

PRACA KONTROLNA nr 3 - POZIOM ROZSZERZONY

1. Dla jakich wartości parametru $\alpha \in (0, 2\pi)$ funkcja

$$f(x) = \sin \alpha \cdot x^2 - x + \cos \alpha$$

posiada minimum lokalne i wartość najmniejsza funkcji jest ujemna?

2. Rozwiązać równanie

$$\sqrt{3} + \operatorname{tg} x = 4 \sin x.$$

3. Wielomian $w(x) = x^4 + 3x^3 + px^2 + qx + r$ dzieli się przez $x - 2$, a resztą z jego dzielenia przez $x^2 + x - 2$ jest $-4x - 12$. Wyznaczyć współczynniki p, q, r i rozwiązać nierówność $w(x) \geq 0$.
4. W czworokącie $ABCD$ dane są $AD = a$ oraz $AB = 2a$. Wiadomo, że $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AD}$ oraz $\angle BAD = 60^\circ$. Stosując rachunek wektorowy obliczyć cosinus kąta ABC oraz obwód czworokąta. Rozwiązanie zilustrować rysunkiem.
5. Punkt $P(-\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ jest środkiem boku trójkąta równobocznego. Drugi bok trójkąta leży na prostej $y = 2x$. Wyznaczyć współrzędne wszystkich wierzchołków trójkąta i obliczyć jego pole. Sporządzić rysunek.
6. Wyznaczyć zbiór punktów płaszczyzny utworzonych przez środki wszystkich okręgów stycznych jednocześnie do prostej $y = 0$ oraz do okręgu $x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$. Sporządzić rysunek.