

10. Kinetyczna teoria gazów.

Wybór i opracowanie zadań od 10.1 do 10.6 - Bogusław Kusz.

Więcej zadań z tej tematyki znajdziesz w II części skryptu.

10.1.

Funkcję rozkładu prędkości cząsteczek gazu doskonałego można zapisać w formie:

$f(V) = CV^2 e^{-\frac{mV^2}{2kT}}$ gdzie C jest pewną stałą a m jest masą cząsteczki. Jest to jednocześnie rozkład prawdopodobieństwa znalezienia w gazie o temperaturze T cząstek o prędkości V . Wyprowadź wzór oraz oblicz najbardziej prawdopodobną prędkość wodoru i tlenu jeśli $T=300K$, $\mu_{H_2}=2g/mol=2\cdot 10^{-3} kg/mol$ i $\mu_{O_2}=32g/mol=32\cdot 10^{-3} kg/mol$, $R=8,31 J/(kg mol)$. Naszkicuj wykres $f(V)$ obu gazów.

10.2.

Funkcję rozkładu prędkości cząsteczek gazu doskonałego można zapisać w formie:

$f(V) = DV^2 e^{-\frac{mV^2}{2kT}}$ gdzie D jest pewną stałą a m jest masą cząsteczki. Jest to jednocześnie rozkład prawdopodobieństwa znalezienia w gazie o temperaturze T cząstek o prędkości V . Wyprowadź wzór oraz oblicz najbardziej prawdopodobną prędkość cząstek azotu gdy temperatura gazu wynosi $T_1=300K$ i $T_2=900K$. Naszkicuj wykres $f(V)$ gazu w obu temperaturach. $\mu_{N_2}=28g/mol=28\cdot 10^{-3} kg/mol$, $R=8,31 J/(kg mol)$.

10.3.

Oceń ciśnienie i koncentrację powietrza na wysokości: a/ 0m npm, b/ 2499m npm, c/ 4807m npm, d/ 8850m npm. Założyć, że przyspieszenie ziemskie i temperatura powietrza nie zależą od wysokości przy czym $g=9.81m/s^2$ i $t_p=7^{\circ}C$.

10.4.*

Czy na Mount Evereście można zagotować jajko na twardo ? Założenia:

1/ ścinanie białka zachodzi w temperaturze $t=60-72^{\circ}C$,

2/ związek temperatury wrzenia wody z ciśnieniem powietrza przy powierzchni wody jest

następujący: $\frac{1}{A} \ln \frac{p_x}{p_0} = \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_x}$

gdzie: $p_0=9,81\cdot 10^4 Pa$, $T_0=373K$, $A=4950 K$, a T_x jest temperaturą wrzenia wody pod ciśnieniem p_x , przyspieszenie ziemskie i temperatura powietrza nie zależą od wysokości przy czym $g=9.81m/s^2$ i $t_p=7^{\circ}C$.

10.5.

Na jakiej wysokości ciśnienie powietrza spada do połowy swej wartości przy powierzchni morza ? Założyć, że przyspieszenie ziemskie i temperatura powietrza nie zależą od wysokości. Dane: $g=9.81m/s^2$, $t_p=10^{\circ}C$, ciśnienie $p_0=1000hPa$.

10.6.**

W wirówce o promieniu $R=1m$ obracającej się z prędkością obrotową $\omega=3000obr/min$. znajdują się pary fluorku uranu UF_3 . Określ jak zmienia się koncentracja tego gazu w zależności od odległości od osi obrotu. Porównaj koncentracje w przypadku gdy mamy do czynienia z mieszaniną $^{235}UF_3$ i $^{238}UF_3$. Założenia:

1/ wlot gazu o temperaturze $T=400\text{K}$ i ciśnieniu normalnym jest na osi wirówki,
 2/ iloraz koncentracji wynosi: $\eta_0 = n_{235}/n_{238}=0.007$ oraz $\mu_{235}=292\text{g/mol}$, $\mu_{238}=295\text{g/mol}$,
 3/ wirówka jest obracającym się wokół pionowej osi ciekim walcem (wpływ siły ciężkości można zaniedbać).

10.Rozwiązania:

10.1.R.

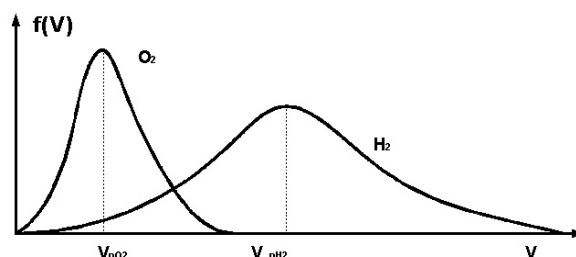
Problem sprowadza się do znalezienia maksimum funkcji $f(V)$ czyli przyrównaniu jej pochodnej do zera. Taka procedura prowadzi do wyniku:

$$V_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2N_A kT}{\mu}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}.$$

Dla gazów z zadania:

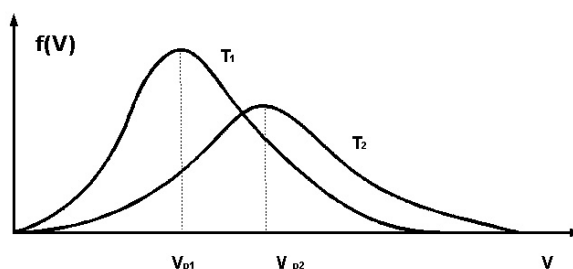
$$V_{pO_2} = 394,73 \frac{m}{s} \quad i \quad V_{pH_2} = 1579 \frac{m}{s}$$

$$\text{oraz} \quad \frac{V_{pO_2}}{V_{pH_2}} = \sqrt{\frac{\mu_{H_2}}{\mu_{O_2}}} = \frac{1}{4}.$$



10.2.R.

$$V_{pT1} = 422 \frac{m}{s} \quad V_{pT2} = 730 \frac{m}{s}.$$



10.3.R.

Przy takich założeniach można zastosować tzw. wzór barometryczny (patrz 10.4.R):

$p(h) = p_0 e^{-\frac{mgh}{kT}} = p_0 e^{-\frac{\mu gh}{RT}}$, gdzie: $p(h)$ jest ciśnieniem gazu o temperaturze T na wysokości h względem poziomu odniesienia na którym panuje ciśnienie p_0 , m - masa molekuly gazu, μ -masa molowa gazu.

Związek między ciśnieniem i koncentracją η jest następujący:

$$\frac{pV}{T} = nR = \frac{N}{N_A} R = Nk \Rightarrow \eta = \frac{N}{V} = \frac{p}{kT} \quad i \quad \eta_0 = \frac{N}{V} = \frac{p_0}{kT} \quad \text{czyli} \quad \eta = \eta_0 e^{-\frac{\mu gh}{RT}}.$$

Dla powietrza możemy przyjąć: $\mu=28,8\text{g}$, $p_0=1000\text{ hPa}$.

Wyniki obliczeń:

- a/ $p(0)=p_0=1000\text{ hPa}$, $\eta_0=2,6 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$,
- b/ $p(2499\text{m})=0,74p_0$, $\eta(2499\text{m})=0,74\eta_0$,
- c/ $p(4807\text{m})=0,55p_0$, $\eta(4807\text{m})=0,55\eta_0$,
- d/ $p(8850\text{m})=0,33p_0$, $\eta(8846\text{m})=0,33\eta_0$.

Jak widać z powyższych wyników taternicy na Rysach odczuwają lekki brak powietrza, alpinści na Mount Blanc (4807m) muszą głębiej oddychać a himalaiści na Mount Evereście (8850m) mają bardzo duże problemy z oddychaniem.

10.4.R.

Ciśnienie na Mount Evereście w podanych warunkach wynosi $p_x = 0,33p_0$ (patrz zadanie 10.3) więc woda w tym miejscu będzie wrzała w temperaturze

$$\frac{1}{T_x} = \frac{1}{T_0} - \frac{1}{A} \ln \frac{p_x}{p_0} = \frac{1}{T_0} - \frac{\ln 0.33}{A} \quad \text{czyli} \quad T_x = 345K = 72^\circ C.$$

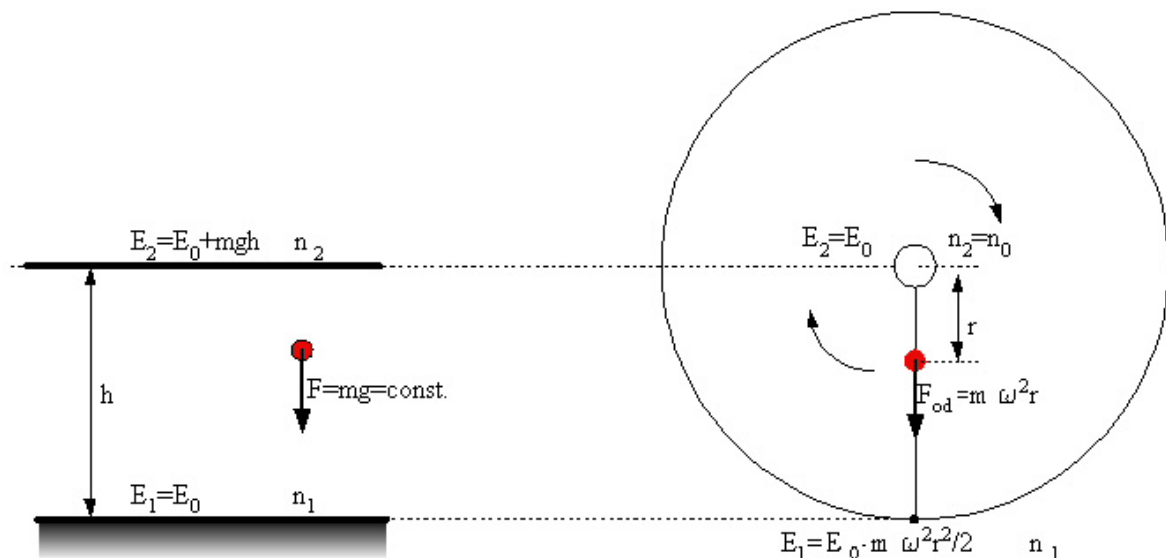
Wniosek: porównując temperatury krzepnięcia białka i temperaturę wrzenia wody można sądzić, że na Mount Evereście prawdopodobnie można ugotować jajko na miękko. Ponieważ przyjęliśmy w naszych obliczeniach parę założeń a temperatury niewiele się różnią więc nie można wykluczyć, że w pewnych warunkach uda się przygotować jajko na twardo.

