

PRACA KONTROLNA nr 5 - POZIOM PODSTAWOWY

1. Dwie wiewiórki, Kasia i Basia, postanowiły wspólnie zbierać orzechy. Każdego dnia Basia przynosiła do wspólnej spiżarni o 4 orzechy więcej niż Kasia, codziennie tyle samo. Po 30 dniach współpracy wiewiórki pokłóciły się. Basia zostawiła Kasi wszystkie orzechy i założyła własną spiżarnię. Od tamtej pory każda z wiewiórek przynosi do swojej spiżarni tę samą ilość orzechów co przedtem, ale Basia codziennie dostaje 6 orzechów od Kasi. Po 50 dniach samodzielnej pracy Kasia ma jeszcze o 100 orzechów więcej niż Basia. Ustalić, po ile orzechów zbiera codziennie każda z wiewiórek i oszacować, po ilu dniach w spiżarni Basi będzie więcej orzechów niż u koleżanki.
2. Określić dziedzinę i zbiór wartości funkcji $f(x) = \sin x \cdot \sin 2x \cdot (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)$. Wykonać staranny wykres funkcji $g(x) = f(x - \frac{\pi}{4}) + 1$ i rozwiązać równanie $g(x) = 0$. Posługując się sporządzonym wykresem określić zbiór rozwiązań nierówności $g(x) \geq 0$.
3. Wyznaczyć równania wszystkich prostych, które są styczne jednocześnie do obu okręgów

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1 \quad \text{oraz} \quad (x - 5)^2 + (y - 1)^2 = 1.$$

Obliczenia zilustrować odpowiednim rysunkiem.

4. Rozwiązać nierówność

$$\frac{3\sqrt{4-x}+1}{1-\sqrt{4-x}} > 1 - 2\sqrt{4-x}.$$

5. Koszt budowy I kondygnacji biurowca wynosi 10 mln zł., a każdej kolejnej jest niższy o 100 tys. zł. od poprzedniej. Planowany koszt wynajmu powierzchni biurowych w tym budynku jest stały do XL kondygnacji i wynosi 200 tys. zł. za całą kondygnację, a potem podwaja się co 5 kondygnacji (na kolejnych 5 kondygnacjach jest stały). Roczny koszt wynajmu ostatniej, najbardziej prestiżowej i droższej od pozostałych kondygnacji jest równy kosztowi budowy całego XXXVII piętra. Oszacować, po ilu latach zwróci się inwestorom koszt budowy tego budynku.
6. W trapezie równoramiennym kąt przy podstawie ma miarę $\frac{\pi}{3}$, a różnica długości podstaw wynosi 4. Ustalić, ile powinno wynosić pole tego trapezu, aby można było wpisać w niego koło. W tym przypadku wyznaczyć stosunek pola koła opisanego na tym trapezie do pola koła wpisanego.