Лабораторная работа № 8

Модель конкуренции двух фирм (Вариант 9)

Сулицкий Богдан Романович НФИбд-02-20

Содержание

Список иллюстраций

Цель работы

Целью данной работы является построение математической модели конкуренции для двух фирм в двух случаях. Построение графиков с помощью представленных уравнений, описивающих случаи.

Задание[1]

1. Изучить модель конкуренции двух фирм
2. Изучить случаи представленные в варианте
3. Построить графики изменения оборотных средств в двух случаях

Теоретические введение[2]:

Для построения модели конкуренции хотя бы двух фирм необходимо рассмотреть модель одной фирмы. Вначале рассмотрим модель фирмы, производящей продукт долговременного пользования, когда цена его определяется балансом спроса и предложения. Примем, что этот продукт занимает определенную нишу рынка и конкуренты в ней отсутствуют.

Обозначим:

N - число потребителей производимого продукта.

S – доходы потребителей данного продукта. Считаем, что доходы всех потребителей одинаковы. Это предположение справедливо, если речь идет об одной рыночной нише, т.е. производимый продукт ориентирован на определенный слой населения.

M – оборотные средства предприятия

τ - длительность производственного цикла

p - рыночная цена товара

$\tilde{p}$ - себестоимость продукта, то есть переменные издержки на производство единицы продукции

δ - доля оборотных средств, идущая на покрытие переменных издержек

k - постоянные издержки, которые не зависят от количества выпускаемой продукции

$Q(S/p)$ – функция спроса, зависящая от отношения дохода S к цене p. Она равна количеству продукта, потребляемого одним потребителем в единицу времени.

Функцию спроса товаров долговременного использования часто представляют в простейшей форме:

$$Q = q - k\frac{p}{S} = q(1 - \frac{p}{p_{cr}})$$

где q – максимальная потребность одного человека в продукте в единицу времени. Эта функция падает с ростом цены и при $p = p_{cr}$ (критическая стоимость продукта) потребители отказываются от приобретения товара. Величина $p_{cr} = Sq/k$. Параметр k – мера эластичности функции спроса по цене. Таким образом, функция спроса является пороговой (то есть, $Q(S/p) = 0$ при $p \geq p_{cr}$) и обладает свойствами насыщения.

Уравнения динамики оборотных средств можно записать в виде:

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{M\delta}{\tau} + NQp - k = -\frac{M\delta}{\tau} + Nq(1 - \frac{p}{p_{cr}})p - k$$

Уравнение для рыночной цены p представим в виде:

$$\frac{dp}{dt} = \gamma(-\frac{M\delta}{\tau\tilde{p}} + Nq(1 - \frac{p}{p_{cr}}))$$

Первый член соответствует количеству поставляемого на рынок товара (то есть, предложению), а второй член – спросу. Параметр γ зависит от скорости оборота товаров на рынке. Как правило, время торгового оборота существенно меньше времени производственного цикла τ. При заданном M уравнение описывает быстрое стремление цены к равновесному значению цены, которое устойчиво.

В этом случае уравнение можно заменить алгебраическим соотношением

$$-\frac{M\delta}{\tau\tilde{p}} + Nq(1 - \frac{p}{p_{cr}}) = 0$$

равновесное значение цены p равно

$$p = p_{cr}(1 - \frac{M\delta}{\tau\tilde{p}Nq})$$

Тогда уравнения динамики оборотных средств приобретает вид

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{M\delta}{\tau}(\frac{p}{p_{cr}} - 1) - M^2(\frac{\delta}{\tau\tilde{p}})^2\frac{p_{cr}}{Nq} - k$$

Это уравнение имеет два стационарных решения, соответствующих условию $dM/dt = 0$

$$\widetilde{M_{1,2}} = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

где

$$a = Nq(1 - \frac{\tilde{p}}{p_{cr}}\tilde{p}\frac{\tau}{\delta}), b = kNq\frac{(\tau\tilde{p})^2}{p_{cr}\delta^2}$$

Получается, что при больших постоянных издержках (в случае $a^2 < 4b$) стационарных состояний нет. Это означает, что в этих условиях фирма не может функционировать стабильно, то есть, терпит банкротство. Однако, как правило, постоянные затраты малы по сравнению с переменными (то есть, $b << a^2$) и играют роль, только в случае, когда оборотные средства малы.

При $b << a$ стационарные значения M равны

$$\widetilde{M_+} = Nq\frac{\tau}{\delta}(1 - \frac{\tilde{p}}{p_{cr}})\tilde{p}, \widetilde{M_-} = k\tilde{p}\frac{\tau}{\delta(p_{cr} - \tilde{p})}$$

Первое состояние $\widetilde{M_+}$ устойчиво и соответствует стабильному функционированию предприятия. Второе состояние $\widetilde{M_-}$ неустойчиво, так, что при $M < \widetilde{M_-}$ оборотные средства падают ($dM/dt < 0$), то есть, фирма идет к банкротству.

