

PRACA KONTROLNA nr 4

styczeń 2001 r

W celu przybliżenia słuchaczom Kursu, jakie wymagania były stawiane ich starszym kolegom przed ponad dwudziestu laty, niniejszy zestaw zadań jest dokładnym powtórzeniem pracy kontrolnej ze **stycznia 1979 r.**

1. Przez środek boku trójkąta równobocznego przeprowadzono prostą, tworzącą z tym bokiem kąt ostry α i dzielącą ten trójkąt na dwie figury, których stosunek pól jest równy $1 : 7$. Obliczyć miarę kąta α .
2. W kulę o promieniu R wpisano graniastosłup trójkątny prawidłowy o krawędzi podstawy równej R . Obliczyć wysokość tego graniastosłupa.
3. Wyznaczyć wartości parametru a , dla których funkcja $f(x) = \frac{ax}{1+x^2}$ osiąga maksimum równe 2.
4. Rozwiązać nierówność

$$\cos^2 x + \cos^3 x + \dots + \cos^{n+1} x + \dots < 1 + \cos x$$

dla $x \in [0, 2\pi]$.

5. Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$ prawdziwa jest równość

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \binom{n+1}{2} + 2 \left[\binom{n}{2} + \binom{n-1}{2} + \dots + \binom{2}{2} \right].$$

6. Wyznaczyć równanie linii będącej zbiorem środków wszystkich okręgów stycznych do prostej $y = 0$ i jednocześnie stycznych zewnętrznie do okręgu $(x+2)^2 + y^2 = 4$. Narysować tę linię.
7. Wyznaczyć wartości parametru m , dla których równanie $9x^2 - 3x \log_3 m + 1 = 0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2 spełniające warunek $x_1^2 + x_2^2 = 1$.
8. Rozwiązać nierówność

$$\frac{\sqrt{30+x-x^2}}{x} < \frac{\sqrt{10}}{5}.$$