Семинар 1

Задачи:

1. Найти общее решение и одно частное решение системы линейных уравнений, используя метод Гаусса:

$$\begin{cases} -3x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 5x_4 = -6, \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_4 = 4, \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 + 4x_4 = 6 \end{cases}$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} -3 & 6 & 2 & -5 & -6 \\ 2 & -4 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & -6 & -1 & 4 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Общее: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} - x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} - x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Частное: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

2. Исследовать систему и найти общее решение в зависимости от значения параметра λ:

$$\begin{cases} (1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1+\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda^2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3+\lambda & 3+\lambda & 3+\lambda & 1+\lambda+\lambda^2 \\ 1 & 1+\lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda^2 \end{array}\right)$$

1) $\lambda = -3$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 7 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & 9 \end{array}\right)$ - нет решений

2) $\lambda \neq -3$ $\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \frac{1+\lambda+\lambda^2}{\lambda+3} \\ 1 & 1+\lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda^2 \end{array} \sim$

$$\sim \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & \frac{1+\lambda+\lambda^2}{\lambda+3} \\ 0 & \lambda & 0 & \lambda - \frac{1+\lambda+\lambda^2}{\lambda+3} = \frac{2\lambda-1}{\lambda+3} \\ 0 & 0 & \lambda & \lambda^2 - \frac{1+\lambda+\lambda^2}{\lambda+3} = \frac{\lambda^3+2\lambda^2-1-\lambda}{\lambda+3} \end{matrix}$$

$$\cancel{\lambda^2} + \lambda \cdot 3 - 1 - \lambda - \cancel{\lambda^2} =$$
$$= 2\lambda - 1$$
$$\lambda^3 + 3\lambda^2 - 1 - \lambda - \lambda^2 =$$
$$= \lambda^3 + 2\lambda^2 - 1 - \lambda =$$

2.1) $\lambda = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix} \text{ – нет решений}$$

2.2) $\lambda \neq 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \frac{1+\lambda+\lambda^2}{\lambda+3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2\lambda-1}{\lambda(\lambda+3)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\lambda^3+2\lambda^2-\lambda-1}{\lambda(\lambda+3)} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2-\lambda^2}{\lambda(\lambda+3)} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2\lambda-1}{\lambda(\lambda+3)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\lambda^3+2\lambda^2-\lambda-1}{\lambda(\lambda+3)} \end{array}\right)$$

$$\frac{\lambda(1+\lambda+\lambda^2) - (\lambda \cdot 2 - 1) - (\lambda^3+2\lambda^2-\lambda-1)}{\lambda(\lambda+3)} =$$

$$= \frac{\cancel{\lambda} + \cancel{\lambda^2} + \cancel{\lambda^3} - \cancel{2\lambda} + 1 - \cancel{\lambda^3} - 2\lambda^2 + \cancel{\lambda} + 1}{\dots} = \frac{2-\lambda^2}{\lambda(\lambda+3)}$$

если $\lambda = 5$ $\quad - \frac{23}{40}, \frac{9}{40}, \frac{169}{40}$

3. Пусть матрица $A \in \mathrm{M}_{5\,6}(\mathbb{R})$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & x & 1 & 1 & x & 1 \\ x & 1 & x & x & 1 & x \\ x & 1 & 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & x & 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x & x & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Для системы $Ay = 0$, где $y \in \mathbb{R}^6$, найти количество главных переменных при любом значении $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & x & 1 & 1 & x & 1 \\ x & 1 & x & x & 1 & x \\ x & 1 & 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & x & x & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{matrix} 1 & x & 1 & 1 & x & 1 \\ x-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & x-1 \\ x & 1 & 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & x & x & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & x & 1 & 1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ x & 1 & 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & x & x & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x & x & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 & 1 & 1 & x \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-1 & 0 & 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 & x-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & 1-x & 1-x & 1-x & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-1 & 0 & 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 & x-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & 1-x & 0 & 0 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-1 & 0 & 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 & x-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

если $x = 1$, то 1 - гл.

если $x \neq 1$, то 3 - гл.

4. Пусть матрица $J(\lambda) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ имеет следующий вид[1]

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

(a) Найти все $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ такие, что $AJ(\lambda) = J(\lambda)A$.

(b) Доказать, что для любого k верна формула

$$J(\lambda)^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & C_k^1\lambda^{k-1} & C_k^2\lambda^{k-2} & \dots & C_k^{n-1}\lambda^{k-n+1} \\ 0 & \lambda^k & C_k^1\lambda^{k-1} & \dots & C_k^{n-2}\lambda^{k-n+2} \\ 0 & 0 & \lambda^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & C_k^1\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda^k \end{pmatrix}$$

где $C_k^n = \frac{k!}{n!(k-n)!}$, а $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.

a)

$$B = \left(A_1 \middle| A_2 \middle| \dots \middle| A_n \right) \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & \vdots & & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix} = \left(\lambda A_1 \middle| A_1 + \lambda A_2 \middle| \dots \middle| A_{n-1} + \lambda A_n \right)$$

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^1 \\ \hline A^2 \\ \hline \dots \\ \hline A^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda A^1 + A^2 \\ \hline \lambda A^2 + A^3 \\ \hline \dots \\ \hline \lambda A^n \end{pmatrix}$$

