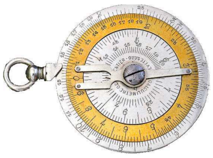


Exponentielle et logarithme

Spécialité Maths

sullyvan.fr

Fonction exponentielle

$f(x) = \exp(x) = e^x$

définie sur $\mathbb{R}$

à valeurs dans $]\,0\,;\,+\infty\,[$

$e^0 = 1$

$e^1 = e \approx 2,718$

$(e^x)' = e^x$

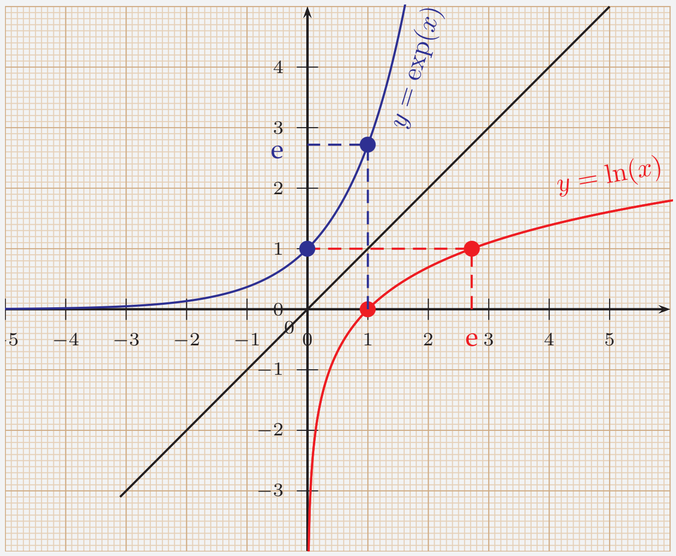
$(e^u)' = u'e^u$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0^+$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

$\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geqslant x+1$

Courbes représentatives



Fonction logarithme

$g(x) = \ln(x)$

définie sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$

à valeurs dans $\mathbb{R}$

$\ln(1) = 0$

$\ln(e) = 1$

$(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$

$(\ln(u))' = \dfrac{u'}{u}$

$\lim\limits_{x\to0^+} \ln(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$

f et g st. croissantes

Propriétés des exponentielles ($a, b, n \in \mathbb{R}$)

- ✧ Produit : $e^a \times e^b = e^{a+b}$
- ✧ Inverse : $\dfrac{1}{e^a} = e^{-a}$
- ✧ Quotient : $\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$
- ✧ Puissance : $(e^a)^n = e^{an}$
- ✧ Racine carrée : $e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

Propriétés des logarithmes ($a, b \in \mathbb{R}^+_*$ et $n \in \mathbb{R}$)

- ✧ Produit : $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
- ✧ Inverse : $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln(a)$
- ✧ Quotient : $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- ✧ Puissance : $\ln(a^n) = n\ln(a)$
- ✧ Racine carrée : $\ln(\sqrt{a}) = \dfrac{1}{2}\ln(a)$

Lien exponentielle - logarithme

La f exponentielle (base e) et la f log (népérien) sont des fonctions réciproques : leurs courbes représentatives sont symétriques par rapport à la 1re bissectrice ($y = x$)

- ✧ $\ln(\exp x) = x$ — $\ln(e^x) = x$
- ✧ $\exp(\ln x) = x$ — $e^{\ln(x)} = x$
- ✧ $\exp x = y \iff x = \ln(y)$ — $e^x = y \iff x = \ln(y)$
- ✧ $x^y = \exp(y\ln(x))$ — $x^y = e^{y\ln(x)}$

Logarithme base b

$\log_b$ a les mêmes propriétés calculatoires que $\ln$ en remplaçant e par b

$\log_b(1) = 0$ et $\log_b(b) = 1$

$b^x = a \iff x = \log_b(a)$

$\forall n \in \mathbb{Z},\ \log_b(b^n) = n$

Équations / inéquations avec exp ($u, v \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}^+_*$)

- ✧ $e^u = e^v \iff u = v$ — $e^u = \lambda \iff u = \ln(\lambda)$
- ✧ $e^u > e^v \iff u > v$ — $e^u > \lambda \iff u > \ln(\lambda)$
- ✧ $e^u \leq e^v \iff u \leq v$ — $e^u \leq \lambda \iff u \leq \ln(\lambda)$
- ✧ $e^u \leq 0$ impossible et $e^u > 0$ toujours vrai

Équations / inéquations avec log ($u, v \in \mathbb{R}^+_*$, $\lambda \in \mathbb{R}$)

- ✧ $\ln(u) = \ln(v) \iff u = v$ — $\ln(u) = \lambda \iff u = e^\lambda$
- ✧ $\ln(u) > \ln(v) \iff u > v$ — $\ln(u) > \lambda \iff u > e^\lambda$
- ✧ $\ln(u) \leq \ln(v) \iff u \leq v$ — $\ln(u) \leq \lambda \iff u \leq e^\lambda$
- ✧ $\ln(u) \leq 0 \iff 0 < u \leq 1$ et $\ln(u) > 0 \iff u > 1$

Croissances comparées ($\forall n \in \mathbb{N}^*$) et Limites particulières

$$\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \qquad \lim_{x\to0+} x^n\ln(x) = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x\to0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$$

Base et dérivée

- $\log_b(x) = \dfrac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$
- $(\log_b(u))' = \dfrac{u'}{\ln(b)u}$