INSTYTUT MATEMATYKI I KRYPTOLOGII
WYDZIAŁ CYBERNETYKI
WOJSKOWA AKADEMIA TECHNICZNA

ZADANIA KONKURSOWE

MATEMATYKA

część II

Przygotowały:
Joanna Napiórkowska, Joanna Piasecka

Warszawa 2024

Zadania konkursowe 2020/2021
ETAP I

Przy każdym pytaniu są podane 4 odpowiedzi, z których tylko jedna jest prawidłowa.

1. Suma dwóch liczb naturalnych n, m wynosi 10. Jeśli $n \geqslant m$ i $n^2 + m^2$ osiąga minimalną wartość, to $(n; m)$ jest równe

I $(8; 2)$ **II** $(7; 3)$ **III** $(6; 4)$ **IV** $(5; 5)$

2. Suma trzech różnych liczb pierwszych $a < b < c$ wynosi 40. Ile wynosi $c - b$?

I 8 **II** 12 **III** 20 **IV** 24

3. Jeżeli $2a^2 + 2b^2 = 5ab$, to wartość wyrażenia $\dfrac{a+b}{a-b}$ wynosi

I -3 lub 3 **II** 0 lub 3 **III** 2 **IV** -3

4. Która z poniższych liczb jest liczbą niewymierną?

I $3,14282828\ldots$ **II** $|2-\sqrt{5}|-\sqrt{5}$

III $\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1} - 0,5\cdot\sqrt{5}$ **IV** $(5-\sqrt{20})(5-2\sqrt{5})$

5. Wartość wyrażenia $1+2-3-4+5+6-7-8+\ldots+2018-2019-2020$ jest równa

I 0 **II** 1 **III** -2020 **IV** -2019

6. Ile wynosi wartość poniższej sumy?

$$\log_{2020}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\log_{2020}\left(1+\frac{1}{3}\right)+\log_{2020}\left(1+\frac{1}{4}\right)+\ldots+\log_{2020}\left(1+\frac{1}{4039}\right)$$

I 1 **II** 2 **III** $\log_{2020}4039$ **IV** $1+\log_{2020}2$

7. Suma rozwiązań równania $\Big|\big|1-|x|\big|-5\Big| = 4-\dfrac{1}{3}|x|$ wynosi

I $\dfrac{2}{3}$ **II** 3 **III** 0 **IV** 2

8. Niech $f(x) = \dfrac{x-1}{x}$. Odwrotność liczby $\underbrace{f\Big(f\big(\ldots f(-966)\ldots\big)\Big)}_{2020}$ wynosi

I $\dfrac{1}{967}$ **II** -966 **III** $\dfrac{1}{966}$ **IV** $\dfrac{966}{967}$

9. Ile jest funkcji f określonych w zbiorze $\mathbb{R}$, spełniających dla każdego x warunek

$$x^2 \cdot [f(x)]^2 + 1 = 2x \cdot f(x) \ ?$$

I nieskończenie wiele **II** 0 **III** 1 **IV** 2

10. Funkcja $f(x)$ ma następujące własności: $f\left(x + \frac{1}{3}\right) = f(x)$, $f(0) = 1$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$. Wartość sumy $f(2) + f\left(\frac{5}{6}\right)$ jest równa

I 1 **II** 2 **III** 3 **IV** 4

11. Suma wszystkich miejsc zerowych funkcji $f : [0, 10] \to \mathbb{R}$ zadanej wzorem $f(x) = \cos(\pi x)$ jest równa

I $49\frac{1}{2}$ **II** 50 **III** $\frac{9}{2}\pi$ **IV** 6π

12. Najmniejsza odległość między dwoma punktami należącymi do różnych gałęzi hiperboli $y = \frac{a}{x}$, $a > 0$, jest równa

I $2\sqrt{2a}$ **II** $\sqrt{2a}$ **III** $2\sqrt{a}$ **IV** $\sqrt{a}$

13. Iloczyn pierwiastków równania $\log^2 x - \log x^6 + 5 = 0$ jest równy

I 10^{12} **II** 10^{10} **III** 10^6 **IV** 10^5

14. Suma n kolejnych, początkowych wyrazów ciągu (a_n) wyraża się wzorem $S_n = n - 3n^2$. Ogólny wyraz ciągu ma postać

I $a_n = n^2 - 9n + 6$ **II** $a_n = 2 - 3n - n^2$

III $a_n = 1 - 3n$ **IV** $a_n = 4 - 6n$

15. Który podzbiór płaszczyzny opisany poniższymi nierównościami ma największe pole?

I $|x + 1| \leqslant 0$ **II** $y \geqslant -x + 2,\ \ y \geqslant x - 2,\ \ y \leqslant 2$

III $|x| + |y| \leqslant 1$ **IV** $1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 3$

16. W pewnym okręgu dwie równoległe cięciwy mają długość 10 i są odległe o 24. Długość promienia tego okręgu wynosi

I 13 **II** 12 **III** 14 **IV** 15

17. Długości boków trójkąta są w stosunku 3:4:5. Na tym trójkącie jest opisany okrąg o promieniu 5. Pole trójkąta wynosi

I 12 **II** 18 **III** 24 **IV** 30

18. W trójkącie ABC punkty S i T są środkami boków AC i AB. Odcinki BS i CT są prostopadłe i mają długości 8 i 12. Pole trójkąta ABC wynosi

I 48 **II** 64 **III** 96 **IV** 72

19. Dany jest dowolny trapez. Pole trójkąta, którego jednym z wierzchołków jest środek ramienia tego trapezu, a pozostałe wierzchołki są końcami drugiego ramienia trapezu, jest równe

I połowie pola trapezu **II** jednej czwartej pola trapezu

III jednej trzeciej pola trapezu **IV** dwóm trzecim pola trapezu

20. Sześcian o przekątnej d ma tę samą objętość, co czworościan foremny o krawędzi $\sqrt{6}$. Ile wynosi d?

I $\sqrt[3]{6}$ **II** $\sqrt[3]{9}$ **III** $\sqrt[6]{6}$ **IV** $\sqrt[6]{9}$

ODPOWIEDZI

Prawidłowe odpowiedzi zaznaczono znakiem X.

Numer pytania	Odpowiedzi			
	I	**II**	**III**	**IV**
1				X
2				X
3	X			
4				X
5			X	
6	X			
7			X	
8				X
9		X		
10			X	
11		X		
12	X			
13			X	
14				X
15				X
16	X			
17			X	
18		X		
19	X			
20		X		

Zadania konkursowe 2020/2021
FINAŁ

Przy każdym pytaniu są podane 4 odpowiedzi, z których jedna, dwie, trzy lub cztery są prawidłowe.

1. Niech
$a = \left(\sin\frac{\pi}{12}\right)^{\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(\sin\frac{\pi}{12})}$, $b = \left(\cos\frac{\pi}{12}\right)^{\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(\cos\frac{\pi}{12})}$, $c = \left(\sin\frac{\pi}{12}\right)^{\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(\cos\frac{\pi}{12})}$.
Które relacje między a, b, c są prawdziwe?

I $a < b$ **II** $a < c$ **III** $b < c$ **IV** $c < b$

2. S_1 to pole trójkąta ABC, gdzie $|\measuredangle A| = 60^o$, $|\measuredangle B| = 45^o$, $|AC| = \sqrt{2}$,

S_2 to pole trapezu o przekątnych długości $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ i kącie między nimi 75^o,

S_3 to pole koła o promieniu długości 1,

S_4 to pole kwadratu o przekątnej długości 2,5.

