WOJEWÓDZKI KONKURS MATEMATYCZNY w GIMNAZJUM, 2017

Zadania na zawody wojewódzkie
2 marca 2017
Czas - 150 minut.

Za poprawne rozwiązanie wszystkich zadań można otrzymać 40 punktów (po 2 punkty za zadania 1-5 oraz po 6 punktów za zadania 6-10).
Tytuł laureata otrzymają uczestnicy, którzy zdobęda co najmniej 85% możliwej do zdobycia liczby punktów.
Podczas rozwiązywania zadań nie wolno korzystać z kalkulatorów ani z innych urządzeń do obliczeń.

Powodzenia!

W zadaniach 1-5 zaznacz poprawne odpowiedzi (3 poprawne odpowiedzi w zadaniu - 2 punkty, 2 poprawne odpowiedzi - 1 punkt, 1 lub 0 poprawnych odpowiedzi - 0 punktów).

1. - Istnieją liczby a i b, dla których $(a+b)^2 = a^2 + b^2$. TAK NIE
   - Każda liczba a spełnia warunek $a^2 > 0$. TAK NIE
   - Każda dodatnia liczba a spełnia warunek $a > \frac{1}{a}$. TAK NIE

2. - Dla każdej liczby a prawdziwa jest równość $\sqrt{a^2} = a$. TAK NIE
   - Prawdziwa jest równość $\sqrt{8} + \sqrt{18} = \sqrt{50}$. TAK NIE
   - Prawdziwa jest równość $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 2$. TAK NIE

3. - Każdy czworokąt posiadający oś symetrii jest trapezem. TAK NIE
   - Każdy czworokąt posiadający środek symetrii jest równoległobokiem. TAK NIE
   - W każdym równoległoboku dwusieczne sąsiednich kątów wewnętrznych są prostopadłe. TAK NIE

4. - Każde dwa kwadraty są podobne. TAK NIE
   - Każde dwa trójkąty prostokątne, których długości boków wyrażają się liczbami naturalnymi są podobne. TAK NIE
   - Stosunek pól figur podobnych w skali $2:3$ jest równy $0,(4)$. TAK NIE

5. - Istnieje graniastosłup mający $2016 \cdot 2017$ krawędzi. TAK NIE
   - Istnieje ostrosłup mający $2017 \cdot 2018$ krawędzi. TAK NIE
   - Istnieje graniastosłup, w którym liczba krawędzi jest o 2017 większa od liczby ścian. TAK NIE

Aby otrzymać maksymalną liczbę punktów za każde z zadań 6-10 należy podać ich pełne rozwiązania.

6. Wyznacz wszystkie całkowite dodatnie wartości n, dla których każda z liczb $n - 25$ oraz $n + 50$ jest kwadratem liczby całkowitej.

7. Środek symetrii sześciokąta foremnego znajduje się w punkcie $S = (2; 2)$. Jednym z jego wierzchołków jest punkt $A = (2; 6)$. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków tego sześciokąta. Oblicz jego pole powierzchni.

8. Z braku innego zajęcia Matylda pocięła kwadratową kartkę na 9 mniejszych kwadratów. Postanowiła zabawę kontynuować i dzielić niektóre z posiadanych kwadratów na 9 lub na 16 mniejszych kwadratów. Uzasadnij, że kontynuując (w odpowiedni sposób) tę zabawę może uzyskać 2017 kwadratów.

9. Wypisano kolejno, jedna za drugą tysiąc początkowych parzystych liczb całkowitych dodatnich. Ile cyfr napisano? Jaka cyfra znajduje się na miejscu setnym, a jaka na miejscu o numerze 2017? Odpowiedź uzasadnij.

10. Dany jest kwadrat $ABCD$ o boku długości $2+\sqrt{3}$. W kwadrat ten wpisano kwadrat $A_1B_1C_1D_1$ w ten sposób, że wierzchołki A_1, B_1, C_1, D_1 leżą odpowiednio na bokach AB, BC, CD i DA (rysunek obok) oraz kąt $\angle AA_1D_1$ ma miarę 60^0. W analogiczny sposób w kwadrat $A_1B_1C_1D_1$ wpisano kwadrat $A_2B_2C_2D_2$. Wyznacz długość boku kwadratu $A_2B_2C_2D_2$.