Matrices

Maths Expertes

sullyvan.fr

Vocabulaire des matrices

matrice $m \times n$	matrice ligne	matrice colonne	matrice diagonale	matrice unité
$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

$A = (a_{ij})$: matrice de coefficients a_{ij} (ligne i, colonne j) $\quad m = n$: matrice carrée d'ordre $n \quad$ matrice unité : I_n ou I

Opérations avec des matrices

$A = (a_{ij})$ est une matrice de dimension $m \times n$

$B = (b_{ij})$ est une matrice de dimension $p \times q$

Pour tout $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$:

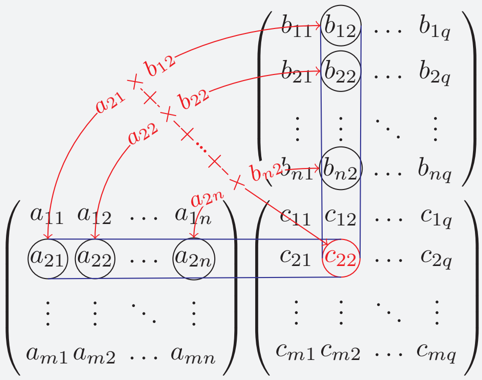
✧ $A = B \iff m = p\,;\, n = q$ et $a_{ij} = b_{ij}$

✧ $C = A + B$ avec $m = p$ et $n = q$: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

✧ $C = kA$: $c_{ij} = ka_{ij}$

✧ $C = A \times B$: $c_{ij} =$ ligne $i_{|A} \times$ colonne $j_{|B}$

✧ $A^n = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ fois}}$ si $n \neq 0$ et $A^0 = I$



$(kA)B = k(AB)$

$ABC = (AB)C$
$\quad = A(BC)$

$A(B + C) = AB + BC$

$(A + B)C = AC + BC$

$AI = IA = A$

⚠ en général :
$AB \neq BA$

Inverse d'une matrice

✧ A matrice carrée inversible $\iff$
il existe B tel que $AB = BA = I$
Notation : $B = A^{-1}$

✧ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ inversible $\iff$
$\det(A) = ad - bc \neq 0$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Résolution d'un système linéaire

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad \vdots \qquad\qquad\quad = \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{B}$$

✧ Écriture : $AX = B$

✧ Condition de solution (unique) : A inversible

✧ Solution : $X = A^{-1}B$

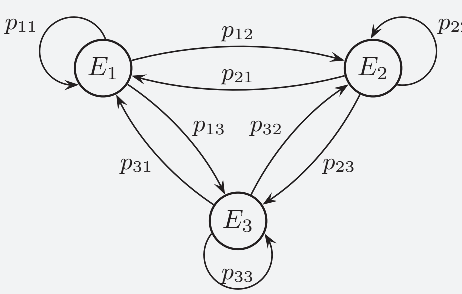
Marche aléatoire

Un système qui a n états possibles $E_1, E_2, \ldots E_n$ qui évolue de l'un à l'autre par étapes successives aléatoires suit une marche aléatoire à n états

On note P_n la matrice ligne associée à la marche aléatoire à l'instant n

$P_n = (P(X_n = E_1)\ P(X_n = E_2)\ \ldots\ P(X_n = E_n))$

graphe probabiliste



matrice de transition

$$T = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$$

avec : $0 \leq p_{ij} \leq 1$ et

$p_{11} + p_{12} + p_{13} = 1$

$p_{21} + p_{22} + p_{23} = 1$

$p_{31} + p_{32} + p_{33} = 1$

✧ $P_{n+1} = P_n \times T \quad$ et $\quad P_n = P_0 \times T^n$

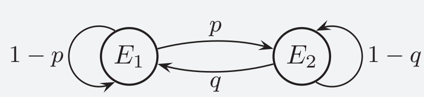
✧ Un état probabiliste P est stable $\iff P \times T = P$

Suites $U_{n+1} = AU_n$

Une suite de matrices converge $\iff$ toutes les suites formant les éléments de cette matrice converge

✧ Si $U_{n+1} = AU_n$ alors $U_n = A^n U_0$

Cas particulier de deux états



$$T = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$$

Si $(p;q) \neq (0;0)$ et $(p;q) \neq (1;1)$ alors P_n converge