PRACA KONTROLNA nr 2

listopad 1999r

1. Udowodnić, że dla każdego n naturalnego wielomian $x^{4n-2}+1$ jest podzielny przez trójmian kwadratowy x^2+1.

2. W równoramienny trójkąt prostokątny o polu powierzchni $S = 10\ \mathrm{cm}^2$ wpisano prostokąty w ten sposób, że jeden z jego boków leży na przeciwprostokątnej, a pozostałe wierzchołki znajdują się na przyprostokątnych. Znaleźć ten z prostokątów, który ma najkrótszą przekątną i obliczyć jej długość.

3. Rozwiązać nierówność
$$\log_{125} 3 \cdot \log_x 5 + \log_9 8 \cdot \log_4 x > 1.$$

4. Znaleźć wszystkie wartości parametru p, dla których wykres funkcji $y = x^2 + 4x + 3$ leży nad prostą $y = px + 1$.

5. Zbadać liczbę rozwiązań równania
$$||x+5|-1| = m$$
w zależności od parametru m.

6. Rozwiązać układ równań
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 50 \\ (x-2)(y+2) = -9 \end{cases}.$$
Podać interpretację geometryczną tego układu i wykonać odpowiedni rysunek.

7. Wyznaczyć na osi x-ów punkty A i B, z których okrąg $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 20$ widać pod kątem prostym tzn. styczne do okręgu wychodzące z każdego z tych punktów są do siebie prostopadłe. Obliczyć pole figury ograniczonej stycznymi do okręgu przechodzącymi przez punkty A i B. Wykonać staranny rysunek.

8. W przedziale $[0, 2\pi]$ rozwiązać równanie
$$1 - \mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}^4 x - \mathrm{tg}^6 x + \ldots = \sin^2 3x.$$