ЗАДАЧА №1 10 клас

У дротяній моделі куба (дивись рисунок) «входом» і «виходом» є вершини, розташовані на головній діагоналі.

а) У скільки разів зменшиться опір куба, якщо додатково впаяти в модель всі 16 діагоналей? Всі дроти ізольовано так, що в точках дотику електричного контакту немає, площу перерізу дротів підібрано так, що опори всіх відрізків однакові.

б) У скільки разів змінитися опір кола, якщо один з провідників перегорить після впаювання всіх діагоналей? Розглянути всі можливі випадки.

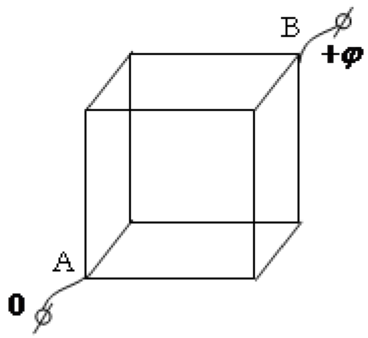
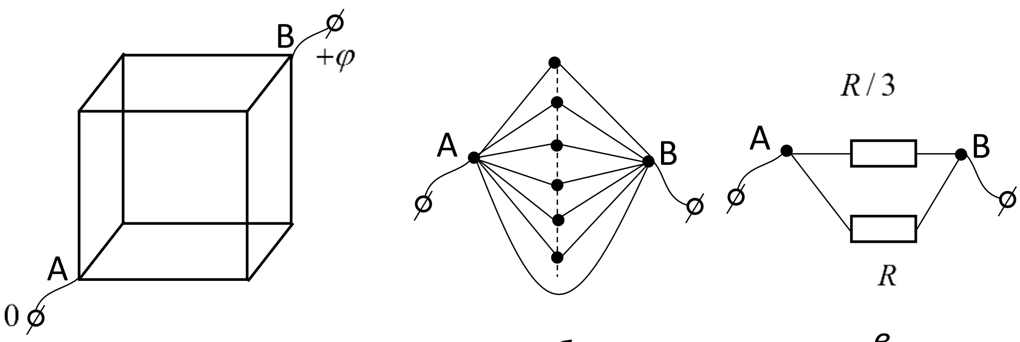


Рисунок до задачі 1.

Розв’язок

А. Опір даного куба $R_0 = \frac{5}{6}R$, де R – опір одного відрізка (відома задача).

Ускладнюючи схему (включаючи додаткові елементи), ми насправді спрощуємо її. Коли всі вершини з'єднані один з одним, вони (за винятком «входу» і «виходу») стають вершинами з однаковими потенціалами $\phi/2$ де - ϕ прикладена напруга між точками АВ). Еквівалентна схема має вигляд, зображений на малюнку 1, б. Пунктиром зображені провідники, які з'єднують еквівалентні вершини (по ним струм не тече)



а *б* *в*

Рис. 1.

Зрозуміло, що в цій схемі можна "склеїти" всі шість еквівалентних вершин. При цьому ми отримуємо в два опору, включених паралельно. Отже, загальний опір після додавання всіх діагоналей буде рівним

$$R_1 = \frac{1}{4}R.$$

За рахунок впаювання діагоналей опір зменшиться у 10/3 разів.

Б. Можливі три випадки перегоряння.

Випадок 1. Перегорає провідник, що з'єднує еквівалентні вершини. У цьому випадку опір кола не зміниться.

Випадок 2. Перегорає провідник, який з'єднує «вхід» і «вихід». У цьому випадку опір схеми стає рівним просто $R_2 = \frac{R}{3}$, тобто опір зменшується в 2,5 рази.

Випадок 3. Перегорає опір, яке з'єднує один з шести вузлів з «входом» або з «виходом».

