LIGA MATEMATYCZNA
im. Zdzisława Matuskiego
FINAŁ
15 kwietnia 2014
SZKOŁA PONADGIMNAZJALNA

ZADANIE 1.

Wykaż, że jeżeli a, b, c, d są liczbami nieparzystymi, to nie istnieje taka liczba całkowita x, aby spełniona była równość

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

ZADANIE 2.

Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 - 2yz = 100 \\ 2xy - z^2 = 100. \end{cases}$$

ZADANIE 3.

Wyznacz wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ spełniające równanie

$$2f(x) + 3f\left(\tfrac{1}{x}\right) = x^2$$

dla każdej liczby rzeczywistej x różnej od 0.

ZADANIE 4.

Wysokość i środkowa poprowadzone z jednego wierzchołka trójkąta tworzą z bokami tego trójkąta jednakowe kąty. Środkowa ma długość a. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

ZADANIE 5.

Na okręgu wybrano 2015 punktów, z których 2014 pokolorowano na biało oraz jeden na czerwono. Których wielokątów o wierzchołkach w tych punktach jest więcej: wielokątów o białych wierzchołkach czy wielokątów z jednym wierzchołkiem czerwonym?

ZADANIE 6.

Czy istnieje liczba naturalna n taka, że w zapisie dziesiętnym liczby 2^n każda z cyfr $0, 1, 2, \ldots, 9$ występuje 1000 razy?

ZADANIE 7.

Prosta przechodząca przez środki przekątnych AC i BD czworokąta $ABCD$ przecina boki AD i BC w punktach, odpowiednio, M i N. Wykaż, że trójkąty AND i BCM mają równe pola.