

# **Лабораторная работа № 5**

**Модель гармонический колебаний (Вариант 9)**

Сулицкий Богдан Романович

# Содержание

<b>Цели работы</b>	<b>4</b>
<b>Задания</b>	<b>5</b>
<b>Теоретическое введение:</b>	<b>6</b>
<b>Выполнение лабораторной работы</b>	<b>8</b>
Код на Julia: . . . . .	8
Код на OpenModelica . . . . .	14
<b>Вывод</b>	<b>19</b>
<b>Список литературы</b>	<b>20</b>

# Список иллюстраций

1	Система ОДУ по условию . . . . .	6
1	Подключение библиотек и создание переменных . . . . .	8
2	Функции уравнение и визуализации . . . . .	9
3	Решение ОДУ и построение мат. моделей . . . . .	10
4	Математическая модель - I случай . . . . .	11
5	Математическая модель - I случай(парам.) . . . . .	12
6	Математическая модель - II случай . . . . .	13
7	Математическая модель - II случай(парам.) . . . . .	14
8	OpenModelica - I случай . . . . .	15
9	OpenModelica - II случай . . . . .	16
10	Математическая модель - I случай . . . . .	16
11	Математическая модель - I случай(парам.) . . . . .	17
12	Математическая модель - II случай . . . . .	17
13	Математическая модель - II случай(парам.) . . . . .	18

## Цели работы

Целью данной лабораторной работы является построение математической модели хищник-жертва.

# Задания

Для модели «хищник-жертва»:

1. Построить график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв при следующих начальных условиях:  $x_0 = 9$ ,  $y_0 = 29$ .
2. Найти стационарное состояние системы.

## Теоретическое введение:

Простейшая модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва» - модель Лотки-Вольтерры. Данная двухвидовая модель основывается на следующих предположениях:

1. Численность популяции жертв  $x$  и хищников  $y$  зависят только от времени (модель не учитывает пространственное распределение популяции на занимаемой территории).
2. В отсутствии взаимодействия численность видов изменяется по модели Мальтуса, при этом число жертв увеличивается, а число хищников падает.
3. Естественная смертность жертвы и естественная рождаемость хищника считаются несущественными.
4. Эффект насыщения численности обеих популяций не учитывается.
5. Скорость роста численности жертв уменьшается пропорционально численности хищников (1).

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax(t) - bx(t)y(t) \\ \frac{dy}{dt} &= -cy(t) + dx(t)y(t)\end{aligned}$$

Рис. 1: Система ОДУ по условию

В этой модели  $x$  – число жертв,  $y$  – число хищников. Коэффициент  $a$  описывает скорость естественного прироста числа жертв в отсутствии хищников,  $c$  – естественное вымирание хищников, лишенных пищи в виде жертв. Вероятность взаимодействия жертвы и хищника считается пропорциональной как количеству жертв, так и числу самих хищников ( $xy$ ). Каждый акт взаимодействия уменьшает популяцию жертв, но способствует увеличению популяции хищников (члены  $-bxy$  и  $dxu$  в правой части уравнения).

# Выполнение лабораторной работы

## Код на Julia:

Подключаем нужные библиотеки и создаем переменные.(1)

```
using PyPlot
using DifferentialEquations

range = (0, 100)
a = 0.21 # коэф. смертности хищников
b = 0.049 # коэф. прироста жертв
c = 0.41 # коэф. числа хищников
d = 0.031 # коэф. смертности жертв
X = 14
Y = 19
```

Рис. 1: Подключение библиотек и создание переменных

С помощью Differential Equations[1] создадим функции уравнения и визуализации.(2)



```

function f(du, u, p, t)
    du[1] = -a*u[1] + b*u[1]*u[2]
    du[2] = c*u[2] - d*u[1]*u[2]
end

function draw(p)
    ax = PyPlot.axes()
    ax.set_title(p)
    ax.plot(x, y, color="red")
    show()
    clf()
    ax = PyPlot.axes()
    ax.set_title(p)
    ax.plot(time, x, color="blue")
    ax.plot(time, y, color="red")
    show()
end

```

Рис. 2: Функции уравнение и визуализации

Решаем ОДУ для обоих случаев и создаем математические модели.(3)

```

model model_1

parameter Real a = 0.21;
parameter Real b = 0.049;
parameter Real c = 0.41;
parameter Real d = 0.031;

parameter Real x0=14;
parameter Real y0=19;

Real x(start =x0);
Real y(start =y0);

equation
  der(x) = -a*x + b*x*y;
  der(y) = c*y - d*x*y;

  annotation(experiment(StartTime = 0, StopTime = 100, Tolerance = 1e-6, Interval = 0.02));

end model_1;

```

Рис. 3: Решение ОДУ и построение мат. моделей

Результаты:(4-7)

