

PRACA KONTROLNA nr 6 - POZIOM ROZSZERZONY

1. Rozwiązać równanie

$$\sqrt{x^2 - 3} + \sqrt{5 - 2x} = 4 - x.$$

2. Z urny zawierającej 2 kule białe, 4 czerwone i 3 czarne wylosowano jedną kulę. Następnie wylosowano jeszcze trzy kule, gdy pierwsza okazała się biała, dwie kule, gdy pierwsza była czerwona, lub jedną kulę, gdy w pierwszym losowaniu wypadła czarna. Obliczyć prawdopodobieństwo, że w urnie nie pozostała żadna kula biała.
3. Podstawą graniastosłupa prostego jest trójkąt o bokach a , b i kącie między nimi α , a przekątne ścian bocznych, wychodzące z wierzchołka kąta α , są do siebie prostopadłe. Obliczyć objętość graniastosłupa.
4. Na jednym rysunku sporządzić staranne wykresy funkcji

$$f(x) = \sqrt{6x - x^2} \quad \text{oraz} \quad g(x) = \left| \frac{3}{2} - f(x + 2) \right|.$$

Obliczyć pole figury ograniczonej wykresem funkcji $g(x)$ i osią Ox .

5. Podać dziedzinę i sprawdzić tożsamość

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}.$$

Cosinus kąta ostrego α wynosi $\frac{1}{8}$. Korzystając z powyższej tożsamości, obliczyć wartość sumy $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{4} + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{3\alpha}{4} + \operatorname{tg} \alpha$. Wynik podać w najprostszej postaci.

6. Punkt $C(-2, -1)$ jest wierzchołkiem trójkąta równoramiennego ABC , w którym $|AC| = |BC|$. Środkowe trójkąta przecinają się w punkcie $M(1, 2)$, a dwusieczne w punkcie $S\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$. Wyznaczyć współrzędne wierzchołków A i B .