

**AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA**  
**im. Stanisława Staszica w Krakowie**  
**OLIMPIADA „O DIAMENTOWY INDEKS AGH” 2011/12**  
**MATEMATYKA - ETAP II**

**ZADANIA PO 10 PUNKTÓW**

1. Wykaż, że liczba  $a = \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} - \sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$  jest całkowita.
2. Wyznacz dziedzinę funkcji danej wzorem
$$f(x) = \sqrt{x^4 + x^3 - 8x^2 - 12x}.$$
3. Oblicz miarę kąta między wektorami  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  wiedząc, że wektory  $\vec{u} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$  i  $\vec{v} = -\vec{a} + 4\vec{b}$  są prostopadłe oraz  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ .
4. Dwa różne automaty wykonują razem daną pracę w ciągu 6 godzin. Gdyby pierwszy automat pracował sam przez 2 godziny, a następnie drugi pracował sam przez 6 godzin, to wykonałyby połowę całej pracy. W jakim czasie każdy automat może samodzielnie wykonać całą pracę?

**ZADANIA PO 20 PUNKTÓW**

5. Ze zbioru  $S = \{1, 2, \dots, 2012\}$  losujemy trzy liczby i ustawiamy je w ciąg rosnący  $(a, b, c)$ . Oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń  
 $A$ : iloczyn  $abc$  jest liczbą parzystą,  
 $B_k$ :  $b = k$ , gdzie  $k$  jest ustaloną liczbą ze zbioru  $S$ .  
Dla jakich  $k$  prawdopodobieństwo zdarzenia  $B_k$  jest największe?
6. Dane są dwa punkty  $A = (7, 5)$ ,  $B = (1, -1)$  oraz punkt  $P = (3, 3)$  przecięcia wysokości trójkąta  $ABC$ . Oblicz pole trójkąta  $ABC$  i napisz równanie okręgu opisanego na nim.
7. Stożek i walec mają równe tworzące, równe objętości i równe pola powierzchni bocznej. Oblicz
  - a) sinus kąta nachylenia tworzącej stożka do jego podstawy,
  - b) stosunek pola przekroju osiowego walca do pola przekroju osiowego stożka.