XLII
KORESPONDENCYJNY KURS
Z MATEMATYKI

wrzesień 2012 r.

PRACA KONTROLNA nr 1 - POZIOM PODSTAWOWY

1. Niech $A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \dfrac{1}{x^2+1} \geqslant \dfrac{1}{7-x} \right\}$ oraz $B = \{x \in \mathbb{R} : |x-2| + |x-7| < 7\}$. Znaleźć i zaznaczyć na osi liczbowej zbiory A, B oraz $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

2. Liczba $p = \dfrac{(\sqrt[3]{54}-2)(9\sqrt[3]{4}+6\sqrt[3]{2}+4)-(2-\sqrt{3})^3}{\sqrt{3}+(1+\sqrt{3})^2}$ jest miejscem zerowym funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c$. Pole trójkąta, którego wierzchołkami są punkty przecięcia wykresu z osiami układu współrzędnych równe jest 20. Wyznaczyć współczynnik b oraz drugie miejsce zerowe tej funkcji wiedząc, że wykres funkcji jest symetryczny względem prostej $x = 3$.

3. Trapez o kątach przy podstawie 30° oraz 45° jest opisany na okręgu o promieniu R. Obliczyć stosunek pola koła do pola trapezu.

4. Niech $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1}, & \text{gdy} \quad |x-1| \geqslant 1, \\ x^2 - x - 1, & \text{gdy} \quad |x-1| < 1. \end{cases}$ Obliczyć $f\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$ oraz $f\left(\dfrac{\pi+1}{\pi-2}\right)$.

   Narysować wykres funkcji f i na jego podstawie podać zbiór wartości funkcji oraz rozwiązać nierówność $f(x) \geqslant -\frac{1}{2}$.

5. Tangens kąta ostrego α równy jest $\dfrac{a}{7b}$, gdzie

$$a = \left(\sqrt{2}+1\right)^3 - \left(\sqrt{2}-1\right)^3, \; b = \left(\sqrt{\sqrt{2}+1} - \sqrt{\sqrt{2}-1}\right)^2.$$

   Wyznaczyć wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych tego kąta oraz kąta 2α.

6. W trójkąt otrzymany w przekroju ostrosłupa prawidłowego czworokątnego płaszczyzną przechodzącą przez wysokość ostrosłupa i przekątną jego podstawy wpisano kwadrat, którego jeden bok jest zawarty w przekątnej podstawy. Pole kwadratu jest dwa razy mniejsze niż pole podstawy ostrosłupa. Obliczyć stosunek pola powierzchni bocznej ostrosłupa do pola jego podstawy oraz cosinus kąta między ścianami bocznymi.