Лабораторная работа № 6

Модель эпидемии SIR (Вариант 9)

Сулицкий Богдан Романович НФИбд-02-20

Содержание

Список иллюстраций

Цель работы

Целью данной работы является построение математической модели эпидемии SIR. Используя условия из варианты, задать в уравнение начальные условия и коэффициенты. После построить графики изменения численностей трех групп в двух случаях.

Задание[1]

1. Изучить модель эпидемии
2. Построить графики изменения числа особей в каждой из трех групп.
3. Рассмотреть, как будет протекать эпидемия в случае: $I(0) \leq I^*, I(0) > I^*$

Теоретические введение[2]:

Рассмотрим простейшую модель эпидемии. Предположим, что некая популяция, состоящая из N особей, (считаем, что популяция изолирована) подразделяется на три группы. Первая группа - это восприимчивые к болезни, но пока здоровые особи, обозначим их через $S(t)$. Вторая группа – это число инфицированных особей, которые также при этом являются распространителями инфекции, обозначим их $I(t)$. А третья группа, обозначающаяся через $R(t)$ – это здоровые особи с иммунитетом к болезни. До того, как число заболевших не превышает критического значения I^*, считаем, что все больные изолированы и не заражают здоровых. Когда $I(t) > I^*$, тогда инфицирование способны заражать восприимчивых к болезни особей.

Таким образом, скорость изменения числа $S(t)$ меняется по следующему закону:

$$\frac{dS}{dt} = \begin{cases} -\alpha S & \text{,если } I(t) > I^* \\ 0 & \text{,если } I(t) \leq I^* \end{cases}$$

Поскольку каждая восприимчивая к болезни особь, которая, в конце концов, заболевает, сама становится инфекционной, то скорость изменения числа инфекционных особей представляет разность за единицу времени между заразившимися и теми, кто уже болеет и лечится. Т.е.:

$$\frac{dI}{dt} = \begin{cases} \alpha S - \beta I & \text{,если } I(t) > I^* \\ -\beta I & \text{,если } I(t) \leq I^* \end{cases}$$

Рассмотрим скорость изменения выздоравливающих особей, которые при этом приобретают иммунитет к болезни:

$$\frac{dR}{dt} = \beta I$$

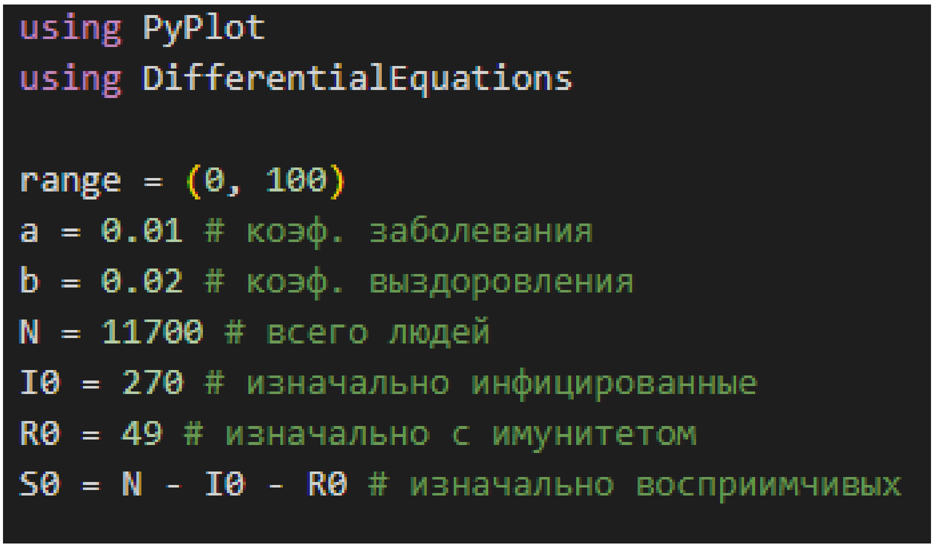
Постоянные пропорциональности α, β - это коэффициенты заболеваемости и выздоровления соответственно. Для того, чтобы решения соответствующих уравнений определялось однозначно, необходимо задать начальные условия. Считаем, что на начало эпидемии в момент времени $t = 0$ нет особей с иммунитетом к болезни $R(0) = 0$, а число инфицированных и восприимчивых к болезни особей $I(0)$ и $S(0)$ соответственно. Для анализа картины протекания эпидемии необходимо рассмотреть два случая: $I(0) \leq I^*$ и $I(0) > I^*$

