

LIGA MATEMATYCZNA
STYCZEŃ 2012
SZKOŁA PONADGIMNAZJALNA

ZADANIE 1.

Rozwiąż równanie

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 - \frac{1}{xy}$$

w zbiorze liczb całkowitych.

ZADANIE 2.

Wykaż, że jeżeli $a - 1$, $a + 1$ są liczbami pierwszymi większymi od 10, to liczba $a^3 - 4a$ jest podzielna przez 240.

ZADANIE 3.

Wyznacz wszystkie funkcje $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające warunek

$$2f(x) + 3f(1 - x) = 4x - 1$$

dla każdej liczby rzeczywistej x .

ZADANIE 4.

Dwusieczne kątów zewnętrznych wypukłego czworokąta $ABCD$ utworzyły nowy czworokąt. Udowodnij, że suma długości przekątnych nowego czworokąta jest nie mniejsza niż obwód czworokąta $ABCD$.

ZADANIE 5.

W klasie jest 20 uczniów wpisanych do dziennika pod numerami od 1 do 20. Czy uda się ustawić uczniów w pary tak, aby suma numerów uczniów każdej pary była podzielna przez 6?