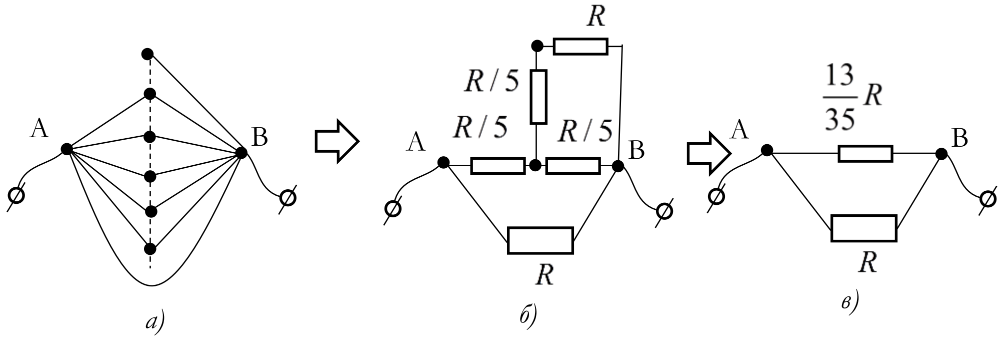


Рис. 2

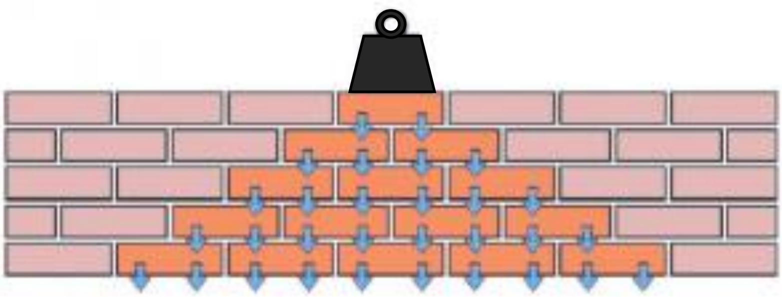
Розрахунок опору в цьому випадку ілюструє рисунок 2. Відповідь $R_2 = \frac{13}{48}R$. В цьому випадку опір зменшується 40/13 разів.

Відповідь: А. Зменшиться в 10/3 рази;

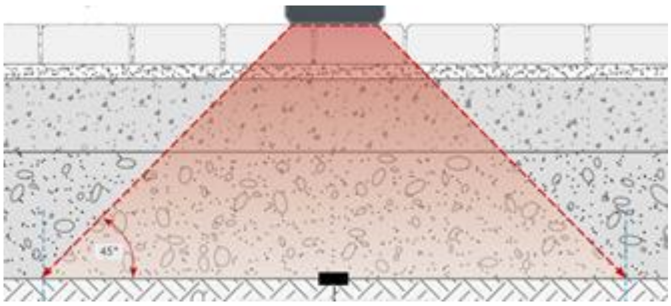
Б. опір може:

1) залишитися незмінним;
2) зменшується у 2,5 рази;
3) зменшується у 40/13 рази.

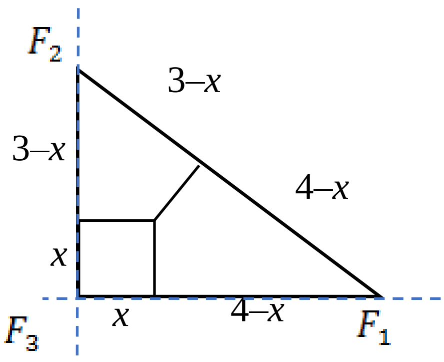
2. У будівництві використовують цеглу. Розподіл додаткового навантаження на цеглі зображено на рисунку, взятому з будівельного сайту (див. рис.). Спираючись на запропоновану будівельниками модель та вважаючи, що ґрунт складається з невеликих кубічних частинок, знайдіть, під яким кутом розходитиметься навантаження у ґрунті. Уявіть, що на горизонтальну поверхню такого ґрунту став триногою марсіанський корабель. Маса корабля 30 тон, відстань між опорами 3 м, 4 м і 5 м. Центр мас корабля знаходиться над точкою цього трикутника, яка однаково віддалена від його сторін. Знайдіть навантаження на кожну опору. Побудуйте залежність тиску у ґрунті від глибини під центром мас корабля. Густина грунту 2 г/см^3.



Розв’язок. На рисунку 1 фрагмент ілюстрації з будівельного сайту. Оскільки частинки не мають різні розміри у вертикальному і горизонтальному напрямках, як на рисунку з умови, вважаємо їх кубічними цеглинками. Тоді кут, під яким розходиться навантаження у ґрунті, дорівнює 45°.



Знайдемо точку, що рівновіддалена від сторін прямокутного трикутника зі сторонами 3, 4 ,5. Взагалі, мова йде про центр вписаного кола, але і без цього знання її легко знайти. З рисунку 2, де відстані наведені у SI, находимо $5 = 3 - x + 4 - x$, звідки $x = 1 м$.