На одном небольшом острове вспыхнула эпидемия. Известно, что из всех проживающих на острове $(N = 15500)$ в момент начала эпидемии $(t = 0)$ число заболевших людей (являющихся распространителями инфекции) $I(0) = 115$. Число здоровых людей с иммунитетом к болезни $R(0) = 15$. Таким образом, число людей восприимчивых к болезни, но пока здоровых, в начальный момент времени $S(0) = N - I(0) - R(0)$. Постройте графики изменения числа особей в каждой из трех групп. Рассмотрите, как будет протекать эпидемия в случае: 1. $I(0) \leq I^*$ 2. $I(0) > I^*$

Выполнение лабораторной работы

Код на Julia

Подключаем нужные библиотеки и создаем переменные.(1)



```
using PyPlot
using DifferentialEquations

range = (0, 100)
a = 0.01 # коэф. заболевания
b = 0.02 # коэф. выздоровления
N = 11700 # всего людей
I0 = 270 # изначально инфицированные
R0 = 49 # изначально с имунитетом
S0 = N - I0 - R0 # изначально восприимчивых
```

Рис. 1: Подключение библиотек и создание переменных

С помощью Differential Equations[3] создадим функции уравнения и визуализации.(2-3)

```
function f1(du, u, p, t)
    du[1] = 0
    du[2] = -b*u[2]
    du[3] = b*u[2]
end

function f2(du, u, p, t)
    du[1] = -a*u[1]
    du[2] = a*u[1]-b*u[2]
    du[3] = b*u[2]
end
```

Рис. 2: Функции уравнение

```
function draw(p)
    ax = PyPlot.axes()
    ax.set_title(p)
    ax.plot(time, s, color="red")
    ax.plot(time, i, color="blue")
    ax.plot(time, r, color="green")
    show()
end
```

Рис. 3: Функция визуализации

Решаем ОДУ для обоих случаев и создаем математические модели.(4)

```
ode = ODEProblem(f1, [S0,I0,R0], range)
sol = solve(ode, dtmax=0.02)
s = [u[1] for u in sol.u]
i = [u[2] for u in sol.u]
r = [u[3] for u in sol.u]
time = [t for t in sol.t]
draw("При I(0) <= 0")

ode = ODEProblem(f2, [S0,I0,R0], range)
sol = solve(ode, dtmax=0.02)
s = [u[1] for u in sol.u]
i = [u[2] for u in sol.u]
r = [u[3] for u in sol.u]
time = [t for t in sol.t]
draw("При I(0) > 0")
```

Рис. 4: Решение ОДУ и построение мат. моделей

Результаты:(5-6)