По смыслу $\widetilde{M\_}$ соответствует начальному капиталу, необходимому для входа в рынок.

В обсуждаемой модели параметр δ всюду входит в сочетании с τ. Это значит, что уменьшение доли оборотных средств, вкладываемых в производство, эквивалентно удлинению производственного цикла. Поэтому мы в дальнейшем положим: $\delta = 1$, а параметр τ будем считать временем цикла, с учётом сказанного.

Вариант 9

Случай 1

Рассмотрим две фирмы, производящие взаимозаменяемые товары одинакового качества и находящиеся в одной рыночной нише. Считаем, что в рамках нашей модели конкурентная борьба ведётся только рыночными методами. То есть, конкуренты могут влиять на противника путем изменения параметров своего производства: себестоимость, время цикла, но не могут прямо вмешиваться в ситуацию на рынке («назначать» цену или влиять на потребителей каким-либо иным способом.) Будем считать, что постоянные издержки пренебрежимо малы, и в модели учитывать не будем. В этом случае динамика изменения объемов продаж фирмы 1 и фирмы 2 описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{dM_1}{d\Theta} = M_1 - \frac{b}{c_1}M_1M_2 - \frac{a1}{c1}M_1^2$$

$$\frac{dM_2}{d\Theta} = \frac{c_2}{c_1}M_2 - \frac{b}{c_1}M_1M_2 - \frac{a_2}{c_1}M_2^2$$

где

$$a_1 = \frac{p_{cr}}{\tau_1^2\tilde{p}_1^2Nq}$$

$$a_2 = \frac{p_{cr}}{\tau_2^2 \tilde{p}_2^2 N q}$$

$$b = \frac{p_{cr}}{\tau_1^2 \tilde{p}_1^2 \tau_2^2 \tilde{p}_2^2 N q}$$

$$c_1 = \frac{p_{cr} - \tilde{p}_1}{\tau_1 \tilde{p}_1}$$

$$c_2 = \frac{p_{cr} - \tilde{p}_2}{\tau_2 \tilde{p}_2}$$

также введена нормировка $t = c_1 \Theta$

Случай 2

Рассмотрим модель, когда, помимо экономического фактора влияния (изменение себестоимости, производственного цикла, использование кредита и т.п.), используются еще и социально-психологические факторы – формирование общественного предпочтения одного товара другому, не зависимо от их качества и цены. В этом случае взаимодействие двух фирм будет зависеть друг от друга, соответственно коэффициент перед $M_1 M_2$ будет отличаться. Пусть в рамках рассматриваемой модели динамика изменения объемов продаж фирмы 1 и фирмы 2 описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{dM_1}{d\Theta} = M_1 - (\frac{b}{c_1} + 0.0018) M_1 M_2 - \frac{a1}{c1} M_1^2$$

$$\frac{dM_2}{d\Theta} = \frac{c_2}{c_1} M_2 - \frac{b}{c_1} M_1 M_2 - \frac{a_2}{c_1} M_2^2$$

Для обоих случаев рассмотрим задачу со следующими начальными условиями и параметрами

$$M_0^1 = 2.6 \; M_0^2 = 1.9$$

$$p_{cr} = 21 \, N = 24 \, q = 1$$

$$\tau_1 = 17 \, \tau_2 = 20$$

$$\tilde{p}_1 = 14 \, \tilde{p}_2 = 12$$

Выполнение лабораторной работы

Подключаем нужные библиотеки и создаем переменные.(1)

```
using PyPlot
using DifferentialEquations

range = (0, 20) # интервал времени
Pcr = 21 # критическая стоимость продукта
t1, t2 = 17, 20 # длительность производственного цикла каждой фирмы
p1, p2 = 14, 12 # себестоимость продукта для каждой фирмы
N = 24 # число потребителей производимого продукта
q = 1 # максимальная потребность одного человека в продукте в единицу времени
M1, M2 = 2.6, 1.9 # оборот средств каждой фирмы
a1 = Pcr / (t1*t1*p1*p1*N*q)
a2 = Pcr / (t2*t2*p2*p2*N*q)
b = Pcr / (t1*t1*t2*t2*p1*p1*p2*p2*N*q)
c1 = (Pcr - p1) / (t1*p1)
c2 = (Pcr - p2) / (t2*p2)
d = 0.0018 # постоянные издержки
```

Рис. 1: Подключение библиотек и создание переменных

С помощью Differential Equations[3] создадим функции уравнения и визуализации.(2-3)

```
function f1(du, u, p, t) # случа 1
    du[1] = u[1]-(b/c1)*u[1]*u[2]-(a1/c1)*u[1]*u[1]
    du[2] = (c2/c1)*u[2]-(b/c1)*u[1]*u[2]-(a2/c1)*u[2]*u[2]
end

function f2(du, u, p, t) # случай 2
    du[1] = u[1]-(b/c1+d)*u[1]*u[2]-(a1/c1)*u[1]*u[1]
    du[2] = (c2/c1)*u[2]-(b/c1)*u[1]*u[2]-(a2/c1)*u[2]*u[2]
end
```

Рис. 2: Функции уравнение

```
function draw(text) # отображение
    ax = PyPlot.axes()
    ax.set_title(text * " (линейный)")
    ax.plot(time, m1, color="red")
    ax.plot(time, m2, color="blue")
    show()
    clf()
    ax = PyPlot.axes()
    ax.set_title(text * " (параметрический)")
    ax.plot(m1, m2, color="green")
    show()
end
```

Рис. 3: Функция визуализации

Решаем ОДУ для обоих случаев и создаем математические модели.(4)

```
ode = ODEProblem(f1, [M1,M2], range)
sol = solve(ode, dtmax=0.02)
m1 = [u[1] for u in sol.u]
m2 = [u[2] for u in sol.u]
time = [t for t in sol.t]
draw("Случай 1")

ode = ODEProblem(f2, [M1,M2], range)
sol = solve(ode, dtmax=0.02)
m1 = [u[1] for u in sol.u]
m2 = [u[2] for u in sol.u]
time = [t for t in sol.t]
draw("Случай 2")
```

Рис. 4: Решение ОДУ и построение мат. моделей

Результаты:(5-8)

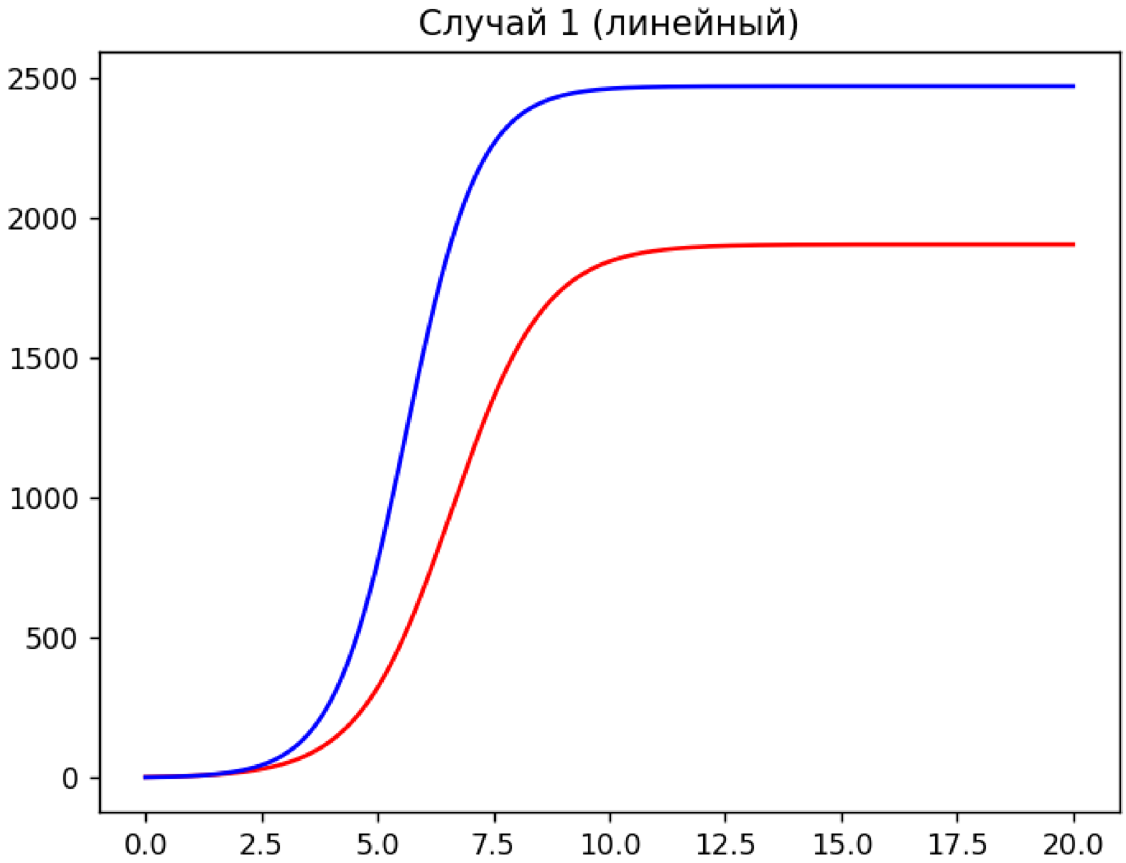

Рис. 5: Математическая модель - I случай

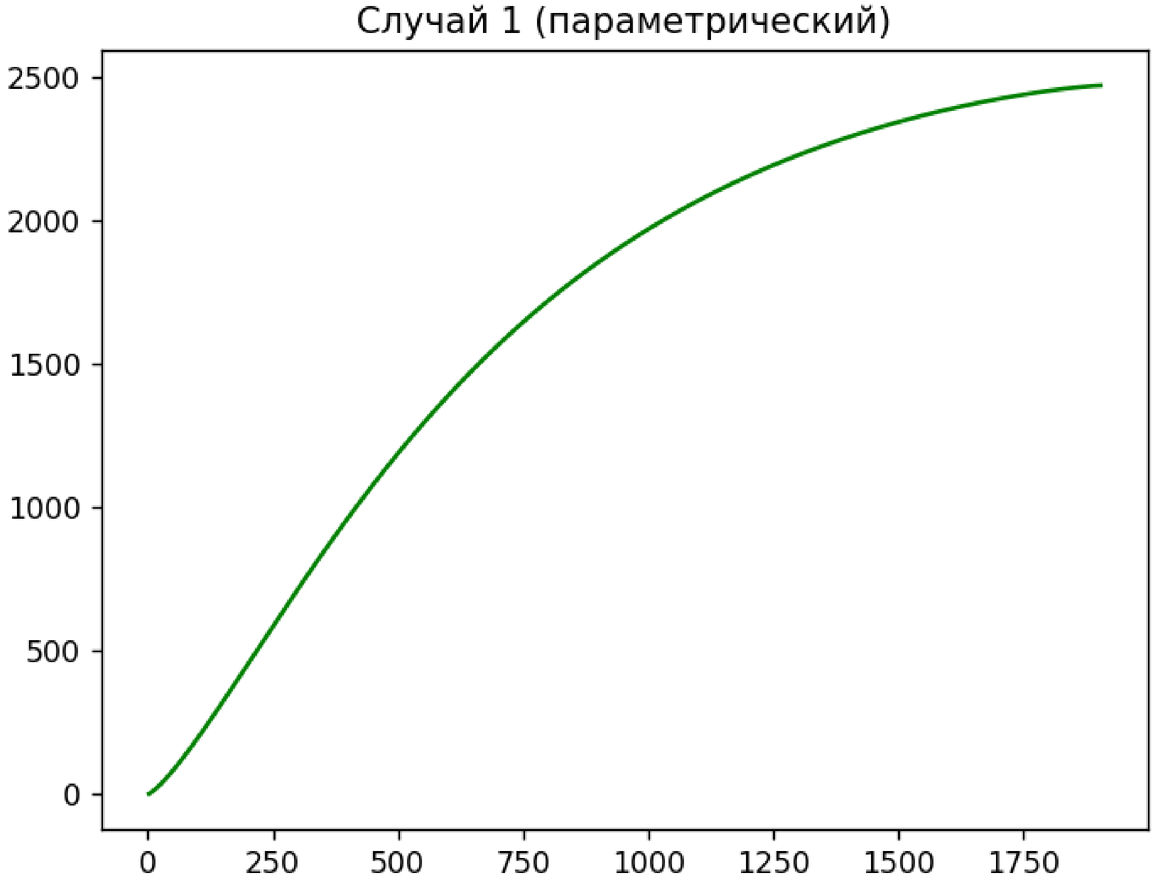

Рис. 6: Математическая модель - I случай(парам.)

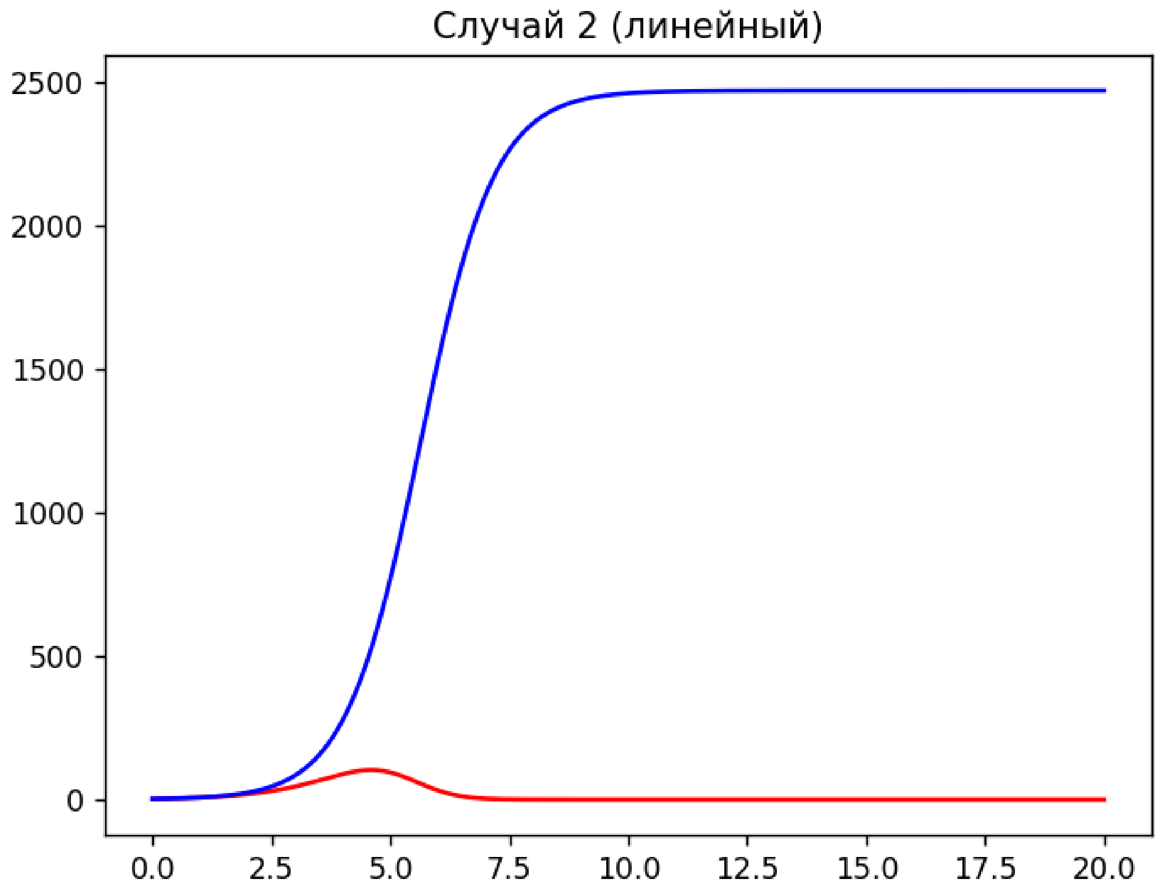

Рис. 7: Математическая модель - II случай

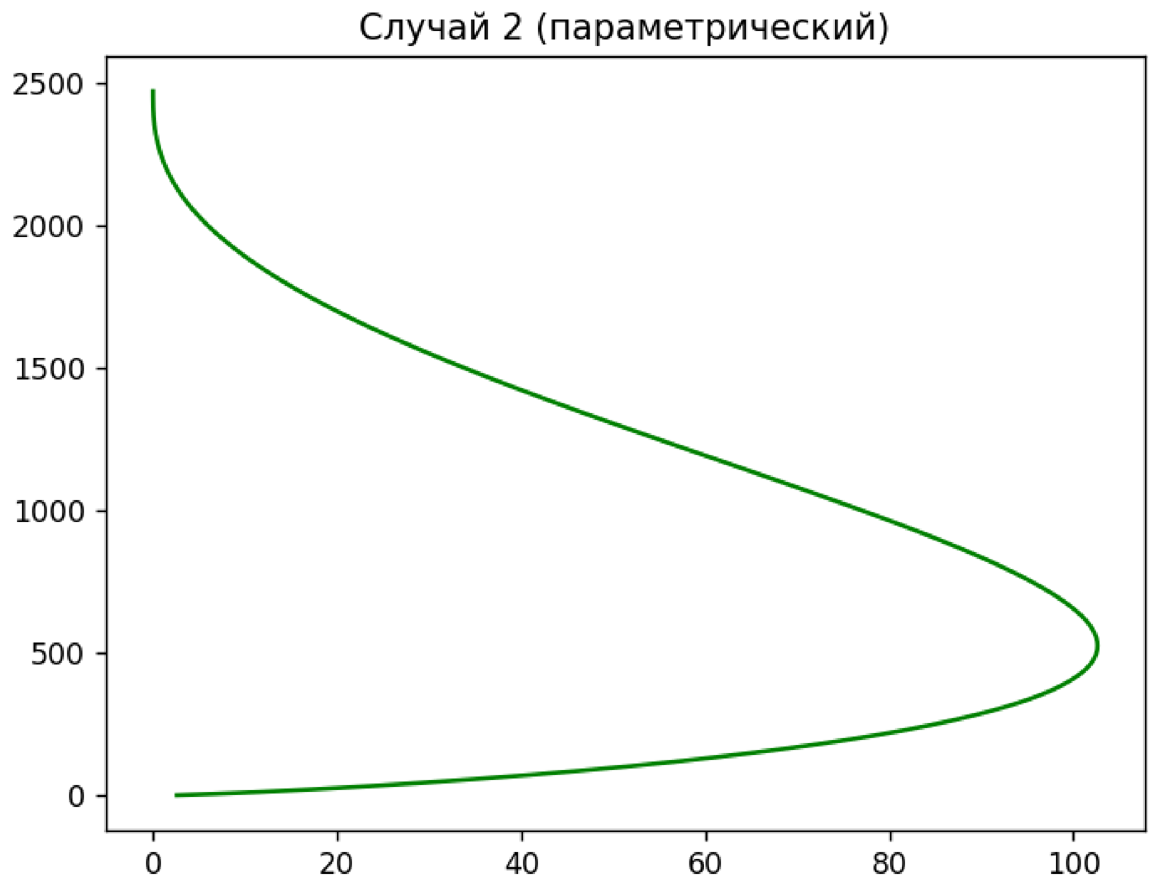

Рис. 8: Математическая модель - II случай(парам.)

Код на OpenModelica

Реализуем код на OpenModelica, указав начальные значения переменных. Далее запишем ОДУ, а также укажем интервалы.(9-10)

```
model model_1

parameter Real p_cr = 21;//критическая стоимость продукта
parameter Real tau1 = 17;//длительность производственного цикла фирмы 1
parameter Real p1 = 14;//себестоимость продукта у фирмы 1
parameter Real tau2 = 20;//длительность производственного цикла фирмы 2
parameter Real p2 = 12; //себестоимость продукта у фирмы 2
parameter Real N = 24; //число потребителей производимого продукта
parameter Real q = 1; //максимальная потребность одного человека в продукте в единицу времени

parameter Real a1 = p_cr/(tau1*tau1*p1*p1*N*q);
parameter Real a2 = p_cr/(tau2*tau2*p2*p2*N*q);
parameter Real b = p_cr/(tau1*tau1*tau2*tau2*p1*p1*p2*p2*N*q);
parameter Real c1 = (p_cr-p1)/(tau1*p1);
parameter Real c2 = (p_cr-p2)/(tau2*p2);

parameter Real d = 0.0018;
Real M1(start=2.6);
Real M2(start=1.9);

equation
  der(M1) = M1-(b/c1)*M1*M2-(a1/c1)*M1*M1;
  der(M2) = (c2/c1)*M2-(b/c1)*M1*M2-(a2/c1)*M2*M2;

  annotation(experiment(StartTime = 0, StopTime = 20, Tolerance = 1e-6, Interval = 0.02));

end model_1;
```

Рис. 9: OpenModelica - I случай

```
model model_2

parameter Real p_cr = 21;//критическая стоимость продукта
parameter Real tau1 = 17;//длительность производственного цикла фирмы 1
parameter Real p1 = 14;//себестоимость продукта у фирмы 1
parameter Real tau2 = 20;//длительность производственного цикла фирмы 2
parameter Real p2 = 12; //себестоимость продукта у фирмы 2
parameter Real N = 24; //число потребителей производимого продукта
parameter Real q = 1; //максимальная потребность одного человека в продукте в единицу времени

parameter Real a1 = p_cr/(tau1*tau1*p1*p1*N*q);
parameter Real a2 = p_cr/(tau2*tau2*p2*p2*N*q);
parameter Real b = p_cr/(tau1*tau1*tau2*tau2*p1*p1*p2*p2*N*q);
parameter Real c1 = (p_cr-p1)/(tau1*p1);
parameter Real c2 = (p_cr-p2)/(tau2*p2);

parameter Real d = 0.0018;
Real M1(start=2.6);
Real M2(start=1.9);

equation
  der(M1) = M1-(b/c1+d)*M1*M2-(a1/c1)*M1*M1;
  der(M2) = (c2/c1)*M2-(b/c1)*M1*M2-(a2/c1)*M2*M2;

  annotation(experiment(StartTime = 0, StopTime = 20, Tolerance = 1e-6, Interval = 0.02));

end model_2;
```

Рис. 10: OpenModelica - II случай

Результаты:(11-14)