Розподіл сил знайдемо з умови статичної рівноваги (правила моментів сил) відносно сторін трикутника. Відносно сторони 3 м (вісь обертання – вертикальна пунктирна лінія на рисунку 2) маємо (у SI)

$$mgx = F_1 \cdot 4$$

звідки $F_1 = \frac{mg}{4} = 75 \cdot 10^3 H$ (прийнято $g = 10 \frac{м}{c^2}$). Відносно сторони 4 м (горизонтальний пунктир)

$$mgx = F_2 \cdot 3 \text{ і } F_1 = \frac{mg}{3} = 100 \cdot 10^3 H .$$

Значення третьої сили, яка відповідає прямому куту, можна найти, наприклад, таким чином:

$$F_3 = mg - F_1 - F_2 = mg - \frac{mg}{4} - \frac{mg}{3} = \frac{5mg}{12} = 125 \cdot 10^3 H$$

Оскільки площі опор в умові не задані, знехтуємо їх розмірами при визначенні тиску на глибині h. Вважатимемо, що від кожної опори йде вниз конус додаткового навантаження з кутом при вершині 45°. Тоді радіус конуса дорівнює його висоті h, отже додатковий тиск буде $\frac{F}{\pi h^2}$, а загальний (без урахування атмосферного):

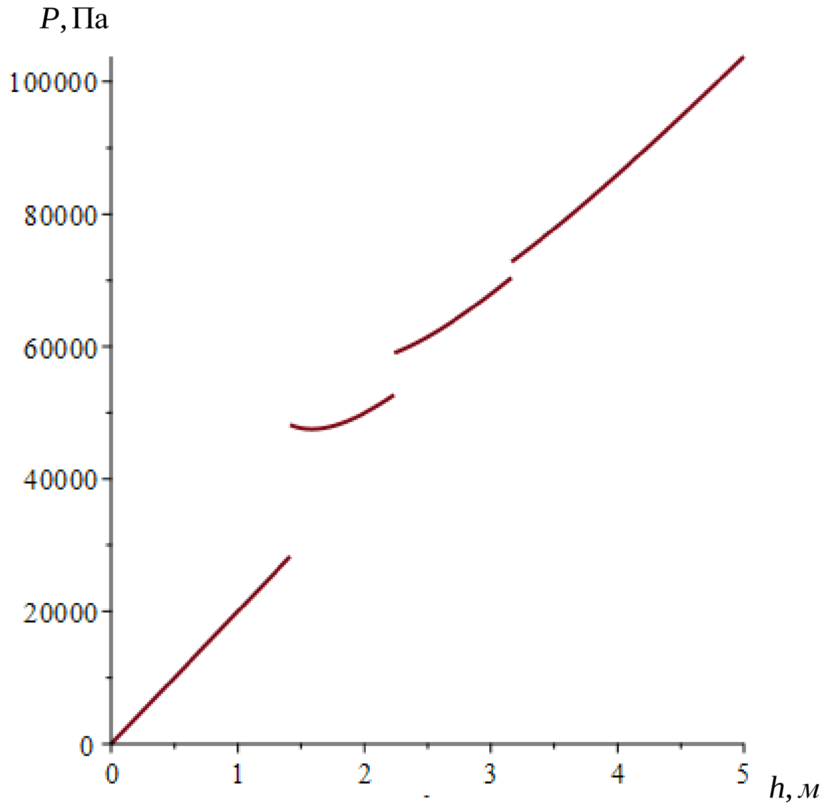
$$P = \rho g h + \frac{F}{\pi h^2}.$$

Відстані від вершин трикутника до лінії центру мас знайдемо з теореми Піфагора: від $F_1 - \sqrt{10}\ м$, від $F_2 - \sqrt{5}\ м$, від $F_3 - \sqrt{2}\ м$. Тоді на глибині $\sqrt{2}\ м$ конус додаткового навантаження від найближчої опори почне впливати на загальний тиск. Тиск від другої опори «підключиться» на глибині $\sqrt{5}\ м$, а від першої – на глибині $\sqrt{10}\ м$.

$$P = \rho g h + \frac{F}{\pi h^2}, \text{ де}$$

$$\begin{cases} F = 0, & h < \sqrt{2} \\ F = F_3, & \sqrt{2} \le h < \sqrt{5} \\ F = F_3 + F_2, & \sqrt{5} \le h < \sqrt{10} \\ F = mg, & h \ge \sqrt{10} \end{cases}.$$

Графік залежності тиску у ґрунті від глибини під точкою центру мас має розриви, а також невеликий мінімум для глибини $\approx 1{,}6$ м, що неможливо для рідин та газів, а у нас виникає внаслідок конічного розповсюдженню навантаження у напрямку сили.



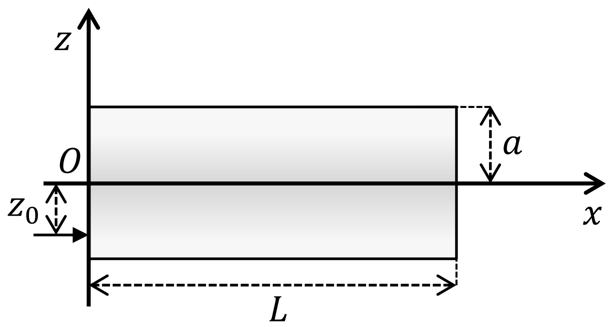
10 класс

Укр.

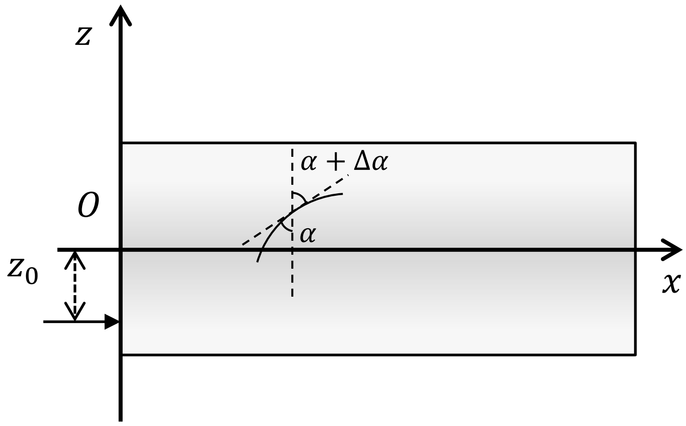
Фізик-експериментатор намагається дослідити оптичні властивості неоднорідної пластинки, показник заломлення якої змінюється за законом $n = \frac{n_0}{1+|z|/a}$, де $2a$ – товщина пластинки, z – координата вздовж сторони довжиною $2a$, початок відліку на осі симетрії пластинки. Довжина пластинки $L \gg a$. Експериментатор пускає промінь світла у пластинку майже паралельно осі x у точці з координатою $z = z_0$. Якою траєкторією буде рухатись світло? Визначте ефективну швидкість світла в пластинці, якщо час проходження світла через пластинку дорівнює t. Ефективна швидкість розраховується як середній шлях світла за одиницю часу. На якій відстані від осі симетрії світло вийде з пластинки?

Рус.

Физик-экспериментатор хочет исследовать оптические свойства неоднородной пластинки, показатель преломления которой меняется по закону $n = \frac{n_0}{1+|z|/a}$, где $2a$ – толщина пластинки, z – координата вдоль стороны диной $2a$, начало отсчета на оси симметрии пластинки. Длина пластинки $L \gg a$. Экспериментатор пускает в пластинку луч почти параллельно оси x в точке с координатой $z = z_0$. По какой траектории будет двигаться свет? Определите эффективную скорость света в пластинке, если время прохождения света через пластинку равно t. Эффективная скорость света рассчитывается как средний путь света за единицу времени. На каком расстоянии от оси симметрии свет покинет пластинку?



Розв'язок



Розглянемо малу частинку траєкторії світла. Очевидно, що траєкторія світла у пластинці з неоднорідним показником заломлення не буде прямою. Однак, у деяких випадках, на перший погляд, складної залежності $n(z)$, траєкторія може все одно бути простою кривою.

