Семинар 5

Общая информация:

- Напомню, что стандартным скалярным произведением на $\mathbb{R}^n$ называется $(x, y) = x^t y$.
- Через $\mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ обозначается пространство многочленов степени не более n, то есть $\mathbb{R}[x]_{\leqslant n} = \{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \mid a_i \in \mathbb{R}\}$.
- Матрица $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ называется ортогональной, если $A^t A = E$.

Задачи:

1. Опишите все ортогональные матрицы размера n на n, состоящие из неотрицательных элементов.
2. В пространстве многочленов $\mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ задана квадратичная форма $Q(f) = f(1)f(2)$. Найдите ее сигнатуру (число положительных, отрицательных и нулевых чисел на диагонали в диагональном виде).
3. Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ со скалярным произведением $(f, g) = \int\limits_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$. Методом Грама-Шмидта ортогонализуйте базис $1, x, x^2, x^3$.
4. Найти длины сторон и внутренние углы треугольника ABC в пространстве $\mathbb{R}^5$ со стандартным скалярным произведением, где
$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$
5. Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^4$ – векторное подпространство заданное следующим образом $U = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$, где
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -2 \\ 24 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \\ -19 \end{pmatrix}$$
Задайте это подпространство в виде $U = \{y \in \mathbb{R}^4 \mid Ay = 0\}$ для некоторой матрицы $A \in \mathrm{M}_{m\,4}(\mathbb{R})$. (Подумайте с чего эта задача дается на тему про скалярные произведения).
6. Пусть в пространстве $\mathbb{R}^3$ задано стандартное скалярное произведение $(x, y) = x^t y$ и пусть заданы три вектора:
$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ и } p_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$
Пусть L – гиперплоскость, проходящая через точки p_1, p_2, p_3. Выясните на каком расстоянии от гиперповерхности L лежат следующие векторы
$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ и } w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$$
По одну ли сторону от гиперповерхности L они лежат?
7. Существует ли скалярное произведение на пространстве матриц $n \times n$ $(n > 1)$, относительно которого матрица из всех единиц была бы ортогональна любой верхнетреугольной матрице?