Polynômes

Maths Spé + Expertes

sullyvan.fr

Fonctions polynôme du 2nd degré

Soit $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$ et $a \neq 0$,
on appelle fonction polynomiale les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\boldsymbol{x \mapsto ax^2 + bx + c}$$

Forme canonique

Toute fonction polynôme f de degré 2 peut s'écrire sous la forme

$$\boldsymbol{f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta}$$

$$\alpha = \frac{-b}{2a} \quad \text{et} \quad \beta = f(\alpha)$$

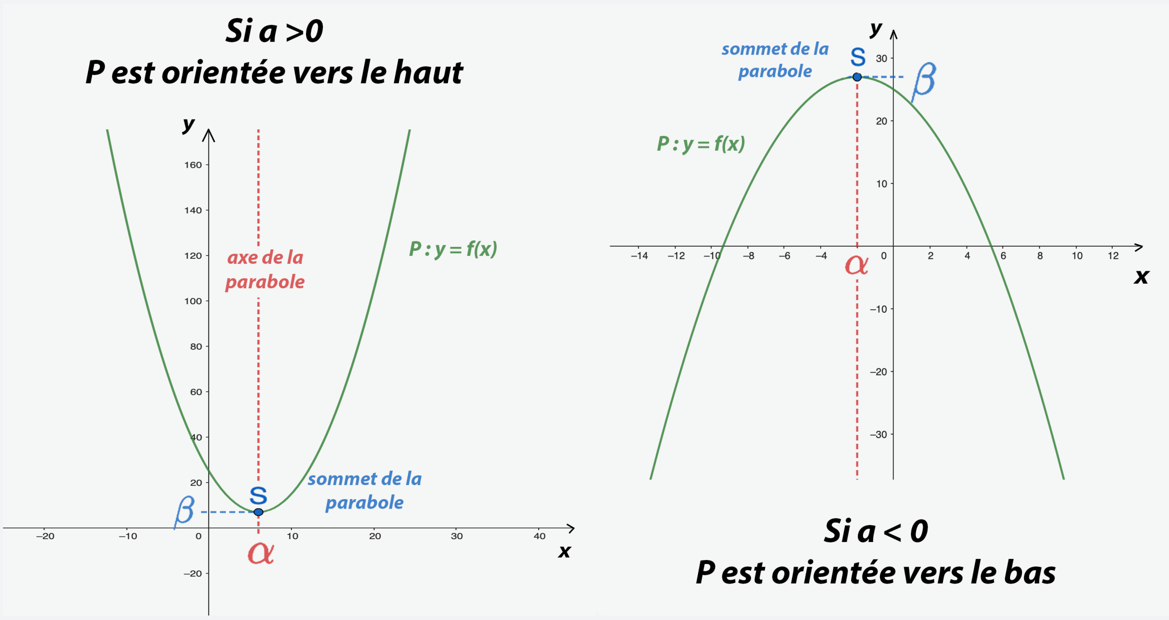
Forme factorisée

Toute fonction polynôme f de degré 2 peut se factoriser sous la forme

$$\boldsymbol{f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)}$$

ou $\boldsymbol{f(x) = a(x - x_0)^2}$

Variations et représentation graphique



Signe d'un polynome

• Racine du trinôme f : tte solution de l'équation $f(x) = 0$
• Le polynome $ax^2 + bx + c$ est toujours du signe de a sauf à l'intérieur des racines quand elles existent.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		Signe de a	0	Signe de $-a$	0	Signe de a	

• f admet un extremum β en $x = \alpha$.
$a > 0 \Rightarrow$ c'est un minimum $\quad a < 0 \Rightarrow$ c'est un maximum

Racines d'un polynome

On appelle discriminant du trinôme le réel $\Delta = b^2 - 4ac$

✧ $\Delta < 0$: pas de racine réelle

✧ $\Delta < 0$: racine-double $\quad x_0 = \dfrac{-b}{2a}$

✧ $\Delta > 0$: 2 racines $\quad x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad$ et $\quad x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 + x_2 : S = -\dfrac{b}{a} \qquad$ et $\qquad x_1 \times x_2 : P = \dfrac{c}{a}$

Formule du binome de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k} \qquad \text{(triangle de Pascal)}$$

$$= \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

Équation du 2nd degré dans $\mathbb{C}$

Si $\Delta < 0$ alors l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \qquad \text{avec } \overline{z_1} = z_2$$

Équation de degré n dans $\mathbb{C}$

Une fonction polynôme P est une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme : $\boldsymbol{P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n}$ où $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont les coefficients réels de P. L'entier n est le degré de P. Un nombre complexe a s'appelle racine de P si $P(a) = 0$ Soit un polynôme P de degré n. Si a est une racine complexe de P, alors il existe un polynôme Q de degré $n - 1$ tel que : $\boldsymbol{P(z) = (z - a)Q(z)}$ Un polynôme de degré n admet au + n racines.