

**LIGA MATEMATYCZNA**  
**GRUDZIEŃ 2010**  
**SZKOŁA PONADGIMNAZJALNA**

**ZADANIE 1.**

Częścią całkowitą liczby rzeczywistej  $x$  nazywamy największą liczbę całkowitą nie większą niż  $x$  i oznaczamy  $[x]$ . Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} [x] + y - 2[z] = 1 \\ x + y - [z] = 2 \\ 3[x] - 4[y] + z = 3. \end{cases}$$

**ZADANIE 2.**

Punkt  $S$  leży wewnątrz sześciokąta foremnego  $ABCDEF$ . Udowodnij, że suma pól trójkątów  $ABS$ ,  $CDS$ ,  $EFS$  jest równa połowie pola sześciokąta  $ABCDEF$ .

**ZADANIE 3.**

Jan napisał na tablicy dwie liczby naturalne. Potem starł je i w ich miejsce wpisał iloczyn zmniejszony o 1 oraz ich sumę. Nie zadowolilo go to jednak i powtórzył tę czynność. Znowu starł wszystko i zapisał sumę otrzymanych liczb: 1309. Oblicz sumę liczb zapisanych na początku.

**ZADANIE 4.**

Wykaż, że z grupy 2010 osób można wybrać 45 osób mających tak samo na imię lub 45 osób, z których każda nosi inne imię.

**ZADANIE 5.**

Wykaż, że liczba  $3^{2012} + 15^{1006} + 5^{2012}$  jest złożona.