

**AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA im. Stanisława Staszica  
w Krakowie**

**OLIMPIADA „O DIAMENTOWY INDEKS AGH” 2007/8**

**MATEMATYKA - ETAP III**

**ZADANIA PO 10 PUNKTÓW**

1. W trapezie o polu  $P$  stosunek długości podstaw jest równy  $k > 1$ . Oblicz pola dwóch trójkątów, na które ten trapez dzieli jego przekątna.
2. Rozwiąż nierówność

$$0,1^x \cdot 0,1^{x^3} \cdot 0,1^{x^5} \cdot \dots > \frac{\sqrt[3]{10000}}{100}.$$

3. Połowę drogi kierowca jechał autostradą z prędkością 120 km/h, a drugą połowę na drogach lokalnych ze średnią prędkością 60 km/h. Oblicz średnią prędkość całej podróży.
4. Znajdź równania okręgów o promieniu 3 stycznych jednocześnie do osi  $OX$  i do prostej  $12x + 5y = 0$ .

**ZADANIA PO 20 PUNKTÓW**

5. Na czworościanie foremnym opisano walec w ten sposób, że dwie krawędzie czworościanu leżące na prostych skośnych są średnicami podstaw walca. Oblicz stosunek pola powierzchni sfery opisanej na walcu do pola powierzchni sfery wpisanej w czworościan.
6. Dla jakich wartości parametru  $m$  dokładnie jeden pierwiastek równania

$$(m - 2) 9^x + (m + 1) 3^x - m = 0$$

jest mniejszy od 2?

7. Ze zbioru  $\{1, 2, \dots, 1000\}$  losujemy trójelementowy podzbiór  $T = \{p, q, r\}$ , przy czym prawdopodobieństwo wylosowania każdego podzbioru jest jednakowe.
  - a) Oblicz prawdopodobieństwo, że iloczyn  $pqr$  jest podzielny przez 3.
  - b) Niech  $\varphi$  będzie funkcją przyporządkowującą każdemu wylosowanemu podzbiorowi  $T$  „element pośredni” (tzn. jeśli  $p < q < r$ , to  $\varphi(T) = q$ ). Jaka wartość funkcji  $\varphi$  jest najbardziej prawdopodobna?