Nombres complexes

Maths Expertes

sullyvan.fr

Ensemble des nombres complexes

Propriétés de l'ensemble $\mathbb{C}$:

- $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- addition et multiplication suivent les mm règles de calcul que dans $\mathbb{R}$
- dans $\mathbb{C}$, $\exists\, i$ tel que $\boldsymbol{i^2 = -1}$

Forme trigonométrique

$$z = |z|\,(\cos\theta + i\sin\theta)$$

✧ Module :

$|z| = \sqrt{z\,\overline{z}} = \sqrt{a^2+b^2}$

✧ Argument :

$\arg(z) = \theta = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM})\,[2\pi]$

$\cos\theta = \dfrac{a}{|z|}$; $\sin\theta = \dfrac{b}{|z|}$

Propriétés du module

✧ $|-z| = |\overline{z}| = |z| = |-\overline{z}|$

✧ $|zz'| = |z|\,|z'|$

✧ $|z^n| = |z|^n$

✧ $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$ et $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$

Propriétés de l'argument

✧ $z \in \mathbb{R} \iff \arg(z) = 0[\pi]$

✧ $z \in i\mathbb{R} \iff \arg(z) = \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

✧ $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)$

✧ $\arg(-z) = -\arg(z) + \pi$

✧ $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\,[2\pi]$

✧ $\arg(z^n) = n\arg(z)\,[2\pi]$

✧ $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\,[2\pi]$

Forme algébrique

$$z = a + ib$$

✧ $(a;b) \in \mathbb{R}^2$

✧ $a = \mathfrak{Re}(z) \to$ partie réelle

$b = \mathfrak{Im}(z) \to$ partie imaginaire

✧ $a = 0 \Rightarrow z \in i\mathbb{R}$: imaginaire pur

$b = 0 \Rightarrow z \in \mathbb{R}$: réel

$z = 0 \iff \mathfrak{Re}(z) = \mathfrak{Im}(z) = 0$

✧ Conjugué : $\overline{z} = a - ib$

Propriétés du conjugué

✧ $\overline{\overline{z}} = z$

✧ $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$

✧ $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$ donc $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$

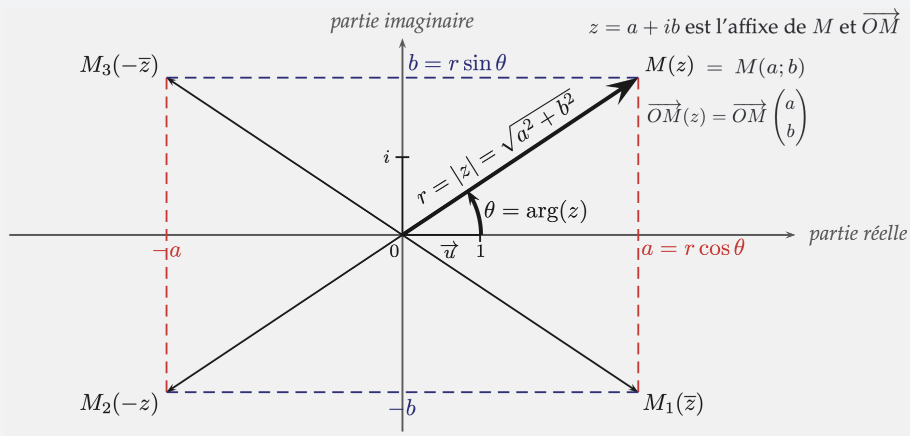
✧ $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ et $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$

✧ $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$

✧ $z \in i\,\mathbb{R} \iff z = -\overline{z}$

✧ Soit $z = a + ib$, $z\overline{z} = a^2 + b^2$

Représentation graphique



Forme exponentielle

$$z = r\,e^{i\theta}$$

✧ $r = |z| > 0$

✧ $\theta = \arg(z)$

✧ $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

✧ $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$

✧ $e^{i\pi} = -1$

✧ $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \iff \theta = \theta'\,[2\pi]$

Propriété de l'exponentielle

✧ $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$

✧ $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$

✧ $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$

✧ $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$

✧ $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$

✧ $e^{i(\theta+k2\pi)} = e^{i\theta}$

Formules trigonométriques

Formules d'addition :

- $\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$
- $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$
- $\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$
- $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$

Formules de duplication :

- $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$
- $\sin(2a) = 2\cos a\sin a$

Formule de Moivre : $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

Formules d'Euler : $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$; $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

$\mathbb{U}$: cercle trigonométrique, centre O, rayon 1

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. Si z appartient à $\mathbb{U}$ alors $a^2 + b^2 = 1$.

Géométrie

✧ $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$ et $AB = |z_B - z_A|$

✧ $z_{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}} = z_{\overrightarrow{u}} + z_{\overrightarrow{v}}$ et $z_{k\overrightarrow{u}} = k \times z_{\overrightarrow{u}}$

✧ $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A)$

✧ $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$

✧ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ orthogonaux $\iff \dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$

✧ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ colinéaires $\iff \dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$

✧ $z_I = \dfrac{z_M + z_N}{2}$: I milieu du segment $[MN]$

✧ $|z - z_A| = r$: cercle de centre A de rayon r

✧ $|z - z_A| = |z - z_B|$: médiatrice de $[AB]$

✧ $\arg(z - z_A) = \theta\,[2\pi]$: demi-droite d'origine A d'angle θ