$\forall$ 1 столбец

$b_{11} = \lambda a_{11} = \lambda a_{11} + a_{21} \Rightarrow$

$b_{21} = \lambda a_{21} = \lambda a_{21} + a_{31}$

$b_{n-1\,1} = \lambda a_{n-1\,1} = \lambda a_{n-1\,1} + a_{n1}$

$b_{n1} = \lambda a_{n1} = \lambda a_{n1}$

$$\boxed{\begin{matrix} a_{21} = 0 \\ a_{31} = 0 \\ \vdots \\ a_{n1} = 0 \end{matrix}}$$

$\measuredangle$ n - строку.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$b_{n1} = \lambda a_{n1} = \lambda a_{n1}$$

$$b_{n2} = a_{n1} + \lambda a_{n2} = \lambda a_{n2}$$

$$b_{n3} = a_{n2} + \lambda a_{n3} = \lambda a_{n3}$$

$$\vdots$$

$$b_{n\,n-1} = a_{n\,n-2} + \lambda a_{n\,n-1} = \lambda a_{n\,n-1}$$

$$b_{nn} = a_{n\,n-1} + \lambda a_{nn} = \lambda a_{nn}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} a_{n1} = 0 \\ a_{n2} = 0 \\ \\ a_{nn-2} = 0 \\ a_{nn-1} = 0 \end{array}}$$

$\measuredangle$ остальные элементы.

$$\forall i j \in [1, \dots, n] : \ i \neq n, \ j \neq 1$$

$$b_{ij} = a_{i\,j-1} + \cancel{\lambda a_{ij}} = \cancel{\lambda a_{ij}} + a_{i+1\,j} \Rightarrow a_{i\,j-1} = a_{i+1\,j}$$

$$\begin{matrix} \boxed{a_{ij-1}} & a_{ij} \\ & \boxed{a_{i+1\,j}} \end{matrix}$$

значит для удовлетворение всем равенствам матрица A должна иметь след вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & & a_n \\ 0 & a_1 & a_2 & & a_{n-1} \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & a_3 \\ 0 & & & \ddots & a_2 \\ 0 & 0 & & & a_1 \end{pmatrix}$$

(b) Доказать, что для любого k верна формула

b)

$$J(\lambda)^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & C_k^1\lambda^{k-1} & C_k^2\lambda^{k-2} & \dots & C_k^{n-1}\lambda^{k-n+1} \\ 0 & \lambda^k & C_k^1\lambda^{k-1} & \dots & C_k^{n-2}\lambda^{k-n+2} \\ 0 & 0 & \lambda^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & C_k^1\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda^k \end{pmatrix}$$

где $C_k^n = \frac{k!}{n!(k-n)!}$, а $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.

$$\mathcal{J}(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \qquad \mathcal{J}(\lambda) = (\lambda E + N), \text{ где } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & \\ 0 & & & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ 0 & & & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$t-k \le n \qquad k > t-n$

$$N^n = 0$$

$$\mathcal{J}^t(\lambda) = (\lambda E + N) = \sum_{k=0}^{t} C_t^k \lambda^k E \cdot N^{t-k} = \sum_{k=0}^{\min(t,n-1)} C_t^k \lambda^k N^{t-k}$$

5. Найти матрицу обратную к данной:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & -2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & -4 & +3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & -2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -8 & +3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

6. Вычислить для любого n:

$$\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\right)^n$$

$$\left(\begin{pmatrix}2 & 1\\5 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1\\-5 & 2\end{pmatrix}\right)^n = \begin{pmatrix}2 & 1\\5 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}3 & -1\\-5 & 2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2 & 1\\5 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1\\-5 & 2\end{pmatrix} = E$$

1) $\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix}1 & 0\\3 & 1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ гипотеза $\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix}1 & 0\\n & 1\end{pmatrix}$

по мат индукции

n база

2) $\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix}1 & 0\\n & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\n+1 & 1\end{pmatrix}$ ✓

$\Rightarrow$ Ответ $\begin{pmatrix}2 & 1\\5 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\n & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1\\-5 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2+n & 1\\5+3n & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1\\-5 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+3n & -n\\9n & 1-3n\end{pmatrix}$

7. Пусть $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ такая, что $A^m = 0$ для некоторого m. Показать, что $E + A$ и $E - A$ обратимы, где $E \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ – единичная матрица.

[1] Такая матрица называется Жордановой клеткой.

$\exists m \in \mathbb{N} \quad A^m = 0$

от противного пусть $E + A$ – необратима ($\det E + A = 0$)

$(E + A)x = 0$ имеет решение. $c \neq 0$ (т.к. возможно либо $\varnothing$ либо 1 либо ∞

$\varnothing$ невозможно т.к. $x < 0$ решен

1 невозможно т.к. $\operatorname{def}(E+A) < 0$

$\Rightarrow \infty$)

$Ac = -c$ домножим на A^{m-1}

$\underbrace{A^m c}_{0} = \underbrace{-A^{m-1}}_{\neq 0} c \Rightarrow c = 0$ противоречие.