

## PRACA KONTROLNA nr 4 - POZIOM ROZSZERZONY

1. Udowodnić tożsamość

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)$$

i wykorzystując ją, usunąć niewymierność z mianownika ułamka  $\frac{1}{1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}}$ .

2. Jaką krzywą tworzą środki wszystkich okręgów stycznych równocześnie do osi  $Ox$  i do okręgu  $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ ?

3. Wyznaczyć wszystkie styczne do wykresu funkcji  $f(x) = \frac{x-3}{x-2}$  prostopadłe do prostej  $4x + y + 1 = 0$ . Sporządzić staranne wykresy wszystkich rozważanych krzywych.

4. Narysować wykres funkcji

$$f(x) = 1 - \frac{2^x}{1 - 2^x} + \left(\frac{2^x}{1 - 2^x}\right)^2 - \left(\frac{2^x}{1 - 2^x}\right)^3 + \left(\frac{2^x}{1 - 2^x}\right)^4 - \dots$$

będącej sumą nieskończonego szeregu geometrycznego. Rozwiązać nierówność

$$f(x) > 4^x - 21 \cdot 2^{x-2} + 2.$$

5. Dla jakiego parametru  $m$  równanie

$$(\log_4 m + 1) \cdot x^2 + 3 \log_4 m \cdot x + 2 \log_4 m - 1 = 0$$

ma dwa pierwiastki  $x_1, x_2$  spełniające warunki:  $x_1 < x_2$ , oraz  $2(x_2^2 - x_1^2) > x_2^4 - x_1^4$ ?

6. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym tangens kąta nachylenia ściany bocznej do podstawy jest równy  $2\sqrt{3}$ . Obliczyć stosunek objętości kuli wpisanej do objętości kuli opisanej na ostrosłupie.

---

Rozwiązania (rękopis) zadań z wybranego poziomu prosimy nadsyłać do **18 stycznia 2016 r.** na adres:

Wydział Matematyki  
Politechnika Wrocławska  
Wybrzeże Wyspiańskiego 27  
50-370 WROCŁAW.

Na kopercie prosimy **koniecznie** zaznaczyć **wybrany poziom!** (np. **poziom podstawowy lub rozszerzony**). Do rozwiązań należy dołączyć zaadresowaną do siebie kopertę zwrotną z naklejonym znaczkiem, odpowiednim do wagi listu. Prace niespełniające podanych warunków nie będą poprawiane ani odsyłane.

Adres internetowy Kursu: <http://www.im.pwr.wroc.pl/kurs>