

**LIGA MATEMATYCZNA**  
**FINAŁ**  
**25 kwietnia 2009**  
**SZKOŁA PONADGIMNAZJALNA**

**ZADANIE 1.**

Znajdź wszystkie funkcje  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  spełniające warunek  $2f(x) + f(1 - x) = x$  dla wszystkich liczb rzeczywistych  $x$ .

**ZADANIE 2.**

Wypisujemy kolejne liczby naturalne od 1 do 2009. Każdą z tych liczb zastępujemy sumą jej cyfr i powtarzamy to aż do momentu uzyskania liczb jednocyfrowych. Jakich liczb w tym ciągu jest więcej: jedynek czy ósemek?

**ZADANIE 3.**

Wyznacz wszystkie wartości naturalne  $n$ , dla których  $3^n - 1$  jest liczbą podzielną przez 13. Wykaż, że dla żadnej wartości naturalnej  $n$  liczba  $3^n + 1$  nie jest podzielna przez 13.

**ZADANIE 4.**

Liczby  $n + 2$  oraz  $n - 10$  są kwadratami liczb naturalnych. Znajdź  $n$ .

**ZADANIE 5.**

W czworokącie wypukłym  $ABCD$  trójkąty  $ABC$ ,  $BCD$ ,  $CDA$ ,  $DAB$  mają równe obwody. Udowodnij, że ten czworokąt jest prostokątem.

**ZADANIE 6.**

Wykaż, że wśród 40 liczb naturalnych można wybrać 4, z których każde dwie dają różnicę podzielną przez 13.

**ZADANIE 7.**

Trapez prostokątny opisano na okręgu. Oblicz długości boków nierównoległych, jeżeli podstawy są równe  $a$  i  $b$ .