LIGA MATEMATYCZNA
im. Zdzisława Matuskiego
FINAŁ
25 kwietnia 2016
GIMNAZJUM

ZADANIE 1.
Wykaż, że liczba

$$\underbrace{2222\ldots2}_{2n \text{ cyfr } 2}\underbrace{3333\ldots3}_{3n \text{ cyfr } 3}\underbrace{4444\ldots4}_{4n \text{ cyfr } 4}\underbrace{5555\ldots5}_{5n \text{ cyfr } 5}$$

jest podzielna przez 45 dla każdej liczby naturalnej n.

ZADANIE 2.
Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} (x+y)(x+y+z)=72 \\ (y+z)(x+y+z)=120 \\ (x+z)(x+y+z)=96. \end{cases}$$

ZADANIE 3.
W trapezie $ABCD$ punkt S leży na podstawie AB, punkt R leży na podstawie CD. Odcinki DS i AR przecinają się w punkcie K, a odcinki CS i BR przecinają się w punkcie L. Wykaż, że suma pól trójkątów AKD i LBC jest równa polu czworokąta $KSLR$.

ZADANIE 4.
Na finał Ligi Matematycznej w dniu 25 kwietnia przyszło 149 finalistów ze szkoły podstawowej i gimnazjum. Każdy z nich uściskiem dłoni przywitał każdego swego znajomego wśród finalistów. Uzasadnij, że istnieje finalista, który ma parzystą liczbę znajomych wśród finalistów.

ZADANIE 5.
Wykaż, że liczba czterocyfrowa, której cyfra tysięcy jest równa cyfrze dziesiątek, a cyfra setek jest równa cyfrze jedności, nie może być kwadratem liczby naturalnej.