MATEMATYKA

III KLASA GIMNAZJUM

SZCZECIN 2016

Bogdańska Beata
Maczan Aleksandra
Staniewska Iwona
Szuman Michał

Spis treści

Rozdział 1

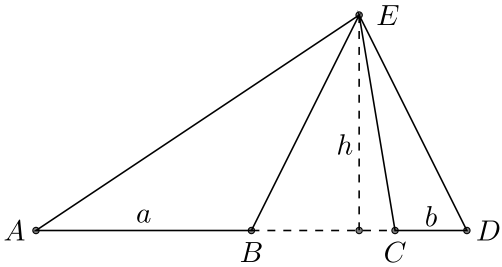
TWIERDZENIE TALESA

Obecnie zajmiemy się bardzo ważnym twierdzeniem geometrii elementarnej: twierdzeniem Talesa. Twierdzenie to pozwoli nam zrozumieć pojęcie *podobieństwa figur geometrycznych.*

> Tales z Miletu – grecki filozof i matematyk. Żył w latach ok. 620 p.n.e. – ok. 540 p.n.e. Według przekazów historycznych mierzył wysokość piramid egipskich z wykorzystaniem ich cienia oraz trójkątów podobnych.

Przypomnijmy wpierw dwa twierdzenia o polu trójkąta, z którymi zapoznaliśmy się już w drugiej klasie, a z których będziemy korzystać w dowodzie twierdzenia Talesa. Takie twierdzenia pomocnicze w dowodzie jakiegoś twierdzenia nazywamy zazwyczaj *lematami.*
Mamy zatem:

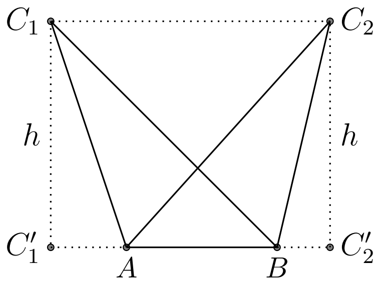
LEMAT 1
Jeżeli dwa trójkąty mają podstawy leżące na jednej prostej i wspólny wierzchołek poza tą prostą, to stosunek pól tych trójkątów równy jest stosunkowi długości tych podstaw.



Dowód: Dla dowodu spójrz na rysunek i zauważ przy tym, że

$$P_{ABE} = \frac{1}{2}ah,\ P_{CDE} = \frac{1}{2}bh, \quad \text{stąd} \quad \frac{P_{ABE}}{P_{CDE}} = \frac{\frac{1}{2}ah}{\frac{1}{2}bh} = \frac{a}{b}.$$

LEMAT 2
Jeżeli trójkąty mają wspólną podstawę, a pozostałe wierzchołki leżą na prostej równoległej do tej podstawy, to trójkąty te mają równe pola.
Dowód:



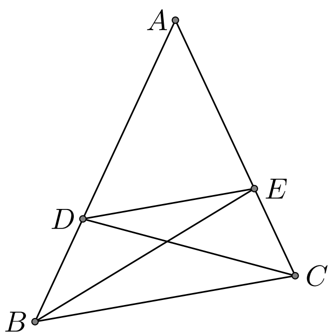
Rozpatrzmy trójkąty ABC_1 i ABC_2 o wspólnej podstawie AB, przy czym $\overline{C_1C_2} \parallel \overline{AB}$. Zauważmy, że wobec tego wysokości C_1C_1' i C_2C_2' opuszczone na prostą AB mają taką samą długość, którą oznaczmy h, zaś długość podstawy AB oznaczmy a. Wobec tego mamy $P_{ABC_1} = \frac{1}{2}ah$, jak również $P_{ABC_2} = \frac{1}{2}ah$.

Korzystając z powyższych dwóch lematów udowodnimy obecnie

TWIERDZENIE (Talesa) Jeżeli prosta równoległa do boku BC trójkąta ABC przecina boki AB i AC w punktach D i E, to

$$\mathrm{T}_1: \quad \frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AE|}{|EC|} \qquad\qquad \mathrm{T}_2: \quad \frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|DE|}{|BC|}$$

Dowód: (tezy T_1)



Wpierw zauważmy, że podstawy AD i BD trójkątów ADE i DBE leżą na jednej prostej oraz że trójkąty te mają wspólny wierzchołek E, wobec tego na mocy lematu 1

$$\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{P_{ADE}}{P_{DBE}}.$$

Trójkąty DEB i DEC mają wspólną podstawę DE, zaś ich wierzchołki B i C leżą na prostej BC, która jest równoległa do tej podstawy, wobec czego na mocy lematu 2 $P_{DBE} = P_{ECD}$.

Wobec tego mamy

$$\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{P_{ADE}}{P_{DBE}} = \frac{P_{ADE}}{P_{ECD}}.$$

Ostatnia równość wynika z lematu 2.

Zauważmy teraz, że trójkąty AED i ECD mają podstawy leżące na jednej prostej i wspólny wierzchołek D. Wobec tego mamy

$$\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{P_{ADE}}{P_{DBE}} = \frac{P_{ADE}}{P_{ECD}} = \frac{|AE|}{|EC|}$$

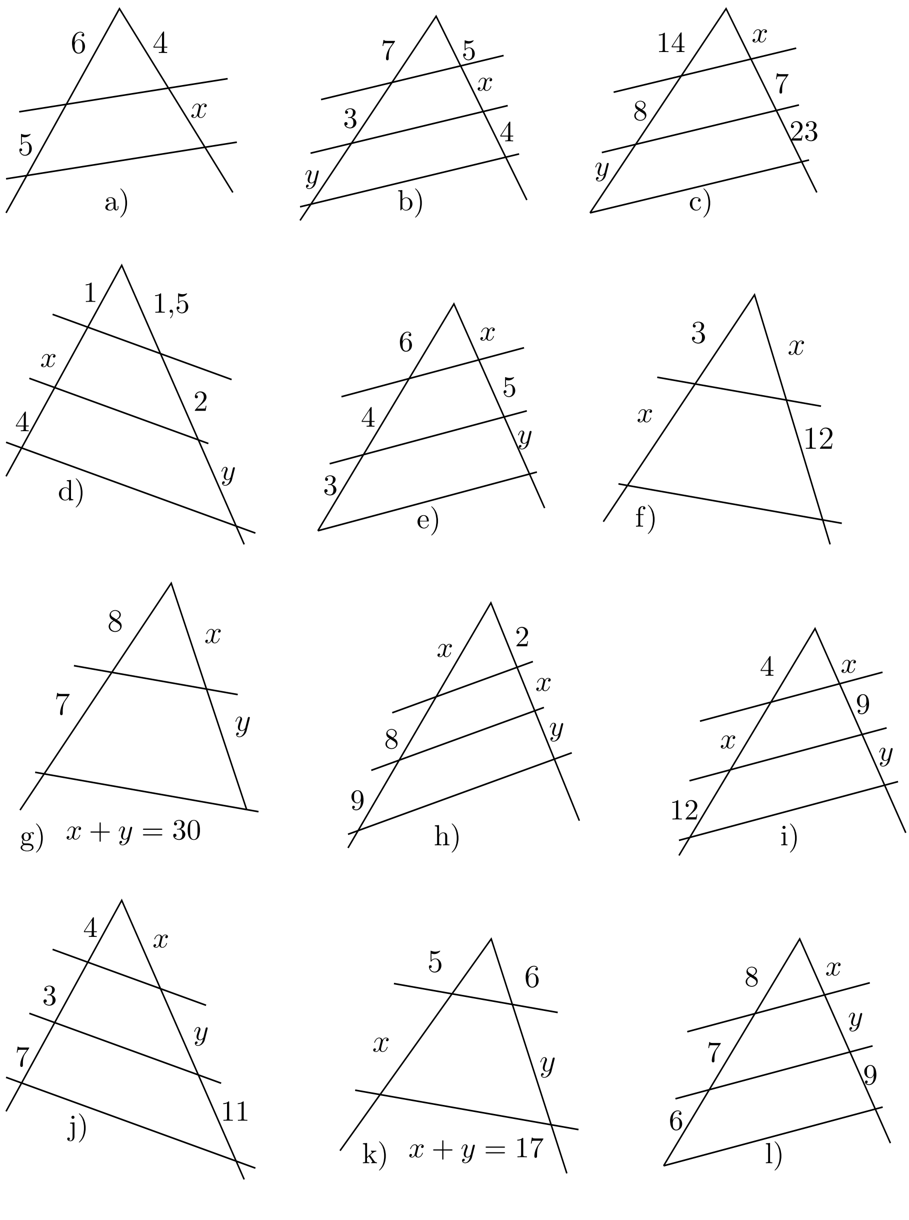
przy czym ostatnia równość wynika z lematu 1. Z powyższego ciągu równości wynika, że

$$\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AE|}{|EC|}$$

co jest końcem dowodu tezy T_1.

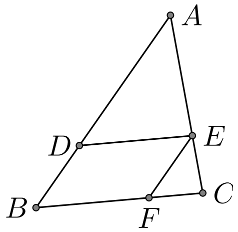
Przed dowodem drugiej tezy, dla nabycia wprawy w pewnych przekształceniach, zróbmy ćwiczenie.

1. W każdej z poniższych sytuacji ramiona kąta zostały przecięte dwiema lub trzema prostymi równoległymi. Wyznacz długości wskazanych odcinków.



Obecnie udowodnimy drugą tezę twierdzenia Talesa.

Dowód: (tezy T_2)



Mamy pokazać, że $\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|DE|}{|BC|}$.

Na bokach trójkąta ABC obieramy punkty D, E, F tak, że $l_{DE} \parallel l_{BC}$, zaś $l_{EF} \parallel l_{AB}$. Na mocy tezy T_1 mamy

$$\frac{|CE|}{|EA|} = \frac{|CF|}{|FB|}, \text{ bo } \overline{EF} \parallel \overline{AB}.$$

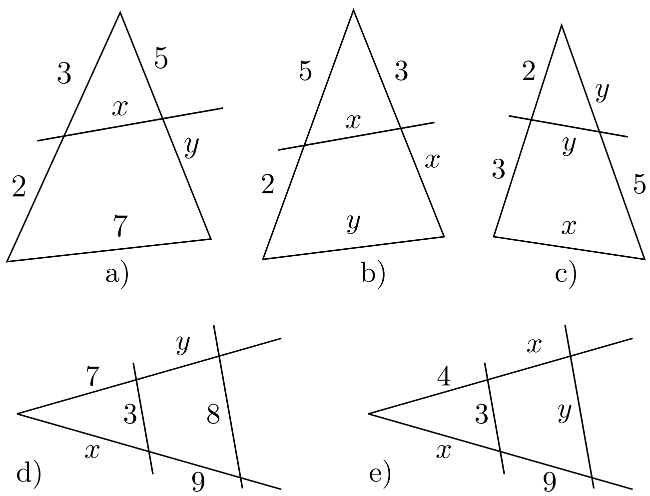
Dodając do obu stron powyższej równości liczbę 1 mamy

$$\frac{|CE|}{|EA|} + 1 = \frac{|CF|}{|FB|} + 1,$$

czyli

$$\frac{|CE|+|EA|}{|EA|} = \frac{|CF|+|FB|}{|FB|}, \qquad \text{czyli} \qquad \frac{|CA|}{|EA|} = \frac{|CB|}{|FB|}.$$

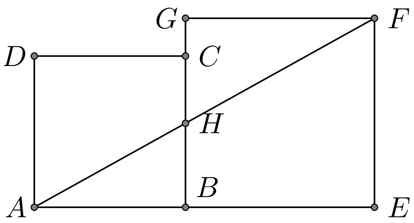
Ponieważ $|BF| = |DE|$, bo $BFED$ jest równoległobokiem, więc $\frac{|CA|}{|EA|} = \frac{|CB|}{|ED|}$, lub też biorąc odwrotności tych wyrażeń możemy zapisać $\frac{|AE|}{|AC|} = \frac{|DE|}{|BC|}$, co kończy dowód tezy T_2.



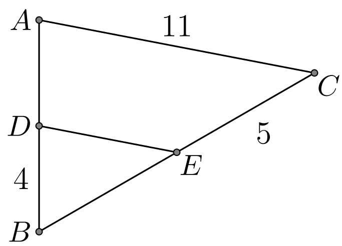
2. Na rysunkach obok dwa ramiona kąta zostały przecięte parą prostych równoległych. Wyznacz długości wskazanych odcinków.

3. W trapezie $ABCD$ o podstawach AB i CD mamy: $|AB| = 10$, $|CD| = 5$, $|AD| = 4$. Przedłużenia ramion trapezu przecinają się w punkcie E. Oblicz długość odcinka DE.

4. W trójkącie ABC bok AB ma długość 6. Na boku AC wybrano punkt M tak, że odcinek AM jest 3 razy dłuższy od odcinka MC. Przez punkt M poprowadzono prostą równoległą do boku BC, która przecięła bok AB w punkcie P. Oblicz długości odcinków AP i PB.



5. Na rysunku obok wierzchołek C kwadratu $ABCD$, leży na boku BG kwadratu $BEFG$. $P_{ABCD} = 49$, $P_{BEFG} = 64$. Oblicz P_{BEFH}.

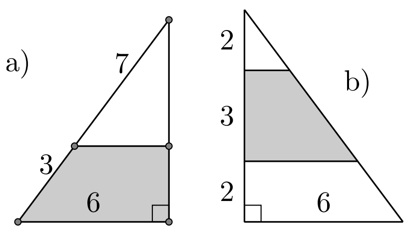


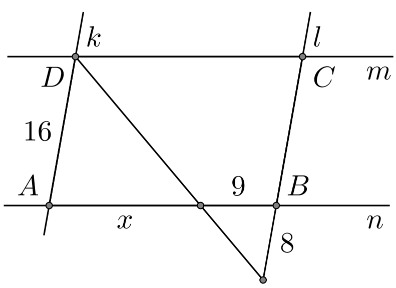
6. Na rysunku obok punkt D jest środkiem boku AB, a odcinek DE jest równoległy do boku AC. Oblicz obwody trójkątów ABC i DBE.

7. W trójkącie ABC punkt D leży na boku BC, punkt E leży na boku AC, $\overline{AB} \parallel \overline{ED}$, $|CD| = |BD| = 5$, $|AB| = 12$, $|AE| = 6$. Wyznacz obwód trójkąta CDE.

8. W trójkącie ABC mamy: $D \in \overline{AC}$, $E \in \overline{BC}$, $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$, $|DE| = 5$, $|AC| = 9$, $|BE| = 2 \cdot |CE|$. Wyznacz $|AD|$ i $|AB|$.

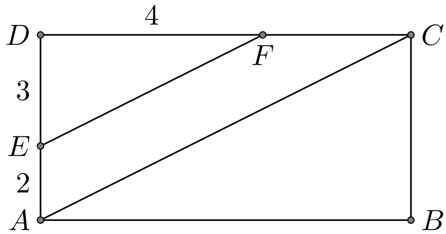
9. Oblicz pola zacieniowanych trapezów na rysunkach obok.

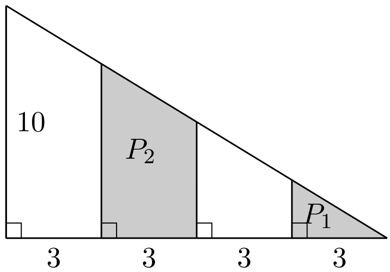




10. Na rysunku obok $k \parallel l$ zaś $m \parallel n$. Wyznacz x.

11. W prostokącie $ABCD$ na rysunku obok prosta EF jest równoległa do przekątnej AC i podzieliła bok AD na odcinki o podanych na rysunku długościach. Wyznacz pole prostokąta $ABCD$ oraz trapezu $ACFE$.





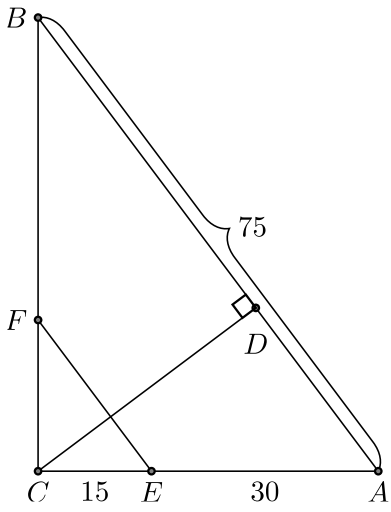
12. Na podstawie informacji na rysunku obok wyznacz pola P_1 i P_2.

13. W trójkącie ABC na rysunku obok kąt ACB jest prosty, zaś przeciwprostokątna ma długość 75. Trójkąt ten został przecięty prostą EF równoległą do przeciwprostokątnej. Prosta ta podzieliła przyprostokątną AC na odcinki o podanych na rysunku długościach, odcinając od wyjściowego trójkąta trapez $ABFE$. Wyznacz:

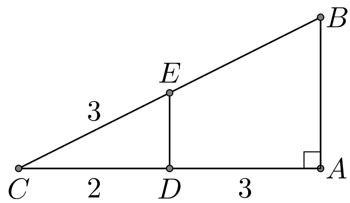
a) długość wysokości trójkąta ABC opuszczonej na przeciwprostokątną,

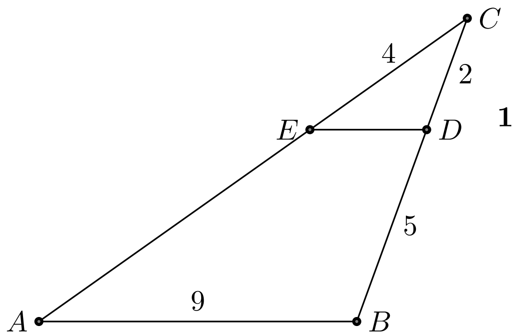
b) długość krótszej podstawy trapezu,

c) pole trapezu,



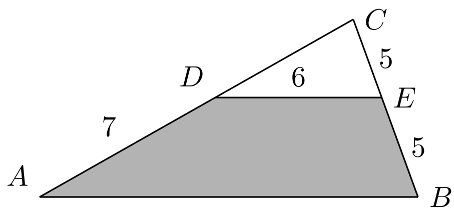
14. Odcinek DE na rysunku obok jest równoległy do przyprostokątnej AB trójkąta prostokątnego ABC. Na podstawie podanych długości odcinków wyznacz ED, AB, P_{ABED}.

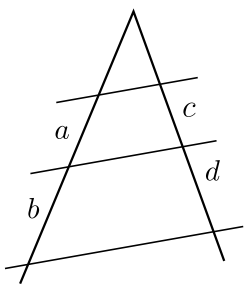




15. Na rysunku obok $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$. Na podstawie podanych długości czterech odcinków wyznacz Ob_{ABDE}.

16. W trójkącie ABC na rysunku obok $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$, $|CE| = |EB| = 5$, $|DE| = 6$, $|DA| = 7$. Wyznacz P_{ABED}.

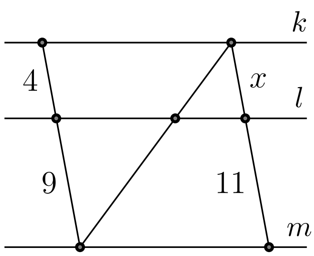


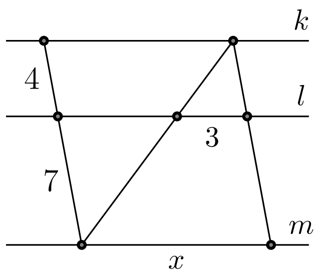


Twierdzenie Talesa można formułować na bardzo wiele równoważnych sposobów. Bardzo wygodnym sformułowaniem jest poniższe:
Jeżeli ramiona kąta przetniemy trzema równoległymi prostymi, to długości wyciętych odcinków na jednym ramieniu są proporcjonalne do długości odcinków na drugim ramieniu, co zapisujemy

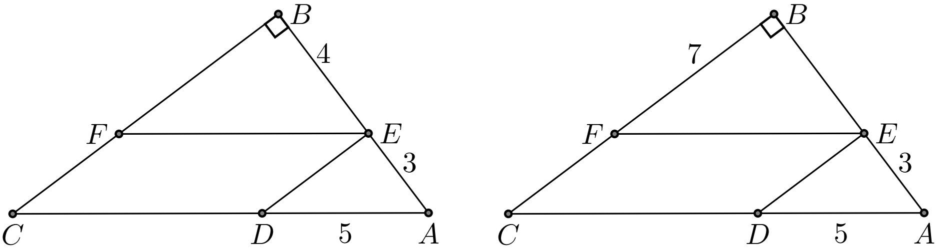
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{lub} \quad \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \quad \text{lub} \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d}.$$

17. Na obu rysunkach $k \parallel l \parallel m$. Na podstawie podanych długości odcinków wyznacz x.





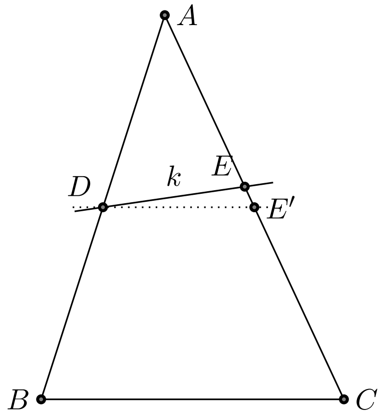
18. Na poniższych dwóch rysunkach trójkąty ABC są prostokątne, zaś czworokąty $CDEF$ są równoległobokami. Na podstawie podanych długości dwóch odcinków wyznacz P_{CDEF}.



Obecnie uzasadnimy, że prawdziwe jest również twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa. A mianowicie

TWIERDZENIE Jeżeli w trójkącie ABC prosta k przecina boki AB i AC w punktach D i E, a przy tym $\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AE|}{|EC|}$, to $k \parallel l_{BC}$.

Dowód: (nie wprost) Przypuśćmy, że pomimo iż spełnione są założenia twierdzenia, to jednak $l_{DE} \not\parallel l_{BC}$. Wobec tego z aksjomatu 2, który mówi, że przez punkt nie leżący na danej prostej przechodzi tylko jedna prosta do niej równoległa, wynika że przez punkt D przechodzi jakaś inna prosta, która jest równoległa do l_{BC}, i która przecina bok AC w jakimś punkcie. Oznaczmy sobie ten punkt E'. Wówczas na mocy tezy T_1



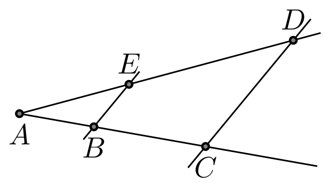
twierdzenia Talesa mamy:

$$\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AE'|}{|E'C|}.$$

Z założenia naszego twierdzenia mamy $\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AE|}{|EC|}$.

Z obu powyższych równości wynika, że $\frac{|AE|}{|EC|} = \frac{|AE'|}{|E'C|}$.
Ta ostatnia równość oznacza natomiast, że punkt E i punkt E' to jest ten sam punkt czyli, że $l_{DE} = l_{DE'}$, czyli że jednak $l_{DE} \parallel \overline{BC}$.

19. Punkty A, B, C, D i E są położone na dwóch półprostych tak jak na rysunku poniżej. Rozstrzygnij w każdym przypadku czy $\overline{BE} \parallel \overline{CD}$, jeżeli długości odcinków są następujące



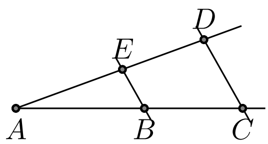
a) $|AB| = 2$, $|BC| = \frac{3}{2}$, $|AE| = \frac{4}{3}$, $|ED| = 1$.

b) $|AB| = 2$, $|BC| = \frac{3}{2}$, $|AE| = 1$, $|ED| = \frac{4}{3}$.

c) $|AC| = 3$, $|AB| = 2$, $|AD| = 3\sqrt{2}$, $|AE| = 2\sqrt{2}$.

d) $|AC| = 2|AB|$, $|AD| = 2|AE|$.

20. Zbadaj czy można rozstrzygnąć, a jeśli można to rozstrzygnij, czy $\overline{EB} \parallel \overline{CD}$ gdy punkty A, B, C, D i E są położone tak jak na rysunku obok i przy tym



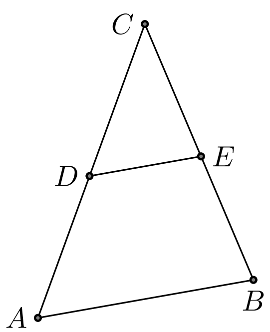
a) $|AB| = 2$, $|AC| = 5$, $|EB| = 3$, $|DC| = \frac{15}{2}$.

b) $|AE| = 1$, $|ED| = 6$, $|EB| = 3$, $|DC| = 9$

21. W trójkącie ABC na boku AC obrano punkt D, a na boku BC punkt E tak, że $\frac{|CD|}{|AD|} = \frac{|CE|}{|EB|} = \frac{2}{5}$, $|DE| = 78$. Wyznacz $|AB|$.

22. W trójkącie ABC $D \in \overline{AC}$, $E \in \overline{BC}$, $|AC| = 3|CD|$, $|BE| = 2|CE|$, $|AB| = 16$. Wyznacz $|DE|$.

Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa wynika poniższe twierdzenie o odcinku łączącym środki boków trójkąta.



TWIERDZENIE Odcinek łączący środki dwóch boków trójkąta jest równoległy do trzeciego boku, a jego długość równa jest połowie długości trzeciego boku.

Dowód: Ponieważ D jest środkiem odcinka CA, zaś E środkiem odcinka CB, wobec tego

$$1 = \frac{|CD|}{|DA|} = \frac{|CE|}{|EB|},$$

więc na mocy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$.

Z drugiej tezy twierdzenia Talesa mamy $\frac{|DC|}{|AC|} = \frac{|DE|}{|AB|}$, a ponieważ $|AD| = |DC|$ czyli $\frac{|DC|}{|AC|} = \frac{1}{2}$, więc $\frac{|DE|}{|AB|} = \frac{1}{2}$ czyli $|DE| = \frac{1}{2}|AB|$.

23. Obwód trójkąta wynosi 12cm. Środki boków trójkąta połączono odcinkami tworząc trójkąt. Wyznacz obwód otrzymanego trójkąta.

24. W trójkącie o bokach długości a, b, c łączymy środki kolejnych boków uzyskując trójkąt. Oblicz obwód uzyskanego trójkąta.

25. Długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego równe są a i b. Odcinek łączący ich środki dzieli ten trójkąt na czworokąt i trójkąt prostokątny.

a) Uzasadnij, że czworokąt ten jest trapezem.

b) Wyznacz pole tego czworokąta (spróbuj w pamięci).

c) Wyznacz wysokość wyjściowego trójkąta opuszczoną na przeciwprostokątną.

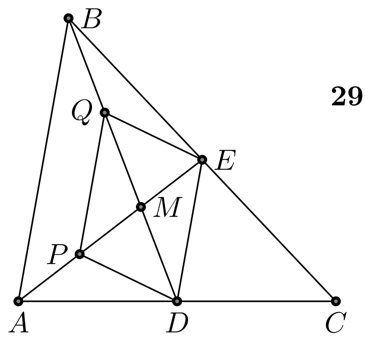
d) Wyznacz długość krótszej podstawy trapezu.

e) Wyznacz wysokość uzyskanego trapezu licząc tylko odpowiednie pola.

26. W trójkącie równobocznym o boku długości a połączono środki dwóch boków odcinkiem. Oblicz obwód powstałego czworokąta.

27. W trójkącie o podstawie a i wysokości h opuszczonej na tę podstawę prowadzimy prostą równoległą do tej podstawy i przechodzącą przez środki ramion tego trójkąta. Wyznacz pole uzyskanego trapezu. Oblicz jakim procentem wyjściowego trójkąta jest pole uzyskanego trapezu.

28. Uzasadnij, że odcinki łączące środki kolejnych boków czworokąta tworzą równoległobok. wsk. Co trzeba dorysować, aby to uzasadnić?



29. W trójkącie ABC na rysunku obok poprowadzono środkowe AE i BD, które przecinają się w punkcie M. W trójkącie AMB punkty P i Q są środkami boków. Pokaż, że czworokąt $DEQP$ jest równoległobokiem.

30. Dany jest prostokąt o bokach długości a i b. Łączymy kolejno środki boków tego prostokąta.

a) Uzasadnij, że uzyskany tym sposobem czworokąt jest rombem

b) Wyznacz pole powierzchni tego rombu (w pamięci)

c) Wyznacz wysokość tego rombu

31. W czworokącie łączymy środki jego boków uzyskując w ten sposób czworokąt będący równoległobokiem. Oblicz jakim procentem wyjściowego czworokąta jest pole uzyskanego równoległoboku.

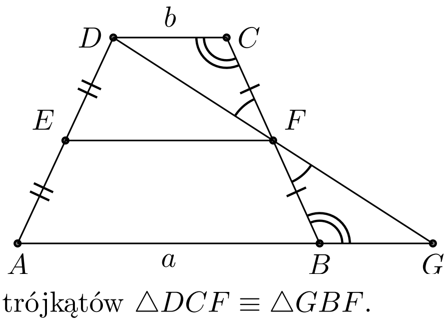
32. W trapezie prostokątnym dłuższa podstawa ma długość a, krótsza ma długość b. Ramię o długości d jest prostopadłe do obu podstaw. Łączymy kolejno środki boków tego trapezu.
a) Uzasadnij, że uzyskany czworokąt jest równoległobokiem.
b) Wyznacz długości boków tego równoległoboku.
c) Wyznacz obie wysokości równoległoboku oraz pole powierzchni.

33. W czworokącie $ABCD$ punkty E, F, G i H są kolejno środkami boków AB, BC, CD i DA. Przekątna AC wyjściowego czworokąta ma długość d i podzieliła równoległobok $EFGH$ na dwa równoległoboki. Wysokość trójkąta ACD opuszczona na podstawę AC ma długość h.
a) Oblicz pole trójkąta DHG.
b) Oblicz pole tego równoległoboku, który leży w trójkącie ACD.

34.* Dany jest trójkąt ostrokątny ABC o podstawie AB i wierzchołku C. Prowadzimy dwusieczne kątów zewnętrznych $\sphericalangle A$ i $\sphericalangle B$. Rzutujemy prostopadle punkt C na każdą z tych dwusiecznych. Oznaczmy punkty rzutowania przez P i Q. Pokaż, że $|PQ| = \frac{1}{2}(|AB| + |BC| + |CA|)$. wsk. zrób staranny rysunnek

TWIERDZENIE Odcinek łączący środki ramion trapezu jest równoległy do obu podstaw, a jego długość jest równa połowie sumy długości podstaw.

Dowód.
Wpierw zauważmy, że
$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ – jako podstawy trapezu,
$\sphericalangle CFD = \sphericalangle BFG$ – kąty wierzchołkowe,
$\sphericalangle DCF = \sphericalangle GBF$ – kąty naprzemianległe,
$|CF| = |FB|$ – z założenia.



Wobec tego na mocy KBK przystawania trójkątów $\triangle DCF \equiv \triangle GBF$.
Z tego wynika, że

$$|CD| = |BG| \text{ (czyli } |BG| = b) \text{ oraz } |DF| = |FG|$$

jako długości odpowiadających sobie boków w trójkątach przystających.
Czyli $|AG| = a + b$. Wobec tego odcinek EF łączy środki boków trójkąta AGD, więc jest on równoległy do boku AG a jego długość równa jest połowie długości boku AG czyli $\frac{1}{2}(a + b)$.

35. Odcinek łączący środki ramion trapezu ma długość 7cm, a jedna z jego podstaw dłuższa jest od drugiej o 4cm. Wyznacz długości podstaw.

36. Stosunek długości podstaw w trapezie równy jest 2 : 3, a odcinek łączący środki ramion trapezu ma długość 5m. Wyznacz długość podstaw tego trapezu.

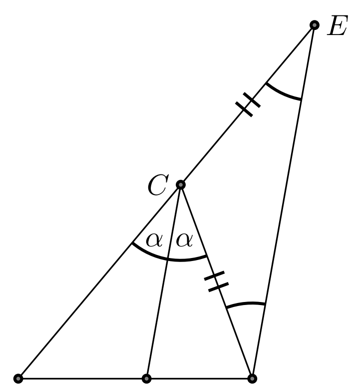
TWIERDZENIE Jeżeli prosta przechodzi przez środek jednego ramienia trapezu i jest równoległa do podstaw trapezu, to przechodzi ona również przez środek drugiego ramienia trapezu.

37. Udowodnij powyższe twierdzenie.

38. Punkty A, B, C leżą na jednaj prostej, w tej właśnie kolejności. Trójkąty ABD i BCE są równoboczne, przy czym punkty D i E leżą po jednej stronie prostej AB. Niech F będzie środkiem odcinka AB, G – środkiem odcinka BC, zaś H – środkiem odcinka DE. Uzasadnij, że trójkąt FGH jest równoboczny.

39. Podstawy trapezu mają długości równe a i b, przy czym $a > b$. Wyznacz długość odcinka jaki przekątne tego trapezu wycinają na prostej łączącej środki ramion tego trapezu.

40. Wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta rozwartego w trapezie równoramiennym dzieli jego podstawę na odcinki o długościach a i b, $a > b$. Wyznacz długość odcinka łączącego środki ramion tego trapezu.



TWIERDZENIE Jeżeli ABC jest dowolnym trójkątem, wówczas dwusieczna kąta np. $\sphericalangle C$ dzieli przeciwległy bok AB na dwa odcinki o długościach proporcjonalnych do długości boków AC i BC, to znaczy $\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{|AD|}{|BD|}$ czyli $\frac{|AC|}{|AD|} = \frac{|CB|}{|BD|}$.

Dowód:
Niech CD będzie dwusieczną kąta przy wierzchołku C. Poprowadźmy prostą AC, zaś przez punkt B poprowadźmy prostą równoległą do dwusiecznej CD. Niech prosta ta przecina prostą AC w punkcie E.

Wówczas kąty $\sphericalangle ACD$ i $\sphericalangle CEB$ są kątami odpowiadającymi, a kąty $\sphericalangle DCB$ i $\sphericalangle CBE$ kątami naprzemianległymi. Ponieważ $\sphericalangle ACD = \sphericalangle DCB$, bo CD jest dwusieczną, więc w trójkącie BCE kąty $\sphericalangle CBE$ i $\sphericalangle CEB$ są równe, czyli jest to trójkąt równoramienny, w którym $|CB| = |CE|$. Mamy więc następującą sytuację: w trójkącie ABE zachodzi $\overline{CD} \parallel \overline{EB}$, więc na mocy twierdzenia Talesa $\frac{|AC|}{|CE|} = \frac{|AD|}{|DB|}$, a ponieważ $|CE| = |CB|$ więc $\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{|AD|}{|DB|}$ czyli $\frac{|AC|}{|AD|} = \frac{|CB|}{|DB|}$.

Ma miejsce również twierdzenie odwrotne:

TWIERDZENIE Niech ABC będzie dowolnym trójkątem. Z wierzchołka C prowadzimy prostą, która dzieli przeciwległy bok AB w punkcie D na dwa odcinki o długościach proporcjonalnych do długości boków AC i BC tzn, że $\frac{|CA|}{|CB|} = \frac{|AD|}{|BD|}$. Wówczas ta prosta jest dwusieczną kąta C.

UWAGA Dwusieczna kąta jest to półprosta wychodząca z wierzchołka kąta. Często w zadaniach o trójkącie używamy słowa dwusieczna rozumiejąc przez to odcinek zawarty w dwusiecznej kąta ograniczony wierzchołkiem kąta i punktem przecięcia dwusiecznej z przeciwległym bokiem.

41. W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 5$, $|BC| = 8$, $\sphericalangle ABC = 120°$. Korzystając z twierdzenia o dwusiecznej wyznacz długość dwusiecznej kąta ABC.

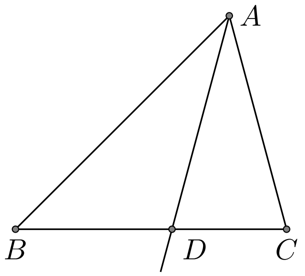
42. Uzasadnij, że jeżeli w trójkącie ABC środkowa BD jest dwusieczną, to on jest równoramienny. **wsk**. skorzystaj z twierdzenia o dwusiecznej.

43. Wyznacz długość d dwusiecznej kąta prostego w trójkącie o przyprostokątnych długości a i b. **wsk.** skorzystaj z dowodu twierdzenia o dwusiecznej.

44. W równoległoboku $ABCD$ punkt A_1 jest środkiem boku AB, a C_1 środkiem boku CD. Udowodnij, że odcinki A_1C i AC_1 przecinając przekątną BD dzielą ją na trzy odcinki równej długości.

45*. Pokaż, że punkt przecięcia przekątnych w trapezie dzieli każdą z nich na odcinki, których długości są proporcjonalne do długości odpowiednich podstaw.

46*. Wierzchołki A i D dwóch trójkątów o wspólnej podstawie BC leżą po tej samej stronie podstawy. Z dowolnego punktu podstawy wykreślono jedną prostą równoległą do AB, która przecina AC w punkcie F, oraz (z tego samego punktu) drugą prostą równoległą do BD, która przecina DC w punkcie G. Pokaż, że $\overline{FG} \parallel \overline{AD}$.

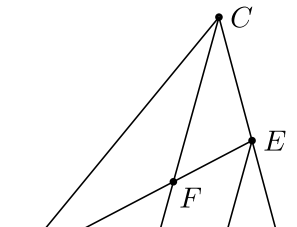


47. W trójkącie ABC, na rysunku obok, poprowadzono dwusieczną $AD^{\rightarrow}$. Niech $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. Wyznacz długości odcinków AD i DB w zależności od a, b, c.

48. W trójkącie równoramiennym o podstawie długości a, zaś ramionach długości b prowadzimy dwusieczną kąta przy podstawie. Przecina ona jedno z ramion trójkąta. Wyznacz długości odcinków na jakie dwusieczna podzieliła to ramię.

49. W trójkącie równoramiennym ramiona mają długość a, zaś podstawa ma długość b. Dwusieczne kątów (wewnętrznych) przy podstawie przecinają ramiona trójkąta w punktach A i B. Wyznacz długość odcinka AB.

50. W trójkącie ostrokątnym ABC wysokość CD podzieliła podstawę AB na odcinki o długościach: $|AD| = 3$, $|DB| = 5$. Bok BC ma długość 7. Symetralna podstawy AB przecina bok BC w punkcie F. Wyznacz CF, CD oraz P_{ACF}.



TWIERDZENIE Punkt w którym przecinają się dwie środkowe w trójkącie dzieli każdą z nich w stosunku 2:1 (począwszy od wierzchołka). Wszystkie trzy środkowe w trójkącie przecinają się w jednym punkcie.

Dowód:
Niech CD i AE będą środkowymi przecinającymi się w punkcie F. Przez punkt E poprowadźmy odcinek EG równoległy do FD.
Wpierw rozważmy trójkąt DBC, w którym po pierwsze $|BE| = |CE|$, bo E jest środkiem odcinka BC, a po drugie $\overline{GE} \parallel \overline{CD}$, bo tak wybraliśmy sobie punkt G. Wobec tego na mocy twierdzenia Talesa mamy $1 = \frac{|BE|}{|CE|} = \frac{|BG|}{|GD|}$. Z tego wynika, że punkt G jest środkiem odcinka DB. Ponieważ D jest środkiem odcinka AB, więc wobec tego $|AD| = 2|DG|$.
Rozważmy teraz trójkąt AGE, w którym $\overline{DF} \parallel \overline{GE}$, wobec tego na mocy

twierdzenia Talesa mamy

$$\frac{|AF|}{|FE|} = \frac{|AD|}{|DG|} = \frac{2|DG|}{|DG|} = \frac{2}{1}.$$

Pokazaliśmy zatem, że punkt F, w którym przecinają się środkowe AE i CD dzieli środkową AE w stosunku $2:1$. W podobny sposób, czyli prowadząc przez punkt D równoległą do środkowej AE możemy uzasadnić, że punkt F dzieli środkową CD w stosunku $2:1$. Ponieważ tylko jeden punkt F może podzielić środkową CD tak, że $\frac{|CF|}{|FD|} = \frac{2}{1}$, więc z tego wynika, że trzecia środkowa trójkąta ABC wychodząca z wierzchołka B, również przechodzi przez punkt F.

DEFINICJA

Punkt, w którym przecinają się środkowe trójkąta nazywamy *środkiem ciężkości trójkąta* i oznaczamy go zazwyczaj literą G (skrót od *grawitacja*). Fizycznie oznacza to, że gdybyśmy trójkąt wykonali z jednorodnej płyty i podparli ten trójkąt – umieszczony poziomo – w punkcie G, to pozostałby on w stanie równowagi. Podobnie środek odcinka jest jego środkiem ciężkości, co oznacza, że gdybyśmy wzięli jednorodny pręt i w pozycji poziomej podparli go w środku, to pozostałby on w stanie równowagi.

51. Na boku BC trójkąta ABC obrano punkt K tak, że $BK : KC = 2 : 1$. W jakim stosunku środkowa CC_1 dzieli odcinek AK?

52. W trójkącie ABC kąt C jest prosty, $|AC| = 12$, $|BC| = 16$. Niech D będzie środkiem boku AB, zaś G środkiem ciężkości trójkąta ABC. Wyznacz P_{ADG} oraz odległość punktu G od każdego z boków trójkąta.

53. W trójkącie ostrokątnym ABC długości boków są następujące: $|AB| = 16$, $|BC| = 20$, $|CA| = 24$. Wyznacz wysokość h_c wychodzącą z wierzchołka C oraz P_{ABC}. Wyznacz odległość środka ciężkości G trójkąta ABC od boków trójkąta.

Wskazówki i odpowiedzi.

1. a) $3\frac{1}{3}$, b) $x = 2\frac{1}{7}$, $y = 5\frac{3}{5}$, c) $x = 12\frac{1}{4}$, $y = 26\frac{2}{7}$ d) $x = \frac{4}{3}$, $y = 6$, e) $x = 7\frac{1}{2}$, $y = 3\frac{3}{4}$, f) $x = 6$, g) $x = 16$, $y = 14$, h) $x = 4$, $y = 4\frac{1}{2}$, i) $x = 6$, $y = 18$, j) $x = 6\frac{2}{7}$, $y = 4\frac{5}{7}$, k) $x = 7\frac{8}{11}$, $y = 9\frac{3}{11}$, l) $x = 12, y = 10\frac{1}{2}$

2. a) $x = 4\frac{1}{5}$, $y = 3\frac{1}{3}$, b) $x = 1\frac{1}{5}$, $y = 1\frac{17}{25}$ c) $x = 8\frac{1}{3}$, $y = 3\frac{1}{3}$, d) $x = 5\frac{2}{5}$, $y = 11\frac{2}{3}$, e) $x = 6$, $y = 7\frac{1}{2}$

3. $|DE| = 4$

4. $|AP| = 4\frac{1}{2}$, $|PB| = 1\frac{1}{2}$
5. $|BH| = \frac{56}{15}$, $P_{BEFH} = 46\frac{14}{15}$
6. $Ob_{ABC} = 29$, $Ob_{DBE} = 14\frac{1}{2}$
7. $Ob_{CDE} = 17$
8. $|AD| = 6$, $|AB| = 15$
9. a) $P = 12\frac{6}{25}$, b) $P = 9$
10. $x = 18$
11. $P_{ABCD} = 33\frac{1}{3}$, $P_{ACFE} = 10\frac{2}{3}$
12. $P_1 = 3\frac{3}{4}$, $P_2 = 18\frac{3}{4}$
13. a) $|CD| = 36$, b) $|EF| = 25$,
c) $P_{ABFE} = 1200$
14. $|ED| = \sqrt{5}$, $|AB| = \frac{5}{2}\sqrt{5}$,
$P_{ABED} = \frac{21}{4}\sqrt{5}$
15. $AE = 10$, $ED = \frac{18}{7}$,
$Ob_{ABDE} = 26\frac{4}{7}$
16. $P_{ABED} = 18\sqrt{6}$
17. a) $4\frac{8}{9}$, b) $8\frac{1}{4}$
18. a) $P_{CDEF} = 16$, b) $P_{CDEF} = 21$
19. a) są, b) nie są, c) są, d) są
20. a) można – są równoległe,
b) można – nie są równoległe
21. $|AB| = 273$
22. $|DE| = 5\frac{1}{3}$
23. $Ob = 6$
24. $Ob = \frac{1}{2}(a + b + c)$
25. b) $P = \frac{3}{8}ab$, c) $h = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$,
d) $p = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$, e) $h = \frac{ab}{2\sqrt{a^2+b^2}}$
26. $2\frac{1}{2}a$
27. $P = \frac{3}{8}ah$, 75%
30. b) $P = \frac{1}{2}ab$, c) $h = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$
31. 50%
32. b) $\frac{1}{2}\sqrt{d^2 + b^2}$, $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + d^2}$,
c) $h_1 = \frac{ab+bd}{\sqrt{d^2+b^2}}$, $h_2 = \frac{ad+bd}{\sqrt{d^2+a^2}}$
33. a) $P_{DHG} = \frac{1}{8}dh$, b) $\frac{1}{4}dh$
35. 5 i 9
36. 4 i 6
39. $\frac{1}{2}(a - b)$
40. a
41. $d = \frac{40}{13}$
43. $d = \frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$
44. wsk. co trzeba dorysować?
47. $AD = \frac{bc}{a+b}$, $DB = \frac{ac}{a+b}$
48. $\frac{ab}{a+b}$, $\frac{b^2}{a+b}$
49. $|AB| = \frac{ab}{a+b}$
50. $|CF| = \frac{7}{5}$, $|CD| = 2\sqrt{6}$,
$P_{ACF} = \frac{8}{5}\sqrt{6}$
51. 3 : 1
52. $P_{ADG} = 16$, $d(G, AB) = \frac{16}{5}$,
$d(G, AC) = \frac{16}{3}$, $d(G, BC) = 4$,
53. $h_c = \frac{15}{2}\sqrt{7}$, $P_{ABC} = 60\sqrt{7}$,
$d(G, AB) = \frac{5}{2}\sqrt{7}$, $d(G, AC) = \frac{5}{3}\sqrt{7}$,
$d(G, BC) = \frac{1}{2}\sqrt{7}$.

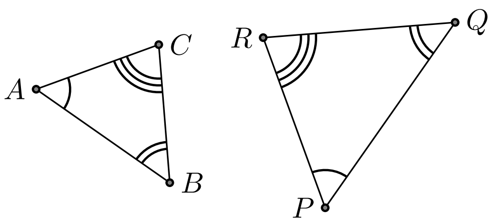
Rozdział 2

TRÓJKĄTY PODOBNE

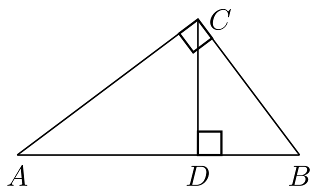
DEFINICJA

Dwa trójkąty nazywamy *podobnymi* jeżeli mają takie same kąty.

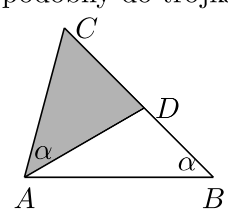
Fakt, że trójkąt ABC jest podobny do trójkąta PQR będziemy zapisywać $\triangle ABC \sim \triangle PQR$. Zapis ten oznacza równość odpowiednich kątów, a mianowicie
$\sphericalangle A = \sphericalangle P$, $\sphericalangle B = \sphericalangle Q$, $\sphericalangle C = \sphericalangle R$.



1. Uzasadnij, że wysokość opuszczona na przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego dzieli ten trójkąt na trójkąty podobne, przy czym oba z nich są podobne do wyjściowego trójkąta. Zapisz zgodnie z konwencją podaną w definicji podobieństwa trójkątów odpowiednie związki.



2. Uzasadnij, że zacieniowany trójkąt na rysunku poniżej jest podobny do trójkąta ABC.



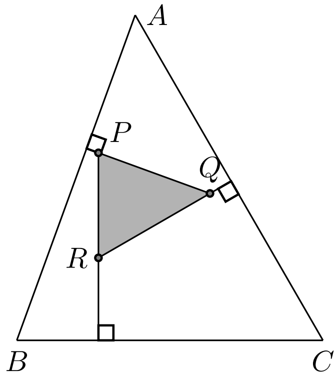
3. Narysuj dowolny prostokąt. Poprowadź linie wzdłuż których należy go rozciąć aby otrzymać

a) 2 trójkąty podobne

b) 3 trójkąty podobne

c) 4 trójkąty podobne

d) 5 trójkątów podobnych

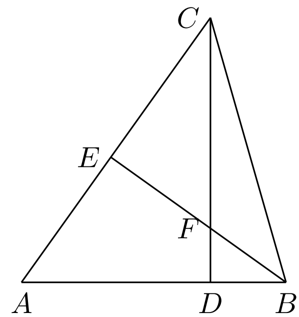


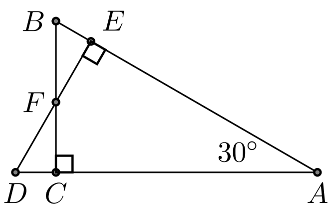
4. Boki trójkąta ABC na rysunku obok zostały przecięte prostymi prostopadłymi do jego boków, tworząc trójkąt PQR. Uzasadnij, że trójkąt PQR, jest podobny do trójkąta ABC i zapisz odpowiedni związek.

5. W trapezie $ABCD$ o podstawach AB i CD przekątne AC i BD przecinają się w punkcie O. Uzasadnij, że $\triangle ABO \sim \triangle CDO$.

6. Wyznacz miary kątów trójkąta równoramiennego, jeżeli dwusieczna kąta przy podstawie odcina trójkąt podobny do wyjściowego trójkąta.

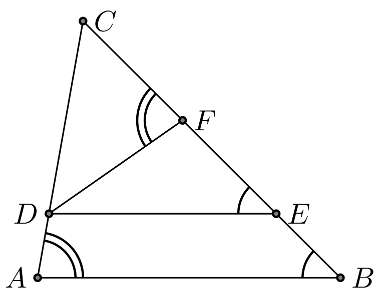
7. W trójkącie ABC na rysunku obok poprowadzono dwie wysokości. Które z trójkątów są podobne do trójkąta ADC? Zapisz odpowiednie związki.





8. Na rysunku obok mamy dwa trójkąty prostokątne o wspólnym wierzchołku A. Które trójkąty na tym rysunku są podobne do trójkąta ABC? Zapisz odpowiednie związki.

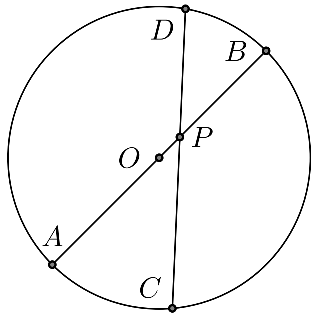
9. Na rysunku obok boki trójkąta ABC połączono odcinkami DE i DF tak, że $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DEC$ i $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DFC$. Wskaż wszystkie pary trójkątów podobnych występujących na tym rysunku, zapisując odpowiednie związki.



10. W trójkącie równoramiennym kąt przy wierzchołku ma 36°. Uzasadnij, że dwusieczna kąta przy podstawie dzieli ten trójkąt na dwa trójkąty równoramienne, przy czym jeden z nich jest podobny do wyjściowego trójkąta.

11. W trójkącie ostrokątnym ABC poprowadzono wysokości AD, BE i CF, które przecinają się w punkcie O. Sporządź rysunek, wskaż wszystkie pary trójkątów podobnych zapisując odpowiednie związki.

12. Dane jest koło $k(O, r)$ i punkt P należący do wnętrza koła. Przez punkt P prowadzimy średnicę AB i dowolną cięciwę CD. Wykaż, że $\triangle APC \sim \triangle BPD$.

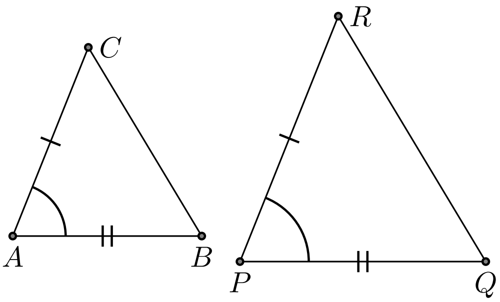


13. W trójkącie ABC wpisanym w okrąg dwusieczna kąta C przecina bok AB w punkcie D, zaś okrąg, w punkcie E. Pokaż, że $\triangle CDB \sim \triangle ADE \sim \triangle CAE$. Jaka jest druga trójka trójkątów podobnych? Zapisz odpowiednie związki.

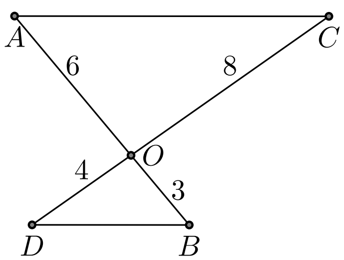
14. Dany jest okrąg i punkt P na zewnątrz tego okręgu. Przez punkt P prowadzimy dwie proste: jedną przez środek okręgu, która przecina go kolejno w punktach A i B, drugą przecinającą go kolejno w punktach C i D. Pokaż, że $\triangle PBC \sim \triangle PDA$ i $\triangle PAC \sim \triangle PDB$.

Obecnie sformułujemy dwa twierdzenia, które pozwalają rozstrzygnąć, czy dane dwa trójkąty są podobne. Są to tzw. *cechy podobieństwa trójkątów*.

CECHA **BKB**

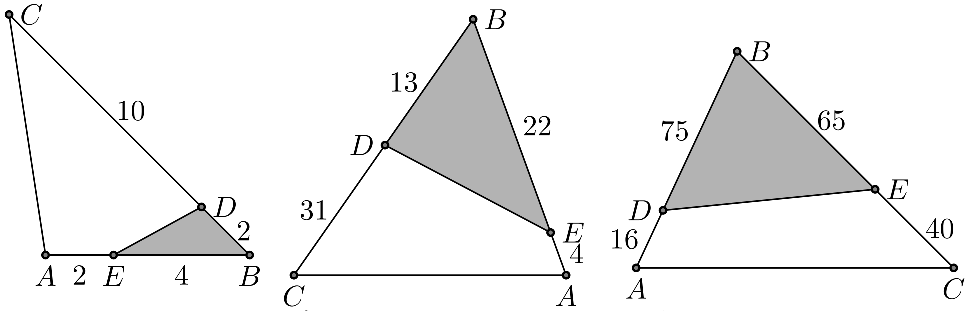


Jeżeli dla trójkątów ABC i PQR zachodzą równości: $\dfrac{AC}{PR} = \dfrac{AB}{PQ}$ oraz $\sphericalangle CAB = \sphericalangle RPQ$, to $\triangle ABC \sim \triangle PQR$.



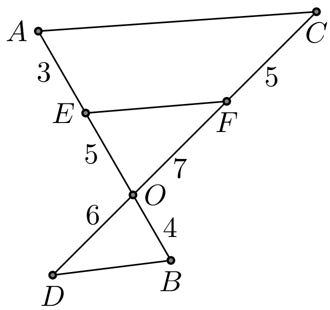
15. Na rysunku obok proste AB i CD przecinają się w punkcie O. Na podstawie cechy **BKB** podobieństwa oraz długości podanych odcinków uzasadnij, że trójkąty ACO i BDO są podobne. Uzasadnij następnie, że $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$.

16. Na podstawie cechy **BKB** podobieństwa trójkątów uzasadnij, że trójkąt ABC jest podobny do zacieniowanego trójkąta BDE. Zapisz odpowiedni związek. Na rysunku zaznaczaj odpowiadające sobie kąty taką samą ilością łuków. Pod rysunkiem wpisz skalę podobieństwa (większego do mniejszego).

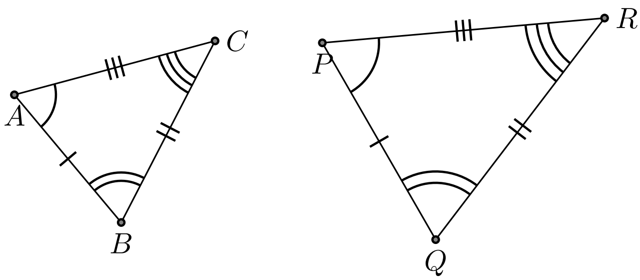


$\lambda =$ .... $\lambda =$ .... $\lambda =$ ....

17. Na rysunku obok proste AB i CD przecinają się w punkcie O. Na podstawie cechy **BKB** oraz długości podanych odcinków rozstrzygnij czy a) $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$, b) $\overline{EF} \parallel \overline{AC}$.



CECHA **BBB**



Jeżeli dla trójkątów ABC i PQR zachodzi

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR},$$

to

$$\triangle ABC \sim \triangle PQR.$$

Innymi słowy: jeżeli w dwóch trójkątach ilorazy długości boków jednego trójkąta przez długości odpowiadających im boków drugiego trójkąta są równe, to te trójkąty są podobne.

18. Dany jest trójkąt ABC. Punkty P, Q i R są środkami boków AB, BC i CA odpowiednio. Pokaż, że $\triangle ABC \sim \triangle QRP$.

19. W trójkącie prostokątnym ABC kąt C jest prosty, zaś $AC = 3$, $BC = 4$. W trójkącie PQR kąt R jest prosty, zaś $PQ = 25$, $PR = 15$. Korzystając z cechy **BBB** podobieństwa trójkątów, uzasadnij, że trójkąty ABC i PQR są podobne. Zapisz odpowiedni związek.

Obecnie sformułujemy trzy twierdzenia, które mówią nam jakie własności mają trójkąty podobne. Jedna z tych własności jest podstawą określenia tzw. *funkcji trygonometrycznych.*

TWIERDZENIE 1

Jeżeli $\triangle ABC \sim \triangle PQR$, to wówczas

1. $\dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{BC}{QR}$ czyli $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{PQ}{QR}$ czyli $AB \cdot QR = BC \cdot PQ$,
2. $\sphericalangle ABC = \sphericalangle PQR$.

Zauważmy, że jest to odwrócenie cechy **BKB** podobieństwa trójkątów. Prawdziwe jest również twierdzenie odwrotne do cechy **BBB** a mianowicie

TWIERDZENIE 2

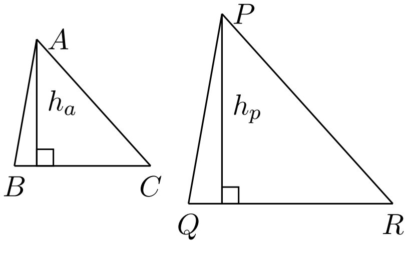
Jeżeli $\triangle ABC \sim \triangle PQR$, to $\dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{BC}{QR} = \dfrac{AC}{PR}$.

Twierdzenie to mówi, że stosunek długości odpowiadających sobie boków w dwóch trójkątach podobnych jest stały. Nazywamy go skalą podobieństwa tych trójkątów i oznaczamy zazwyczaj literą λ lub k.

TWIERDZENIE 3

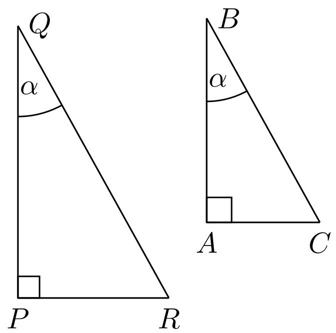
Jeżeli $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ i $\dfrac{AB}{PQ} = \lambda$, to stosunek długości jakichkolwiek dwóch odpowiadających sobie elementów w trójkątach ABC i PQR jest równy λ. Liczbę λ nazywamy *skalą podobieństwa tych trójkątów.*

PRZYKŁAD



Na rysunku obok $\triangle ABC \sim \triangle PQR$, przy czym $\dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{BC}{QR} = \dfrac{AC}{PR} = \lambda$, wobec tego $\dfrac{h_a}{h_p} = \lambda$, gdzie h_a i h_p są to wysokości wychodzące odpowiednio z wierzchołków A i P.

20. Cięciwy AB i CD okręgu przecinają się w punkcie P. Wykaż, że $|PB| \cdot |PA| = |PC| \cdot |PD|$, czyli, że $\frac{|PB|}{|PC|} = \frac{|PD|}{|PA|}$.



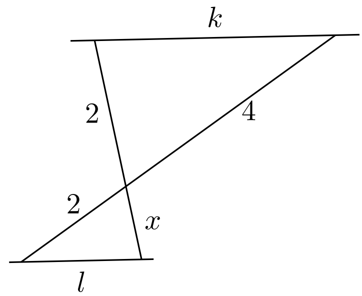
21. Trójkąty prostokątne ABC i PQR na rysunku obok są podobne. Wiedząc, że $|BA| = 4$, $|AC| = 3$, $|PR| = 12$, wyznacz $|PQ|$ i $|QR|$.

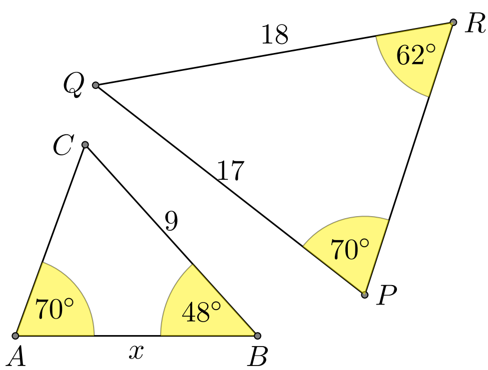
22. Cięciwy AB i CD okręgu przecinają się w punkcie P. Wiedząc, że $|AB| = 42$, $|AP| : |PB| = 3 : 4$ i $|CP| : |PD| = 1 : 3$, oblicz długość odcinka CD.

23.* W trójkącie równobocznym ABC przez punkt przecięcia środkowych poprowadzono prostą równoległą do boku AB. W jakim stosunku dzieli ona boki AC i BC?

24. Przekątne AC i BD trapezu $ABCD$ przecinają się w punkcie S w ten sposób, że $|AS| : |AC| = 3 : 4$. Wyznacz $|CD|$ jeżeli $|AB| = 12$.

25. Proste k i l na rysunku obok są równoległe. Wskaż równe kąty w obu trójkątach. Wyznacz długość odcinka x.



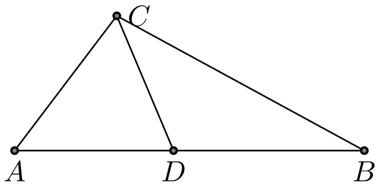


26. (matura 2016) Uzasadnij, że trójkąty ABC i PQR są podobne. Wyznacz długość odcinka AB.

27. Punkt P leży na zewnątrz okręgu. Prowadzimy przez ten punkt dwie proste. Jedna z nich przechodzi przez środek okręgu i przecina okrąg kolejno w punktach A, B, a druga przecina okrąg kolejno w punktach C, D. Uzasadnij, że $|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$.

28.* W trójkącie ostrokątnym ABC poprowadzono wysokości AA_1 i BB_1. Pokaż, że $A_1C \cdot BC = B_1C \cdot AC$, tym samym $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C$.

29. Dane są trójkąty ABC i $A'B'C'$, przy czym $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. Długości boków trójkąta ABC są równe 36, 63, 81. Obwód trójkąta $A'B'C'$ jest równy 140. Wyznacz skalę podobieństwa tych trójkątów oraz boki trójkąta $A'B'C'$.



30. Trójkąty ABC i CBD na rysunku obok są podobne, przy czym $\triangle ABC \sim \triangle CBD$. Boki trójkąta CBD mają długości $|CD| = 2$, $|DB| = 3$, $|BC| = 4$. Znajdź długości boków AB i AC. Jaka jest skala podobieństwa tych trójkątów?

31. W trapezie $ABCD$ o podstawach AB i CD przekątne AC i BD przecinają się w punkcie O, $|AB| = 9$, $|CD| = 6$. Wyznacz skalę podobieństwa trójkątów ABO i CDO.

32. Podstawy trapezu mają długości odpowiednio 9 i 15, a jego wysokość ma długość 12. Wyznacz odległość punktu przecięcia przekątnych tego trapezu od jednej i drugiej podstawy.

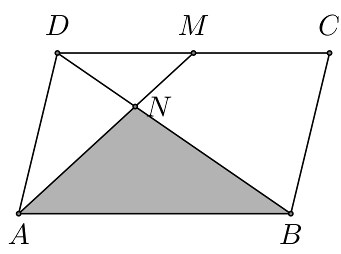
33.* W trójkącie prostokątnym ABC kąt C jest prosty, $|AC| = 15$ i $|BC| = 20$. Wysokość CD podzieliła trójkąt ABC na dwa trójkąty ACD i BCD. Każde dwa z tych trzech trójkątów są podobne. Wyznacz skalę podobieństwa dla każdej z tych trzech par trójkątów.

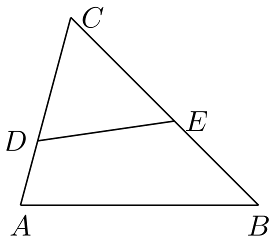
34. Podstawa AB trójkąta ABC ma długość 10. Punkty D i E leżą na ramionach trójkąta, przy czym $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$. Wysokość trójkąta CDE wychodząca z wierzchołka C ma długość 3, zaś wysokość trapezu jest równa 5. Wyznacz P_{ABDE}.

35. W trapezie $ABCD$ podstawa AB ma długość 12, a podstawa CD długość 8. Wysokość trapezu ma długość 6. Przekątne trapezu przecinają się w punkcie O. Wyznacz skalę podobieństwa trójkątów ABO i CDO. Oblicz odległość punktu przecięcia przekątnych tego trapezu od podstaw.

36.* W trapezie prostokątnym podstawy mają długości 12 i 4. Wysokość tego trapezu wynosi 6. Wyznacz odległość punktu, w którym przecinają się przekątne trapezu, od obu podstaw i od obu ramion.

37. Punkt M jest środkiem boku CD równoległoboku $ABCD$. Zbadaj jaką część pola równoległoboku stanowi pole trójkąta ABN.



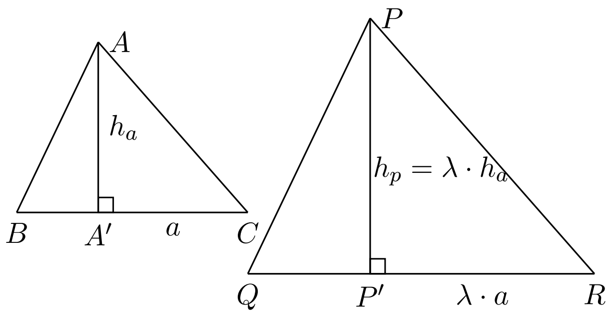


38. Na rysunku obok $\triangle ABC \sim \triangle EDC$. Wiedząc, że $|AB| = 9$, $|AD| = 2$, $|DC| = 6$, $|CE| = 5$, wyznacz $|BE|$ i $|DE|$. Wyznacz skalę podobieństwa tych trójkątów.

39. W równoległoboku $ABCD$ kąty $\sphericalangle B$ i $\sphericalangle D$ są rozwarte. Na prostych BC i CD obrano odpowiednio punkty M i N będące rzutami prostopadłymi punktu A na te proste. Pokaż, że $\sphericalangle ABC = \sphericalangle MAN$ i $\triangle MAN \sim \triangle ABC$.

40. W trójkąt ABC wpisano kwadrat $PQRS$ tak, że wierzchołki P i Q leżą na bokach AB i AC, a wierzchołki R i S na boku BC. Wyznacz długość boku kwadratu w zależności od a i h, gdzie h oznacza wysokość wychodzącą z wierzchołka A, zaś a oznacza długość boku BC.

41. W trójkącie prostokątnym ABC kąt C jest prosty, punkt N leży na boku AB, przy czym, $\overline{CN} \perp \overline{AB}$. Oznaczmy długości poszczególnych odcinków: $AC = b$, $BC = a$, $CN = h$, $AN = d$, $BN = e$, $AB = c$. Pokaż, że $b^2 = cd$, $a^2 = ce$, $h^2 = de$.



TWIERDZENIE 4
Jeżeli $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ i skala podobieństwa jest równa λ, tzn. $PQ = \lambda \cdot AB$, $h_p = \lambda \cdot h_a$, to wówczas $P_{PQR} = \lambda^2 \cdot P_{ABC}$.

Dowód:
Oznaczmy $BC = a$, $AA' = h_a$, wówczas $QR = \lambda a$, $PP' = \lambda h_a$. Mamy wówczas $P_{ABC} = \dfrac{1}{2}ah$, zaś $P_{PQR} = \dfrac{1}{2}\lambda a \cdot \lambda h_a = \lambda^2 \cdot \dfrac{1}{2}ah = \lambda^2 \cdot P_{ABC}$.

42. W trapezie $ABCD$ podstawa AB ma długość 3, a podstawa CD ma długość 2. Przekątne AC i BD przecinają się w punkcie E. Wyznacz stosunek pól trójkątówABE i CDE,

43. Skala podobieństwa trójkąta ABC do trójkąta XYZ jest równa $2\frac{1}{2} : 1$ (czyli $\lambda = \frac{5}{2}$) Pole trójkąta XYZ jest równe 50. Wyznacz pole trójkąta ABC.

44. Trójkąt ABC jest podobny do trójkąta XYZ. Pole trójkąta ABC jest równe $12\frac{1}{2}$, a pole trójkąta XYZ jest równe 32. Najdłuższy bok w trójkącie ABC jest równy 5. Jaka jest skala podobieństwa tych trójkątów? Jaka jest wobec tego długość najdłuższego boku w trójkącie XYZ.

45. Trójkąty ABC i XYZ są podobne. Najkrótszy bok w trójkącie ABC ma długość 6, a w trójkącie XYZ 15. Pole trójkąta ABC jest równe 12. Wyznacz pole trójkąta XYZ.

46. Patryk porównał dwa plany swojej miejscowości. Jeden z nich był sporządzony w skali 1:5 000, a drugi 1:20 000. Na pierwszym odległość mierzona w linii prostej między budką telefoniczną koło jego szkoły a przystankiem autobusowym przy przy jego domu jest o 4,5 cm większa, niż na drugim planie. Jak jest rzeczywista odległość w linii prostej między tymi miejscami?

47. Działka budowlana o powierzchni 16 arów na planie ma powierzchnię $1{,}6 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^2$. Jaka jest skala tego planu?

48. Prostokąt P_1 ma pole $5\,\mathrm{cm}^2$ i jest podobny do prostokąta P. Prostokąt P ma wymiary $5\,\mathrm{cm}$ i $9\,\mathrm{cm}$. Jaka jest skala podobieństwa prostokąta P_1 do P?

49. Przez punkt D leżący na boku AC trójkąta ABC poprowadzono proste DE i DF, $E \in \overline{AB}$, $F \in \overline{BC}$. równoległe do pozostałych boków trójkąta. Pole trójkąta AED wynosi 1, a pole trójkąta CDF jest równe 4. Znajdź pole trójkąta ABC.

50. W trapezie $ABCD$ podstawa AB ma długość a, podstawa CD ma długość b. Przekątne AC i BD przecinają się w punkcie O. Wyznacz skalę podobieństwa trójkątów ABO i CDO.

51. Przez punkt przecięcia przekątnych trapezu prowadzimy prostą równoległą do jego podstaw. Prosta ta przecina ramiona trapezu w punktach E i F. Znajdź długość odcinka EF, wiedząc, że podstawy trapezu mają długości a i b.

52. W trapezie $ABCD$ podstawa AB ma długość 3, a podstawa CD ma długość 2. Przekątne AC i BD przecinają się w punkcie E. Wyznacz stosunek pól trójkątów

a) $\triangle ABE$ i $\triangle CDE$,

b) $\triangle AED$ i $\triangle ABE$.

DEFINICJA
Dwa wielokąty nazywamy podobnymi jeżeli odpowiadające sobie kąty w tych wielokątach są równe, a stosunek długości odpowiadających sobie boków jest równy stałej wielkości λ. Liczbę λ nazywamy *skala podobieństwa tych wielokątów.*

TWIERDZENIE 5 (o wielokątach podobnych)
Jeżeli dwa wielokąty, na przykład pięciokąty $ABCDE$ i $PQRST$ są podobne i ich skala podobieństwa jest równa λ, tzn. $\dfrac{PQ}{AB} = \dfrac{QR}{BC} = \dfrac{RS}{CD} = \dfrac{ST}{DE} = \dfrac{PT}{AE} = \lambda$, to wówczas

1. stosunek dwóch odpowiadających sobie wielkości w tych wielokątach jest równy λ,

2. $P_{PQRST} = \lambda^2 P_{ABCDE}$.

Wskazówki i odpowiedzi.

1. $\triangle ACD \sim \triangle ABC \sim \triangle CBD$

4. $\triangle ABC \sim \triangle QRP$

6. kąty przy podstawie maja po $72°$, kąt przy wierzchołku ma $36°$

7. $\triangle ADC \sim \triangle AEB \sim \triangle FDB \sim \triangle FEC$

8. $\triangle ABC \sim \triangle ADE \sim \triangle FDC \sim FBE$

9. $\triangle ABC \sim \triangle DEC \sim \triangle FDC$

11. $\triangle BAE \sim \triangle BOF \sim \triangle COE \sim \triangle CAF$,

$\triangle CBF \sim \triangle COD \sim \triangle AOF \sim \triangle ABD$,

$\triangle AOE \sim \triangle ACD \sim \triangle BOD \sim \triangle BCE$.

13. $\triangle CAD \sim \triangle BED \sim \triangle CEB$

16. a) $\frac{EB}{BC} = \frac{DB}{AB} = \frac{1}{3}$, $\triangle EBD \sim \triangle ABC$, $\lambda = 3$

b) $\frac{BE}{BC} = \frac{DB}{AB} = \frac{1}{2}$, $\triangle BED \sim \triangle ACB$, $\lambda = 2$

c) $\triangle ABC \sim \triangle EBD$, $\lambda = \frac{7}{5}$

17. a) tak, b) nie

19. $\frac{PR}{AC} = \frac{RQ}{CB} = \frac{PQ}{AB} = 5$ zatem $\triangle ABC \sim \triangle PQR$

21. $|PQ| = 16$, $|QR| = 20$

22. $|CD| = 48$

23. wsk. co trzeba dorysować? 1 : 2

24. $|CD| = 4$

25. $x = 1.$

26. $AB = 8\frac{1}{2}$

29. $\lambda = \frac{9}{7}$, $|A'B'| = 28$, $|B'C'| = 49$, $|A'C'| = 63$

30. $|AB| = \frac{16}{3}$, $|AC| = \frac{8}{3}$, $\lambda = \frac{3}{4}$.

31. $\lambda = \frac{3}{2}$

32. $d_1 = 4\frac{1}{2}$, $d_2 = 7\frac{1}{2}$

33. $\triangle ABC/\triangle CBD = \frac{5}{4}$, $\triangle ABC/\triangle CDA = \frac{5}{3}$, $\triangle CBD/\triangle CDA = \frac{4}{3}$

34. $P_{ABDE} = 34\frac{3}{8}$

35. $\lambda = \frac{3}{2}$, $d_1 = 2\frac{2}{5}$, $d_2 = 3\frac{3}{5}$

36. od podstaw $1\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{2}$, od ramion 3, $\frac{9}{5}$

37. $P_{ABN} = \frac{1}{3}P_{ABCD}$

38. $|BE| = \frac{23}{5}$, $|DE| = \frac{45}{8}$, $\lambda = \frac{8}{5}$

40. $|PQ| = \frac{ah}{a+h}$

42. $\frac{9}{4}$

43. $P_{ABC} = 8$

44. $\lambda = \frac{8}{5}$, najdłuższy bok w tr. XYZ ma długość 8.

45. $P_{XYZ} = 75$

46. 300 m

47. $\lambda = 1 : 1000$

48. $\lambda = 3$

49. $P = 9$,

50. $\lambda = \frac{a}{b}$

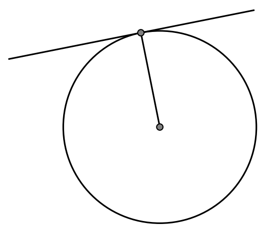
51. $\frac{2ab}{a+b}$

52. a) $\frac{9}{4}$, b) $\frac{2}{3}$

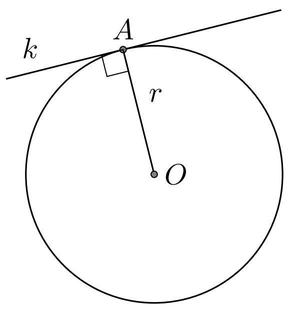
Rozdział 3

STYCZNA DO OKRĘGU

DEFINICJA Jeżeli prosta i okrąg mają dokładnie jeden punkt wspólny, to tę prostą nazywamy *styczną do okręgu*, a ich jedyny punkt wspólny nazywamy *punktem styczności*. Odcinek łączący środek okręgu z dowolnym punktem okręgu nazywamy *promieniem*.



Posługując się pojęciem stycznej do okręgu będziemy wielokrotnie korzystać nie z definicji stycznej tylko z jej własności, które wynikają z definicji. Własności te wyrażamy zazwyczaj w postaci następujących dwóch twierdzeń:



TWIERDZENIE Jeżeli prosta k jest styczna do okręgu, to jest ona prostopadła do promienia tego okręgu wychodzącego z punktu styczności.

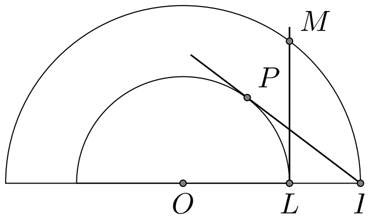
TWIERDZENIE Jeżeli prosta k jest prostopadła do promienia OA w okręgu o środku w punkcie O i przechodzi przez punkt A leżący na tym okręgu, to jest ona styczna do tego okręgu.

1. Prosta MP jest styczna do okręgu $\mathcal{K}(O, 7)$ w punkcie P. Odległość od punktu M do punktu O wynosi 25. Wyznacz $|MP|$.

2. Punkt A leży na zewnątrz okręgu $\mathcal{K}(C, 15)$. Prosta AB jest styczna do tego okręgu w punkcie B. $P_{ABC} = 150$. Wyznacz $|AB|$ i $|AC|$.

3. Niech prosta l przechodząca przez punkt M będzie styczna do okręgu $\mathcal{K}(O, 10)$ w punkcie P i niech $|MP| = 24$. Półprosta MO przecina ten okrąg kolejno w punktach Q i R. Wyznacz $|MR|$.

4. Prosta l przechodząca przez punkt M jest styczna do okręgu $\mathcal{K}(O, 4)$ w punkcie P, zaś prosta MO przecina okrąg $\mathcal{K}$ kolejno w punktach Q i R. Odcinek MP jest o 3 dłuższy od odcinka MQ. Wyznacz kolejno:
a) MP, b) P_{MOP}, c) $d(P, l_{MO})$.



5. Na rysunku obok mamy dwa półokręgi o wspólnym środku O. Promień mniejszego półokręgu ma długość 3, a większego 5. Proste LM i PI są styczne do mniejszego półokręgu. Wyznacz $|LM|$ i $|PI|$.

6. Dane są dwa okręgi współśrodkowe o promieniach 15 i 9. Jaka jest długość cięciwy większego okręgu, która jest styczna do mniejszego okręgu.

7. Dany jest kąt prosty o wierzchołku P. Okrąg styczny w punkcie M do jednego ramienia tego kąta przecina drugie ramię w punktach A i B. Oblicz promień tego okręgu wiedząc, że $|PM| = 24$, $|AB| = 20$.

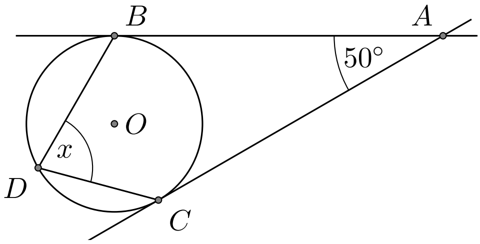
8. Niech M będzie punktem leżącym na zewnątrz okręgu o środku w punkcie O. Prosta l przechodzi przez punkt M i jest styczna do okręgu w punkcie P. Druga prosta k przechodzi przez punkt M i przez środek okręgu. Przecina ona okrąg w punktach Q i R. Pokaż, że $|MP|^2 = |MQ| \cdot |MR|$.

9. Kąt utworzony przez dwa promienie okręgu wynosi $130°$. Wyznacz kąt ostry, który tworzą styczne poprowadzone przez końce promieni.

10. Z punktu zewnętrznego A poprowadzono styczne AB i AC do okręgu o środku w punkcie O, przy czym B i C są punktami styczności. Kąt pomiędzy stycznymi ma $35°$. Jaki jest kąt wypukły pomiędzy promieniami poprowadzonymi ze środka okręgu do punktów styczności?

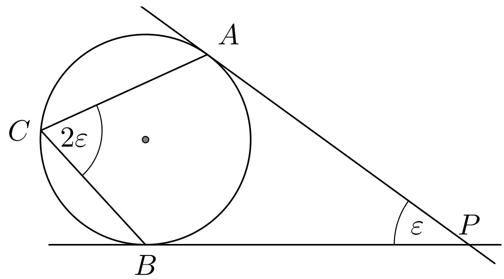
11. Do danego okręgu poprowadzono styczną tak, że końce A i B średnicy AB tego okręgu są odległe od stycznej o 25 cm i 15 cm. Wyznacz długość średnicy AB.

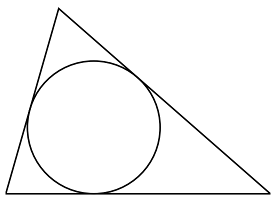
12. Niech l będzie prostą styczną do pewnego okręgu, a odcinek AB dowolną jego średnicą. Oznaczmy przez A' i B' rzuty prostokątne punktów A i B na prostą l. Udowodnij, że $|AB| = |AA'| + |BB'|$.



13. Proste AB i AC na rysunku obok są styczne do okręgu. Wyznacz miarę kąta BDC.

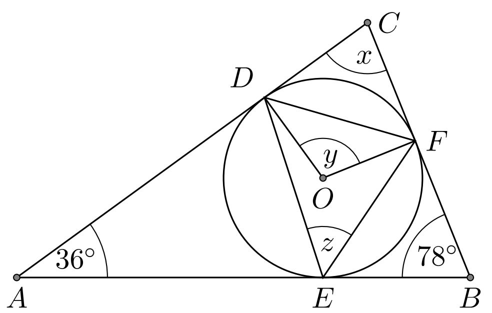
14. Na rysunku obok z punktu P wychodzą dwie proste styczne do okręgu w punktach A i B. Punkt C leży na okręgu. Wyznacz $\boldsymbol{\varepsilon}$.

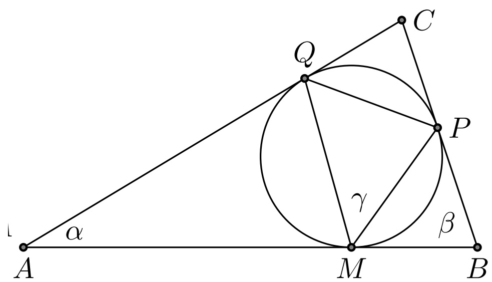




DEFINICJA Okrąg styczny do wszystkich trzech boków trójkąta nazywamy **okręgiem wpisanym** (w ten trójkąt).

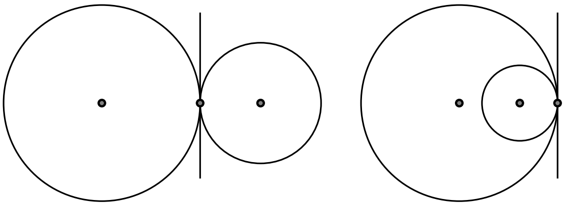
15. Okrąg na rysunku obok wpisany jest w trójkąt ABC, przy czym D, E, F są punktami styczności, zaś punkt O jest środkiem okręgu. Wyznacz kolejno kąty x, y, z.



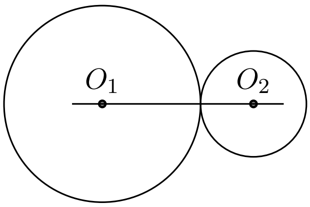


16. Trójkąt ABC na rysunku obok jest opisany na okręgu. Punkty P, Q, M są punktami styczności. Wyznacz γ w zależności od α i β.

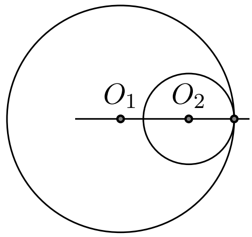
DEFINICJA Dwa okręgi nazywamy stycznymi gdy mają one dokładnie jeden punkt wspólny. Mają one wówczas wspólną styczną przechodzącą przez ich punkt styczności. Okręgi mogą być styczne zewnętrznie lub wewnętrznie.



Przykład pary okręgów zewnętrznie stycznych oraz pary okręgów wewnętrznie stycznych wraz z ich wspólną styczną.



TWIERDZENIE Jeżeli dwa okręgi są styczne zewnętrznie lub wewnętrznie, to ich środki oraz punkt styczności leżą na jednej prostej.



WNIOSEK
Jeżeli okręgi $\mathcal{K}(O_1, r_1)$ i $\mathcal{K}(O_2, r_2)$ są zewnętrznie styczne, to

$$|O_1O_2| = r_1 + r_2,$$

zaś gdy są wewnętrznie styczne, to

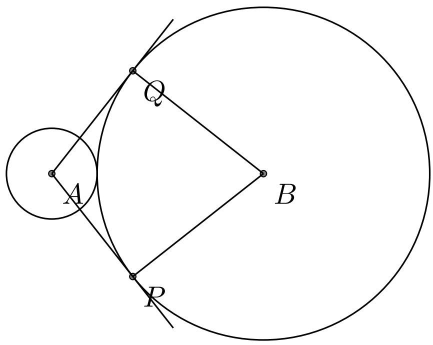
$$|O_1O_2| = \begin{cases} r_1 - r_2 & \text{gdy} \quad r_1 > r_2 \\ r_2 - r_1 & \text{gdy} \quad r_2 > r_1 \end{cases}$$

17. Trzy okręgi o promieniu 1 są styczne zewnętrznie, każdy do dwóch pozostałych. Wyznacz boki i kąty trójkąta utworzonego przez punkty styczności oraz pole trójkąta wyznaczonego przez środki okręgów.

18. Środki trzech okręgów parami zewnętrznie stycznych są wierzchołkami trójkąta o bokach długości 3, 4, 5. Wyznacz długości promieni okręgów.

19. Okręgi $\mathcal{K}(B, r_1)$ i $\mathcal{K}(C, r_2)$ są zewnętrznie styczne, a jednocześnie każdy z nich jest styczny wewnętrznie do okręgu $\mathcal{K}(A, r_3)$. Oblicz długości promieni r_1, r_2 i r_3, wiedząc, że $|AB| = 4$, $|BC| = 5$ i $|AC| = 3$.

20. Okręgi $\mathcal{K}_1(O_1, r_1)$ i $\mathcal{K}_2(O_2, r_2)$ są styczne zewnętrznie, a równocześnie styczne wewnętrznie do okręgu $\mathcal{K}_3(O_3, r_3)$. Obwód trójkąta $O_1O_2O_3$ jest równy 26. Wyznacz r_3.



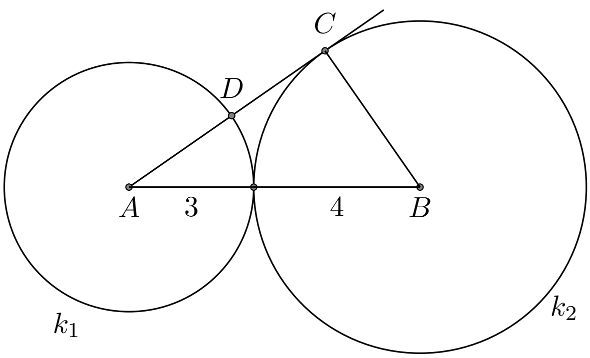
21. Okrąg o środku w punkcie A ma promień długości 3, zaś styczny do niego okrąg o środku w punkcie B ma promień długości 12. Punkty P i Q leżą na okręgu i są punktami styczności. Wyznacz pole czworokąta $APBQ$.

22. Dany jest trapez o ramionach długości 24 i 32. Ramiona trapezu są średnicami okręgów, które są zewnętrznie styczne. Wyznacz sumę długości podstaw trapezu.

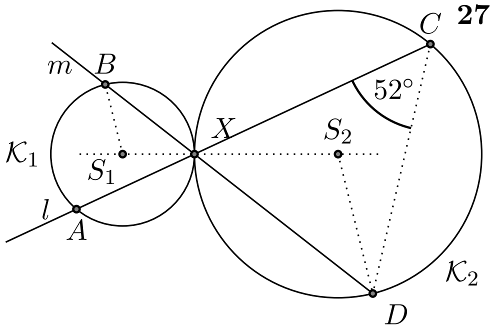
23. Okręgi $\mathcal{K}_1$ i $\mathcal{K}_2$ o środkach S_1 i S_2 są styczne zewnętrznie w punkcie B. Przez punkt B prowadzimy prostą l, która przecina okrąg $\mathcal{K}_1$ w punkcie A, zaś okrąg $\mathcal{K}_2$ w punkcie C, tak że $\sphericalangle BCS_2 = 25°$. Wyznacz miarę kąta AS_1B. Co możesz powiedzieć o prostych CS_2 i AS_1?

24. Trzy okręgi o promieniu r są styczne zewnętrznie, każdy do dwóch pozostałych. Wyznacz boki i kąty trójkąta utworzonego przez punkty styczności oraz pole trójkąta wyznaczonego przez środki okręgów.

25.* Dwa okręgi $\mathcal{K}_1$ i $\mathcal{K}_2$ o środkach S_1 i S_2 są styczne a) zewnętrznie b) wewnętrznie w punkcie B. Przez punkt B prowadzimy prostą różną od prostej $l_{S_1S_2}$, która przecina okrąg $\mathcal{K}_1$ w punkcie A_1, zaś okrąg $\mathcal{K}_2$ w punkcie A_2. Uzasadnij, że $\overline{A_1S_1} \parallel \overline{A_2S_2}$.



26. (matura 2016) Okręgi $k_1(A,3)$ i $k_2(B,4)$ są styczne. Prosta AC jest styczna do okręgu k_2 w punkcie C, zaś D jest punktem wspólnym okręgu k_1 i tej stycznej. Wyznacz CD.



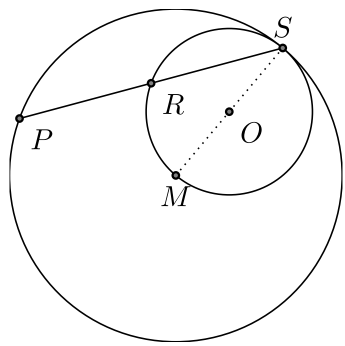
27. Okręgi $\mathcal{K}_1$ i $\mathcal{K}_2$ na rysunku obok są styczne zewnętrznie w punkcie X. Przez punkt X prowadzimy proste l i m, które przecinają okręgi we wskazanych punktach. Wiadomo, że $\sphericalangle XCD = 52°$. Wyznacz kolejno $\sphericalangle XDS_2$, $\sphericalangle XBS_1$, $\sphericalangle BS_1X$, $\sphericalangle BAX$. Co możesz powiedzieć o czworokącie $ABCD$?

28. Okręgi $\mathcal{K}_1$ i $\mathcal{K}_2$ są styczne a) zewnętrznie b) wewnętrznie w punkcie X. Przez punkt X prowadzimy proste m i n. Prosta m przecina okrąg $\mathcal{K}_1$ w punkcie A, zaś okrąg $\mathcal{K}_2$ w punkcie B. Prosta n przecina $\mathcal{K}_1$ w punkcie C, zaś $\mathcal{K}_2$ w punkcie D. Pokaż, że

a) $l_{AC} \parallel l_{BD}$;

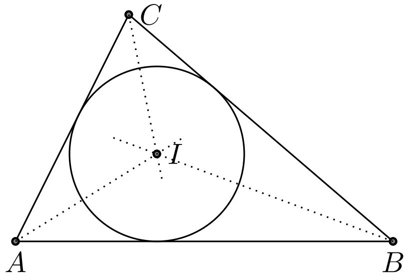
b) trójkąty XAC i XBD mają takie same kąty.

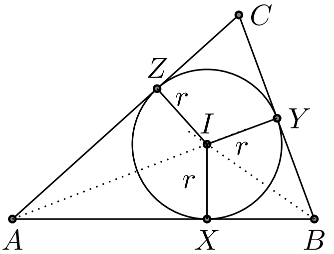
29. Na rysunku obok okrąg k jest wewnętrznie styczny do większego okręgu. Punkt M jest środkiem większego okręgu, a punkt O – mniejszego. Odcinek SM jest średnicą okręgu k, zaś SP jest dowolną cięciwą w zewnętrznym okręgu, R jest punktem przecięcia okręgu k i cięciwy SP. Uzasadnij, że okrąg k dzieli cięciwę SP na połowy, czyli że $|PR| = |SR|$.



Z twierdzenia o dwusiecznej kąta wypukłego wiemy, że punkt leży na dwusiecznej kąta **wtedy i tylko wtedy gdy** jest on równo odległy od obu ramion kąta. Z tego wynika następujące twierdzenie:

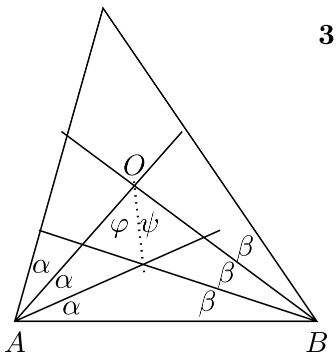
TWIERDZENIE Wszystkie trzy dwusieczne kątów trójkąta przecinają się w jednym punkcie. Punkt ten jest tak samo oddalony od każdego boku czyli jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt.





Dowód: Dla dowodu poprowadźmy dwusieczne kątów CAB i CBA. Te dwusieczne przecinają się w punkcie I. Uzasadnimy, że dwusieczna kąta ACB też przechodzi przez ten punkt, czyli że wszystkie trzy dwusieczne kątów trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

Zauważmy, że
$|IZ| = |IX|$, bo punkt I leży na dwusiecznej kąta $\sphericalangle CAB$
$|IX| = |IY|$, bo punkt I leży na dwusiecznej kąta $\sphericalangle ABC$
z tych równości wynika, że
$|IZ| = |IY|$, a to oznacza, że punkt I leży na dwusiecznej kąta $\sphericalangle ACB$. Czyli dwusieczne wszystkich trzech kątów trójkąta przecinają się w jednym punkcie. Z tego wynika, że odcinki IX, IY, IZ są wysokościami trójkątów ABI, BCI, ACI.



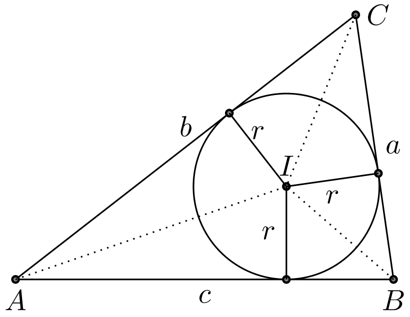
30. Na rysunku obok dwie półproste wychodzące z wierzchołka A dzielą kąt A na trzy równe części. Podobnie dwie półproste wychodzące z wierzchołka B dzielą kąt B na trzy równe części. Natomiast wszystkie cztery półproste przecinając się tworzą czworokąt. Pokaż, że wskazana na rysunku przerywaną linią przekątna tego czworokąta jest dwusieczną kąta $\sphericalangle AOB$ tzn, że $\varphi = \psi$.

31. Punkt O jest wierzchołkiem kąta (wypukłego). Punkty B i C leżą na jednym ramieniu kąta, zaś punkty A i D na drugim ramieniu, przy czym $|OB| = |OA|$, $|OC| = |OD|$. Niech E będzie punktem przecięcia prostych AC i BD. Uzasadnij, że punkt E leży na dwusiecznej kąta OCD.

32. Trójkąt ABC wpisany jest w okrąg, zaś punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Półprosta AI przecina okrąg w punkcie D. Uzasadnij, że $DB = DI = DC$.

