Семинар 1

Задачи:

1. Найти общее решение и одно частное решение системы линейных уравнений, используя метод Гаусса:
$$\begin{cases} -3x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 5x_4 = -6, \\ \ \ 2x_1 - 4x_2 + 2x_4 = 4, \\ \ \ 3x_1 - 6x_2 - x_3 + 4x_4 = 6 \end{cases}$$

2. Исследовать систему и найти общее решение в зависимости от значения параметра λ:
$$\begin{cases} (1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

3. Пусть матрица $A \in \mathrm{M}_{5\,6}(\mathbb{R})$ имеет вид
$$\begin{pmatrix} 1 & x & 1 & 1 & x & 1 \\ x & 1 & x & x & 1 & x \\ x & 1 & 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & x & 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x & x & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
Для системы $Ay = 0$, где $y \in \mathbb{R}^6$, найти количество главных переменных при любом значении $x \in \mathbb{R}$.

4. Пусть матрица $J(\lambda) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ имеет следующий вид[1]
$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$
   (a) Найти все $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ такие, что $AJ(\lambda) = J(\lambda)A$.
   (b) Доказать, что для любого k верна формула
$$J(\lambda)^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & C_k^1\lambda^{k-1} & C_k^2\lambda^{k-2} & \dots & C_k^{n-1}\lambda^{k-n+1} \\ 0 & \lambda^k & C_k^1\lambda^{k-1} & \dots & C_k^{n-2}\lambda^{k-n+2} \\ 0 & 0 & \lambda^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & C_k^1\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda^k \end{pmatrix}$$
   где $C_k^n = \frac{k!}{n!(k-n)!}$, а $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.

5. Найти матрицу обратную к данной:
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Вычислить для любого n:
$$\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\right)^n$$

7. Пусть $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ такая, что $A^m = 0$ для некоторого m. Показать, что $E + A$ и $E - A$ обратимы, где $E \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ – единичная матрица.

[1] Такая матрица называется Жордановой клеткой.

Семинар 2

Задачи:

1. Найти определители следующих матрицы

$$(a)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad (b)\ \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 5 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Посчитайте характеристический многочлен матрицы

$$\begin{pmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

3. Найдите определители следующих матриц

$$(a)\ \begin{pmatrix} -t & & & & a_1 \\ a_2 & -t & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & a_{n-1} & -t & \\ & & & a_n & -t \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad (b)\ \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & \dots & \lambda & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

4. Пусть $X = (X_1 \mid \dots \mid X_n) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ и $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Найти $\det(\lambda_1 X_1 X_1^t + \dots + \lambda_n X_n X_n^t)$.

5. Пусть $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ – произвольная матрица. Построим из нее матрицу $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ следующим образом: сдвинем все столбцы матрицы A по циклу на два вправо и результат прибавим к A. Выразите определитель B через определитель A.

6. Пусть $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ при этом A обратимая. Покажите, что характеристические многочлены матриц AB и BA совпадают.

Семинар 3

Задачи:

1. Даны векторы
$$a_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\ a_3 = \begin{pmatrix}3\\8\\11\end{pmatrix},\ a_4 = \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix},\ a_5 = \begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}$$
Среди этих векторов найти базис их линейной оболочки и выразить все оставшиеся вектора через базисные.

2. Найдите базис векторного пространства $U = \{y \in \mathbb{R}^5 \mid Ay = 0\}$, где
$$A = \begin{pmatrix}2 & 1 & 3 & 0 & 7\\ 1 & 2 & 0 & 1 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

3. Определите можно ли из системы векторов
$$v_1 = \begin{pmatrix}-4\\-5\\2\\3\end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\2\\1\end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix}5\\5\\3\\-2\end{pmatrix},\ v_4 = \begin{pmatrix}4\\5\\-2\\-3\end{pmatrix}$$
выбрать ФСР для системы линейных уравнений
$$\begin{cases} x_1 - x_3 + 2\,x_4 & = 0\\ x_2 - 2\,x_3 + 3\,x_4 & = 0\\ 2\,x_1 - 2\,x_2 + 2\,x_3 - 2\,x_4 & = 0\end{cases}$$

4. Являются ли функции $\sin(x), \cos(x), \sin(2x), \cos(2x), \ldots, \sin(nx), \cos(nx)$ линейно зависимыми?

5. Пусть $\mathbb{R}[x]_n$ – множество всех многочленов с вещественными коэффициентами степени не больше n. Показать, что системы
$$\{1, x, x^2, \ldots, x^n\} \text{ и } \{1, x-a, (x-a)^2, \ldots, (x-a)^n\},\ \text{ где } a \in \mathbb{R}$$
являются базисами в $\mathbb{R}[x]_n$ и найти матрицы перехода от первого базиса ко второму и от второго к первому.