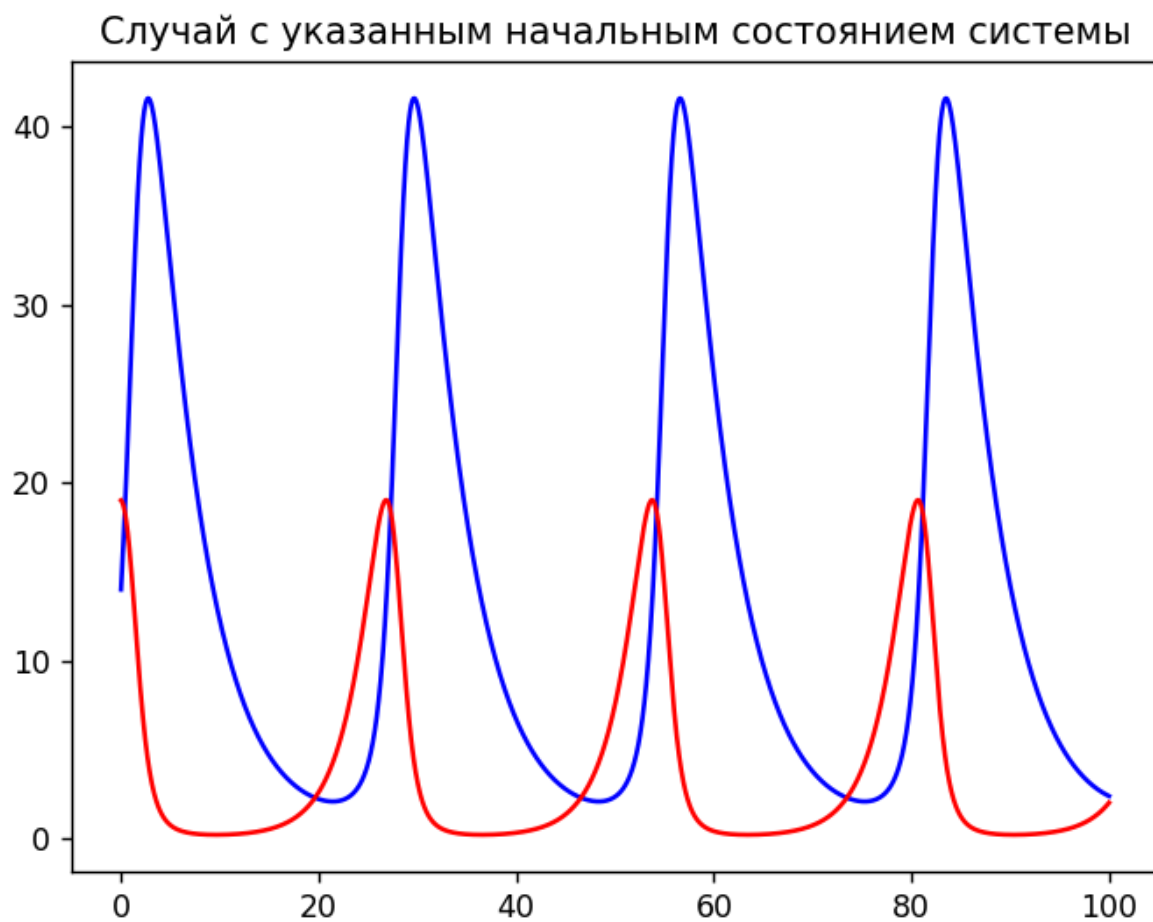


Рис. 4: Математическая модель - I случай



Рис. 5: Математическая модель - I случай(парам.)



Рис. 6: Математическая модель - II случай



Рис. 7: Математическая модель - II случай(парам.)

## Код на OpenModelica

Реализуем код на OpenModelica, указав начальные значения переменных. Далее запишем ОДУ, а также укажем интервалы.(8-9)

```
model model_1

parameter Real a = 0.21;
parameter Real b = 0.049;
parameter Real c = 0.41;
parameter Real d = 0.031;

parameter Real x0=14;
parameter Real y0=19;

Real x(start =x0);
Real y(start =y0);

equation
  der(x) = -a*x + b*x*y;
  der(y) = c*y - d*x*y;

  annotation(experiment(StartTime = 0, StopTime = 100, Tolerance = 1e-6, Interval = 0.02));

end model_1;
```

Рис. 8: OpenModelica - I случай

```
model model_2
```

```
parameter Real a = 0.21;  
parameter Real b = 0.049;  
parameter Real c = 0.41;  
parameter Real d = 0.031;
```

```
parameter Real x0=c/d;  
parameter Real y0=a/b;
```

```
Real x(start =x0);  
Real y(start =y0);
```

```
equation  
der(x) = -a*x + b*x*y;  
der(y) = c*y - d*x*y;
```

```
annotation(experiment(StartTime = 0, StopTime = 100, Tolerance = 1e-6, Interval = 0.02));
```

```
end model_2;
```

