

**AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA**  
**im. Stanisława Staszica w Krakowie**  
**OLIMPIADA „O DIAMENTOWY INDEKS AGH” 2010/11**

**MATEMATYKA - ETAP III**

**ZADANIA PO 10 PUNKTÓW**

1. Dany jest  $n$ -elementowy zbiór  $X$  oraz jego  $k$ -elementowy podzbiór  $S$ . Ze zbioru  $X$  wybieramy losowo  $m$  elementów, tworząc zbiór  $B$ . Zakładając, że  $k > 0, m > 0$  oraz  $m + k \leq n + 1$ , oblicz prawdopodobieństwo, że zbiory  $B$  i  $S$  będą miały dokładnie jeden element wspólny.
2. Oblicz sumę wszystkich dwucyfrowych liczb naturalnych niepodzielnych przez 7.
3. Wyznacz dziedzinę funkcji  $f$  danej wzorem

$$f(x) = \frac{x^3 + 8}{x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 4x}.$$

Zbadaj granice funkcji  $f$  w punktach nienależących do dziedziny.

4. Suma dwóch nieujemnych liczb rzeczywistych  $x, y$  jest równa dodatniej liczbie  $a$ . Jaką najmniejszą wartość może mieć suma kwadratów liczb  $x$  i  $y$ ?

**ZADANIA PO 20 PUNKTÓW**

5. W prawidłowy graniastosłup sześciokątny wpisano sferę (styczną do wszystkich ścian bocznych i do obu podstaw). Oblicz stosunek pola powierzchni tej sfery do pola powierzchni sfery opisanej na graniastosłupie.
6. Dla jakich wartości parametru  $p$  równanie

$$\frac{\log(px^2)}{\log(x+1)} = 2$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie?

7. Znajdź równania stycznych do okręgu  $C$  o równaniu

$$x^2 + y^2 + 6x - 4y - 12 = 0$$

przechodzących przez punkt  $P = (\frac{16}{3}, 2)$ . Oblicz długość promienia okręgu stycznego do obydwu prostych i do okręgu  $C$ .