AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA im. Stanisława Staszica w Krakowie OLIMPIADA "O DIAMENTOWY INDEKS AGH" 2014/15

MATEMATYKA - ETAP III

ZADANIA PO 10 PUNKTÓW

1. Znajdź wszystkie liczby naturalne mniejsze niż 7, przez które podzielna jest liczba

$$L = 3^{2016} + 4.$$

2. Rozwiąż równanie

$$2\cos^3 x + 5\sin^2 x - 11\cos x - 9 = 0.$$

- 3. Oblicz pole równoległoboku zbudowanego na wektorach $\vec{u} = [3, -4]$ i $\vec{v} = [4, 4]$.
- 4. Rozwiaż nierówność

$$25 \cdot 0,04^x - 0,2^{x^2-2} < 0.$$

ZADANIA PO 20 PUNKTÓW

5. Wartość funkcji g w punkcie m jest równa sumie pierwiastków równania

$$|mx^2 - 2x| = m,$$

przy czym każdy pierwiastek jest w tej sumie uwzględniany tylko raz niezależnie od jego krotności. Znajdź funkcję $g:m\to g(m)$ i naszkicuj jej wykres.

- 6. Ze zbioru $\{1,2,\ldots,n\}$ losujemy kolejno bez zwracania k liczb, otrzymując ciąg (a_1,a_2,\ldots,a_k) . Wiedząc, że $3\leq k\leq n$, oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń:
 - A a_k jest największą liczbą wśród wylosowanych;
 - B a_k jest podzielna przez 3;
 - C $a_1 + a_2 + \ldots + a_k > \frac{1}{2}k(k+1)$.
- 7. Wyznacz wysokość stożka o najmniejszej objętości opisanego na kuli o promieniu $R=2~\mathrm{cm}.$