

8

8.1. Вважаємо кімнату великою настільки, що температура повітря в ній під час нагрівання води або танення льоду не змінюється. Потужність нагрівання води за законом теплообміну Ньютона прямо пропорційна різниці температур повітря та води $P = \alpha(t_0 - t)$. Отже, під час нагрівання потужність змінюється зі збільшенням температури води, і для розрахунку кількості теплоти, що отримує вода, будемо використовувати середнє значення потужності $cm(t_2 - t_1) = P > \tau_1$. (1)

З визначенням середньої потужності маємо певні труднощі, бо не знаємо, за яким законом змінюється температура води із плином часу. Для спрощення розв'язку будемо вважати, що температура лінійно залежить від часу. Тоді середню потужність можна записати як середнє арифметичне із початкового та кінцевого значень потужності $\langle P \rangle = \frac{\alpha}{2}(2t_0 - t_1 - t_2)$. (2)

З таненням льоду ситуація набагато простіша, бо температура льоду є сталою під час усього процесу танення $\lambda m = \alpha \tau_2(t_0 - t_1)$. (3)

Розв'язуючи систему рівнянь (1) – (3), знаходимо питому теплоту плавлення льоду:

$$\lambda = \frac{2c\tau_2(t_0 - t_1)(t_2 - t_1)}{\tau_1(2t_0 - t_1 - t_2)} = 352 \text{ кДж/кг}$$

8.2.

1. Знайдемо довжину стежки з умови задачі (100 м висоти – 1 км стежки, то 500 м висоти – 5 км стежки). $L = 5 \text{ км}$.

Визначимо, за скільки часу кожен пройде цей шлях, та відповідно в котрій годині буде на горі:

$$t_6 = L/v_6 = 5:2 = 2,5 = 5/2 \text{ (год)} \text{ на годиннику буде } 6 \text{ год} + 2 \text{ год } 30 \text{ хв} = 8 \text{ год } 30 \text{ хв};$$

$$t_d = L/v_d = 5:3 = 5/3 \text{ (год)} \text{ на годиннику буде } 7 \text{ год } 30 \text{ хв} + 1 \text{ год } 40 \text{ хв} = 9 \text{ год } 10 \text{ хв}.$$

Висновок: бабуся і дідусь зустрінуться на горі, куди бабуся прийде раніше на 40 хв.

Зустріч дідуса з бабусяю відбудеться на висоті 500 м.

2. Знайдемо відстань між дідусем і бабусяю в момент часу, коли дідусь с собакою почав рух: $l_0 = v_6 \Delta t = 2 \text{ км/год} \cdot 1,5 \text{ год} = 3 \text{ км}$.

Позначимо: v_1 – швидкість, з якою собака рухається вгору, v_2 – швидкість, з якою собака рухається вниз. Час, за який Сірко наздожене бабусяю 1-й раз: $t_0 = l_0/(v_1 - v_6)$ (2.1), $t_0 = 3 \text{ км}/(8 \text{ км/год} - 2 \text{ км/год}) = 0,5 \text{ год} = 30 \text{ хв}$.

Відстань між дідом і бабою на момент, коли бабуся зустрілася с собакою 1-й раз: $l'_0 = l_0 - (v_d - v_6)t_0$ (2.2).

$$\text{Підставимо (2.1) в (2.2): } l'_0 = l_0(v_d - v_6)l_0/(v_1 - v_6) = l_0((v_1 - v_d)/(v_1 - v_6)) \text{ (2.3).}$$

Сірко подолає цю відстань за час (враховуючи (2.3)):

$$t'_0 = l'_0/(v_2 + v_d) = l_0(v_1 - v_d)/((v_1 - v_6) \cdot (v_2 + v_d)), t'_0 = (1/6) \text{ год} = 10 \text{ хв}.$$

Знайдемо відношення часу руху вгору та часу руху вниз (2.4):

$$\frac{t_0}{t'_0} = \frac{l_0(v_2 + v_d)(v_1 - v_6)}{(v_1 - v_6)l_0(v_1 - v_d)} = \frac{(v_2 + v_d)}{(v_1 - v_d)}.$$

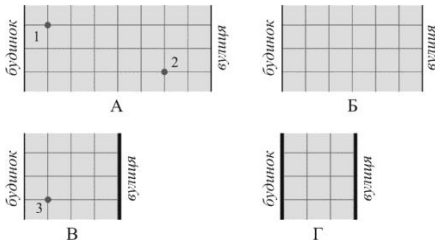
Висновок: співвідношення часу руху собаки вгору і вниз не залежить від відстані між бабусею і дідусем, та від швидкості бабусі, а залежить лише від швидкості руху собаки вгору і вниз та швидкості дідуса. Тобто це співвідношення (2.4) можна узагальнити для всього часу руху собаки вгору і вниз (2.5): $\frac{t}{t'} = \frac{(v_2 + v_d)}{(v_1 - v_d)} = \frac{3}{1}$. (2.5)

