

LIGA MATEMATYCZNA
im. Zdzisława Matuskiego
STYCZEŃ 2022
SZKOŁA PONADPODSTAWOWA

ZADANIE 1.

Znajdź wszystkie liczby pierwsze p takie, że $p^2 + 2$ i $p^3 + 2$ są liczbami pierwszymi.

ZADANIE 2.

Na 101 kartkach Adam zapisał liczby naturalne od 1 do 101, po jednej na każdej kartce. Potem kartki odwrócił, pomieszał i zapisał znowu liczby od 1 do 101, po jednej na każdej kartce. Następnie dodał liczby z obu stron kartki. Wykaż, że iloczyn otrzymanych wyników jest liczbą parzystą.

ZADANIE 3.

W trójkącie prostokątnym ABC dwusieczna kąta ostrego dzieli przeciwległy bok w stosunku $3 : 5$. Oblicz stosunek promienia r okręgu wpisanego w ten trójkąt do promienia R okręgu opisanego na tym trójkącie.

ZADANIE 4.

Wyznacz wszystkie pary różnych liczb całkowitych (x, y) spełniające równanie

$$x + \frac{1}{y - 2021} = y + \frac{1}{x - 2021}.$$

ZADANIE 5.

W zbiorze liczb rzeczywistych rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} 25x^2 + 9y^2 = 12yz \\ 9y^2 + 4z^2 = 20xz \\ 4z^2 + 25x^2 = 30xy. \end{cases}$$