

Семинар 4

Общая информация:

- Квадратные матрицы $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ называются сопряженными, если найдется невырожденная матрица $C \in M_n(\mathbb{R})$ такая, что $B = C^{-1}AC$.

Задачи:

1. Какие из следующих матриц сопряжены? Если они сопряжены, то укажите с помощью какой матрицы:
• $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, • $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, • $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. В пространстве \mathbb{R}^3 заданы следующие векторы

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Найдите матрицу A линейного оператора $\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ по правилу $x \mapsto Ax$, такого, что $Av_i = u_i$ для всех $1 \leq i \leq 3$.

3. Пусть $\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ – линейное отображение, заданное в стандартном базисе матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Пусть

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ вектора в } \mathbb{R}^3, \quad g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, g_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ вектора в } \mathbb{R}^2$$

Найти матрицу отображения ϕ в базисах f_1, f_2, f_3 и g_1, g_2 .

4. Найти собственные значения и собственные векторы линейных операторов, заданных в некотором базисе матрицами: (a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$. Можно ли эти матрицы диагонализировать в каком-нибудь базисе?
5. Найдите собственные значения для матрицы $x^t x$, где x – матрица-строка (a_1, \dots, a_n) .
6. Найти матрицу какого-нибудь линейного оператора $\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ такого, что выполнены следующие условия: $\ker \phi = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle$, $\operatorname{Im} \phi = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$.
7. Пусть $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$ – пространство многочленов степени не выше n . Рассмотрим на нем линейное отображение по правилу $f \mapsto (x+1)f'(x) - 2f(x) + \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$. Найдите матрицу этого линейного отображения в базисе $1, x, x^2, \dots, x^n$.