Które relacje między S_1, S_2, S_3, S_4 są prawdziwe?

I $S_1 < S_2$ **II** $S_2 < S_3$ **III** $S_1 < S_3$ **IV** $S_4 < S_3$

3. Które z podanych liczb są wymierne?

I $\sqrt{6+2\sqrt{5}} - \sqrt{5}$ **II** $\sqrt[5]{32\sqrt{2}}$ **III** $\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{5}} - \sqrt{5}$ **IV** $\left(\sqrt[3]{5}\right)^{\log_2 8}$

4. Liczby parzyste dodatnie zapisujemy kolejno 2468101214... Która z podanych cyfr nie może być na 2020 miejscu tego ciągu?

I 0 **II** 2 **III** 4 **IV** 8

5. Która z poniższych funkcji nie ma miejsc zerowych?

I $f(x) = x^{11} + x^{10} + 1000$ **II** $f(x) = x^{10} + 2x^5 + 1000$

III $f(x) = 2^{x^3-1}$ **IV** $f(x) = \log(x^2 + 0{,}8)$

6. Która z poniższych figur określonych na płaszczyźnie Oxy ma pole mniejsze niż 8?

I $\{(x, y) : y \leqslant 4 - x^2, x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$

II $\{(x, y) : 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 3\}$

III $\{(x, y) : x \leqslant y \leqslant 3x, x \leqslant 3\}$

IV $\{(x, y) : 0 \leqslant y \leqslant 8\log x, 1 \leqslant x \leqslant 3\}$

7. Wielomian $W(x)$ jest funkcją rosnącą. Które z poniższych zdań jest prawdziwe?

I Dla każdego x pochodna $W'(x)$ przyjmuje wartości dodatnie.

II Pochodna $W'(x)$ jest funkcją rosnącą.

III Istnieje $x \in \mathbb{R}$ taki, że $W(x) = -999$.

IV Wielomian $W(x + 100)$ jest funkcją rosnącą.

8. Przedział $\langle 1; 3\rangle$ jest podzbiorem zbioru rozwiązań nierówności

I $(x-1)(x-3)(x-5)^2 \leqslant 0$ **II** $\dfrac{x-1}{x-3} \leqslant 0$

III $x^2 - 4x + 3 < 0$ **IV** $|x-2| - 1 \leqslant 0$

9. Które z podanych liczb są dzielnikami sumy $17^{2020} + 17^{2021}$?

I 34 **II** 8 **III** 289 **IV** 102

10. Istnieje dokładnie jedna funkcja f spełniająca dla dowolnej liczby rzeczywistej x równość $f(x) + 2f(1-x) = x^2$. Wówczas

I $f(0) = \dfrac{2}{3}$ **II** $f(1) = -\dfrac{1}{3}$ **III** $f(-1) = \dfrac{1}{3}$ **IV** $f(1) \neq f(-1)$

11. Niech $a > 0$ i $b > 0$. Wtedy iloczyn $(a+b)(a^{-1} + b^{-1})$ jest zawsze

I większy od 2 **II** nie większy niż 4

III co najmniej równy 4 **IV** liczbą wymierną

12. Wiadomo, że $a_1 > -1$ oraz $a_{n+1} = \dfrac{a_n - 1}{2}$. Wtedy ciąg (a_n)

I jest malejący **II** jest rosnący

III jest ograniczony z dołu **IV** ma granicę

13. Niech $A = \{(x,y) :\ x^2 + y^2 \leqslant 4x\}$ oraz $B = \{(x,y) :\ 3x - 6 \leqslant 2y\}$. Wtedy

I istnieje prosta prostopadła do prostej $y = -\frac{2}{3}x + 5$, która ma ze zbiorem $A \cup B$ dokładnie jeden punkt wspólny

II pole figury $A \cap B$ jest większe od π

III prosta będąca osią symetrii figury $A \cup B$ ma ujemny współczynnik kierunkowy

IV figura $A \setminus B$ nie jest wypukła

14. Które zdania dotyczące pierwiastków równania $x|x| + bx + c = 0$ są prawdziwe?

I Równanie ma najwyżej trzy pierwiastki.

II Równanie ma co najmniej jeden pierwiastek.

III Równanie ma rozwiązanie tylko wtedy gdy $b^2 - 4c \geqslant 0$.

IV Jeśli $b < 0$ i $c > 0$, to równanie ma trzy pierwiastki.

15. Trzy sześciany mają krawędzie, których długości są liczbami naturalnymi. Suma powierzchni całkowitych tych sześcianów wynosi 564 cm^2. Ile wynosi suma objętości tych sześcianów?

I 586 cm^3 **II** 664 cm^3 **III** 764 cm^3 **IV** 786 cm^3

ODPOWIEDZI

Prawidłowe odpowiedzi zaznaczono znakiem X.

Numer pytania	Odpowiedzi			
	I	**II**	**III**	**IV**
1	X	X		X
2		X	X	X
3	X			X
4	X	X	X	X
5		X	X	
6	X	X		X
7			X	X
8	X			X
9	X		X	X
10	X	X		X
11	X		X	
12	X		X	X
13	X	X	X	
14	X	X		
15	X		X	

Zadania konkursowe 2021/2022
ETAP I

Przy każdym pytaniu są podane 4 odpowiedzi, z których tylko jedna jest prawidłowa.

1. Wartość wyrażenia $\sqrt{21-12\sqrt{3}}$ jest równa

I $3-2\sqrt{3}$ **II** $2-3\sqrt{2}$ **III** $2\sqrt{3}-3$ **IV** $3\sqrt{2}-2$

2. Jeżeli przy dzieleniu liczb a, b, c przez 5 otrzymujemy odpowiednio reszty 2, 3, 4, to reszta z dzielenia sumy kwadratów liczb a, b, c przez 5 wynosi

I 1 **II** 2 **III** 3 **IV** 4

3. Różnica między największą liczbą czterocyfrową podzielną przez 4 i najmniejszą liczbą trzycyfrową podzielną przez 3 jest

I podzielna przez 9

II podzielna przez 4

III podzielna przez $\log_2 \dfrac{2^{18}\cdot 6^3}{3^3\cdot 4^2}$

IV podzielna przez 11

4. Niech k będzie najmniejszą liczbą naturalną o sumie cyfr równej 2021. Wtedy

I pierwszą od lewej cyfrą tej liczby jest 5

II ostatnią cyfrą tej liczby jest 1

III piątą od lewej cyfrą tej liczby jest 1

IV liczba ta ma 230 cyfr

5. W zbiorze liczb całkowitych określono działanie $\otimes$ następująco $a\otimes b=a-b+ab$ dla $a,b\in\mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}$ - zbiór liczb całkowitych). Równanie $(a\otimes a)\otimes 2=2$

I nie ma rozwiązań

II ma 1 rozwiązanie

III ma 2 rozwiązania

IV ma nieskończenie wiele rozwiązań

6. Funkcja liniowa (wielomian pierwszego stopnia) $f(x)$ spełnia następujace warunki: $f(1)+f(2)+f(3)=15$, $f(4)+f(5)+f(6)=42$. Wartość wyrażenia $f(100)$ jest równa

I 99 **II** 199 **III** 299 **IV** 399

7. Funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełnia warunki $f(x+y)=f(x)+f(y)$ oraz $f(1)=2$. Wówczas

I $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$ **II** $f\left(\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{2}$ **III** $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$ **IV** $f(-1)=-2$

