PRACA KONTROLNA nr 6

marzec 2001 r

1. Wykazać, że dla każdego kąta α prawdziwa jest nierówność
$$\sqrt{3}\sin\alpha + \sqrt{6}\cos\alpha \leqslant 3.$$

2. Dane są punkty $A(2,2)$ i $B(-1,4)$. Wyznaczyć **długość** rzutu prostopadłego odcinka $\overline{AB}$ na prostą o równaniu $12x+5y=30$. Sporządzić rysunek.

3. Niech $f(m)$ będzie sumą odwrotności pierwiatków rzeczywistych równania kwadratowego $(2^m-7)x^2-2|2^m-4|x+2^m=0$, gdzie m jest parametrem rzeczywistym. Napisać wzór określający $f(m)$ i narysować wykres tej funkcji.

4. Dwóch strzelców strzela równocześnie do **tego samego** celu niezależnie od siebie. Pierwszy strzelec trafia za każdym razem z prawdopodobieństwem $\frac{2}{3}$ i oddaje 2 strzały, a drugi trafia z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ i oddaje 5 strzałów. Obliczyć prawdopodobieństwo, że cel zostanie trafiony dokładnie 3 razy.

5. Liczby $a_1, a_2, ..., a_n$, $n \geqslant 3$, tworzą ciąg arytmetyczny. Suma wyrazów tego ciągu wynosi 28, suma wyrazów o numerach nieparzystych wynosi 16, a $a_2 \cdot a_3 = 48$. Wyznaczyć te liczby.

6. W trójkącie ABC, w którym $AB=7$ oraz $AC=9$, a kąt przy wierzchołku A jest dwa razy większy niż kąt przy wierzchołku B. Obliczyć stosunek promienia koła wpisanego do promienia koła opisanego na tym trójkącie. Rozwiązanie zilustrować rysunkiem.

7. Zaznaczyć na płaszczyźnie następujące zbiory punktów:
$$A = \{(x,y) : x+y-2 \geqslant |x-2|\}, \quad B = \{(x,y) : y \leqslant \sqrt{4x-x^2}\}.$$
Następnie znaleźć na brzegu zbioru $A \cap B$ punkt Q, którego odległość od punktu $P(\frac{5}{2},1)$ jest najmniejsza.

8. Przeprowadzić badanie przebiegu i sporządzić wykres funkcji
$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4 + \sqrt{8-x^2}.$$