TWIERDZENIE Pole trójkąta o bokach długości a, b, c i promieniu okręgu wpisanego długości r jest równe

$$P = \underbrace{\frac{1}{2}(a+b+c)}_{\text{połowa obwodu}} \cdot r$$



czyli krótko mówiąc: pole trójkąta jest równe iloczynowi połowy obwodu tego trójkąta przez promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

Dowód

Zauważ, że promienie łączące środek okręgu z punktami styczności są wysokościami w trójkątach BCI, CAI, ABI wychodzącymi z wierzchołka I w każdym z trójkątów, i wobec tego

$$\begin{aligned} P_{ABC} &= P_{BCI} + P_{CAI} + P_{ABI} \\ &= \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr \\ &= \frac{1}{2}(a+b+c) \cdot r \end{aligned}$$

UWAGA bardzo często połowę obwodu trójkąta oznacza się literą p, wówczas wzór na pole trójkąta zapisuje się krócej

$$P = p \cdot r.$$

33. W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długości 3 i 4. Wyznacz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

34. Dany jest trójkąt prostokątny ABC. Punkt C jest wierzchołkiem kąta prostego, $|AC| = 3$, $|BC| = 4$. Dwusieczna kąta BAC dzieli trójkąt ABC na dwa trójkąty: ACD i ABD. Wyznacz promień okręgu wpisanego w trójkąt ACD i w trójkąt ADB.

35. W trójkąt równoboczny o boku długości $2\sqrt{3}$ wpisano okrąg. Wyznacz długość promienia tego okręgu.

36. Wyznacz promień okręgu wpisanego w trójkąt równoramienny o podstawie $2d$ i ramieniu długości l.

37. W trójkąt równoboczny o boku długości a wpisano okrąg. Wyznacz długość promienia tego okręgu.

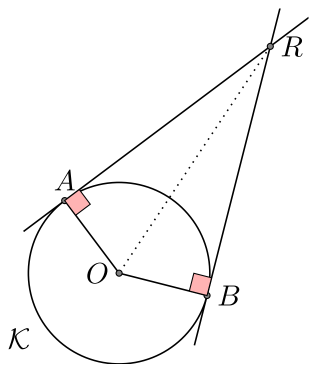
38. Dany jest trójkąt równoramienny o ramionach długości 13 i podstawie długości 10. Wyznacz długość promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.

39.* Dany jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 5 i 12. Okrąg $\mathcal{K}(P, 1)$, jest styczny do obu przyprostokątnych. Wyznacz odległość punktu P od przeciwprostokątnej.

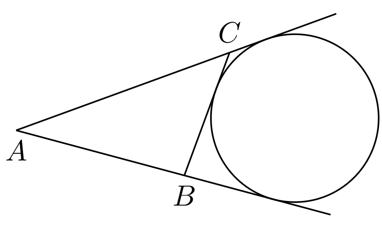
40. Okrąg $\mathcal{K}(O, R)$ styczny jest do przyprostokątnych trójkąta prostokątnego ABC. Długości przyprostokątnych są równe 6 i 8. Punkt O leży na przeciwprostokątnej AB tego trójkąta. Wyznacz R.

Ma miejsce następujące twierdzenie zwane *zasadniczym twierdzeniem planimetrii*

TWIERDZENIE Jeżeli punkt R leży poza okręgiem, to wówczas przez ten punkt przechodzą dokładnie dwie styczne do tego okręgu, a przy tym odcinki zawarte między punktem R a punktami styczności z okręgiem, są równej długości, (czyli trójkąt ARB jest równoramienny). Na rysunku obok tymi odcinkami są AR i BR.

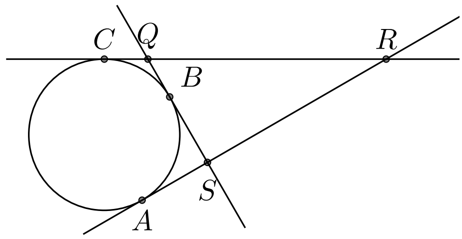


Dowód:
Zauważ, że trójkąty ARO i BRO są prostokątne. Mają one wspólną przeciwprostokątną RO, mają tej samej długości przyprostokątne AO i BO bo są one promieniami tego okręgu. Wobec tego z twierdzenia Pitagorasa wynika, że pozostałe dwie przyprostokątne czyli RA i RB też są tej samej długości.
Dla wykorzystania tego twierdzenia wprowadzimy dodatkowe pojęcie, a mianowicie:



DEFINICJA Okrąg styczny do jednego z boków trójkąta oraz styczny do przedłużeń dwóch pozostałych boków nazywamy *okręgiem dopisanym* do trójkąta.

41. Na rysunku obok wszystkie trzy proste są styczne do okręgu. Punkty A, B i C są punktami styczności, $|RA| = 7$. Powiedz jaki jest wobec tego obwód trójkąta QRS.



42. Okrąg $\mathcal{K}$ jest okręgiem dopisanym do trójkąta ABC stycznym w punkcie $D \in \overline{AB}$. Pokaż, że długość odcinka od wierzchołka C do punktu styczności zawartego w przedłużeniu boku AC jest równa połowie obwodu tego trójkąta.

$\boxed{! \Rightarrow}$

43. Wyznacz promień okręgu dopisanego do trójkąta równoramiennego prostokątnego o ramionach długości a. Rozpatrz dwa przypadki.

44. W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych ma długość 12, zaś promień okręgu wpisanego jest równy 2. Wyznacz długości pozostałych boków w tym trójkącie.

45. Boki trójkąta mają długości 13, 20 21. Policz na jakiej długości odcinki dzielą boki tego trójkąta punkty styczności okręgu wpisanego w ten trójkąt.

46. Okręgi $\mathcal{K}_1$ o środku S_1 i $\mathcal{K}_2$ o środku S_2 są zewnętrznie styczne w punkcie B. Przez ten punkt przechodzi prosta t styczna do obu okręgów. Druga prosta s jest styczna do okręgu $\mathcal{K}_1$ w punkcie P a do okręgu $\mathcal{K}_2$ w punkcie Q. Pokaż, że

a) punkt A przecięcia obu stycznych dzieli odcinek PQ na połowy.

b) $\sphericalangle PBQ = 90°$.

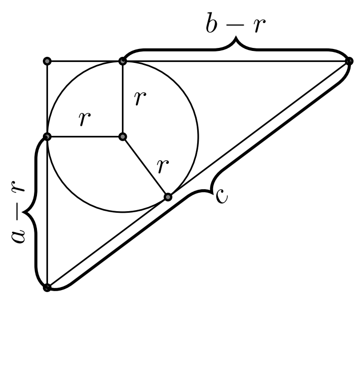
c) $\sphericalangle S_1AS_2 = 90°$.

47. Oznaczmy przez a i b długości przyprostokątnych w trójkącie prostokątnym zaś przez c długość przeciwprostokątnej. Pokaż, że wówczas promień okręgu wpisanego w ten trójkąt ma długość

$\boxed{! \Rightarrow}$

$$r = \frac{a+b-c}{2}.$$

Spójrz na rysunek i napisz odpowiednią równość.



48. W trójkącie prostokątnym suma długości przyprostokątnych równa jest $\sqrt{18}$, a przeciwprostokątna ma długość 4. Oblicz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt oraz pole trójkąta .

49. Przekątne w rombie mają długości 8 i 6. Dzielą one romb na cztery trójkąty prostokątne. Oblicz pole czworokąta, którego wierzchołkami są środki okręgów wpisanych w te cztery trójkąty.

50. W trójkącie prostokątnym wpisanym w okrąg o średnicy $5\sqrt{5}$ jedna z przyprostokątnych jest 2 razy dłuższa od drugiej przyprostokątnej. Oblicz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

51. Wysokość h w dowolnym trójkącie prostokątnym poprowadzona do przeciwprostokątnej dzieli go na dwa trójkąty prostokątne. Oznaczmy, przez r_1 i r_2 promienie okręgów wpisanych w te trójkąty, a przez r_3 promień okręgu wpisanego w trójkąt wyjściowy. Pokaż, że $r_1 + r_2 + r_3 = h$.

52.* W trójkącie prostokątnym środkowa przeciwprostokątnej jest dwa razy dłuższa od wysokości opuszczonej na przeciwprostokątną. Iloczyn długości przeciwprostokątnej, środkowej tej przeciwprostokątnej i wysokości opuszczonej na przeciwprostokątną równy jest 27. Wyznacz promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny utworzony przez środkową, wysokość wychodzące z wierzchołka kąta prostego i przeciwprostokątną wyjściowego trójkąta.

53. Promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym równy jest 12,5. Promień okręgu wpisanego w ten trójkąt równy jest 4. Oblicz

a) sumę długości przyprostokątnych,

b) pole trójkąta

54.* W trójkącie równoramiennym ABC mamy $|AC| = |BC| = 10$. Wysokość CD dzieli ten trójkąt na dwa trójkąty prostokątne. Promienie okręgów wpisanych w te dwa trójkąty mają długość 2.

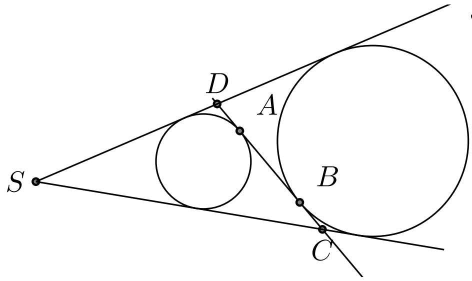
a) Wyznacz pole jednego z tych trójkątów prostokątnych.

b) Wyznacz długość wysokości wychodzącej z wierzchołka B.

55.* Pokaż, że jeżeli istnieje okrąg styczny do przedłużeń **czterech boków czworokąta wklęsłego**, to różnice długości przeciwległych boków tego czworokąta są równe.

56. Wyznacz promień okręgu dopisanego do trójkąta równobocznego o boku długości a. Wsk. spróbuj to zrobić nie stosując twierdzenia Pitagorasa. Zrób tylko rysunek, dobrze nań popatrz i napisz odpowiedź.

57. Dany jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości a, b i przeciwprostokątnej c. Wyznacz promień okręgu dopisanego do tego trójkąta
a) stycznego zewnętrznie do przeciwprostokątnej c
b) stycznego zewnętrznie do krótszej przyprostokątnej a



58. Dwa rozłączne okręgi na rysunku obok wpisane są w kąt ostry o wierzchołku S. Prowadzimy wspólną styczną do tych okręgów. Punkty styczności oznaczamy A i B. Punkty przecięcia stycznej z ramionami kąta oznaczamy C i D. Pokaż, że $|AC| = |BD|$.

59. W trójkącie ABC wpisanym w okrąg $|AC| = 20$, $|BC| = 15$ zaś AB jest średnicą tego okręgu. Wysokość CD podzieliła trójkąt ABC na trójkąty ACD i BCD. W trójkąt ACD wpisano okrąg o środku w punkcie O_1, który jest styczny do boku AC w punkcie E, zaś w trójkąt BCD wpisano okrąg o środku w punkcie O_2 styczny do boku BC w punkcie F. Wyznacz

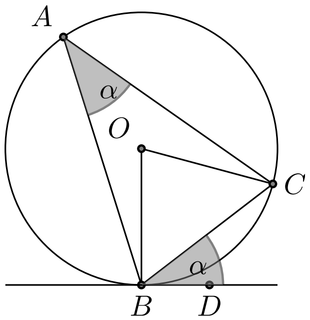
a) O_1O_2;

b) $P_{EO_1O_2FC}$ (wcale nie jest trudne, tylko nie robić na żywioł!)

60. Prostokąt $ABCD$, w którym $|AB| = 20$, $|BC| = 15$, dzielimy na dwa trójkąty prostokątne ABC i ADC. W trójkąt ABC wpisujemy okrąg o środku w punkcie O_1, zaś w trójkąt ADC wpisujemy okrąg o środku w punkcie O_2. Wyznacz: a) O_1O_2 b) $P_{AO_1O_2}$ c) promień okręgu wpisanego w trójkąt AO_1O_2

61. W czworokącie wpisanym w okrąg punkty A, B, C i D są jego kolejnymi wierzchołkami. Długości boków czworokąta są następujące: $|AB| = 24$, $|BC| = 20$, $|CD| = 15$ i $|AD| = 7$. Jedna z przekątnych czworokąta dzieli go na dwa trójkąty prostokątne. W każdy z tych trójkątów wpisujemy okrąg. Wyznacz promienie okręgów wpisanych w trójkąty ABD i BDC oraz odległość d pomiędzy środkami tych okręgów.

Twierdzenie o kącie między styczną a cięciwą.

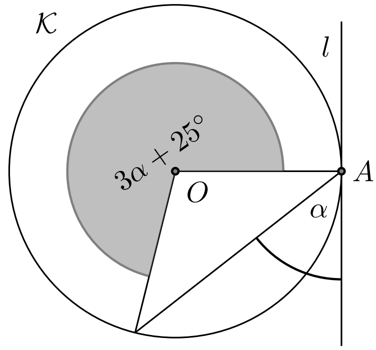


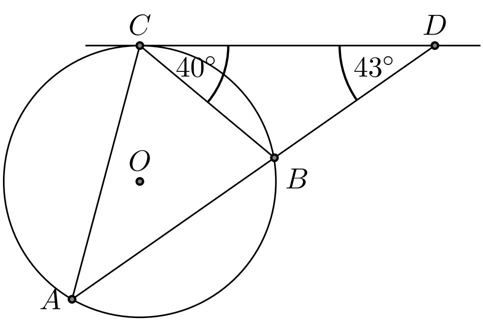
TWIERDZENIE Kąt, jaki tworzy styczna do okręgu z cięciwą tego okręgu wychodzącą z punktu styczności jest taki sam jak kąt wpisany w ten okrąg oparty na łuku, którego końcami są końce tej cięciwy, a wierzchołek leży poza rozważanym kątem między cięciwą a styczną.

Dowód:
Niech O będzie środkiem okręgu, l_{BD} styczną do niego w punkcie B, BC cięciwą, zaś A punktem na tym okręgu, a przy tym $\sphericalangle CBD = \alpha$. Pokażemy, że $\sphericalangle BAC = \alpha$. Wpierw zauważmy, że $\sphericalangle OBC = 90° - \alpha$, bo $\overline{OB} \perp l_{BD}$. Również $\sphericalangle OCB = 90° - \alpha$, bo trójkąt OBC jest równoramienny. Ponieważ suma kątów trójkąta równa jest $180°$, więc kąt środkowy BOC oparty na cięciwie BC jest równy $180° - [(90° - \alpha) + (90° - \alpha)] = 2\alpha$. Ponieważ kąt BAC jest kątem wpisanym opartym również na cięciwie BC, więc $\sphericalangle BAC = \alpha$.

62. Na rysunku obok prosta l jest styczna do okręgu K w punkcie A. Wyznacz α.

63. W trójkąt ABC wpisano okrąg, przy czym C_1, B_1, A_1 są punktami styczności odpowiednio do boków AB, AC i BC; $\sphericalangle A = 38°$, $\sphericalangle B = 86°$. Wyznacz kąty trójkąta $A_1B_1C_1$.

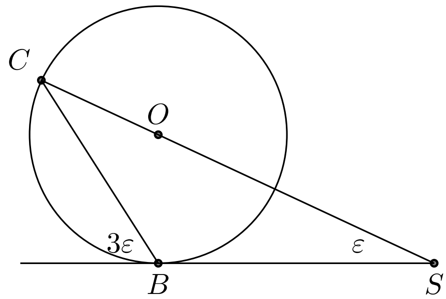




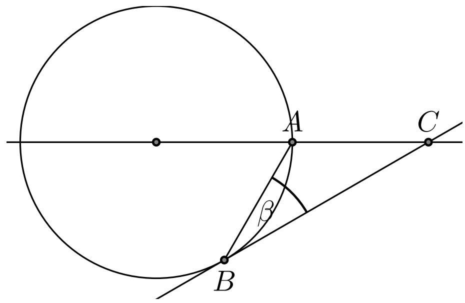
64. Prosta DC na rysunku obok jest styczna do okręgu. Wyznacz kąty trójkąta ABC.

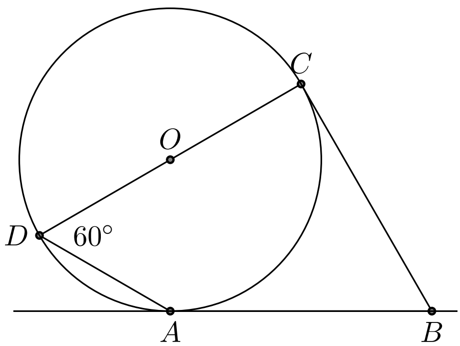
65. Z punktu P leżącego poza okręgiem poprowadzono dwie półproste: jedna styczna do okręgu w punkcie Q, a druga przecinająca okrąg w punktach A i B. Pokaż, że $\triangle PQA \sim \triangle PBQ$.

66. Na rysunku obok prosta SB jest styczna do okręgu. Wyznacz miarę kąta ε.



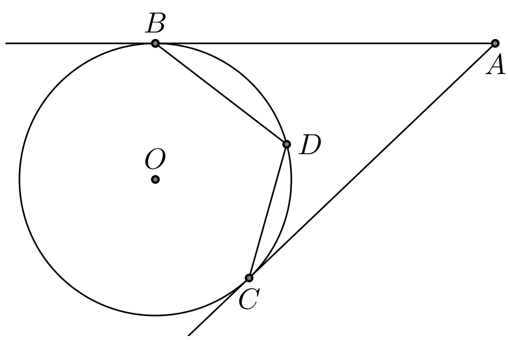
67. Trójkąt ABC na rysunku obok jest równoramienny, a prosta BC jest styczna do okręgu w punkcie B. Wyznacz miarę kąta β.





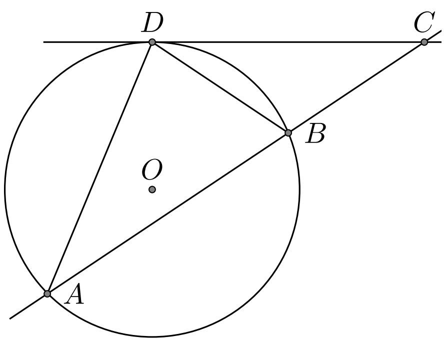
68. Na rysunku obok prosta BA jest styczną do okręgu, odcinek CD jest jego średnicą, zaś $|AC| = |BC|$. Wyznacz miary kątów DAB, ABC, BCD.

69. Na rysunku obok proste AB i AC są styczne do okręgu. Pokaż, że suma miar kątów ABD i ACD jest stała niezależnie od położenia punktu D na tym samym łuku BC.



70. W okręgu poprowadzono średnicę AB i cięciwę BD. Na średnicy obrano taki punkt O, że okrąg o środku w punkcie O jest styczny do cięciwy BD

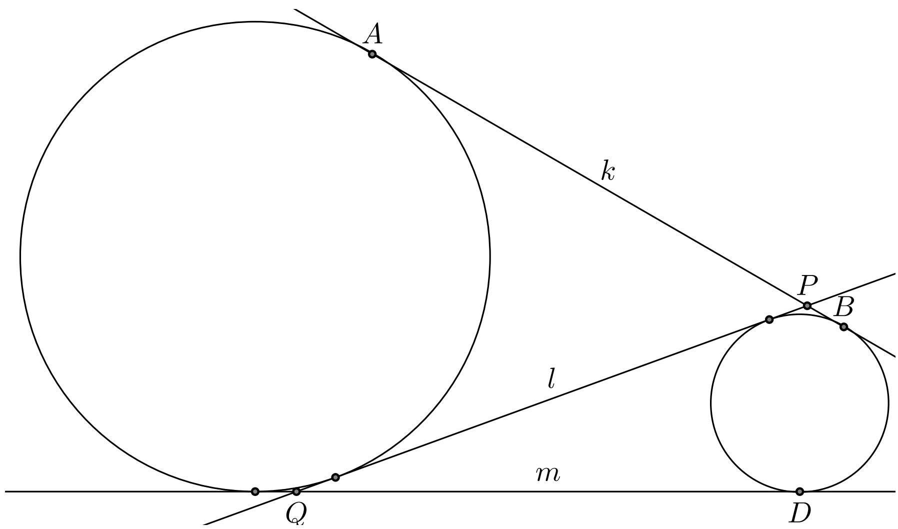
w punkcie K, a do wyjściowego okręgu w punkcie A. Pokaż, że półprosta AK jest dwusieczną kąta DAB.



71. Z punktu C leżącego poza okręgiem prowadzimy styczną do okręgu w punkcie D oraz sieczną, którą przecina ten okrąg kolejno w punktach B i A. Uzasadnij, że $\triangle CDB \sim \triangle CAD$.

72. Pokaż, że jeżeli CD jest styczną do okręgu w punkcie D, a przy tym $|CB| = |DB|$,
to $|CD| = |AD|$.

73*. Na rysunku poniżej każda z prostych k, l, m styczna jest do dwóch okręgów. A i B są punktami styczności prostej k z obydwoma okręgami, zaś P i Q są punktami przecięcia się stycznych – odpowiednio l i k oraz l i m. Pokaż, że $PQ = AB$ czyli pokaż, że odcinek stycznej wewnętrznej zawarty między stycznymi zewnętrznymi jest równy odcinkowi stycznej zewnętrznej zawartemu pomiędzy jej punktami styczności.



Wskazówki i odpowiedzi.

1. $|MP| = 24$

2. $|AB| = 20$, $|AC| = 25$

3. $|MR| = 36$

4. a) $MP = 7\frac{1}{2}$, b) $P_{MOP} = 15$,

c) $d(P, l_{MO}) = 3\frac{9}{17}$

5. $|LM| = 4$, $|PI| = 4$

6. $d = 24$

7. $r = 26$
8. wsk. skorzystaj z tw. Pitagorasa, a następnie z wz. skr. mnożenia
9. $50°$
10. $145°$
11. $|AB| = 40$
13. $\sphericalangle BDC = 65°$
14. $\varepsilon = 36°$
15. $x = 66°$, $y = 114°$, $z = 57°$
16. wsk. porównaj poprzednie zadanie; $\gamma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$
17. każdy kąt ma $60°$, każdy bok ma długość 1, $P_{\triangle} = \sqrt{3}$
18. 1, 2, 3
19. $r_1 = 2$, $r_2 = 3$, $r_3 = 6$
20. $r_3 = 13$
21. $P_{APBQ} = 108$
22. wsk. zob tw. o odcinku łączącym środki ramion trapezu. odp. 56.
23. $\sphericalangle S_1BA = 130°$, $\overline{CS_2} \parallel \overline{AS_1}$
24. Pole okręgu wyznaczonego przez środki okręgów $r^2\sqrt{3}$, trójkąt utworzony przez punkty styczności jest równoboczny o boku długości r
25. skorzystaj z poprzednich zadań
26. wsk. wpierw wyznacz AC. $CD = \sqrt{33} - 3$
27. $\sphericalangle XDS_2 = 38°$, $\sphericalangle XBS_1 = 38°$, $\sphericalangle BS_1X = 104°$, $\sphericalangle BAX = 52°$. Czworokąt $ABCD$ jest trapezem
29. wsk. co wiemy o trójkącie MRS?
33. $r = 1$
34. w trójkącie ACD $r = \frac{9}{4} - \frac{3}{4}\sqrt{5}$, w trójkącie ADB $r = \frac{15}{8} - \frac{5}{8}\sqrt{5}$
35. $r = 1$
36. $r = \frac{d\sqrt{l^2-d^2}}{d+l}$
37. $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$
38. $r = 3\frac{1}{3}$
39. $3\frac{4}{13}$
40. Wsk. rozłóż trójkąt ABC na dwa trójkąty: COA i COB. $R = 3\frac{3}{7}$
41. $Ob = 14$
42. skorzystaj z pop. zadania
43. a) $a\frac{\sqrt{2}}{2}$, b) $a + a\frac{\sqrt{2}}{2}$
44. 5, 13
45. $6, 7, 14$
48. $P = \frac{1}{2}$, $r = \frac{\sqrt{18}-4}{2}$
49. $P = 4$
50. $r = \frac{15-5\sqrt{5}}{2}$
52. $r = \frac{3}{4}\sqrt{3} - \frac{3}{4}$
53. suma długości przyprostokątnych 33, pole trójkąta 116
54. a) 24, b) $9\frac{3}{5}$
56. $r = a\frac{\sqrt{3}}{2}$
57. a) $\frac{a+b+c}{2}$, b) $\frac{c+a-b}{2}$
59. $|O_1O_2| = 5\sqrt{2}$, $P_{EO_1O_2FC} = 59\frac{1}{2}$
60. a) $|O_1O_2| = 5\sqrt{5}$, b) $62\frac{1}{2}$, c) $\frac{10\sqrt{5}-5\sqrt{10}}{2}$
61. w trójkącie ABD $r = 3$, w trójkącie BCD $r = 5$, $d = 10$
62. $\alpha = 67°$
63. $\sphericalangle A_1 = 71°$, $\sphericalangle B_1 = 47°$, $\sphericalangle C_1 = 62°$
64. $\sphericalangle A = 40°$, $\sphericalangle B = 83°$, $\sphericalangle C = 57°$
66. $\varepsilon = 18°$
67. $\beta = 30°$
68. $\sphericalangle A = 150°$, $\sphericalangle B = 60°$, $\sphericalangle C = 90°$.
69. wsk. po jakim twierdzeniu znajduje się to zadanie?

Rozdział 4

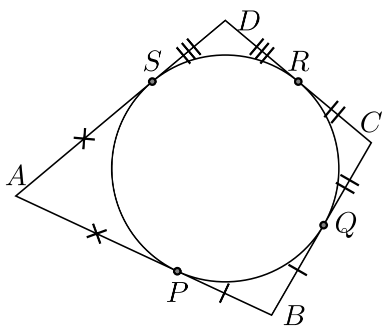
CZWOROKĄT OPISANY NA OKRĘGU

DEFINICJA Czworokąt, którego wszystkie cztery boki są styczne do okręgu nazywamy *czworokątem opisanym na okręgu.*

Z twierdzenia o stycznej do okręgu wynika następujące twierdzenie:

TWIERDZENIE Jeżeli czworokąt można opisać na okręgu, to sumy przeciwległych boków tego czworokąta są równe.

Dowód: Niech czworokąt $ABCD$ będzie opisany na okręgu i niech P, Q, R, S będą punktami styczności, tak jak na rysunku poniżej.



Na mocy twierdzenia o stycznej do okręgu mamy

$$\begin{aligned} AP &= AS, \\ BP &= BQ, \\ CR &= CQ, \\ DR &= DS. \end{aligned}$$

Dodając te równości stronami mamy

$$AP+BP+CR+DR = AS+BQ+CQ+DS$$

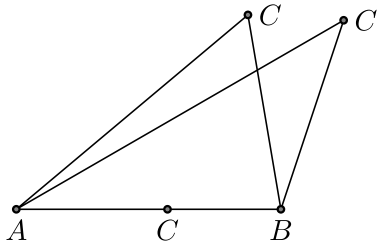
lub też pisząc to nieco inaczej

$$AP + PB + CR + RD = AS + SD + BQ + QC$$

czyli

$$AB + CD = AD + BC.$$

Nim dowiedziemy kolejnego twierdzenia, które jest twierdzeniem odwrotnym do powyższego, sformułujemy wpierw intuicyjnie oczywistą tzw. *nierówność trójkąta*, z której będziemy korzystać w dowodzie następnego twierdzenia.



Nierówność trójkąta.
W trójkącie ABC ma miejsce nierówność

$$AB \leqslant AC + CB,$$

przy czym równość zachodzi tylko wówczas, gdy punkt C leży na odcinku AB.

Nierówność tę słowami można opisać tak: *droga od punktu A do punktu B wiodąca przez punkt C jest równa długości odcinka AB tylko wtedy, gdy punkt C leży na odcinku AB, w pozostałych przypadkach jest dłuższa od długości odcinka AB.*

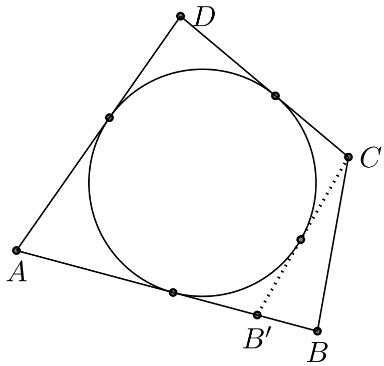
TWIERDZENIE

Jeżeli w czworokącie sumy długości przeciwległych boków są równe, to czworokąt ten można opisać na okręgu.
Tego faktu dowiedziemy nie wprost.

Dowód: Przypuśćmy, że w czworokącie $ABCD$ zachodzi

$$AB + CD = AD + BC,$$

a przy tym czworokąta tego nie można opisać na okręgu. Niech to będzie – przykładowo – sytuacja taka jak na rysunku obok. Skoro odcinek CB nie jest styczny do tego okręgu, to z tego wynika, że istnieje jakiś punkt B' leżący na odcinku AB różny od punktu B taki, że odcinek CB' jest styczny do tego okręgu.



Na mocy poprzedniego twierdzenia mamy wówczas

$$AD + CB' = AB' + CD. \tag{1}$$

Z założenia natomiast

$$AD + CB = AB + CD,$$

co inaczej można zapisać

$$AD + CB = \underbrace{AB' + B'B}_{=AB} + CD. \tag{2}$$

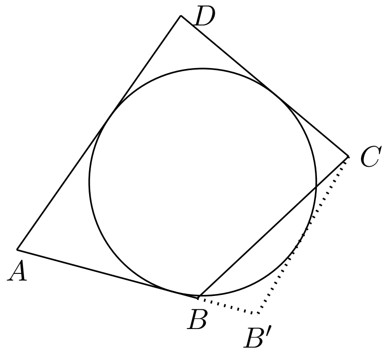
Odejmując stronami od równości (2) równość (1) mamy

$$(AD + CB) - (AD + CB') = (AB' + B'B + CD) - (AB' + CD)$$

czyli

$$CB - CB' = B'B$$
$$CB = CB' + B'B.$$

Z tej ostatniej równości i z nierówności trójkąta wynika, że punkt B' należący do odcinka AB należy również do odcinka CB, czyli $B' = B$.



ĆWICZENIE
Przeprowadź podobne rozumowanie nie wprost w sytuacji takiej jak na rysunku obok.

1. Obwód trapezu równoramiennego opisanego na okręgu wynosi 20, zaś jego wysokość 4. Oblicz długości boków trapezu i jego pole.

2. Trapez równoramienny o polu 125 opisany jest na okręgu. Jedna podstawa ma długość równą promieniowi, a druga jest od niej 4 razy dłuższa. Wyznacz długości wszystkich czterech boków tego trapezu.

3. Trapez równoramienny o ramionach długości 8 opisany jest na okręgu o promieniu 3. Oblicz pole trapezu.

4. Znajdź stosunek promienia okręgu opisanego na kwadracie do długości promienia okręgu wpisanego w ten kwadrat.

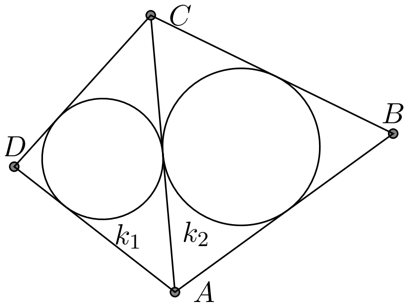
5. Trapez równoramienny o ramionach długości 10 opisany jest na okręgu. Jedna z podstaw ma długość 4. Oblicz długość promienia okręgu wpisanego w ten trapez.

6. Kąt ostry rombu ma miarę $45^{\cdot}$ a jego bok ma długość 5. Oblicz promień okręgu wpisanego w ten romb.

7. Na okręgu o promieniu $r = 3$ opisano trapez równoramienny o kącie ostrym $60^{\cdot}$. Oblicz pole i obwód trapezu.

8. Promień okręgu wpisanego w trapez prostokątny wynosi 2, zaś kąt ostry trapezu ma miarę $45^{\cdot}$. Oblicz obwód, pole oraz długość dłuższej podstawy tego trapezu.

9. Na okręgu o promieniu r opisano trapez prostokątny, o krótszej podstawie długości $\frac{5}{4}r$. Oblicz pole tego trapezu.



10. Okrąg k_1 na rysunku obok, jest wpisany w trójkąt ACD, zaś okrąg k_2 – w trójkąt ABC. Okręgi te są przy tym zewnętrznie styczne i ich wspólną styczną jest AC. Pokaż, że
a) Czworokąt $ABCD$ można opisać na okręgu;
b) Okręgi wpisane w trójkąty ABD i BCD są również zewnętrznie styczne;

11. W trapezie prostokątnym $ABCD$ o podstawach AB i CD symetralna dłuższej podstawy AB przecina ją w punkcie E oraz podstawę CD w punkcie F, przy czym $CF = 4$, a $FD = 1$. Wyznacz wysokość trapezu tak, aby można było wpisać weń okrąg.

12. Na okręgu o promieniu $r = 3$ opisany jest czworokąt $ABCD$, **nie będący trapezem**, w którym $CD = 7$, zaś $AB = 2 \cdot CD$. Wyznacz P_{ABCD}.

13. Trapez prostokątny $ABCD$ opisany jest na okręgu o promieniu $r = 3$. Dłuższe ramię trapezu ma długość 7. Wyznacz pole trapezu.

14. Długości jego boków czworokąta $ABCD$ są liczbami naturalnymi. Są to kolejne liczby naturalne. Uzasadnij, że czworokąt $ABCD$ można opisać na okręgu.

15. Jeżeli w okręgu poprowadzimy dwie przecinające się prostopadłe do siebie cięciwy a przez ich końce poprowadzimy styczne do tego okręgu, to te styczne wyznaczają czworokąt opisany na tym okręgu. Pokaż, że ten czworokąt można wpisać w jakiś okrąg.

16. W trapezie prostokątnym opisanym na okręgu podstawy mają długości a i b. Oblicz długości ramion tego trapezu. Jeżeli masz kłopoty z obliczeniami na dowolnych wartościach a, b, to przyjmij $a = 4$, $b = 6$.

17. Niech A, B, C, D będą punktami styczności rombu z okręgiem weń wpisanym. Uzasadnij, że $ABCD$ jest prostokątem.

18. Trapez równoramienny o ramionach długości a opisany jest na okręgu o promieniu r. Oblicz pole trapezu.

19. Pokaż, że jeżeli czworokąt jest opisany na okręgu, a cięciwy tego okręgu łączące przeciwległe punkty styczności są prostopadłe, to czworokąt ten można wpisać w okrąg.

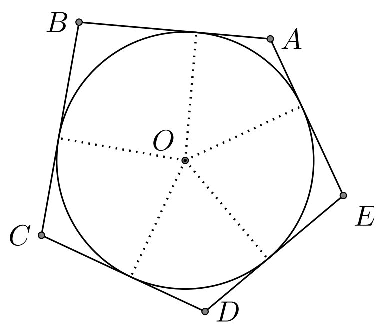
20. Trapez można opisać na okręgu. Na ramionach trapezu, jako na średnicach, opisano okręgi o promieniach r i R. Uzasadnij, że te okręgi są styczne.

21. Na ramionach trapezu opisano okręgi, które są styczne. Uzasadnij, że ten trapez można opisać na okręgu.

Wiemy, że punkt leży na dwusiecznej kąta wtedy i tylko wtedy gdy jest tak samo oddalony od obu ramion kąta. Z tego wynika, że środek okręgu wpisanego w trójkąt jest tak samo odległy od każdego boku trójkąta i że w tym punkcie przecinają się dwusieczne wszystkich trzech kątów trójkąta. Zauważmy teraz, że ma miejsce następujące

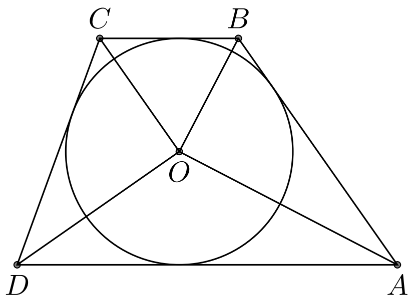
TWIERDZENIE

Jeżeli wielokąt opisany jest na okręgu, to jego środek jest tak samo odległy od każdego boku i w tym punkcie przecinają się dwusieczne wszystkich kątów wielokąta.



22. Pięciokąt $ABCDE$ opisany jest na okręgu o środku w punkcie O. Miary kątów o wierzchołku w punkcie O są następujące: $\sphericalangle AOB = 90°$, $\sphericalangle BOC = 80°$, $\sphericalangle COD = 70°$, $\sphericalangle DOE = 55°$, $\sphericalangle EOA = 65°$. Wyznacz kąty wielokąta $ABCDE$.

23. Trapez $ABCD$, w którym $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, opisany jest na okręgu o środku w punkcie O. Uzasadnij, że trójkąt ABO jest prostokątny.



24. Trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD opisany jest na okręgu o środku w punkcie O. Uzasadnij, że trójkąty BCO i ADO są prostokątne.

25. Trapez prostokątny $ABCD$, w którym $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $\overline{AD} \perp \overline{AB}$, opisany jest na okręgu o środku w punkcie S, przy czym $|BS| = 20$, $|CS| = 15$. Wyznacz

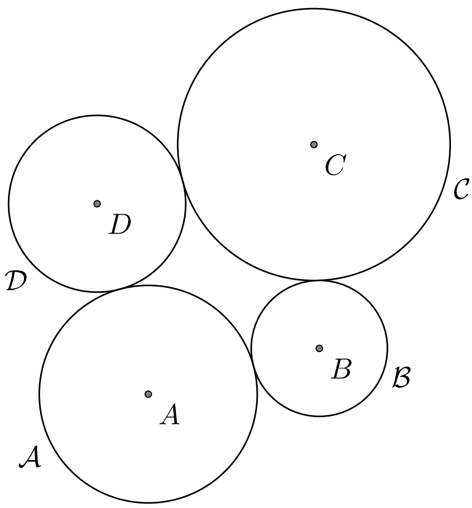
a) P_{ABCD},

b) długość krótszej podstawy.

26. W trapez można wpisać okrąg. Uzasadnij, że okręgi opisane na ramionach trapezu (ramiona są średnicami okręgów) są zewnętrznie styczne.

27. Trapez $ABCD$, w którym $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $AD = BC = 25$, $AB = 32$, $CD = 18$ jest opisany na okręgu. Wyznacz promień tego okręgu.

28. Okręgi $\mathcal{A}(A, r_1)$, $\mathcal{B}(B, r_2)$, $\mathcal{C}(C, r_3)$, $\mathcal{D}(D, r_4)$ są parami zewnętrznie styczne, tak jak na rysunku obok. Uzasadnij, że czworokąt $ABCD$ można opisać na okręgu.



Wskazówki i odpowiedzi.

1. podstawy 8 i 2, ramiona 5, $P = 20$

2. 5, 20, 12,5, 12,5

3. $P = 48$

4. $\dfrac{R}{r} = \sqrt{2}$

5. $r = 4$

6. $r = \frac{5}{4}\sqrt{2}$

7. $P = 24\sqrt{3}$, $Ob = 16\sqrt{3}$

8. $Ob = 8 + 8\sqrt{2}$, $P = 8 + 8\sqrt{2}$, $a = 4 + 2\sqrt{2}$

9. $P = \frac{25}{4}r^2$

11. $\frac{80}{13}$

12. $P = 63$

13. $P = 39$

16. $h = \frac{2ab}{a+b}$, $c = \frac{a^2+b^2}{a+b}$

18. $P = 2ar$

22. $\sphericalangle A = 110^\circ$, $\sphericalangle B = 70^\circ$, $\sphericalangle C = 110^\circ$, $\sphericalangle D = 90^\circ$, $\sphericalangle E = 140^\circ$

25. a) $P_{ABCD} = 588$, b) $|CD| = 21$

27. $r = 24$

Rozdział 5

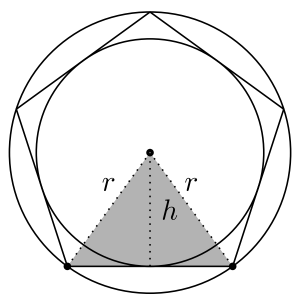
WIELOKĄTY FOREMNE

Dotychczas zajmowaliśmy się różnymi trójkątami i czworokątami. Obecnie zajmiemy się krótko tzw. wielokątami foremnymi. Wpierw określmy co rozumiemy przez to pojęcie.

DEFINICJA Wielokąt nazywamy foremnym, jeżeli jego wszystkie boki są równe i wszystkie kąty są równe.

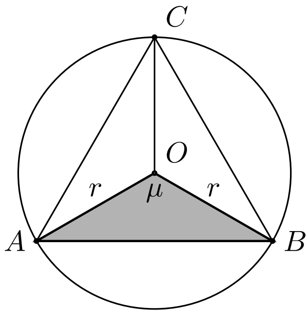
UWAGA Tylko w przypadku trójkąta: z faktu, że wszystkie boki są równe wynika, że wszystkie kąty są równe, zaś z faktu, że wszystkie kąty są równe wynika, że wszystkie boki są równe.

Można uzasadnić, że każdy n-kąt foremny można rozłożyć na n przystających trójkątów o wspólnym wierzchołku (nazwijmy je **trójkątami podstawowymi**). Z tego wynika, że **każdy** wielokąt foremny można wpisać w okrąg oraz, że w **każdy** wielokąt foremny można wpisać okrąg.



Każdy wielokąt foremny można podzielić na trójkąty równoramienne. Wspólnym wierzchołkiem tych trójkątów jest środek okręgu opisanego na wielokącie, zaś ramionami trójkątów są promienie łączące środek okręgu z dwoma kolejnymi wierzchołkami wielokąta.

1. Wyznacz miarę kąta μ przy wierzchołku O w trójkącie podstawowym w następujących wielokątach foremnych



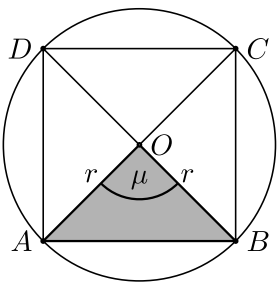
a) trójkącie równobocznym,

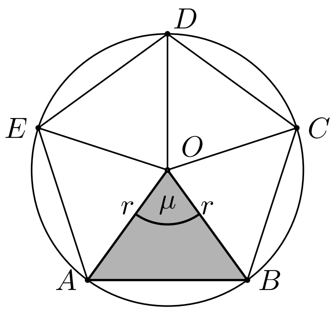
b) kwadracie,

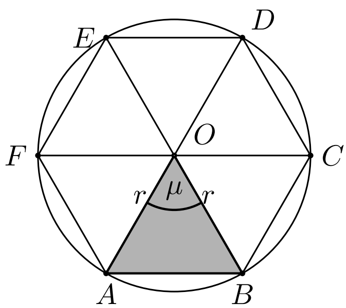
c) pięciokącie foremnym,

d) sześciokącie foremnym,

e) ogólnie w n-kącie foremnym.







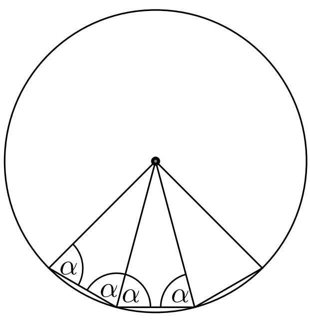
2. Niech $ABCDE$ będzie pięciokątem foremnym. Wyznacz miary kątów w trójkątach ABC ABD.

3. Wyznacz pole kwadratu wpisanego w okrąg o promieniu 1.

4. Wyznacz pole ośmiokąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu 5.

5. Wyznacz pole dwunastokąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu 2. wsk. możesz to zrobić w pamięci, zrób tylko staranny rysunek.

6. Wyznacz pole trójkąta równobocznego wpisanego w okrąg o promieniu 1.



7. Wyznacz miarę kąta pomiędzy dwoma kolejnymi bokami

a) pięciokąta foremnego,

b) dziesięciokąta foremnego,

c) dwunastokąta foremnego,

d) n-kąta foremnego.

8. Wyznacz promień okręgu opisanego na sześciokącie foremnym o boku długości 2.

9. Wyznacz promień okręgu opisanego na kwadracie o boku długości 1.

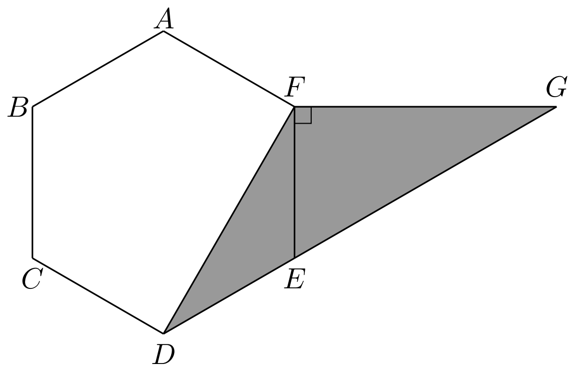
10. Wyznacz promień okręgu opisanego na trójkącie równobocznym o boku długości 3.

11. Wyznacz długość boku ośmiokąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu 2

12. Wyznacz długość boku dwunastokąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu 3.

13*. Wyznacz długość boku dziesięciokąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu 1. Tu należy rozwiązać równanie kwadratowe.

14*. Korzystając z poprzedniego zadania wyznacz pole dziesięciokąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu 1.



15. Sześciokąt foremny $ABCDEF$ na rysunku obok ma bok długości 10. Wyznacz pole trójkąta DFG.

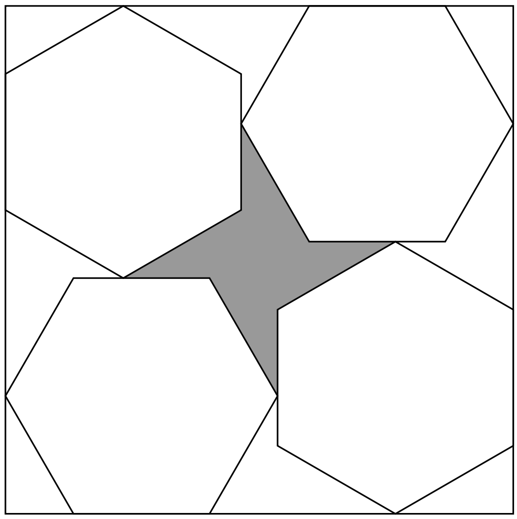
16. Dany jest sześciokąt foremny o boku długości 2. Łączymy kolejno środki jego boków, uzyskując również sześciokąt foremny (co można uzasadnić korzystając z przystawania trójkątów).

a) Jaka jest długość boku a w uzyskanym sześciokącie?

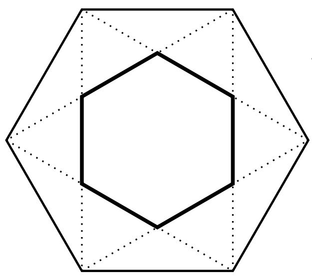
b) Jaka jest wobec tego skala podobieństwa mniejszego sześciokąta do większego sześciokąta?

c) Jakie jest pole P_w większego sześciokąta?

d) Jakie jest wobec tego pole P_m mniejszego sześciokąta?



17. W kwadrat, na rysunku obok, wpisane są cztery sześciokąty foremne. Długość boku kwadratu jest równa 10. Wyznacz pole zacieniowanego obszaru.



18. Punkty przecięcia krótszych przekątnych sześciokąta foremnego wyznaczają wierzchołki sześciokąta. Uzasadnij, że ten sześciokąt też jest foremny i wyznacz stosunek pola większego sześciokąta do mniejszego sześciokąta.

Wskazówki i odpowiedzi.