8. Wykres funkcji $y = x^2 + 2$ przekształcamy przez symetrię względem osi $0x$, a następnie otrzymaną krzywą przekształcamy przez translację (przesunięcie) o wektor $[2,0]$. Otrzymujemy wykres funkcji

I $y = x^2 + 4x - 2$ **II** $y = x^2 - 4x - 2$

III $y = -x^2 + 4x - 6$ **IV** $y = -x^2 - 4x - 6$

9. W zbiorze $A = \{(x,y) : \ x \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \ \text{ i } \ x + y = 2\}$ wyrażenie $2x^2 + 3y^2$

I ma wartość najmniejszą równą $\dfrac{24}{5}$

II ma wartość największą równą 11

III nie ma wartości najmniejszej

IV ma wartość najmniejszą dla liczb x i y z przedziału $\langle 0; 1\rangle$

10. Jeśli wielomian $W(x) = 2x^3 - x - b$ jest podzielny przez dwumian $G(x) = x - a + 1$, to b jest równe

I $2a^3 + 6a^2 + 5a + 3$ **II** $2a^3 + 6a^2 - 5a + 1$

III $2a^3 - 6a^2 + 5a - 1$ **IV** $2a^3 - 6a^2 + 5a - 3$

11. Dwa różne wielomiany $f(x) = x^2 + ax + b$ i $g(x) = x^2 + cx + d$ spełniają warunek $f(21) + f(22) = g(21) + g(22)$. Równanie $f(x) = g(x)$

I ma rozwiązanie będące liczbą całkowitą

II ma dokładnie jedno rozwiązanie

III ma więcej niż jedno rozwiązanie

IV ma nieskończenie wiele rozwiązań

12. Ciąg o wyrazie ogólnym $b_n = 10^{a_n}$ jest arytmetyczny, gdy wyraz ogólny ciągu (a_n) ma postać

I $a_n = n^{\frac{1}{10}}$ **II** $a_n = 2021n$

III $a_n = \dfrac{2021}{n}$ **IV** $a_n = \log(2021 + n)$

13. Dany jest ciąg geometryczny o wyrazach $2^{x_1}, 2^{x_2}, 2^{x_3}, \ldots$ oraz spełnione są warunki $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{11} = 110$ i $x_7 = 14$. Wówczas

I trzeci wyraz ciągu (a_n) jest równy $\dfrac{1}{4}$

II wyraz $x_3 = -3$

III ciąg (x_n) jest również ciągiem geometrycznym

IV iloraz ciągu (a_n) wynosi 8

14. Jeżeli $m \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ i $a, b \in \mathbb{R}_+$ oraz $a^2 + b^2 = 7ab$, to $\log_m \frac{a+b}{3}$ można zapisać w postaci

I $2(\log_m a + \log_m b)$ **II** $\frac{1}{2}(\log_m a + \log_m b)$

III $2(\log_m a - \log_m b)$ **IV** $\frac{1}{2}(\log_m a - \log_m b)$

15. Jeżeli α jest kątem ostrym należącym do przedziału $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ oraz $\sin 4\alpha = t$, to $\sin 2\alpha + \cos 2\alpha$ równa się

I $\sqrt{t+1} + \sqrt{t^2 - t}$ **II** $\sqrt{t+1} - \sqrt{t^2 - t}$ **III** $\sqrt{t+1}$ **IV** $t + 1$

16. Prosta $2x - y + 8 = 0$ przecina osie Ox i Oy w punktach A i B. Punkt M dzieli odcinek AB w stosunku $AM : MB = 3 : 1$. Równanie prostej prostopadłej do odcinka AB i przechodzącej przez punkt M ma postać

I $2x + y - 4 = 0$ **II** $x + 2y - 11 = 0$

III $x + 2y - 13 = 0$ **IV** $x - 2y + 13 = 0$

17. Dany jest trójkąt prostokątny, w którym przyprostokątne mają długości a i b. Długość dwusiecznej kąta prostego w tym trójkącie wynosi

I $\frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$ **II** $\frac{ab\sqrt{2}}{2(a+b)}$ **III** $\frac{(a+b)\sqrt{2}}{2ab}$ **IV** $\frac{a+b}{2ab}$

18. Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego ma długość 13 cm, zaś pole trójkąta wynosi 30 cm^2. Pole koła wpisanego w ten trójkąt wynosi

I 4 cm^2 **II** π cm^2 **III** 12 cm^2 **IV** 4π cm^2

19. Na sześciokącie foremnym opisano okrąg i w ten sam sześciokąt wpisano okrąg. Jeśli pole powstałego pierścienia jest równe 4π [j^2], to pole sześciokąta foremnego wynosi

I 12 [j^2] **II** $12\sqrt{3}$ [j^2] **III** $24\sqrt{3}$ [j^2] **IV** 64 [j^2]

20. Sześcian pomalowano na zielono, a następnie rozcięto ten sześcian na 125 jednakowych sześcianów. Ile jest wśród nich niepomalowanych sześcianów?

I 64 **II** 54 **III** 35 **IV** 27

ODPOWIEDZI

Prawidłowe odpowiedzi zaznaczono znakiem X.

Numer pytania	Odpowiedzi			
	I	**II**	**III**	**IV**
1			X	
2				X
3			X	
4	X			
5	X			
6			X	
7				X
8			X	
9	X			
10			X	
11		X		
12				X
13	X			
14		X		
15			X	
16		X		
17	X			
18				X
19			X	
20				X

Zadania konkursowe 2021/2022
FINAŁ

Przy każdym pytaniu są podane 4 odpowiedzi, z których jedna, dwie, trzy lub cztery są prawidłowe.

1. Dana jest funkcja $f(x) = \log(\sqrt{1+x^2} - x)$. Wówczas

I dziedziną tej funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych

II zbiorem wartości tej funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych

III funkcja ta jest parzysta

IV funkcja ta jest nieparzysta

2. Rozważmy zbiór wszystkich funkcji $f(x)$ spełniających równanie

$$1 + f(x) + [f(x)]^2 + [f(x)]^3 + \cdots = x^2 - 1.$$

Wówczas do tego zbioru należy funkcja,

I której dziedziną jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

II która w przedziale $(3; +\infty)$ jest rosnąca

III która w przedziale $(-\infty; -2)$ jest malejąca

IV której zbiorem wartości jest zbiór $\mathbb{R}$

3. Liczba $\sqrt[3]{9-\sqrt{80}} + \sqrt[3]{9+\sqrt{80}}$ jest

I liczbą wymierną

II liczbą całkowitą

III liczbą niewymierną

IV rozwiązaniem równania $t^3 - 3t - 18 = 0$

4. Dane są równanie i nierówność:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{x-y} = \frac{7}{12} + \left(\frac{3}{4}\right)^{y-x}, \quad xy \leqslant 9 - y.$$

Prawdą jest, że

I największą liczbą x spełniającą jednocześnie powyższe zależności jest liczba 2

II największą liczbą y spełniającą jednocześnie powyższe zależności jest liczba 2

III najmniejszą liczbą x spełniającą jednocześnie powyższe zależności jest liczba -2

IV najmniejszą liczbą y spełniającą jednocześnie powyższe zależności jest liczba -3

