Probabilités discrètes

Spécialité Maths

sullyvan.fr

Successions d'épreuves indépendantes

Soit n expériences aléatoires modélisées par des probas $P_1, P_2, ..., P_n$ sur des univers $\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_n$.
Ces n expériences = indépendantes si, $\forall$ expérience, la proba d'une issue ne dépend pas des résultats obtenus lors des expériences précédentes. Supposons ces n expériences comme indépendantes. On peut alors considérer cette succession d'expériences aléatoires comme UNE expérience sur $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times ... \times \Omega_n$ dont l'issue sera un n-uplet : $(x_1, x_2, ..., x_n)$
$\forall (x_1, x_2, ..., x_n) \in \Omega, \quad P((x_1, x_2, ..., x_n)) = P_1(x_1)P_2(x_2)...P_n(x_n)$

Probabilités conditionnelles

Probabilité conditionnelle de l'évènement B sachant que l'évènement A est réalisé : $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ avec $P(A) \neq 0$ et $0 \leqslant P_A(B) \leqslant 1$

Loi des noeuds : $P_A(B) + P_A(\overline{B}) = 1$

Équiprobabilité : $P_A(B) = \dfrac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(A)}$

	B	$\overline{B}$	Somme
A	$P(A \cap B)$	$P(A \cap \overline{B})$	P(A)
$\overline{A}$	$P(\overline{A} \cap B)$	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$	P($\overline{A}$)
Somme	$P(B)$	$P(\overline{B})$	1

Probabilités composées : $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$

Probabilités totales avec $\{A_1,\ A_2,\ \dots,\ A_n\}$ formant une partition de Ω :

$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B)$

$P(B) = P(A_1)P_{A_1}(B) + P(A_2)P_{A_2}(B) + \cdots + P(A_n)P_{A_n}(B)$

Somme de variables aléatoires

$E_n = (X_1, X_2, .., X_n)$: échantillon de taille n de variables aléatoires indépendantes suivant une même loi.
Soit $S = X_1 + X_2 + ... + X_n$

$E(S) = E(X_1) + E(X_2) + ... + E(X_n)$
$V(S) = V(X_1) + V(X_2) + ... + V(X_n)$

Soit E_n un échantillon de taille n de $\mathcal{B}(p)$. S suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$.

Épreuve de Bernoulli

Expérience à deux issues : « succès » S de probabilité p et « échec » $\overline{S}$ de probabilité $q = 1 - p$

Loi de Bernoulli : $\mathcal{B}(p)$

$P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = 1 - p$

$E(X) = p$

$V(X) = pq$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Loi binomiale

Répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. X compte le nombre de succès.

Loi binomiale suivie par X : $\mathcal{B}(n; p)$

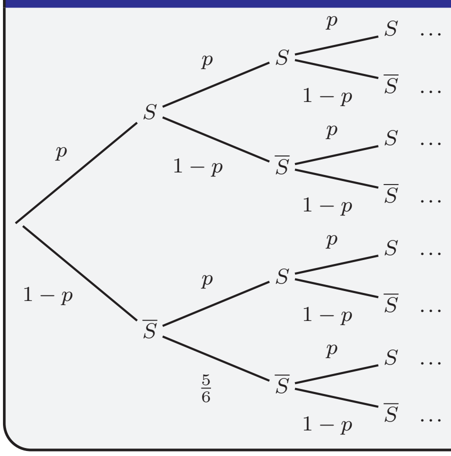
$\forall k \in [\![0; n]\!], P(X = k) = \dbinom{n}{k} p^k q^{n-k}$

$E(X) = np$

$V(X) = npq$

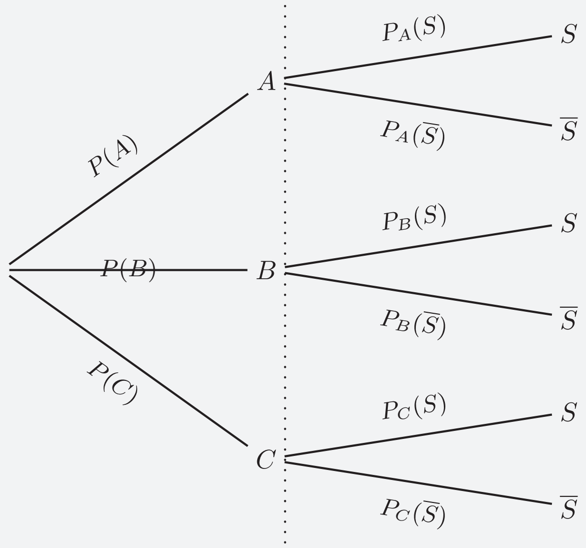
$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Schéma de Bernoulli



Arbre de probabilité

probabilités simples — *probabilités conditionnelles* — *probabilités composées* — *probabilités totales*



$P(A \cap S) = P(A) \times P_A(S)$

$P(A \cap \overline{S}) = P(A) \times P_A(\overline{S})$

$P(B \cap S) = P(B) \times P_B(S)$

$P(B \cap \overline{S}) = P(B) \times P_B(\overline{S})$

$P(C \cap S) = P(C) \times P_C(S)$

$P(C \cap \overline{S}) = P(C) \times P_C(\overline{S})$

$P(S) =$
$P(A \cap S) + P(B \cap S) + P(C \cap S)$

$P(\overline{S}) =$
$P(A \cap \overline{S}) + P(B \cap \overline{S}) + P(C \cap \overline{S})$