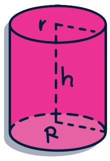


Géométrie dans l'espace ^{2}

Spécialité Maths

sullyvan.fr

Bases et repère de l'espace

• Une base de l'espace est un triplet $(\overrightarrow{i};\overrightarrow{j};\overrightarrow{k})$ où $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ sont 3 vecteurs non coplanaires.

• Tout vecteur $\overrightarrow{s}$ s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$: $\exists(a;b;c)\in\mathbb{R}^3$ tq $\overrightarrow{s}=a\overrightarrow{i}+b\overrightarrow{j}+c\overrightarrow{k}$

•Repère de l'espace : quadruplet $(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j};\overrightarrow{k})$

• orthogonal : si $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont 2 à 2 orthogonaux

• orthonormé : si $||\overrightarrow{i}||=||\overrightarrow{j}||=||\overrightarrow{k}||=1$

$\overrightarrow{u}$ vecteur de l'espace : $\exists(x;y;z)\in\mathbb{R}^3$, $\overrightarrow{u}=x\overrightarrow{i}+y\overrightarrow{j}+z\overrightarrow{k}$
On note $\overrightarrow{u}(x;y;z)$ où $(x;y;z)$ sont les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ dans ce repère. Coordonnées de M = coordonnées de $\overrightarrow{OM}$

$$\overrightarrow{u}=\overrightarrow{v}\iff\begin{cases}x=x'\\y=y'\\z=z'\end{cases}\ ;\ \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{pmatrix}\ ;\ k\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}kx\\ky\\kz\end{pmatrix}$$

Milieu de $[AB]$: $\left(\dfrac{x_B+x_A}{2};\dfrac{y_B+y_A}{2};\dfrac{z_B+z_A}{2}\right)$

Équations de droites et de plans

Écriture vectorielle :

✧ $\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{u}$: droite passant par A de vecteur direct. $\overrightarrow{u}$

✧ $\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{u}+t'\overrightarrow{v}$: plan passant par A de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non colinéaires

✧ $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}=0$: plan passant par A de vecteurs normal $\overrightarrow{n}$

Représentations paramétriques :

• Droite (d) passant A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$:

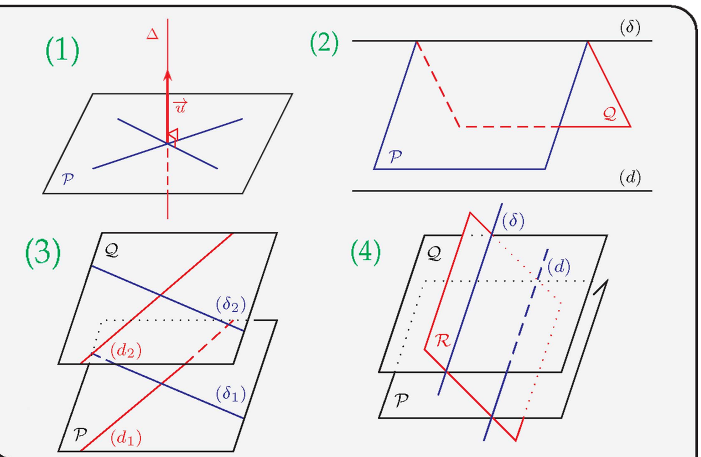
$$M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in d\iff\exists t\in\mathbb{R}\text{ tq }\begin{cases}x=x_A+ta\\y=y_A+tb\\z=z_A+tc\end{cases}\quad\text{avec }\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

• Plan $\mathcal{P}$ passant par A dirigé par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$:

$$\begin{cases}x=x_A+ta+t'a'\\y=y_A+tb+t'b'\\z=z_A+tc+t'c'\end{cases}\quad\text{avec }\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\ \overrightarrow{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}\ t,t'\in\mathbb{R}$$

Equation cartésienne d'un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{ax+by+cz+d=0}$$



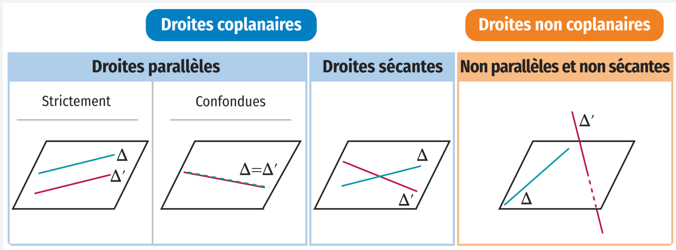
Distance dans un repère orthonormé

✧ $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=xx'+yy'+zz'$

✧ $||\overrightarrow{u}||=\sqrt{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

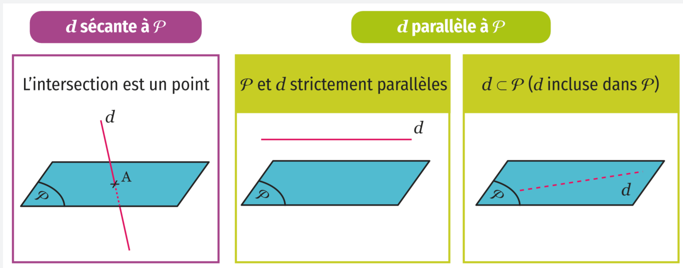
✧ $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

Positions relatives : 2 droites



• Soit $d_1//d_3$. Si $d_2//d_3$ alors $d_1//d_2$

Positions relatives : droite-plan



• Soit d dirigée par $\overrightarrow{w}$. On considère une base $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$ de $\mathcal{P}$. Alors $d//\mathcal{P}\iff(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w})$ sont coplanaires.

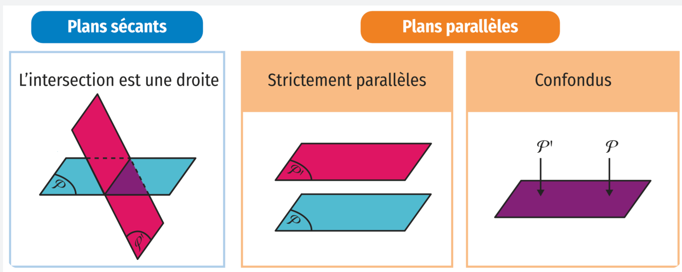
• d parallèle à une droite $d'\subset\mathcal{P}\Rightarrow d$ est parallèle à $\mathcal{P}$

• Si $P_1//P_2$ et si $D//P_1$ alors $D//P_2$

(2) Théorème du toit : Si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont sécants selon une droite δ et si $d//\mathcal{P}$ et $d//\mathcal{Q}$ alors $d//\delta$

• Toit v2 : Soit $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ 2 plans sécants selon une droite Δ avec $d_1\subset\mathcal{P}_1$ et $d_2\subset\mathcal{P}_2$. Alors, Δ est parallèle à d_1 et à d_2

Positions relatives : 2 plans



• 2 plans sont parallèles (ont la même direction) si toute base $(\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{v_1})$ de l'un est aussi une base de l'autre.

(3) Si 2 droites sécantes d'un plan $\mathcal{P}$ sont respectivement parallèles à 2 droites sécantes d'un plan $\mathcal{Q}$, alors $\mathcal{P}//\mathcal{Q}$

• Soit $P_1//P_3$. Si $P_2//P_3$ alors $P_1//P_2$

(4) Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux plans parallèles. Alors, tout plan $\mathcal{R}$ sécant avec $\mathcal{P}$ l'est également avec $\mathcal{Q}$ et les droites d'intersection δ et d sont parallèles