5. Dwie wysokości trójkąta są nie krótsze od boków, do których są poprowadzone. Trójkąt ten jest

I równoboczny

II równoramienny

III prostokątny

IV rozwartokątny

6. O pewnym niepustym zbiorze wiadomo, że posiada podzbiory zawierające 24%, 70% i 75% wszystkich elementów. Wówczas

I zbiór ten zawiera co najmniej 100 elementów

II zbiór ten może zawierać 150 elementów

III liczba elementów tego zbioru musi być liczbą podzielną przez 10

IV zbiór ten nie może zawierać 2020 elementów

7. Pewną liczbę k można zapisać na dwa sposoby: $k = \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{y^2+1}$ oraz $k = \frac{2}{xy+1}$,gdzie x, y są liczbami rzeczywistymi takimi, że $x \neq y$ oraz $xy + 1 \neq 0$. Wówczas

I k jest liczbą nieparzystą

II k^2 jest liczbą nieparzystą

III liczba k jest liczbą pierwszą

IV liczba $k + 4$ jest liczbą pierwszą

8. Niech $f(x) = x + 3$. Wtedy

I funkcja $f(|2x + 1|)$ nie ma miejsc zerowych

II $x = -\frac{1}{2}$ jest miejscem zerowym funkcji $f(|2x + 1|)$

III zbiorem rozwiązań nierówności $f(|2x + 1|) + 3x \leqslant 13$ jest przedział $\left[-\frac{1}{2}; \frac{9}{5}\right]$

IV zbiorem rozwiązań nierówności $f(|2x + 1|) + 3x \leqslant 13$ jest przedział $\left(-\infty; \frac{9}{5}\right]$

9. Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) o różnicy r, gdzie n jest liczbą naturalną dodatnią. Niech $b_n = a_{2n+1}$. Prawdą jest, że

I $b_1 \cdot b_2 = a_3 \cdot a_5$

II ciąg (b_n) jest arytmetyczny

III ciąg (b_n) ma różnicę r

IV suma trzech początkowych wyrazów ciągu (b_n) wynosi $3a_1 + 12r$

10. Obraz graficzny zbioru $C = \left\{(x,y) :\ \sin(x+y) = \dfrac{1}{2}\right\}$ na płaszczyźnie to

I sinusoida

II prosta o równaniu $y = -x + \dfrac{\pi}{6}$

III proste równoległe

IV nieskończenie wiele prostych

11. Wyrażenie $\log(\operatorname{tg}^3 1^\circ) + \log(\operatorname{tg}^3 2^\circ) + \cdots + \log(\operatorname{tg}^3 88^\circ) + \log(\operatorname{tg}^3 89^\circ)$ jest równe

I -1 **II** 0 **III** 1 **IV** $3\log 2$

12. Na średnicy półkola o promieniu R zbudowano trójkąt równoboczny o boku $2R$. Wtedy

I pole części trójkąta znajdującej się na zewnątrz półkola wynosi $\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)R^2$

II pole części wspólnej figur wynosi $\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2$

III pole części trójkąta znajdującej się na zewnątrz półkola wynosi $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\pi}{6}\right)R^2$

IV pole części wspólnej figur wynosi $\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)R^2$

13. Wielokąt foremny o boku 1 ma 54 przekątne. Wtedy

I długość promienia okręgu opisanego na tym wielokącie wynosi $\dfrac{1}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$

II kąt między bokami wynosi 150°

III obwód wielokąta wynosi 54

IV pole koła opisanego na tym wielokącie wynosi $(2+\sqrt{3})\pi$

14. Suma trzech początkowych wyrazów ciągu geometrycznego wynosi 62, a suma ich logarytmów dziesiętnych jest równa 3. Wtedy

I iloczyn trzech początkowych wyrazów jest równy 1000

II ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = \dfrac{10}{5^{n-2}}$ spełnia warunki zadania

III istnieje dokładnie jeden ciąg spełniający warunki zadania

IV każdy ciąg spełniający warunki zadania jest rosnący

15. Proste $y = 5x + 2$ oraz $y = -\dfrac{1}{4}x + 2$ przecinają się w punkcie A. Prosta k przecina te proste w punktach B i C. Punkt $S = \left(\dfrac{7}{2}, -\dfrac{3}{2}\right)$ jest środkiem odcinka BC. Wtedy

I $B = (-1,-3)$ i $C = (8,0)$

II prosta k ma równanie $x - 3y - 8 = 0$

III odległość punktu A od prostej k jest równa $\dfrac{7\sqrt{10}}{5}$

IV pole trójkąta ABC jest równe 21

ODPOWIEDZI

Prawidłowe odpowiedzi zaznaczono znakiem X.

Numer pytania	Odpowiedzi			
	I	**II**	**III**	**IV**
1	X	X		X
2		X	X	
3	X	X		X
4	X			X
5		X	X	
6	X		X	X
7	X	X		X
8	X			X
9	X	X		X
10			X	X
11		X		
12			X	X
13	X	X		X
14	X	X		
15	X	X	X	X

Zadania konkursowe 2022/2023
ETAP I

Przy każdym pytaniu są podane 4 odpowiedzi, z których tylko jedna jest prawidłowa.

1. Największa wartość funkcji kwadratowej f jest równa 4. Wówczas zbiorem wartości funkcji $g(x) = f(x) + |f(x)|$ jest przedział

a) $[0; 4]$ b) $[0; 8]$ c) $[0; +\infty)$ d) $(-\infty; +\infty)$

2. Podzbiór płaszczyzny opisany równaniem $x^2 - y^2 + 2x + 4y - 3 = 0$ jest

a) okręgiem b) sumą dwóch prostych c) zbiorem pustym d) punktem

3. Funkcja przyporządkowuje każdej trzycyfrowej liczbie cyfrę dziesiątek tej liczby. Ile miejsc zerowych ma ta funkcja?

a) 10 b) 80 c) 90 d) 100

4. Dana jest liczba $a = (24^2 - 22^2) + (23^2 - 21^2) + (22^2 - 20^2) + \cdots + (10^2 - 8^2)$. Wtedy $\sqrt{a}$ wynosi

a) 896 b) 960 c) $8\sqrt{14}$ d) $8\sqrt{15}$

5. Suma k początkowych wyrazów ciągu geometrycznego jest równa 3, zaś suma $2k$ początkowych wyrazów tego ciągu wynosi 18. Wówczas suma $3k$ początkowych wyrazów tego ciągu jest równa

a) 90 b) 93 c) 95 d) 108

6. Jeśli $25^{\log_5(m-4)} > 9m$, to

a) nierówność nie ma rozwiązania

b) $m \in (-\infty; 1) \cup (16; +\infty)$ c) $m \in (1; 16)$ d) $m \in (16; +\infty)$

7. Suma współczynników wielomianu $(5x^4 - 3x^3 + x^2 - 4)^{2022}$ wynosi

a) 4^{2022} b) -1 c) 1 d) 5^{2022}

8. Dany jest okrąg o środku O i promieniu $r = 8$ cm oraz punkt A leżący poza okręgiem. Z punktu A poprowadzono styczne do okręgu, przy czym $|AO| = 10$ cm. Wówczas długość cięciwy łączącej punkty styczności wynosi

a) 12 cm b) $\frac{48}{3}$ cm c) 9 cm d) $\frac{48}{5}$ cm

9. Na okręgu o równaniu $x^2 + y^2 = 8$ opisano romb o polu $P = \frac{100}{3}$ [j^2]. Dłuższa przekątna rombu zawiera się w prostej o równaniu $y = x$. Wówczas wierzchołki kątów ostrych rombu mają współrzędne

a) $(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$ i $(\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$ b) $(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$ i $(\frac{5}{2}, -\frac{5}{2})$

c) $(-\frac{10}{3}, -\frac{10}{3})$ i $(\frac{10}{3}, -\frac{10}{3})$ d) $(-\frac{10}{3}, -\frac{10}{3})$ i $(\frac{10}{3}, \frac{10}{3})$

10. Dany jest trójkąt o bokach długości $\log_2 3$, $\log_2 6$, $\log_2 12$. Wówczas

a) długości boków tego trójkąta są trzema kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego

b) trójkąt jest prostokątny

c) obwód tego trójkąta jest równy $3(1 + \log_2 3)$

d) nie istnieje taki trójkąt

11. Okres podstawowy funkcji $g(x) = |\sin(\pi^2 x)|$ jest równy

a) $\frac{2}{\pi}$ b) $\frac{1}{\pi}$ c) $\frac{1}{2\pi}$ d) π

12. Niech $f : R \to R$ będzie funkcją malejącą. Zbiór rozwiązań nierówności $f(2x - 1) < f(-x + 2)$:

a) zawiera się w przedziale $(-\infty; 1)$ b) zawiera się w przedziale $(1; +\infty)$

c) nie da się określić d) jest przedziałem $(0; +\infty)$

13. Dana jest funkcja $f(x) = \log_2 \left(1 + \frac{x^4}{4}\right) + \log_2^2 \left(1 + \frac{x^4}{4}\right) + \log_2^3 \left(1 + \frac{x^4}{4}\right) + \ldots$ Wówczas

a) wartości funkcji f są liczbami dodatnimi

b) funkcja f jest nieparzysta

c) funkcja f jest określona dla $x \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2})$

d) funkcja f jest rosnąca

14. Rozważmy zbiór punktów płaszczyzny (x, y) spełniających równanie $|x+y|+|y| = 1$. Zbiór ten jest

a) symetryczny względem początku układu współrzędnych

b) symetryczny względem osi OX

c) symetryczny względem osi OY

d) nieograniczony

15. Niech l będzie prostą na płaszczyźnie daną równaniem $x+y\sqrt{3}=0$. Prosta l tworzy

a) z osią odciętych kąty $\frac{2}{3}\pi$ oraz $\frac{1}{3}\pi$

b) z osią rzędnych kąty $\frac{1}{3}\pi$ oraz $\frac{2}{3}\pi$

c) z osią rzędnych kąty $\frac{1}{6}\pi$ oraz $\frac{5}{6}\pi$

d) z osią odciętych kąty $\frac{1}{4}\pi$ oraz $\frac{3}{4}\pi$

16. Liczby $\frac{1}{\sqrt{5}-2}$ i $\frac{1}{\sqrt{5}+2}$ są pierwiastkami równania kwadratowego $2x^2+mx+n=0$. Wówczas

a) $m=4\sqrt{5}$ b) $n=2$ c) $m=\sqrt{5}$ i $n=1$ d) $m=-\sqrt{5}$ i $n=-2$

17. Układ równań $\begin{cases} \log_x 2+\log_y 2=-\frac{3}{2} \\ \log_2 x+\log_2 y=-3 \end{cases}$

a) jest sprzeczny

b) ma dokładnie cztery rozwiązania

c) ma dokładnie dwa rozwiązania

d) ma dokładnie jedno rozwiązanie

18. Prosta poprowadzona przez jeden z wierzchołków rombu odcina na przedłużeniach dwóch boków odcinki 4 cm i 9 cm. Wówczas bok rombu ma długość

a) 6 cm b) 9 cm c) 4 cm d) 11 cm

19. Równanie $\sin^3 x\cdot\cos^4 x=\frac{1}{8}$

a) ma dokładnie jeden pierwiastek w przedziale $(0;\pi)$

b) nie ma pierwiastków rzeczywistych

c) ma jeden pierwiastek w każdym przedziale postaci $(k\pi;(k+1)\pi)$, k – całkowite

d) ma rozwiązanie postaci $x=\frac{3\pi}{4}+k\pi$, k – całkowite

20. Dana jest funkcja $f(x)=\sqrt{4x^2-4x+1}+3$. Wówczas

a) najmniejsza wartość funkcji f w przedziale $(-1;0)$ wynosi 4

b) największa wartość funkcji f w przedziale $[-1;0]$ wynosi 4

c) funkcja osiąga minimum równe 3

d) w każdym punkcie $x\in R$ pochodna tej funkcji jest równa $f'(x)=2$

ODPOWIEDZI

Prawidłowe odpowiedzi zaznaczono znakiem X.

Numer pytania	Odpowiedzi			
	a	**b**	**c**	**d**
1		X		
2		X		
3			X	
4				X
5		X		
6				X
7			X	
8				X
9				X
10			X	
11		X		
12		X		
13			X	
14	X			
15		X		
16		X		
17			X	
18	X			
19		X		
20			X	

Zadania konkursowe 2022/2023
FINAŁ
Część I

Zadanie 1. (5 pkt)
Wiedząc, że $x - \dfrac{1}{x} = 2$, obliczyć wartość wyrażenia $x^5 - \dfrac{1}{x^5}$.

Szkic rozwiązania.

Podnosząc równość $x - \frac{1}{x} = 2$ do potęgi drugiej i trzeciej otrzymujemy odpowiednio

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 6 \quad \text{oraz} \quad x^3 - \frac{1}{x^3} = 14.$$

Zatem

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \cdot \left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right) = \left(x^5 - \frac{1}{x^5}\right) + \left(x - \frac{1}{x}\right) = 6 \cdot 14$$

Stąd

$$x^5 - \frac{1}{x^5} = 82.$$

Zasady oceniania:

5 pkt - pełne rozwiązanie

4 pkt - poprawne wykonanie działań na wyrażeniach algebraicznych i zauważenie związku z pierwszą i piatą potęgą wyrażenia $x - \frac{1}{x}$

3 pkt - poprawne wykonanie działań na wyrażeniach algebraicznych

2 pkt - obliczenie drugiej i trzeciej potęgi wyrażenia $x - \frac{1}{x}$ wraz w podaniem ich wartości

1 pkt - obliczenie drugiej potęgi wyrażenia $x - \frac{1}{x}$

0 pkt - rozwiązanie, w którym nie dokonano istotnego postępu

Zadanie 2. (5 pkt)

Podstawy trapezu mają długości a i b, gdzie a większe od b. Prosta równoległa do podstaw trapezu przechodzi przez punkt przecięcia przekątnych trapezu i przecina jego ramiona w punktach W i Z. Wykazać, że $|WZ| = \dfrac{2ab}{a+b}$.

Szkic rozwiązania.

