

Семинар 3

Задачи:

1. Даны векторы

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, a_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Среди этих векторов найти базис их линейной оболочки и выразить все оставшиеся вектора через базисные.

2. Найдите базис векторного пространства $U = \{y \in \mathbb{R}^5 \mid Ay = 0\}$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Определите можно ли из системы векторов

$$v_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

выбрать ФСР для системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + 2x_4 & = 0 \\ x_2 - 2x_3 + 3x_4 & = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 & = 0 \end{cases}$$

4. Являются ли функции $\sin(x), \cos(x), \sin(2x), \cos(2x), \dots, \sin(nx), \cos(nx)$ линейно зависимыми?
5. Пусть $\mathbb{R}[x]_n$ – множество всех многочленов с вещественными коэффициентами степени не больше n . Показать, что системы

$$\{1, x, x^2, \dots, x^n\} \text{ и } \{1, x - a, (x - a)^2, \dots, (x - a)^n\}, \text{ где } a \in \mathbb{R}$$

являются базисами в $\mathbb{R}[x]_n$ и найти матрицы перехода от первого базиса ко второму и от второго к первому.

6. Найти ранг следующей матрицы при различных значениях параметра λ :

$$\begin{pmatrix} 7 - \lambda & -12 & 6 \\ 10 & -19 - \lambda & 10 \\ 12 & -24 & 13 - \lambda \end{pmatrix}$$

7. Пусть A и B – квадратные матрицы одного размера. Доказать, что

$$a) \quad \operatorname{rk} \begin{pmatrix} A & B \\ 2A & -5B \end{pmatrix} = \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B \quad b) \quad \operatorname{rk} \begin{pmatrix} A & AB \\ B & B + B^2 \end{pmatrix} = \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B$$