

PRACA KONTROLNA nr 7 -POZIOM ROZSZERZONY

1. Spośród 12 pączków, leżących na półmisku, 6 było nadziewanych, 6 lukrowanych, a 4 nie miały nadzienia ani nie były lukrowane. Franek zjadł dwa losowo wybrane pączki. Obliczyć prawdopodobieństwo, że jadł zarówno pączka lukrowanego jak i pączka z nadzieniem.
2. Na krzywej o równaniu $y = \sqrt{4-x}$, $x \geq 0$, znaleźć punkt P , tak aby odcinek łączący P z początkiem układu współrzędnych, przy obrocie wokół osi Ox , zakreślił powierzchnię o największym polu. Sporządzić rysunek.
3. Wyznaczyć punkty przecięcia się wykresu funkcji $f(x) = \frac{3x-7}{2x-2}$ z wykresem jej pochodnej $f'(x)$. Korzystając ze wzoru $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$, obliczyć tangensy kątów, pod którymi przecinają się te wykresy. Rozwiązanie zilustrować odpowiednim rysunkiem.
4. Stosując zasadę indukcji matematycznej, udowodnić nierówność

$$2\sqrt{n} - \frac{3}{2} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2\sqrt{n} - 1, \quad n \geq 1.$$

Dla jakich n nierówność ta pozwala na oszacowanie występującej w niej sumy z błędem względnym mniejszym niż 1%.

5. Z punktu P widać okrąg o środku O i promieniu r pod kątem 2α . Prosta PO przecina okrąg w punktach A i C , a styczne do okręgu, poprowadzone z punktu P , przechodzą przez punkty B i D na okręgu. Obliczyć promień okręgu wpisanego w czworokąt $ABCD$ oraz odległość środków obu okręgów.
6. Podstawą ostrosłupa jest romb o boku 5. Spodek wysokości ostrosłupa leży w środku podstawy, a krawędzie boczne mają długości 6 i 7. Obliczyć objętość ostrosłupa oraz cosinus kąta nachylenia ściany bocznej do podstawy.