

**AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA**  
**im. Stanisława Staszica w Krakowie**  
**OLIMPIADA „O DIAMENTOWY INDEKS AGH” 2012/13**  
**MATEMATYKA - ETAP I**

**ZADANIA PO 10 PUNKTÓW**

1. Ile jest ciągów  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  liczb całkowitych dodatnich spełniających równanie  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$  ?

2. Dana jest funkcja

$$f(x) = \frac{5-x}{2x+1}.$$

Rozwiąż nierówność  $f(x+5) \geq f(x-3)$ .

3. Wyznacz dziedzinę i zbadaj parzystość funkcji

$$f(x) = (x^2 + 1) \frac{3^{2x} + 3^{-2x}}{\sin^2 2x + 2} - x^3 \log \frac{3x^2 + 5x + 8}{3x^2 - 5x + 8}.$$

4. Znajdź rzut równoległy punktu  $A(1, -2)$  na prostą  $x - y + 3 = 0$  w kierunku wektora  $\vec{v} = [1, 2]$ .

**ZADANIA PO 20 PUNKTÓW**

5. W prawidłowym ostrosłupie trójkątnym miary kątów nachylenia ściany bocznej i krawędzi bocznej do podstawy ostrosłupa wynoszą odpowiednio  $\alpha$  i  $\beta$ . Oblicz stosunek objętości ostrosłupa do objętości kuli wpisanej w niego.

6. Naskicuj wykres funkcji, która każdej liczbie rzeczywistej  $m$  przyporządkowuje liczbę  $f(m)$  pierwiastków równania

$$4^{|x|} + (m+1)2^{|x|+1} = 5 - m^2$$

z niewiadomą  $x$ .

7. Ciąg trzech liczb całkowitych  $(a, b, c)$  jest ciągiem geometrycznym, którego iloraz jest liczbą całkowitą. Jeżeli do najmniejszej z nich dodamy 9, to otrzymamy trzy liczby, które odpowiednio uporządkowane utworzą ciąg arytmetyczny. Znajdź wszystkie takie ciągi  $(a, b, c)$ .