Suites réelles

Spécialité Maths

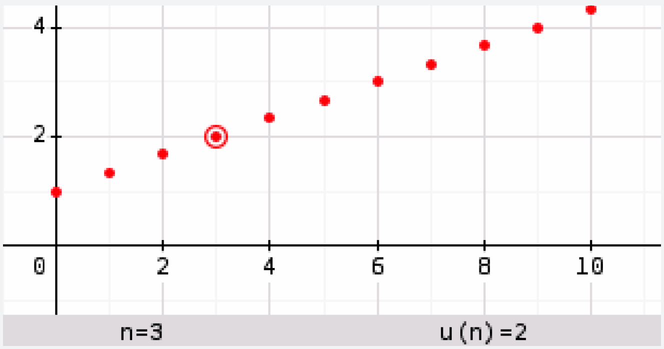
sullyvan.fr

Définition

Une suite (u_n) peut-être définie :

✧ de manière **explicite** : $u_n = f(n)$

✧ par **récurrence** : $\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$



Variations

À partir du rang n_0, la suite (u_n) est :

✓ **monotone** si à partir du rang n_0, (u_n) ne change pas de variation (**strictement** si les inégalités sont strictes)

✓ **croissante** si $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0$: $\boldsymbol{u_{n+1} \geqslant u_n}$

✓ **décroissante** si $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0$: $\boldsymbol{u_{n+1} \leqslant u_n}$

✓ **constante** si $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0$: $\boldsymbol{u_{n+1} = u_n}$

Méthode

Pour déterminer le sens de variation de (u_n) :

✓ comparer directement u_n et u_{n+1}

✓ étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$

✓ comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1

✓ étudier les variations d'une fonction $f(n) = u_n$

✓ utiliser un raisonnement par récurrence

Suites bornées

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

✧ **majorée** ⇔ $\exists M \in \mathbb{R}$ *tq* $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant M$

✧ **minorée** ⇔ $\exists m \in \mathbb{R}$ *tq* $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant m$

✧ **bornée** si elle est majorée et minorée

Propriété :

✧ suite décroissante = majorée par son 1er terme

✧ suite croissante = minorée par son 1er terme

Raisonnement par récurrence

But : montrer qu'une propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$

✧ **Initialisation** : on vérifie que la propriété est vraie au rang n_0

✧ **Hérédité** : on montre que si la propriété est vraie à un rang n fixé, alors elle est encore vraie au rang $n+1$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{Z}, n \geqslant n_0$: $\mathcal{P}(n)$ est vraie

Suites arithmétiques

Récurrence : $u_{n+1} = u_n + r$

Explicite : $u_n = u_0 + nr$ ou $\boldsymbol{u_n = u_p + (n-p)r}$

Somme : nb termes $\times \dfrac{\text{1er terme} + \text{dernier terme}}{2}$

$$S_n = u_0 + \cdots + u_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$$

Suites géométriques

Récurrence : $v_{n+1} = q \times v_n$

Explicite : $v_n = u_0 \times q^n$ ou $\boldsymbol{v_n = v_p \times q^{(n-p)}}$

Somme : 1er terme $\times \dfrac{1 - q^{\text{nb termes}}}{1-q}$

$$S_n = 1 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q}$$

Propriétés

Arithmétique si : $u_{n+1} - u_n = r, r \in \mathbb{R}$

sinon Mq : $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$

Raison : $u_9 = u_5 + 4r$

$4r = u_9 - u_5$

$r = \dfrac{4r}{4}$

1er terme : $u_0 = u_5 - 5r$

Propriétés

Géométrique si : $v_n \neq 0$ et $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = q, q \in \mathbb{R}$

sinon Mq : $\dfrac{v_1}{v_0} \neq \dfrac{v_2}{v_1}$

Raison : $v_7 = v_4 \times q^3$

$q^3 = \dfrac{v_7}{v_5}$

$q = \sqrt[3]{q^3}$

1er terme : $v_4 = v_0 \times q^4$

$v_0 = \dfrac{v_4}{q^4}$