Rozpatrując trójkąty podobne $\triangle ABD$ i $\triangle WPD$, mamy

$$\frac{a}{|WP|} = \frac{h_1 + h_2}{h_1}, \quad \frac{a}{|PZ|} = \frac{h_1 + h_2}{h_1}.$$

Wprowadzając oznaczenie $|WZ| = x$ pierwszą proporcję możemy zapisać w postaci

$$a : \frac{1}{2}x = (h_1 + h_2) : h_1.$$

(Łatwo można uzasadnić, że $|WP| = |PZ|$.) Stąd

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{2a - x}{x}.$$

Zauważmy, że w trójkącie $\triangle CDB$ jest

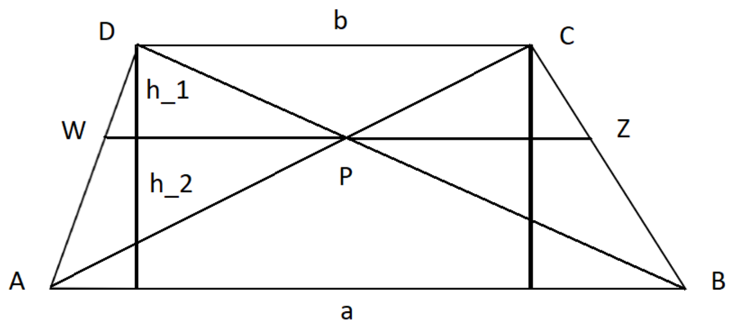
$$b : \frac{1}{2}x = (h_1 + h_2) : h_2,$$

skąd

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{x}{2b - x},$$

co po przekształceniach daje

$$x = \frac{2ab}{a + b}.$$



Zasady oceniania:

5 pkt - pełne rozwiązanie

4 pkt - rozwiązanie bez uzasadnienia, że $|WP| = |PZ| = \frac{1}{2}|WZ|$

3 pkt - obliczenie stosunku wysokości

2 pkt - zauważenie podobieństwa trójkątów oraz zapisanie odpowiednich proporcji

1 pkt - rysunek do zadania

0 pkt - rozwiązanie, w którym nie dokonano istotnego postępu

Zadanie 3. (5 pkt)

Dla danych dwóch liczb zespolonych $z_1 = a + bi$ oraz $z_2 = c + di$, gdzie i oznacza jednostkę urojoną o własności $i^2 = -1$, są określone działania:

dodawanie liczb zespolonych

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

mnożenie liczb zespolonych

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 =$$

$$= ac + adi + bci - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Wykorzystując powyższe definicje obliczyć:

a) $(3 - i) \cdot (5 + 2i) - (1 + i)^2$,

b) $(1 + i)^{20}$.

c) Znaleźć wszystkie liczby zespolone z spełniające równanie $z^2 = -9$.

Szkic rozwiązania.

a) $(3 - i) \cdot (5 + 2i) - (1 + i)^2 = 17 - i$

b) $(1 + i)^{20} = [(1 + i)^2]^{10} = (2i)^{10} = 2^{10} \cdot [i^2]^5 = -2^{10}$

c) $z = \pm 3i$.

Zasady oceniania:

5 pkt - pełne rozwiązanie

4 pkt - poprawne rozwiązanie a) i b)

3 pkt - poprawne rozwiązanie a) i c) lub b) i c)

2 pkt - poprawne rozwiązanie a) lub b)

1 pkt - poprawne rozwiązanie c)

0 pkt - rozwiązanie, w którym nie dokonano istotnego postępu

Zadania konkursowe 2022/2023
FINAŁ
Część II

Przy każdym pytaniu są podane 4 odpowiedzi, z których jedna, dwie, trzy lub cztery są prawidłowe.

1. Liczba $\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}-\sqrt{2}$ jest
   a) parzysta
   b) wymierna
   c) podzielna przez 3
   d) liczbą pierwszą

2. Które z podanych liczb są dodatnie?
   a) $\sin(\cos 1)$
   b) $\cos(\operatorname{tg} \frac{3}{4}\pi)$
   c) $\operatorname{tg}(\cos 3{,}3)$
   d) $\operatorname{tg}(\sin 2{,}5)$

3. Liczba $n^5 - n$ dla $n \in \mathbb{N}$ jest podzielna przez
   a) 2 b) 3 c) 5 d) 10

4. W którym przypadku wynik działania jest liczbą parzystą?
   a) $2^9 + 3^{10} + 4^{11}$
   b) $16! + 15!$
   c) $\binom{100}{20} \cdot \binom{8}{2} + 6^{13}$
   d) $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 17 \cdot 19$

5. Które z poniższych równań ma dokładnie jedno rozwiązanie?
   a) $\log_5 x = x + 5$
   b) $\log_5 x = x - 5$
   c) $\log_{0,5} x = x + 5$
   d) $\log_{0,5} x = x - 5$

6. Dana jest funkcja $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$. Prawdą jest, że

   a) $f(f(f(2023))) = \frac{1}{2023}$

   b) $f(f(2023)) = -\frac{2022}{2023}$

   c) $f(f(f(x)))$ jest funkcją nieparzystą

   d) $f(f(f(x)))$ jest funkcją różnowartościową

7. Dany jest ciąg geometryczny (a_n) o wyrazach różnych od zera, w którym $S_6 = 5S_3$. Wówczas

   a) iloraz ciągu jest równy $\sqrt[3]{5}$

   b) iloraz ciągu jest równy $\sqrt[3]{4}$

   c) $a_5 = 5a_2$

   d) $a_5 = 4a_2$

8. Krzywe $x^2 - y^2 + 2y - 1 = 0$ oraz $x^2 + (y-2)^2 = 4$ mają punkty wspólne leżące

   a) w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych

   b) w drugiej ćwiartce układu współrzędnych

   c) w trzeciej ćwiartce układu współrzędnych

   d) w czwartej ćwiartce układu współrzędnych

9. Prosta jest nachylona do osi Ox pod kątem 60° i przechodzi przez punkt (3,0). Wówczas równanie okręgu stycznego do tej prostej i osi Ox ma postać

   a) $(x-4)^2 + (y - \frac{\sqrt{3}}{3})^2 = \frac{1}{3}$

   b) $(x-4)^2 + (y - \sqrt{3})^2 = 3$

   c) $(x-6)^2 + (y - \sqrt{3})^2 = 3$

   d) $(x-6)^2 + (y - \sqrt{3})^2 = 9$

10. Dany jest sześcian o krawędzi a. Wtedy

    a) odległość wierzchołków sześcianu od przekątnej tego sześcianu, do której te wierzchołki nie należą, wynosi $\frac{a\sqrt{6}}{3}$

    b) pole trójkąta wyznaczonego przez krawędź podstawy, przekątną ściany bocznej i przekątną sześcianu wynosi $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$

    c) miara kąta między przekątnymi ścian bocznych wychodzącymi z tego samego wierzchołka wynosi 30°

    d) objętość kuli wpisanej w ten sześcian wynosi $\frac{\pi}{3}a^3$

ODPOWIEDZI

Prawidłowe odpowiedzi zaznaczono znakiem X.

Numer pytania	Odpowiedzi			
	a	**b**	**c**	**d**
1	X	X	X	
2	X	X		X
3	X	X	X	X
4		X	X	
5			X	X
6			X	X
7		X		X
8	X	X		
9	X		X	
10	X	X		

Zadania konkursowe 2023/2024
ETAP I

Przy każdym pytaniu są podane 4 odpowiedzi, z których tylko jedna jest prawidłowa.