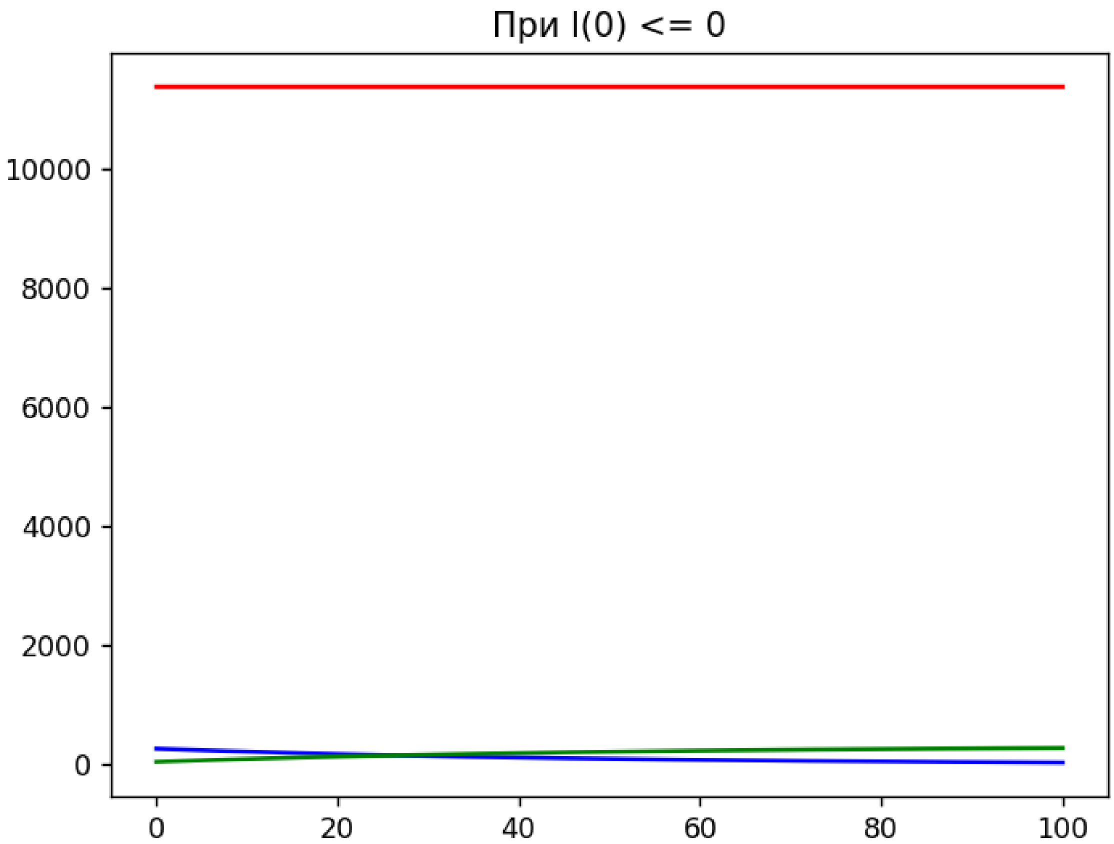


Рис. 5: Математическая модель - I случай

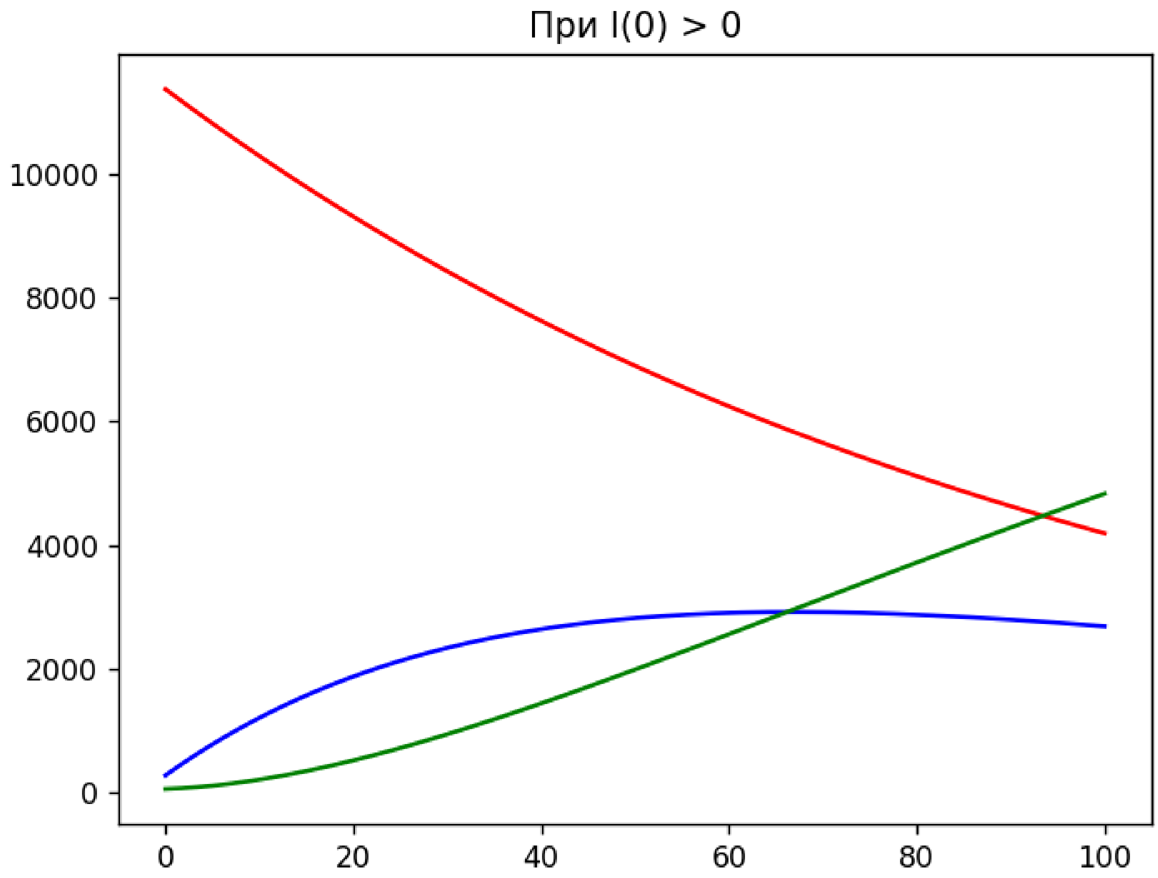


Рис. 6: Математическая модель - II случай

Код на OpenModelica

Реализуем код на OpenModelica, указав начальные значения переменных. Далее запишем ОДУ, а также укажем интервалы.(7-8)

```
model model_1

parameter Real a = 0.01;
parameter Real b = 0.02;
parameter Real N = 15500;
parameter Real I0 = 115;
parameter Real R0 = 15;
parameter Real S0 = N - I0 - R0;
Real S(start=S0);
Real I(start=I0);
Real R(start=R0);

equation
  // случай, когда I(0)<=I*
  der(S) = 0;
  der(I) = -b*I;
  der(R) = b*I;

  annotation(experiment(StartTime = 0, StopTime = 100, Tolerance = 1e-6, Interval = 0.02));

end model_1;
```

Рис. 7: OpenModelica - I случай

```
model model_2

parameter Real a = 0.01;
parameter Real b = 0.02;
parameter Real N = 15500;
parameter Real I0 = 115;
parameter Real R0 = 15;
parameter Real S0 = N - I0 - R0;
Real S(start=S0);
Real I(start=I0);
Real R(start=R0);

equation
  // случай, когда I(0)> I*
  der(S) = -a*S;
  der(I) = a*S - b*I;
  der(R) = b*I;

  annotation(experiment(StartTime = 0, StopTime = 100, Tolerance = 1e-6, Interval = 0.02));

end model_2;
```

Рис. 8: OpenModelica - II случай

Результаты:(9-10)

