” 2020/21**

# MATEMATYKA - ETAP II

## ZADANIA PO 10 PUNKTÓW

1. Udowodnij, że każda liczba rzeczywista $a \neq 0$ spełnia nierówność
$$a^2 + \frac{4}{a^4} \geqslant 3.$$
Podaj liczby, dla których prawdziwa jest równość.

2. W kwadracie $ABCD$ punkt $K$ jest środkiem boku $AB$. Przez punkt $K$ poprowadzona jest prosta prostopadła do prostej $KC$, która przecina bok $AD$ w punkcie $R$. Wykaż, że kąty $\sphericalangle KCB$ i $\sphericalangle KCR$ mają równe miary.

3. W ciągu geometrycznym $(a_n)$ dane są $a_3 = \frac{1}{4}$ oraz
$$a_{10} = \log_2 \cos \frac{47}{12}\pi + \log_2 \sin\left(-\frac{37}{12}\pi\right).$$
Oblicz $a_{17}$.

4. Z pnia drzewa w kształcie walca o średnicy podstawy $D$ i długości $H$ wycięto cztery przystające bale w kształcie walca o długości $H$ i największej możliwej objętości. Oblicz objętość pozostałej części pnia.

## ZADANIA PO 20 PUNKTÓW

5. Napisz równania asymptot wykresu funkcji $f$ danej wzorem
$$f(x) = \frac{x^2 + 4x}{x^3 + 4x^2 + 4x + 16}.$$
Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji $f$ w przedziale $\langle 1; 5\rangle$.

6. Znajdź równanie okręgu, na którym leżą punkty $A = (8, 8), B = (-8, -4)$ i $C = (6, -6)$. Napisz równania stycznych do tego okręgu, prostopadłych do prostej $4x + 3y - 6 = 0$.

7. Rozważmy zbiór $S$ wszystkich funkcji danych wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a, b, c$ są liczbami całkowitymi spełniającymi nierówność
$$4^{x+1} - 33 \cdot 2^x + 8 \leqslant 0.$$
Wyznacz liczby elementów podzbiorów $P, Q, R$ zbioru $S$, gdzie $P$ jest zbiorem funkcji parzystych, $Q$ jest zbiorem funkcji, których wykres przechodzi przez punkt $(0, 3)$, a $R$ jest zbiorem funkcji rosnących w $\mathbb{R}$.