

PRACA KONTROLNA nr 5 - POZIOM ROZSZERZONY

1. Rozwiązać równanie

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x + \cdots = \frac{1}{2},$$

w którym lewa strona jest sumą wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego.

2. Pani Józefa wpłaciła do banku pewien kapitał K_0 na okres jednego roku na lokatę oprocentowaną $P\%$ w skali roku, przy czym kapitalizacja odsetek następuje N razy rocznie. Uzasadnić indukcyjnie, że wzór $K_n = K_0 \left(1 + \frac{P}{100N}\right)^n$ określa stan konta pani Józefy po n -tym okresie kapitalizacyjnym. Sprawdzić, jaki będzie stan konta pani Józefy po roku przy założeniu, że wpłaci ona 10.000,00 zł na 6%, a odsetki kapitalizowane będą co miesiąc.

3. Zaznaczyć na płaszczyźnie zbiór rozwiązań nierówności

$$\log_{\frac{1}{2}} \left(3 \log_x (2y) \right) \geq 0.$$

4. W koło o promieniu R wpisano trójkąt, którego pole stanowi czwartą część pola koła, a jeden z kątów ma miarę α . Obliczyć iloczyn oraz sumę kwadratów długości boków tego trójkąta.
5. Wyznaczyć równanie krzywej będącej zbiorem wszystkich środków okręgów stycznych do prostej $y = 2$ i przechodzących przez początek układu współrzędnych. Spośród rozważanych okręgów narysować wszystkie okręgi styczne do jednej z osi układu współrzędnych i wyznaczyć równanie okręgu przechodzącego przez ich środki.
6. Na dnie naczynia w kształcie walca umieszczono 6 małych kulek o promieniu R w taki sposób, że każda z nich jest styczna do dwu innych kulek i ściany bocznej naczynia. Następnie umieszczono w nim kulę o promieniu $2R$ styczną do każdej z małych kulek oraz górnej podstawy walca. Sprawdzić, ile wody zmieści się w tak zapełnionym naczyniu.