

PRACA KONTROLNA nr 5 - POZIOM ROZSZERZONY

1. Znaleźć wszystkie liczby rzeczywiste m , dla których równanie

$$\frac{x}{m} + m = \frac{m}{x} + x + 1$$

ma dwa pierwiastki różnych znaków.

2. Rozwiązać nierówność

$$2^{x^2+4} + 2^{x^2+3} + 2^{x^2} > 5^{x^2+1} - 25 \cdot 2^{x^2-2}.$$

3. Określić dziedzinę i zbiór wartości funkcji $f(x) = \operatorname{ctg}(\pi + x) \operatorname{ctg}(x - \frac{\pi}{2}) \cos x$. Sporządzić staranny wykres funkcji $g(x) = 2f(|x - \frac{\pi}{4}|) - 1$. Na podstawie wykresu i niezbędnych obliczeń rozwiązać nierówność $g(x) \leq -2$, a zbiór jej rozwiązań zaznaczyć na osi OX.

4. Rozwiązać nierówność

$$\log_{x^2}(3x - 1) - \log_{x^2}(x - 1)^2 + \log_{x^2}|x - 1| \geq \frac{1}{2}.$$

5. W ostrosłupie sześciokątnym prawidłowym kąt dwuścienny utworzony przez płaszczyzny przeciwległych ścian bocznych ma miarę $\frac{\pi}{4}$. Wyznaczyć promień R kuli opisanej na tym ostrosłupie jako funkcję długości a boku jego podstawy.
6. W koło wpisano ośmiokąt foremny, w ośmiokąt koło, w koło kolejny ośmiokąt foremny itd. Wysunąć hipotezę o wartości pola n -tego koła i uzasadnić ją indukcyjnie. Suma pól nieskończonego ciągu kół otrzymanych w ten sposób jest ośmiokrotnością pola jednego z nich. Ustalić którego, nie stosując obliczeń przybliżonych.