Семинар 2 дополнительно

Принцип «продолжения по непрерывности»

Задача. Рассмотрим квадратную матрицу из $\mathrm{M}_{n+m}(\mathbb{R})$ вида $\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)$, где $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathrm{M}_{n\,m}(\mathbb{R})$, $C \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$, $D \in \mathrm{M}_m(\mathbb{R})$. Покажите следующее:

1. Если A обратима, то
$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(D - CA^{-1}B)$$

2. Если $m = n$ и $AC = CA$, то[1]
$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - CB)$$

Решение. (1) Идея в том, чтобы применить блочные элементарные преобразования к строкам матрицы. А именно, мы берем первую строку матрицы $(A|B)$ и умножаем ее слева на «коэффициент» CA^{-1}, получим $(C|CA^{-1}B)$. После этого вычитаем эту строку из второй строки $(C|D)$ и получаем $(0|D - CA^{-1}B)$. На одной картинке мы проделали следующее

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad \text{вычитаем из II-ой строки I-ю умноженную на } CA^{-1} \text{ слева} \quad \longrightarrow \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

По аналогии с элементарными преобразованиями первого типа над строками такая процедура не должна поменять определитель. Давайте строго поймем, почему определитель не меняется. Для этого заметим, что такая процедура эквивалентна умножению слева на блочную матрицу, а именно

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ -CA^{-1} & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

Самая левая матрица – нижнетреугольная с единицами на диагонали, а ее определитель равен 1. Потому определитель исходной матрицы равен определителю матрицы слева. А ее определитель равен требуемому, так как тут есть угол нулей.

(2) **Шаг 1** Давайте в начале рассмотрим случай A обратима. В этом случае, по первому пункту мы получаем
$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det A \det(D - CA^{-1}B) = \det(AD - ACA^{-1}B) = \det(AD - CB)$$
В последнем равенстве мы воспользовались тем, что матрицы A и C коммутируют.

Шаг 2 А здесь я вам продемонстрирую идею, на которой держится решение многих задач. Например, если вы можете доказать что-то только для обратимых матриц, то этим способом очень легко свести доказательство необратимого случая к обратимому.

Давайте рассмотрим матрицу $A_\lambda = A - \lambda E$ и поймем при каких λ такая матрица может быть обратима, а при каких нет. Я утверждаю, что только для конечного числа λ такая матрица не обратима. Действительно, мы знаем, что матрица обратима тогда и только тогда, когда ее определитель не ноль. Потому A_λ необратима тогда и только тогда, когда $\det A_\lambda = 0$. Давайте внимательно посмотрим на $\det(A - \lambda E)$.

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

Я утверждаю, что полученное выражение будет многочленом от λ.[2] Действительно, если посчитать по формуле для определителя, то мы будем перемножать какие-то элементы из матрицы $A - \lambda E$ и потом складывать все вместе. Все элементы являются либо константами либо линейными многочленами от λ. А значит их произведение будет многочленом степени не более n от λ, ну и сумма в том числе. Легко видеть, что старший член этого многочлена может взяться только с диагонали и равен $(-\lambda)^n$.

[1] Обратите внимание, матрица A может не быть обратимой в этом случае.
[2] На самом деле даже многочленом степени n, но это сейчас не важно.

Так как $\det(A_\lambda)$ является ненулевым многочленом от λ, то он имеет только конечное количество корней.[3] А значит матрица A_λ необратима только для конечного числа λ.

Теперь рассмотрим нашу задачу для матрицы A_λ вместо матрицы A. То есть нам надо посчитать

$$\det\begin{pmatrix} A_\lambda & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

Матрицы A и C коммутировали. Так как $A_\lambda = A - \lambda E$, то и A_λ и C коммутируют. А значит для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ кроме конечного числа мы можем воспользоваться предыдущим шагом и написать

$$\det\begin{pmatrix} A_\lambda & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A_\lambda D - CB) \quad \text{для всех } \lambda \in \mathbb{R} \text{ кроме конечного числа}$$

Теперь обратим внимание, что левая часть

$$\det\begin{pmatrix} A_\lambda & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

является каким-то многочленом $f(\lambda)$ и аналогично правая часть

$$\det(A_\lambda D - CB)$$

тоже является каким-то многочленом $g(\lambda)$. И мы только что доказали, что $f(\lambda) = g(\lambda)$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ кроме конечного числа. То есть многочлен $f - g$ имеет бесконечное число корней. А такое бывает лишь когда $f = g$, а значит $f(\lambda) = g(\lambda)$ вообще для любого числа $\lambda \in \mathbb{R}$. Подставим значение $\lambda = 0$ и получим желаемое. $\square$

На последний шаг можно смотреть так. Мы знаем результат для каждой матрицы A_λ в силу обратимости таких матриц при достаточно малом λ. А теперь в финальном равенстве переходим к пределу при $\lambda \to 0$. Это тоже корректное доказательство, но приведенное выше не использует анализ в явном виде. Кроме того, при правильных словах оно годится даже для экзотических полей вроде конечных (если вы понимаете о чем я говорю).

[3]Не более чем n – его степень.