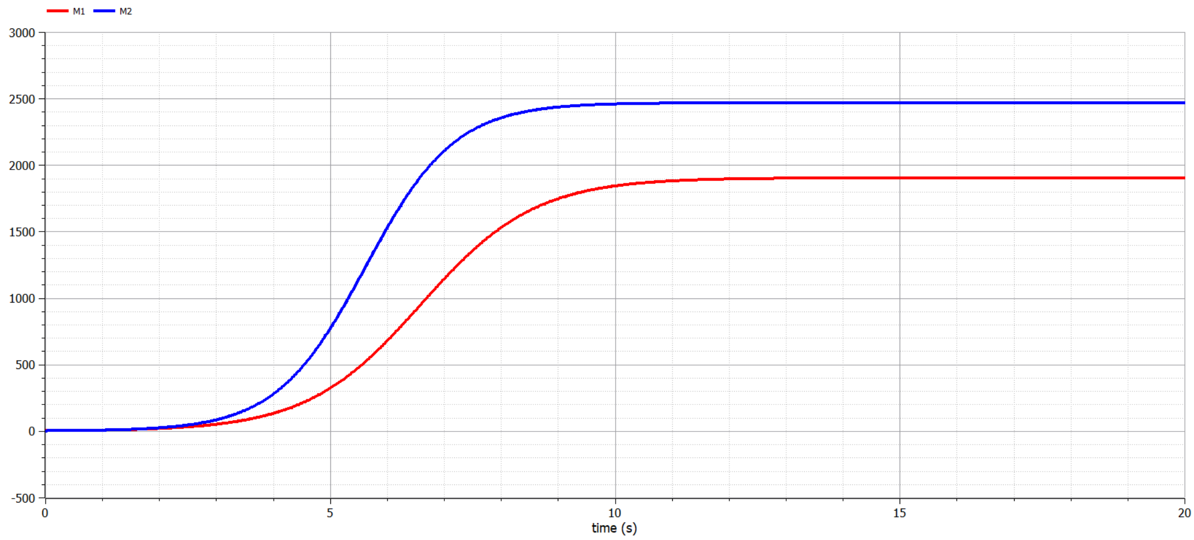

Рис. 11: Математическая модель - I случай

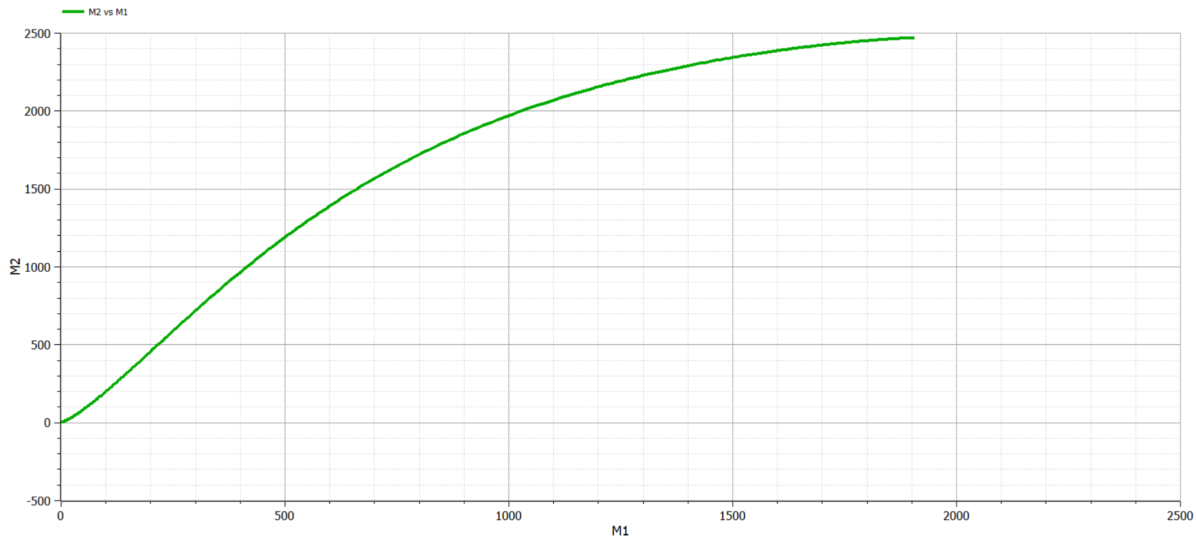

Рис. 12: Математическая модель - I случай(парам.)

