Limites de fonctions

Spécialité Maths

sullyvan.fr

Comportement au voisinage de $\pm\infty$

Soit f une fonction définie au voisinage de $\pm\infty$:

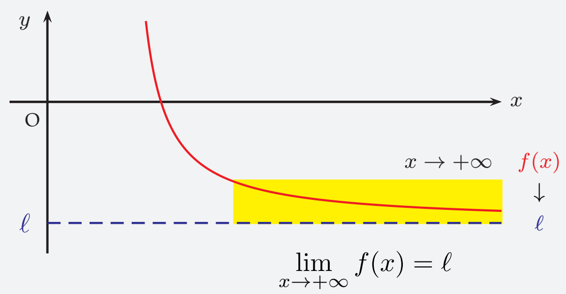
- ✧ f **converge** en $\pm\infty$ s'il $\exists\ \ell \in \mathbb{R}$ tq tt intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x suffisamment grand (par valeurs négatives pour $\lim\limits_{x\to-\infty}$), ℓ est alors l'unique limite de f en $\pm\infty$
- ✧ Une fonction **diverge** si elle ne converge pas
- ✧ en $\pm\infty$, f **diverge vers** $\pm\infty$ si $\forall\ A \in \mathbb{R}$, l'intervalle $]A;+\infty[$ ou $]-\infty;A[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x suffisamment grand (par valeurs négatives pour $\lim\limits_{x\to-\infty}$)

Comportement au voisinage de $a \in \mathbb{R}$

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $]b;a[\cup]a;c[\ \in Df$

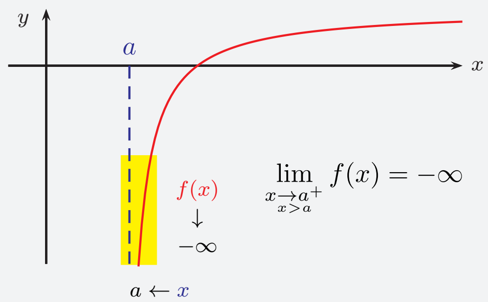
- ⇨ f **converge** en a si $\exists\ell \in \mathbb{R}$ tq tt intervalle ouvert contenant ℓ contient ttes les valeurs $f(x)$ pr x proche de a
- ⇨ f fonction de référence et $a \in Df \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$
- ⇨ une fonction diverge en a si elle ne converge pas en a
- ⇨ f tend vers $\pm\infty$ en a si $\forall A \in \mathbb{R}$, $]A;+\infty[$ ou $]-\infty;A[$ contient ttes les valeurs $f(x)$ pour x assez proche de a
- ⇨ Si la restriction de f à $]a;c[$ ou à $]b;a[$ admet une limite ℓ (finie ou infinie) lorsque $x \to a^{\pm}$, on dit que f admet une limite à droite (par valeurs supérieures) ou à gauche (par valeurs inférieures) en a.

Asymptote horizontale



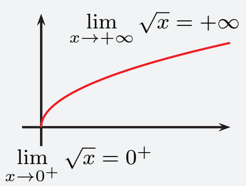
Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \ell$, la droite d'équation $y = \ell$ est une asymptote horizontale à la courbe de f en $+\infty$ ou $-\infty$

Asymptote verticale

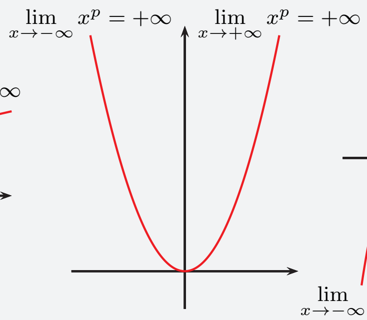


Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe de f

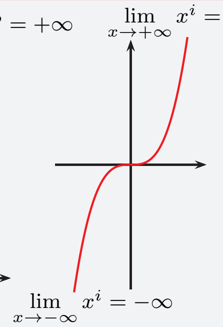
Limites des fonctions usuelles ($p \in \mathbb{N}^*$ = pair, $i \in \mathbb{N}$ = impair)



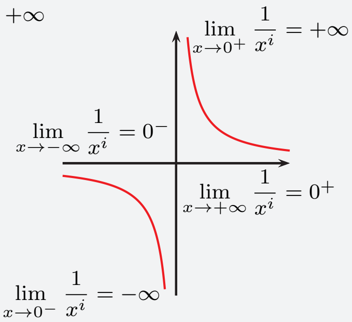
racine carrée



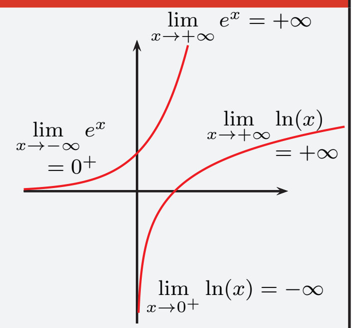
carré



cube



inverse



exp et ln

Opérations sur les limites

$\lim f$	0	0	∞	0	ℓ	ℓ	∞	∞
$\lim g$	0	∞	0	ℓ	0	∞	ℓ	∞
$\lim(f+g)$	0	∞	∞	ℓ	ℓ	∞	∞	∞/FI
$\lim(f\times g)$	0	FI	FI	0	0	∞	∞	∞
$\lim(f\div g)$	FI	0	∞	0	∞	0	∞	FI

$\ell \neq 0$, règle des signes pour les résultats « ∞ »

Théorèmes de comparaison

a désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$. Soit f, g, h 3 fonctions définies au voisinage de a. Si $\forall x$ au voisinage de a :

- ✧ $f(x) \leq g(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$
- ✧ $f(x) \leq g(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$
- ✧ théorème des gendarmes : $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = \ell \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell$