

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
im. Stanisława Staszica w Krakowie
OLIMPIADA „O DIAMENTOWY INDEKS AGH” 2009/10

MATEMATYKA - ETAP III

ZADANIA PO 10 PUNKTÓW

1. Rozwiąż równanie

$$(x^2 + 1)^{\sin 2x + \cos 2x} = 1.$$

2. Jakie największe pole powierzchni bocznej może mieć stożek obrotowy, w którym obwód przekroju osiowego ma długość C ?

3. Zbadaj wzajemne położenie okręgów:

$$o_1 : x^2 + y^2 - 4x - 2y - 45 = 0, \quad o_2 : x^2 + y^2 + 2y - 97 = 0.$$

4. Oblicz granicę ciągu, którego n -ty wyraz jest równy

$$a_n = \frac{1}{3^n + 2^n} + \frac{3}{3^n + 2^n} + \frac{9}{3^n + 2^n} + \dots + \frac{3^n}{3^n + 2^n}.$$

ZADANIA PO 20 PUNKTÓW

5. W ostrosłupie prawidłowym ośmiokątnym krawędź podstawy ma długość a , a kąt nachylenia ściany bocznej do podstawy ma miarę α . Wysokość ostrosłupa podzielono na n odcinków równej długości i przez punkty podziału poprowadzono płaszczyzny równoległe do podstawy, dzieląc w ten sposób ostrosłup na n „warstw”. Zakładając, że $n \geq 3$, oblicz objętość drugiej warstwy (licząc od podstawy).

6. Dany jest n -elementowy zbiór S . Ze zbioru wszystkich podzbiorów zbioru S losujemy kolejno ze zwracaniem dwa zbiory (prawdopodobieństwo wylosowania każdego zbioru jest jednakowe). Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń

A : przynajmniej jeden z wylosowanych zbiorów jest zbiorem pustym,

B : każdy z wylosowanych zbiorów ma dokładnie $n - 1$ elementów,

C : wylosowane zbiory są rozłączne.

Wyniki zapisz w najprostszej postaci.

7. Dla jakich wartości parametru p równanie

$$(p - 3)(9 - 4\sqrt{5})^x - (2p + 6)(\sqrt{5} - 2)^x + p + 2 = 0$$

ma dokładnie jeden pierwiastek ?