PRACA KONTROLNA nr 2 - POZIOM ROZSZERZONY

1. Rozwiązać nierówność $\dfrac{1}{\sqrt{5+4x-x^2}} \geqslant \dfrac{1}{x-2}$ i zbiór rozwiązań zaznaczyć na prostej.

2. Niech $A = \{(x, y) : y \geqslant ||x-2|-1|\}$, $B = \{(x, y) : y + \sqrt{4x - x^2 - 3} \leqslant 2\}$.
   Narysować na płaszczyźnie zbiór $A \cap B$ i obliczyć jego pole.

3. Dla jakich wartości rzeczywistego parametru p równanie $(p-1)x^4 + (p-2)x^2 + p = 0$ ma dokładnie dwa różne pierwiastki?

4. Znaleźć wszystkie wartości parametru rzeczywistego m, dla których pierwiastki trójmianu kwadratowego $f(x)=(m-2)x^2 - (m+1)x - m$ spełniają nierówność $|x_1| + |x_2| \leqslant 1$.

5. Narysować staranny wykres funkcji

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 4x + 4} - 1 & \text{, gdy } \ |x-2| \geqslant 1, \\ -\sqrt{4x - x^2 - 3} & \text{, gdy } \ |x-2| \leqslant 1. \end{cases}$$

   i rozwiązać nierówność $|f(x)| > \frac{1}{2}$. W zależności od parametru m określić liczbę rozwiązań równania $|f(x)| = m$. Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresem funkcji $g(x) = |f(x)|$ i prostą $y = \frac{1}{2}$.

6. Niech

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1}, & \text{gdy } \ |x-1| \geqslant 1, \\ x^2 - x - 1, & \text{gdy } \ |x-1| < 1. \end{cases}$$

   a) Obliczyć $f\left(-\dfrac{2}{3}\right)$, $f\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$ oraz $f(\pi - 1)$.
   b) Narysować wykres funkcji f i na jego podstawie podać zbiór wartości funkcji.
   c) Rozwiązać nierówność $f(x) \geqslant -\dfrac{1}{2}$ i zaznaczyć na osi $0x$ zbiór jej rozwiązań.