

Praca kontrolna nr 5

- 19.1.** W czworokącie $ABCD$ dane są wektory $\vec{AB} = [2, -1]$, $\vec{BC} = [3, 3]$, $\vec{CD} = [-4, 1]$. Punkty K i M są środkami boków CD oraz AD . Za pomocą rachunku wektorowego obliczyć pole trójkąta KMB . Sporządzić rysunek.
- 19.2.** Trzy różne krawędzie oraz przekątna prostopadłościanu tworzą cztery kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego. Wyznaczyć sumę długości wszystkich krawędzi tego prostopadłościanu, jeśli przekątna ma długość 7 cm.
- 19.3.** Na płaszczyźnie Oxy dane są zbiory $A = \{(x, y) : y \leq \sqrt{5x - x^2}\}$ oraz $B_s = \{(x, y) : 3x + 4y = s\}$. Dla jakich wartości parametru s zbiór $A \cap B_s$ nie jest pusty? Sporządzić rysunek.
- 19.4.** Działka gruntu ma kształt trapezu o bokach 20 m, 30 m, 40 m i 60 m. Właściciel działki twierdzi, że powierzchnia jego działki wynosi ponad 11 arów. Czy właściciel ma rację? Jeśli tak, to narysować plan działki w skali 1:1000 i podać jej dokładną powierzchnię.
- 19.5.** Dane jest równanie kwadratowe z parametrem m

$$(m + 2)x^2 + 4\sqrt{m}x + (m - 3) = 0.$$

Dla jakiej wartości parametru m kwadrat różnicy pierwiastków rzeczywistych tego równania jest największy. Podać tę największą wartość.

- 19.6.** Stosując zasadę indukcji matematycznej, udowodnić, że dla każdego $n \geq 2$ liczba $2^{2^n} - 6$ jest podzielna przez 10.
- 19.7.** Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 4 \\ \cos(x + y) + \cos(x - y) = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{dla } x, y \in [-\pi, \pi].$$

- 19.8.** Równoramienny trójkąt prostokątny ABC zgięto wzdłuż środkowej CD wychodzącej z wierzchołka kąta prostego C tak, że obie połowy tego trójkąta utworzyły kąt 60° . Obliczyć sinusy wszystkich kątów dwuściennych otrzymanego czworokąta $ABCD$. Rozwiązanie zilustrować odpowiednimi rysunkami, a obliczenia uzasadnić.