Семинар 2

Задачи:

1. Найти определители следующих матрицы

$$(a)\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 5 & 1 & 4\\ 3 & 2 & 5\end{pmatrix} \quad \text{и} \quad (b)\begin{pmatrix}5 & 1 & 7 & 3\\ 1 & 0 & 2 & 0\\ -2 & 2 & 5 & 4\\ 3 & 0 & 4 & 0\end{pmatrix}$$

2. Посчитайте характеристический многочлен матрицы

$$\begin{pmatrix}-1 & 5 & 4\\ 3 & -2 & 0\\ -1 & 3 & 6\end{pmatrix}$$

3. Найдите определители следующих матриц

$$(a)\begin{pmatrix}-t & & & & a_1\\ a_2 & -t & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & a_{n-1} & -t & \\ & & & a_n & -t\end{pmatrix} \quad \text{и} \quad (b)\begin{pmatrix}\lambda & 1 & \dots & 1 & \lambda\\ 1 & \lambda & \dots & \lambda & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 1 & 1 & \dots & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \dots & 1 & \lambda\end{pmatrix}$$

4. Пусть $X = (X_1 \mid \dots \mid X_n) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ и $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Найти $\det(\lambda_1 X_1 X_1^t + \dots + \lambda_n X_n X_n^t)$.

5. Пусть $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ – произвольная матрица. Построим из нее матрицу $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ следующим образом: сдвинем все столбцы матрицы A по циклу на два вправо и результат прибавим к A. Выразите определитель B через определитель A.

6. Пусть $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ при этом A обратимая. Покажите, что характеристические многочлены матриц AB и BA совпадают.

.

1. Найти определители следующих матрицы

$$(a)\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 5 & 1 & 4\\ 3 & 2 & 5\end{pmatrix} \quad \text{и} \quad (b)\begin{pmatrix}5 & 1 & 7 & 3\\ 1 & 0 & 2 & 0\\ -2 & 2 & 5 & 4\\ 3 & 0 & 4 & 0\end{pmatrix}$$

a) $$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 5 & 1 & 4\\ 3 & 2 & 5\end{vmatrix} = 5 + 30 + 24 - 9 - 50 - 8 = -4 - 20 + 16 = -8$$

b) $$\begin{vmatrix}5 & 1 & 7 & 3\\ 1 & 0 & 2 & 0\\ -2 & 2 & 5 & 4\\ 3 & 0 & 4 & 0\end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix}1 & 0 & 2 & 0\\ 5 & 1 & 7 & 3\\ -2 & 2 & 5 & 4\\ 3 & 0 & 4 & 0\end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix}1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -3 & 3\\ 0 & 2 & 9 & 4\\ 0 & 0 & -2 & 0\end{vmatrix} =$$

$$= (-1)\begin{vmatrix}1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -3 & 3\\ 0 & 0 & 15 & -2\\ 0 & 0 & -2 & 0\end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix}1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -3 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 15 & -2\end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix}1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -3 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2\end{vmatrix} = 4$$

2. Посчитайте характеристический многочлен матрицы

$$\begin{pmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 5 & 4 \\ 3 & -2-\lambda & 0 \\ -1 & 3 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(-2-\lambda)(6-\lambda) + 36 + 0 - (8+4\lambda) - (90-15\lambda) - 0$$

$$= (1+\lambda)(2+\lambda)(6-\lambda) + 36 - 8 - 4\lambda - 90 + 15\lambda =$$

$$= (2+3\lambda+\lambda^2)(6-\lambda) + 28 - 90 + 11\lambda =$$

$$= 12 + 18\lambda + 6\lambda^2 - 2\lambda - 3\lambda^2 - \lambda^3 + 28 - 90 + 11\lambda =$$

$$= -50 + 27\lambda + 3\lambda^2 - \lambda^3$$

3. Найдите определители следующих матриц

$$(a) \begin{pmatrix} -t & & & & a_1 \\ a_2 & -t & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & a_{n-1} & -t & \\ & & & a_n & -t \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad (b) \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

a) $$\det \begin{vmatrix} -t & & & & a_1 \\ a_2 & -t & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & a_{n-1} & -t & \\ & & & a_n & -t \end{vmatrix} = (-t)(-1)^{1+1} \det \begin{vmatrix} -t & & & & \\ a_3 & -t & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & a_{n-1} & -t & \\ & & & a_n & -t \end{vmatrix} +$$

$$+ a_1 (-1)^{1+n} \det \begin{vmatrix} a_2 & -t & & & \\ & a_3 & -t & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & a_{n-1} & -t \\ & & & & a_n \end{vmatrix} =$$

$$= (-t)\,(-t)^{n-1} = (-1)^n t^n + (-1)^{1+n} a_1 a_2 \dots a_n$$

б) $$\det \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & & \\ 1 & 1 & \lambda & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \lambda \; 1 \\ 1 & \dots & & & 1 \; \lambda \end{vmatrix} =$$

если $\lambda = 1$, то столбцы ЛЗ $\Rightarrow \det A = 0$

если $\lambda \neq 1$

$$\det\underbrace{\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 & & 1 \\ 1-\lambda & \lambda-1 & 0 & & 0 \\ 1-\lambda & 0 & \lambda-1 & & 0 \\ & & & \ddots & \\ 1-\lambda & 0 & & & \lambda-1 \end{vmatrix}}_{n} = (\lambda-1)^{n-1}\det\underbrace{\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 & & 1 \\ -1 & 1 & 0 & & 0 \\ -1 & 0 & 1 & & 0 \\ & & & \ddots & 0 \\ -1 & & & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{n} =$$

$$= (\lambda-1)^{n-1}\det\underbrace{\begin{vmatrix} \lambda+n-1 & 0 & 0 & & 0 \\ -1 & 1 & 0 & & 0 \\ -1 & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ -1 & 0 & & & 1 \end{vmatrix}}_{n} =$$

$$= (\lambda-1)^{n-1}(\lambda+n-1)(-1)^{1+1}\det|E_{n-1}| = (\lambda-1)^{n-1}(\lambda+n-1)$$