Пластинку можна подумки розбити на множину тонких шарів, перпендикулярних осі z, шари можна вибрати достатньо тонкими, щоб зміною показника заломлення у кожному окремому шарі можна було знехтувати. Запишемо закон заломлення для променя, коли, він знаходиться у точці з координатою z і проходить границю розділу сусідніх шарів. Кут падіння – α, кут заломлення – $\alpha + \Delta\alpha$.

$$n(z_0) = n(z)\sin\alpha = n(z+\Delta z)\sin(\alpha+\Delta\alpha)\,, \text{або}$$

$$\frac{1}{1+\frac{z_0}{a}} = \frac{\sin\alpha}{1+\frac{z}{a}} = \frac{1}{1+\frac{z+\Delta z}{a}}(\sin\alpha\cos\Delta\alpha + \sin\Delta\alpha\cos\alpha).$$

$|\Delta\alpha| \ll 1$, бо показники заломлення шарів z і $z+\Delta z$ відрізняються мало, отже $\cos\Delta\alpha \approx 1$, $\sin\Delta\alpha \approx \Delta\alpha$. Звідси отримуємо:

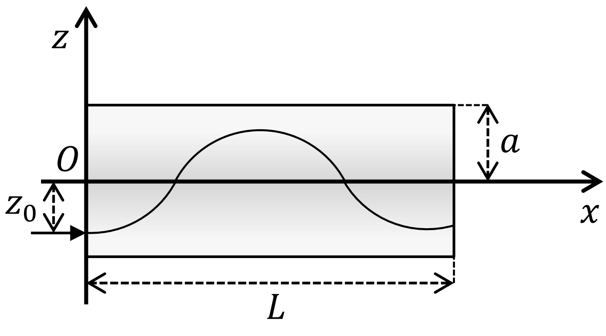
$$\Delta z = (a + z_0)\cos\alpha \cdot \Delta\alpha.$$

Також помітимо, що для відстані Δl, що пройшов промінь, і зміни координати Δz виконується рівність $\Delta l \cos\alpha = \Delta z$ Отже, маємо такий вираз:

$$\frac{\Delta l}{\Delta\alpha} = a + z_0 = \text{const}.$$

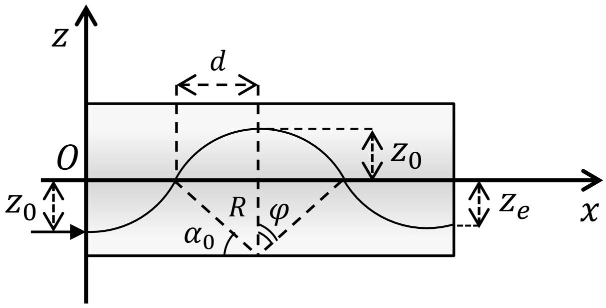
Таку властивість з плоских кривих має лише коло, оскільки траєкторія світла з заданими початковими умовами однозначно визначена, то траєкторія має бути дугою кола радіусом $R = a + z_0$, центр якого розташований на відстані a від осі.

Модуль середньої швидкості світла в пластинці: $v_{\text{сер}} = \frac{L}{t}$. Проте наведемо також підрахунок середньої шляхової швидкості v.



коли промінь рухається у верхній половині пластинки, то він рухається по дузі кола з центром на нижньому краю пластинки і радіусом R. Нижня частина траєкторії – аналогічне коло з центром на верхній поверхні пластинки. Отже, траєкторія буде частинами кіл, які впорядковані, як на малюнку.

Знайдемо, яку відстань вздовж x проходить промінь, рухаючись від середини то точки максимального відхилення від середини:



$$d = \sqrt{R^2 - (R - |z_0|)^2} = \sqrt{z_0^2 + 2a|z_0|}.$$

Довжина однієї дуги кола:

$$l_n = 2R\varphi = 2(a + |z_0|)\arccos\left(\frac{a}{a + |z_0|}\right).$$

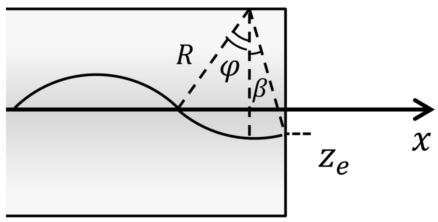
Оскільки $L \gg a$, отримаємо формулу для довжини шляху світла – l.

$$l = l_n \frac{L}{2d} = \frac{L(a + |z_0|)}{\sqrt{z_0^2 + 2a|z_0|}}\arccos\left(\frac{a}{a + |z_0|}\right).$$

Тоді ефективна швидкість світла:

$$v = \frac{L(a + |z_0|)}{t\sqrt{z_0^2 + 2a|z_0|}}\arccos\left(\frac{a}{a + |z_0|}\right).$$

Щоб знайти $|z_e|$, вже не можна нехтувати початковими і кінцевими частинами кола, бо тільки поведінка променя на останній дузі кола має вирішальне значення. Знайдемо, яку частину останнього кола проходить світло перед виходом з пластинки:



$$d_e = 2d\left\{\frac{L - d}{2d}\right\}.$$

Фігурна дужка – функція дробової частини. Формула наведена вище враховує найпершу «чверть хвилі» і d_e дорівнює останній частині «півхвилі».

Розглянемо останню частину кола для світла перед виходом. З теореми Піфагора знайдемо відстань до осі симетрії, на якій світло покидає пластинку:

$$|z_e| = \sqrt{R^2 - (d - d_e)^2} - a = \sqrt{(a + |z_0|)^2 - \left(\sqrt{z_0^2 + 2a|z_0|} - 2d\left\{\frac{L - d}{2d}\right\}\right)^2} - a,$$

Отже, отримаємо таку залежність від відстані до осі симетрії:

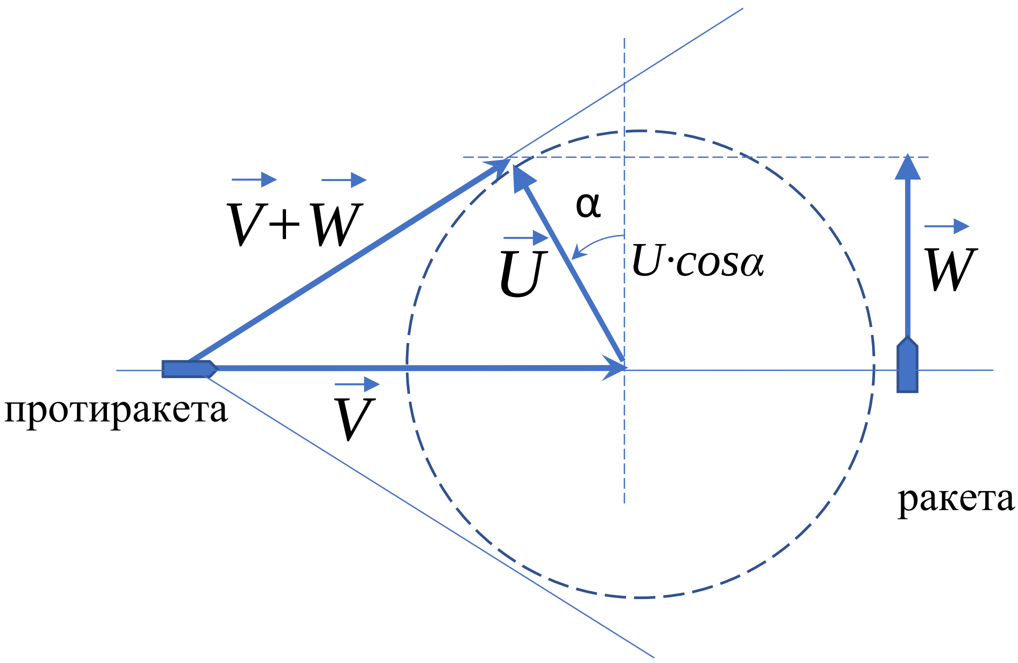
$$|z_e| = \sqrt{a^2 + 4d^2\left(\left\{\frac{L - d}{2d}\right\} - \left\{\frac{L - d}{2d}\right\}^2\right)} - a,$$

де $d = \sqrt{z_0^2 + 2a|z_0|}$.

10.4. Протиракета, яка запущена на перехоплення іншої ракети розривається у деякий момент часу на велику кількість уламків, що розлітаються рівномірно відносно центра мас по всім напрямкам зі швидкістю U. В цей момент швидкість протиракети дорівнює V і направлена на ракету, що перехоплюється. Ракета рухається перпендикулярно до напрямку V зі швидкістю W. Знайдіть можливе значення W при яких ракета буде уражена за умови, що $U < V$.

Розв'язок:

Розглянемо рух уламків в нерухомій системі стороннього спостерігача. До швидкостей уламків додається початкова швидкість протиракети, тому уламки розлітаються в конус – див. рисунок.