Рис. 9: OpenModelica - II случай

Результаты:(10-13)

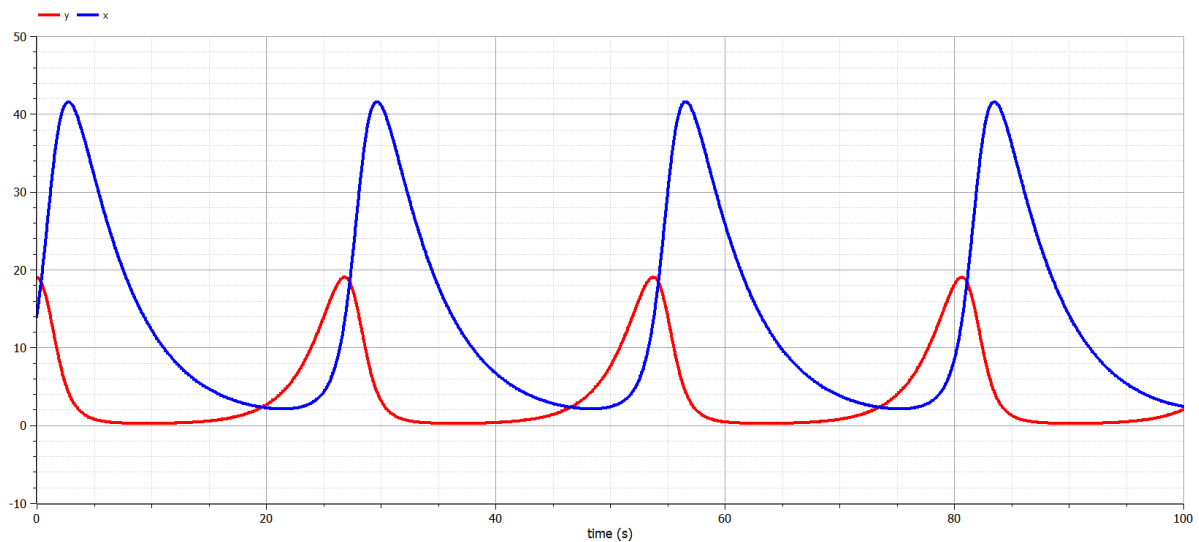


Рис. 10: Математическая модель - I случай



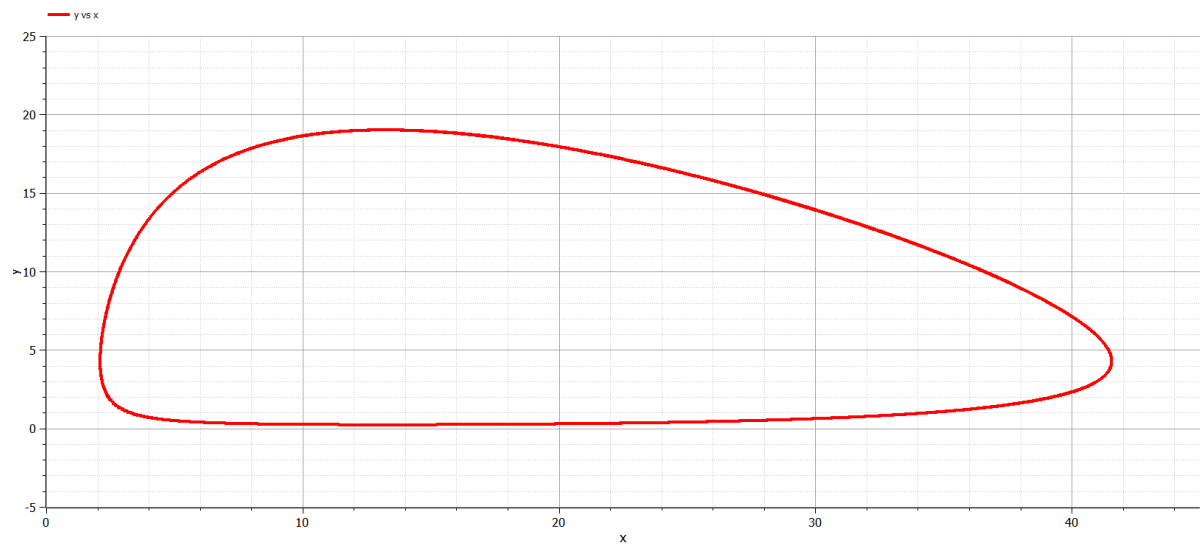


Рис. 11: Математическая модель - I случай(парам.)

