

PRACA KONTROLNA nr 2 - POZIOM ROZSZERZONY

1. Zaznaczyć na płaszczyźnie zbiór $\{(x, y) : |x| \leq \frac{3}{2}, \log_{\frac{2}{3}} |x| < y < \log_{\frac{3}{2}} |x|\}$.
2. Wykazać, że różnica kwadratów dwu dowolnych liczb całkowitych niepodzielnych przez 3 jest liczbą podzielną przez 3.
3. W trójkącie równoramiennym ABC o podstawie AB ramię ma długość b , a kąt przy wierzchołku C - miarę γ . D jest takim punktem ramienia BC , że odcinek AD dzieli pole trójkąta na połowę. Wyznaczyć promienie okręgów wpisanych w trójkąty ABD i ADC . Dla jakiego kąta γ promienie te są równe?
4. Niech $f(x) = 3(x+2)^4 + x^2 + 4x + p$, gdzie p jest parametrem rzeczywistym.
 - a) Uzasadnić, że wykres funkcji $f(x)$ jest symetryczny względem prostej $x = -2$.
 - b) Dla jakiego parametru rzeczywistego p najmniejszą wartością funkcji $f(x)$ jest $y = -2$? Odpowiedź uzasadnić, nie stosując metod rachunku różniczkowego.
 - c) Określić liczbę pierwiastków równania $f(x) = 0$ w zależności od parametru p .
5. Rozwiązać nierówność $|\sin x - \sqrt{3} \cos x| \geq 1$.
6. Rozwiązać równanie

$$1 - \left(\frac{2^x}{3^x - 2^x}\right) + \left(\frac{2^x}{3^x - 2^x}\right)^2 - \left(\frac{2^x}{3^x - 2^x}\right)^3 + \dots = \frac{3^{x-2}}{2^{x-1}},$$

którego lewa strona jest sumą wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego.