

## Praca kontrolna nr 7

**28.1.** Dwa punkty poruszają się ruchem jednostajnym po okręgu w tym samym kierunku, przy czym jeden z nich wyprzedza drugi co 44 sekundy. Jeżeli zmienić kierunek ruchu jednego z tych punktów na przeciwny, to będą się one spotykać co 8 sekund. Obliczyć stosunek prędkości tych punktów.

**28.2.** Dla jakich wartości parametru  $p$  nierówność

$$\frac{2px^2 + 2px + 1}{x^2 + x + 2 - p^2} \geq 2$$

jest spełniona dla każdej liczby rzeczywistej  $x$ ?

**28.3.** W równoległoboku dane są kąt ostry  $\alpha$ , dłuższa przekątna  $d$  oraz różnica boków  $r$ . Obliczyć pole równoległoboku.

**28.4.** Naczynie w kształcie półkuli o promieniu  $R$  ma trzy nóżki w kształcie kulek o promieniu  $r$ ,  $4r < R$ , przymocowanych do naczynia w ten sposób, że ich środki tworzą trójkąt równoboczny, a naczynie postawione na płaskiej powierzchni dotyka ją w jednym punkcie. Obliczyć wzajemną odległość punktów przymocowania kulek. Sporządzić odpowiednie rysunki.

**28.5.** Za pomocą metod rachunku różniczkowego określić liczbę rozwiązań równania  $2x^3 + 1 = 6|x| - 6x^2$ .

**28.6.** Bez stosowania zasady indukcji matematycznej wykazać, że  $\frac{n^n - 1}{n - 1}$  jest nieparzystą liczbą naturalną dla wszystkich  $n \geq 2$ .

**28.7.** Rozwiązać równanie

$$\frac{8}{3} (\sin^2 x + \sin^4 x + \dots) = 4 - 2 \cos x + 3 \cos^2 x - \frac{9}{2} \cos^3 x + \dots$$

**28.8.** Rozważmy rodzinę prostych normalnych do paraboli o równaniu  $2y = x^2$  (tj. prostopadłych do stycznych w punktach styczności). Znaleźć równanie krzywej utworzonej ze środków odcinków tych normalnych zawartych między osią rzędnych i wyznaczającymi je punktami paraboli. Sporządzić rysunek.