

PRACA KONTROLNA nr 4 - POZIOM ROZSZERZONY

1. Do zbiornika poprowadzono trzy rury. Pierwsza rura potrzebuje do napełnienia zbiornika o 4 godziny więcej niż druga, a trzecia napełnia cały zbiornik w czasie dwa razy krótszym niż pierwsza. W jakim czasie napełnia zbiornik każda z rur, jeżeli wiadomo, że wszystkie trzy rury otwarte jednocześnie napełniają zbiornik w ciągu 2 godzin i 40 minut?
2. Stosując zasadę indukcji matematycznej wykazać prawdziwość następującego wzoru dla wszystkich $n \geq 1$

$$\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \frac{3^2}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{n^2}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$$

3. Nie wykorzystując metod rachunku różniczkowego wyznaczyć przedziały zawarte w $[0, 2\pi]$, na których funkcja

$$f(x) = \cos x + 2 \cos^2 x + 4 \cos^3 x + 8 \cos^4 x + \dots$$

jest rosnąca.

4. Narysować zbiór $\{(x, y) : |x| + |y| \leq 6, |y| \leq 2^{|x|}, |y| \geq \log_2 |x|\}$ i napisać równania jego osi symetrii. Podać odpowiednie uzasadnienie.
5. Pole przekroju ostrosłupa prawidłowego czworokątnego płaszczyzną przechodzącą przez przekątną podstawy i wierzchołek ostrosłupa jest trójkątem równobocznym o polu S . Wyznaczyć stosunek promienia kuli wpisanej w ten ostrosłup do promienia kuli opisanej na tym ostrosłupie.
6. Punkt $A(1, 2)$ jest wierzchołkiem trójkąta równobocznego. Wyznaczyć dwa pozostałe wierzchołki tego trójkąta wiedząc, że jeden z nich leży na prostej $x - y - 1 = 0$, a jeden z boków jest równoległy do wektora $\vec{v} = [-1, 2]$. Obliczyć pole tego trójkąta. Ile jest trójkątów spełniających warunki zadania?