1. a) $120°$, b) $90°$, c) $72°$, d) $60°$, e) $\frac{360°}{n}$
2. W trójkącie ABC: $36°, 36°, 108°$, w trójkącie ABD: $36°, 72°, 72°$.
3. $P = 2$
4. $P = 50\sqrt{2}$
5. $P = 12$
6. $P = \frac{3}{4}\sqrt{3}$
7. a) $108°$, b) $144°$, c) $150°$, d) $180° - \frac{360°}{n}$
8. $r = 2$
9. $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$
10. $\sqrt{3}$
11. $a = 2\sqrt{2-\sqrt{2}}$
12. $r = 3\sqrt{2-\sqrt{3}}$
13. $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Wsk. por zad. 10 o trójkątach podobnych.
14. $S = 5 \cdot \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2}$
15. $P_{DFG} = 75\sqrt{3}$
16. a) $a = \sqrt{3}$, b) $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2}$, c) $P_w = 6\sqrt{3}$, d) $P_m = \frac{9}{2}\sqrt{3}$
17. $100 - \frac{55}{3}\sqrt{3}$
18. $3 : 1$

Rozdział 6

POLE I OBWÓD KOŁA

Problem jak obliczyć obwód koła gdy dana jest jego średnica zajmował ludzi już od dawna. Ponieważ dwa dowolne koła są do siebie podobne, to iloraz dwóch odpowiadających sobie wielkości w każdym kole jest taki sam. Czyli w szczególności iloraz obwodu koła przez jego średnicę jest wielkością stałą. Leonard Euler wprowadził oznaczenie na tę liczbę, które stosowane jest do dzisiaj, a mianowicie małą grecką literę π. Mamy zatem

$$\frac{\text{obwód koła}}{\text{średnica koła}} = \pi \quad \text{czyli} \quad \text{obwód koła} = \pi \cdot \text{średnica koła}$$

Oznaczając obwód koła przez Ob, promień okręgu przez r mamy

$$Ob = \pi \cdot 2r$$

lub

$$Ob = 2\pi r.$$

Pole koła o promieniu długości r wyraża się natomiast wzorem

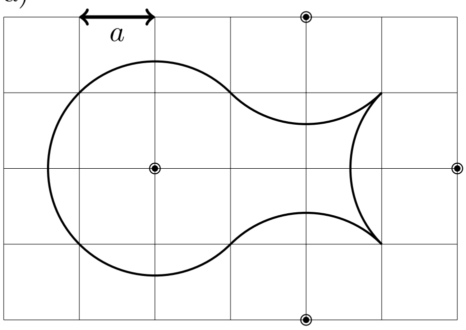
$$P = \pi r^2$$

Okazuje się, że liczba π nie jest ilorazem liczb całkowitych, czyli nie jest liczbą wymierną. Nie ma zatem ona skończonego rozwinięcia dziesiętnego, jak i nieskończonego rozwinięcia okresowego. Pierwszych kilka cyfr jej rozwinięcia dziesiętnego to

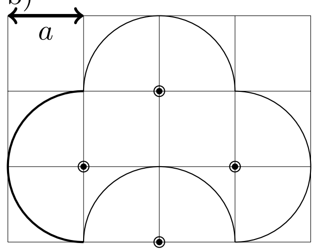
$$\pi = 3.14159\ldots$$

1. W tym zadaniu mamy wyznaczyć obwód figury oraz pole jakie ona ogranicza. Siatka zbudowana jest z kwadratów o boku długości a. Oblicz pole i obwód figury ograniczonej łukami okręgu w zależności od długości boku kwadratu siatki a. Znak $\bullet$ lub też $\odot$ wskazuje, gdzie była wbita nóżka cyrkla.

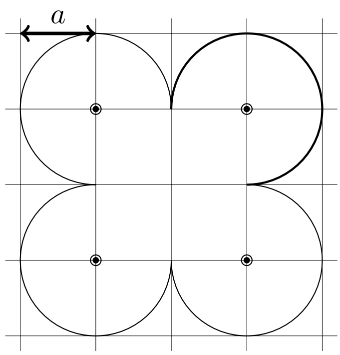
a)



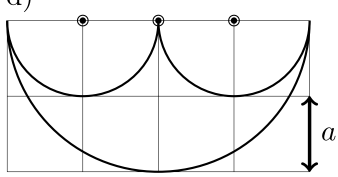
b)



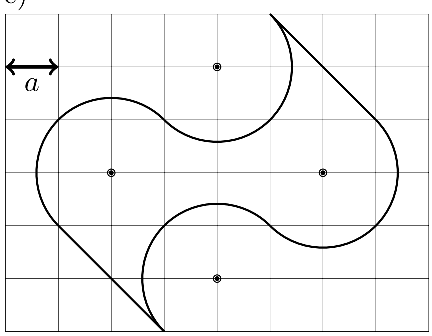
c)



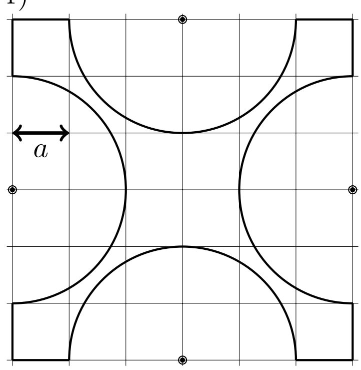
d)



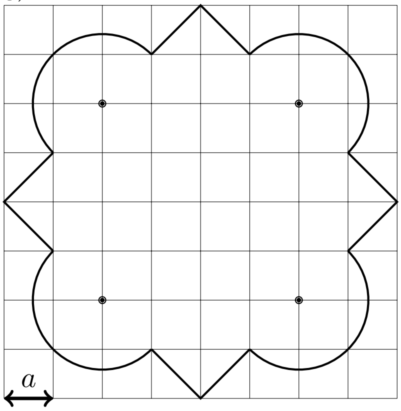
e)



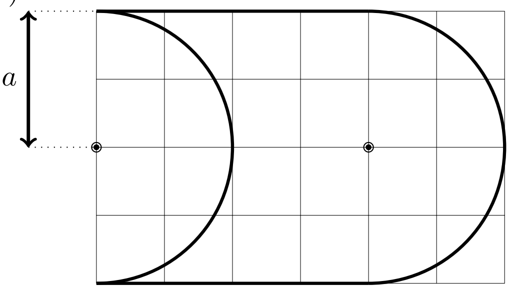
f)



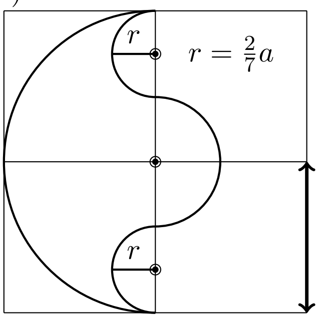
g)



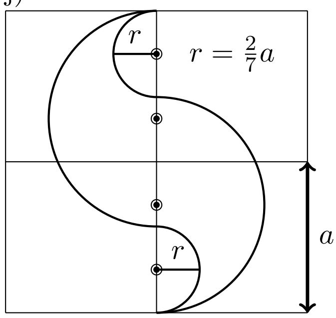
h)



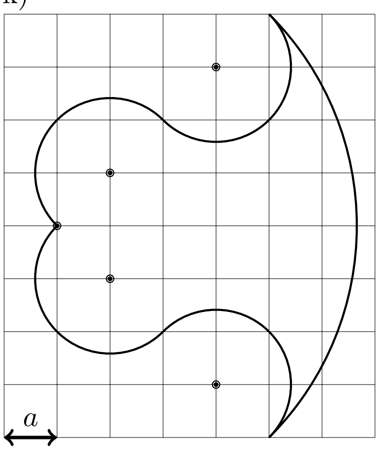
i)



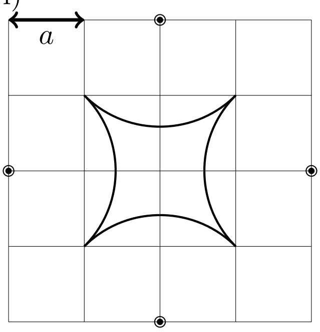
j)



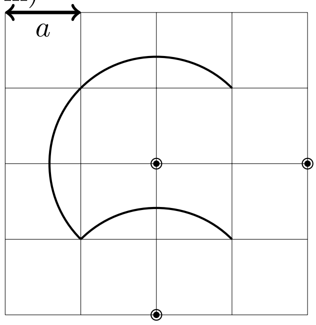
k)



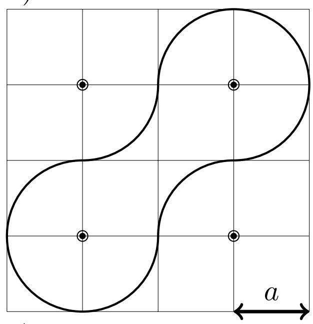
l)



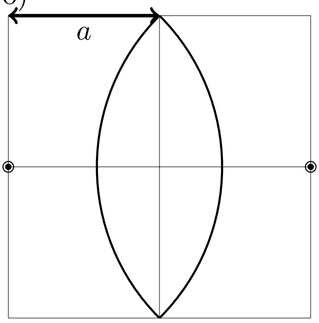
m)



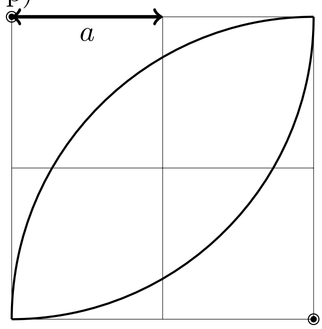
n)



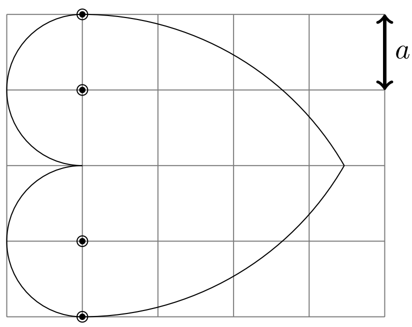
o)



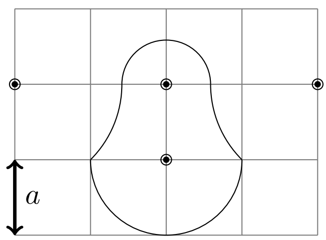
p)



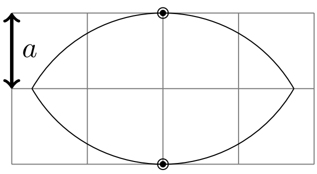
q)



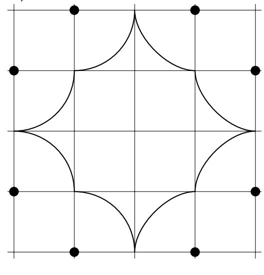
r)



s)

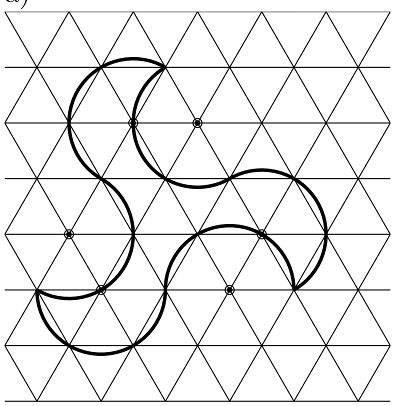


t)

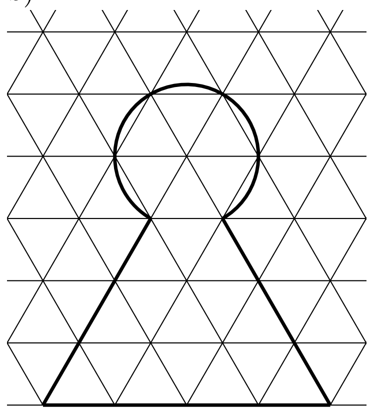


2. Na poniższych rysunkach jest siatka trójkątna złożona z trójkątów równobocznych o boku długości a. Wyznacz pole i obwód figury w zależności od a.

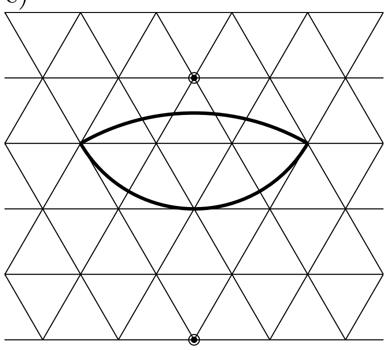
a)



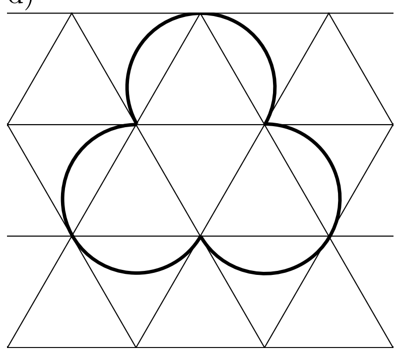
b)



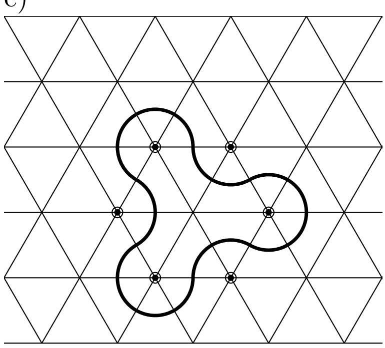
c)



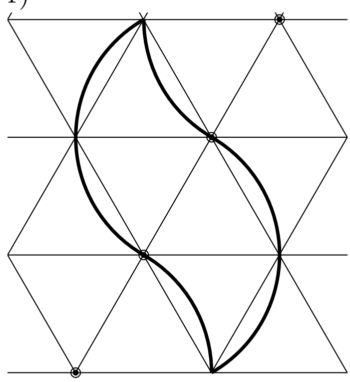
d)



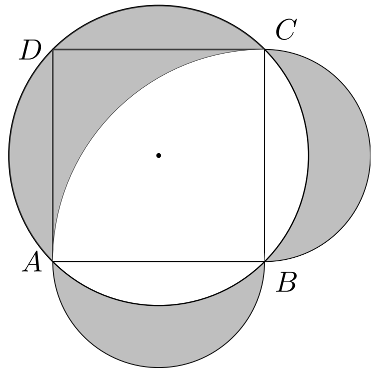
e)

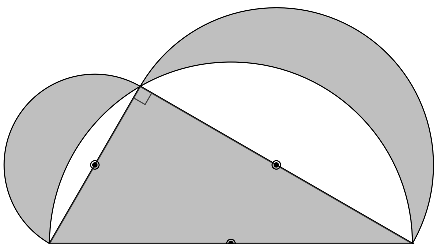


f)

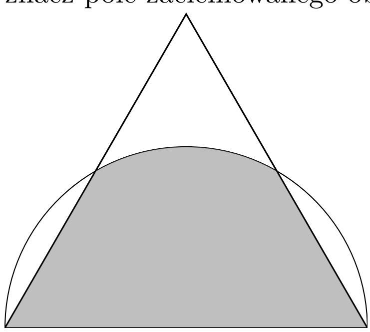


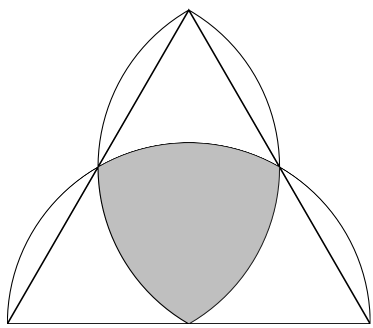
3. Na poniższych dwóch rysunkach mamy tzw. księżyce Hipokratesa. Na pierwszym rysunku jest kwadrat o boku długości a. Wyznacz sumę pól wszystkich trzech półksiężyców. Na drugim rysunku jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości a i b. Wyznacz sumę pól obu półksiężyców i porównaj ją z polem trójkąta.



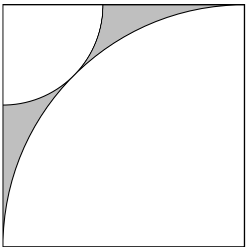


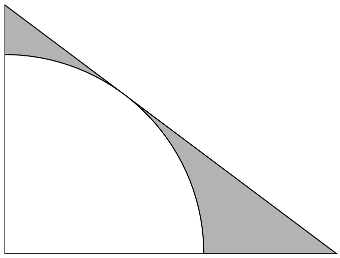
4. Trójkąty na poniższych rysunkach są równoboczne o boku długości 10. Wyznacz pole zacieniowanego obszaru.

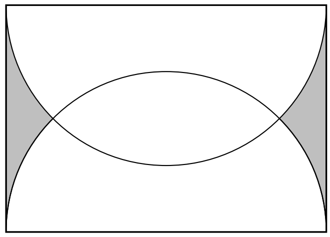




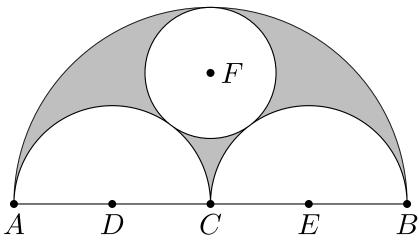
5. Na pierwszym z poniższych rysunków jest kwadrat o boku długości 10, na drugim trójkąt prostokątny o bokach długości 9 i 12, a na trzecim prostokąt o bokach długości 20 i $20\sqrt{2}$. W każdym przypadku wyznacz pole zacieniowanego obszaru.

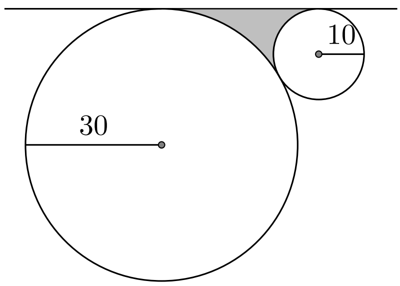




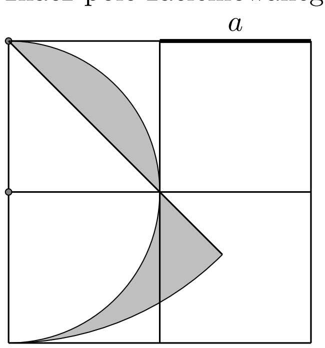


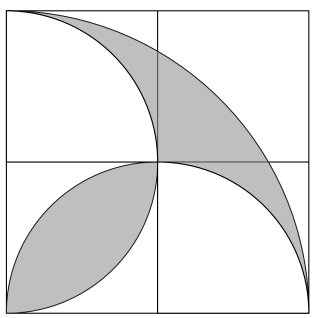
6. Wyznacz pole zacieniowanego obszaru w jednym i drugim przypadku. Na pierwszym rysunku długość odcinka/średnicy AB jest równa 40, chociaż równie dobrze można by ją zastąpić jakąkolwiek inną liczbą dodatnią. Na drugim rysunku okręgi są zewnętrznie styczne oraz są styczne do narysowanej prostej, zaś liczby są nie przypadkowo dobrane.



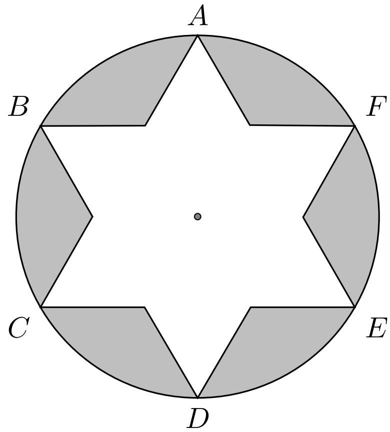


7. Na obu rysunkach jest siatka kwadratowa. Kwadraty mają długość boku a. Wyznacz pole zacieniowanego obszaru w obu przypadkach.

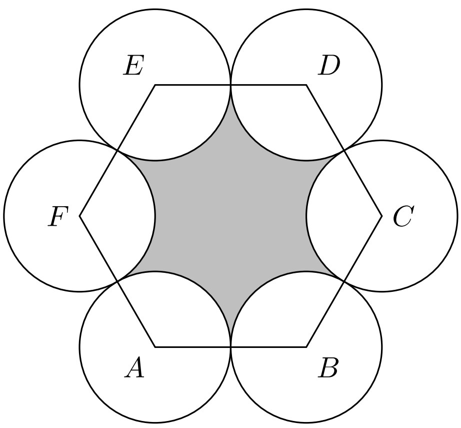


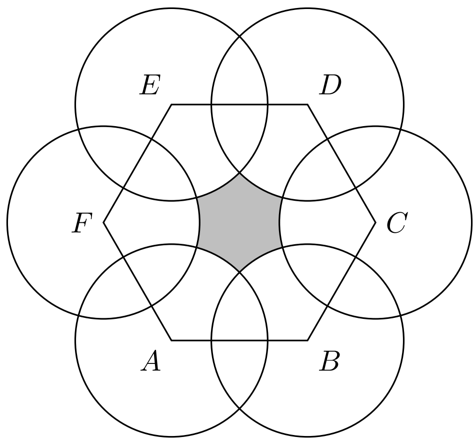


8. Punkty A, B, C, D, E, F na rysunku obok są wierzchołkami sześciokąta foremnego o boku długości 1. Wyznacz pole zacieniowanego obszaru.

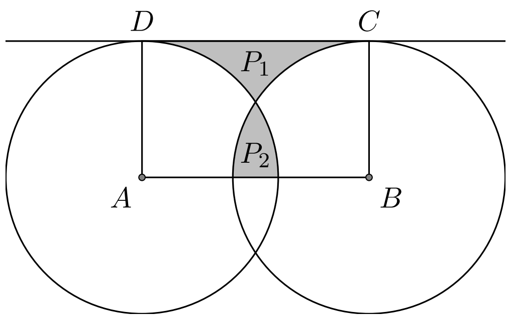


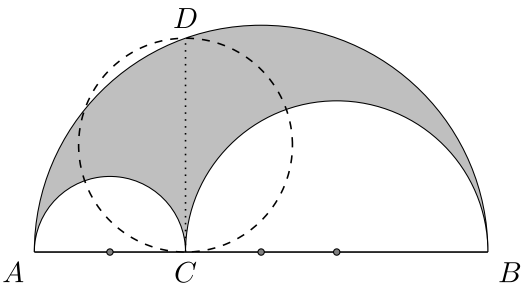
9. Oba sześciokąty na poniższych rysunkach są foremne, a długość boku w obu przypadkach jest równa 20. Na pierwszym rysunku okręgi mają promień długości 10, a na drugim $10\sqrt{2}$. Wyznacz pole zacieniowanego obszaru.





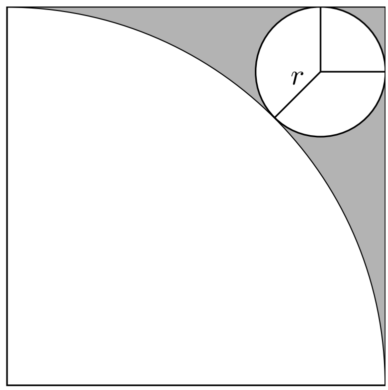
10. Na rysunku obok oba okręgi mają taki sam promień r, a przy tym $P_1 = P_2$. Wyznacz pole prostokąta $ABCD$ w zależności od r.

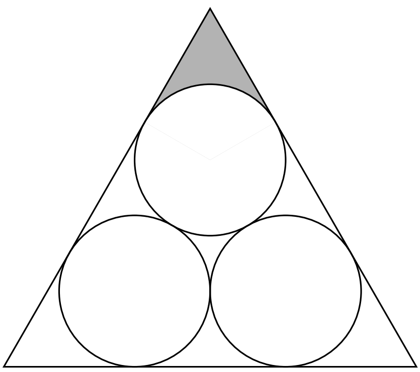




11. Na rysunku obok, są trzy półokręgi oparte na średnicach AB, AC i CB. Odcinek CD jest prostopadły do AB. Uzasadnij, że pole zacieniowanego obrazu jest równe polu koła o średnicy CD.

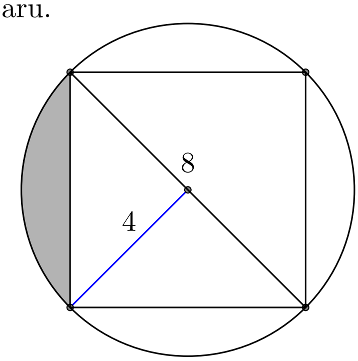
12. Na rysunku obok jest kwadrat o boku długości 10. Wyznacz promień wpisanego okręgu oraz pole zacieniowanego obszaru.





13. W trójkąt równoboczny, o boku długości 10, wpisano trzy przystające okręgi zewnętrznie styczne. Wyznacz promień okręgów i pole zacieniowanego obszaru.

14. W okrąg o średnicy 8 wpisany jest kwadrat. Wyznacz pole zacieniowanego obszaru.



Wskazówki i odpowiedzi.

1.

a) $Ob = 3\sqrt{2}\pi a,\ \ P = 8a^2$ b) $Ob = 4\pi a, \quad P = (4+\pi)a^2$

c) $Ob = 6\pi a, \quad P = (3\pi + 4)a^2$ d) $Ob = 4\pi a, \quad P = \pi a^2$

e) $Ob = 4\sqrt{2}(\pi + 1)a, \quad P = 16a^2$ f) $Ob = 8(\pi+1)a, \quad P = (36 - 8\pi)a^2$

g) $Ob = 4\sqrt{2}(\pi + 2)a, \quad P = (32 + 4\pi)a^2$ h) $Ob = 2(2+\pi)a, \quad P = 4a^2$

i) $Ob = 2\pi a, \quad P = \frac{25\pi a^2}{49}$ j) $Ob = 2\pi a, \quad P = \frac{3\pi a^2}{7}$

k) $Ob = 6\sqrt{2}\pi a, \quad P = 8\pi a^2$ l) $Ob = 2\sqrt{2}\pi a, \quad P = 2a^2(4-\pi)$

m) $Ob = 2\sqrt{2}\pi a, \quad P = 4a^2$ n) $Ob = 4\pi a, \quad P = (4+\pi)a^2$

o) $Ob = \sqrt{2}\pi a, \quad P = (\pi - 2)a^2$ p) $Ob = 2\pi a, \quad P = (2\pi - 4)a^2$

q) $Ob = \frac{14}{3}\pi a, \ \ P = (\frac{19}{3}\pi - 4\sqrt{3})a^2$

r) $Ob = 3\pi a - \frac{\sqrt{2}}{2}\pi a, \ \ P = (3 + 3\pi - 2\sqrt{2}\pi)a^2$

s) $Ob = \frac{8}{3}\pi a, \quad P = (\frac{8}{3}\pi - 2\sqrt{3})a^2$ t) $Ob = 4\pi a, \quad P = (12 - 2\pi)a^2$

2.

a) $Ob = 6\pi a, \quad P = 4\sqrt{3}a^2$ b) $Ob = (10 + \frac{5}{3}\pi)a, \quad P = (4\sqrt{3} + \frac{5}{6}\pi)a^2$

c) $Ob = \pi a + \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi a, \quad P = (\frac{5}{2}\pi - 3\sqrt{3})a^2$ d) $Ob = \frac{4\sqrt{3}}{3}\pi a, \ \ P = (\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{3})a^2$

e) $Ob = 3\pi a, \quad P = (\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{4})a^2$ f) $Ob = 2\pi a, \quad P = (\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3})a^2$

3. a) $P_1 = a^2$, b) $P_2 = \frac{1}{2}ab$

4. a) $P_1 = (\frac{25}{6}\pi + \frac{25}{2}\sqrt{3})$ b) $P_2 = \frac{25}{2}(\pi - \sqrt{3})$

5. a) $P = 50(2 - 2\pi + sqrt2\pi)$, b) $P = 54 - \frac{324}{25}\pi$, c) $P = 100(4\sqrt{2} - 2 - \pi)$

6. $P_1 = 55\frac{5}{9}\pi, \quad P_2 = 100(4\sqrt{3} - \frac{11}{6}\pi)$

7. $P_1 = (\frac{\pi}{2} - 1)a^2$, d $P_2 = (\pi - 2)a^2$

8. $P = \pi - \sqrt{3}$

9. $P_1 = 600(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}), \quad P_2 = 600(\sqrt{3} - 1 - \frac{\pi}{6})$

10. wsk. Przeczytaj starannie treść zadania. $P = \frac{\pi r^2}{2}$

12. $r = \frac{10\sqrt{2} - 10}{\sqrt{2} + 1}$

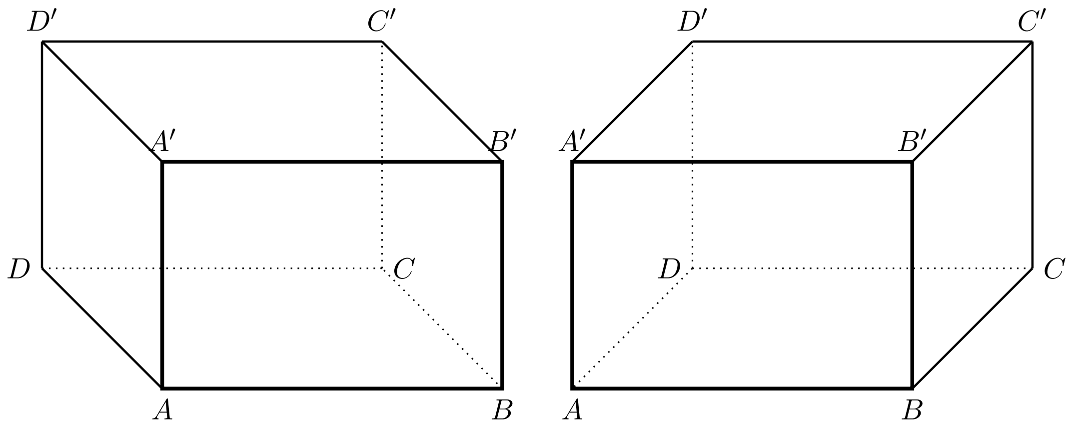
13. $r = \frac{5\sqrt{3} - 5}{2}$, $P = r^2(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3})$

14. $4\pi - 8$

Rozdział 7

WSTĘP DO STEREOMETRII, PROSTOPADŁOŚCIANY

Obecnie zajmiemy się geometrią w przestrzeni czyli tzw. stereometrią. W przypadku figur na płaszczyźnie nie mamy większych problemów z ich szkicowaniem. Naturalnym miejscem sporządzania rysunków jest dla nas kartka papieru, powierzchnia tablicy itp. W przypadku brył w przestrzeni pojawia się problem w jaki sposób na płaszczyźnie tworzyć rysunki, które dawałyby dobre wyobrażenie o tych bryłach. Metodą powszechnie stosowaną jest rysowanie brył z użyciem tzw. **rzutu równoległego**. Nie tłumaczymy na razie co to jest rzut równoległy. Na rysunku poniżej mamy przykład dwóch „spojrzeń" na prostopadłościan. Są to właśnie rysunki brył w rzucie równoległym. Pierwsze jest to spojrzenie z góry z lewej, a drugie jest to spojrzenie z góry z prawej. Modelem fizycznym prostopadłościanu jest na przykład pudełko zapałek. Prostopadłościan, w którym wszystkie krawędzie są równej długości czyli wszystkie ściany są kwadratami, nazywamy sześcianem. Modelem fizycznym sześcianu jest kostka do gry.
Na tych dwóch rysunkach ściany przednie będące prostokątami narysowaliśmy pogrubioną linią, zaś linie niewidoczne będące krawędziami prostopadłościanu, narysowaliśmy przerywaną linią. Powszechnie przyjętą praktyką jest rysowanie prostopadłościanu tak, że przednia i tylna ściana są równoległe do płaszczyzny rzutowania (do płaszczyzny na której rysujemy).



Tworząc powyższe rysunki korzystaliśmy z następującej własności rzutu równoległego: *odcinki równoległe w bryle po zrzutowaniu przechodzą w odcinki równoległe.*

UWAGI O KONWENCJACH I TERMINOLOGII

(i) litery oznaczające wierzchołki podstawy piszemy zgodnie lub przeciwnie do ruchu wskazówek zegara

(ii) literze A w dolnej podstawie odpowiada litera A' w górnej podstawie itd.

(iii) $ABCDA'B'C'D'$ oznacza prostopadłościan o podstawach $ABCD$ i $A'B'C'D'$.

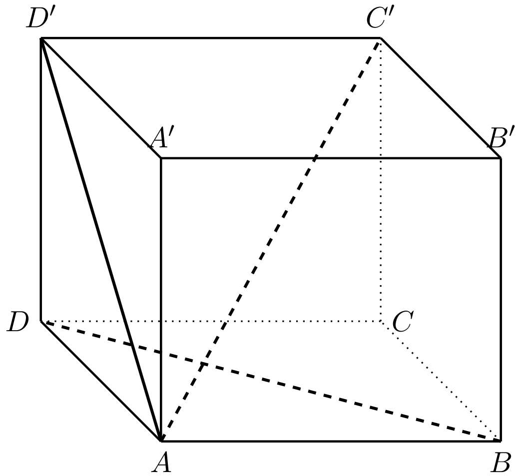
(iv) niewidoczne linie przesłonięte jakąś ścianą rysujemy linią przerywaną.

(v) Czworokąty $ABCD$ i $A'B'C'D'$ nazywamy zazwyczaj odpowiednio podstawą dolną i podstawą górną.

(vi) Pozostałe cztery czworokąty nazywamy ścianami (bocznymi).

(vii) Boki czworokątów $ABCD$ i $A'B'C'D'$ nazywamy krawędziami podstaw, zaś pozostałe cztery odcinki czyli AA', BB', CC', DD' nazywamy krawędziami bocznymi.

PRZEKĄTNE I KĄTY W PROSTOPADŁOŚCIANIE



Na rysunku obok zaznaczone są:

- AD' – przekątna ściany bocznej $AA'D'D$,
- AC' – przekątna prostopadłościanu,
- BD – przekątna podstawy prostopadłościanu.

1. Narysuj w rzucie równoległym prostopadłościan $ABCDA'B'C'D'$. Zaznacz w nim

- przekątną AC podstawy,
- przekątną BC' ściany bocznej,
- przekątną BD' prostopadłościanu.

Będziemy używali następujących terminów i związanych z nimi oznaczeń:

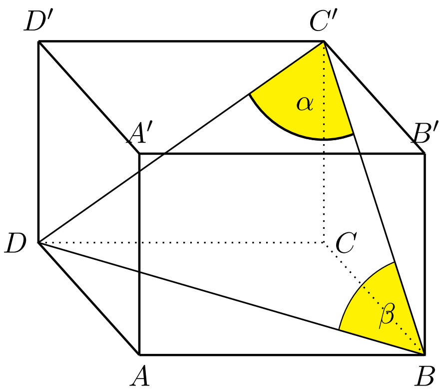
1. *pole podstawy*, które będziemy zazwyczaj oznaczać P_p,
2. *pole powierzchni bocznej*, które będziemy zazwyczaj oznaczać P_{pb},
3. *pole powierzchni całkowitej*, będące sumą pól obu podstaw oraz pola powierzchni bocznej, które będziemy oznaczać P_{pc},
4. *wysokość prostopadłościanu* jest to dowolny odcinek łączący górną i dolną podstawę prostopadłościanu, a przy tym jest prostopadły do obu podstaw. Będziemy ją zazwyczaj oznaczać literą h,
5. *objętość prostopadłościanu* będziemy oznaczać literą V, przy czym $V = P_p \cdot h$

2. W prostopadłościanie jedna krawędź podstawy ma długość 4, przekątna podstawy ma długość 5, zaś wysokość prostopadłościanu jest 2 razy dłuższa od krótszej krawędzi podstawy. Oblicz objętość oraz pole powierzchni bocznej prostopadłościanu.

3. Wysokość prostopadłościanu równa jest 8. Przekątna jednej ze ścian bocznych równa jest 10. Pole podstawy wynosi 42. Oblicz długość przekątnej podstawy prostopadłościanu.

4. Podstawą prostopadłościanu jest kwadrat, w którym przekątna ma długość $6\sqrt{2}$. Przekątna ściany bocznej jest 2 razy dłuższa od krawędzi podstawy. Oblicz objętość i pole powierzchni bocznej prostopadłościanu.

5. Przekątna podstawy prostopadłościanu ma długość 6 i tworzy z dłuższą krawędzią podstawy kąt $30°$. Wysokość prostopadłościanu jest 2 razy dłuższa od krótszej krawędzi podstawy. Wyznacz objętość i pole powierzchni bocznej tego prostopadłościanu.



DC', BC' – przekątne ścian bocznych

BD – przekątna podstawy

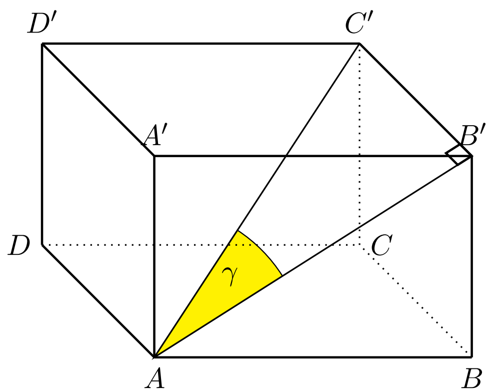
α – kąt pomiędzy przekątnymi dwóch sąsiednich ścian bocznych

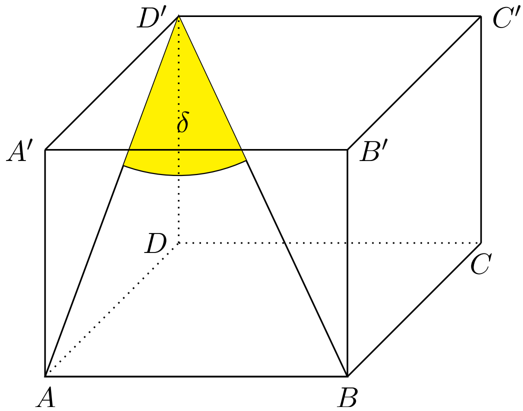
β – kąt pomiędzy przekątną ściany bocznej a przekątną podstawy

AC' – przekątna prostopadłościanu

AB' – przekątna ściany bocznej

γ – kąt pomiędzy przekątną prostopadłościanu, a przekątną ściany bocznej.





AD' – przekątna ściany bocznej,

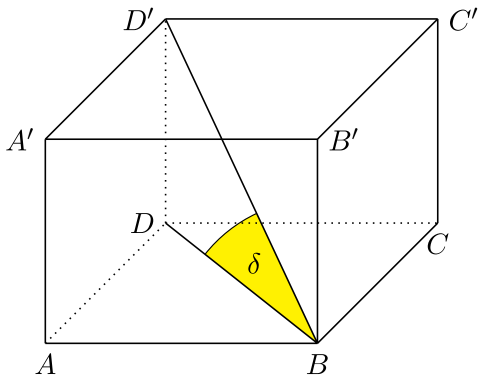
BD' – przekątna prostopadłościanu,

δ – kąt pomiędzy przekątną ściany bocznej a przekątną prostopadłościanu.

BD – przekątna podstawy,

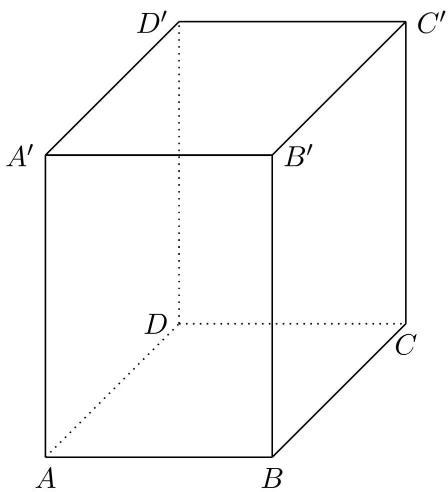
BD' – przekątna prostopadłościanu,

δ – kąt pomiędzy przekątną ściany bocznej a przekątną podstawy.



6. W prostopadłościanie na rysunku obok zaznacz:

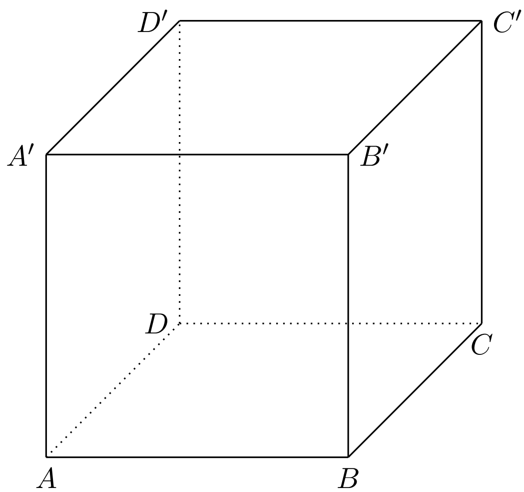
- przekątne podstawy $ABCD$, ich punkt przecięcia oznacz O;
- odcinki OA', OD' i kąt pomiędzy nimi;
- kąt pomiędzy odcinkami OA' i AA';
- kąt pomiędzy przekątnymi dwóch sąsiednich ścian bocznych.



7. Narysuj prostopadłościan $ABCDA'B'C'D'$. Zaznacz w nim kąty:

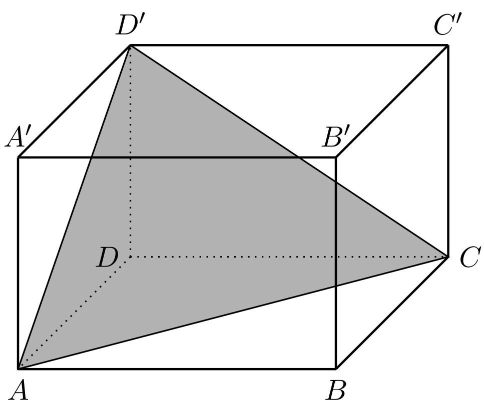
- pomiędzy przekątną ściany bocznej a krawędzią podstawy zawartą w tej ścianie
- pomiędzy przekątną ściany bocznej a krawędzią boczną zawartą w tej ścianie
- pomiędzy przekątną ściany bocznej a przekątną podstawy wychodzącą z tego samego wierzchołka
- pomiędzy przekątną ściany bocznej a przekątną prostopadłościanu

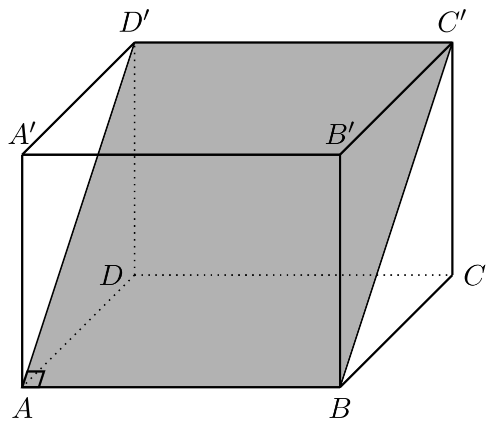
8. Na rysunku obok jest rysunek sześcianu. Sześcian jest prostopadłościanem, w którym wszystkie ściany są kwadratami. Wyznacz kąt jaki tworzą ze sobą przekątne dwóch ścian bocznych wychodzące z jednego wierzchołka.



PRZEKROJE PROSTOPADŁOŚCIANU

Będziemy rozważali przekroje przechodzące przez trzy lub cztery wierzchołki bryły czyli przekroje będące trójkątami lub czworokątami. Będziemy również rozpatrywać przekroje przechodzące przez wskazane punkty na krawędziach prostopadłościanu. Na jednym z poniższych dwóch rysunków przekrój jest trójkątem, a na drugim prostokątem.





9. Narysuj prostopadłościan $ABCDA'B'C'D'$. Zaznacz w nim przekrój zawierający

- przekątną górnej podstawy oraz jeden wierzchołek dolnej podstawy
- dwie równoległe przekątne dwóch przeciwległych ścian bocznych
- środki dwóch równoległych krawędzi górnej podstawy oraz krawędź boczną dolnej podstawy
- przekątną górnej podstawy i przekątną dolnej podstawy
- krawędź górnej podstawy i krawędź dolnej podstawy

10. W prostopadłościanie $ABCDA'B'C'D'$ mamy: $V = 1296$, $|CB| = 2|AB|$, $|CC'| = 3|AB|$. Wyznacz:

a) długość przekątnej d_1 ściany $ABB'A'$ oraz przekątnej d_2 ściany $BCC'B'$

b) długość przekątnej prostopadłościanu;

c) $P_{BCD'A'}$;

d) $P_{BC'D'}$;

11. W prostopadłościanie $ABCDA'B'C'D'$ dane są: $|BC| = 5$, $|AB| = 15$, $|CC'| = 12$, $E \in \overline{C'D'}$ i $|D'E| = 2|C'E|$. Wyznacz:

a) $|CE|$

b) $|BE|$

c) P_{BCE};

Wskazówki i odpowiedzi.

2. $V = 72$, $Ppb = 84$

3. $d = \sqrt{85}$

4. $V = 216\sqrt{3}$, $Ppb = 144\sqrt{3}$

5. $V = 54\sqrt{3}$, $Ppb = 36 + 36\sqrt{3}$

8. wsk. wszystkie ściany sześcianu są przystającymi do siebie kwadratami,

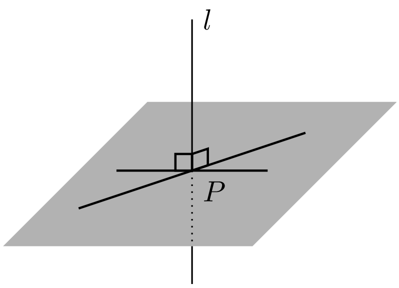
10. a) $d_1 = 6\sqrt{10}$, $d_2 = 6\sqrt{13}$, b) $d = 6\sqrt{14}$, c) $P_{BCD'A'} = 72\sqrt{10}$, d) $P_{BC'D'} = 18\sqrt{13}$

11. a) $|CE| = 13$, b) $|BE| = \sqrt{194}$, c) $P_{BCE} = 32\frac{1}{2}$

Rozdział 8

GRANIASTOSŁUPY

Zanim zajmiemy się graniastosłupami wyjaśnijmy wpierw co to oznacza, że prosta jest prostopadła do płaszczyzny.



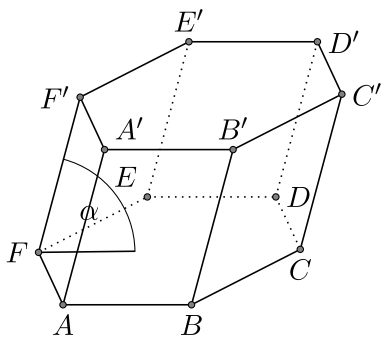
DEFINICJA

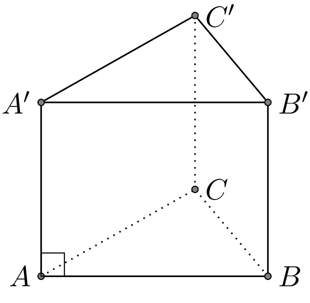
Mówimy, że prosta l przebijająca płaszczyznę w punkcie P jest prostopadła do tej płaszczyzny, jeżeli jest prostopadła do każdej prostej leżącej w tej płaszczyźnie i przechodzącej przez punkt P.

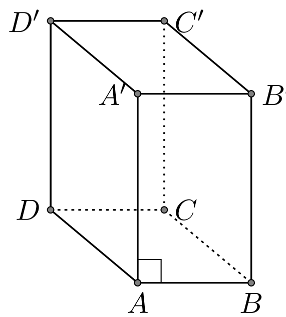
UWAGA

Wystarczy, że prosta l jest prostopadła do dwóch takich prostych, aby była prostopadła do tej płaszczyzny.

A teraz przejdźmy do graniastosłupów, gdzie będziemy używać pojęcia: „prosta prostopadła do płaszczyzny”.
Graniastosłupy są to bryły, które mają dwie równoległe podstawy, będące przystającymi (takimi samymi) wielokątami, a ich ściany są równoległobokami. Na poniższych rysunkach mamy przykłady trzech graniastosłupów.







Pierwszym graniastosłupem jest graniastosłup pochyły. Jego krawędzie boczne tworzą kąt ostry z płaszczyzną podstawy.

Drugi i trzeci graniastosłup sa graniastosłupami prostymi, co oznacza, że ich krawędzie boczne są prostopadłe do płaszczyzny podstawy.

Podstawą trzeciego graniastosłupa jest prostokąt, jest on zatem prostopadłościanem. Oznacza to, że prostopadłościan jest szczególnym przypadkiem graniastosłupa.

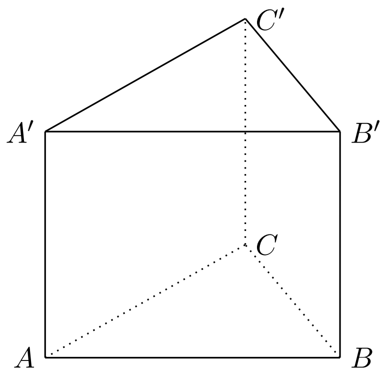
W kursie szkolnym będziemy zajmować się tylko graniastosłupami prostymi czyli takimi graniastosłupami, w których krawędzie boczne są prostopadłe do płaszczyzny podstawy, a ich ściany boczne są prostokątami.