Ракета буде уражена, якщо складова швидкості уламків, яка перпендикулярна напрямку руху протиракети буде більше ніж швидкість ракети

$$W \le U \cdot cos\alpha$$

Оскільки уламки розлітаються у всіх напрямках, то зрозуміло, що відповідь:

$$W \le U$$

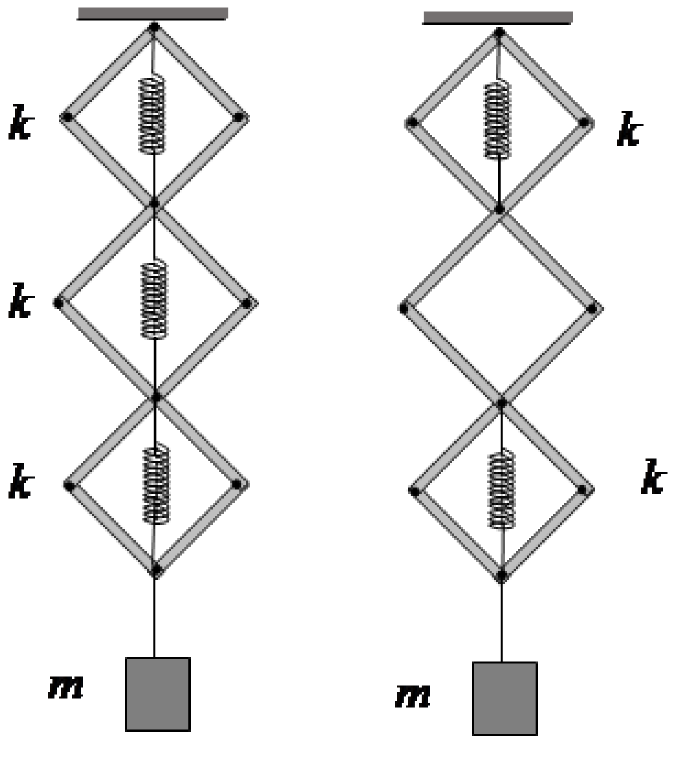
Відповідь: Для швидкостей ракети менше вказаної вона буде уражена.

Коментар: 1) Дія сили тяжіння (якщо її враховувати не змінює вказаної відповідь, оскільки однаково впливає на всі тіла вказані в задачі.

2) Перехід в будь-яку іншу систему не змінює вказаної умови.

10 клас, задача №5

Умова. На рис. *а* зображена конструкція, що називається «нюрнберзькі ножиці». Вона складається зі стрижнів, сполучених шарнірно. До нижнього вузла конструкції підвішений тягарець масою *m*. Від «витягування» конструкцію утримують три однакові пружини жорсткості *k*, що сполучають сусідні вузли (вважайте, що маси пружин і стрижнів набагато менші за масу тягарця). Через деякий час середня пружина розривається (рис. *б*). Знайдіть амплітуду і період коливань, що виникають після цього.



а)   б)

Розв'язок.

Нехай положення тягарця задається координатою *x* по осі, що спрямована вниз, причому $x = 0$ у випадку, коли пружини недеформовані. Тоді в першому випадку (випадку трьох пружин) потенціальна енергія системи може бути записана у вигляді:

$$E_{p1}(x) = -mgx + 3 \cdot \frac{k}{2} \cdot \left(\frac{x}{3}\right)^2 = \frac{\tilde{k}_1}{2} \cdot (x - x_1)^2 + U_1,$$

де $\tilde{k}_1 = \frac{k}{3}$, $x_1 = \frac{3mg}{k}$.

У другому ж випадку (випадку двох пружин) потенціальна енергія системи може бути записана у вигляді:

$$E_{p2}(x) = -mgx + 2 \cdot \frac{k}{2} \cdot \left(\frac{x}{3}\right)^2 = \frac{\tilde{k}_2}{2} \cdot (x - x_2)^2 + U_2,$$

де $\tilde{k}_2 = \frac{2k}{9}$, $x_2 = \frac{9mg}{2k}$.

Має бути зрозумілим, що амплітуда A коливань, про які йдеться в умові, буде дорівнювати $x_2 - x_1$. Отже, отримаємо першу відповідь:

$$\boxed{A = \frac{3mg}{2k}}.$$

Період коливань у другому випадку (випадку двох пружин) знайдеться з формули

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\tilde{k}_2}}.$$

Отже, отримаємо другу відповідь:

$$\boxed{T = 3\pi\sqrt{\frac{2m}{k}}}.$$