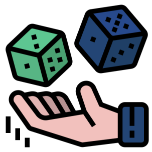

Variables aléatoires

Spécialité Maths

sullyvan.fr

Définition

On considère une expérience aléatoire dont l'univers est un ensemble Ω. Une variable aléatoire X (réelle) sur Ω est une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$.
L'ensemble des valeurs prises par X sur Ω se note $X(\Omega)$

Exemple

Lançons un dé équilibré à 6 faces. Si on a .. on gagne .. :

- 1, 2 ou 3 $\Rightarrow$ -1
- 5 $\Rightarrow$ 1
- 4 $\Rightarrow$ 0
- 6 $\Rightarrow$ 2

On associe donc un nombre (somme d'argent gagnée / perdue) à chaque évènement élémentaire de l'expérience.

Il y a 2 ensembles à distinguer :
- l'univers de l'expérience aléatoire $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- l'ensemble des gains associées $X(\Omega) = E = \{-1, 0, 1, 2\}$

On définit ainsi une fonction de Ω dans E. À chaque élément de Ω, on associe UN nombre appartenant à E.

$X(1) = X(2) = X(3) = -1 \quad X(4) = 0 \quad X(5) = 1 \quad X(6) = 2$

Évènements

Soit une variable aléatoire X définie sur Ω et $a \in \mathbb{R}$.

1. l'évènement $\{X = a\}$ est l'ensemble des éléments t de Ω tq $X(t) = a$
2. l'évènement $\{X \leqslant a\}$ est l'ensemble des éléments t de Ω tq $X(t) \leqslant a$

On définit ainsi les évènements ... et leurs probabilités :
$\{X = a\}$, $\{X \leqslant a\}$, $\{X < a\}$, $\{X \geqslant a\}$ et $\{X > a\}$
$P(X = A)$, $P(X \leqslant a)$, $P(X < a)$, $P(X \geqslant a)$ et $P(X > a)$.

Loi de probabilité

Loi de probabilité de X = donnée des probabilités $P(X = a)$ lorsque a prend toutes les valeurs possibles dans $X(\Omega)$

x_i	x_1	x_2	...	x_k
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_k

Partition de l'univers

Si $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$ alors les évènements $\{X = x_1\}$, $\{X = x_2\}$, ..., $\{X = x_k\}$ forment une partition de Ω.

On a $P(X = x_1) + P(X = x_2) + ... + P(X = x_k) = 1$

Espérance

$$E(X) = \sum_{i=1}^{k} P(X = x_i)x_i = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + ... + x_k \times p_k$$

= valeur moyenne de la var. aléatoire

Un jeu où X compte le gain est :
- équitable si $E(X) = 0$
- favorable si $E(X) > 0$
- défavorable si $E(X) < 0$

Variance

$$V(X) = E((X - E(X))^2) = \sum_{i=1}^{k} P(X = x_i)\,(x_i - E(X))^2$$

moyenne des ^{2} des écarts à la moy.
mesure dispersion autour de la moy.

Somme $X + Y$ et Produit $X \times Y$

Soit X ;Y déf sur $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, , .., \omega_n\}$.

On définit les variables aléatoires somme Z et produit P tq $\forall \omega_i \in \Omega$

$Z(\omega_i) = X(\omega_i) + Y(\omega_i)$

$P(\omega_i) = X(\omega_i) \times Y(\omega_i)$

Écart-type

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Loi de probabilité de $X + Y$

$$P(X + Y = k) = \sum_{i+j=k} P((X = i) \cap (Y = j))$$

Si $\{X = i\}$ et $\{Y = j\}$ sont indépendants :

$$P(X + Y = k) = \sum_{i+j=k} P(X = i) \times (Y = j)$$

Moyenne d'un échantillon

Soit $E_n = (X_1, X_2, ..., X_n)$ un échantillon de taille n de variables aléatoires indépendantes suivant une même loi.

Posons $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$. Soit M_n la variable aléatoire moyenne de E_n. On a $M_n = \frac{1}{n} \times S_n$

$E(M_n) = E(X) \qquad V(M_n) = \frac{1}{n}V(X) \qquad \sigma(M_n) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

$E(S_n) = nE(X) \qquad V(S_n) = nV(X) \qquad \sigma(S_n) = \sqrt{n}\sigma(X)$

Inégalités

de Bienaymé-Tchebychev : $P(|X - E(X)| \geqslant \delta) \leqslant \frac{V(X)}{\delta^2}$

de Concentration : $P\left(|M_n - E(X)| \geqslant \delta\right) \leqslant \frac{V(X)}{n\delta^2}$

Formule de König-Huygens

On note X^2 la variable définie sur Ω par $X^2(t) = [X(t)]^2$ pour tout $t \in \Omega$.
Alors, $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

Loi des grands nombres

$\forall \delta \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} P(|M_n - E(X)| \geqslant \delta) = 0$$

Plus la taille de l'échantillon d'une variable aléatoire X est grande, + l'écart entre la moyenne de cet échantillon et l'espérance de X est faible

Combinaisons linéaires

Soit X définie sur Ω et $(a; b) \in \mathbb{R}$

1. $E(aX + b) = aE(X) + b$
2. $V(aX + b) = V(aX) = a^2V(X)$
3. $\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$
4. $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

Si X et Y sont independantes :

5. $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$

Espérance de $X \times Y$

Si X et Y sont independantes :

6. $E(X \times Y) = E(X) \times E(Y)$