

## Praca kontrolna nr 3

- 10.1.** Stosując zasadę indukcji matematycznej, udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej  $n$  suma  $2^{n+1} + 3^{2n-1}$  jest podzielna przez 7.
- 10.2.** Tworząca stożka ma długość  $l$  i widać ją ze środka kuli wpisanej w ten stożek pod kątem  $\alpha$ . Obliczyć objętość i kąt rozwarcia stożka. Określić dziedzinę dla kąta  $\alpha$ .
- 10.3.** Bez stosowania metod rachunku różniczkowego wyznaczyć dziedzinę i zbiór wartości funkcji

$$y = \sqrt{2 + \sqrt{x} - x}.$$

- 10.4.** Z talii 24 kart wylosowano (bez zwracania) cztery karty. Jakie jest prawdopodobieństwo, że otrzymano dokładnie trzy karty z jednego koloru (z czterech możliwych)?
- 10.5.** Rozwiązać nierówność

$$\log_{1/3}(\log_2 4x) \geq \log_{1/3}(2 - \log_{2x} 4) - 1.$$

- 10.6.** Z punktu  $C(1, 0)$  poprowadzono styczne do okręgu  $x^2 + y^2 = r^2$ ,  $r \in (0, 1)$ . Punkty styczności oznaczono przez  $A$  i  $B$ . Wyrazić pole trójkąta  $ABC$  jako funkcję promienia  $r$  i znaleźć największą wartość tego pola.
- 10.7.** Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5|x| \\ |4y - 3x + 10| = 10. \end{cases}$$

Podać interpretację geometryczną każdego z równań i sporządzić staranny rysunek.

- 10.8.** Rozwiązać w przedziale  $[0, \pi]$  równanie

$$1 + \sin 2x = 2 \sin^2 x,$$

a następnie nierówność  $1 + \sin 2x > 2 \sin^2 x$ .