Zestaw 23

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Na każdym polu szachownicy 8×8 siedzi chrząszcz. 7 Chrząszczy choruje na pewną chorobą zakaźną. Zdrowy chrząszcz, którego pole sąsiaduje (bokiem) z co najmniej dwoma polami zarażonych chrząszczy, sam zostaje zarażony. Czy istnieje takie początkowe ustawienie siedmiu chorych chrząszczy, że po pewnym czasie choroba dopadnie wszystkich mieszkańców szachownicy?

2. Mamy 1 dukata (i 0 talarów). W pierwszym kantorze możemy wymienić 1 dukata na 10 talarów, natomiast w drugim kantorze — 1 talara na 10 dukatów. Czy możemy tak wymieniać pieniądze, aby na końcu mieć tyle samo dukatów, co talarów?

3. Rysujemy dziesięciokąt foremny i w każdym wierzchołku kładziemy żeton. Ruch polega na wybraniu dowolnych dwóch żetonów i przełożeniu każdego z nich do dowolnego wierzchołka sąsiadującego z tym, w którym leżał. Czy można doprowadzić do sytuacji, gdy wszystkie żetony leżą w jednym wierzchołku?

KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. Wykaż, że dla dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c mamy
$$\frac{4}{a}+\frac{9}{b}+\frac{16}{c} \geq \frac{81}{a+b+c}$$

2. Udowodnij, że dowolne nieujemne liczby x, y, z spełniają nierówność.
$$\frac{2}{x+1}+\frac{2}{y+1}+\frac{2}{z+1} > \frac{1}{xy+1}+\frac{1}{yz+1}+\frac{1}{zx+1}$$

3. Liczby a, b, c są dodatnie i $abc = 1$. Wykaz, że
$$\frac{1+ab}{1+a}+\frac{1+bc}{1+b}+\frac{1+ca}{1+c} \geq 3$$

Rozwiązania należy oddać do piątku 3 marca do godziny 15.10 koordynatorowi konkursu panu Jarosławowi Szczepaniakowi lub przesłać na adres jareksz@interia.pl do północy w piątek 3 marca.