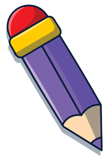


Produit scalaire

Maths Première

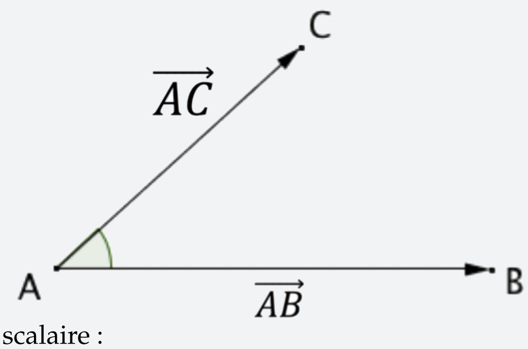
sullyvan.fr

Définition

Soit deux points A et B. La norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$, notée $||\overrightarrow{AB}||$, est la distance AB.

Soit $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ deux vecteurs. On appelle produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ par $\overrightarrow{AC}$, noté $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, le nombre réel défini par :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = ||\overrightarrow{AB}|| \times ||\overrightarrow{AC}|| \times \cos(\widehat{BAC})$$



Carré scalaire :
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2 = ||\overrightarrow{AB}||^2 = AB^2$ et $\overrightarrow{u}^2 = ||\overrightarrow{u}||^2$

Propriétés

- Propriété de symétrie :

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

- Propriétés de bilinéarité :

1) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
2) $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k\vec{u} \cdot \vec{v}$, avec k un nombre réel.

- Identités remarquables :

1) $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$
$\rightarrow$ On peut également noter : $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
2) $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$
3) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

- Identités de polarisation :

1) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$
2) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(-\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 + \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2)$
3) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$

Orthogonalité

Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux $\iff$ $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$

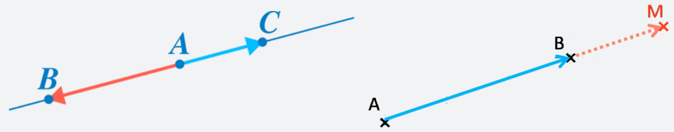
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux $\iff$ les droits(AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Démonstration : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$
$\iff \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} \times \cos(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$
$\iff \cos(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}) = 0$ (en supposant $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non nuls)
$\iff (\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}) = \frac{\pi}{2} = 90°$
$\iff \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux

Vecteurs colinéaires

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ colinéaires de mm sens $\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = AB \times AM$

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires de sens contraire
$\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB \times AC$



Dans un triangle (3 longueurs)

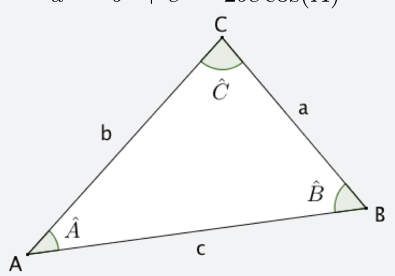
Soit A, B, C trois points. On a :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$$

Cette expression permet de calculer le produit scalaire de 2 vecteurs à partir seulement de 3 longueurs.

Théorème d'Al Kashi :
Dans un triangle rectangle ABC :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\hat{A})$$



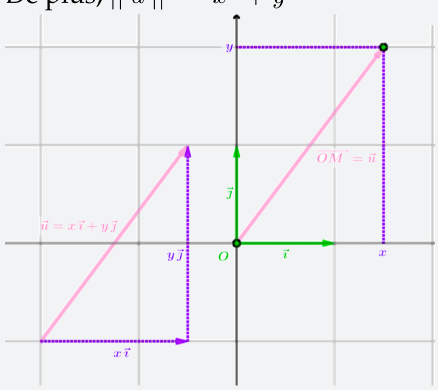
Il permet de calculer une longueur à partir de 2 longueurs et 1 angle.

Dans un repère orthonormé

Soit $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ 2 vecteurs

On a $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy'$

De plus, $||\overrightarrow{u}||^2 = x^2 + y^2$

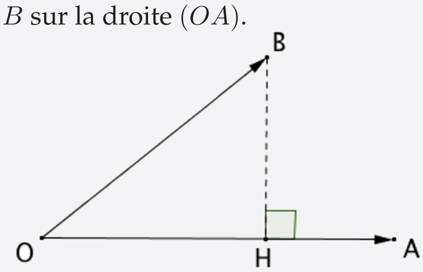


- Théorème de la médiane :

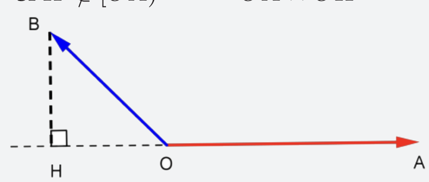
Soit I le milieu d'un segment $[AB]$.
Pour tout point M, on a :
$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$

Projection orthogonale

Soit $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ 2 vecteurs non nuls.
H est le projeté orthogonal du point B sur la droite (OA).



On a : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}$
si $H \in [OA]$ $= OA \times OH$
si $H \notin [OA]$ $= -OA \times OH$



Démo : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HB})$
$= \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}$