

LIGA MATEMATYCZNA
im. Zdzisława Matuskiego
STYCZEŃ 2015
SZKOŁA PONADGIMNAZJALNA

ZADANIE 1.

Okręgi o promieniach r i R przecinają się w punkcie K . Niech M i N będą punktami styczności z okręgami wspólnej stycznej. Oblicz długość promienia okręgu opisanego na trójkącie KMN .

ZADANIE 2.

Wykaż, że układ równań

$$\begin{cases} x^2 + 2y = 19 \\ y^2 + 2z = 9 \\ z^2 + 2x = 8 \end{cases}$$

nie ma rozwiązań w zbiorze liczb całkowitych.

ZADANIE 3.

W pola nieskończonej szachownicy wpisano liczby naturalne w taki sposób, że każda liczba w polu jest średnią arytmetyczną ośmiu liczb z nią sąsiadujących. Wykaż, że liczba 100 pojawiła się na szachownicy wiele razy lub nie pojawiła się wcale.

ZADANIE 4.

Oblicz wartość wyrażenia

$$\frac{a+b}{a-b},$$

jeśli $2a^2 + 4ab = ab + 2b^2$ oraz $a \neq b$.

ZADANIE 5.

Wyznacz wszystkie funkcje $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające warunek

$$f(f(x) - y) = f(x) + f(f(y) - f(-x)) + x$$

dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y .