

LIGA MATEMATYCZNA
im. Zdzisława Matuskiego
GRUDZIEŃ 2020
SZKOŁA PONADPODSTAWOWA

ZADANIE 1.

W trójkącie prostokątnym na dłuższej przyprostokątnej jako na średnicy opisano półokrąg tak, że przecina on przeciwprostokątną w punkcie K . Krótsza przyprostokątna ma długość a . Stosunek długości cięciwy łączącej wierzchołek kąta prostego z punktem K do długości krótszej przyprostokątnej jest równy $\frac{4}{5}$. Wyznacz długość półokręgu.

ZADANIE 2.

Uzasadnij, że wśród dwunastu różnych liczb naturalnych dwucyfrowych można znaleźć dwie, których różnica jest liczbą dwucyfrową o jednakowych cyfrach dziesiątek i jedności.

ZADANIE 3.

W zbiorze liczb całkowitych rozwiąż równanie

$$x(x+1)(x+2) + (x+1)(x+2)(x+3) + (x+2)(x+3)(x+4) + \dots \\ \dots + (x+98)(x+99)(x+100) = 2019x + 2020.$$

ZADANIE 4.

Wyznacz wszystkie funkcje $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające warunek

$$f(x) \cdot f(y) - f(xy) = x + y$$

dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y .

ZADANIE 5.

W zbiorze liczb rzeczywistych rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} (a+b)^2 = 4c \\ (b+c)^2 = 4a \\ (c+a)^2 = 4b. \end{cases}$$