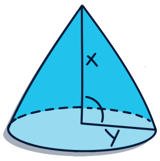


Géométrie dans l'espace [1]

Spécialité Maths

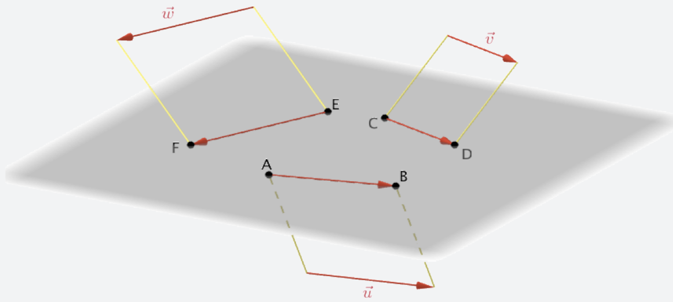
Vecteurs de l'espace

- ✧ Mêmes propriétés que dans le plan (définition, somme, Chasles, produit, colinéarité, vecteur nul et opposé)
- ✧ Mêmes règles de calcul que dans $\mathbb{R}$: somme associative/commutative, $\vec{0}$ neutre en addition, $-\vec{v}$ opposé de $\vec{v}$, distributivité...
- ✧ $\vec{v}$ est une combinaison linéaire de $(\vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_n})$ si $\vec{v} = (k_1\vec{u_1} + k_2\vec{u_2} + ... + k_n\vec{u_n})$

Coplanarité

Des points, des droites ou des vecteurs sont coplanaires s'ils sont inclus dans le même plan

• $\vec{u}\,\vec{v}\,\vec{w}$ coplanaires $\iff a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}\ (a;b;c) \in \mathbb{R}^3_*$
$\iff \vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \qquad (\lambda;\mu) \in \mathbb{R}^2$



• 4 points A, B, C, D de l'espace sont coplanaires $\iff$ les vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

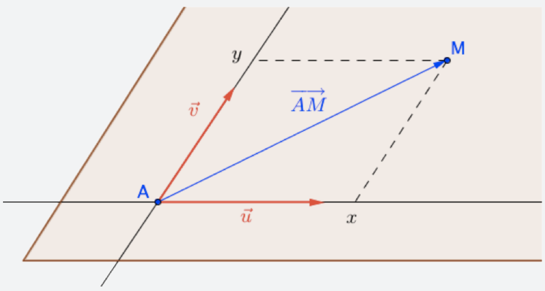
• Soit les points A et $B \in \mathcal{P}$. Pour tout point $C \in \mathcal{P}$, la parallèle à (AB) passant par C est incluse dans $\mathcal{P}$

Plans de l'espace

• Le plan $\mathcal{P}$ passant par A et dirigé par les vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient coplanaires.
On a donc $M \in \mathcal{P} \iff \overrightarrow{AM} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

$(A;\vec{u};\vec{v})$ = repère de $\mathcal{P}$ et $(\vec{u};\vec{v})$ = base de $\mathcal{P}$

• A, B, C non alignés définissent un unique plan (ABC)



Projections orthogonales et distances

• Le projeté orthogonal de A sur la droite d est le point $H \in d$ tq la droite (AH) soit perpendiculaire à la droite d

• Le projeté orthogonal de A sur le plan $\mathcal{P}$ est le point $H \in \mathcal{P}$ tq (AH) soit orthogonale au plan $\mathcal{P}$.
H = point de $\mathcal{P}$ le + proche de A. AH = distance de A à $\mathcal{P}$

Colinéarité et droites

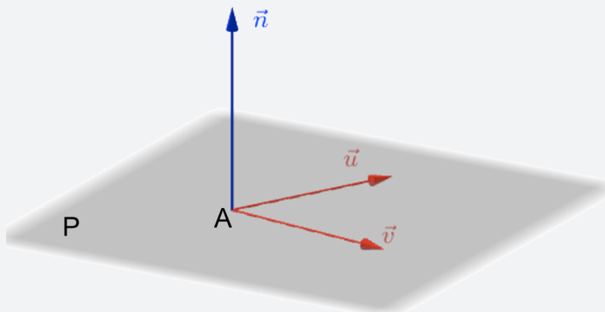
- ✧ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires $\iff a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{0} \qquad (a;b) \in \mathbb{R}^2$
  $\vec{u} = k\vec{v} \qquad k \in \mathbb{R}$
- ✧ Comme dans le plan,
  $(AB)//(CD) \iff \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires
  A, B et C sont alignés $\iff \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires
- ✧ Soit une droite d et $\vec{u} \neq \vec{0}$. $\vec{u}$ est un vecteur directeur de $d \iff \exists(A;B) \in d$ tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$
- ✧ Un vecteur $\vec{v}$ est aussi directeur de $d \iff \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires
- ✧ Soit $A \in d \qquad M \in d \iff \overrightarrow{AM} = k\vec{u} \qquad d = (A, \vec{v})$

Produit scalaire

- ✧ Le produit scalaire dans l'espace possède les mêmes propriétés que celui dans le plan (méthodes de calcul, symétrie, bilinéarité, identités rq et de polarisation..)
- ✧ $\vec{u} \perp \vec{v}$ (orthogonaux) $\iff \vec{u}.\vec{v} = \vec{0}$

Vecteur normal à un plan

Un vecteur non nul $\vec{n}$ est normal $\mathcal{P}$ si $\vec{n}$ est orthogonal à tout vecteur de $\mathcal{P}$. $\vec{n}$ est normal à $\mathcal{P} \iff \vec{n}$ est orthogonal à 2 vecteurs d'une base de $\mathcal{P}$.
Soit un point A et un vecteur $\vec{n}$ non nul de l'espace. L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$ est le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.



• La droite Δ dirigée par $\vec{v}$ est parallèle à $\mathcal{P} \iff \vec{v} \perp \vec{n}$
• Δ est orthogonale à $\mathcal{P} \iff \vec{v} = k\vec{n}$ (colinéaires)

• 2 plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ de vecteurs normaux $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont parallèles ou confondus $\iff \vec{n} = k\vec{n'}$ (colinéaires)
• $\mathcal{P} \perp \mathcal{P}'$ (perpendiculaires) $\iff \vec{n} \perp \vec{n'}$ (orthogonaux)

Orthogonalité de vecteurs et de droites

2 droites sont orthogonales :
si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux
si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux

(1) Δ dirigée par $\vec{u}$ est orthogonale au plan $\mathcal{P}$: $(\Delta \perp \mathcal{P})$
$\iff \vec{u}$ est orthogonal à tt vecteur de $\mathcal{P}$ ($\vec{u}$ normal à $\mathcal{P}$)
$\iff \Delta$ est orthogonale à toute droite de $\mathcal{P}$
$\iff \Delta$ est orthogonale à deux droites sécantes de $\mathcal{P}$