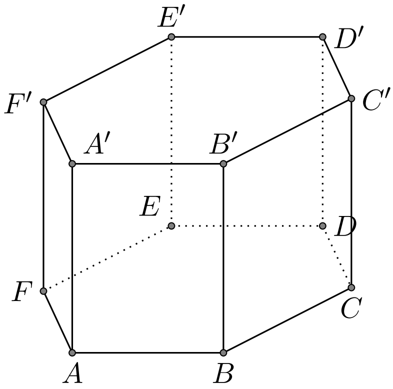
UWAGI :

- Graniastosłup prosty nazywamy *prawidłowym*, jeżeli jego podstawą jest wielokąt foremny, czyli taki wielokąt, który można wpisać w okrąg i w którym wszystkie boki są równe oraz wszystkie kąty są równe.
- Wysokością graniastosłupa jest odcinek łączący obie podstawy graniastosłupa a przy tym prostopadły do tych podstaw.
- W graniastosłupie prostym wysokością jest każda z krawędzi bocznych.
- Jeżeli P oznacza pole podstawy, h wysokość graniastosłupa, zaś V jego objętość, to $V = P \cdot h$.
- Szczególnym przypadkiem graniastosłupa jest prostopadłościan. Prostopadłościan jest bowiem graniastosłupem prostym o podstawie prostokątnej.

1. Na rysunku poniżej mamy graniastosłup narysowany w rzucie równoległym. Podstawą jego jest trójkąt równoboczny. Zaznacz na rysunku

- przekątne ścian bocznych wychodzące z wierzchołka C';
- zacieniuj trójkąt ABC'. Ten trójkąt jest przekrojem graniastosłupa płaszczyzną przechodzącą przez wierzchołek górnej podstawy i krawędź dolnej podstawy.
- Zaznacz łukami kąty trójkąta ABC'.

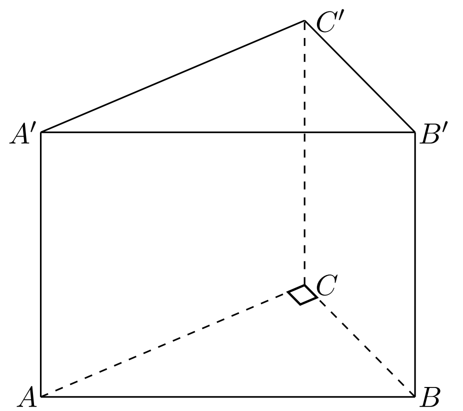


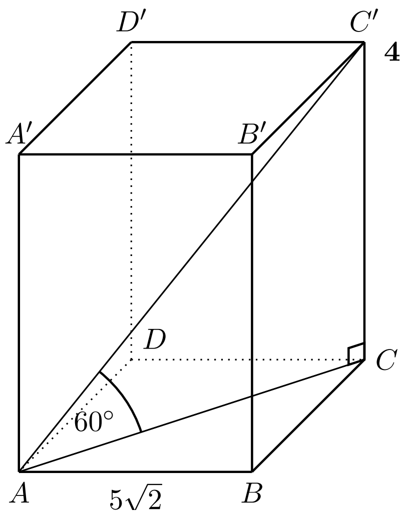


2. Na rysunku obok mamy graniastosłup prawidłowy sześciokątny narysowany w rzucie równoległym. Zaznacz na nim przekrój płaszczyzną zawierający dłuższe przekątne BE i $B'E'$ oraz przekrój płaszczyzną zawierający krótsze przekątne BD i $B'D'$.

3. Podstawą graniastosłupa trójkątnego $ABCA'B'C'$ na rysunku obok, jest trójkąt prostokątny ABC, w którym kąt C jest prosty. Zaznacz w nim

- przekrój płaszczyzną ABC'
- kąt pomiędzy przekątnymi ścian bocznych wychodzącymi z wierzchołka C
- przekrój płaszczyzną przechodzącą przez jedną z przyprostokątnych dolnej podstawy oraz odpowiedni wierzchołek górnej podstawy





4. W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź podstawy ma długość $5\sqrt{2}$, a przekątna graniastosłupa tworzy z przekątną podstawy kąt $60°$. Wyznacz kolejno

a) długość przekątnej podstawy

b) długość przekątnej graniastosłupa

c) wysokość graniastosłupa

d) pole powierzchni bocznej i objętość graniastosłupa

5. W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym przekątna podstawy ma długość $3\sqrt{6}$. Przekątna ściany bocznej tworzy z krawędzią podstawy kąt $\alpha = 60°$. Wyznacz kolejno

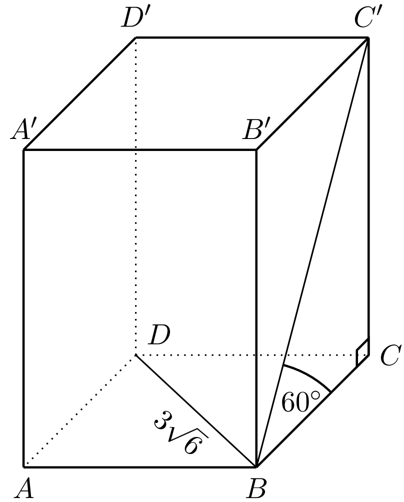
a) długość krawędzi podstawy,

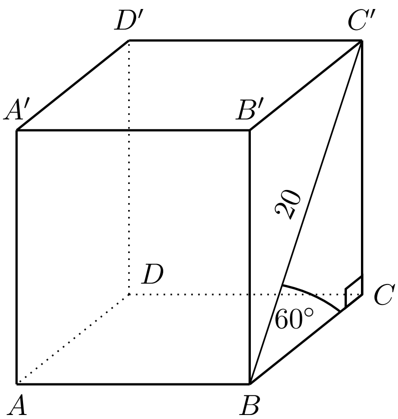
b) wysokość graniastosłupa (korzystając z trójkąta BCC'),

c) pole podstawy,

d) objętość graniastosłupa,

e) pole powierzchni całkowitej.





6. W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym przekątna ściany bocznej ma długość 20 i tworzy z krawędzią podstawy kąt 60°. Wyznacz objętość i pole powierzchni bocznej tego graniastosłupa. Dla ułatwienia masz już przygotowany rysunek. W taki sam sposób, czyli w rzucie równoległym, sporządzaj rysunki w następnych zadaniach.

7. W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym przekątna graniastosłupa ma długość 12 i tworzy z przekątną podstawy kąt 30°. Wyznacz objętość i pole powierzchni bocznej tego graniastosłupa.

8. Podstawą graniastosłupa prostego jest trójkąt równoboczny. Przekątna ściany bocznej ma długość 10 i tworzy z krawędzią podstawy kąt 60°. Wyznacz objętość i pole powierzchni bocznej tego graniastosłupa.

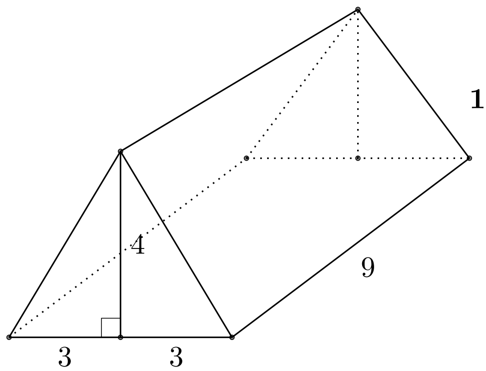
9. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość graniastosłupa prawidłowego czworokątnego wiedząc, że przekątna tego graniastosłupa ma długość 10, a przekątna ściany bocznej długość 8.

10. Dany jest graniastosłup prawidłowy czworokątny, w którym przekątna bryły ma długość 14, zaś przekątna ściany bocznej ma długość 10. Wyznacz objętość i pole powierzchni bocznej tego graniastosłupa.

11. Podstawą graniastosłupa jest romb. Krótsza przekątna rombu ma długość $2\sqrt{3}$, a miara kąta ostrego rombu wynosi $60°$. Wysokość graniastosłupa jest 3 razy większa od dłuższej przekątnej rombu. Wyznacz objętość graniastosłupa.

12. Podstawą graniastosłupa jest sześciokąt foremny. Przekrój graniastosłupa płaszczyzną prostopadłą do obu podstaw i przechodzącą przy tym przez dłuższe przekątne tych podstaw, jest prostokątem o powierzchni $2\,\mathrm{m}^2$. Oblicz pole powierzchni bocznej i objętość tego graniastosłupa, jeżeli jego wysokość jest 4 razy dłuższa od krawędzi podstawy.

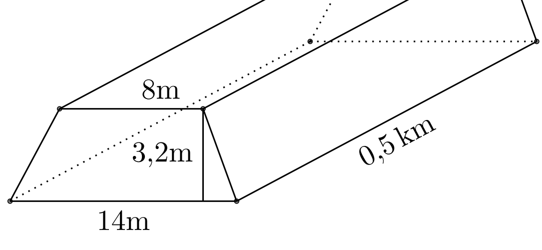
13. Długość budynku jest równa 52,5 m, szerokość 10,5 m a wysokość 16,8 m. W budynku tym jest 160 okien o wymiarach 1,6 m $\times$ 2,25 m oraz 4 pary drzwi o wymiarach 1 m $\times$ 2,5 m. Oblicz ile ton zaprawy potrzeba na otynkowanie tego domu, jeżeli na $1\,\mathrm{m}^2$ powierzchni potrzeba 20 kg zaprawy.



14. Dach ma wymiary takie jak na rysunku obok. a) Ile metrów sześciennych powietrza mieści się pod dachem? b) Ile metrów kwadratowych ma powierzchnia, którą należy pokryć dachówką?

15. Oblicz ile wody deszczowej spadło na teren w kształcie trapezu prostokątnego o podstawach 2,4 km i 0,6 km odległych od siebie o 0,8 km, jeżeli wysokość słupa wody wynosi 2,5 mm. Odpowiedź podaj w m^3.

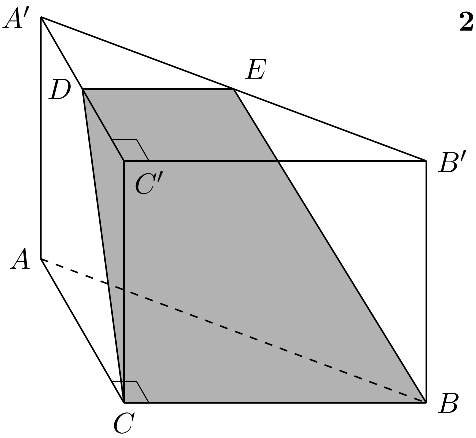
16. Nasyp kolejowy ma kształt graniastosłupa czworokątnego o podstawie trapezu równoramiennego o podstawach długości 14 m i 8 m oraz o wysokości 3,2 m. Ile metrów sześciennych ziemi potrzeba na usypanie 0,5 km takiego nasypu.



17. W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym wysokość podstawy ma długość $4\sqrt{3}$, a przekątna ściany bocznej tworzy z krawędzią podstawy kąt $45°$. Wyznacz objętość i pole powierzchni bocznej graniastosłupa.

18. Podstawą graniastosłupa prostego jest trójkąt równoboczny. Przekątna ściany bocznej ma długość 4 i tworzy z krawędzią podstawy kąt $60°$. Wyznacz objętość i pole powierzchni bocznej tego graniastosłupa.

19. Każda ze ścian bocznych prawidłowego graniastosłupa trójkątnego jest kwadratem o boku długości 4. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.



20. Podstawą graniastosłupa jest trójkąt prostokątny ABC, w którym $\sphericalangle C = 90°$, $AB = 10$, $AC = 6$, $BB' = 4$. Punkt D jest środkiem odcinka $A'C'$, a punkt E jest środkiem odcinka $A'B'$.
a) Uzasadnij, że czworokąt $CBDE$ jest trapezem. (jakim?)
b) Wyznacz długości jego podstaw i wysokość.
c) Wyznacz pole trójkątów CDE i $A'BC$.

21. Przekątne dwóch sąsiednich ścian prostopadłościanu poprowadzone z tego samego wierzchołka są mają długość $8\sqrt{2}$. Kąt między tymi przekątnymi ma miarę $60°$. Oblicz objętość prostopadłościanu.

22. Podstawą graniastosłupa prostego jest romb o boku długości 17 i przekątnej długości 16. Dłuższa przekątna graniastosłupa ma długość 34. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

23. Podstawą graniastosłupa prostego jest romb o boku długości 5 i kącie ostrym $45°$. Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa wynosi $25(8 + \sqrt{2})$. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

24. Podstawą graniastosłupa prostego jest równoległobok o kącie ostrym $45°$. Jeden z boków podstawy jest dwa razy dłuższy od drugiego boku. Wiedząc, że wysokość graniastosłupa wynosi $9\sqrt{2}$, a jego objętość wynosi 288, oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

25. Podstawą graniastosłupa prostego jest trójkąt równoramienny o bokach długości 13, 13 i 10. Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa wynosi 390. Oblicz jego objętość.

26. Podstawą graniastosłupa prostego jest sześciokąt foremny, a ściany boczne tego graniastosłupa są kwadratami. Objętość graniastosłupa jest równa $2592\sqrt{3}$. Oblicz pole jego powierzchni bocznej.

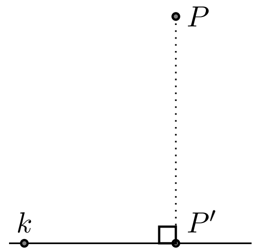
27. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość graniastosłupa prostego, którego podstawą jest romb o przekątnych długości 12 i 16 wiedząc, że przekątna ściany bocznej graniastosłupa ma długość 26.

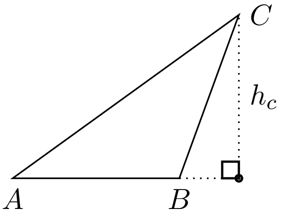
28. Podstawą graniastosłupa prostego jest romb o boku długości 10 i kącie ostrym 60°. Krótsza przekątna graniastosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 45°. Oblicz objętość graniastosłupa.

Przypomnijmy co to jest odległość punktu od prostej.

DEFINICJA

Niech dana będzie dowolna prosta k i dowolny punkt P nie leżący na niej. Przez ten punkt przechodzi dokładnie jedna prosta prostopadła do prostej k, która przecina prostą k, powiedzmy w punkcie P'. Długość odcinka PP' nazywamy odległością punktu P od prostej k.





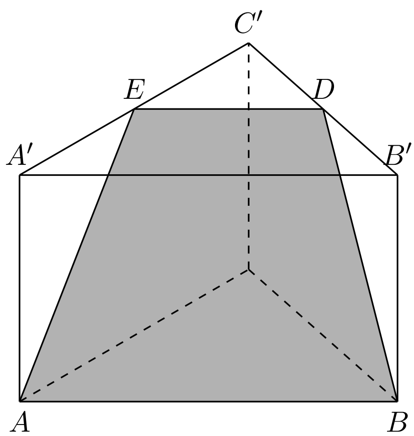
Zauważ, że na przykład w trójkącie ABC długość wysokości h_c, czyli wysokości opuszczonej z wierzchołka C na podstawę AB, jest odległością punktu C od prostej AB. Odległość punktu M od prostej k będziemy oznaczać $d(M,k)$, odległość punktu M od prostej AB będziemy oznaczać $d(M, l_{AB})$.

29. W graniastosłupie $ABCA'B'C'$ podstawa ABC jest trójkątem równobocznym o boku długości 4. Wysokość graniastosłupa ma długość 6. Punkt D jest środkiem boku $B'C'$, a punkt E środkiem boku $A'C'$.

a) Uzasadnij, że czworokąt $ABDE$ jest trapezem (jaki to jest trapez?)

b) Wyznacz długości jego ramion, wysokość i pole.

c) Wyznacz $d(B, l_{A'C'})$.



30* Podstawą prostopadłościanu $ABCDA'B'C'D'$ jest kwadrat o boku długości 10. Wysokość prostopadłościanu jest równa 12. Wyznacz

a) $P_{ACC'}$,

b) $d(B, l_{AD'})$,

c) $d(B, l_{AB'})$

d) $d(C, l_{AC'})$

Wskazówki i odpowiedzi.

4. a) 10, b) 20, c) $10\sqrt{3}$,
d) $P_b = 200\sqrt{6}$, $V = 500\sqrt{3}$

5. a) $3\sqrt{3}$, b) 9, c) 27,
d) $V = 243$, e) $Pc = 54 + 108\sqrt{3}$

6. $V = 1\,000\sqrt{3}$, $Pb = 400\sqrt{3}$

7. $Pb = 72\sqrt{6}$, $V = 324$

8. $V = 93\frac{3}{4}$, $Pb = 75\sqrt{3}$

9. $V = 72\sqrt{7}$, $Pc = 72 + 48\sqrt{7}$

10. $Pb = 32\sqrt{6}$, $V = 192$

11. $V = 108\sqrt{3}$

12. $V = \frac{3}{4}\sqrt{3}\,\mathrm{m}^3$, $Pb = 6\,\mathrm{m}^2$

13. 30,616 t

14. a) $108\,\mathrm{m}^3$, b) $90\,\mathrm{m}^2$

15. $3\,000\,\mathrm{m}^3$

16. $17\,600\,\mathrm{m}^3$

17. $V = 128\sqrt{3}$, $P_b = 192$

18. $V = 6$, $P_b = 12\sqrt{3}$

19. $P_{pc} = 8\sqrt{3} + 48$

20. a) Zauważ, że punkty D i E są środkami boków trójkąta $A'B'C'$.
b) $BC = 8$, $DE = 4$, $CD = h_{\text{trapezu}} = 5$.
c) $P_{CDE} = 10$, $P_{A'BC} = 8\sqrt{13}$.

21. $V = 512$

22. $V = 3\,840$

23. $V = 125\sqrt{2}$

24. $P_{pc} = 248\sqrt{2}$

25. $V = 450$

26. $P_b = 864$

27. $V = 2304$, $P_c = 1152$

28. $V = 500\sqrt{3}$

29. a) Co wiemy o odcinku łączącym środki boków trójkąta?
b) Długość ramion $2\sqrt{10}$, $h = \sqrt{39}$, $P = \frac{4+2}{2}\sqrt{39} = 3\sqrt{39}$
c) Co to jest odległość punktu od prostej? Na przykład odległość punktu C od prostej AB?

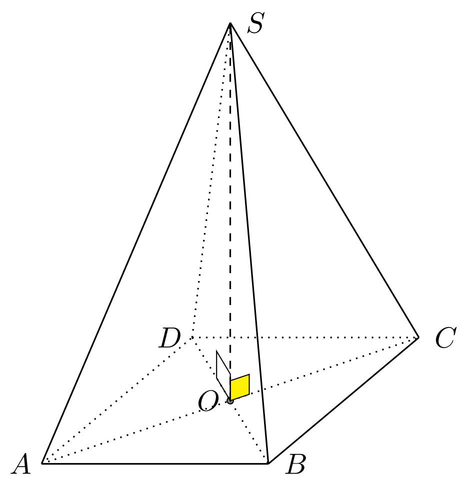
30. a) $P_{ACC'} = 60\sqrt{2}$
b) $d(B, l_{AD'}) = 10$
c) $d(B, l_{AB'}) = \frac{60}{61}\sqrt{61}$
d) $d(C, l_{AC'}) = \frac{60}{83}\sqrt{166}$

Rozdział 9

OSTROSŁUPY

Ostrosłup jest to wielościan, którego podstawą jest wielokąt.
Ścianami bocznymi są trójkąty, które mają wspólny wierzchołek leżący poza płaszczyzną podstawy.
Odcinek łączący wierzchołek ostrosłupa z płaszczyzną w której leży podstawa ostrosłupa, a przy tym prostopadły do tej podstawy nazywamy *wysokością ostrosłupa.* Na rysunku poniżej narysowany jest ostrosłup w rzucie równoległym, w którym:

- podstawą jest czworokąt $ABCD$,
- ścianami bocznymi są trójkąty ABS, BCS, CDS, ADS,
- S jest wierzchołkiem ostrosłupa,
- krawędzie boczne: AS, BS, CS, DS
- krawędzie podstawy: AB, BC, CD, DA
- SO jest wysokością ostrosłupa, co oznacza, że kąty SOD i COS są proste,
- punkt O jest spodkiem wysokości ostrosłupa.

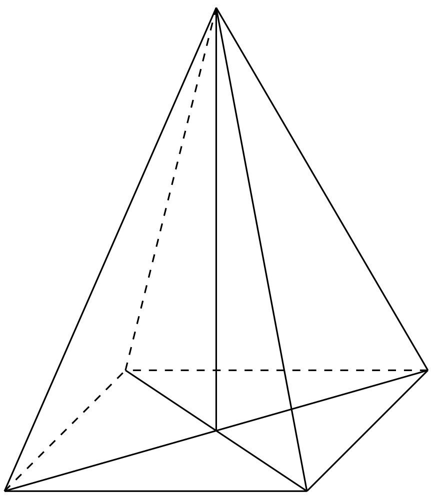


UWAGI :

- Ostrosłup, którego podstawą jest trójkąt, nazywamy *ostrosłupem trójkątnym.* Ostrosłup, którego podstawą jest czworokąt nazywamy *ostrosłupem czworokątnym*, itd.
- Ostrosłup, którego podstawą jest wielokąt foremny a krawędzie boczne są równej długości, nazywamy *ostrosłupem prawidłowym prostym.*

- Ściany ostrosłupa prawidłowego prostego są trójkątami równoramiennymi.
- Jeżeli P oznacza pole podstawy, h wysokość ostrosłupa, zaś V jego objętość, to $V = \frac{1}{3} \cdot P \cdot h$.
- Niech wierzchołkiem ostrosłupa będzie punkt S. Jeżeli jego podstawą jest trójkąt ABC, to zapiszemy ten ostrosłup $ABCS$, jeżeli podstawą jest czworokąt $ABCD$, to zapiszemy ten ostrosłup $ABCDS$, itd.
- Spodek wysokości ostrosłupa prawidłowego prostego leży w środku okręgu opisanego na podstawie. W przypadku gdy podstawą jest kwadrat, to spodek wysokości leży w punkcie przecięcia przekątnych podstawy.

1. Narysuj w rzucie równoległym ostrosłup prawidłowy kwadratowy zaznaczając w nim przekątne podstawy oraz wysokość ostrosłupa.



2. Na rysunku obok narysowany jest w rzucie równoległym ostrosłup prawidłowy czworokątny. Zaznacz w nim

a) kąt pomiędzy krawędzią boczną a krawędzią podstawy,

b) kąt pomiędzy krawędzią boczną a wysokością ostrosłupa,

c) kąt pomiędzy krawędzią boczną a przekątną podstawy,

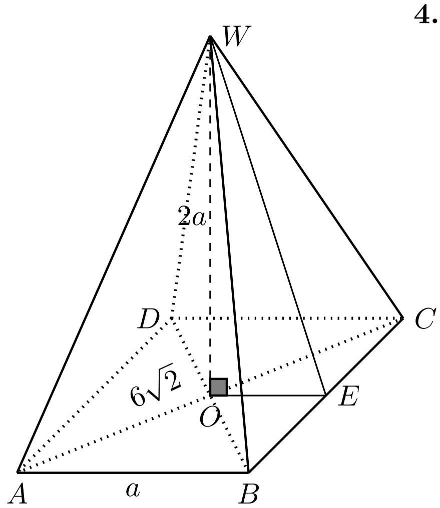
d) kąt (przy wierzchołku) pomiędzy dwiema krawędziami leżącymi w jednej ścianie bocznej,

e) kąt (przy wierzchołku) pomiędzy dwiema krawędziami nie leżącymi w jednej ścianie bocznej.

3. Narysuj w rzucie równoległym ostrosłup prawidłowy czworokątny zaznaczając w nim przekątne podstawy, wysokość ostrosłupa oraz wysokość jednej ze ścian bocznych. Zaznacz w nim następnie kąt pomiędzy wysokością ściany bocznej a

a) krawędzią boczną

b) wysokością ostrosłupa



4. Podstawą ostrosłupa prostego jest kwadrat o przekątnej długości $6\sqrt{2}$. Wysokość tego ostrosłupa jest 2 razy dłuższa od krawędzi podstawy. Wyznacz kolejno:

a) długość krawędzi podstawy i wysokość ostrosłupa

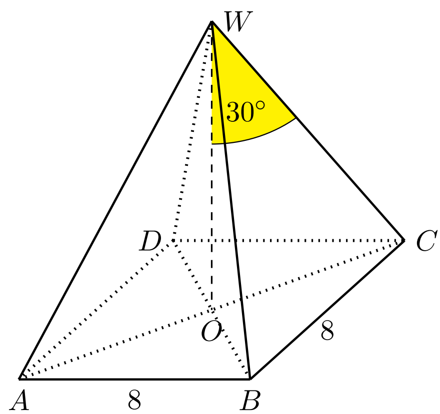
b) pole podstawy i objętość ostrosłupa

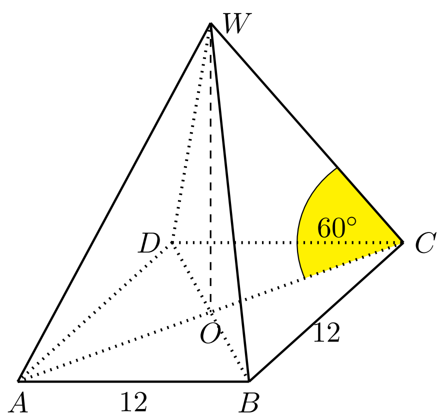
c) długość odcinka OE, odcinek OE jest wysokością trójkąta BCO (E jest środkiem boku BC)

d) długość odcinka WE

e) pole ściany bocznej BCW i pole pow. bocznej ostrosłupa.

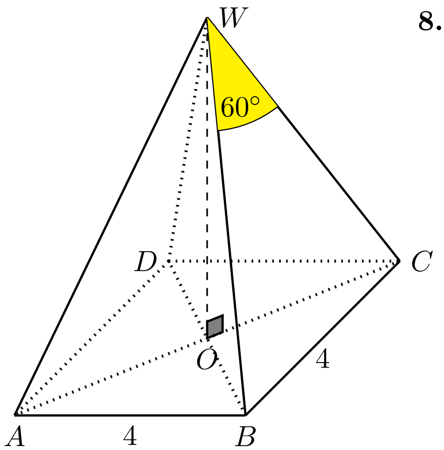
5. Podstawą ostrosłupa prawidłowego prostego jest kwadrat o boku długości 8. Krawędź boczna tworzy z wysokością ostrosłupa kąt 30°. Wyznacz objętość i pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.





6. Podstawą ostrosłupa na rysunku obok, jest kwadrat o boku długości 12. Krawędź boczna tworzy z przekątną podstawy kąt 60°. Oblicz pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.

7. Podstawą ostrosłupa jest prostokąt. Spodek wysokości ostrosłupa pokrywa się ze środkiem okręgu opisanego na podstawie. Przekątna podstawy ma długość 10. Jedna z krawędzi podstawy ma długość 8. Wysokość ostrosłupa jest równa połowie długości krótszej krawędzi podstawy. Wyznacz objętość i pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.



8. Podstawą ostrosłupa prawidłowego prostego jest kwadrat o boku długości 4. Kąt pomiędzy dwiema sąsiednimi krawędziami bocznymi równy jest 60°. Wyznacz kolejno:

a) długość krawędzi bocznej, pole ściany BCW i pole pow. bocznej

b) $|OC|$, $|OW|$

c) objętość ostrosłupa.

9. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź boczna o długości 8 tworzy z wysokością tego ostrosłupa kąt 60°. Oblicz objętość ostrosłupa.

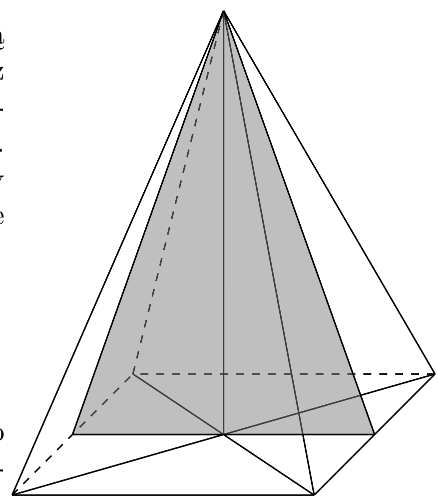
10. Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego wynosi 12, a krawędź podstawy ma długość 2. Oblicz objętość ostrosłupa.

11. Ostrosłup prawidłowy czworokątny przecięto płaszczyzną przechodzącą przez wierzchołek ostrosłupa i przez środki przeciwległych krawędzi podstawy – tak jak na rysunku obok. Wysokość ostrosłupa jest 2 razy dłuższa od krawędzi podstawy. Pole przekroju jest równe 64. Wyznacz:

a) długość krawędzi podstawy,

b) pole powierzchni bocznej,

c) pole przekroju zawierającego wierzchołek ostrosłupa i przekątną podstawy.



12. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, jeżeli krawędź podstawy ma długość 6, a wysokość ostrosłupa ma długość 4.

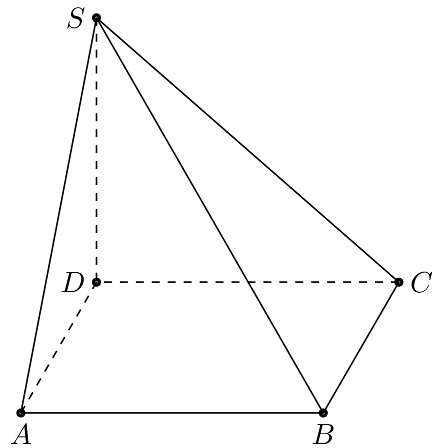
13. Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego, którego podstawą jest kwadrat o boku długości 6, a wysokość ściany bocznej ma długość 5.

14.* Podstawą ostrosłupa $ABCDS$ jest prostokąt $ABCD$. Krawędź boczna SD jest wysokością ostrosłupa. Krawędź AD ma długość 2. Krawędź boczna SA tworzy z krawędzią AD kąt $60°$, a krawędź CS tworzy z krawędzią CD kąt $30°$. Wyznacz

a) objętość ostrosłupa;

b) pole każdej ściany bocznej;

c) długość krawędzi SB.



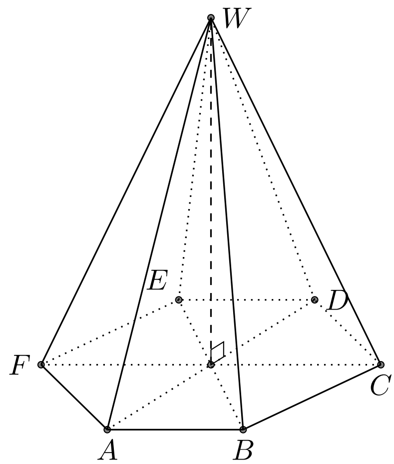
15. W czworokątnym ostrosłupie prawidłowym każda krawędź ma długość 4. Oblicz jego objętość.

16. Wyznacz pole powierzchni całkowitej i objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, w którym wysokość ma długość 3, a krawędź boczna długość 5.

17. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym krawędzie boczne mają długość 6. Każde dwie krawędzie boczne tworzą przy wierzchołku ostrosłupa kąt prosty. Wyznacz, w pamięci, objętość tego ostrosłupa oraz obwód podstawy.

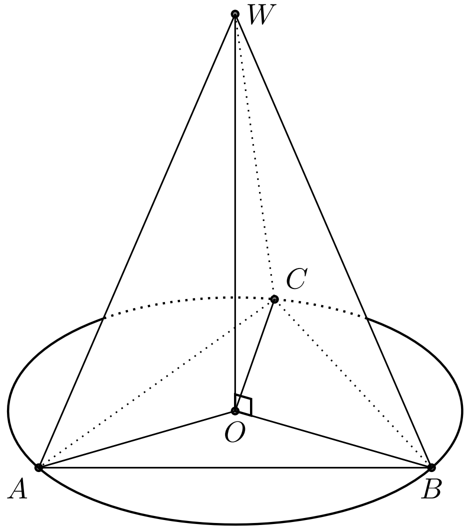
18. Wyznacz objętość ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego o krawędzi podstawy długości 6 i krawędzi bocznej długości 10.

19. W ostrosłupie trójkątnym $ABCS$ krawędzie wychodzące z wierzchołka S są do siebie wzajemnie (czyli parami) prostopadłe. Długości tych krawędzi są równe 4, 6, i 8. Wyznacz objętość tego ostrosłupa (tylko w pamięci). Wyznacz pole powierzchni bocznej (jak chcesz, to też to zrób w pamięci). Wyznacz obwód trójkąta ABC. wsk. porównaj poprzednie zadanie.



20. Promień okręgu opisanego na podstawie prawidłowego ostrosłupa trójkątnego ma długość 4. Krawędź boczna ostrosłupa ma długość 5. Oblicz objętość ostrosłupa.

21. W ostrosłupie trójkątnym $ABCS$ wszystkie krawędzie boczne mają długość 12, $\sphericalangle ASB = 90°$, $\sphericalangle BSC = 120°$, $\sphericalangle ASC = 60°$. Wyznacz pole powierzchni bocznej i obwód trójkąta ABC.



Wskazówki i odpowiedzi.

4. a) $a = 6$, $h = 12$;
b) $P_p = 36$, $V = 144$;
c) $OE = 3$;
d) $WE = 3\sqrt{17}$;
e) $P_{BCW} = 9\sqrt{17}$, $P_{pb} = 36\sqrt{17}$

5. $V = \frac{256}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$, $P_b = 64\sqrt{\frac{5}{3}}$

6. $P_b = 144\sqrt{7}$

7. $V = 48$, $P_b = 30 + 24\sqrt{3}$

8. a) kr. b. $= 4$, $P_{BCW} = 4\sqrt{3}$, $P_b = 16\sqrt{3}$,
b) $|OC| = 2\sqrt{2}$, $|OW| = 2\sqrt{2}$, $|OW| = 2\sqrt{2}$, c) $V = \frac{32}{3}\sqrt{2}$

9. $V = 128$

10. $V = \frac{4}{3}\sqrt{3}$

11. a) 8, b) $V = 64\sqrt{17}$
c) $P = 64\sqrt{2}$

12. $V = 48$, $P_{pb} = 60$, $P_c = 96$

13. $V = 48$

14. a) $V = 8\sqrt{3}$,
b) $P_{ABS} = 12$, $P_{ADS} = 2\sqrt{3}$, $P_{CDS} = 6\sqrt{3}$, $P_{BCS} = 4\sqrt{3}$,
c) $|SB| = 2\sqrt{13}$

15. $V = 16\sqrt{2}$

16. $V = 32$, $P_b = 8\sqrt{34} + 32$

17. wsk. Rób to tylko w pamięci! Możesz zrobić rysunek. $V = 36$, $Ob = 18\sqrt{2}$

18. $V = 144\sqrt{3}$

19. $V = 32$, $P_{pb} = 52$, $Ob_{ABC} = 2\sqrt{13} + 4\sqrt{5} + 10$

20. $V = 48$. Rozpatrz trójkąt AOB

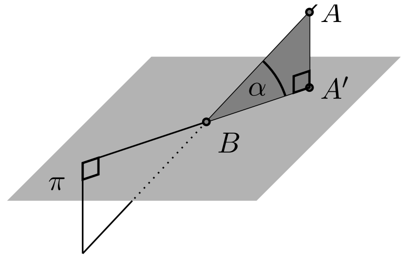
21. $Ob_{ABC} = 12 + 12\sqrt{2} + 12\sqrt{3}$, $P_p = 72 + 72\sqrt{3}$

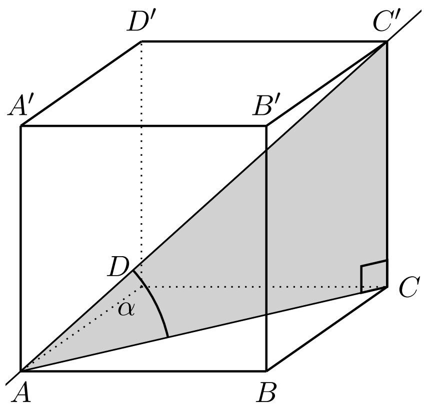
Rozdział 10

KĄT MIĘDZY PROSTĄ I PŁASZCZYZNĄ*

W tym rozdziale zajmiemy się nowym pojęciem, a mianowicie *kątem pomiędzy prostą a płaszczyzną*.

Na rysunku obok zaznaczony jest kąt nachylenia prostej AB do płaszczyzny π lub inaczej mówiąc: kąt między prostą AB a płaszczyzną π. Prosta przebija płaszczyznę π w punkcie B. Odcinek AA' jest prostopadły do płaszczyzny π.





Kąt nachylenia przekątnej AC' (czyli prostej AC') do płaszczyzny podstawy prostopadłościanu czyli (w tym przypadku) kąt pomiędzy przekątną AC' a przekątną AC, dla których A jest wspólnym punktem.

1. W prostopadłościanie krawędzie podstawy mają długości 6 i 8. Przekątna prostopadłościanu tworzy z płaszczyzną podstawy kąt $60°$. Oblicz objętość prostopadłościanu. Odpowiedź zapisz w postaci $a\sqrt{b}$, gdzie $a, b \in \mathbb{N}$.

2. Przekątna prostopadłościanu ma długość 10 i tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 60°. Jedna z krawędzi podstawy ma długość 4. Wyznacz objętość i pole powierzchni bocznej prostopadłościanu.

3. Podstawą prostopadłościanu jest kwadrat o boku długości 2. Odcinek łączący wierzchołek górnej podstawy z punktem przecięcia przekątnych dolnej podstawy tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 60°. Wyznacz objętość prostopadłościanu.

4. W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym $ABCA'B'C'$ poprowadzono odcinek $A'D$, gdzie D jest środkiem boku BC. Odcinek $A'D$ jest nachylony do płaszczyzny podstawy pod kątem $\alpha = 60°$. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość tego graniastosłupa, jeżeli krawędź podstawy ma długość 4.

5. Podstawą graniastosłupa prostego $ABCDA'B'C'D'$ jest trapez równoramienny, w którym $|AB| = 21$, $|CD| = 11$, $|AD| = |CB| = 13$. Przekątna ściany $ADD'A'$ jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60°. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość tego graniastosłupa.

6. Podstawą graniastosłupa prostego jest romb o boku długości 10 i kącie ostrym 60°. Krótsza przekątna graniastosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 45°. Oblicz objętość graniastosłupa.

7. Narysuj w rzucie równoległym ostrosłup prawidłowy kwadratowy zaznaczając w nim przekątne podstawy, wysokość ostrosłupa oraz wysokość jednej ze ścian bocznych. Zaznacz w nim następnie kąt pomiędzy

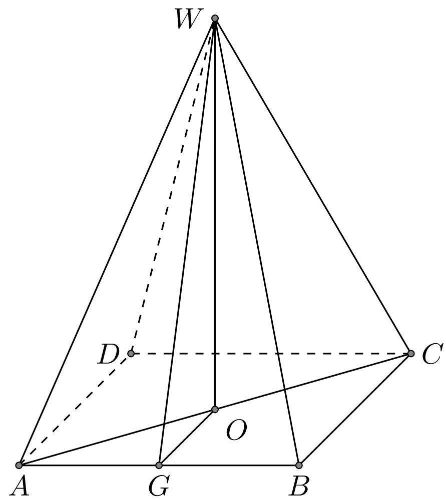
a) krawędzią boczną a płaszczyzną podstawy

b) wysokością ściany bocznej a płaszczyzną podstawy

8. Podstawą ostrosłupa jest kwadrat o przekątnej długości 6. Krawędź boczna tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 60°. Wyznacz objętość i pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.

9. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60°. Przekątna podstawy ma długość 8. Oblicz objętość ostrosłupa.

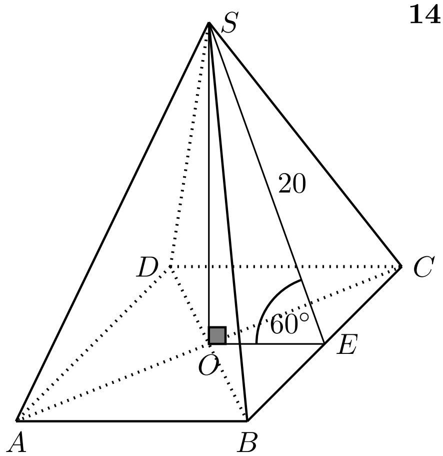
10. Podstawą ostrosłupa jest prostokąt $ABCD$, którego przekątna ma długość 20. Spodek wysokości ostrosłupa leży w miejscu przecięcia przekątnych podstawy. Krawędź BC ma długość 12. Wysokość WG ściany bocznej ABW, tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 60°. Wyznacz objętość i pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.



11. W czworokątnym ostrosłupie prawidłowym krawędź boczna ma długość 10 i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60°. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

12. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź podstawy ma długość 16, zaś wysokość ściany bocznej tworzy z podstawą ostrosłupa kąt 60°. Wyznacz objętość i pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.

13. (na tablicy) Podstawą ostrosłupa jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 16 i 12. Wszystkie trzy krawędzie boczne są nachylone do płaszczyzny podstawy pod kątem 60°. Wyznacz objętość ostrosłupa.



14. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym wysokość ściany bocznej ma długość 20 i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60°. Wyznacz kolejno:

a) $|OE|$ i $|AB|$,

b) P_{ABS} i P_{pb},

c) P_{ABCD},

d) objętość ostrosłupa.

Wskazówki i odpowiedzi.

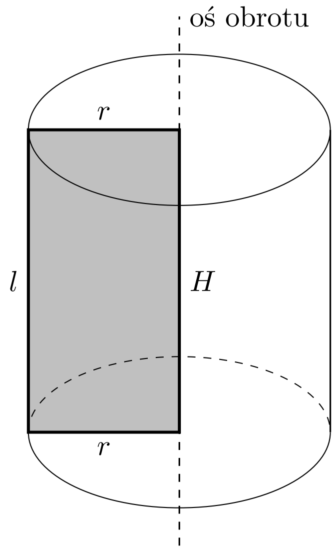
1. $480\sqrt{3}$
2. $V = 60\sqrt{3}$, $Ppb = 70\sqrt{3}$
3. $V = 4\sqrt{6}$
4. $Pc = 8\sqrt{3} + 72$, $V = 24\sqrt{3}$
5. $P_c = 384 + 754\sqrt{3}$, $V = 2496\sqrt{3}$
6. $V = 500\sqrt{3}$
8. $V = 18\sqrt{3}$, $P_b = 18\sqrt{7}$
9. $V = \frac{128}{3}\sqrt{3}$
10. $V = 384\sqrt{3}$, $P_b = 24(8 + \sqrt{43}$
11. $V = \frac{250}{3}\sqrt{3}$
12. $V = \frac{2048}{3}\sqrt{3}$, $P_b = 512$
13. $V = 320\sqrt{3}$ **14**. $|OE| = 10$, $|AB| = 20$, $P_{ABS} = 200$, $P_{pb} = 800$, $P_{ABCD} = 400$, $V = \frac{4000}{3}\sqrt{3}$
%iteml

Rozdział 11

BRYŁY OBROTOWE

Będziemy rozpatrywali trzy bryły obrotowe: walec, stożek i kula.

Walec jest bryłą powstałą w wyniku obrotu prostokąta wokół jednego z boków. Bok wokół którego odbywa się obrót nazywamy osią obrotu walca. Jest on równocześnie wysokością walca. Drugi równoległy do niego bok nazywamy tworzącą walca. Czyli tworząca walca i jego wysokość są tej samej długości. Druga para boków prostokąta są to promienie podstaw walca.



Objętość walca. Jeżeli promień podstawy walca ma długość r, a wysokość ma długość H, to

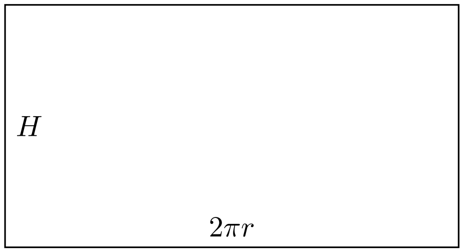
- Pole podstawy walca, która jest kołem

$$\boxed{P_p = \pi r^2}$$

- Objętość walca

$$\boxed{V = P_p \cdot H = \pi r^2 H}$$

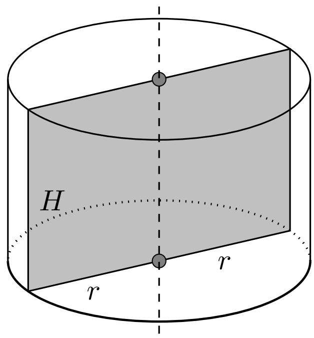
Powierzchnia boczna walca. Zauważmy, że powierzchnię boczną walca możemy sobie wyobrażać jako zwinięty "w rurkę" prostokąt. Czyli powierzchnia boczna walca jest prostokątem o wymiarach $H \times 2\pi r$



Pole powierzchni bocznej to

$$\boxed{P_b = 2\pi r H}$$

Przekrój osiowy walca czyli przekrój płaszczyzną zawierającą oś obrotu walca. Przekrój osiowy walca jest prostokątem o wymiarach $2r \times H$ czyli pole przekroju osiowego walca jest równe $2rH$



1. Przekrój osiowy walca jest prostokątem o boku długości 8 i przekątnej 10. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej walca. Rozpatrz oba przypadki: a) gdy wysokość walca ma długość 8, b) gdy średnica podstawy ma długość 8.

2. Objętość walca równa jest $24\pi\,\mathrm{cm}^3$. Wysokość walca jest 3 razy dłuższa od promienia jego podstawy. Oblicz pole powierzchni całkowitej walca.

3. Przekrój osiowy walca jest prostokątem o polu 54. Jednym bokiem tego prostokąta jest średnica podstawy walca, a drugim jego wysokość. Wysokość jest 3 razy dłuższa od promienia walca. Oblicz promień, wysokość, pole podstawy, objętość walca.

4. Przekrój osiowy walca jest prostokątem o polu 66. Objętość walca wynosi 363π. Wyznacz promień i wysokość walca.

5. Wysokość walca jest równa $\sqrt{3}$. Jego powierzchnia boczna jest prostokątem, którego krótszy bok jest wysokością walca, a przekątna prostokąta tworzy z dłuższym bokiem kąt 30°. Wyznacz objętość walca.

6. Prostokątną kartkę papieru o wymiarach 20×30 można na dwa sposoby zwinąć uzyskując za każdym razem powierzchnię boczną walca. Rozstrzygnij, czy walce te są o takiej samej objętości.

7. Wysokość walca stanowi 75% średnicy podstawy. Przekrój osiowy walca jest prostokątem o obwodzie 28. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej walca.

8. Przekrojem osiowym walca o średnicy 8 jest prostokąt, którego przekątna jest nachylona do średnicy podstawy walca pod kątem 30°. Wyznacz a) promień podstawy walca, b) wysokość walca, c) objętość walca, d) pole powierzchni bocznej walca.

9. Przekątna przekroju osiowego walca nachylona jest do płaszczyzny podstawy walca pod kątem 60°. Wysokość walca wynosi 12. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej walca.

10. Obwód podstawy walca wynosi 20π. Przekątna przekroju osiowego tworzy z tworzącą walca kąt 60°. Wyznacz kolejno a) promień podstawy walca, b) pole podstawy, c) wysokość walca, d) objętość walca, e) pole powierzchni bocznej

Stożek jest bryłą powstałą w wyniku obrotu trójkąta prostokątnego wokół jednej z przyprostokątnych. Na rysunku poniżej przyprostokątna wokół której dokonywał się obrót trójkąta ma długość h i jest ona **wysokością stożka**. Druga przyprostokątna ma długość r i jest ona **promieniem podstawy stożka**. Przeciwprostokątna trójkąta ma długość l i jest ona **tworzącą stożka**.

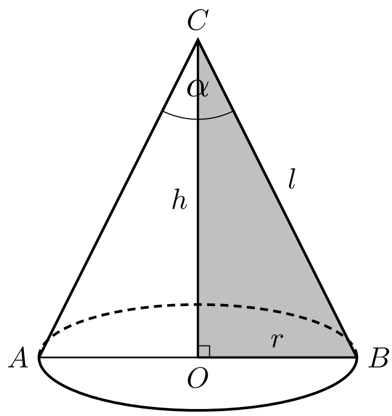
Objętość stożka.

