

**AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA**  
**im. Stanisława Staszica w Krakowie**  
**OLIMPIADA „O DIAMENTOWY INDEKS AGH” 2010/11**  
**MATEMATYKA - ETAP I**

**ZADANIA PO 10 PUNKTÓW**

1. Kula  $K$  jest wpisana w sześcián. Kula  $K'$  jest styczna do trzech ścian tego sześciánu i do kuli  $K$ . Oblicz stosunek promienia kuli  $K$  do promienia kuli  $K'$ .
2. Suma kwadratów trzech dodatnich liczb całkowitych  $a, b, c$  jest równa 2010. Ile jest wśród nich liczb parzystych?
3. Znajdź liczbę  $p$ , dla której granica ciągu o wyrazie ogólnym

$$a_n = \sqrt[3]{n^3 + n^2 + 9pn} - \sqrt[3]{n^3 - 5pn^2}$$

jest równa 2.

4. Punkty  $A = (-2, 3)$  i  $B = (1, 2)$  są wierzchołkami trójkąta  $T$ . Wyznacz współrzędne trzeciego wierzchołka wiedząc, że pole trójkąta  $T$  jest równe 3, a środek jego ciężkości leży na osi  $OY$ .

**ZADANIA PO 20 PUNKTÓW**

5. Liczba naturalna  $a$  ma  $2n$  cyfr, z których pierwsze  $n$  cyfr to same czwórki, a pozostałe cyfry to ósemki. Udowodnij, że  $\sqrt{a+1}$  jest liczbą naturalną dla każdego  $n$ .
6. W układzie współrzędnych na płaszczyźnie narysuj zbiór
$$A = \{(x, y) : \log_y(8x + y - 2 - x^2) \geq \log_y(8 - x^2 + 8x - 2y - y^2)\}.$$
7. Naskicuj wykres funkcji  $g : m \rightarrow g(m)$ , która każdej liczbie rzeczywistej  $m$  przyporządkowuje liczbę pierwiastków równania

$$2^{2x+2} + 4^x + 4^{x-1} + \dots = m + 16^x.$$