Group: Saruul Altanbagana, Jennifer Mitchell

Übungsblatt08: Gruppenaufgabe 8.3: wp – Kalkül - Tribonacci

Führen Sie die folgenden Beweisschritte zuerst für binom und anschließend für tribo durch:

a) Geben Sie zunächst eine geeignete Schleifenvariante I und Terminierungsfunktion T an, um die totale Korrektheit bezüglich folgender Anforderungen zu beweisen:

Binom

```
long binom (int n, int k) {
  long r = 1;
  for (int i = 1; x ≤ k; x++) {
       r = r * (n - k + x) / x;
  }
       return r;
  }
```

→

```
long binom (int n, int k) {
  long r = 1;
  int x = 1;
  while (x ≤ k) {
     r = r * (n - k + x) / x;
     x++;
  }
       return r;
  }
```

□ $0 \leq k \leq n \quad : r = \quad binom\ (n,\ k) \equiv \left(\frac{n}{k}\right) = \prod_{i=1}^{k} \frac{n-k+i}{i}$

$$I \coloneqq \left(r = \prod_{i=1}^{x-1} \frac{n-k+i}{i} \wedge x \leq k+1 \right)$$

$$T\ (x,\ k) \coloneqq x \leq k+1 \;=\; -x+k+1$$

Reasoning behind:

$$\equiv wp\left("r = r * (n - k + x) / x;\ x = x + 1;",\ x \leq k + 1 \wedge r = \prod_{i=1}^{x-1} \frac{n-k+i}{i} \right)$$

$$\equiv wp\left("r = r * (n - k + x) / x;",\ x + 1 \leq k + 1 \wedge r = \prod_{i=1}^{x-1+1} \frac{n-k+i}{i} \right)$$

$$\equiv wp\left("\ ",\ x \leq k \wedge (r * \frac{(n-k+x)}{x}) = \prod_{i=1}^{x} \frac{n-k+i}{i} \right)$$

$$\equiv wp\left("\ ",\ x \leq k \wedge r = \prod_{i=1}^{x-1} \frac{n-k+i}{i} \right)$$

$$\equiv wp\left((x \leq k+1) \wedge (r = \prod_{i=1}^{x-1} \frac{n-k+i}{i}) \wedge (x \leq k) \right)$$

➢ Die Werte von x, k in T sind ganzzahlig

- Die Variablen k und sind vom Datentyp **int**
- Die Terminierungsfunktion T (x, k) ist nach unten beschränkt, wenn $x \leq k + 1$ gilt
- $T(x, k)$ ist streng monoton fallend

Tribo

$$\forall n, k \geq 0 : \texttt{r = tribo(n,k)} \equiv \sum_{d=0}^{min(n,k)} \binom{k}{d} \cdot \binom{n+k-d}{k}$$

$$I: \equiv r = \sum_{d=0}^{x-1} \binom{k}{d} \cdot \binom{n+k-d}{k} \quad \wedge (m = \min(n, k) \wedge (0 \leq x \leq m + 1)$$

$T(x, m) := m - x + 1$

Reasoning behind:

- Die Werte von Tm, x sind ganzzahlig
- Die Variablen m und x sind vom Datentyp **int**
- Die Terminierungsfunktion T (x, m) ist nach unten beschränkt, wenn m = x – 1 => I → (V ≥ c) mit c = 0 ∈ Z => T
- $T(x, m)$ ist streng monoton fallend

b) Sei SR der Schleifenrumpf und b die Schleifenbedingung der jeweiligen Schleife. Beweisen Sie formal mittels wp – Kalkül: I ∧ b ⇒ Q.

Binom

$$\equiv wp\left(\text{"}r = r * (n - k + x) / x;\ x = x + 1;\text{"},\ r = \prod_{i=1}^{x-1} \frac{n-k+i}{i} \wedge x \leq k + 1\right)$$

$$\equiv wp\left(\text{"}r = r * (n - k + x) / x;\text{"},\ r = \prod_{i=1}^{x-1+1} \frac{n-k+i}{i} \wedge x + 1 \leq k + 1\right)$$

$$\equiv wp\left(\text{""}, r * \frac{(n-k+x)}{x} = \prod_{i=1}^{x} \frac{n-k+i}{i} \wedge x + 1 \leq k + 1\right)$$

Group: Saruul Altanbagana, Jennifer Mitchell

$$\equiv wp\left(r = \prod_{i=1}^{x} \frac{n-k+i}{i} * \frac{x}{n-k+x} \wedge x + 1 \leq k + 1\right)$$

$$\equiv wp\left(r = \prod_{i=1}^{x} \frac{n-k+i}{i} * \frac{x}{n-k+x} \wedge x + 1 \leq k + 1\right)$$

Bruch erweitern

$$\equiv wp\left(r = \prod_{i=1}^{x-1} \frac{n-k+i}{i} * \frac{x}{n-k+x} * \frac{n-k+x}{x} \wedge x + 1 \leq k + 1\right)$$

$$\equiv wp\left(r = \prod_{i=1}^{x-1} \frac{n-k+i}{i} \wedge x \leq k\right) \Rightarrow wp(SR,\ I)$$