Проверка:

$n=3 \quad \lambda=5$

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = (5-1)^2(5+3-1) =$$

$$= 16 \cdot 7 = 112 \checkmark$$

$n=5 \quad \lambda=5$

$$(5-1)^4(5+4) = 4\cdot4\cdot4\cdot4\cdot9 = 2304 \checkmark$$

4. Пусть $X = (X_1 \mid \ldots \mid X_n) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ и $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Найти $\det(\underbrace{\lambda_1 X_1 X_1^t + \ldots + \lambda_n X_n X_n^t}_{S})$.

$\det(\lambda_1 X_1 X_1^t + \ldots + \lambda_n X_n X_n^t)$

а) $\exists i\ \lambda_i = 0 \Rightarrow rk(S) < n \Rightarrow \det S = 0$

$\forall i\ \lambda_i \neq 0$

$$\lambda_1 X_1 X_1^t = \lambda_1 \left(x_{\underset{\text{столбец}}{1}}^{\overset{\text{строчка}}{1}} X_1 \,\middle|\, x_1^2 X_1 \,\middle|\, \ldots \,\middle|\, x_1^n X_1 \right)$$

$$\lambda_2 X_2 X_2^T = \lambda_2 \left(x_2^1 X_2 \,\middle|\, x_2^2 X_2 \,\middle|\, \ldots \,\middle|\, x_2^n X_2 \right)$$

$$\dots$$

$$\lambda_n X_n X_n^T = \lambda_n \left(x_n^1 X_n \mid x_n^2 X_n \mid \dots \mid x_n^n X_n \right)$$

$$\det\left(\lambda_1 X_1 X_1^T + \dots + \lambda_n X_n X_n^T\right) =$$

$$\det\left(\lambda_1 x_1^1 X_1 + \dots + \lambda_n x_n^1 X_n \Big| \dots \Big| \lambda_1 x_1^n X_1 + \dots + \lambda_n x_n^n X_n\right) =$$

$$\det\left(x_1^1 \lambda_1 X_1 + \dots + x_n^1 \lambda_n X_n \mid \dots \mid x_1^n \lambda_1 X_1 + \dots + x_n^n \lambda_n X_n\right) =$$

$$\det\left(\underset{n\times n}{\left[\lambda_1 X_1 \mid \dots \mid \lambda_n X_n\right]} \cdot \underset{n\times 1}{\left(X^1\right)^T} \Big| \dots \Big| \underset{n\times n}{\left[\lambda_1 X_1 \mid \dots \mid \lambda_n X_n\right]} \cdot \left(X^n\right)^T\right) =$$

$$= \det\left(\left[\lambda_1 X_1 \mid \dots \mid \lambda_n X_n\right] \underbrace{\left[\left(X^1\right)^T \mid \dots \mid \left(X^n\right)^T\right]}_{\substack{\parallel \\ X^T}}\right) =$$

$$=$$

$$\det\left(\left[\lambda_1 X_1 \mid \dots \mid \lambda_n X_n\right]\right) \det\left(X^T\right) =$$

$$= \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n \ \det(X)^2$$

6. Пусть $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ при этом A обратимая. Покажите, что характеристические многочлены матриц AB и BA совпадают.

$$\det(AB - \lambda E) = \det(A)\det(B - \lambda A^{-1})$$

$$\det(BA - \lambda E) = \det(B - \lambda A^{-1})\det(A)$$

5. Пусть $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ – произвольная матрица. Построим из нее матрицу $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ следующим образом: сдвинем все столбцы матрицы A по циклу на два вправо и результат прибавим к A. Выразите определитель B через определитель A.

$$U = \begin{pmatrix} 0 & & & & 1 & \\ 0 & & & & & 1 \\ 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ 0 & & & 1 & & \end{pmatrix}$$

$$\hat{X} = X + XU = X(E+U)$$

$$\det \hat{X} = \det(X)\cdot\det(E+U) = \det(X)\cdot\begin{cases} 2, & n - \text{нечетное} \\ 0, & n \bmod 4 = 0 \\ 4, & n \bmod 4 = 2 \end{cases}$$

$\det(E+U)$ в зависимости от n

$n = 1$ $\quad |E+U| = |2| = 2$

$n = 2$ $\quad |E+U| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$

$n = 3$ $\quad |E+U| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 - 0 - 0 - 0 = 2$

$n = 4$ $\quad |E+U| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$n = 5$ $\quad |E+U| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$

$n = 6$ $\quad \begin{vmatrix} 1 & & & & 1 & 0 \\ 0 & 1 & & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & & & \\ & 1 & 0 & 1 & & \\ & & 1 & 0 & 1 & \\ & & & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$

$$\overbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & & & \\ & & \ddots & & \ddots & & \\ & & & & & 0 & 1 \\ & & & & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}^{n} = 1\cdot\det(D - CA^{-1}B) =$$

A, B, C, D

$$= \det \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & & \\ & & & \ddots & 0 & 1 \\ & & & & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}_{n-2} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & & & 1 & 0 \\ 0 & & & 0 & 1 \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 1 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}}^{n-2}$$

$n-4$

$$= \det \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & & \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Шагами по 4 придем к одной из базы индукции $n = 2, 3, 4, 5$