- Pole podstawy stożka

$$\boxed{P_p = \pi r^2}$$

- Objętość stożka

$$\boxed{V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot h = \frac{1}{3}\pi r^2 h}$$

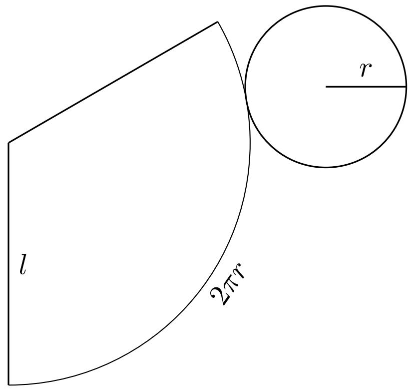


Powierzchnia boczna stożka po rozwinięciu jest wycinkiem koła, przy czym pole powierzchni bocznej stożka jest równe

$$\boxed{P_{pb} = \pi r l}$$

a pole powierzchni całkowitej

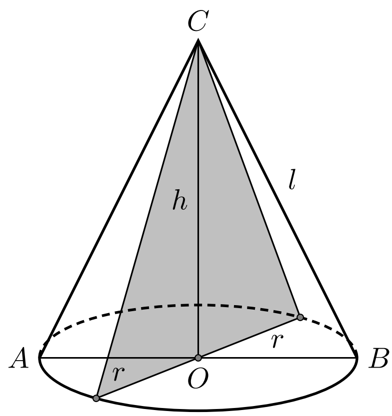
$$\boxed{P_{pc} = \pi r^2 + \pi r l}$$



11. Promień podstawy stożka ma długość 3, a tworząca stożka ma długość 5. Wyznacz a) pole podstawy stożka, b) objętość stożka, c) pole powierzchni bocznej stożka.

12. Oblicz wysokość stożka, jeżeli pole powierzchni bocznej wynosi 50π, a promień podstawy ma długość równą połowie długości tworzącej.

Przekrój stożka płaszczyzną przechodzącą przez oś obrotu stożka, nazywamy przekrojem osiowym stożka. przekrój ten jest trójkątem równoramiennym o ramionach długości l, wysokości h i podstawie długości $2r$.



13. Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym o boku długości 20. Oblicz objętość i pole powierzchni bocznej stożka.

14* Pole przekroju osiowego stożka wynosi 12. Objętość stożka wynosi 12π. Wyznacz promień i wysokość stożka.

15. Pole przekroju osiowego stożka wynosi 48, zaś wysokość stożka ma długość 12. Oblicz objętość i pole powierzchni bocznej stożka.

16. Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym. Objętość tego stożka jest równa $9\pi\sqrt{3}$. Oblicz promień podstawy stożka.

17. Wysokość stożka równa jest 5, a tworząca jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 30°. Oblicz objętość i pole powierzchni bocznej stożka.

18. Przekrój osiowy stożka jest trójkątem o polu 144 i kącie przy podstawie 45°. Oblicz objętość i pole powierzchni bocznej stożka.

19. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej bryły obrotowej powstałej z obrotu trójkąta równoramiennego prostokątnego o przeciwprostokątnej długości 4 dookoła jednej z przyprostokątnych.

20. Trójkąt równoramienny prostokątny o przyprostokątnej $2\sqrt{2}$ obraca się dookoła przeciwprostokątnej. Oblicz objętość i pole powierzchni otrzymanej bryły.

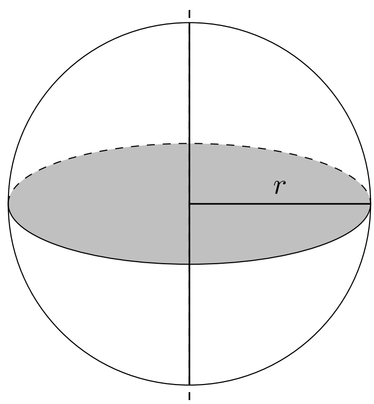
21. Oblicz objętość i pole powierzchni bryły powstałej w wyniku obrotu trójkąta równobocznego o boku długości 6 dookoła jednego z boków.

22. Długość promienia podstawy stożka stanowi 60% długości jego tworzącej. Pole powierzchni bocznej tego stożka wynosi 135π. Oblicz promień podstawy, wysokość, długość tworzącej i objętość stożka.

23. Dany jest graniastosłup prawidłowy sześciokątny wpisany w walec o promieniu podstawy $2\sqrt{3}$. Dłuższa przekątna graniastosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 30°. Oblicz objętość walca i objętość graniastosłupa.

Trzecią bryłą obrotową jest kula, która powstaje w wyniku obrotu koła wokół jego średnicy. Jeżeli promień koła jest równy r, to promień kuli też jest równy r. Wówczas wzory na objętość V i pole powierzchni P kuli o promieniu r, to

$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi r^3, \qquad P = 4\pi r^2}$$



UWAGA, na użytek poniższych zadań, zakładamy (fałszywie), że objętość lodu i objętość wody powstała ze stopienia tego lodu są takie same. W zadaniach poniższych dokonujemy wiele tzw. idealizacji, co oznacza np, że gdy

mówimy o pomarańczy czy też o Ziemi, to mamy na myśli kulę. Druga idealizacja w tego typu zadaniach polega na tym, że całkowicie zaniedbujemy istnienie zjawiska zwanego meniskiem (wypukłym). Innymi słowy uważamy, że powierzchnia wody w naczyniu jest fragmentem płaszczyzny.
W niektórych zadaniach zamiast liczby π, należy przyjąć jej przybliżenie $\frac{22}{7}$, co jest zawsze podane w treści zadania.

24. Cztery kulki z lodu każda o promieniu 1 cm stopiono i uzyskaną wodę ponownie zamrożono w bryłę w kształcie kuli. Jaki jest promień nowej kuli?

25. Obrana pomarańcza jest kulą o promieniu 4 cm. Dzieli się ona na 16 równych części. Oblicz pole całkowitej powierzchni jednej takiej części.

26. Oblicz objętość kuli o promieniu $R = 2$ oraz objętość stożka o wysokości $h = 4$ i promieniu podstawy $r = 2$. Która z tych objętości jest większa i ile razy?

27. Cztery kulki lodu, każda o promieniu $r = 1$ umieszczono w graniastosłupie prawidłowym, którego podstawą jest kwadrat o boku długości 2. Wysokość graniastosłupa jest równa 8. Jaki procent objętości graniastosłupa stanowi objętość tych czterech kulek. Dla obliczeń przyjmij $\pi \approx \frac{22}{7}$.

28. W prostopadłościennym akwarium, którego podstawą jest kwadrat o wymiarach 10×10 centymetrów, a wysokość jest równa 25 umieszczono 3 kulki lodu o promieniu 4. Do jakiej wysokości będzie sięgała woda w akwarium, gdy kulki się stopią? Ile cm^3 wody trzeba będzie wówczas dolać, aby akwarium było całkowicie napełnione? Dla obliczeń przyjmij $\pi \approx \frac{22}{7}$, a wynik zaokrąglij do jedności.

29. (wszystkie wymiary w centymetrach) Podstawą akwarium jest prostokąt o wymiarach 20×30. Wysokość akwarium jest równa 40. Akwarium wypełnione jest do połowy wysokości wodą. Do akwarium włożono 5 kul kamiennych o promieniu 5. O ile centymetrów podniósł się poziom wody w akwarium? Ile centymetrów sześciennych wody należy jeszcze dolać, aby akwarium było całkowicie wypełnione? Dla obliczeń przyjmij $\pi \approx \frac{22}{7}$.

30. Wyznacz promień kuli, której objętość jest równa $180\,\mathrm{cm}^3$.

Wskazówki i odpowiedzi.

1. a) $V = 72\pi$, $P_c = 66\pi$;
b) $V = 96\pi$, $P_c = 80\pi$

2. 32π

3. $r = 3$, $h = 9$, $P_p = 9\pi$, $V = 81\pi$

4. $r = 11$, $h = 3$

5. $V = \frac{9\sqrt{3}}{4\pi}$

6. a) gdy $h = 20$, to $V = \frac{4500}{\pi}$, gdy $h = 30$, to $V = \frac{3000}{\pi}$

7. $V = 96\pi$, $P_{pc} = 80\pi$

8. a) $r = 4$, b) $h = \frac{8}{3}\sqrt{3}$, c) $V = \frac{128}{3}\sqrt{3}\pi$ d) $P_{pb} = \frac{64}{3}\sqrt{3}\pi$

9. $V = 144\pi$, $P_{pc} = 24\pi + 48\sqrt{3}\pi$

10. a) $r = 10$, b) $P_p = 100\pi$, c) $\frac{20}{3}\sqrt{3}$, d) $V = \frac{2000}{3}\sqrt{3}\pi$, e) $P_{pb} = \frac{400}{3}\sqrt{3}\pi$.

11. a) $P_p = 9\pi$, b) $V = 12\pi$, c) $P_{pb} = 15\pi$

12. $h = 5\sqrt{3}$

13. $P_{pb} = 200\pi$, $V = \frac{1000}{3}\sqrt{3}\pi$

14. $r = 3$, $h = 4$

15. $V = 64\pi$, $P_b = 16\sqrt{10}\pi$

16. $r = 3$

17. $V = 125\pi$, $P_b = 50\sqrt{3}\pi$

18. $P_b = 144\sqrt{2}\pi$, $V = 576\pi$

19. $V = \frac{16}{3}\sqrt{2}\pi$, $P_c = 8\pi + 8\pi\sqrt{2}$,

20. $V = \frac{16}{3}\pi\sqrt{2}$, $P_c = 8\sqrt{2}\pi$

21. $V = 54\pi$, $P = 36\sqrt{3}\pi$

22. $r = 9$, $h = 12$, $l = 15$, $V = 324\pi$

23. $V_w = 48\pi$, $V_g = 72\sqrt{3}$

24. $r = \sqrt[3]{4}$

25. $P = 20\pi$

26. $P = 20\pi$

27. $39\frac{2}{7}\%$

28. $h = 8\text{cm}$, $V = 1700\text{cm}^3$

29. $6\frac{1}{9}\text{cm}$, $2\,577\frac{7}{9}\text{cm}^3$

30. $R = 3\sqrt[3]{5\pi}$

Rozdział 12

PROCENTY W ZAD. TEKSTOWYCH

Rozpocznijmy od kilku przykładów.

PRZYKŁAD 1

Cenę towaru podwyższono dwukrotnie: wpierw o 20%, a potem o 25%. Po tych podwyżkach towar kosztuje 72 złote. Oblicz cenę początkową towaru oraz podaj wzrost procentowy ceny początkowej po tych podwyżkach.

Rozwiązanie

Oznaczmy

x – pierwotna cena towaru

Wówczas cena po pierwszej podwyżce

$x + \frac{20}{100}x = \frac{6}{5}x,$

zaś cena po drugiej podwyżce to

$\frac{6}{5}x + \frac{25}{100} \cdot \frac{6}{5}x = \frac{6}{5}x + \frac{1}{4} \cdot \frac{6}{5}x = \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5}x = \frac{3}{2}x.$

Mamy zatem

$\frac{3}{2}x = 72$

$x = \frac{2}{3} \cdot 72$

$x = 48$

Czyli cena początkowa wynosiła 48 zł.

Niech p będzie szukanym procentem. Mamy zatem

$48 + \frac{p}{100} \cdot 48 = 72,$

$\frac{p}{100}48 = 24,$

$p = \frac{24 \cdot 100}{48} = 50.$

Odpowiedź: Pierwotna cena towaru wynosiła 48 złotych, a po podwyżkach wzrosła ona o 50%.

Obecnie będziemy zajmowali się pojęciem procentu w nieco bardziej ogólnej postaci niż w poprzednich klasach. Najważniejsze rzeczy będziemy oznaczali na marginesie symbolem $\boxed{\textbf{!} \Leftarrow}$.

UWAGA: Twoim zadaniem jest zawsze wprowadzenie odpowiednich oznaczeń, ułożenie równania i ustalenie jego rozwiązania, a nie tylko wyprodukowanie w dowolny sposób odpowiedzi na pytanie(a) postawione w zadaniu. Pamiętaj, że nie wolno ci używać tzw. proporcji. $\boxed{\textbf{!} \Leftarrow}$

PRZYKŁAD 2

W kółku teatralnym liczba chłopców stanowi 80% liczby dziewcząt. Jaki procent liczby chłopców stanowi w tym kółku liczba dziewcząt?

Rozwiązanie

Oznaczmy
x – liczba dziewcząt w kółku,
wówczas
$\frac{80}{100}x$ – liczba chłopców w kółku.
Niech p oznacza szukany procent. Mamy wówczas

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{p}{100} \cdot \frac{80}{100} \cdot x && / : x \\
1 &= \frac{p}{100} \cdot \frac{80}{100} && / \cdot \frac{100 \cdot 100}{80} \\
p &= \frac{100 \cdot 100}{80} \\
p &= 125
\end{aligned}
$$

Odpowiedź: Liczba dziewcząt jest równa 125% liczby chłopców.

PRZYKŁAD 3

Poszczególne kontynenty zajmują następujący procent powierzchni wszystkich lądów: Afryka 20%, Ameryka Płn. 14%, Ameryka Płd. i Środkowa 14%, Antarktyda 9%, Australia i Oceania 6%, Azja 30% i Europa 7%. Oznaczając przez x powierzchnię wszystkich lądów mamy

Afryka	$\frac{20}{100}x$
Ameryka Płn.	$\frac{14}{100}x$
Ameryka Płd. i Środkowa	$\frac{14}{100}x$
Antarktyda	$\frac{9}{100}x$
Australia i Oceania....................	$\frac{6}{100}x$
Azja	$\frac{30}{100}x$
Europa..................................	$\frac{7}{100}x$

Pytanie 1
O ile procent powierzchnia Afryki jest większa od powierzchni Ameryki Północnej?

Rozwiązanie

Niech p będzie poszukiwanym procentem. Mamy wówczas:

$$\begin{aligned}
\frac{14}{100}x + \frac{p}{100}\cdot\frac{14}{100}x &= \frac{20}{100}x \\
\frac{p}{100}\cdot\frac{14}{100}x &= \frac{20}{100}x - \frac{14}{100}x \\
\frac{p}{100}\cdot\frac{14}{100}x &= \frac{6}{100}x && \text{dzielimy przez} \quad x \\
\frac{p}{100}\cdot\frac{14}{100} &= \frac{6}{100} && \text{mnożymy przez} \quad \frac{100\cdot 100}{14} \\
p &= \frac{6}{100}\cdot\frac{100\cdot 100}{14} \\
p &= 42\frac{6}{7}
\end{aligned}$$

Odpowiedź: Afryka jest o $42\frac{6}{7}\%$ większa od Ameryki Północnej.

Pytanie 2
O ile procent Europa jest mniejsza od Antarktydy?

Rozwiązanie

Niech p będzie poszukiwanym procentem. Mamy wówczas:

$$\begin{aligned}
\frac{9}{100}x - \frac{p}{100}\cdot\frac{9}{100}x &= \frac{7}{100}x \\
-\frac{p}{100}\cdot\frac{9}{100}x &= \frac{7}{100}x - \frac{9}{100}x \\
-\frac{p}{100}\cdot\frac{9}{100}x &= -\frac{2}{100}x && / : (-x) \\
\frac{p}{100}\cdot\frac{9}{100} &= \frac{2}{100} && / \cdot\frac{100\cdot 100}{9} \\
p &= \frac{2}{100}\cdot\frac{100\cdot 100}{9} \\
p &= \frac{200}{9} = 22\frac{2}{9}
\end{aligned}$$

Odpowiedź: Europa jest o $22\frac{2}{9}\%$ mniejsza od Antarktydy.

1. Na podstawie informacji z powyższego przykładu rozstrzygnij:

a) O ile procent Ameryka Północna jest mniejsza od Afryki?

b) O ile procent Antarktyda jest większa od Europy?

c) O ile procent Antarktyda jest większa od Australii?

d) O ile procent Ameryka Południowa i Środkowa jest większa od Europy?

e) O ile procent Australia jest mniejsza od Europy?

f) O ile procent Azja jest większa od Afryki?

g) O ile procent Afryka jest większa od Europy?

2. Jeden bok prostokąta zwiększono o 10%, zaś drugi bok zmniejszono o 10%. Rozstrzygnij czy pole tego prostokąta ulegnie zmianie, a jeżeli tak, to o ile procent się zmniejszy względnie zwiększy.

3. Długość prostokąta zwiększono o $p\%$, szerokość zmniejszono o $p\%$ i otrzymano prostokąt o polu o 16% mniejszym niż pole pierwotnego prostokąta. Wyznacz p.

PRZYKŁAD 4

Cenę towaru obniżano dwukrotnie. Za każdym razem obniżka wynosiła 20%. O ile procent cena końcowa jest niższa od ceny początkowej po tych dwóch obniżkach?

Rozwiązanie

Oznaczenia

x – pierwotna cena towaru

p – szukany procent

Mamy wówczas

$x - \frac{20}{100}x = \frac{80}{100}x$ – cena po 1. obniżce.

$\frac{80}{100}x - \frac{20}{100} \cdot \frac{80}{100}x = \frac{80}{100}x(1 - \frac{20}{100}) = \frac{80}{100} \cdot \frac{80}{100}x = \frac{64}{100}x$ – po 2. obniżce

Wyznaczamy p.

$$x - \frac{p}{100}x = \frac{64}{100}x$$
$$\frac{p}{100}x = \frac{36}{100}x$$
$$p = 36$$

Odpowiedź: cena końcowa jest niższa od ceny początkowej o 36%.

PRZYKŁAD 5
Cena skutera stanowi 4/7 ceny motocykla.

a) O ile procent skuter jest tańszy od motocykla?

b) O ile procent motocykl jest droższy od skutera?

Rozwiązanie

Oznaczmy
x – cena motocykla
wówczas
$\frac{4}{7}x$ – cena skutera
a) Niech p oznacza szukany procent
Mamy wówczas równanie

$$\begin{aligned} x - \frac{p}{100}x &= \frac{4}{7}x \quad \text{wyłączamy } x \text{ przed nawias} \\ x\left(1 - \frac{p}{100}\right) &= \frac{4}{7}x \quad \text{dzielimy obie strony przez } x \\ 1 - \frac{p}{100} &= \frac{4}{7} \\ \frac{p}{100} &= \frac{3}{7} \\ p &= \frac{300}{7} = 42\frac{6}{7} \end{aligned}$$

Odp: Skuter jest tańszy o $42\frac{6}{7}\%$ od motocykla.

b) Niech p oznacza szukany procent. Wówczas przy oznaczeniach z podpunktu a) mamy

$$\begin{aligned} \frac{4}{7}x + \frac{p}{100}\cdot\frac{4}{7}x &= x \quad \text{wyłączamy } x \text{ przed nawias} \\ x\left(\frac{4}{7} + \frac{p}{100}\cdot\frac{4}{7}\right) &= x \quad \text{dzielimy obie strony przez } x \\ \frac{4}{7} + \frac{p}{100}\cdot\frac{4}{7} &= 1 \\ \frac{p}{100}\cdot\frac{4}{7} &= \frac{3}{7} \quad \text{mnożymy przez } \frac{7}{4} \\ \frac{p}{100} &= \frac{3}{4} \\ p &= 75 \end{aligned}$$

Odp: motocykl jest droższy od skutera o 75%.

4. Cena roweru stanowi $3/4$ ceny motoroweru.

a) O ile procent rower jest tańszy od motoroweru?

b) O ile procent motorower jest droższy od roweru?

5. Kapelusz jest półtora raza droższy niż rękawiczki.

a) O ile procent kapelusz jest droższy od rękawiczek?

b) O ile procent rękawiczki są tańsze od kapelusza?

6. Na początku czerwca cenę towaru podniesiono o 10%. Na początku lipca tę aktualną cenę podniesiono o 20%. O ile procent cena towaru po tych dwóch podwyżkach jest wyższa od ceny początkowej? O ile procent cena początkowa jest niższa od ceny końcowej (po drugiej podwyżce).

7. Cenę pewnego towaru obniżono o 20%. Po pewnym czasie dokonano operację obniżenia ceny tego towaru o 30%. O ile procent została obniżona cena wyjściowa tego towaru po tych dwóch obniżkach?

8. Cena towaru została podniesiona o 10%. Po pewnym czasie nową cenę podniesiono o 20%. Później z kolei ostatnią cenę obniżono o 30%. O ile procent różni się obecna cena od początkowej?

9. Cenę towaru obniżano dwukrotnie. Wpierw o 20%, a następnie o dalsze 10 punktów. O ile procent trzeba by teraz zwiększyć cenę towaru, aby osiągnęła ona swoją początkową wartość?

10. W roku 2014 dochód firmy XYZ wzrósł dwa i pół raza. O ile procent dochód firmy XYZ w roku 2013 był niższy niż w roku 2014?

11. W roku 2014 wpływy ze sprzedaży firmy PQR wzrosły o 120%. Ile razy wzrosły wpływy firmy PQR w porównaniu z rokiem 2013?

12. Cena 1 kg żywca wołowego była w tym roku w czerwcu dwukrotnie wyższa niż w czerwcu ubiegłego roku. a) O ile procent tegoroczna cena mięsa wołowego jest większa od ceny ubiegłorocznej? b) O ile procent ubiegłoroczna cena mięsa była niższa od tegorocznej?

13. Właściciel domu, chcąc oszczędzać energię elektryczną, dokonał kolejno trzech usprawnień. Pierwsze z nich obniżyło wydatki na ogrzewanie domu o 20%. Następne usprawnienie spowodowało spadek wydatków o 25%. Wreszcie ostatnie usprawnienie spowodowało redukcję wydatków o 55%. O ile procent łącznie zmniejszyły się wydatki na ogrzewanie w wyniku tych trzech kolejnych usprawnień?

14. W wyborach prezydenckich było trzech kandydatów. Kandydat A zdobył 50% wszystkich głosów, kandydat B o 15 punktów mniej, zaś kandydat C – pozostałe głosy.

a) O ile procent głosów więcej zdobył kandydat A od kandydata B?

b) O ile procent głosów więcej zdobył kandydat A od kandydata C?

c) O ile procent głosów więcej zdobył kandydat B od kandydata C?

d) O ile procent głosów mniej zdobył kandydat C od kandydata A?

e) O ile procent głosów mniej zdobył kandydat B od kandydata A?

f) O ile procent głosów mniej zdobył kandydat C od kandydata B?

15. W wyborach parlamentarnych brały udział tylko dwie partie A i B. Po przeliczeniu 92% oddanych głosów okazało się, że za partią A opowiedziało się 53% wyborców, zaś za partią B – 47%. Ile procent głosów w nieprzeliczonych jeszcze 8% oddanych głosów musiałoby paść na partię B, aby zdobyła ona 50% głosów w tych wyborach?

16. Partia nasion zawiera 15% zanieczyszczeń. Wstępne oczyszczenie usunęło 2/3 tych zanieczyszczeń. Jaki procent stanowią zanieczyszczenia w tej partii nasion, po tym wstępnym oczyszczeniu?

17. W pewnej szkole liczba wszystkich uczniów w ciągu roku zmniejszyła się o 10%, zaś udział uczennic w całej populacji uczniowskiej zwiększył się z 50% do 55%. Jak w rzeczywistości zmieniła się liczba uczennic w ciągu roku, zwiększyła się czy zmniejszyła, i o ile procent?

18. W konkursie matematycznym liczba uczestników powiększyła się w porównaniu z rokiem ubiegłym o 32%. W ubiegłym roku dziewczęta stanowiły 55% liczby uczestników, a w tym – 50%. Zbadaj czy liczba dziewcząt w porównaniu z rokiem ubiegłym zmalała czy też wzrosła i o ile procent.

EKONOMIA I GOSPODARKA

UWAGI:

(i) W wielu poniższych zadaniach dane są fikcyjne lub też czasami mocno odbiegają od rzeczywistych danych.

(ii) Na pytania *o ile procent różniła się jakaś wielkość A od wartości B* należy odpowiadać *o ile procent wielkość A była większa* względnie *o ile procent była mniejsza od wartości B* zależnie od tego, która z tych dwóch sytuacji miała miejsce.

(iii) Na pytanie: *o ile procent zmieniła się dana wielkość* należy odpowiadać *o ile procent wzrosła* względnie *o ile procent zmalała dana wielkość*, zależnie od tego, która z tych sytuacji miała miejsce.

(iv) Na pytanie *jaka była różnica pomiędzy wielkościami A i B*

- czy to w punktach procentowych
- czy w ujęciu ilościowym
- czy procentowym

należy odpowiadać o ile była wyższa względnie niższa jedna od drugiej

(v) Przykładowe zwroty:

(a) *W roku 2013 nastąpił spadek produkcji o 17%.*
(b) *W 1 półroczu nastąpił wzrost sprzedaży o 4%.*
(c) *W 3 kwartale nastąpił wzrost produkcji o 12%.*
(d) *W 1 kwartale obroty wzrosły o 10%.*

należy rozumieć zawsze tak „w stosunku do poprzedzającego go bezpośrednio takiego samego okresu” czyli odpowiednio

(a) roku 2012
(b) 2 półrocza poprzedniego roku
(c) 2 kwartału tego samego roku
(d) 4 kwartału poprzedniego roku

Natomiast czy zmiana jest mierzona w ujęciu ilościowym na przykład w sztukach, tonach czy też wartościowym na przykład w złotówkach, dolarach albo jest powiedziane wprost, albo też wynika z kontekstu.

W handlu węglem jednostką jest 1 tona, w handlu ropą naftową – 1 baryłka = 159 l, zaś w handlu kawą – 1 worek = 60 kg.

Pamiętaj, że twoim zasadniczym celem jest wprowadzenie odpowiednich oznaczeń oraz ułożenie odpowiedniego równania i następnie rozwiązania go, a nie uzyskanie odpowiedzi w zadaniu wszelkimi możliwymi sposobami. $\boxed{! \Leftarrow}$
W zadaniach z ekonomii przy rozwiązywaniu równań posługuj się kalkulatorem!

19. Eksport kawy z Brazylii zwiększył się w 2014 roku wartościowo o 31,4% do poziomu 2,02 mld USD, zaś ilościowo o 2,8% do 26,4 mln worków. Ile kosztował średnio w eksporcie 1 worek kawy w roku 2013? O ile procent była wyższa cena jednego worka kawy w eksporcie z Brazylii w roku 2014 w porównaniu z rokiem 2013?

20. W roku 2014 wyprodukowano na świecie 1,05 mld ton stali, to jest o 8,7% więcej niż w roku 2013. Ile ton stali wyprodukowano w roku 2013? W roku 2015 wzrost produkcji wyniósł 5%. O ile procent była wyższa produkcja stali na świecie w roku 2015 niż w roku 2013?

21. W roku 2012 całkowita wartość importu do UE wynosiła 240 mld euro. W roku 2013 wartość importu do Unii wzrosła o 30%. W roku 2012 udział Chin w tym imporcie wynosił 7%, a Indii 4%. W roku 2013 udział Chin w imporcie wzrósł do 22%, a Indii do 15%. Import z Japonii do Unii w ujęciu wartościowym w roku 2013 nie uległ zmianie i wynosił, tak jak w roku 2012, 12 mld euro.

a) Jaka była łączna wartość importu do Unii w roku 2013?

b) Jaka była łączna wartość importu do Unii z Chin w roku 2012, a jaka w roku 2013?

c) Jaka była łączna wartość importu do Unii z Chin i Indii w roku 2013?

d) Jaki procent całego importu do Unii stanowił import z Japonii w roku 2012, a jakiw roku 2013?

e) O ile procent wyższy był import z Chin niż z Japonii w roku 2013?

f) O ile procent wzrósł import z Indii, a o ile z Chin w roku 2013?

g) O ile procent zmalał import do Unii ze wszystkich pozostałych krajów w roku 2013?

22. Wartość sprzedaży browaru "Ustrzyki" wzrosła w roku 2012 o 4,5%, zaś w roku 2013 spadła o 6%. O ile procent różniła się wartość sprzedaży browaru "Ustrzyki" w roku 2013 w stosunku do roku 2011?

23. W roku 2011 70% liczby sprzedanych samochodów osobowych stanowiły samochody z silnikiem benzynowym, a 30% samochody z silnikiem Diesla. W roku 2012 sprzedaż samochodów osobowych wzrosła o 8%, przy czym samochodów benzynowych sprzedano o 3% więcej niż rok wcześniej. Jak zmieniła się wobec tego ilość sprzedanych samochodów z silnikiem Diesla w ujęciu procentowym?

24. W kwietniu litr mleka w Polsce był o 40% tańszy od 1 litra mleka w Niemczech. W maju litr mleka w Polsce zdrożał o 30%. O ile procent droższy był w maju litr mleka w Niemczech niż w Polsce?

25. W roku 2013 rynek sprzedaży prasy, w ujęciu wartościowym, podzielony był pomiędzy czterech kolporterów następująco:

Amico	15%
Doron	30%
Flamer	10%
Kolporter	45%

O ile procent większy był udział Kolportera od każdego z trzech pozostałych uczestników rynku sprzedaży prasy?
W roku 2014 wartość sprzedaży na tym rynku nie zmieniła się. Zmianie natomiast uległy udziały czterech kolporterów. Flamer zwiększył swój udział o 12 punktów kosztem trzech pozostałych uczestników tego rynku, którzy zanotowali spadki: Amico o 4 punkty, Kolporter o 3 punkty, zaś Doron o 5 punktów. O ile procent spadła wartość sprzedaży w roku 2014 Amico, Dorona i Kolportera?

26. Firma GAZPROD w roku 2013 nie zmieniła wielkości sprzedaży, natomiast zanotowała wzrost zysku o 30% do poziomu 5,2 mld zł. Wzrost zysku wynikał z dwóch czynników: wzrostu cen gazu oraz redukcji kosztów zatrudnienia. Wzrost zysku wynikający ze wzrostu cen gazu wyniósł 400 mln zł. O ile procent wzrósłby zysk GAZPROD'u w roku 2013 gdyby ceny gazu nie uległy zmianie, natomiast nastąpiłaby tylko redukcja kosztów zatrudnienia?

27. W lipcu we Francji nastąpił spadek sprzedaży samochodów o 10,1% do poziomu 168,5 tys sztuk, przy czym samochodów produkcji krajowej aż o 14% do poziomu 92,4 tys sztuk. O ile procent spadła we Francji sprzedaż samochodów zagranicznych?

28. Sprzedaż nowych samochodów w styczniu we Francji ożywiła się, nastąpił bowiem wzrost sprzedaży o 6,5% do poziomu 164, tys pojazdów po spadku o 4,2% w grudniu. Jaka była wielkość sprzedaży w listopadzie poprzedniego roku? O ile procent sprzedaż samochodów w styczniu była wyższa niż w listopadzie poprzedniego roku?

29. W Hiszpanii, piątym rynku samochodowym Europy (jak myślisz, jakie są cztery największe rynki samochodowe w Europie?) zanotowano w lipcu 2009 roku wzrost sprzedaży o 4% do poziomu 170 tys. Samochody produkcji zagranicznej stanowiły 30% liczby wszystkich sprzedanych samochodów. Wzrost sprzedaży samochodów produkcji krajowej wyniósł 5%. O ile procent zmieniła się w lipcu sprzedaż samochodów produkcji zagranicznej?

30. Na rynku nieruchomości boom. Cena pewnego mieszkania sprzed dwóch lat stanowi obecnie 54% jego aktualnej ceny. O ile procent wzrosła wobec tego cena tego mieszkania w ciągu dwóch lat?

31. W roku 2004 pewna działka budowlana w okolicy Barcelony kosztowała 400 tys euro. W roku 1994 jej cena stanowiła 20% aktualnej ceny. O ile procent wzrosła cena tej działki w okresie tych dziesięciu lat?

32. 8 lat temu działka budowlana była warta 30% dzisiejszej ceny. O ile procent wzrosła wobec tego cena tej działki w tym czasie?

33. Cena pewnego domu w lipcu 2004 była o 14% wyższa niż w lipcu 2002. W lipcu 2005 była o 5% wyższa niż przed rokiem. O ile procent cena tego domu w w lipcu 2002 była niższa niż w lipcu 2005?

BANKOWOŚĆ I FINANSE

Bank jest instytucją, która na różne sposoby zarządza powierzonymi jej pieniędzmi. Taką czynnością jest, na przykład, udzielanie klientom kredytów. Bank może również przyjąć pieniądze od klienta w formie tzw. lokaty. Oznacza to, że bank za pożyczone od klienta pieniądze, płaci mu tzw. odsetki czyli kwotę, która jest ustalonym procentem wypożyczonej od klienta sumy.

PRZYKŁAD 1

Roczne oprocentowanie lokaty w banku wynosi 7%. Klient założył w banku lokatę roczną w wysokości 12 000 zł. Ile odsetek dostanie klient po upływie roku?

Rozwiązanie

$$\frac{7}{100} \cdot 12\,000 = 7 \cdot 120 = 840$$

Odpowiedź: klient po roku dostanie od banku 840 zł odsetek.

PRZYKŁAD 2

Klient złożył w banku 8 000 zł na rocznej lokacie. Po roku otrzymał z banku 400 zł odsetek. Jakie było oprocentowanie tej lokaty?

Rozwiązanie

Oznaczmy

p – szukany procent.

Mamy wówczas

$$\frac{p}{100} \cdot 8\,000 = 400$$
$$80p = 400$$
$$\text{czyli} \qquad p = 5.$$

Odpowiedź: oprocentowanie lokaty wynosiło 5%.

PRZYKŁAD 3

Klient założył w banku roczną lokatę, której oprocentowanie wynosiło 6%. Po roku otrzymał od banku 840 zł odsetek. Ile wynosiła kwota lokaty?

Rozwiązanie

Oznaczmy

x[zł] – złożona w banku kwota.

Mamy wówczas

$$\frac{6}{100}x = 840$$
$$x = \frac{100}{6} \cdot 840$$
$$x = 100 \cdot 140$$
$$x = 14\,000$$

Odpowiedź: Kwota lokaty wynosiła 14 000 zł.

PRZYKŁAD 4

W banku A oprocentowanie lokat rocznych wynosi 6%, zaś w banku B jest o 1 punkt niższe, czyli wynosi 5%. W każdym z tych banków założyliśmy lokatę roczną w wysokości 3 000 zł tzn. wpłaciliśmy do każdego z tych banków kwotę 3 000 zł na okres 1 roku.

1. Jaka jest suma odsetek po upływie 1 roku w banku A?

$$\frac{6}{100} \cdot 3\,000 = 180$$

Zatem suma rocznych odsetek od kwoty 3 000 zł w banku A wynosi 180 zł

2. Jaka jest suma odsetek od kwoty 3 000 zł po upływie 1 roku w banku B?

$$\frac{5}{100} \cdot 3\,000 = 150$$

Zatem suma odsetek w banku B od kwoty 3000 zł w banku B wynosi 150 zł.

3. O ile procent suma odsetek od kwoty 3 000 zł w banku B jest niższa od sumy odsetek od takiej samej lokaty w banku A?

$$\begin{aligned} 180 - \frac{p}{100} \cdot 180 &= 150 \\ -\frac{p}{100} \cdot 180 &= 150 - 180 \\ \frac{p}{100} \cdot 180 &= 30 \\ p &= \frac{30 \cdot 100}{180} \\ p &= \frac{100}{6} \\ p &= 16\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Zatem suma odsetek od kwoty 3 000 zł w banku B jest o $16\frac{2}{3}\%$ niższa niż suma odsetek od takiej samej kwoty w banku A.

34. W banku A oprocentowanie roczne lokaty terminowej wynosi 7%, a w banku B jest o 1 pkt (procentowy) wyższe.

a) O ile złotych wyższa będzie suma odsetek po upływie 1 roku od kwoty 1 800 zł, w banku B niż w banku A?

b) O ile procent będzie wyższa suma rocznych odsetek od kwoty 1 800 zł w banku B niż w banku A?

c) O ile procent będzie niższa suma odsetek rocznych od kwoty 1 800 zł w banku A niż w banku B?

35. W banku A oprocentowanie lokat terminowych rocznych wynosi 6%, w banku B oprocentowanie takich lokat jest o 2 punkty wyższe, zaś w banku C o 1 punkt niższe niż w banku A. Złożyliśmy w każdym z tych banków po 3 000 złotych na okres 1 roku.

a) Wyznacz sumę odsetek rocznych w każdym z trzech banków.

b) O ile procent suma odsetek jakie otrzymamy po roku w banku B będzie wyższa od sumy odsetek jakie otrzymamy po roku w banku C?

c) O ile procent suma odsetek (po roku) jakie otrzymamy w banku C będzie niższa od sumy odsetek jakie otrzymamy w banku A?

W banku można założyć lokatę na okres dłuższy niż jeden rok. Są lokaty, z których odsetki można wypłacać po każdym roku są też lokaty na których można dokonywać tzw. *kapitalizacji odsetek*. Oznacza to, że po upływie każdego roku odsetki dopisywane są do sumy złożonej na lokacie.

PRZYKŁAD 5

Klient złożył w banku 10 000 złotych na lokacie 3–letniej oprocentowanej 5% w skali roku. Po każdym roku następuje kapitalizacja odsetek. Jaką kwotę otrzyma klient po upływie trzech lat?

Rozwiązanie

Kwota na lokacie po upływie pierwszego roku:

$$10\,000 + \underbrace{\frac{5}{100} \cdot 10\,000}_{\text{odsetki}} = 10\,000 + 500 = 10\,500$$

Kwota na lokacie po upływie dwóch lat:

$$10\,500 + \underbrace{\frac{5}{100} \cdot 10\,500}_{\text{odsetki}} = 10\,500 + 5 \cdot 105 = 10\,500 + 525 = 11\,025$$

Kwota na lokacie po upływie trzech lat:

$$11\,025 + \underbrace{\frac{5}{100} \cdot 11\,025}_{\text{odsetki}} = 11\,025 + 5 \cdot 110{,}25 = 11\,025 + 551{,}25 = 11\,576{,}25$$

36. Pan Kowalski wpłacił do banku pewną sumę pieniędzy na konto oprocentowane 10% rocznie. Po dwóch latach suma pieniędzy na tym koncie wynosiła 2 783 zł. Jaką sumę wpłacił on wobec tego, jeżeli po roku nastąpiła kapitalizacja odsetek?

37. Pan Kowalski wpłacił do banku pewną sumę pieniędzy na konto oprocentowane 10% rocznie. Po dwóch latach suma pieniędzy na tym koncie wynosiła 2 662 zł. Jaką sumę wpłacił on wobec tego, jeżeli po roku nastąpiła tzw. kapitalizacja odsetek?

38. Pan Nowak wpłacił do banku sumę 2 000 zł, na konto oprocentowane 8% w stosunku rocznym. Po roku nastąpiła kapitalizacja odsetek. Jaka suma będzie zatem na tej lokacie po roku, a jaka po upływie 2 lat?

Wskazówki i odpowiedzi.

1. a) 30% b) $28\frac{4}{7}$%, c) 50%
d) 100% e) $14\frac{2}{7}$% f) 50%
g) $185\frac{5}{7}$%
2. zmniejszy się o 1%
3. 40
4. a) 25%, b) $33\frac{1}{3}$%
5. a) 50% b) $33\frac{1}{3}$%
6. wyższa o 32%, niższa o $24\frac{8}{33}$%
7. 44%
8. Jest niższa o 7,6%
9. $42\frac{2}{7}$%
10. 60%
11. wzrosły 2,2 raza
12. a) 100%, b) 50%
13. 72%
14. a) $42\frac{6}{7}$% b) $233\frac{1}{3}$% c) $133\frac{1}{3}$%
d) 70% e) 30% f) $57\frac{1}{7}$%
15. 84,5%
16. $5\frac{5}{9}$%
17. zmniejszyła się o $\frac{1}{2}$%
18. wzrosła o 20%
19. 27,2%
20. W 2013 965,96 mln ton stali.
W 2015 produkcja była wyższa o 13,4% niż w 2013.
21. a) 312 mld euro
b) 2012 – 16,8 mld, 2013 – 68,64 mld
c) 115,44 mld d) 5%, 3,8%
e) 472% f) 387,5%, 308,6% g) 26%
22. o 1,77% niższa
23. wzrosła o $19\frac{2}{3}$%
24. $28\frac{8}{39}$%
25. od Amico o 200%, od Doron o 50%, od Flamer o 350%,
Amico o $26\frac{2}{3}$%, Doron o $16\frac{2}{3}$%, Kolporter o $6\frac{2}{3}$%
26. 20%
27. o 4,8%
28. 161 tys, o 2%
29. wzrosła o 1,7%
30. o $85\frac{5}{27}$%
31. o 400%
32. o $233\frac{1}{3}$%
33. o 16,45%
34. a) w banku A 126 zł, w banku B 144 zł, czyli suma odsetek będzie wyższa o 18 zł b) $14\frac{2}{7}$%, c) $12\frac{1}{2}$%
35. a) w A 180 zł, w B 240 zł, w C 150 zł b) 60%, c) $16\frac{2}{3}$%
36. 2 300 zł
37. 2200 zł
38. po roku – 2160,
po dwóch latach – 2 332,80 zł

Rozdział 13

WYKRESY I FUNKCJE

13.1 Odczytywanie wykresów

Na przedmiotach przyrodniczych wiele informacji przedstawianych jest w postaci wykresów. Wykres szybko i jasno opisuje zależności pomiędzy różnymi wielkościami.

PRZYKŁAD 1

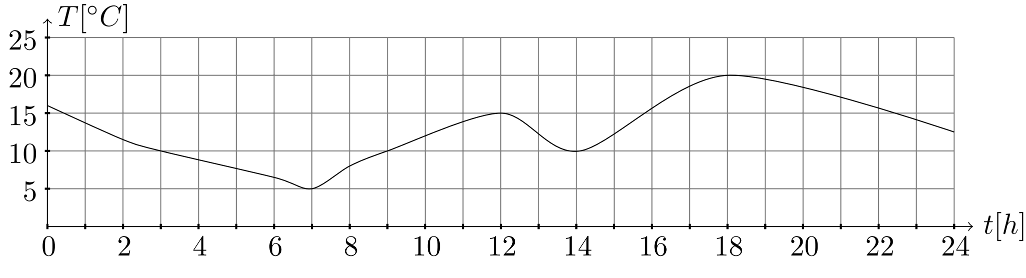
Poniższy wykres przedstawia jak w pewnym miejscu w czasie 24 godzin zmieniała się temperatura powietrza. Z wykresu poniższego można, na przykład, odczytać, że

a) najniższa temperatura była około godziny 7:00.

b) najwyższa temperatura była około godziny 18:00.

c) od godziny 7:00 do 12:00 temperatura wzrastała, od 12:00 do 14:00 malała, a potem od 14:00 do 18:00 ponownie rosła,

d) w ciągu 24 godzin temperatura trzykrotnie wynosiła 10° C



1. Na poniższym wykresie widać jak w pewnym miejscu zmieniała się w ciągu doby temperatura powietrza. Odczytaj z wykresu:

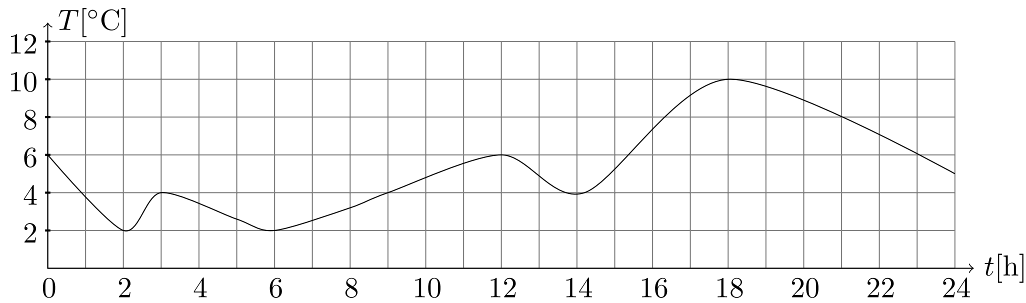
a) Jaka była najniższa temperatura w ciągu tych 24 godzin?

b) O której godzinie temperatura była najwyższa? Ile było stopni?

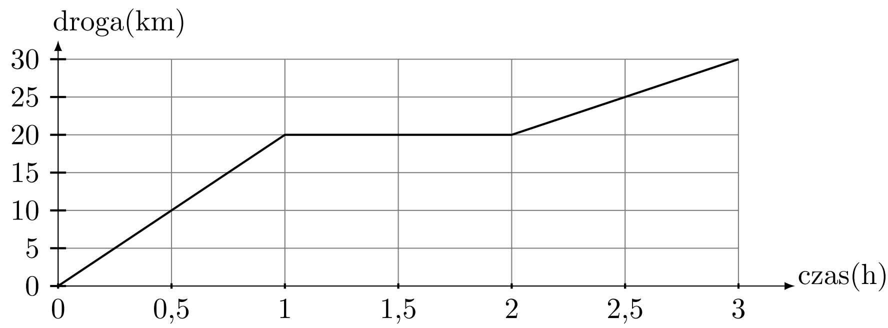
c) W których godzinach temperatura opadała?

d) W jakich godzinach temperatura była równa 4°?

e) W którym czasie temperatura była wyższa niż 6°?



2. Wykres poniższy przedstawia jak zmieniała się liczba kilometrów, którą przejechał rowerzysta w czasie 3 godzin.



Na podstawie wykresu oceń

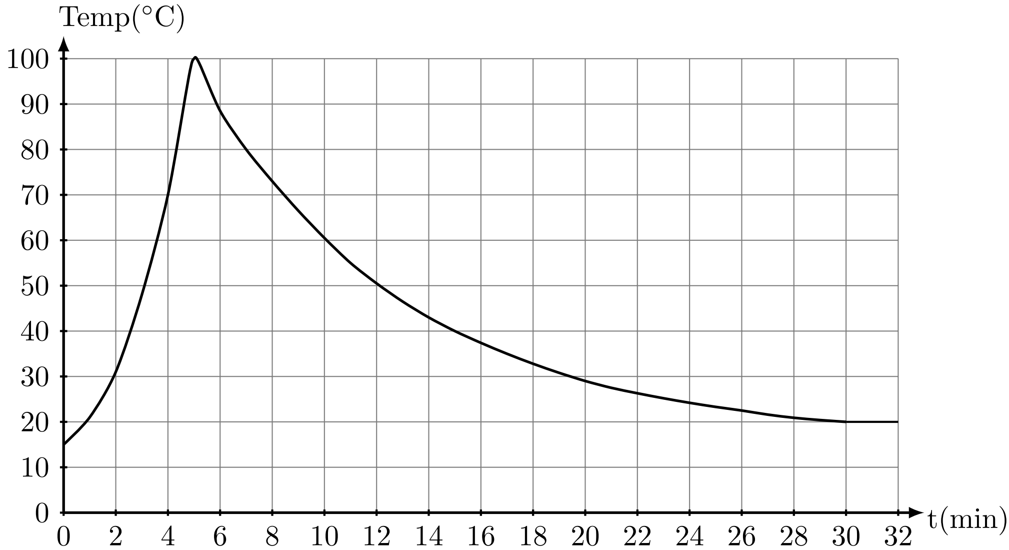
a) Po jakim czasie rowerzysta przejechał 15 kilometrów?

b) Ile kilometrów przebył on po $1\frac{1}{2}$ godziny?

c) Jak długo trwała przerwa w podróży?

d) Z jaką prędkością jechał on w pierwszej, a z jaką w trzeciej godzinie?

3. Poniższy wykres przedstawia jak zmieniała się temperatura wody w czajniku. Do czajnika wlano wodę z kranu, potem zaczęto ją podgrzewać, a po zagotowaniu wody wyłączono podgrzewanie.



Na podstawie tego wykresu odpowiedz na pytania:

a) Jaka była temperatura wody w kranie?

