

PRACA KONTROLNA nr 5

lutry 2005r.

1. Firma otrzymała zlecenie na wyprodukowanie 80000 sztuk pewnego wyrobu w terminie 60 dni. KaŹdy z 20 pracowników firmy moŹe wykonać w ciągu dnia 50 sztuk tego wyrobu. Reszta zamówienia moŹe być zrealizowana przez dotychczasową załogę, ale za dodatkową pracę naleŹy zapłacić podwójnie. MoŹna teŹ zatrudnić pewną liczbę nowych pracowników, którzy otrzymają 80% wynagrodzenia stałych pracowników. Nowy pracownik moŹe po 4 dniach szkolenia wykonać 26 sztuk wyrobów w pierwszym dniu i zwiększać wydajność o 1 sztukę dziennie aż do osiągnięcia 50 sztuk. Ilu nowych pracowników naleŹałoby zatrudnić wybierając drugi wariant i który wariant jest korzystniejszy dla firmy?
2. Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste a i b , których iloczyn oraz różnica kwadratów są równe ich sumie.
3. Dane są zbiory na płaszczyźnie $A = \{(x, y) : (x + y)(y - 2x) \leq 0\}$ oraz $B = \{(x, y) : y(3 - x) \geq x\}$. Zaznaczyć na rysunku zbiór $C = A \cap B$. Podać wszystkie punkty zbioru C , których obie współrzędne są **liczbami naturalnymi**.
4. W czworokącie **wypukłym** $ABCD$ przekątne $\overrightarrow{AC} = [7, -1]$ i $\overrightarrow{BD} = [3, 3]$ przecinają się w punkcie O odległym o $\sqrt{8}$ od wierzchołków C i D . Wyznaczyć wektory \overrightarrow{AB} i \overrightarrow{BC} oraz narysować ten czworokąt.
5. Wazon w kształcie graniastosłupa prawidłowego trójkątnego o krawędzi podstawy 4 cm i wysokości 25 cm napełniono całkowicie wodą. Następnie wylano część wody przechylając wazon w taki sposób, Źe poziom wody na dwóch krawędziach bocznych znajdował się w odległości 4 cm i 3 cm od górnego brzegu wazonu. Jaką wysokość będzie miał słup wody w wazonie po ustawieniu go z powrotem w pozycji pionowej?
6. Zbadać monotoniczność ciągu o wyrazie ogólnym

$$a_n = \frac{2^n + 2^{n+1} + \dots + 2^{2n+1}}{2 + 2^3 + \dots + 2^{2n+1}}.$$

7. Sporządzić wykres funkcji $f(x) = \sqrt{5x - x^2} - 2$ nie przeprowadzając badania jej przebiegu i podać nazwę otrzymanej krzywej. Na podstawie wykresu określić liczbę rozwiązań równania $|\sqrt{5x - x^2} - 2| = p$ w zależności od parametru rzeczywistego p .
8. Wykazać, Źe równanie kwadratowe $3x^2 + 4x \sin \alpha - \cos 2\alpha = 0$ ma dla kaŹdej wartości parametru α dwa różne pierwiastki rzeczywiste. Wyznaczyć wszystkie wartości parametru $\alpha \in [0, 2\pi]$, dla których suma odwrotności pierwiastków tego równania jest nieujemna.
9. Wyznaczyć asymptoty, przedziały monotoniczności oraz ekstrema lokalne funkcji

$$f(x) = |x - 2| + \frac{5x - 4}{2x^3}.$$