Composition et continuité

Spécialité Maths

sullyvan.fr

Fonctions composées

$$\underbrace{x \overset{f}{\longmapsto} f(x) \overset{g}{\longmapsto} g\left(f(x)\right)}_{g\circ f}$$

si $\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \\ \lim\limits_{X\to \ell} g(X) = L \end{cases}$

alors $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = L$

Exemples de limites par composition

• $f(x) = \sqrt{\dfrac{4x^2+5x+1}{x^2+1}}$ or $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4x^2+5x+1}{x^2+1}\right) = 4$

On pose $X = \dfrac{4x^2+5x+1}{x^2+1}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{X\to 4}\sqrt{X} = \sqrt{4} = 2$

• $f(x) = \sqrt{x^2-1}$, soit $X = x^2-1$ or $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-1) = +\infty$

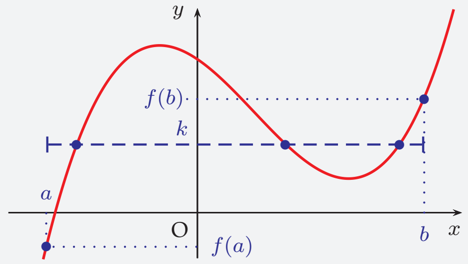
donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X} = +\infty$

Définition de Continuité

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que

1. f est continue en $a \in I$ si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.
2. f est continue sur I si f est continue en tout $a \in I$.

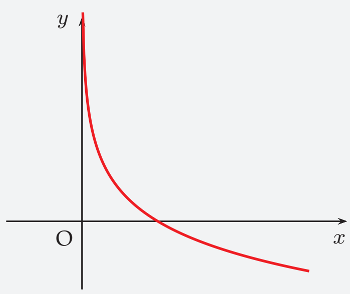
Théorème des valeurs intermédiaires



Si f est une fonction continue sur un intervalle $[\,a\,;\,b\,]$ alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution $\alpha \in [\,a\,;\,b\,]$

Corollaire et extensions du TVI

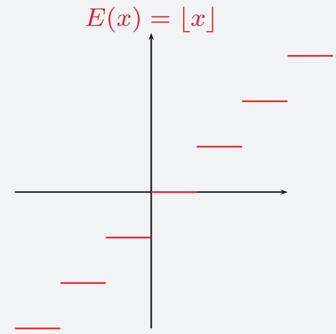
• De plus si f est st. monotone sur $[a;b]$, α est unique



• et si $f(a)\times f(b) < 0$ alors, $\forall k \in]f(a); f(b)[$, $\exists$ unique réel $\alpha \in]a;b[$ tq $f(\alpha) = 0$

• si a et/ou $b \notin I$ mais est une borne de I, on remplace $f(a)$ et/ou $f(b)$ par $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ et/ou $\lim\limits_{x\to b} f(x)$

Fonction partie entière et discontinuité



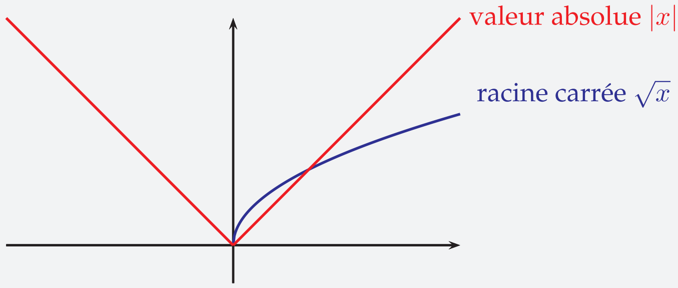
$\forall x \in \mathbb{R}, E(x)$ est l'unique entier k tel que : $k \leqslant x < k+1$.

La fonction partie entière est discontinue sur $[-3;4]$, on ne peut pas la tracer sans lever le crayon.

Lien avec la dérivabilité

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit $a \in I$.

1. Si f est dérivable en a alors f est continue en a.
2. Si f est dérivable sur I alors f est continue sur I.



La réciproque est fausse :

✧ $f(x) = |x|$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ mais non dérivable en 0

✧ $g(x) = \sqrt{x}$ est définie et continue sur $[0;+\infty[$ mais non dérivable en 0 : $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ n'est pas définie en 0

Application du TVI

Démontrons que l'équation $-\ln(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]0;2]$

• Soit $f(x) = -\ln(x)$, on a alors sa dérivée $f'(x) = -\frac{1}{x}$

• f étant dérivable sur $]0;2]$, f est continue sur l'intervalle

• $\forall x \in]0;2]$, $-\frac{1}{x} < 0$ donc f est strictement décroissante

• $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ et $f(2) = -0.7$, or $0 \in]-0.7;+\infty[$,

d'après le coro. du TVI, $\exists$ unique réel $\alpha \in]0;2]$ tq $f(\alpha) = 0$

x	0	α	2
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	0	-0.7