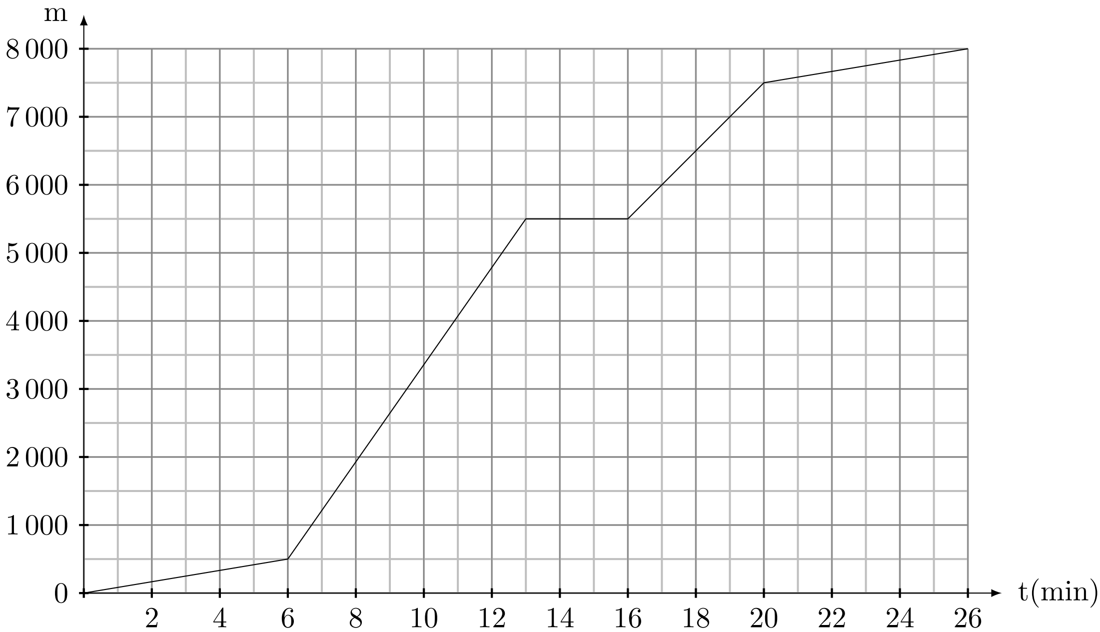
b) Jak długo woda była podgrzewana?

c) Po ilu minutach od rozpoczęcia podgrzewania woda po raz pierwszy osiągnęła temperaturę 30 stopni?

d) Po ilu kolejnych minutach temperatura ponownie spadła do 30°?

e) Jaka była temperatura pomieszczenia, w którym znajdował się czajnik?

4. Adam jechał do szkoły. Poniższy wykres pokazuje jaką drogę przebył on od momentu wyjścia z domu do danej chwili. Wpierw idzie on na przystanek metra pieszo, następnie jedzie metrem, po wyjściu z metra czeka na autobus, jedzie autobusem i na koniec pieszo dochodzi do szkoły.



Na podstawie wykresu odpowiedz na pytania

a) Ile metrów przejechał Adam metrem, a ile autobusem?

b) Ile metrów przeszedł on pieszo w drodze do szkoły?

c) W jakiej odległości od domu znalazł się on po upływie 15 minut?

d) Po ilu minutach pokona on połowę odległości z domu do szkoły?

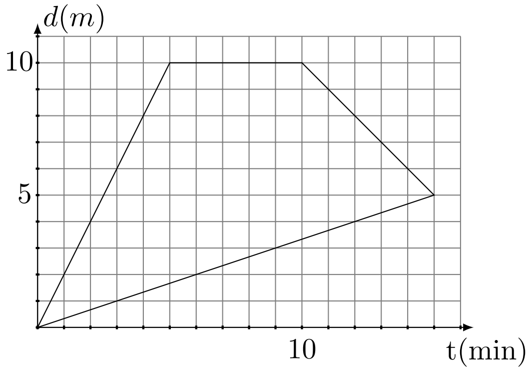
e) W jakiej odległości od szkoły znajdzie się on po upływie połowy czasu przeznaczonego na dojazd do szkoły?

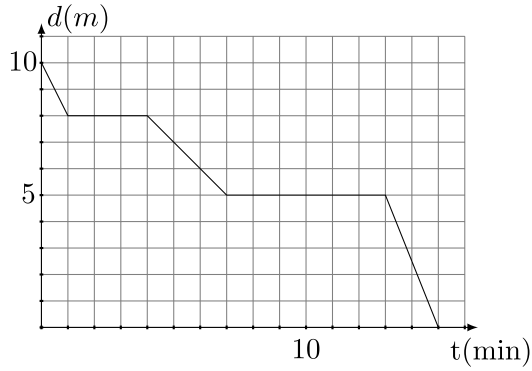
f) Jak długo czekał on na autobus?

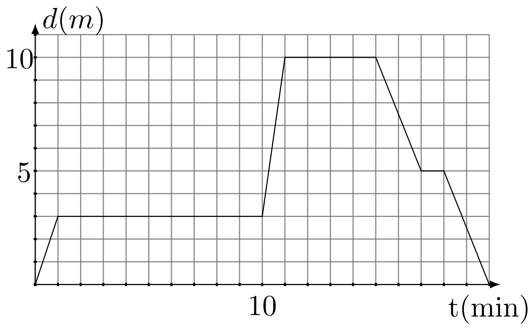
g) Z jaką średnią prędkością w km/h jechał autobus?

h) Z jaką średnią prędkością jechało metro?

5. Jurek wsiadł do łodzi przycumowanej na prawym brzegu kanału. Łódź odbiła od brzegu, przez pewien czas płynęła wzdłuż brzegu. Następnie Jurek popłynął na drugi brzeg. Tam wysiadł on na brzeg, odpoczął przez pewien czas i następnie powrócił do miejsca, z którego wyruszył.







Jeden z tych trzech wykresów, na których czas jest podany w minutach, a odległość od prawego brzegu w metrach, przedstawia jak zmieniała się odległość łódki od prawego brzegu kanału. Wskaż ten wykres i na jego podstawie odpowiedz na pytania:

a) Jaka jest szerokość kanału?

b) Ile czasu Jurek spędził na wodzie?

c) Jak długo odpoczywał na lewym brzegu rzeki?

d) W jakiej odległości od lewego brzegu rzeki płynął on wówczas, gdy po rozpoczęciu wycieczki płynął równolegle do brzegów rzeki?

13.2 Pojęcie funkcji

Te zależności, które były przedstawione na wykresach w poprzednim podrozdziale, są przykładami funkcji. W przykładzie 1, każdej chwili w ciągu dnia przyporządkowana jest temperatura powietrza jaka panowała o tej porze.

PRZYKŁAD 2.

Wzrost pięciu chłopców przedstawiony jest w poniższej tabeli, gdzie zmienna x oznacza chłopca, a zmienna y jego wzrost wyrażony w centymetrach:

x	Adam	Bartek	Czesiek	Darek	Edek
y	162	173	158	170	166

Tutaj każdej osobie jest przyporządkowany jej wzrost, czyli każdej osobie została przyporządkowana dokładnie jedna liczba. Tutaj zbiór chłopców nazwijmy X, jest to zbiór 5-elementowy, zaś zbiór Y jest zbiorem liczb naturalnych, bowiem umawiamy się, że wzrost wyrażamy w całkowitej liczbie centymetrów.

DEFINICJA

Niech X, Y będą dwoma dowolnymi zbiorami. Funkcją ze zbioru X do zbioru Y (o wartościach w zbiorze Y), nazywamy dowolne przyporządkowanie, które każdemu elementowi ze zbioru X przyporządkowuje **dokładnie jeden** element ze zbioru Y.

Funkcje zazwyczaj oznaczamy literą f (czasami też inną literą) i zapisujemy $f\colon X \longrightarrow Y$, ale jest bardzo wiele funkcji, które oznaczamy w inny sposób.

Zbiór X nazywamy **dziedziną** funkcji i oznaczamy zazwyczaj D_f, a każdy element zbioru X nazywamy **argumentem** funkcji.

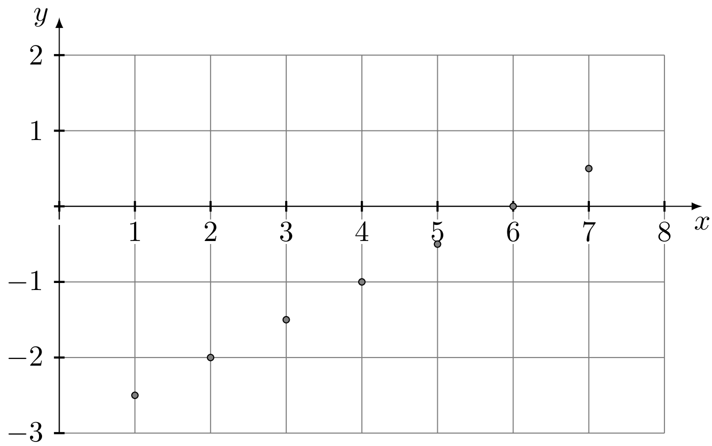
Zbiór Y nazywamy czasami **przeciwdziedziną**. Jeżeli argumentowi x ze zbioru X przyporządkowany jest element y ze zbioru Y, to mówimy, że y jest wartością funkcji dla argumentu x (albo, że funkcja dla argumentu x przyjmuje wartość y). Fakt ten zapisujemy symbolicznie następująco: $x \longmapsto y$ lub $y = f(x)$.

13.3 Sposoby określania funkcji

Funkcję można określić na różne sposoby. Dotychczas określaliśmy funkcje za pomocą wykresów czy też tabeli.
PRZYKŁAD 3.
Niech $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $Y = \mathbb{R}$. Dowolnej liczbie z naszego zbioru X przyporządkowujemy połowę tej liczby pomniejszoną o 3 (czyli teraz opisujemy funkcję słowami). Tę samą funkcję możemy określić za pomocą tabelki

x	1	2	3	4	5	6	7
y	$-2\frac{1}{2}$	-2	$-1\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$

za pomocą wykresu



Funkcję tę można określić wzorem $y = \frac{1}{2}x - 3$ dla $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, lub też nadając tej funkcję nazwę f możemy zapisać $f(x) = \frac{1}{2}x - 3$ dla $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. W tym przykładzie wykres funkcji składa się z 7 punktów.

W przypadku gdy zbiór X ma nieskończenie wiele elementów nie można wówczas określić funkcji przy pomocy tabeli, co wydaje się być rzeczą oczywistą. W takiej sytuacji funkcję najczęściej określamy wzorem lub słownie.

6. Funkcja określona jest przy pomocy tabeli

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	2	0	3	1	-1	-3	2	1	0

czyli dziedziną tej funkcji jest zbiór o skończonej ilości elementów
$X = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$.
Odpowiedz pełnym zdaniem na poniższe pytania.

a) Jakie argumenty ujemne ma ta funkcja? Jakie argumenty dodatnie ma ta funkcja?

b) Jaka jest wartość tej funkcji dla argumentu -3, jaka dla argumentu 1, a jaka dla argumentu 4?

c) Dla jakich argumentów ta funkcja przyjmuje wartość 1, a dla jakich 2?

d) Dla ilu argumentów ta funkcja przyjmuje wartości dodatnie?

e) Sporządź wykres tej funkcji.

7. W każdym z poniższych trzech przypadków funkcja określona jest takim samym wzorem $y = 2x - 1$. Natomiast w każdym przypadku jest to funkcja określona na innym zbiorze X, czyli każda z tych trzech funkcji ma inną dziedzinę. Dla każdego przypadku sporządź tabelkę określająca tę funkcję oraz sporządź jej wykres.

a) $X = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

b) $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

c) X jest zbiorem liczb całkowitych ujemnych nie mniejszych od -8.

8. Funkcję f określamy następująco: każdej liczbie naturalnej dwucyfrowej przyporządkowujemy sumę jej cyfr. Oznacza to, że dziedziną tej funkcji jest zbiór $X = \{10, 11, \ldots, 99\}$.

a) Jaką najmniejszą wartość przyjmuje ta funkcja?

b) Jaką największą wartość przyjmuje ta funkcja?

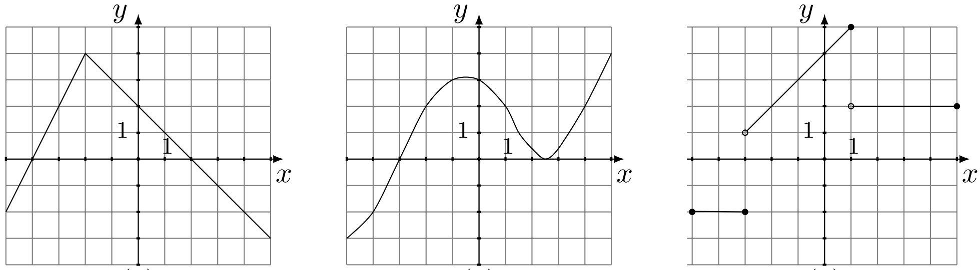
c) Jaką wartość przyjmuje ta funkcja dla argumentu $x = 18$?

d) Dla ilu argumentów przyjmuje ta funkcja wartość 15?

e) Dla jakich argumentów ta funkcja przyjmuje wartość 3?

> **UMOWA**
> Jeżeli wykres jest zakończony kropką, to oznacza to, że ten punkt należy do wykresu funkcji.
> Jeżeli wykres jest zakończony okręgiem, to oznacza to, że punkt ten nie należy już do wykresu funkcji.
> Jeżeli wykres nie jest zakończony ani kropką, ani kółkiem, to oznacza to, że wykres biegnie dalej.

9. Na poniższych rysunkach mamy wykresy trzech funkcji.



(1) (2) (3)

a) Jaką wartość każda z tych funkcji przyjmuje dla argumentu $x = 1$?

b) Dla jakich argumentów każda z tych funkcji przyjmuje wartość 2?

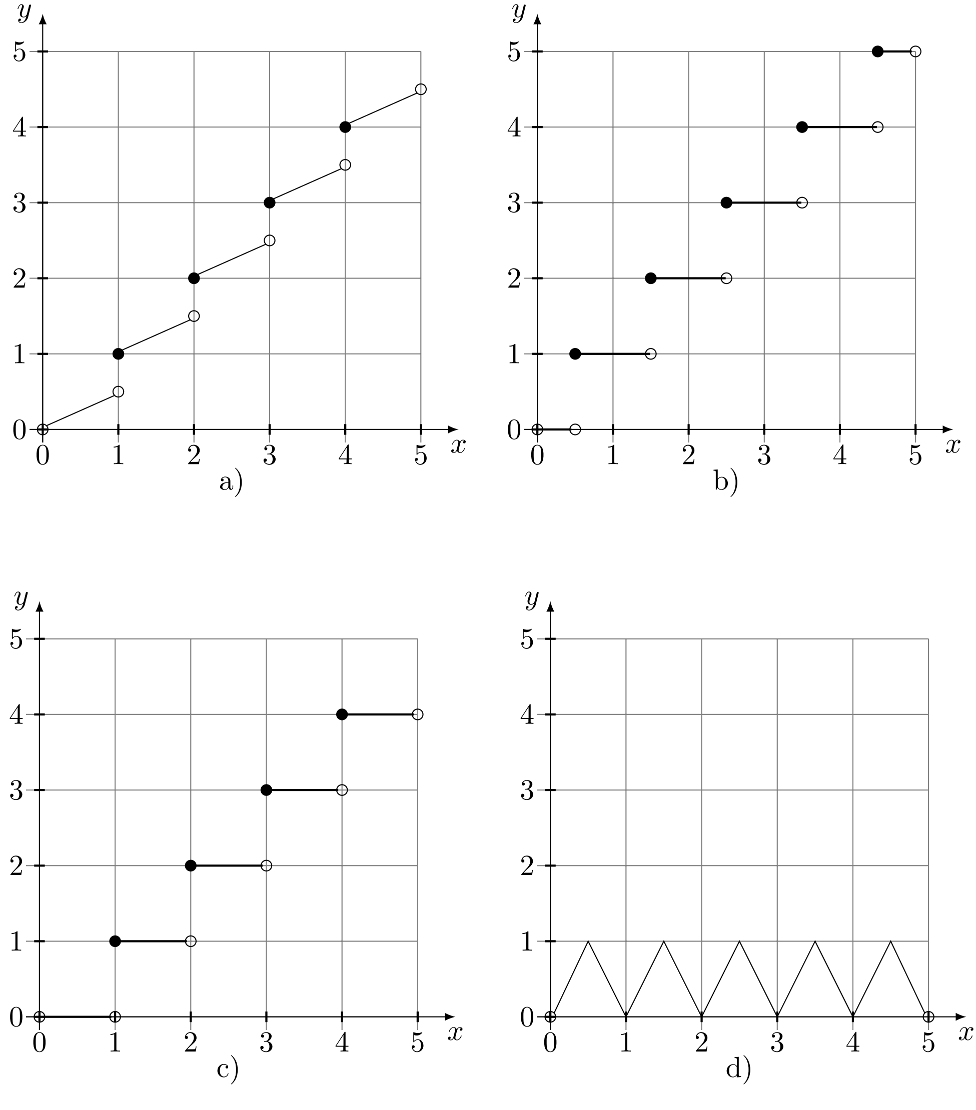
c) Jaka jest dziedzina funkcji na trzecim rysunku?

10. Naszkicuj wykres funkcji, która spełnia następujące warunki:

- do wykresu funkcji należy punkt o współrzędnych (1,3)
- dla argumentu $x = 2$ funkcja przyjmuje wartość 7
- funkcja przyjmuje wartość 6, dla więcej niż dwóch argumentów
- funkcja przyjmuje wartość 0, tylko dla argumentu $x = 3$
- dziedziną funkcji jest przedział $[-3, 5]$

11. Narysuj wykres funkcji, która wszystkim liczbom dodatnim przyporządkowuje wartość 1, liczbie 0 przyporządkowuje 0, zaś liczbom ujemnym wartość -1. Uwaga: taką funkcje powszechnie nazywa się funkcją *signum.* (od łac signum – znak)

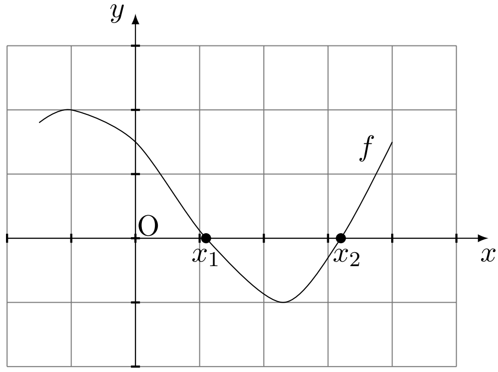
12. Określmy funkcję f następująco: „*Każdej liczbie dodatniej mniejszej od 5 przyporządkowujemy zaokrąglenie tej liczby do jedności*”. Który z poniższych wykresów jest wykresem funkcji f?



a) b) c) d)

13.4 Terminologia związana z pojęciem funkcji

Weźmy funkcję, której argumentami i wartościami są liczby. Nazwijmy ją f. Każdy argument, dla którego funkcja f przyjmuje wartość 0, nazywamy **miejscem zerowym funkcji** f.



Wykres funkcji f, na rysunku obok, przecina oś OX w dwóch punktach $(x_1, 0)$ i $(x_2, 0)$. Oznacza to, że liczby x_1 i x_2 są miejscami zerowymi funkcji f, czyli, że $f(x_1) = 0$ i $f(x_2) = 0$.

13. W poniższych tabelach mamy opisane dwie funkcje f i g. Podaj miejsca zerowe jednej i drugiej funkcji.

funkcja f

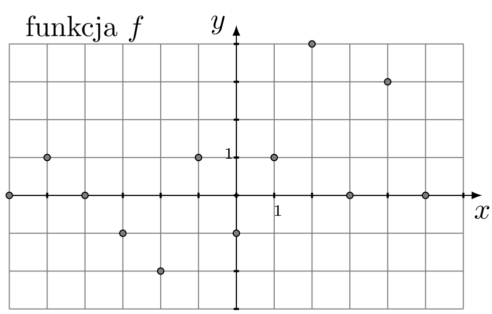
x	-4	-2	-1	0	1	2
y	2	0	1	-1	0	2

funkcja g

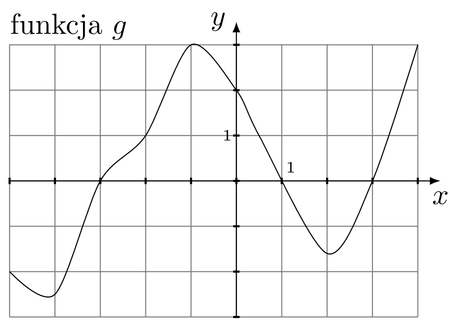
x	0	2	4	6	8	10
y	-1	7	0	-1	0	2

14. Poniżej mamy wykresy dwóch funkcji f i g. Podaj miejsca zerowe każdej z tych funkcji.

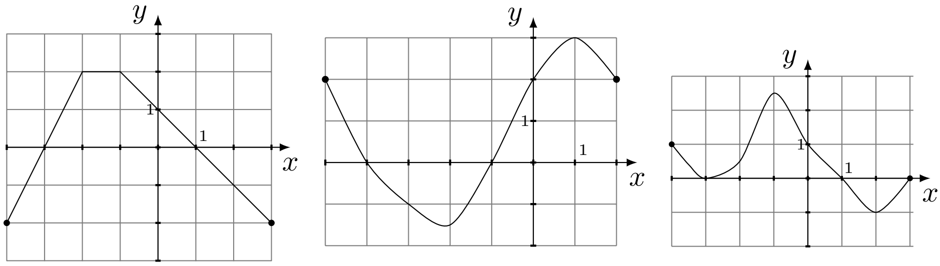
funkcja f



funkcja g



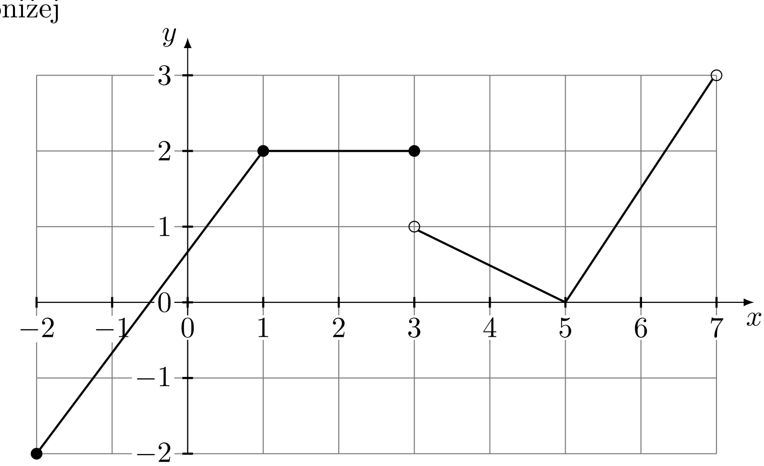
15. Poniżej mamy wykresy funkcji f, g i h. Podaj ich miejsca zerowe oraz podaj zbiór tych argumentów dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie oraz zbiór tych argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości ujemne. **Uwaga**: w tym zadaniu należy udzielić odpowiedzi pełnym zdaniem!



funkcja f funkcja g funkcja h

PRZYKŁAD 4

Niech f będzie funkcją określoną w przedziale $[-2, 7)$ tak jak na rysunku poniżej



Zauważmy, że:

- w przedziale $[-2, 1]$ dla co raz większych argumentów wartości funkcji są coraz większe; w takiej sytuacji mówimy, że funkcja rośnie w tym przedziale;
- dla argumentów z przedziału $[1, 3]$ wszystkie wartości funkcji są takie same; w takiej sytuacji mówimy, że funkcja jest stała w tym przedziale;
- w przedziale $[3, 5]$ wraz ze wzrostem argumentów wartości funkcji maleją; w takiej sytuacji mówimy, że funkcja maleje w tym przedziale.

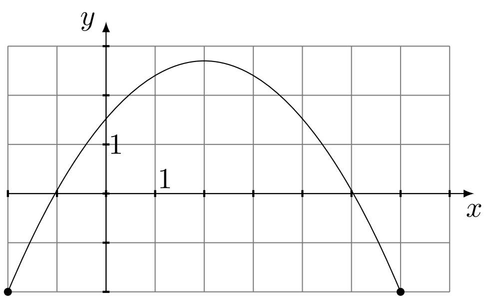
Dokładniej te pojęcia przedstawia następująca
DEFINICJA

- jeżeli dla co raz większych argumentów z przedziału (a, b) (lub przedziału $[ab]$) wartości funkcji są co raz większe, to mówimy, że funkcja jest rosnąca w tym przedziale;

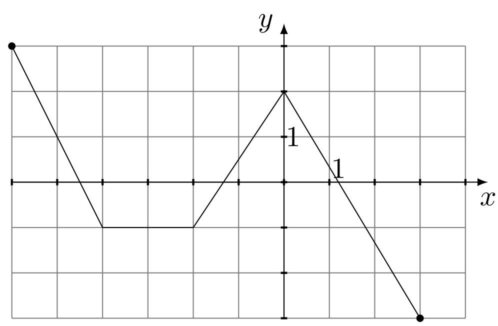
- jeżeli dla co raz większych argumentów w przedziale (a, b) (lub przedziału $[ab]$) wartości funkcji są co raz mniejsze, to mówimy, że funkcja jest malejąca w tym przedziale;

- jeżeli dla wszystkich argumentów z przedziału (a, b) (lub przedziału $[ab]$) wszystkie wartości funkcji są takie same, to mówimy, że funkcja jest stała w tym przedziale.

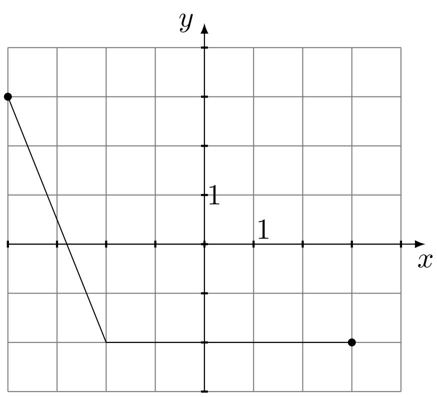
16. Poniżej masz podane wykresy czterech funkcji. Podaj dziedzinę i zbiór wartości każdej z nich. Dla każdej z nich podaj przedział/przedziały w których ta funkcja a) rośnie, b) maleje, c) jest stała



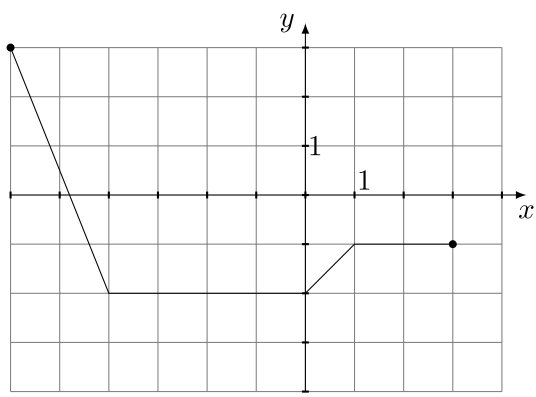
(1)



(2)



(3)



(4)

17. Rysunek obok jest wykresem funkcji f. Na podstawie wykresu podaj

a) Dziedzinę funkcji f.

b) Wartość dla $x = 2$, czyli $f(2)$.

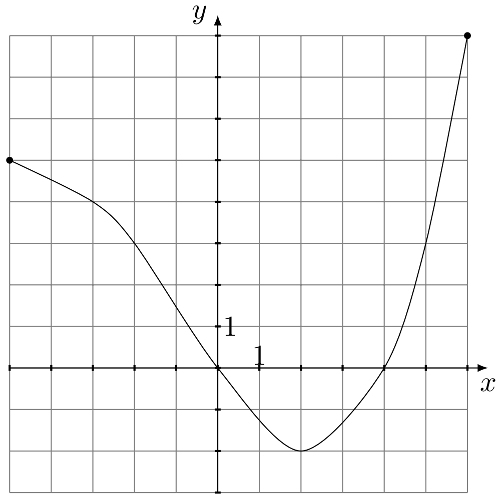
c) Argumenty dla których $f(x) = 3$.

d) Argumenty dla których $f(x) = 0$.

e) Najmniejszą i największą wartość funkcji f.

f) Dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości ujemne.

g) W jakim przedziale funkcja maleje.



Gdy funkcja jest określona wzorem sporządzanie jej wykresu polega na nanoszeniu na płaszczyznę z prostokątnym układem współrzędnych punktów, które do tego wykresu należą.

PRZYKŁAD 5

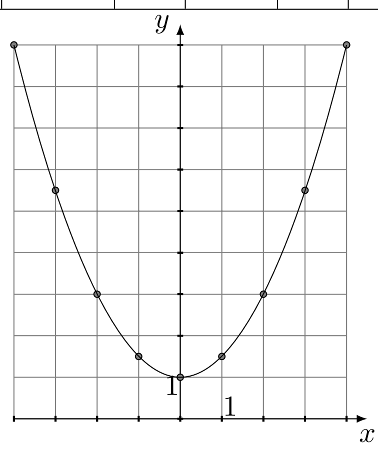
Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$, dziedziną funkcji jest zbiór liczb całkowitych z przedziału $[-4, 4]$.

Sporządźmy wpierw tabelkę:

argumenty	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
wartości	9	$\frac{11}{2}$	3	$1\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	3	$\frac{11}{2}$	9
punkty	$(-4, 9)$	$(-3, 5\frac{1}{2})$	$(-2, 3)$	$(-1, 1\frac{1}{2})$	(0,1)	$(1, 1\frac{1}{2})$	(2,3)	$(3, 5\frac{1}{2})$	$(4, 9)$

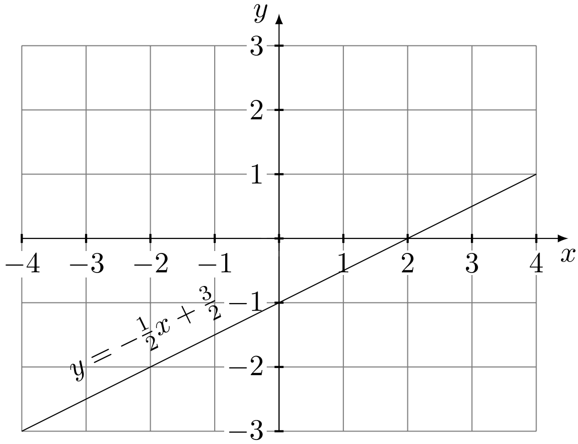
Wykres funkcji f składa się z 9 punktów i wygląda tak jak na rysunku obok.

Linią ciągłą narysowany jest wykres funkcji, również określonej wzorem $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$, której dziedziną jest zbiór wszystkich liczb z przedziału $[-4, 4]$.



18. Uzupełnij tabelę i sporządź w narysowanym poniżej układzie wykres funkcji określonej wzorem $y = \frac{1}{2}x - 1$, a której dziedziną jest przedział $[-3, 3]$.

x	-3	$-2\frac{1}{2}$	-2	$-1\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	3
y	$-2\frac{1}{2}$												
(x,y)													



Zapewne widzisz, że wykresem funkcji określonej wzorem

$$y = \frac{1}{2}x - 1$$

jest linia prosta. Funkcje, których wykresami są linie proste, nazywamy *funkcjami liniowymi.*

19. Punkty A i B należą do wykresu podanej funkcji. Wyznacz drugą współrzędną każdego z tych punktów.

a) $f(x) = 2x + 1, \quad A = (-1, \ldots.), \quad B = (0, \ldots.), \quad C = (2, \ldots.),$

b) $f(x) = x^2 - x + 1 \quad A = (0, \ldots.), \quad B = (-1, \ldots.), \quad C = (2, \ldots.),$

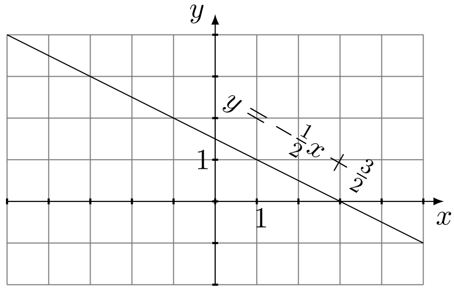
20. Sprawdź, które z podanych przy danej funkcji liczb, są jej miejscami zerowymi:

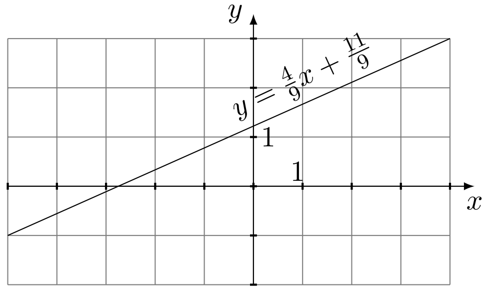
a) $f(x) = x^2 - 5x + 6, \quad 0, 1, 2, 3, 4$

b) $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x - 1} \quad 0, \frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2}, 2$

c) $f(x) = \sqrt{x - 2} \quad 2, 3, 4$

21. Na poniższych rysunkach są wykresy dwóch funkcji o podanych wzorach. Oceń na podstawie wykresu współrzędne punktów przecięcia wykresu funkcji z osiami układu współrzędnych. Następnie sprawdź rachunkowo, na ile dokładnie dokonałeś odczytu. Na rysunkach tych jedna kratka odpowiada jednej jednostce.





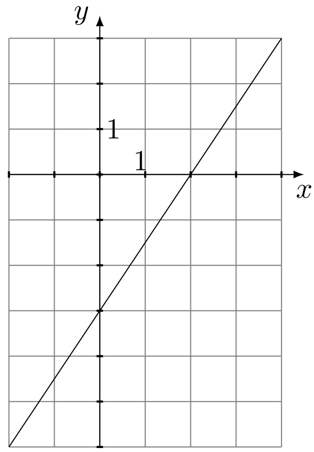
22. Na rysunku obok jest wykres funkcji określonej wzorem $f(x) = \frac{3}{2}x - 3$. Na rysunku tym jedna kratka odpowiada jednej jednostce. Odczytaj z wykresu

a) wartość funkcji dla $x = 2$

b) współrzędne punktów przecięcia funkcji z osiami uk. wsp.

c) dla jakiego argumentu wartość funkcji jest równa 1

Następnie, korzystając ze wzoru jakim się funkcja wyraża, sprawdź rachunkowo swoje odczyty.



23. Wyznacz miejsca zerowe funkcji f oraz współrzędne punktów przecięcia z osiami układu współrzędnych.

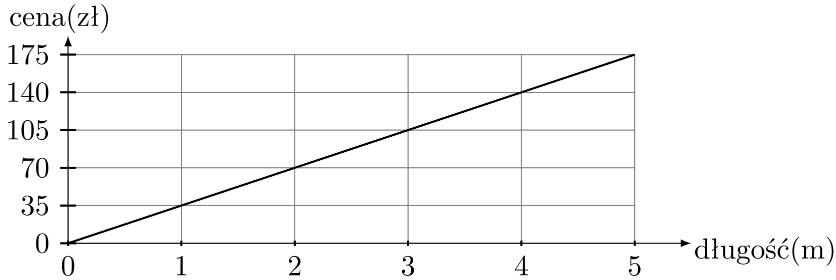
a) $f(x) = -\frac{2}{3}x + 2$ b) $f(x) = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$ c) $f(x) = -\frac{5}{4}x - 3$

d) $f(x) = (\sqrt{2} + 1)x + \sqrt{3}$ e) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{5}-2}x - \sqrt{5}$

13.5 Wielkości wprost i odwrotnie proporcjonalne

I. Długość siatki ogrodzeniowej i jej koszt.
Jeżeli 1 metr siatki ogrodzeniowej kosztuje 35 zł, to
za 3 metry siatki zapłacimy 3 razy więcej czyli 105 zł
za 3,5 metra siatki zapłacimy $3{,}5 \cdot 35 = 122{,}5$ zł
za 2,2 metra siatki zapłacimy 77 zł

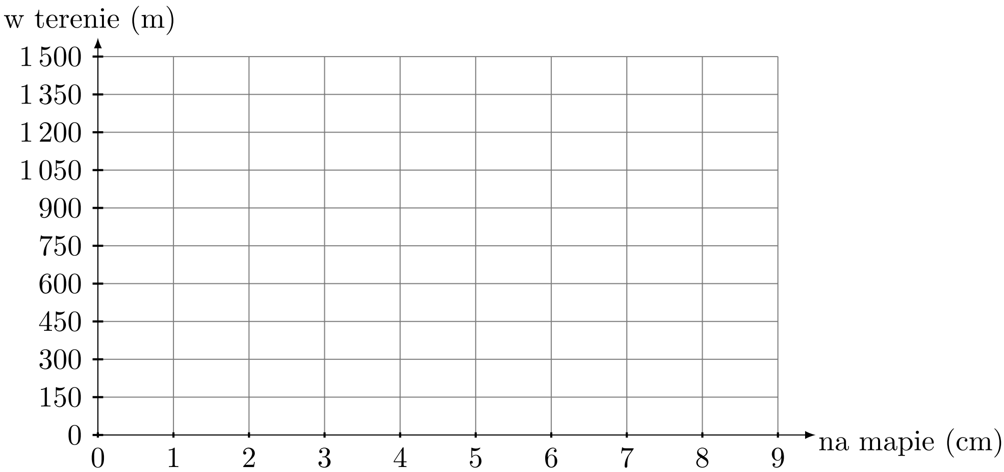
Zależność pomiędzy długością kupowanej siatki a jej kosztem przedstawia poniższy wykres



II. Odległość na mapie a odpowiadającą jej odległość w terenie.

odległość na mapie	1 cm	2 cm	4 cm	5 cm	0,5 cm
odległość w terenie	150 m	300 m	600 m	750 m	75 m

Sporządź wykres tej zależności w poniższym układzie współrzędnych



Dwie wielkości są **wprost proporcjonalne**, gdy wzrastanie/zmniejszanie się jednej wielkości wiąże się z wzrastaniem/zmniejszaniem się **tyle samo razy** drugiej wielkości.

Zauważ, że we wszystkich podanych przykładach iloraz wielkości proporcjonalnych jest stały:

a) $\frac{35\,\text{zł}}{1\,\text{m}} = \frac{70\,\text{zł}}{2\,\text{m}} = \frac{105\,\text{zł}}{3\,\text{m}} = \frac{125{,}5\,\text{zł}}{3{,}5\,\text{m}} = \frac{77\,\text{zł}}{2{,}2\,\text{m}} = 35\text{zł/m}$ – tu ten iloraz wyraża cenę 1 metra siatki.

b) $\frac{260\,\text{g}}{200\,\text{cm}^3} = \frac{130\,\text{g}}{100\,\text{cm}^3} = \frac{65\,\text{g}}{50\,\text{cm}^3} = \frac{325\,\text{g}}{250\,\text{cm}^3} = \frac{1{,}3}{1\,\text{cm}^3} = 1{,}3\text{g/cm}^3$ – to nazywamy gęstością śmietany

c) $\frac{1\,\text{cm}}{15\,000\,\text{cm}} = \frac{2\,\text{cm}}{30\,000\,\text{cm}} = \frac{5\,\text{cm}}{75\,000\,\text{cm}} = \frac{0{,}5\,\text{cm}}{7\,5000\,\text{cm}} = \frac{1}{15\,000}$

Tę wielkość zapisujemy zazwyczaj w postaci 1 : 15 000 i nazywamy *skalą mapy.*

Te ilorazy, o których jest mowa w powyższych przykładach, nazywamy zazwyczaj *współczynnikiem proporcjonalności.*

24. W poniższych pytaniach mamy do czynienia z proporcjonalnością prostą. W miejsce kropek wpisz odpowiedzi.

a) Jeżeli 12 biletów kosztuje 30 zł, to z tego wynika, że 8 biletów kosztuje .... zł.

b) Jeżeli 5 zeszytów kosztuje 11 zł, to z tego wynika, że 3 zeszyty kosztują .... zł.

c) Jeżeli samochód w ciągu 4 godzin przejechał 300 km, to z tego wynika, że w ciągu 1,5 godziny przejedzie on .... km.

d) Jeżeli na 600 km samochód spala 33 litry benzyny, to z tego wynika, że na 250 km spala on .... litrów benzyny.

e) Jeżeli 150 gram grzybów kosztuje 6 zł, to z tego wynika że 400 gram kosztuje .... zł.

f) Jeżeli 750 gram grzybów kosztuje 12 zł, to 250 gram kosztuje ..... zł.

g) Jeżeli 250 gram czekolady ma wartość energetyczną 1 325 kcal, to 100 gram ma wartość energetyczną .... kcal.

25. Pociąg jechał ze stałą prędkością. W czasie 4 minut i 30 sekund przejechał on 3,6 km.

a) Ile metrów przejeżdża ten pociąg w ciągu minuty?

b) Ile kilometrów przejedzie on w czasie 13 minut i 30 sekund?

c) Ile kilometrów przejeżdża ten pociąg w ciągu 1 godziny?

d) W jakim czasie przejedzie on 18 kilometrów?

26. Pusta mała beczka o pojemności 20 litrów waży 3 kg, a pusta duża beczka o pojemności 50 litrów waży 5 kg. Mała beczka wypełniona smołą waży 25 kg. Ile będzie ważyła duża beczka po wypełnieniu jej smołą?

27. Asia w czasie konkursu na szybkość pisania na klawiaturze napisała w pewnym czasie 4920 znaków. Gdyby pisała o 5 znaków na minutę więcej, to napisałaby w tym samym czasie 5040 znaków. Ile minut pisała Asia? Ile znaków na minutę pisała zatem Asia?

28. (aut. John Mellis 1594 r) Jeżeli 1 jard sukna kupujesz za 6 szylingów i 8 pensów, a sprzedajesz za 8 szylingów i 6 pensów, to ile zarobisz na każdych 100 szylingach zainwestowanych w taką transakcję?

Innymi przykładem zależności pomiędzy dwiema wielkościami jest tzw. **proporcjonalność odwrotna**.

PRZYKŁADY

I. Samochód ma do przejechania 120 kilometrów. Obliczmy z jaką prędkością powinien on jechać, jeżeli ma przebyć tę drogę w czasie 1h, 2h, 3h, 4h, 5h, 6h.

czas jazdy samochodu [h]	1	2	3	4	5	6
średnia prędkość [km/h]	120	60	40	30	24	20

Zauważmy, że wraz ze wzrostem czasu jazdy prędkość samochodu maleje tyle samo razy, ile razy wzrosła prędkość. Przy ustalonej długości drogi czas jazdy samochodu i jego prędkość są wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi.

29. Adam ma 48 zł. W sklepie są cukierki w cenie 10 zł/kg, 12 zł/kg, 16 zł/kg, 20 zł/kg, 24 zł/kg.

Wylicz ile cukierków może on kupić za wszystkie oszczędności, przy każdej z tych cen

cena [zł/kg]	10	12	16	20	24
masa cukierków [kg]	4,8				

Ilość cukierków jaką może kupić Adam (przy stałej kwocie) jest odwrotnie proporcjonalna do ceny cukierków.

DEFINICJA

Dwie wielkości nazywamy **odwrotnie proporcjonalnymi**, gdy wzrost jednej wielkości wiąże się ze zmniejszeniem tyle samo razy drugiej wielkości i odwrotnie zmniejszenie jednej wielkości powoduje wzrost - tyle samo razy - drugiej wielkości.

Inne przykłady wielkości odwrotnie proporcjonalnych:

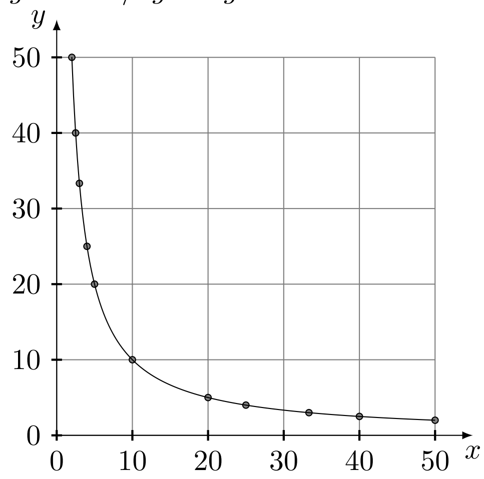
II. Jeżeli dany jest prostokąt o danym polu, np. $100\,\mathrm{cm}^2$, to długości jego boków są do siebie odwrotnie proporcjonalne. Jeżeli bowiem zwiększymy długość jednego boku pewną ilość razy, a długość drugiego boku zmniejszymy taką samą ilość razy, to pole tego prostokąta będzie takie jak wyjściowego prostokąta.

III. Mamy wstążkę o ustalonej długości. Ilość jednakowej długości części na które dzielimy tę wstążkę jest odwrotnie proporcjonalna do długości tych kawałków czyli im więcej kawałków, tym krótsze te kawałki, a im dłuższe kawałki tym mniejsza ich ilość.

Zauważ, że iloczyn wielkości odwrotnie proporcjonalnych jest stały. Na przykład:

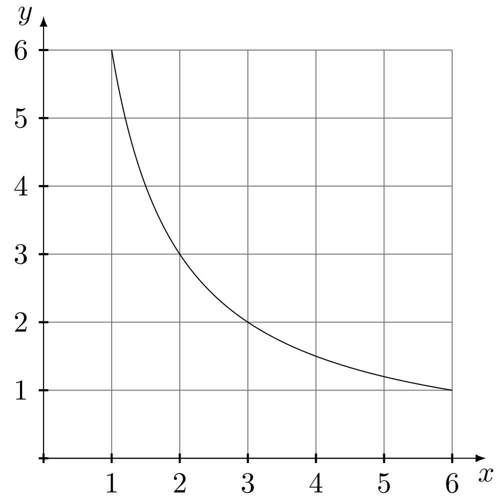
1. $1\,h \cdot 120\,\frac{km}{h} = 2\,h \cdot 60\,\frac{km}{h} = 3\,h \cdot 40\,\frac{km}{h} = \ldots = 120\,km$
2. $10\,zl/kg \cdot 4{,}8\,kg = 12\,zl/kg \cdot 4\,kg = 16\,zl/kg \cdot 3\,kg = \ldots = 48\,zl$

Sporządźmy wykres zależności dwóch wielkości odwrotnie proporcjonalnych. Niech x i y będą długościami boków prostokąta o polu równym $100\,\mathrm{cm}^2$. Skoro $x \cdot y = 100$, to $y = \frac{100}{x}$, co na wykresie wygląda następująco:



Ogólnie, jeżeli x i y są wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi, to z równości $x \cdot y = a$ wynika, że $y = \frac{a}{x}$.

30. Na rysunku obok jest wykres, który przedstawia zależność pomiędzy długościami przekątnych rombu o ustalonym polu.



a) Jaką długość ma druga przekątna, gdy pierwsza przekątna ma długość 2, a jaką gdy ma długość 6?

b) Jakie jest pole tego rombu? (wsk. a jaki jest związek pomiędzy polem rombu, a długościami jego przekątnych?)

c) Jakim wzorem określona jest funkcja przedstawiona na wykresie?

PRZYKŁAD 6

Kierownik schroniska obliczył, że jeżeli schronisko będzie odwiedzać 250 turystów dziennie, to zapasy jedzenia wystarczą na 30 dni. Na ile wystarczyłyby te zapasy, gdyby schronisko odwiedzało dziennie 300 turystów?

Rozwiązanie

Zauważmy, że ilość dni, na które wystarczy jedzenia jest odwrotnie proporcjonalna do liczby turystów, którzy dziennie odwiedzają schronisko. Na przykład, jeżeli liczba dziennych odwiedzin turystów zwiększyłaby się dwukrotnie, to liczba dni na które wystarczą zapasy zmniejszyłaby sie dwukrotnie.

Oznaczmy przez x ilość dni na którą wystarczy jedzenia, przy 300 turystach dziennie. Zakładamy, że zawsze każdy turysta zjada taką samą porcję. Mamy zatem

$$250 \cdot 30 = 300 \cdot x$$

czyli $x = 25$.

Odpowiedź: Przy 300 turystach dziennie zapasów wystarczy na 25 dni.

PRZYKŁAD 7

Pięciu robotników wykonuje pewną pracę w ciągu 8 dni. W jakim czasie wykona tę sama pracę czterech robotników?

Rozwiązanie

5 robotników wykona w pracę w ciągu 8 dni.
Wobec tego
1 robotnik wykona tę pracę w czasie 5 razy dłuższym czyli $5 \cdot 8 = 40$ dni.
4 robotników wykona tę pracę w czasie 4 razy krótszym niż 1 robotnik czyli w ciągu $\frac{40}{4} = 10$ dni.
Lub też krótko, ponieważ czas pracy jest odwrotnie proporcjonalny do liczby robotników, wobec tego mamy

$$5 \cdot 8 = 4 \cdot x$$

czyli

$$x = \frac{5 \cdot 8}{4} = 10$$

Odpowiedź: Czterech robotników wykona tę pracę w ciągu 10 dni.

31. Dawno temu w pewnym klasztorze 10 mnichów w ciągu 30 dni przepisywało całą Biblię. W klasztorze było jeszcze kilku zakonników równie sprawnych w przepisywaniu Biblii. Ilu mnichów dodatkowo powinien zatrudnić opat do przepisywania Biblii, aby przepisywanie trwało o 5 dni krócej?

32. Dzieweczki przędły niteczki. Po wykonaniu całej pracy każda dzieweczka otrzymywała 12 talarów zapłaty. Gdyby dzieweczek było o 4 mniej, to każda otrzymałaby 3 razy większa zapłatę. Ile było dzieweczek?

33. Samochód ciężarowy przewiózł na budowę zapas piasku wykonując 12 kursów. Inny samochód o ładowności o 2 tony większej przewiózł taki sam zapas piasku wykonując o 3 kursy mniej. Jaką ładowność miał każdy z tych samochodów?

34. Z co miesięcznych rachunków telefonicznych pana Milczka wynika, że wykorzystuje on 120 impulsów miesięcznie. Do ilu impulsów będzie się on musiał ograniczyć, aby zmieścić się w dotychczasowych wydatkach, jeżeli cena impulsu wzrośnie a) o połowę, b) o $1/4$, c) o 20%

35. Przy podziale tortu na równe części każdemu z gości przypadał taki sam kawałek w kształcie kąta środkowego o mierze $30°$. Jak zmieni się ten kąt, gdy liczba gości: a) wzrośnie dwukrotnie, b) zmniejszy się trzykrotnie, c) zmniejszy sie o 3

36. Turysta szedł przez 3,5 godziny ze stałą prędkością. Gdyby w takim samym tempie szedł on przez 5 godzin, to przeszedł by dystans dłuższy o 7,5 km. Jaki dystans pokonał ten turysta w ciągu 3,5 godzin?

37. Jurek jeździ do szkoły rowerem. Jazda zajmuje mu 25 minut. Obliczył, że gdyby zwiększył prędkość o 3 km/h, to skróciłby czas jazdy do 20 minut. Z jaką prędkością poruszałby się wówczas Jurek?

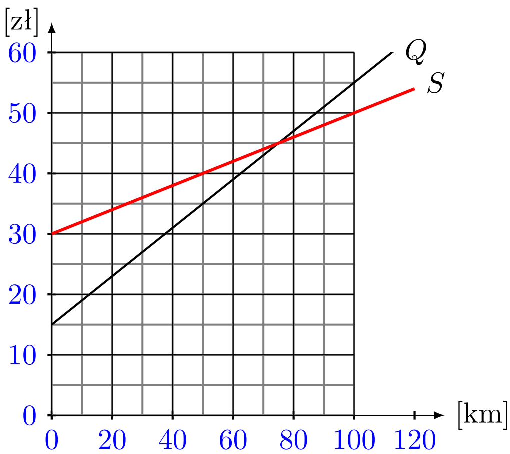
38. Leszek i Sławek malują kadłub statku. Leszek nakłada warstwę farby grubości 0,12 mm, a Sławek 0,15 mm. Leszkowi wiadro farby starcza na $75\,\mathrm{m}^2$. Na ile metrów kwadratowych starczy takie samo wiadro Sławkowi?

39. Szacuje się, że 58 mln Francuzów zjada w ciągu roku 550 mln ślimaków. Ile ślimaków zjada przeciętnie w ciągu miesiąca 4 osobowa rodzina francuska?

40. 10 pomp w ciągu 10 minut wypompowuje 10 ton wody. W ciągu ilu minut 25 pomp wypompuje 25 ton wody?

41. Zespół robotników może wykonać pewną pracę w ciągu określonej liczby dni. Gdyby było o 5 robotników więcej, to wykonaliby tę pracę w czasie o 4 dni krótszym, gdyby zaś ich było o 10 mniej, to pracowaliby o 12 dni dłużej. Ilu było robotników i w ciągu ilu dni byli oni w stanie wykonać tę pracę?

13.6 Analiza wykresów



42. Wykresy obok przedstawiają koszt wypożyczenia samochodu w firmie Q i w firmie S, w zależności od liczby przejechanych kilometrów. Na podstawie wykresów odpowiedz na poniższe pytania:

a) Ile złotych zapłacimy za wypożyczenie samochodu i przejechanie 50 km w każdej z firm?

b) Ile kilometrów musiałby przejechać kierowca, aby zapłacić taką samą sumę w każdej firmie?

c) Jaki jest sam koszt wypożyczenia samochodu w firmie S, a jaki w firmie Q?

d) Policz jaka jest opłata za przejechanie jednego kilometra w firmie S, a jaka w firmie Q?

e) Policz ile wobec tego trzeba zapłacić w firmie S jeżeli wypożyczymy tam samochód i przejedziemy 15 kilometrów?

f) Policz o ile więcej zapłacimy jeżeli przejedziemy 90 km w firmie Q niż w firmie S?

Wskazówki i odpowiedzi.

1. a) 2°C, b) o godz 18:00 – 10°, c) 0:00 – 2:00, 3:00 – 6:00, 12:00 – 14:00, 18:00 – 24:00, d) 1:00, 3:00, 9:00, 14:00, e) od ok. 15:00 do ok 23:00

2. a) po 45 min, b) 20 km, c) 1 godz, d) w pierwszej 20 km/h, w trzeciej 10 km/h

3. a) 15°C, b) ok. 5 minut, c) po 2 min, d) po 17 min, e) 20°C

4. a) metrem 5 000 m, autobusem 2 000 m, b) 1 000 m, c) 5 500 m, d) 13 min, e) 2 500 m, f) 3 min,

g) 30km/h, h) $42\frac{6}{7}$ km/h
5. a) 10 metrów, b) 16 min, c) 4 min, d) 3 metry
6. a) arg. ujemne -4, -3, -2, -1, arg. dodatnie 1, 2, 3, 4
b) Dla arg. -3 wartość funkcji jest równa 0, dla arg. 1 wartość funkcji jest równa -3, dla arg 4 wartość funkcji jest równa 0,
c) Ta funkcja wartość 1 funkcja przyjmuje dla argumentów -1 i 3. Ta funkcja wartość 2 przyjmuje dla argumentów -4 i 2.
d) Dla pięciu argumentów.
8. a) 1, b) 18, c) 9, d) dla czterech argumentów, e) 12, 21, 30
9. a) funkcja (1) przyjmuje wartość 1, funkcja (2) wartość 2, a funkcja (3) wartość 5, b) funkcja (1) dla -3 i 0, funkcja (2) dla -2, 1 i 4, funkcja (3) dla $x \in (1,5]$, c) przedział $[-5,5]$,
12. wykres b)
13. Miejsca zerowe funkcji f to: -2 i 1, a funkcji g to: 4 i 8.
14. Miejsca zerowe funkcji f to: -4, 3 i 5. Miejsca zerowe funkcji g to: -3, 1 i 3.
15. Miejscami zerowymi funkcji f są liczby -3 i 1. Funkcja f przyjmuje wartości dodatnie dla argumentów z przedziału $(-3;1)$, wartości ujemne przyjmuje dla argumentów z przedziału $[-4,-3)$ oraz dla argumentów z przedziału $(1,3]$.
Miejscami zerowymi funkcji g są liczby -4 i -1. Funkcja g przyjmuje wartości dodatnie dla argumentów z przedziału $[-5;-4)$ oraz dla argumentów z przedziału $(-1,2]$, a wartości ujemne przyjmuje dla argumentów z przedziału $(-4,-1)$.
Miejscami zerowymi funkcji h są liczby -3, 1 i 3. Funkcja h przyjmuje wartości dodatnie dla argumentów z przedziałów $(-4;-3)$, i $(-3,1)$, wartości ujemne przyjmuje dla argumentów z przedziału $(1,3)$.
16. (1) Dziedziną jest przedział $[-2,6]$, funkcja rośnie w przedz. $[-2,2]$, maleje w przedz. $[2,6]$.
(2) Dziedziną funkcji jest przedz. $[-6,4]$, funkcja maleje w przedziałach $[-6,-4]$ i $[0,3]$, rośnie w przedz. $[-2,0]$, jest stała w przedz. $[-4,-2]$.
(3) Dziedziną jest przedz. $[-4,3]$, funkcja maleje w przedz. $[-4,-2]$, jest stała w przedz. $[-2,3]$.
(4) Dziedziną funkcji jest przedział $[-6,3]$, funkcja rośnie w przedziale $[0,1]$, maleje w przedz. $[-6,-4]$, jest stała w przedziałach $[-4,0]$ i $[1,3]$.
17. a) $[-5,6]$, b) $f(2)=-2$, c) $f(x)=3$ dla $x=-2$ i dla $x=5$, d) $f(x)=0$ dla $x=0$ i dla $x=4$, e) Najmniejsza wartość funkcji f

to -2. Największa wartość funkcji f to 8. f) Wartości ujemne funkcja przyjmuje dla argumentów z przedziału $(0, 4)$. g) Funkcja rośnie w przedziale $[2, 6]$.

19. a) $A = (-1, -1)$, $B = (0, 1)$, $C = (2, 5)$, b) $A = (0, 1)$, $B = (-1, 3)$, $C = (2, 3)$

20. a) 2 i 3, b) $\frac{1}{2}$, c) 2

22. a) 0, b) $(0, -3)$, $(2, 0)$, c) $2\frac{2}{3}$

23. a) 3, $(0; 2)$ i $(3; 0)$,
b) $-\frac{2}{3}$, $(0; \frac{1}{2})$, $(-\frac{2}{3}; 0)$
c) $-2\frac{2}{5}$, $(0, -3)$, $(-2\frac{2}{5}, 0)$
d) $\sqrt{3} - \sqrt{6}$, $(0, \sqrt{3})$, $(\sqrt{3} - \sqrt{6}, 0)$
e) $5 - 2\sqrt{5}$, $(0, -\sqrt{5})$, $(5 - 2\sqrt{5}, 0)$

24. a) 20 zł b) 6,60 zł c) 112,5 km d) 13,75 litra e) 16 zł f) 4 zł g) 530 kcal

25. a) 800 m, b) 6 km, c) 48 km, d) 22 min 30 s

26. 60 kg

27. Pisała 24 min z prędkością 205 znaków/minutę.

28. 27 szylingów i 6 pensów.

30. a) gdy pierwsza ma długość 2, to druga ma długość 3, gdy pierwsza ma długość 6, to druga ma długość 1, b) 3, c) $y = \frac{1}{x}$

31. 2

32. 6

33. 6 ton i 8 ton

34. a) 80, b) 96, c) 100

35. a) będzie równy 15°, b) będzie równy 45°, c) będzie równy 40°

36. 17,5 km

37. 12 km/h

38. 60 m^2

39. ok 38 ślimaków

40. 10 minut

Uwaga. Uwaga niektóre zadania w tym rozdziale pochodzą z podręczników GWO z serii Matematyka z Plusem.

Rozdział 14

STATYSTYKA I PRAWDOPODOBIEŃSTWO

14.1 Średnia arytmetyczna

W matematyce posługujemy się pojęciami różnych tzw. średnich. Na przykład: średnia arytmetyczna, średnia geometryczna, średnia harmoniczna.

DEFINICJA

Średnia arytmetyczna danego zbioru liczb jest to suma tych wszystkich liczb podzielona przez ilość tych liczb. Dla zestawu danych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ich średnią arytmetyczną oznaczamy zazwyczaj $\overline{x}$, przy czym

$$\boxed{\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.}$$

PRZYKŁAD

Słuchacz uzyskał w 8 testach następujące wyniki: 7, 3, 5, 2, 7, 3, 7, 4. Średnia arytmetyczna tych 8 wyników jest równa

$$\begin{aligned} \frac{7+3+5+2+7+3+7+4}{8} &= \\ \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 5 + 3 \cdot 7}{8} &= \\ \frac{2+6+4+5+21}{8} &= \frac{38}{8} = 4{,}75 \end{aligned}$$

1. W naszej klasie jest 15 chłopców i 10 dziewcząt. Średnia waga jednego chłopaka wynosi 60 kg, a jednej dziewczyny 50 kg. Jaka jest średnia waga jednej osoby z naszej klasy?

2. W naszej klasie jest 6 chłopców i 24 dziewczyny. Średnia waga jednego chłopaka wynosi 55 kg, a jednej dziewczyny 50 kg. Jaka jest średnia waga jednej osoby z naszej klasy?

3. W naszej klasie jest 25 osób i średnia waga ucznia w naszej klasie wynosi 50 kilogramów. W sąsiedniej klasie jest 30 uczniów i średnia waga ucznia w tej drugiej klasie jest równa 60 kilogramów. Jaka jest średnia waga uczniów w tych dwóch klasach? Odpowiedź podaj w postaci liczby całkowitej i ułamka nieskracalnego.

4. Uczniowie napisali pracę kontrolną. 30% uczniów otrzymało piątkę, 40% otrzymało czwórkę, 8 uczniów otrzymało ocenę dostateczną, a pozostali ocenę dopuszczającą. Średnia arytmetyczna tych ocen ocen wynosiła 3,9. Ilu uczniów otrzymało ocenę bardzo dobrą, a ilu dopuszczającą?

5. Średnia arytmetyczna wieku 27 osobowej grupy dzieci jest równa 14 lat. Gdy do obliczania średniej doliczymy wiek opiekuna, to średnia wzrośnie do 15 lat. Ile lat ma opiekun grupy?

6. W klasie I a jest 29 uczniów. Średnia waga jednego ucznia wynosiła 45 kg. Gdyby liczyć średnią wagę wszystkich osób w klasie czyli wszystkich uczniów i nauczyciela, to średnia waga wynosiłaby 46 kg. Ile ważył nauczyciel?

7. W naszej klasie jest 25 osób i średnia waga ucznia w naszej klasie wynosi 56 kilogramów. W sąsiedniej klasie jest 30 uczniów i średnia waga ucznia w tej drugiej klasie jest równa 51 kilogramów. Jaka jest średnia waga ucznia w tych dwóch klasach? Odpowiedź podaj w postaci liczby mieszanej.

8. Na statku było 31 marynarzy i kapitan. Średnia wieku marynarzy wynosiła 23 lata. Gdyby liczyć średnią wieku wszystkich marynarzy i kapitana, to wynosiłaby ona 24 lata. Ile lat ma kapitan?

9. Janek z pierwszych pięciu prac kontrolnych otrzymał następujące oceny: 3, 4, 5, 4, 2. Jakie oceny musi on otrzymać z ostatnich dwóch prac kontrolnych, aby średnia ocen z wszystkich siedmiu prac wynosiła co najmniej 4? Wyznacz wszystkie odpowiedzi.

10. W pewnej firmie struktura zatrudnienia i płac jest następująca:

Staż pracy do 5 lat

	mężczyźni	kobiety
il. zatrudn.	20	80
śr. płaca	2 520	2 570

Staż pracy powyżej 5 lat

	mężczyźni	kobiety
il. zatrudn.	80	20
śr. płaca	2 920	2 970

Spoglądając tylko na te tabelki spróbuj odpowiedzieć, kto średnio więcej zarabia w tej firmie, kobiety czy mężczyźni?
Następnie analizując liczby w powyższych tabelkach odpowiedz na poniższe pytania.

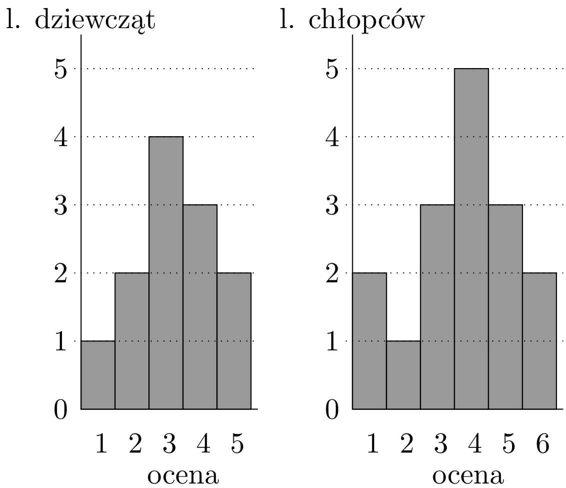
a) Ilu mężczyzn, a ile kobiet pracuje w tej firmie?

b) Jaka jest średnia płaca w tej firmie?

c) Jaka jest średnia płaca kobiet w tej firmie?

d) Jaka jest średnia płaca mężczyzn w tej firmie?

11. Średnia wieku 6 kolegów wynosi 16 lat. Gdyby pierwszy z nich był o 2 lata starszy, drugi o 4 lata, trzeci o 6 lat, czwarty o 8 lat, piąty o 10 lat, a szósty o 12 lat, to jaka byłaby wówczas średnia wieku tych 6 osób?



12. Na diagramach obok przedstawione są wyniki klasówki w pewnej klasie. Jaka była średnia ocena w grupie dziewcząt, jaka w grupie chłopców, a jaka w całej klasie?

13. Średnia waga 8 osób, w tym 1 dziecka i 7 dorosłych, wynosi 68 kg. Średnia waga tych 7 dorosłych osób jest równa 70. Wyznacz wagę dziecka.

14. W rodzinie jest 7 dzieci: 3 chłopców i 4 dziewczynki. Średnia waga dziecka jest równa 43 kg. Średnia waga jednego chłopca jest równa 47 kg. Wyznacz średnią wagę jednej dziewczynki.

15. W naszej 20 osobowej klasie uczniowie zbierają pocztówki. Każdy uczeń miał średnio 80 pocztówek. Dzisiaj jeden z uczniów dostał od siostry 40 pocztówek. Ile teraz jeden uczeń ma średnio pocztówek?

14.2 Mediana

Aby wyznaczyć medianę danego zbioru danych porządkujemy te dane rosnąco.

OKREŚLENIE

Mediana jest to liczba, która dzieli uporządkowany (rosnąco lub malejąco) zbiór danych na dwie równe części. Jeżeli w zbiorze jest nieparzysta liczba danych, to medianą jest ten wynik, dla którego na lewo i na prawo leży taka sama liczba danych. Jeżeli natomiast w zbiorze jest parzysta liczba danych, to medianą jest średnia arytmetyczna dwóch środkowych wyrazów ciągu. Medianę oznacza się zwyczajowo m_e

PRZYKŁADY

Dla zbioru danych

$$2, 2, 4, 5, 5, 5, 9, 10, 10, 12, 14, 17, 17$$

medianą jest liczba 9.

Dla zbioru danych

$$4, 5, 5, 5, 7, 8, 9$$

medianą jest liczba 5.

Dla zbioru danych

$$2, 2, 4, 5, 5, 5, 9, 10, 10, 12, 14, 17$$

medianą jest liczba $\dfrac{5+9}{2} = 7$

Dla zbioru danych

$$2, 2, 4, 5, 5, 5, 5, 10, 10, 12, 14, 17$$

medianą jest liczba $\dfrac{5+5}{2} = 5$.

16. Wyznacz średnią arytmetyczną i medianę dla zbiorów danych:

a) 2, 4, 5, 8, 8, 8, 10, 11, 13

b) 2, 4, 5, 6, 8, 8, 10, 11

c) 3, 8, 9, 5, 3, 7, 3, 8, 6

d) 3, 8, 19, 5, 3, 7, 3, 8

17. W klasie jest 25 osób. Wyniki testu były takie jak w tabeli obok. Pozostałe oceny były równe 3. Jaka była średnia ocena z tego testu? Jaka była mediana tych wszystkich ocen?

ocena	ilość ocen
6	3
5	4
4	5
2	3
1	2

18. W klasie jest 30 osób. Wyniki testu kontrolnego były następujące: 3 osoby dostały ocenę 1, 7 osób dostało ocenę 2, 5 osób dostało ocenę 3, 8 osób dostało ocenę 4, 4 osoby dostały ocenę 5, 3 osoby dostały ocenę 6. Jaka była średnia ocen tej klasy? Jaka była mediana ocen tej klasy?

19. Średnia arytmetyczna pięciu różnych liczb całkowitych dodatnich jest równa 20, a mediana jest równa 18. a) Jaka może być największa liczba w tym zbiorze?, b) Jaki to jest wówczas zestaw danych? c) Jaka, co najmniej, musi być największa liczba w tym zbiorze i jaki wówczas to jest zbiór danych?

20. Na obozie żeglarskim było 9 chłopców i 6 dziewczyn. Wzrost poszczególnych chłopców był następujący: 182, 178, 178, 176, 174, 171, 170, 168, 166. Wzrost poszczególnych dziewcząt był następujący: 175, 173, 170, 169, 165, 162.

a) Jaki był średni wzrost w grupie chłopców, a jaki w grupie dziewczyn?

b) Jaki był średni wzrost wszystkich uczestników obozu?

c) Jaka była była mediana wzrostów w grupie chłopców, a jaka w grupie dziewcząt?

d) Jaka była mediana wzrostów wszystkich uczestników obozu?

21. W pewnej firmie pracuje siedem osób. Każda osoba ma inną pensję. Mediana płac wynosi 2500 zł. Czy z tego wynika, że

a) Jakaś osoba zarabia dokładnie 2 500 zł?

b) Trzy osoby zarabiają mniej niż 2 500 zł?

c) Jeżeli zarobki każdej osoby wzrosną o 10%, to również mediana wzrośnie o 10%?

d) Średni zarobek jest równy 2 500 zł?

Jeżeli odpowiedź jest tak, to podaj przykład odpowiedniego zestawu danych.

22. W pewnej firmie pracuje osiem osób. Każda osoba ma inną pensję. Mediana płac wynosi 2500 zł. Czy z tego wynika, że

a) Jakaś osoba zarabia dokładnie 2 500 zł?

b) Cztery osoby zarabiają mniej niż 2 500 zł?

c) Jeżeli zarobki każdej osoby wzrosną o 10%, to również mediana wzrośnie o 10%?

d) Średni zarobek jest równy 2 500 zł?

23. W pewnej firmie pracuje osiem osób. Mediana płac wynosi 2500 zł. Czy z tego wynika, że

a) Jakaś osoba zarabia dokładnie 2 500 zł?

b) Nikt nie zarabia 2 500 zł?

c) Cztery osoby zarabiają mniej niż 2 500 zł?

24. W zbiorze dziewięciu liczb jedna z nich jest medianą. Do tego zbioru dodaliśmy cztery liczby. Dwie z nich były większe od mediany, a dwie mniejsze. Które z poniższych pięciu zdań traktujących o medianie tego nowego zbioru danych musi być prawdziwe

a) mediana jest średnią dwóch najmniejszych dodanych do tego zbioru liczb,

b) jest taka sama jak oryginalna mediana

c) jest średnią dwóch dodanych największych liczb

d) jest większa od oryginalnej mediany

e) jest mniejsza od oryginalnej mediany

14.3 Moda

Trzecią wielkością charakteryzującą zbiór danych jest **moda** (wartość modalna). Jest to ta liczba, która najczęściej pojawia się w danym zbiorze. Oznaczamy ją zazwyczaj m_o.

PRZYKŁAD

W poniższym zbiorze danych

$$1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 5, 5$$

średnia = 3
mediana = 2.5
moda = 2
Moda może być informacją na przykład dla producentów obuwia informującą ich jaki rozmiar stopy występuje najczęściej.

25. W pewnej grupie 3 osoby mają wzrost 176 cm, 5 osób ma wzrost 174 cm i 10 osób ma wzrost 168 cm.
a) Jaki jest średni wzrost w tej grupie osób?
b) Jaka jest mediana wzrostu osób w tej grupie?
c) Jaka jest wartość modalna (moda) wzrostu osób w tej grupie?

14.4 Doświadczenia losowe i prawdopodobieństwo

Doświadczeniem losowym nazywamy eksperyment, którego wyniku nie można przewidzieć. Przykładami tego typu eksperymentów są: rzut monetą, rzut kostką, losowanie liczb w lotto,... Wyniku doświadczenia losowego nie można przewidzieć, ale dla wielu możemy określić zbiór wszystkich możliwych wyników tego eksperymentu – każdy pojedynczy wynik określonego doświadczenia losowego nazywamy **zdarzeniem elementarnym**. Zdarzenia elementarne wykluczają się. Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych będziemy oznaczać symbolem Ω.

PRZYKŁADY

Jeżeli rzucamy monetą, to moneta może wypaść orzeł – **O** lub reszka **R**. To są zdarzenia elementarne. Piszemy wówczas:

$$\Omega = \{\mathbf{R}, \mathbf{O}\}.$$

Przy dwukrotnym rzucie monetą zdarzeniami elementarnymi są:
OO – w obydwu rzutach wypadł orzeł
OR – w pierwszym rzucie wypadł orzeł, a w drugim rzucie reszka
RO – w pierwszym rzucie wypadła reszka, a w drugim orzeł
RR – w obu rzutach wypadła reszka
Zatem przestrzeń zdarzeń elementarnych to

$$\Omega = \{\mathbf{OO}, \mathbf{OR}, \mathbf{RO}, \mathbf{RR}\}$$

26. W następujących zdarzeniach losowych określ ilość zdarzeń elementarnych:

a) Rzut klasyczną kostką do gry.

b) Trzykrotny rzut monetą

c) Losowanie jednej kuli z pojemnika, w którym znajdują się trzy kule: biała, czerwona i zielona.

d) Dwukrotne losowanie bez zwracania po jednej kuli z pojemnika, w którym znajdują się trzy kule: biała, czerwona i zielona.

e) Dwukrotne losowanie ze zwracaniem po jednej kuli z pojemnika, w którym znajdują się trzy kule: biała, czerwona i zielona.

f) Dwukrotne losowanie bez zwracania po jednej kuli z pojemnika, w którym znajdują się cztery kule: biała, czerwona, zielona i niebieska.

g) Dwukrotne losowanie ze zwracaniem po jednej kuli z pojemnika, w którym znajdują się cztery kule: biała, czerwona, zielona i niebieska.

27. Rzucamy jeden raz kostką do gry. Wypisz wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu:

a) wypadła parzysta liczba oczek;

b) wypadła liczba oczek większa od 3;

c) wypadła liczba oczek mniejsza od 8;

d) wypadła liczba oczek większa od 6.

Potocznie, prawdopodobieństwo jest to pojęcie określające oczekiwania co do rezultatu danego zdarzenia, którego wyniku nie znamy. Sposób liczenia prawdopodobieństwa podał po raz pierwszy Pierre Simon de Laplace w roku 1812.

DEFINICJA

Prawdopodobieństwem zajścia zdarzenia A nazywamy iloraz liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A przez liczbę wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych (przypadków).

$$\boxed{P(A) = \frac{\text{liczba zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A}}{\text{liczba wszystkich zdarzeń elementarnych}}}$$

Z tego wynika, że $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$

28. Na loterii jest dziesięć losów, z których cztery są wygrywające. Jakie jest prawdopodobieństwo wygrania, jeżeli kupimy jeden los?

29. W pudełko znajdują się kule oznaczone numerami od 1 do 7. Losujemy jedną kulę. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosujemy kulę o numerze nieparzystym.

30. Rzucamy jeden raz kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń:

a) wypadnie parzysta liczba oczek;

b) wypadnie liczba oczek większa od 2;

c) wypadnie liczba oczek mniejsza od 7;

d) wypadnie liczba oczek większa od 6.

31. W worku znajduje się 10 piłeczek: 5 czerwonych, 3 żółte, 2 niebieskie. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana piłeczka jest:

a) żółta,

b) czerwona lub żółta

c) żółta lub niebieska.

32. W pudełku zmieszano 30 ziaren fasoli, 20 ziaren ciecierzycy i 50 ziaren grochu. Losujemy jedno ziarenko.

a) Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania ziarenka ciecierzycy?

b) Jako pierwsze wylosowano ziarenko fasoli. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że drugim wylosowanym ziarenkiem nie będzie ziarenko fasoli?

33. W skrzynce jest 90 jabłek dobrych i 10 zepsutych. Losujemy jedno jabłko. Jakie jest prawdopodobieństwo, że to będzie jabłko dobre?

34. W urnie jest 8 kul białych, 7 kul czarnych i 5 zielonych. Wyciągamy po ciemku jedną kulę. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że ta wylosowana kula

a) nie jest czarna

b) jest biała lub czarna

c) jest zielona

d) nie jest ani biała, ani zielona

35. W szufladzie jest 7 par skarpetek białych i 3 pary skarpetek czarnych. Tomek losuje z szuflady po jednej skarpetce i kładzie ją na stół. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub zaznacz F – jeśli jest fałszywe.

a) Prawdopodobieństwo wylosowania czarnej skarpetki jest równe 0,3.

b) Tomek za pierwszym razem nie wylosował czarnej skarpetki. Prawdopodobieństwo, że za drugim razem wylosuje czarną skarpetkę jest większe.

36. W pudełku znajduje się 30 losów loterii. 5 z tych losów jest wygrywających, 10 jest przegrywających, a wyciągnięcie jednego z pozostałych upoważnia do wyciągnięcia jeszcze jednego losu. Po wyciągnięciu los nie jest zwracany do pudełka. Pierwsza osoba, która brała udział w tej loterii, wyciągnęła los przegrywający. Określ, czy podane zdania są prawdziwe (P), czy fałszywe (F)?

a) Prawdopodobieństwo wyciągnięcia przez drugą osobę losu wygrywającego wzrosło.

b) Prawdopodobieństwo wyciągnięcia przez drugą osobę losu przegrywającego zmalało.

c) Prawdopodobieństwo wyciągnięcia przez drugą osobę losu upoważniającego do ponownego losowania nie zmieniło się.

W urnie znajdują się następujące kule: 4 białe, 6 zielonych, 10 niebieskich.

37. Losujemy z urny jedną kulę. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wylosujemy kulę

a) białą

b) niebieską

c) nie zieloną

38. Losujemy z urny jedną kulę. Ile razy prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej jest mniejsze niż prawdopodobieństwo wylosowania kuli zielonej?

39. Jaką minimalną liczbę kul i jakiego koloru (jakich kolorów) należy dołożyć do urny aby przy losowaniu jednej kuli prawdopodobieństwo wylosowania kuli każdego koloru było takie samo?

40. Jaką minimalną liczbę kul i jakiego koloru (jakich kolorów) należy usunąć z urny aby przy losowaniu jednej kuli prawdopodobieństwo wylosowania kuli każdego koloru było takie samo?

41. Ile kul białych należy dołożyć do urny aby prawdopodobieństwo wylosowania kuli zielonej było równe $\frac{1}{4}$?

42. Ile kul białych należy dołożyć, aby prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej było równe a) $\frac{1}{2}$, b) $\frac{1}{3}$

43. Lekarz powiadomił pewną parę małżeńską, że według analizy genetycznej prawdopodobieństwo, że ich dziecko będzie obarczone chorobą dziedziczną jest równe 1 : 4. Czy to oznacza, że

a) jeśli pierwsza trójka dzieci urodzi się zdrowa, to wówczas czwarte będzie chore?

b) jeśli pierwsze dziecko urodzi się chore, to następne troje dzieci będą zdrowe?

c) ryzyko choroby jest takie samo w przypadku każdego dziecka?

d) jeśli będą mieli trójkę dzieci, to żadne z nich nie będzie chore?

e) jeżeli będą mieli czwórkę dzieci, to dokładnie jedno z nich będzie chore?

Wskazówki i odpowiedzi.

1. 56 kg

2. 51 kg

3. $55\frac{5}{11}$

4. bdb – 12 uczniów, dop – 4 uczniów

5. 42

6. 75 kg

7. $53\frac{3}{11}$ kg

8. 55 lat

9. 5 i 5 lub 5 i 6, lub 6 i 6, lub 6 i 4

10. a) 100 kobiet, 100 mężczyzn; b) 2 745 zł; c) 2 650 zł; d) 2 840 zł

11. 23

12. w grupie dziewczyn $\overline{x}$=3,25;
w grupie chłopców $\overline{x}$=3,75;
w klasie $\overline{x}$=3,54

13. 34 kg

14. 40 kg

15. 82

16. a) $\overline{x} = 7\frac{2}{3}$, $m_e = 8$
b) $\overline{x} = 6\frac{3}{4}$, $m_e = 7$
c) $\overline{x} = 5\frac{7}{9}$, $m_e = 6$
d) $\overline{x} = 7$, $m_e = 6$

17. $\overline{x} = 3\frac{4}{5}$, $m_e = 3$

18. $\overline{x} = 3{,}4$, $m_e = 3{,}5$

19. a) 62; b) 1, 1, 18, 18, 62;
c) 28, zest. danych 18, 18, 18, 18, 28

20. a) $\overline{x}_{\text{ch}} = 173\frac{2}{3}$, $\overline{x}_{\text{dz}} = 169$;
b) 172;
c) dla chłopców $m_e = 174$,
dla dziewcząt $m_e = 169{,}5$;
d) 171

21. a) tak, b) nie, c) tak, d) nie

22. a) nie, b) tak, c) tak, d) nie

23. a) nie, b) nie, c) nie

24. zdanie b)

25. a) 171 cm; b) 168 cm;
c) 168 cm

26. a) 6, b) 8, c) 3, d) 6, e) 9, f) 12, g) 16

27. a) 2, 4, 6; b) 4, 5, 6;
c) 1, 2, 3, 4, 5, 6;
d) nie ma takich zdarzeń elementarnych czyli ich ilość jest 0

28. $\frac{4}{10}$

29. $\frac{4}{7}$

30. a) $\frac{1}{2}$, b) $\frac{2}{3}$, c) 1, d) 0

31. a) $\frac{3}{10}$, b) $\frac{4}{5}$, c) $\frac{1}{2}$

32. a) $\frac{1}{5}$, b) $\frac{70}{99}$

33. $\frac{9}{10}$

34. a) $\frac{13}{20}$, b) $\frac{3}{4}$, c) $\frac{1}{4}$, d) $\frac{7}{20}$

35. a) tak, b) tak.

36. a) P, b) P, c) F

37. a) $\frac{1}{5}$, b) $\frac{1}{2}$, $\frac{7}{10}$

38. 1,5 raza

39. 6 białych i 4 zielone

40. 2 zielone i 6 niebieskich

41. 4

42. a) 12, b) 4

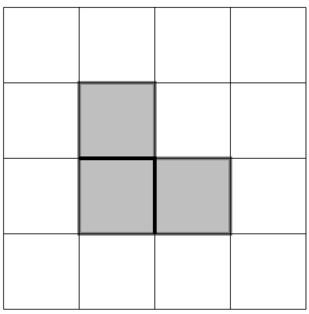
43. a) n, b) n, c) t, d) n, e) n

Rozdział 15

SYMETRIE

W poniższych ćwiczeniach

- dorysowywane kwadraty mają mieć bok o długości 1,
- nie muszą dotykać narysowanej już figury
- muszą należeć do już narysowanej siatki

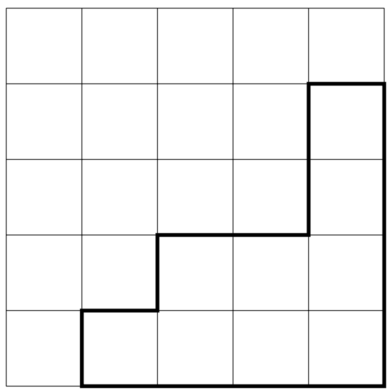


1. Figura na rysunku obok zbudowana jest z 3 kwadratów. Ma ona jedną oś symetrii. Na ile sposobów można do niej dorysować jeszcze jeden kwadrat o bokach należących do narysowanej już siatki 4×4, tak aby uzyskana figura miała:

a) dokładnie jedną oś symetrii,

b) więcej niż jedną oś symetrii,

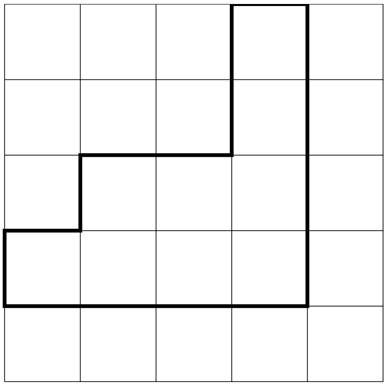
c) środek symetrii.



2. Figura na rysunku obok zbudowana jest z 9 kwadratów.

a) Ile kwadratów wystarczy dorysować, aby nowo powstała figura miała oś symetrii?

b) Na ile sposobów można dorysować 2 kwadraty, tak aby nowo powstała figura miała oś symetrii?

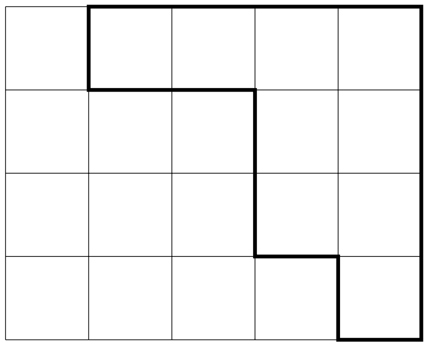


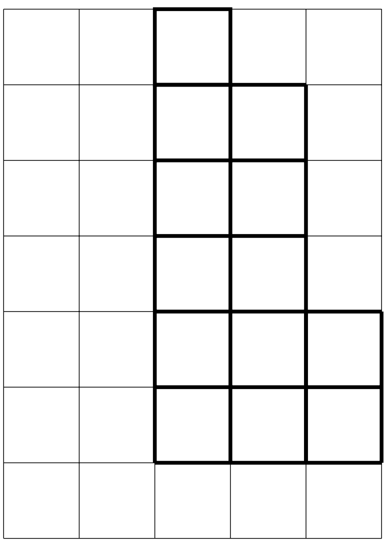
3. Figura na rysunku obok zbudowana jest z 9 kwadratów.

a) Ile kwadratów o bokach należących do narysowanej już siatki wystarczy dorysować, aby uzyskana figura miała oś symetrii?

b) Na ile sposobów można do niej dorysować 3 kwadraty, tak aby uzyskana figura miała oś symetrii?

4. Figura na rysunku obok zbudowana jest z 9 kwadratów. Na ile sposobów można do niej dorysować 5 kwadratów, tak aby uzyskana figura miała oś symetrii?



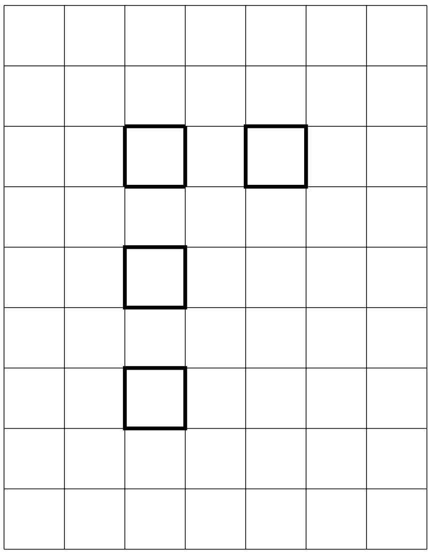


5. Figura na rysunku obok składa się z 13 kwadratów.

a) Dorysuj na dwa sposoby 3 kwadraty, tak aby uzyskana figur miała oś symetrii.

b) Dorysuj trzy kwadraty tak, aby uzyskana figura miała środek symetrii.

6. Figura na rysunku poniżej składa się z 4 kwadratów.



a) Dorysuj na 3 sposoby 1 kwadrat, tak aby uzyskana figura miała oś symetrii.

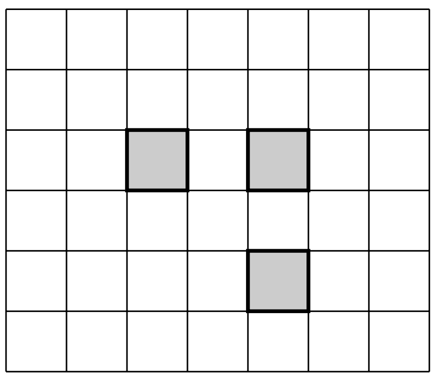
b) Dorysuj 2 kwadraty tak, aby uzyskana figura miała oś symetrii. Spróbuj policzyć na ile sposobów można to zrobić.

c) Dorysuj jeden kwadrat tak, aby uzyskana figura miała środek symetrii. Gdzie znajduje się środek symetrii tej nowo powstałej figury?

d) Dorysuj dwa kwadraty tak, aby uzyskana figura miała środek symetrii. Na ile sposobów można to zrobić?

7. Figura na rysunku poniżej składa się z 3 kwadratów.

a) Na ile sposobów można dorysować jeden kwadrat, tak aby uzyskana figur miała oś symetrii?



b) Na ile sposobów można dorysować jeden kwadrat tak, aby uzyskana figura miała środek symetrii? Gdzie jest położony (w każdym przypadku) ten środek symetrii?

c) Na ile sposobów można dorysować dwa kwadraty tak, aby uzyskana figura miała zarówno środek jak i oś symetrii.

8. Ile osi symetrii ma

a) trójkąt równoboczny?

b) kwadrat?

c) prostokąt nie będący kwadratem?

d) romb nie będący kwadratem?

e) trójkąt równoramienny nie będący trójkątem równobocznym?

f) okrąg?

g) okrąg z wyciętym jednym punktem?

h) odcinek?

i) prosta?

9. Czy ma środek symetrii figura (a jeśli tak, to gdzie on jest położony)

a) kwadrat

b) prostokąt nie będący kwadratem

c) romb nie będący kwadratem

d) trójkąt równoboczny

e) odcinek

f) okrąg

g) koło z którego usunięto jedną średnicę

h) prosta

10. Wypisz drukowane litery alfabetu łacińskiego, które mają oś symetrii.

11. Wypisz drukowane litery alfabetu łacińskiego, które mają środek symetrii.

12. Wypisz te cyfry, które mają oś symetrii.

13. Wypisz liczby 3-cyfrowe, które mają dwie osie symetrii.

14. Ile osi symetrii może mieć figur złożona z dwóch okręgów o różnych promieniach? Rozpatrz różne przypadki.

15. Ile osi symetrii może mieć figura złożona z okręgu i prostej. Rozpatrz różne przypadki.

16. Punkt M leży wewnątrz kąta ostrego o mierze α. B i C są punktami symetrycznymi do punktu M względem ramion tego kąta. Wyznacz miarę kąta BAC.

17. Punkt M jest dowolnym punktem wewnątrz kwadratu o boku długości a. Punkty A, B, C, D są punktami symetrycznymi do punktu M względem prostych zawierających boki kwadratu.
a) Wyznacz długość przekątnych czworokąta $ABCD$.
b) Wyznacz pole czworokąta $ABCD$.

18. Narysuj dowolny równoległobok i znajdź figurę do niego symetryczną względem prostej
a) zawierającej jeden z boków równoległoboku,
b) zawierającej przekątną równoległoboku,
c) przechodzącej przez jeden z wierzchołków,
d) przecinającej dwa sąsiednie boki,
e) prostopadłej do dwóch równoległych boków.

19. Narysuj trójkąt równoboczny o boku długości 3. Wykreśl trójkąt symetryczny do trójkąta ABC względem prostej zawierającej jeden z boków trójkąta. Oblicz obwód otrzymanego czworokąta.

20. Narysuj trójkąt egipski (prostokątny o bokach długości 3, 4, 5). Wykreśl trójkąty symetryczne do danego trójkąta względem prostych zawierających boki trójkąta. Oblicz obwód otrzymanego czworokąta $AB'A'BC'A$.

21. Dany jest trapez prostokątny $ABCD$ o podstawach AB i CD. Kąt przy wierzchołku D jest prosty, zaś $|AB| = 5$, $|CD| = 3$, $|AD| = 2$. Wykreśl trapez symetryczny do danego względem prostej zawierającej
a) podstawę dolną,
b) podstawę górną,
c) ramię AD.

22. Trójkąt ostrokątny ABC ma obwód d. Odbijamy ten trójkąt symetrycznie względem jego boków uzyskując sześciokąt $B'CA'BC'A$. Wyznacz obwód tego sześciokąta.

Odpowiedzi i wskazówki

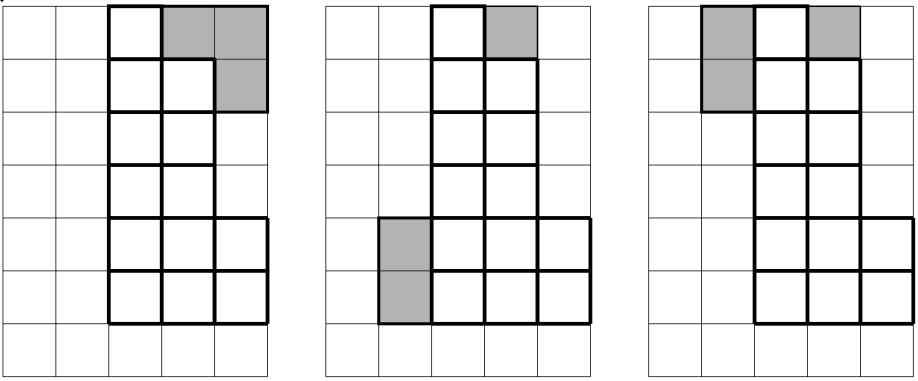
1. a) 4 b) 1 c) 3

2. a) 1 b) 2

3. a) 1, b) 10

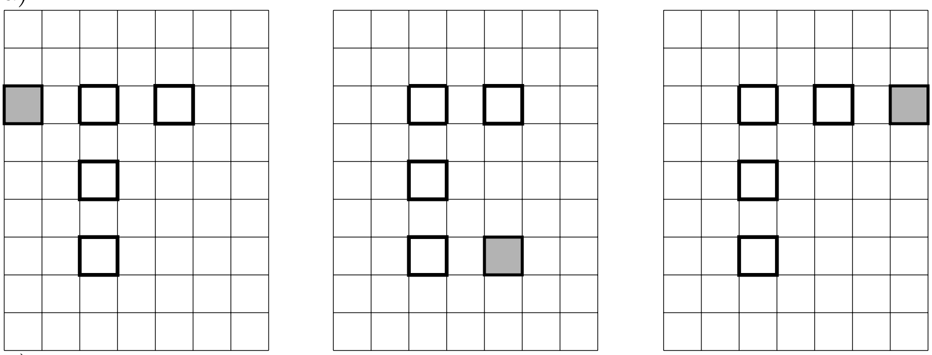
4. 10

5.



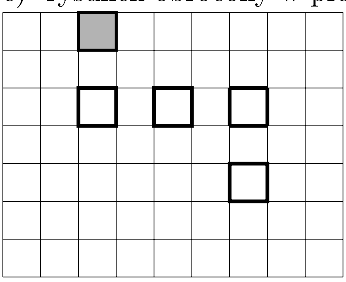
6.

a)

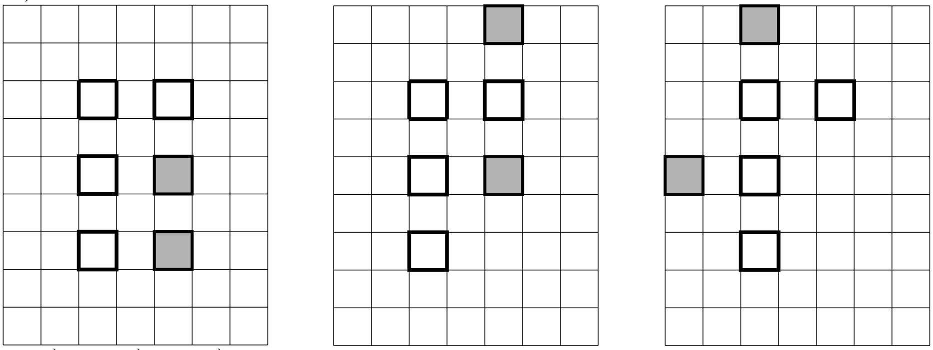


b) 18

c) rysunek obrócony w prawo o 90°



d)



7. a) 7, b) 3, c) 2

8. a) 3, b) 4, c) 2, d) 2, e) 1, f) nieskończenie wiele, g) 1, h) 2, i) nieskończenie wiele

9. a) tak, b) tak, c) tak, d) nie, e) tak, f) tak, g) tak

10. A, B, C, D, E, H, I, K, M, O, U, V, W, X

11. H, I, O, S, X, Z

12. 0, 8

13. 808, 888

14. jedną lub nieskończenie wiele

15. jedną lub dwie

16. 2α

17. a) $2a$, b) $2a^2$