1. Wartość wyrażenia

$$\frac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\frac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{9}}+\cdots+\frac{4}{\sqrt{145}+\sqrt{147}}$$

jest

a) równa 20 b) mniejsza od 20 c) równa 21 d) mniejsza od 22

2. Różnica liczb trzycyfrowych postaci $abc - cba$ jest podzielna przez

a) $a+b-c$ b) $a-b+c$ c) $a-c$ d) $a+c$

3. Równanie $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x^x}$ dla $x \in \mathbb{R}_+$

a) ma dokładnie jedno rozwiązanie b) ma dokładnie dwa rozwiązania

c) ma nieskończenie wiele rozwiązań d) nie ma rozwiązań

4. Obwód figury F, gdzie

$$F = \{(x,y):\ x \in \mathbb{R}\ \wedge\ y \in \mathbb{R}\ \wedge\ \log_3^2(x^2+y^2) - 3\log_3(x^2+y^2) + 2 \leqslant 0\}$$

jest równy

a) 2π b) 6π c) $2\pi(3+\sqrt{3})$ d) $2\pi(3-\sqrt{3})$

5. Funkcja f spełnia dla każdego $x \neq 0$ i $x \neq 1$ równanie

$$(x-1)f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x-1}$$

Wtedy wartość $f(2)$ wynosi

a) -2 b) -1 c) 1 d) 2

6. Dla dowolnych liczb $x > 0$, $x \neq 1$, $y > 0$, $y \neq 1$ wartość wyrażenia

$$\log_{x^2} y \cdot \log_{\frac{1}{y^2}} x$$

jest równa

a) $x \cdot y$ b) $\frac{x^2}{y^2}$ c) 1 d) $-\frac{1}{4}$

7. Suma $2n$ początkowych liczb naturalnych nieparzystych wynosi

a) $2n^2$ b) $4n^2$ c) $2n^2+n$ d) $4n^2+2n$

8. Wierzchołki trójkąta równobocznego są punktami paraboli $y=x^2-4x$. Jeden z nich jest wierzchołkiem paraboli, zaś pozostałe są punktami przecięcia paraboli prostą równoległą do osi Ox. Pole tego trójkąta wynosi

a) 4 b) $3\sqrt{2}$ c) $3\sqrt{3}$ d) $6\sqrt{3}$

9. Z punktu $(0,1)$ poprowadzono styczne do okręgu o równaniu $(x-1)^2+(y+2)^2=5$. Równania dwusiecznych kątów wyznaczonych przez te styczne są postaci

a) $x-3y+3=0,\ 3x-y+1=0$ b) $x+3y-3=0,\ 3x+y-1=0$

c) $x+3y-3=0,\ 3x-y+1=0$ d) $x-3y+3=0,\ 3x+y-1=0$

10. W trapezie ABCD przekątne AC i BD przecinają się w punkcie O. Pole trójkąta AOB jest równe 144, zaś pole trójkąta DOC jest równe 16. Wtedy pole trapezu ABCD jest równe

a) 160 b) 192 c) 224 d) 256

11. Suma dwóch liczb naturalnych wynosi 400, a największy wspólny dzielnik tych liczb to 25. Takich par liczb jest

a) 3 b) 4 c) 6 d) 10

12. Zbiór A jest zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności

$$\frac{x+3}{x+5} \geqslant 0$$

Zbiór B jest zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności

$$x^2+8x+15 \geqslant 0$$

Które z poniższych zdań jest prawdziwe?

a) $A=B$ b) $A\cap B$ jest zbiorem jednoelementowym

c) $B\setminus A$ jest zbiorem jednoelementowym d) $A\cap B=B$

13. Która z poniższych liczb jest najmniejsza?

a) $(0,01)^{0,02}$ b) $(0,02)^{0,01}$ c) $\log_{0,95} 1,02$ d) $\cos 1,57$

14. Dla jakiej największej wartości parametru $k \in \mathbb{R}$ nierówność

$$\sqrt{2x-5}+\sqrt{9-2x} \geqslant k$$

ma rozwiązanie?

a) $2-\sqrt{2}$ b) $2+\sqrt{2}$ c) $2\sqrt{2}$ d) $2+\sqrt{8}$

15. Liczba $\sqrt{3}^{\log_{27} 64}$ jest równa

a) $3+\log_4 1$ b) 4 c) $\log_3 9$ d) 1

16. Ile jest liczb naturalnych n, dla których n^4+n^2+1 jest liczbą pierwszą?

a) nieskończenie wiele b) 3 c) 2 d) 1

17. W ciągu (a_n) wyraz a_{n-1} wynosi $\frac{3n+2}{2n+2}$. Ile wynosi wyraz a_n dla $n > 1$?

a) $\frac{3n+5}{2n+4}$ b) $\frac{3n+1}{2n}$ c) $\frac{3n+1}{2n+1}$ d) $\frac{3n-1}{2n}$

18. Sześcian o przekątnej d ma taką samą objętość jak kula o promieniu $\sqrt{3}$. Ile wynosi d?

a) $\sqrt[3]{36\pi}$ b) $6\sqrt[3]{\pi}$ c) $\sqrt[3]{9\pi}$ d) $2\sqrt[3]{2\pi}$

19. W pewnym czworokącie trzy boki mają równe długości, a czwarty bok ma długość równą długościom obu przekątnych. Miary kątów tego czworokąta są równe

a) $68°$, $68°$, $112°$, $112°$ b) $72°$, $72°$, $108°$, $108°$

c) $60°$, $60°$, $120°$, $120°$ d) $64°$, $64°$, $116°$, $116°$

20. W kwadracie o boku 1 ścięto naroża tak, że powstał ośmiokąt o równych długościach boków. Pole powstałego w ten sposób ośmiokąta wynosi

a) $2\sqrt{2}-2$ b) $2-\sqrt{2}$ c) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$ d) $\sqrt{2}-1$

ODPOWIEDZI

Prawidłowe odpowiedzi zaznaczono znakiem X.

Numer pytania	Odpowiedzi a	b	c	d
1				X
2			X	
3		X		
4			X	
5		X		
6				X
7		X		
8			X	
9				X
10				X
11		X		
12			X	
13			X	
14			X	
15			X	
16				X
17	X			
18	X			
19		X		
20	X			

Zadania konkursowe 2023/2024
FINAŁ
Część I

Zadanie 1 (5 pkt)

Wykazać, że dla dowolnej nieparzystej liczby n liczba $n^{12}-n^8-n^4+1$ jest podzielna przez 128.

Szkic rozwiązania.

I sposób

Zauważmy, że

$$n^{12}-n^8-n^4+1 = n^8(n^4-1)-(n^4-1) = (n^4-1)(n^8-1) = (n-1)^2(n+1)^2(n^2+1)^2(n^4+1)$$

Dla nieparzystej liczby n wszystkie czynniki po prawej stronie są parzyste, zatem możemy wyłączyć $2^7 = 128$, co kończy dowód.

II sposób

Niech $n = 2k+1$. Wówczas

$$\begin{aligned} n^{12} - n^8 - n^4 + 1 &= (2k+1)^{12} - (2k+1)^8 - (2k+1)^4 + 1 = \\ &= [(2k+1)^4 - 1] \cdot [(2k+1)^8 - 1] = [(2k+1)^2 - 1]^2 \cdot [(2k+1)^2 + 1]^2 \cdot [(2k+1)^4 + 1] = \\ &= (4k^2 + 4k)^2 \cdot (4k^2 + 4k + 2)^2 \cdot [(2k+1)^4 + 1] = \\ &= 4^2(k^2 + k)^2 \cdot 2^2(2k^2 + 2k + 1)^2 \cdot [(2k+1)^4 + 1] \end{aligned}$$

Czynnik $[(2k+1)^4+1]$ jest liczbą parzystą, więc możemy zapisać go w postaci $[(2k+1)^4+1] = 2m$, $m \in \mathbb{N}$. Wtedy

$$\begin{aligned} n^{12} - n^8 - n^4 + 1 &= 2^4 \cdot 2^2 \cdot 2(k^2 + k)^2(2k^2 + 2k + 1)^2 \cdot m = \\ &= 2^7 \cdot (k^2 + k)^2 \cdot (2k^2 + 2k + 1)^2 \cdot m = 128 \cdot (k^2 + k)^2 \cdot (2k^2 + 2k + 1)^2 \cdot m \end{aligned}$$

To kończy dowód.

Zasady oceniania:

5 pkt - pełne rozwiązanie

1 pkt - zauważenie, że rozważana liczba jest parzysta

1 pkt - uwzględnienie założenia, że n jest liczbą nieparzystą

1 pkt - rozkład na czynniki

1 pkt - pogrupowanie wyrazów

0 pkt - rozwiązanie, w którym nie dokonano istotnego postępu

Zadanie 2. (5 pkt)

Znaleźć wszystkie wielomiany niezerowe $W(x)$ spełniające równanie

$$x \cdot W(x+1) = (x+2) \cdot W(x)$$

dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Szkic rozwiązania.

Podstawiając $x = 0$ i $x = -2$, otrzymujemy $W(0) = 0$ i $W(-1) = 0$. Stąd na mocy twierdzenia Bezouta wielomian $W(x)$ ma postać $W(x) = x(x+1)Q(x)$, gdzie $Q(x)$ jest wielomianem niezerowym.

Uwzględniając postać wielomianu $W(x)$, mamy

$$x(x+1)(x+2)Q(x+1) = (x+2)x(x+1)Q(x)$$

dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Ponieważ $Q(x+1) = Q(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, więc $Q(x) = const.$ To oznacza, że rozwiązaniem równania jest każdy wielomian postaci $W(x) = ax^2 + ax$, gdzie a jest dowolną stałą różną od zera.

Zasady oceniania:

5 pkt - pełne rozwiązanie

1 pkt - wyznaczenie wielomianu $Q(x)$

1 pkt - zapisanie wielomianu w postaci $W(x) = x(x+1)Q(x)$

1 pkt - zauważenie, że wielomian dzieli się przez $x(x+1)$

1 pkt - zauważenie, że liczba $x = 0$ jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$

0 pkt - rozwiązanie, w którym nie dokonano istotnego postępu

Zadanie 3. (5 pkt)

Symbol $[a]$ oznacza największą liczbę całkowitą mniejszą lub równą liczbie a.

Dana jest funkcja $f(x) = x^2 - 5x + 6$. Znaleźć miejsce zerowe funkcji $g(x) = [f(x)]$.

Szkic rozwiązania.

Zauważmy, że

$$g(x) = 0 \iff [f(x)] = 0 \iff 0 \leqslant f(x) < 1$$

Rozwiązaniem nierówności $0 \leqslant x^2 - 5x + 6 < 1$ jest zbiór $\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}; 2\right] \cup \left[3; \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$, a więc miejscem zerowym funkcji $g(x)$ jest każda liczba x należąca do tego zbioru.

Zasady oceniania:

5 pkt - pełne rozwiązanie

2 pkt - wyznaczenie zbioru będącego rozwiązaniem nierówności $0 \leqslant f(x) < 1$

1 pkt - zapisanie warunku $0 \leqslant f(x) < 1$

1 pkt - rozwiązanie równania $x^2 - 5x + 6 = 0$

0 pkt - rozwiązanie, w którym nie dokonano istotnego postępu

Zadania konkursowe 2023/2024
FINAŁ
Część II

Przy każdym pytaniu są podane 4 odpowiedzi, z których jedna, dwie, trzy lub cztery są prawidłowe.

1. Liczba $(1-\frac{1}{\sqrt{2}})\cdot(1-\frac{1}{\sqrt{3}})\cdot\ \ldots\ \cdot(1-\frac{1}{\sqrt{100}})$ jest

a) mniejsza od $\frac{1}{100}$

b) większa od $\frac{1}{100}$

c) mniejsza od $\frac{1}{1000}$

d) większa od $\frac{1}{1000}$

2. Ułamek $\dfrac{\log(8+3\sqrt{21})}{\log(1+\sqrt{21})-\log 2}$ jest

a) liczbą całkowitą

b) równy 3

c) liczbą niewymierną

d) równy $\sqrt{21}$

3. Dane jest równanie $f(f(f(x)))=0$, gdzie $f(x)=x^2+32x+240$. Wówczas

a) równanie ma dokładnie cztery rozwiązania

b) wszystkie rozwiązania tego równania są liczbami z przedziału $(-18;-15)$

c) suma kwadratów rozwiązań równania jest liczbą całkowitą

d) suma rozwiązań równania jest liczbą całkowitą

4. Najmniejsza wartość funkcji $f(x)=\log_{\frac{\sqrt{2}}{4}}(x-4x^2)$ jest równa

a) $-\frac{1}{8}$ b) $\frac{1}{8}$ c) $\frac{8}{3}$ d) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

5. Liczbę -10 przedstawiono jako sumę nieskończonego ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie $q=\frac{4}{5}$. Wtedy

a) pierwszy wyraz tego szeregu wynosi -2

b) suma $a_1+a_3+a_5+\ldots$ jest mniejsza od -5

c) suma $a_2+a_4+a_6+\ldots$ jest mniejsza od -5

d) ciąg (a_n) jest zbieżny do zera

6. Dany jest ciąg (a_n) taki, że $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n^2}$. Wówczas

a) $a_{10} > 3$ b) $a_{244} > 9$ c) $a_{2024} > 20$ d) $a_{9000} > 30$

7. Dany jest układ równań $\begin{cases} x^y = y^x \\ x^3 = y^4 \end{cases}$

Prawdą jest, że

a) układ ma nieskończenie wiele rozwiązań

b) układ ma dokładnie dwa rozwiązania

c) układ ma tylko jedno rozwiązanie

d) wszystkie rozwiązania są parami liczb dodatnich

8. Proste $ax + y = 3b$ i $x + by = 1 - 2a$ przecinają się w punkcie $A = (-2, 1)$ oraz przecinają oś Oy w punktach B i C. Wtedy

a) pole trójkąta AOC jest równe 3,5

b) długość promienia okręgu opisanego na trójkacie ABC jest równa długości jednego z boków tego trójkąta

c) jedna z wysokości trójkąta ABC ma długość $3\sqrt{2}$

d) trójkąt ABC jest rozwartokątny

9. Pole powierzchni kuli opisanej na walcu

a) jest mniejsze od pola powierzchni całkowitej walca

b) jest większe od pola powierzchni bocznej walca

c) nie przekracza sumy pól podstaw walca

d) jest większe od pola powierzchni bocznej walca i większe od sumy pól jego podstaw

10. Rolnik hodujący alpaki zamierza wybudować im nową zagrodę na przydomowej łące. Kupił w tym celu 100 m siatki ogrodzeniowej, która musi wystarczyć na zbudowanie ogrodzenia zagrody. Założył, że zagroda będzie miała kształt prostokąta i dłuższym bokiem będzie przylegać do ogrodzenia sąsiada. Bardzo zależy mu na tym, aby alpaki były szczęśliwe, a to zapewni im jak największa optymalna powierzchnia zagrody przypadającą na jedną alpakę. Przyjmując x jako długość zagrody oraz y jako jej szerokość $(x > y)$, alpaki będą szczęśliwe, gdy

a) $\log_5(x \cdot y) = 4 + \log_5 3$

b) $\log_{25}(x + y) = 1 + \frac{1}{2}\log_5 3$

c) stosunek $x : y$ wynosi $2 : 1$

d) powierzchnia całkowita zagrody wynosi 1200 m^2

ODPOWIEDZI

Prawidłowe odpowiedzi zaznaczono znakiem X.

Numer pytania	Odpowiedzi			
	a	**b**	**c**	**d**
1	X		X	
2	X	X		
3			X	X
4			X	
5	X	X		X
6	X	X		X
7		X		X
8			X	X
9		X		X
10		X	X	