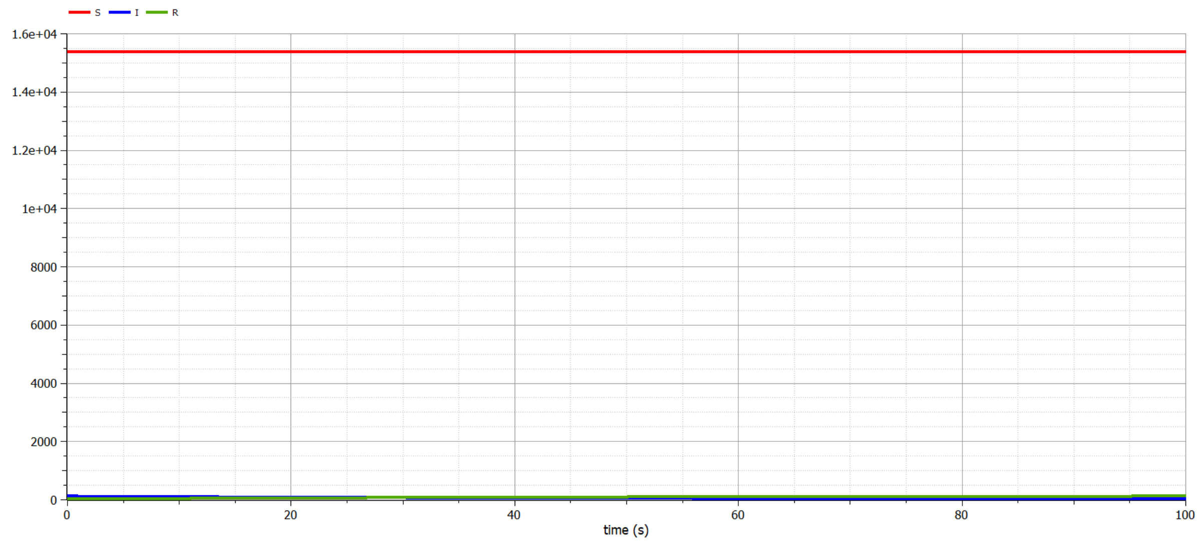


Рис. 9: Математическая модель - I случай

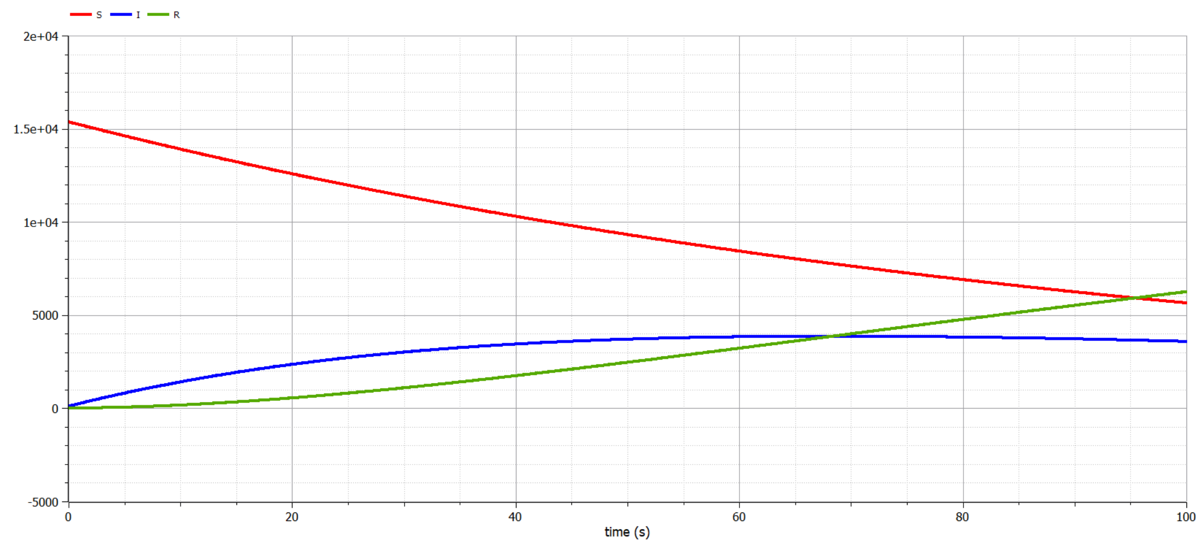


Рис. 10: Математическая модель - II случай

Выводы

В ходе выполнения лабораторной работы была изучена простейшая модель эпидемии и построены графики на основе условий задачи и начальных данных, которые были описаны в варианте лабораторной работы.

Список литературы

1. Задания к лабораторной работе №6 (по вариантам) [Электронный ресурс]. RUDN, 2023. URL: https://esystem.rudn.ru/pluginfile.php/1971665/mod_resource/content/2/%D0%97%D0%B0%D0%B4%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%B5%20%D0%BA%20%D0%BB%D0%B0%D0%B1%D0%BE%D1%80%D0%B0%D1%82%D0%BE%D1%80%D0%BD%D0%BE%D0%B9%20%D1%80%D0%B0%D0%B1%D0%BE%D1%82%D0%B5%20%E2%84%96%207%20%283%29.pdf.
2. Лабораторная работа №6 [Электронный ресурс]. RUDN, 2023. URL: https://esystem.rudn.ru/pluginfile.php/1971664/mod_resource/content/2/Лабораторная%20работа%20№%205.pdf.
3. DifferentialEquations.jl: Efficient Differential Equation Solving in Julia [Электронный ресурс]. 2023. URL: https://docs.sciml.ai/DiffEqDocs/stable/.