

**LIGA MATEMATYCZNA**  
**im. Zdzisława Matuskiego**  
**STYCZEŃ 2016**  
**SZKOŁA PONADGIMNAZJALNA**

**ZADANIE 1.**

Dany jest trapez  $ABCD$  o podstawach  $AB$  i  $CD$  oraz taki punkt  $E$  leżący wewnątrz trapezu, że kąty  $\sphericalangle AED$  i  $\sphericalangle BEC$  są proste. Punkt  $S$  jest punktem przecięcia przekątnych trapezu. Wykaż, że jeżeli  $E \neq S$ , to prosta  $ES$  jest prostopadła do podstaw trapezu.

**ZADANIE 2.**

Wykaż, że

$$\sqrt[3]{120 + \sqrt[3]{120 + \sqrt[3]{120 + \dots}}}$$

jest liczbą naturalną.

**ZADANIE 3.**

Rozstrzygnij, czy istnieje czworościan, w którym środki okręgów opisanych na ścianach leżą na jednej płaszczyźnie.

**ZADANIE 4.**

Liczby  $1, 2, 3, 4, \dots, 32, 33$  umieszczono w wierzchołkach 33-kąta foremnego, a następnie na środku każdego jego boku zapisano sumę liczb stojących na jego końcach. Czy istnieje takie rozstawienie tych liczb w wierzchołkach wielokąta, aby wszystkie liczby zapisane na środkach jego boków były liczbami podzielными przez 4?

**ZADANIE 5.**

Wyznacz wszystkie funkcje  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  spełniające warunek

$$f(x+y) - f(x-y) = 4xy$$

dla dowolnych liczb rzeczywistych  $x, y$ .