PRACA KONTROLNA nr 4

styczeń 2003r

1. Dla jakich wartości parametru rzeczywistego t równanie
$$x + 3 = -(tx + 1)^2$$
ma dokładnie jedno rozwiązanie.

2. Czworościan foremny o krawędzi a przecięto płaszczyzną równoległą do dwóch przeciwległych krawędzi. Wyrazić pole otrzymanego przekroju jako funkcję długości odcinka wyznaczonego przez ten przekrój na jednej z pozostałych krawędzi. **Uzasadnić** postępowanie. Przedstawić znalezioną funkcję na wykresie i podać jej największą wartość.

3. Zaznaczyć na wykresie zbiór punktów (x, y) płaszczyzny spełniających warunek $\log_{xy} |y| \geqslant 1$.

4. Wyznaczyć równanie linii utworzonej przez wszystkie punkty płaszczyzny, których odległość od okręgu $x^2+y^2 = 81$ jest o 1 mniejsza niż od punktu $P(8, 0)$. Sporządzić rysunek.

5. Na dziesiątym piętrze pewnego bloku mieszkają Kowalscy i Nowakowie. Kowalscy mają dwóch synów i dwie córki, a Nowakowie jednego syna i dwie córki. Postanowili oni wybrać młodzieżowego przedstawiciela swojego piętra. W tym celu Kowalscy wybrali losowo jedno ze swoich dzieci, a Nowakowie jedno ze swoich. Następnie spośród tej dwójki wylosowano jedną osobę. Obliczyć prawdopodobieństwo, że przedstawicielem został chłopiec.

6. Uzasadnić prawdziwość nierówności $n + \frac{1}{2} \geqslant \sqrt{n(n+1)}, \quad n \geqslant 1$. Korzystając z niej oraz z zasady indukcji matematycznej udowodnić, że dla wszystkich $n \geqslant 1$ jest
$$\binom{2n}{n} \geqslant \frac{4^n}{2\sqrt{n}}.$$

7. Przeprowadzić badanie przebiegu zmienności funkcji $f(x) = \sqrt{\frac{3x-3}{5-x}}$ i wykonać jej wykres.

8. W trójkącie ABC kąt A ma miarę α, kąt B miarę 2α, a $BC = a$. Oznaczmy kolejno przez A_1 punkt na boku $\overline{AC}$ taki, że $\overline{BA_1}$ jest dwusieczną kąta B; B_1 punkt na boku $\overline{BC}$ taki, że $\overline{A_1B_1}$ jest dwusieczną kąta A_1, itd. Wyznaczyć długość łamanej nieskończonej $ABA_1B_1A_2\ldots$.