<u>Tribo</u>

$$wp\ (\text{"}r \mathrel{+}= binom(k, x) \times binom\ (n + k - x, k); x++;\text{"}, (0 \leq x \leq m + 1) \wedge (m = \min(n, k)) \wedge$$
$$r = \sum_{d=0}^{x-1} \binom{k}{d} \cdot \binom{n+k-d}{k}$$

$$\equiv wp\ (\text{"}r \mathrel{+}= binom(k, x) \times binom\ (n + k - x, k);\text{"}, (0 \leq x + 1 \leq m + 1) \wedge (m = \min(n, k)) \wedge$$
$$r = \sum_{d=0}^{x-1+1} \binom{k}{d} \cdot \binom{n+k-d}{k}$$

$$\equiv wp\ (\text{"}r \mathrel{+}= binom(k, x) \times binom\ (n + k - x, k);\text{"}, (0 \leq x + 1 \leq m + 1) \wedge (m = \min(n, k)) \wedge$$
$$r = \sum_{d=0}^{x} \binom{k}{d} \cdot \binom{n+k-d}{k}$$

$$\equiv wp\ (\text{""}, (-1 \leq x \leq m) \wedge (m = \min(n, k)) \wedge\ r = \sum_{d=0}^{x} \wedge \binom{k}{d} \cdot \binom{n+k-d}{k}$$
$$(r + binom(k, x) \times binom\ (n + k - x, k)$$

$$\equiv (-1 \leq x \leq m) \wedge (m = \min(n, k)) \wedge (r + binom(k, x) \times binom\ (n + k - x, k) = \sum_{d=0}^{x} \binom{k}{d} \cdot \binom{n+k-d}{k}$$

$$\equiv (-1 \leq x \leq m) \wedge (m = \min(n, k)) \wedge r = \sum_{d=0}^{x} binom(\mathrm{k}, \mathrm{d}) \times binom\ (n + k - \mathrm{d}, k) - binom(\mathrm{k}, \mathrm{x})$$
$$\times\ binom\ (n + k - \mathrm{x}, k)$$

$$\equiv (-1 \leq x \leq m) \wedge (m = \min(n, k)) \wedge (\ r = \sum_{d=0}^{x-1} binom(\mathrm{k}, \mathrm{d}) \times binom\ (n + k - \mathrm{d}, k)\ )$$

$\equiv (0 \leq x \leq m + 1) \wedge (m = \min(n, k)) \wedge (r = \sum_{d=0}^{x-1} binom(\mathrm{k}, \mathrm{d}) \times binom\,(n + k - \mathrm{d}, k)) \wedge (x \leq m)$

$\equiv (0 \leq x \leq m) \wedge (m = \min(n, k)) \wedge (r = \sum_{d=0}^{x-1} binom(\mathrm{k}, \mathrm{d}) \times binom\,(n + k - \mathrm{d}, k))$

$I \wedge b \Rightarrow wp(SR,I)$

c) Sei Q die Nachbedingung der jeweiligen Methode. Beweisen Sie formal mittels wp-Kalkül: I $\wedge \neg$b $\Rightarrow$Q

Binom

I $\wedge \neg$b

$$\equiv wp\left(r = \prod_{i=1}^{x-1} \frac{n-k+i}{i} \wedge x \leq k+1 \wedge x > k \right)$$

$$\equiv wp\left(r = \prod_{i=1}^{x-1} \frac{n-k+i}{i} \wedge x = k+1 \right)$$

$$\equiv wp\left(r = \prod_{i=1}^{k+1-1} \frac{n-k+i}{i} \wedge x = k+1 \right)$$

$$\equiv wp\left(r = \prod_{i=1}^{k} \frac{n-k+i}{i} \right) \Rightarrow Q$$

Tribo

I $\wedge \neg$b

$\equiv (0 \leq x \leq m + 1) \wedge (m = \min(n, k)) \wedge (r = \sum_{d=0}^{x-1} binom(\mathrm{k}, \mathrm{d}) \times binom\,(n + k - \mathrm{d}, k)) \wedge (x > m)$

$\equiv (x = m + 1) \wedge (m = \min(n, k)) \wedge (r = \sum_{d=0}^{x-1} binom(\mathrm{k}, \mathrm{d}) \times binom\,(n + k - \mathrm{d}, k))$

$\equiv (x = m + 1) \wedge (m = \min(n, k)) \wedge (r = \sum_{d=0}^{m+1-1} binom(\mathrm{k}, \mathrm{d}) \times binom\,(n + k - \mathrm{d}, k))$

$\equiv (x = m + 1) \wedge (m = \min(n, k)) \wedge (r = \sum_{d=0}^{min(n,k)} binom(\mathrm{k}, \mathrm{d}) \times binom\,(n + k - \mathrm{d}, k)) \equiv \mathrm{Q}$

q.e.d