Семинар 1

Задачи:

1. Найти общее решение и одно частное решение системы линейных уравнений, используя метод Гаусса:
$$\begin{cases} -3x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 5x_4 = -6, \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_4 = 4, \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 + 4x_4 = 6 \end{cases}$$

2. Исследовать систему и найти общее решение в зависимости от значения параметра λ:
$$\begin{cases} (1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

3. Пусть матрица $A \in \mathrm{M}_{5\,6}(\mathbb{R})$ имеет вид
$$\begin{pmatrix} 1 & x & 1 & 1 & x & 1 \\ x & 1 & x & x & 1 & x \\ x & 1 & 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & x & 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x & x & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
Для системы $Ay = 0$, где $y \in \mathbb{R}^6$, найти количество главных переменных при любом значении $x \in \mathbb{R}$.

4. Пусть матрица $J(\lambda) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ имеет следующий вид[1]
$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$
   (a) Найти все $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ такие, что $AJ(\lambda) = J(\lambda)A$.
   (b) Доказать, что для любого k верна формула
$$J(\lambda)^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & C_k^1\lambda^{k-1} & C_k^2\lambda^{k-2} & \dots & C_k^{n-1}\lambda^{k-n+1} \\ 0 & \lambda^k & C_k^1\lambda^{k-1} & \dots & C_k^{n-2}\lambda^{k-n+2} \\ 0 & 0 & \lambda^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & C_k^1\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda^k \end{pmatrix}$$
   где $C_k^n = \frac{k!}{n!(k-n)!}$, а $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.

5. Найти матрицу обратную к данной:
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Вычислить для любого n:
$$\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \right)^n$$

7. Пусть $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ такая, что $A^m = 0$ для некоторого m. Показать, что $E + A$ и $E - A$ обратимы, где $E \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ – единичная матрица.

[1] Такая матрица называется Жордановой клеткой.