

## PRACA KONTROLNA nr 6

1. W koło o powierzchni  $\frac{5}{4}\pi$  wpisano trójkąt prostokątny o polu 1. Obliczyć obwód tego trójkąta.
2. Sprowadzić do najprostszej postaci wyrażenie

$$2(\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha) - 7(\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha) + \cos 4\alpha.$$

3. Wyznaczyć trójmian kwadratowy, którego wykresem jest parabola styczna do prostej  $y = x + 2$ , przechodząca przez punkt  $P(-2, -2)$  oraz symetryczna względem prostej  $x = 1$ . Sporządzić rysunek.
4. W trapezie  $ABCD$ , w którym  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ , dane są  $\overrightarrow{AC} = (4, 7)$  oraz  $\overrightarrow{BD} = (-6, 2)$ . Posługując się rachunkiem wektorowym wyznaczyć wektory  $\overrightarrow{AB}$  i  $\overrightarrow{CD}$ , jeśli  $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{BD}$ .
5. Jaś ma w portmonetce 3 monety jednozłotowe, 2 monety dwuzłotowe i jedną pięciozłotową. Kupując zeszyt w cenie 4 zł wyciąga losowo z portmonetki po jednej monecie tak długo, aż nabiera się suma wystarczająca do zapłaty za zeszyt. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wyciągnie co najmniej trzy monety. Podać odpowiednie **uzasadnienie** (nie jest nim tzw. drzewko).
6. Narysować na płaszczyźnie zbiór punktów określony następująco

$$\mathcal{F} = \{(x, y) : \sqrt{4x - x^2} \leq y \leq 4 - \sqrt{1 - 2x + x^2}\}.$$

W jakiej odległości od brzegu figury  $\mathcal{F}$  znajduje się punkt  $P(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ ?

7. Dana jest funkcja  $f(x) = \log_2(1 - x^2) - \log_2(x^2 - x)$ . Nie korzystając z metod rachunku różniczkowego wykazać, że  $f$  jest rosnąca w swojej dziedzinie oraz, że  $g(x) = f(x - \frac{1}{2})$  jest nieparzysta. Wyznaczyć funkcję odwrotną  $f^{-1}$ , jej dziedzinę i zbiór wartości.
8. Pole powierzchni bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego wynosi  $c^2$ , a kąt nachylenia ściany bocznej do podstawy ma miarę  $\alpha$ . Ostrosłup **rozcięto na dwie części** płaszczyzną przechodzącą przez jeden z wierzchołków podstawy i prostopadłą do przeciwległej krawędzi bocznej. Obliczyć objętość części zawierającej wierzchołek ostrosłupa. Kiedy zadanie ma sens?