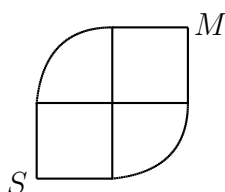


## PRACA KONTROLNA nr 5 - POZIOM ROZSZERZONY

1. Na ile sposobów można ustawić w rzędzie trzy różne pary butów tak, aby buty co najmniej jednej pary stały obok siebie, przy czym but lewy z lewej strony.
2. Stosując zasadę indukcji matematycznej, udowodnić nierówność

$$1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n} \geq \frac{2}{3}n\sqrt{n+1}, \quad n \geq 1.$$

3. Pan Kowalski wyrusza z punktu  $S$  na spacer po parku, którego plan jest przedstawiony na rysunku. Postanawia iść każdą alejką co najwyżej jeden raz. Obliczyć prawdopodobieństwo, że przejdzie przez punkt  $M$ , jeżeli na każdym skrzyżowaniu alejek wybiera kolejną (jeszcze nie przebytą) alejkę z tym samym prawdopodobieństwem lub kończy spacer, gdy nie ma takiej alejki.



4. Uczeń zna odpowiedzi na 20 spośród 30 pytań egzaminacyjnych. Na egzaminie losuje dwa pytania. Jeżeli odpowie poprawnie na oba, to egzamin zda, jeżeli na żadne, to nie zda, a jeżeli na jedno, to wynik egzaminu rozstrzyga odpowiedź na dodatkowe wylosowane pytanie. Obliczyć prawdopodobieństwo, że uczeń zda egzamin.
5. W trójkąt o wierzchołkach  $A(-1, -1)$ ,  $B(3, 1)$ ,  $C(1, 3)$  wpisano kwadrat tak, że dwa jego wierzchołki leżą na boku  $AB$  trójkąta. Wyznaczyć współrzędne wierzchołków kwadratu oraz stosunek pola kwadratu do pola trójkąta. Sporządzić rysunek.
6. Ostrosłup prawidłowy czworokątny  $ABCD S$  o krawędzi podstawy  $a$  ma pole powierzchni całkowitej  $5a^2$ . Środkiem krawędzi bocznej  $AS$  jest punkt  $M$ . Obliczyć promień kuli opisanej na ostrosłupie  $ABCD M$  oraz cosinus kąta pomiędzy ścianami bocznymi  $CDM$  oraz  $BCM$ .