

XXXV
KORESPONDENCYJNY KURS Z MATEMATYKI

PRACA KONTROLNA nr 1

październik 2005r.

1. Niech $f(x) = x^2 + bx + 5$. Wyznaczyć wszystkie wartości parametru b , dla których:
a) wykres funkcji f jest symetryczny względem prostej $x = 2$, b) wierzchołek paraboli będącej wykresem funkcji f leży na prostej $x + y + 1 = 0$. Sporządzić staranny rysunek.
2. Kilkoro dzieci dostało torebkę cukierków do równego podziału. Gdyby liczba dzieci była o 1 mniejsza, to każde z nich dostałoby o 2 cukierki więcej. Gdyby cukierków było dwa razy więcej, a dzieci o dwoje więcej, to każde dostałoby o 5 cukierków więcej. Ile było dzieci a ile cukierków?
3. Babcia założyła swemu rocznemu wnukowi lokatę w wysokości 1000 zł oprocentowaną w wysokości 6% w skali roku z półroczną kapitalizacją odsetek i postanowiła co 6 miesięcy wpłacać na to konto 100 zł. Jaką sumę dostanie wnuczek w dniu swoich osiemnastych urodzin?
4. Dane są wierzchołki $A(-3, 2)$, $C(4, 2)$, $D(0, 4)$ trapezu równoramiennego $ABCD$, w którym $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$. Wyznaczyć współrzędne wierzchołka B oraz pole trapezu. Sporządzić rysunek.
5. Wyznaczyć stosunek długości przekątnych rombu wiedząc, że stosunek pola koła wpisanego w ten romb do pola rombu wynosi $\frac{\pi}{5}$.
6. Podstawą prostopadłościanu jest prostokąt o dłuższym boku a . Przekątna prostopadłościanu tworzy z przekątnymi ścian bocznych kąty α oraz 2α . Obliczyć objętość tego prostopadłościanu. Dla jakich kątów α zadanie ma rozwiązanie?
7. Dla jakich wartości parametru p funkcja

$$f(x) = \frac{x^3}{px^2 + px + 1}$$

jest określona i rosnąca na całej prostej rzeczywistej?

8. Rozwiązać równanie

$$\operatorname{ctg} x = 2\sqrt{3} \sin x.$$

9. Liczby $a_1 = (\sqrt{2})^{\log_{\frac{1}{2}} 16}$ oraz $a_2 = 16^{-\log_{\frac{3}{2}} \sqrt[4]{2}}$ są odpowiednio pierwszym i drugim wyrazem pewnego ciągu geometrycznego. Rozwiązać nierówność

$$(\sqrt{x})^{\log^2 x - 1} \geq 2S,$$

gdzie S oznacza sumę wszystkich wyrazów tego ciągu.