grudzień 2003r.

PRACA KONTROLNA nr 3

1. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że gracz losując 7 kart z talii 24 kart do gry otrzyma dokładnie cztery karty w jednym kolorze w tym asa, króla i damę.

2. Pewien ostrosłup przecięto na trzy części dwiema płaszczyznami równoległymi do jego podstawy. Pierwsza płaszczyzna jest położona w odległości $d_1 = 2$ cm, a druga w odległości $d_2 = 3$ cm od podstawy. Pola przekrojów ostrosłupa tymi płaszczyznami równe są odpowiednio $S_1 = 25\text{cm}^2$ oraz $S_2 = 16\text{cm}^2$. Obliczyć objętość tego ostrosłupa oraz objętość najmniejszej części.

3. Rozwiązać układ równań:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 24 \\ \frac{2\log x + \log y^2}{\log(x+y)} = 2 \end{cases}.$$

4. W trójkącie równoramiennym ABC odległość środka okręgu wpisanego od wierzchołka C wynosi d, a podstawę $\overline{AB}$ widać ze środka okręgu wpisanego pod kątem α. Obliczyć pole tego trójkąta.

5. Stosując zasadę indukcji matematycznej udowodnić prawdziwość dla $n \geqslant 1$ wzoru
$$\cos x + \cos 3x + \ldots + \cos(2n-1)x = \frac{\sin 2nx}{2\sin x}, \quad \sin x \neq 0.$$

6. Wyznaczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym
$$a_n = \frac{\sqrt[6]{4n}}{\sqrt{n} - \sqrt{n + \sqrt[3]{4n^2}}}, \quad n \geqslant 1.$$

7. Dany jest wierzchołek $A(6,1)$ kwadratu. Wyznaczyć pozostałe wierzchołki tego kwadratu wiedząc, że wierzchołki sąsiadujące z A leżą jeden na prostej $l : x - 2y + 1 = 0$, a jeden na prostej $k : x + 3y - 4 = 0$. Sporządzić rysunek.

8. Przeprowadzić badanie i wykonać wykres funkcji
$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}}.$$