

LIGA MATEMATYCZNA
PAŹDZIERNIK 2009
SZKOŁA PONADGIMNAZJALNA

ZADANIE 1.

Mamy $n + 1$ różnych liczb naturalnych mniejszych od $2n$. Uzasadnij, że można wybrać z nich trzy takie, aby jedna była równa sumie pozostałych.

ZADANIE 2.

Wykaż, że okrąg wpisany w trójkąt prostokątny jest styczny do przeciwprostokątnej w punkcie dzielącym przeciwprostokątną na dwa odcinki, których iloczyn długości jest równy polu tego trójkąta.

ZADANIE 3.

Znajdź wartość $f(2)$, jeśli dla dowolnego x różnego od zera spełniona jest równość

$$f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2.$$

ZADANIE 4.

Wyznacz wszystkie liczby pierwsze p, q takie, że liczba $4pq + 1$ jest kwadratem liczby naturalnej.

ZADANIE 5.

Od liczby naturalnej odjęto sumę jej cyfr. Następnie z otrzymaną liczbą postąpiono podobnie. Po wykonaniu 11 takich operacji po raz pierwszy otrzymano 0. Jaka była początkowa liczba?