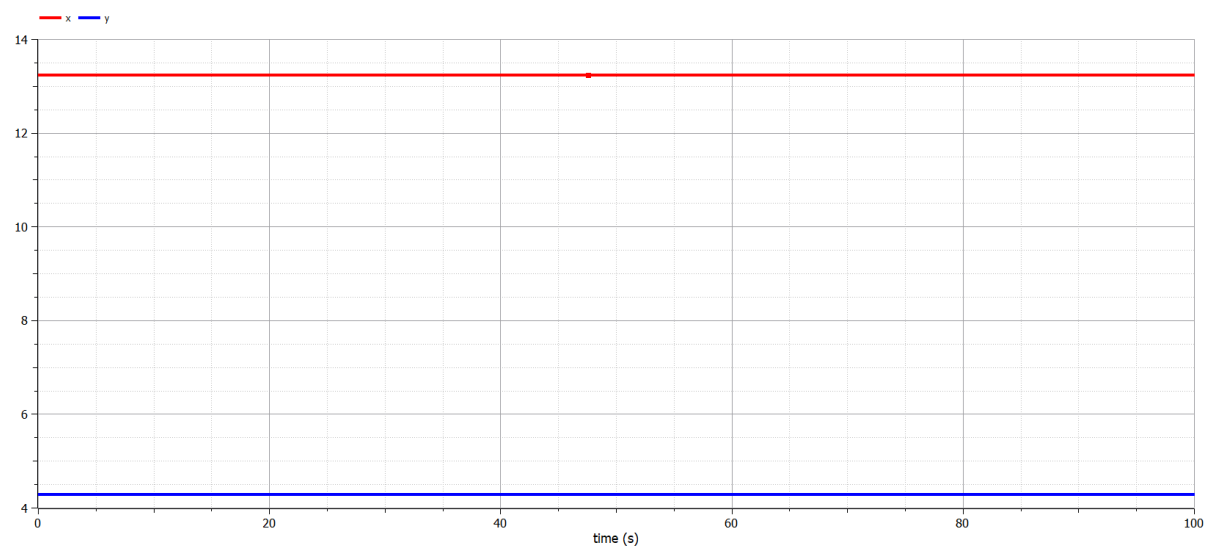


Рис. 12: Математическая модель - II случай

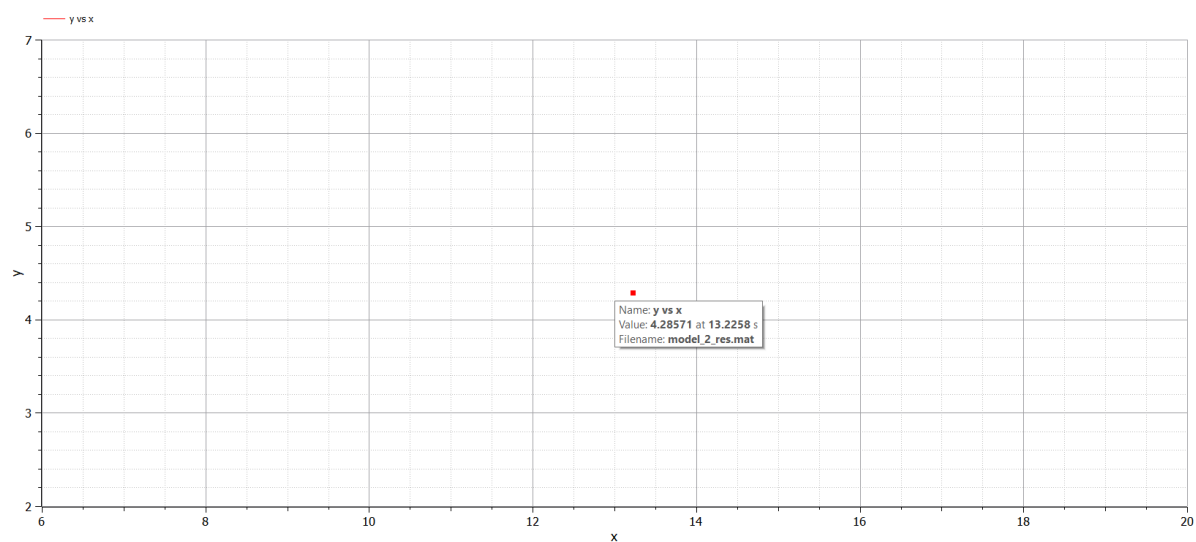


Рис. 13: Математическая модель - II случай(парам.)

## Вывод

В результате проделанной работы был написан код на Julia и OpenModelica и были построены математические модели: график зависимости численности хищников от численности жертв, а также график зависимости численности хищников и численности жертв от времени в стационарной системе.

## Список литературы

1. DifferentialEquations.jl: Efficient Differential Equation Solving in Julia [Электронный ресурс]. 2023. URL: <https://docs.sciml.ai/DiffEqDocs/stable/>.