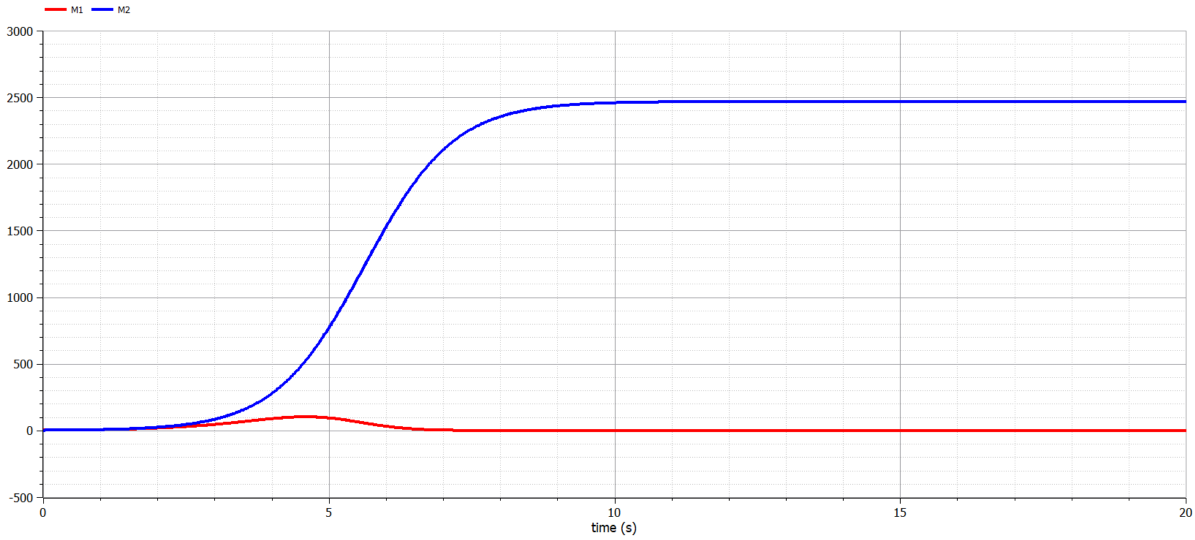

Рис. 13: Математическая модель - II случай

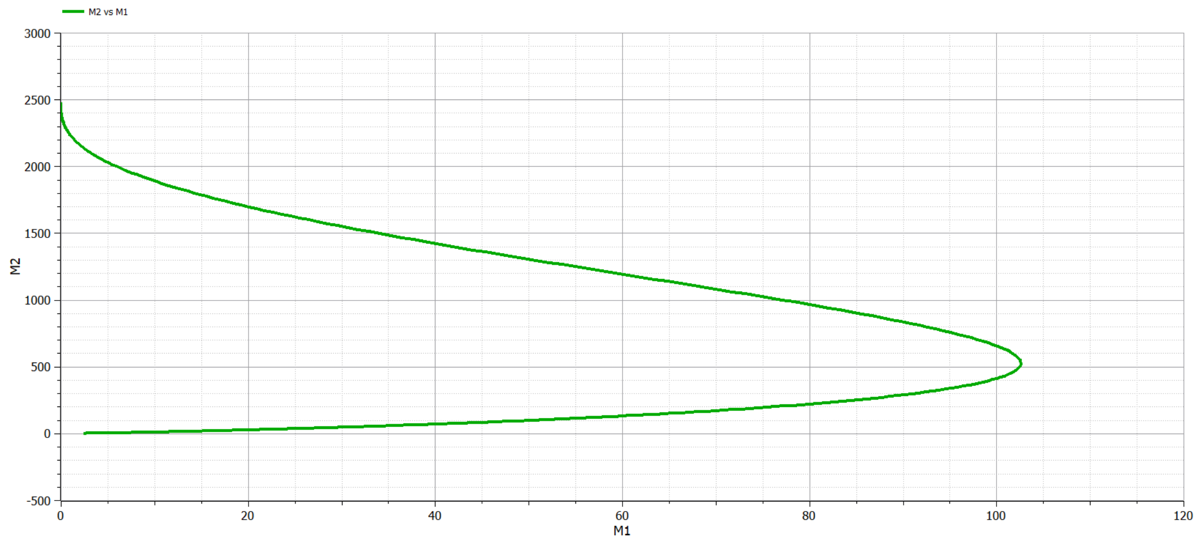

Рис. 14: Математическая модель - II случай(парам.)

Выводы

В ходе выполнения лабораторной работы была изучена модель конкуренции и построены графики для двух фирм в двух случаях.

Список литературы

1. Задания к лабораторной работе №8 (по вариантам) [Электронный ресурс]. RUDN, 2023. URL: https://esystem.rudn.ru/pluginfile.php/1971673/mod_resource/content/2/%D0%97%D0%B0%D0%B4%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%B5%20%D0%BA%20%D0%BB%D0%B0%D0%B1%D0%BE%D1%80%D0%B0%D1%82%D0%BE%D1%80%D0%BD%D0%BE%D0%B9%20%D1%80%D0%B0%D0%B1%D0%BE%D1%82%D0%B5%20%E2%84%96%207.pdf.
2. Лабораторная работа №8 [Электронный ресурс]. RUDN, 2023. URL: https://esystem.rudn.ru/pluginfile.php/1971672/mod_resource/content/2/%D0%9B%D0%B0%D0%B1%D0%BE%D1%80%D0%B0%D1%82%D0%BE%D1%80%D0%BD%D0%B0%D1%8F%20%D1%80%D0%B0%D0%B1%D0%BE%D1%82%D0%B0%20%E2%84%96%207.pdf.
3. DifferentialEquations.jl: Efficient Differential Equation Solving in Julia [Электронный ресурс]. 2023. URL: https://docs.sciml.ai/DiffEqDocs/stable/.