

**AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA**  
**im. Stanisława Staszica w Krakowie**  
**OLIMPIADA „O DIAMENTOWY INDEKS AGH” 2015/16**

**MATEMATYKA - ETAP III**

**ZADANIA PO 10 PUNKTÓW**

1. Znajdź wszystkie pary liczb całkowitych  $(x, y)$  spełniających równanie

$$(x - 2y - 1)(x + 2y + 1) = 3.$$

2. Przy okrągłym stole z 10 ponumerowanymi krzesłami siada 5 kobiet i 5 mężczyzn, wybierając miejsca w sposób przypadkowy. Jakie jest prawdopodobieństwo, że choć jedna osoba usiadzie obok osoby tej samej płci?

3. Rozwiąż równanie

$$|\cos x|^{2\cos x + 1} = 1.$$

4. Dla jakich  $a$  liczby

$$\log_{0,5} a^2, \quad 3 + \log_{0,5} a, \quad -1 - \log_{0,5} 2a^3$$

są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego?

**ZADANIA PO 20 PUNKTÓW**

5. Na płaszczyźnie dane są punkty  $A = (2, 1)$ ,  $B = (-2, 7)$ ,  $C = (-6, 5)$ .  
a) Znajdź współrzędne punktu  $D$ , dla którego czworokąt  $ABCD$  (w tej kolejności wierzchołków) jest równoległobokiem.  
b) Figura  $F$  jest sumą prostej  $AB$  i prostej  $CD$ . Napisz równania wszystkich osi symetrii figury  $F$ .  
c) Znajdź obraz figury  $F$  w jednokładności o środku w punkcie  $A$  i skali równej 3.
6. Funkcja  $f$  przyporządkowuje każdej liczbie rzeczywistej  $m$  liczbę pierwiastków równania

$$\left| \frac{4x + 2}{x^2 + 2} \right| = m.$$

Naszkicuj wykres funkcji  $f$ .

7. Trójkąt równoramienny o obwodzie 36 cm obraca się wokół prostej zawierającej podstawę trójkąta. Jakie powinny być wymiary tego trójkąta, aby objętość powstałej bryły była największa?