Primitives et équa-diff

Spécialité Maths

sullyvan.fr

Primitive

Soit f une fonction définie sur un intervalle I

Primitive de f sur I : tout fonction F définie et dérivable sur I telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$

Théorème

Toute fonction continue f sur un intervalle I admet des primitives sur I.

$f(x) = e^{-x^2}$ définie et continue sur $\mathbb{R}$, donc f admet des primitives (qu'on ne sait pas déterminer explicitement)

Propriété des primitives

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On suppose que f admet une primitive F sur I. Alors,

- f admet une infinité de primitives sur I : ce sont toutes les fonctions de la forme $F + c$ où c est une constante réelle
- si x_0 et y_0 sont deux réels tels que $x_0 \in I$, il existe une et une seule primitive G de f sur I telle que $G(x_0) = y_0$.

Opérations et primitives

Soit f et g deux fonctions définies sur un même intervalle I. On suppose que f admet une primitive F sur I et que g admet une primitive G sur I. Alors,

- $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I
- pour tout réel k, kF est une primitive de kf sur I.

⚠ il n'existe pas de formule pour déterminer une primitive de $f \times g$ ou de $\dfrac{f}{g}$ à partir de F et G.

Tableau primitive (Sous condition d'existence des fonctions)

Fonction composée : $(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u)$

primitive	$kx + c$	$\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$	$-\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$\ln\lvert x\rvert$	$2\sqrt{x}$	e^x	$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$+C$, constante réelle quelconque
	k	x^n	$\dfrac{1}{x^n} = x^{-n}$	$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	e^x	$\sin(x)$	$\cos(x)$	
primitive		$\dfrac{1}{n+1}u^{n+1}$	$-\dfrac{1}{(n-1)u^{n-1}}$	$\ln\lvert u\rvert$	$2\sqrt{u}$	e^u	$\dfrac{1}{a}u(ax+b)$		$+C$, constante réelle quelconque
		$u'u^n$	$\dfrac{u'}{u^n} = u'u^{-n}$	$\dfrac{u'}{u}$	$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$u'e^u$	$u'(ax+b)$		

Équation différentielle

Une équation différentielle est une égalité entre fonctions faisant intervenir une fonction et/ou certaines de ses dérivées sur une certain intervalle I. Dans une telle équation, l'inconnue est une fonction en général notée y.

Exemples :

✧ L'égalité $y' = y$ sur $\mathbb{R}$ est une équation différentielle. Une solution de cette équation est la fonction exponentielle.

✧ Soit f une fonction, $y' = f$ est une équation différentielle. Ses solutions sont les primitives de f sur I.

✧ L'égalité $y'' = -y$ sur $\mathbb{R}$ est une équa-diff du 2nd ordre dont les fonctions sinus et cosinus sont solutions.

✧ Si $f : x \mapsto 4e^{-x}$, l'égalité $y'' + y' + 4y = f$ sur $\mathbb{R}$ est une équa-diff dont une solution est est la fonction $x \mapsto e^{-x}$.

✧ L'égalité $y' = y^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est une équation différentielle dont une solution est la fonction $x \mapsto -\dfrac{1}{x}$.

L'équation $y' = ay + b$

Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors, les solutions de l'équation différentielle $\boldsymbol{(H) : y' = ay}$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $\boldsymbol{t \mapsto Ce^{at}}$ où C est une constante quelconque.

Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$. Alors, les solutions de l'équation différentielle $\boldsymbol{(E) : y' = ay + b}$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $\boldsymbol{t \mapsto Ce^{at} - \dfrac{b}{a}}$ où C est une constante quelconque.

Courbes intégrales

$\forall (x_0 ; y_0) \in \mathbb{R}^2$, $\exists !$ solution f de (E) tel que $f(x_0) = y_0$. 2 solutions différentes de (E) n'ont aucun point commun. On obtient des courbes "intégrales" ayant l'allure suivante.