

## PRACA KONTROLNA nr 3 - POZIOM ROZSZERZONY

1. Udowodnij, że

$$\cos 4x = 1 - 8 \cos^2 x + 8 \cos^4 x.$$

Wykorzystując ten wzór, znajdź wartość  $\cos \frac{\pi}{24}$ .

2. Wykaż, że dla każdego trójkąta zachodzi nierówność

$$\frac{1}{2r} < \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} < \frac{1}{r},$$

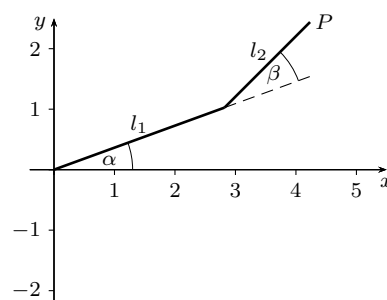
gdzie  $h_a, h_b$  są wysokościami, a  $r$  promieniem okręgu wpisanego w ten trójkąt.

3. Dana jest funkcja  $f(x) = \sin 4x \operatorname{ctg} 2x - \frac{1}{2}$ . Rozwiąż nierówność  $f(x) \geq 1$  i narysuj staranny wykres  $f(x)$ .

4. Przekątne trapezu dzielą ten trapez na cztery trójkąty. Pola tych dwóch trójkątów, których bokami są podstawy trapezu równe są  $S_a$  i  $S_b$ . Oblicz pole tego trapezu.

5. Manipulator robota składa się z dwóch ramion o długościach  $l_1$  i  $l_2$ , połączonych przegubem. Pierwsze ramię umieszczono w początku układu współrzędnych.

Niech  $\alpha$  oznacza kąt między pierwszym ramieniem i osią  $Ox$ , a  $\beta$  - kąt między drugim ramieniem i kierunkiem pierwszego ramienia (patrz rysunek). Wyznacz współrzędne końca drugiego ramienia (punktu  $P$ ) w zależności od kątów  $\alpha$  i  $\beta$ . Sprawdź, czy punkt  $P$  może przesunąć się do punktów  $S(2, 1)$  oraz  $Q(3, -1)$  jeżeli  $l_1 = 3$ ,  $l_2 = 2$  oraz ruchy manipulatora ograniczone są tak, że  $\alpha, \beta \in \left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$ . Jeżeli tak, to wskaż konkretne kąty  $\alpha$  i  $\beta$  (podaj przybliżenia, jeśli nie można określić dokładnej ich wartości), a jeśli nie, to uzasadnij dlaczego.



6. Okrąg o promieniu  $r$  toczy się wewnątrz bez poślizgu po okręgu o promieniu  $2r$ . Jaką linię zakreśla ustalony (dowolnie wybrany) punkt  $P$  ruchomego okręgu? Wskazówka: rozważ dwa różne położenia mniejszego okręgu i sprawdź gdzie przesuwają się punkty styczności, skorzystaj ze związku między długością łuku, kątem środkowym opartym na tym łuku i promieniem okręgu.

---

Rozwiązania (rękopis) zadań z wybranego poziomu prosimy nadsyłać do **20.11.2022r.** na adres:

Wydział Matematyki  
Politechnika Wrocławska  
Wybrzeże Wyspiańskiego 27  
50-370 WROCŁAW,

lub **elektronicznie**, za pośrednictwem portalu [talent.pwr.edu.pl](http://talent.pwr.edu.pl)

Na kopercie prosimy **koniecznie** zaznaczyć **wybrany poziom!** (np. **poziom podstawowy lub rozszerzony**). Do rozwiązań należy dołączyć zaadresowaną do siebie kopertę zwrotną z naklejonym znaczkiem, odpowiednim do formatu listu. Prace niespełniające podanych warunków nie będą poprawiane ani odsyłane.

**Uwaga.** Wysyłając nam rozwiązania zadań uczestnik Kursu udostępnia Politechnice Wrocławskiej swoje **dane osobowe**, które przetwarzamy **wyłącznie** w zakresie niezbędnym do jego prowadzenia (odesłanie zadań, prowadzenie statystyki). Szczegółowe informacje o przetwarzaniu przez nas danych osobowych są dostępne na stronie internetowej Kursu.

Adres internetowy Kursu: <http://www.im.pwr.edu.pl/kurs>