Intégration

Spécialité Maths

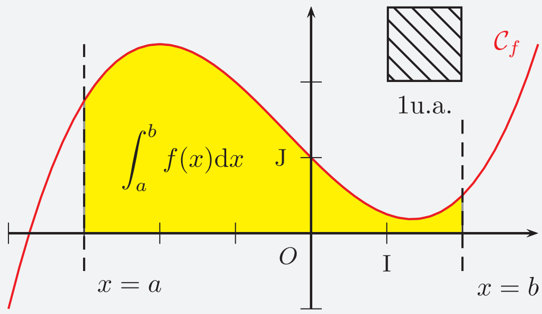
sullyvan.fr

Intégrale d'une fonction continue et positive

Soit f une fonction continue et positive sur $[a;b]$. On définit l'intégrale de a à b de la fonction f comme l'aire sous la courbe C_f i.e. la partie du plan délimitée par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.

On note cette intégrale : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

L'aire est exprimée en unités d'aire (u.a.) qui correspond à l'aire du rectangle de côtés OI et OJ



Intégrale d'une f° continue de signe quelconque

✧ Soit f continue sur $[\,a\,;\,b\,]$, la fonction F définie $\forall x \in [\,a\,;\,b\,]$ par $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f sur $[a;b]$ qui s'annule en a.

✧ Conséquence : $\displaystyle\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)}$

✧ Cas particuliers :

$$\int_c^c f(x)\mathrm{d}x = F(c)-F(c)=0$$

$$m\in\mathbb{R} \Rightarrow \int_a^b m\mathrm{d}x = [mx]_a^b = mb-ma = m(b-a)$$

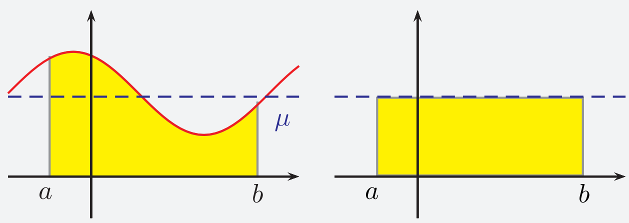
Intégration par parties

- $\displaystyle\int_a^b [u(x)v(x)]'\mathrm{d}x = \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x$
- $\displaystyle[u(x)v(x)]_a^b = \int_a^b u'v(x)\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\boldsymbol{\int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x}$

Valeur moyenne d'une fonction

• Valeur moyenne de f sur $[\,a\,;\,b\,]$: $\displaystyle\boldsymbol{\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)}\,\mathrm{d}x$

μ est la hauteur du rectangle de base $(b-a)$ qui a la même aire que l'aire sous la courbe C_f entre a et b. μ est la constante telle que : $\displaystyle\int_a^b \mu\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$



• Inégalités de la moyenne : $\forall x\in[a;b]$ $\boldsymbol{m \leqslant f(x) \leqslant M}$

$$\Rightarrow \boldsymbol{m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a)}$$

Autrement dit, la valeur moyenne de f est comprise entre le minorant et le Majorant de f.

Propriétés de l'intégrale

f et g sont deux fonctions continues sur $[\,a\,;\,b\,]$:

✧ Linéarité :

$$\int_a^b f(x)+g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \quad (\lambda \text{ un réel quelconque})$$

✧ Positivité et croissance

$$\forall x\in[a;b],\ f(x)\geqslant 0 \Longrightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$$

$$\forall x\in[a;b],\ f(x)\geqslant g(x) \Longrightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

✧ Relation de Chasles et corollaires :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Soit $a\in\mathbb{R}^+$ et f une fonction continue sur [-a ;a]

1. f fonction paire $\Rightarrow \displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$
2. f fonction impaire $\Rightarrow \displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$

Calculs d'aires

• Fonction continue et **négative** : Si $f(x)\leqslant 0\ \forall x\in[a;b]$, l'aire délimitée par C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et

$x=b$ vaut $-\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

• Soit f et g 2 fonctions continues de signes quelconque sur $[a;b]$ tq, $\forall x\in[a;b], f(x)\leqslant g(x)$ $\Rightarrow$ l'aire de la partie du plan délimitée par C_f, C_g, les droites $x=a$ et $x=b$ est $\displaystyle\int_a^b [g(t)-f(t)]\mathrm{d}t$ u.a.