10.5.R.

$$h = \frac{RT}{\mu g} \ln \frac{p_0}{p_h} = \frac{RT}{\mu g} \ln 2 = 5,77km.$$

10.6.R.

Można znaleźć związek między równaniem Boltzmanna, wzorem barometrycznym i rozkładem koncentracji gazu w wirówce.



W ogólnym przypadku równanie Boltzmanna jest następujące:

$$n_2 = n_1 e^{-\frac{E_2 - E_1}{kT}} \quad \text{gdzie } n_1 \text{ i } n_2 \text{ koncentracje cząstek o energii } E_1 \text{ i } E_2 \text{ w temperaturze } T.$$

Także w przypadku gdy cząstkami są cząsteczki powietrza ich koncentracja zależy od ich całkowitej energii. Na wysokości h cząstki mają energię wyższą o wielkość mgh co wynika ze stałości siły ciężkości mg . Biorąc to pod uwagę otrzymujemy wzór barometryczny:

$$n_2 = n_1 e^{-\frac{E_2 - E_1}{kT}} = n_1 e^{-\frac{E_0 + mgh - E_0}{kT}} = n_1 e^{-\frac{mgh}{kT}}.$$

W wirówce obracającej się wokół pionowej osi na stałej wysokości koncentracja cząstek gazu znajdującego się w bębnie zależy od prędkości obrotowej ω i od odległości od osi obrotu r . Wynika to z działania siły odśrodkowej $F_{od} = m\omega^2 r$. Porównując energię potencjalną w polu siły odśrodkowej cząstek blisko osi E_0 z cząstkami znajdującymi się w odległości r E_r od osi stwierdzimy, że :

$$E(r) - E(0) = \int_0^r \overline{F} \, dr = \int_0^r -m\omega^2 r \, dr = -\frac{m\omega^2 r^2}{2} \quad \text{gdzie} \quad \overline{F} = -\overline{F_{od}}.$$

Dlatego podstawiając do równania Boltzmanna

$$E_1 = E_0 - m\omega^2 r^2 / 2 \quad \text{oraz} \quad E_2 = E_0,$$

otrzymamy zależność koncentracji cząstek gazu w funkcji odległości od osi obrotu:

$$n_2 = n_0 = n_1 e^{-\frac{E_2 - E_1}{kT}} = n_r e^{-\frac{E_0 - (E_0 - m\omega^2 r^2 / 2)}{kT}} = n_r e^{-\frac{m\omega^2 r^2}{2kT}} \quad \text{czyli} \quad n_r = n_0 e^{\frac{m\omega^2 r^2}{2kT}}.$$

Przy ścianie bocznej wirówki ($r=R_w$) koncentracja drobin $^{238}\text{UF}_3$ jest

$$\frac{n_{R_w}}{n_0} = e^{\frac{m\omega^2 R_w^2}{2kT}} = e^{\frac{\mu\omega^2 R_w^2}{2RT}} = 1,11 \text{ razy większa od koncentracji przy osi.}$$

Porównując koncentracje różnych izotopów uranu w tej wirówce mamy:

$$n_{R235} = n_{0-235} e^{\frac{\mu_{235}\omega^2 R_w^2}{2RT}} \quad \text{oraz} \quad n_{R238} = n_{0-238} e^{\frac{\mu_{238}\omega^2 R_w^2}{2RT}} \quad \text{czyli} \quad \eta_R = \frac{n_{R235}}{n_{R238}} = \eta_0 e^{\frac{(\mu_{235} - \mu_{238})\omega^2 R_w^2}{2RT}}$$

$$\eta_R = \eta_0 \cdot 0,997.$$

Powyższy wynik mówi, że stosunek koncentracji izotopów ulega zmianie w wirówce. Mimo, że zmiana jest stosunkowo niewielka to układ kaskadowo połączonych wirówek może służyć do rozdzielania gazów, których masy niewiele się różnią.