

LIGA MATEMATYCZNA
im. Zdzisława Matuskiego
FINAŁ
10 kwietnia 2013
SZKOŁA PONADGIMNAZJALNA

ZADANIE 1.

Iloczyn 22 liczb całkowitych jest równy 1. Czy suma tych liczb może być równa 0?

ZADANIE 2.

Rozwiąż układ równań
$$\begin{cases} ab + a + b = 80 \\ bc + b + c = 80 \\ ca + c + a = 80. \end{cases}$$

ZADANIE 3.

Liczyby rzeczywiste a, b spełniają równość $\frac{2a}{a+b} + \frac{b}{a-b} = 2$. Wyznacz wszystkie wartości jakie może przyjmować ułamek $\frac{3a-b}{a+5b}$.

ZADANIE 4.

Wyznacz wszystkie takie pary liczb naturalnych x, y , że wyrażenie $(x-y) - (\sqrt{x} - \sqrt{y})$ jest liczbą pierwszą.

ZADANIE 5.

Na płaszczyźnie danych jest pięć punktów kratowych (są to punkty o współrzędnych będących liczbami całkowitymi). Uzasadnij, że środek jednego z odcinków łączących te punkty też jest punktem kratowym.

ZADANIE 6.

Dane są dwa okręgi styczne zewnętrznie w punkcie K . Odległości K od punktów styczności okręgów ze wspólną styczną są równe 6 i 8. Wyznacz promienie okręgów.

ZADANIE 7.

Wyznacz wszystkie funkcje $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające warunki

- $f(2) = 2$
- $f(xy) = x^2 f(y) + y f(x)$

dla każdych liczb rzeczywistych x, y .