

LIGA MATEMATYCZNA
im. Zdzisława Matuskiego
STYCZEŃ 2016
SZKOŁA PONADGIMNAZJALNA

ZADANIE 1.

Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD oraz taki punkt E leżący wewnątrz trapezu, że kąty $\sphericalangle AED$ i $\sphericalangle BEC$ są proste. Punkt S jest punktem przecięcia przekątnych trapezu. Wykaż, że jeżeli $E \neq S$, to prosta ES jest prostopadła do podstaw trapezu.

ZADANIE 2.

Wykaż, że

$$\sqrt[3]{120 + \sqrt[3]{120 + \sqrt[3]{120 + \dots}}}$$

jest liczbą naturalną.

ZADANIE 3.

Rozstrzygnij, czy istnieje czworościan, w którym środki okręgów opisanych na ścianach leżą na jednej płaszczyźnie.

ZADANIE 4.

Liczby $1, 2, 3, 4, \dots, 32, 33$ umieszczono w wierzchołkach 33-kąta foremnego, a następnie na środku każdego jego boku zapisano sumę liczb stojących na jego końcach. Czy istnieje takie rozstawienie tych liczb w wierzchołkach wielokąta, aby wszystkie liczby zapisane na środkach jego boków były liczbami podzielnymi przez 4?

ZADANIE 5.

Wyznacz wszystkie funkcje $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające warunek

$$f(x+y) - f(x-y) = 4xy$$

dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y .