

PRACA KONTROLNA nr 4 - POZIOM PODSTAWOWY

styczeń 2008r.

1. Ramka z drutu o długości l ma kształt kwadratu zakończonego trójkątem równoramiennym, jak na rysunku. Bok kwadratu wynosi a , natomiast ramię trójkąta równe jest b . Wyznaczyć a i b tak, by pola kwadratu i trójkąta były jednakowe.



2. Niech

$$A = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, y = -x + a, a \in \langle -2, 2 \rangle\},$$
$$B = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, y = kx, k \in \langle \frac{1}{2}, 1 \rangle\}.$$

W prostokątnym układzie współrzędnych narysować zbiór $A \cap B$ i obliczyć jego pole. Sprawdzić, czy punkt $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ należy do zbioru $A \cap B$.

3. Dany jest stożek ścięty, w którym pole dolnej podstawy jest 4 razy większe od pola górnej. W stożek wpisano walec tak, że dolna podstawa walca leży na dolnej podstawie stożka, a brzeg górnej podstawy leży na jego powierzchni bocznej. Jaką część objętości stożka ściętego stanowi objętość walca, jeżeli wysokość walca jest 3 razy mniejsza od wysokości stożka? Odpowiedź podać w procentach z dokładnością do jednego promila. Sporządzić staranny rysunek przekroju osiowego bryły.

4. Rozwiązać nierówność $f(x) + 3x > 1$, gdzie $f(x) = \frac{1 - 3x}{\sqrt{2 - \frac{3x+1}{x-2}}}$.

5. Dane są dwa ciągi $a_n = \frac{1}{n}$ oraz $b_n = \frac{n-2}{(n+2)(n+4)}$. Zbadać monotoniczność ciągu

$$c_n = (n-1)a_{n+1} + 2b_{2n}.$$

Czy ciąg c_n jest ograniczony? Dla jakich n spełniona jest nierówność $\frac{3}{4} < c_n < 1$?

6. Okręgi o promieniach r i $2r$ przecinają się w punktach A i B , będących wierzchołkami trójkąta równobocznego ABC wpisanego w jeden z okręgów. Obliczyć pole deltoidu $ADBC$, którego wierzchołek D leży na drugim okręgu oraz wyznaczyć sinus kąta przy wierzchołku D .