

PRACA KONTROLNA nr 4

styczeń 2000r

1. Rozwiązać równanie $16 + 19 + 22 + \dots + x = 2000$, którego lewa strona jest sumą pewnej liczby kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego.
2. Spośród cyfr $0, 1, \dots, 9$ losujemy bez zwracania pięć cyfr. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że z otrzymanych cyfr można utworzyć liczbę podzielną przez 5.
3. Zbadać, czy istnieje pochodna funkcji $f(x) = \sqrt{1 - \cos x}$ w punkcie $x = 0$. Wynik zilustrować na wykresie funkcji $f(x)$.
4. Udowodnić, że dwusieczne kątów wewnętrznych równoległoboku tworzą prostokąt, którego przekątna ma długość równą różnicy długości sąsiednich boków równoległoboku.
5. Rozwiązać układ nierówności

$$\begin{cases} x + y \leq 3 \\ \log_y(2^{x+1} + 32) \leq 2 \log_y(8 - 2^x) \end{cases}$$

i zaznaczyć zbiór jego rozwiązań na płaszczyźnie.

6. Wyznaczyć równanie zbioru wszystkich punktów płaszczyzny Oxy będących środkami okręgów stycznych wewnętrznie do okręgu $x^2 + y^2 = 25$ i równocześnie stycznych zewnętrznie do okręgu $(x + 2)^2 + y^2 = 1$. Jaką linię przedstawia znalezione równanie? Sporządzić staranny rysunek.
7. Zbadać iloczyn pierwiastków rzeczywistych równania

$$m^2 x^2 + 8mx + 4m - 4 = 0$$

jako funkcję parametru m . Sporządzić wykres tej funkcji.

8. Podstawą czworościanu ABCD jest trójkąt równoboczny ABC o boku a , ściana boczna BCD jest trójkątem równoramiennym prostopadłym do płaszczyzny podstawy, a kąt płaski ściany bocznej przy wierzchołku A jest równy α . Obliczyć pole powierzchni kuli opisanej na tym czworościanie.