6. Найти ранг следующей матрицы при различных значениях параметра λ:
$$\begin{pmatrix}7-\lambda & -12 & 6\\ 10 & -19-\lambda & 10\\ 12 & -24 & 13-\lambda\end{pmatrix}$$

7. Пусть A и B – квадратные матрицы одного размера. Доказать, что
$$a)\quad \mathrm{rk}\begin{pmatrix}A & B\\ 2A & -5B\end{pmatrix} = \mathrm{rk}\,A + \mathrm{rk}\,B \quad b)\quad \mathrm{rk}\begin{pmatrix}A & AB\\ B & B+B^2\end{pmatrix} = \mathrm{rk}\,A + \mathrm{rk}\,B$$

Семинар 6

Задачи:

1. «Решите» систему методом наименьших квадратов

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & -3 & 6 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & -9 \end{array}\right)$$

2. Диагонализовать следующие симметричные матрицы в ортонормированном базисе (то есть получить разложение $A = CDC^t$, где C – ортогональная матрица, а D диагональная).

   (a) $\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

   (b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. Пусть задана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 13 & 14 & 4 \\ 14 & 24 & 18 \\ 4 & 18 & 29 \end{pmatrix}$$

   Найдите какую-нибудь симметричную матрицу B такую, что $B^2 = A$.

4. Найти сингулярное разложение следующих матриц

$$(a) \quad \begin{pmatrix} 5 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \qquad (b) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Пусть V – евклидово пространство и $P\colon V \to V$ – оператор проектирования на U вдоль W, где $U, W \subseteq V$. Покажите, что $\ker P^* = (\operatorname{Im} P)^\perp$ и $\ker P = (\operatorname{Im} P^*)^\perp$. Выведете отсюда, что сопряженный оператор $P^*\colon V \to V$ будет проектированием на $W^\perp$ вдоль $U^\perp$.

Семинар 4

Общая информация:

- Квадратные матрицы $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ называются сопряженными, если найдется невырожденная матрица $C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ такая, что $B = C^{-1}AC$.

Задачи:

1. Какие из следующих матриц сопряжены? Если они сопряжены, то укажите с помощью какой матрицы: • $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, • $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, • $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. В пространстве $\mathbb{R}^3$ заданы следующие векторы
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},\ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$
Найдите матрицу A линейного оператора $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ по правилу $x \mapsto Ax$, такого, что $Av_i = u_i$ для всех $1 \leqslant i \leqslant 3$.

3. Пусть $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ – линейное отображение, заданное в стандартном базисе матрицей $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Пусть
$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ вектора в } \mathbb{R}^3, \quad g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ g_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ вектора в } \mathbb{R}^2$$
Найти матрицу отображения ϕ в базисах f_1, f_2, f_3 и g_1, g_2.

4. Найти собственные значения и собственные векторы линейных операторов, заданных в некотором базисе матрицами: (a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$. Можно ли эти матрицы диагонализовать в каком-нибудь базисе?

5. Найдите собственные значения для матрицы $x^t x$, где x – матрица-строка $(a_1, \ldots, a_n)$.

6. Найти матрицу какого-нибудь линейного оператора $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ такого, что выполнены следующие условия: $\ker\phi = \langle \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right) \rangle$, $\operatorname{Im}\phi = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \rangle$.

7. Пусть $\mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ – пространство многочленов степени не выше n. Рассмотрим на нем линейное отображение по правилу $f \mapsto (x+1)f'(x) - 2f(x) + \frac{1}{x}\int\limits_0^x f(t)\,dt$. Найдите матрицу этого линейного отображения в базисе $1, x, x^2, \ldots, x^n$.

Семинар 5

Общая информация:

- Напомню, что стандартным скалярным произведением на $\mathbb{R}^n$ называется $(x, y) = x^t y$.
- Через $\mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ обозначается пространство многочленов степени не более n, то есть $\mathbb{R}[x]_{\leqslant n} = \{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \mid a_i \in \mathbb{R}\}$.
- Матрица $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ называется ортогональной, если $A^t A = E$.

Задачи:

1. Опишите все ортогональные матрицы размера n на n, состоящие из неотрицательных элементов.
2. В пространстве многочленов $\mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ задана квадратичная форма $Q(f) = f(1)f(2)$. Найдите ее сигнатуру (число положительных, отрицательных и нулевых чисел на диагонали в диагональном виде).
3. Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ со скалярным произведением $(f, g) = \int\limits_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$. Методом Грама-Шмидта ортогонализуйте базис $1, x, x^2, x^3$.
4. Найти длины сторон и внутренние углы треугольника ABC в пространстве $\mathbb{R}^5$ со стандартным скалярным произведением, где
$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$
5. Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^4$ – векторное подпространство заданное следующим образом $U = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$, где
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -2 \\ 24 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \\ -19 \end{pmatrix}$$
Задайте это подпространство в виде $U = \{y \in \mathbb{R}^4 \mid Ay = 0\}$ для некоторой матрицы $A \in \mathrm{M}_{m\,4}(\mathbb{R})$. (Подумайте с чего эта задача дается на тему про скалярные произведения).
6. Пусть в пространстве $\mathbb{R}^3$ задано стандартное скалярное произведение $(x, y) = x^t y$ и пусть заданы три вектора:
$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{и } p_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$
Пусть L – гиперплоскость, проходящая через точки p_1, p_2, p_3. Выясните на каком расстоянии от гиперповерхности L лежат следующие векторы
$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{и } w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$$
По одну ли сторону от гиперповерхности L они лежат?
7. Существует ли скалярное произведение на пространстве матриц $n \times n$ $(n > 1)$, относительно которого матрица из всех единиц была бы ортогональна любой верхнетреугольной матрице?