

---

## PRACA KONTROLNA nr 3

grudzień 2001r

1. Dla jakich wartości  $\sin x$  liczby  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\sin 2x$  (w podanym porządku) są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Wyznaczyć czwarte wyrazy tych ciągów.
2. W pewnych zawodach sportowych startuje 16 drużyn. W eliminacjach są one losowo dzielone na 4 grupy po 4 drużyny każda grupa. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że trzy zwycięskie drużyny z poprzednich zawodów znajdą się każda w innej grupie.
3. Nie wykonując dzielenia udowodnić, że wielomian  $(x^2 + x + 1)^3 - x^6 - x^3 - 1$  dzieli się bez reszty przez trójmian  $(x + 1)^2$ .
4. Wyznaczyć równanie okręgu o promieniu  $r$  stycznego do paraboli  $y = x^2$  w dwóch punktach. Dla jakiego  $r$  zadanie ma rozwiązanie? Sporządzić rysunek przyjmując  $r = 3/2$ .
5. Stosując zasadę indukcji matematycznej udowodnić prawdziwość wzoru

$$\binom{2}{2} - \binom{3}{2} + \binom{4}{2} - \binom{5}{2} + \dots + \binom{2n}{2} = n^2, \quad n \geq 1.$$

6. Rozwiązać nierówność:

$$\log_x(1 - 6x^2) \geq 1.$$

7. Środek  $S$  okręgu wpisanego w trapez  $ABCD$  jest odległy od wierzchołka  $B$  o  $SB = d$ , a krótsze ramię  $\overline{BC}$  ma długość  $BC = c$ . Punkt styczności okręgu z krótszą podstawą dzieli ją w stosunku 1:2. Obliczyć pole tego trapezu. Wykonać rysunek dla  $c=5$  i  $d=4$ .
8. Wszystkie ściany równoległościanu są rombami o boku  $a$  i kącie ostrym  $\beta$ . Obliczyć objętość tego równoległościanu. Sporządzić rysunek. Obliczenia poprzeć stosownym dowodem.