Limites de suites

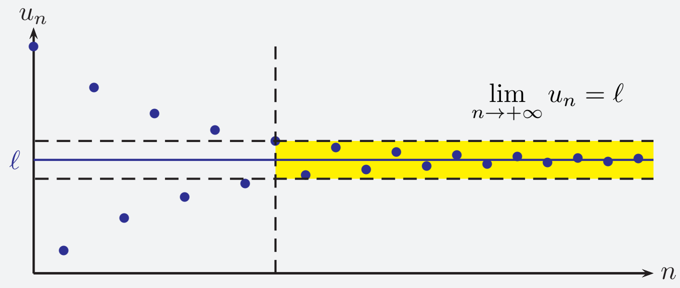
Spécialité Maths

sullyvan.fr

Suite convergente (= limite finie)

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim u_n = \lim u_{n+1} = \ell \in \mathbb{R}$: limite unique

$\Leftrightarrow \exists \ell \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}(n \geqslant N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon)$



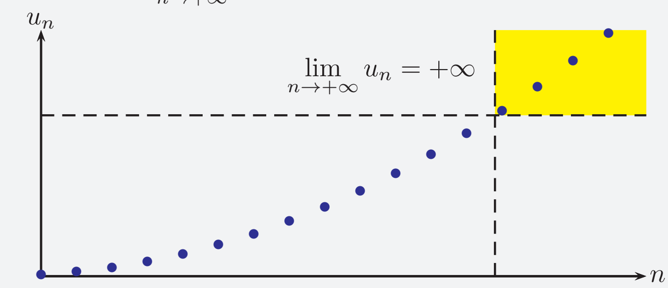
Ex : $\forall \alpha \geqslant 1,\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$

Rq : $f(n) = u_n,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$

Suite divergente

$\Leftrightarrow$ la suite ne converge pas (= n'admet pas de limite finie)

Ex : $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n$ n'existe pas

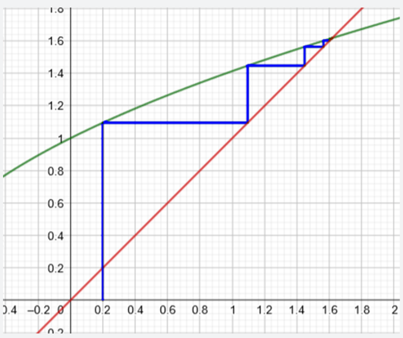


$\lim(u_n) = +\infty \Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R}_+^*\ \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}(n \geqslant N \Rightarrow u_n > A)$

Ex : $\forall \alpha \geqslant 1,\ \lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ $\quad [resp-]$

Rq : $f(n) = u_n,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Image de suite convergente par une fonction continue



Soit $u_n \in I$ avec
$u_{n+1} = f(u_n)$,
f continue sur I

Si $\lim u_n = \ell \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow \lim f(u_n) = f(\ell)$
$\Rightarrow \lim u_{n+1} = f(\ell)$
$\Rightarrow \ell = f(\ell)$

Limites d'une suite géométrique

- ✧ $q \leqslant -1 \quad \Rightarrow \lim q^n$ n'existe pas (diverge)
- ✧ $-1 < q < 1 \quad \Rightarrow \lim q^n = 0$
- ✧ $q = 1 \quad \Rightarrow \lim q^n = 1$
- ✧ $q \geqslant 1 \quad \Rightarrow \lim q^n = +\infty$

Méthode : Factoriser par le terme de plus haut degré

Ex : $\lim \dfrac{n^2 - 1}{n+3} = \lim \dfrac{n^2\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)}{n\left(1 + \dfrac{3}{n}\right)} = \lim n \times \dfrac{1 - \dfrac{1}{n^2}}{1 + \dfrac{3}{n}}$

Théorèmes de comparaisons et encadrement

Si à partir d'un certain rang :

- ✧ $u_n \leqslant v_n$ avec u_n et v_n convergentes vers ℓ et ℓ' alors $\ell \leqslant \ell'$
- ✧ $u_n \leqslant v_n$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$
- ✧ $u_n \leqslant v_n$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$
- ✧ $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$
  alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$

Tip : $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1 \quad -1 \leqslant cos^n \leqslant 1 \quad -1 \leqslant cos^n \leqslant 1$

Théorème des suites monotones

(u_n) croissante non majorée $\Rightarrow \lim u_n = +\infty$
(u_n) décroissante non minorée $\Rightarrow \lim u_n = -\infty$

(u_n) croissante majorée par M $\Rightarrow \lim u_n = \ell \leqslant M$
(u_n) décroissante minorée par m $\Rightarrow \lim u_n = \ell \geqslant m$

Méthode : Rendre rationnel $\sqrt{n} \times \sqrt{n} = n$

Ex : $\lim \dfrac{n}{\sqrt{n}} = \lim \dfrac{n\sqrt{n}}{\sqrt{n} \times \sqrt{n}} = \lim \dfrac{n\sqrt{n}}{n} = \lim \sqrt{n}$

Méthode : Expression conjuguée $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$$\lim(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim \frac{n+1-n}{\sqrt{n(1+\frac{1}{n})} + \sqrt{n}} = \lim \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} \right)$$