Загальний час руху собаки дорівнює загальному часу руху дідуса. Зі співвідношення (2.5) отримаємо для загального часу руху: $T_1/T_2 = 3/1$, звідси $T_1 = 3T_2$, (2.6), де T_1 – загальний час руху собаки вгору, T_2 – загальний час руху собаки вниз. Загальний час руху собаки вгору-вниз: $T = T_1 + T_2 = T_d = L/v_d$ (2.7). З (2.6) і (2.7) знайдемо $T_1 = 5/4$ год = 1 год 15 хв, $T_2 = 5/12$ год = 25 хв, Розв'язок системи рівнянь (2.6) – (2.7). Шлях, що пройшов собака вгору: $L_1 = v_1 T_1$, $L_1 = 8$ км/год 1 год 15 хв = 10 км. Шлях, що пройшов собака вниз: $L_2 = v_2 T_2$, $L_2 = 12$ км/год 25 хв = 5 км. Загальний шлях: $L_{1-2} = v_1 T_1 + v_2 T_2 = 15$ км.

3. Втрата енергії на супротив силі тяжіння відбувається під час руху вгору, оскільки при $L = 5$ км висота гори $h = 0,5$ км, то при $L_1 = 10$ км висота, що відповідає зміні потенціальної енергії собаки $h_c = 2h$, $\Delta E/m = mgh_c/m$, $\Delta E/m = gh_c = 9,8$ м/с²·1000 м = = 9,8 кДж, 1 кал = 4,2 Дж, $\Delta E/m = (9800/4,2)$ кал = 2,33 ккал.

8.3. У першому випадку – $F_A = m_n g + kV$, у другому – $F_A + kU = m_t g$, k – коефіцієнт пропорційності, однаковий для обох кульок для зв'язаних тіл $2F_A = (m_n + m_t)g + 2kW$, звідки $W = (V - U)/2$. При $V > U$ кульки спливають, а якщо $V < U$, – то тонуть. При $V = U$ – вони знаходяться у рівновазі, тобто $W = 0$.

8.4. Оскільки температура не змінюється, кожний шар речовини за певний час τ отримує та віддає однаково кількість теплоти Q . Звідси випливає, що всередині цегляної стінки температура змінюється лінійно: при переміщенні на одну клітинку перпендикулярно поверхні стінки зміна температури $\Delta t_{кл}$ буде однаковою (але різною для різних стінок). Через теплоізолюючий шар протягом часу τ теж проходить кількість теплоти Q . Вважатимемо, що для кожного шару речовини потужність теплопередачі через одиницю площі пропорційна різниці температур Δt на двох поверхнях цього шару (отже, потік тепла через кожну стінку пропорційний $\Delta t_{кл}$ для цієї стінки). Врахуємо також, що за відсутності додаткового теплоізолюючого шару температура поверхні стінки практично збігається з температурою повітря біля неї. Для стінки А: $\Delta t_{клА} = \frac{t_1 - t_2}{5} = 5^\circ\text{C}$. Звідси випливає, що температура всередині будинку $t_{буд} = t_1 + \Delta t_{клА} = 24^\circ\text{C}$, а температура на вулиці – $t_{вуд} = t_2 - 2\Delta t_{клА} = -16^\circ\text{C}$. Позначимо Q_A втрати тепла протягом певного фіксованого часу через стінку А. Для стінки Б: $\Delta t_{клБ} = \frac{40^\circ\text{C}}{6} = \frac{4}{3}\Delta t_{клА}$. Отже, втрати тепла че-



рез стінку Б дорівнюють $Q_B = \frac{4}{3}Q_A$. Для стінки В $\Delta t_{\text{кл}}$ має таке саме значення, як

для стінки А. Це означає, що різниця температур між поверхнями тонкого додаткового теплоізолюючого шару дорівнює 20°C , як і між поверхнями цегляної стінки. Отже, цей додатковий шар еквівалентний цегляній стінці завтовшки 4 клітинки. Втрати тепла $Q_B = Q_A$.

Для стінки Г з урахуванням додаткових теплоізолюючих шарів ефективна товщина цієї стінки становить 11 клітинок. Отже, $\Delta t_{\text{клГ}} = \frac{8}{11}\Delta t_{\text{клА}} = 3,64^\circ\text{C}$. Отже, $Q_G = \frac{8}{11}Q_A$.

Тепер можна дати відповіді на поставлені запитання. 1) $\frac{Q_B}{Q_G} = 1,8$.

2) Додаткові теплоізолюючі шари збільшують ефективну товщину стінки Г від 3 до 11 клітинок, тобто зменшують теплові втрати в 11/3 разу (приблизно в 3,7 разу).

3) Різниця температур між будинком і вулицею становить 40°C . На кожний із додаткових теплоізолюючих шарів припадає по 4/11 від цієї різниці температур, тобто по $14,5^\circ\text{C}$. Отже, температури на межах цегляної стінки з додатковими шарами дорівнюють $9,5$ і $-1,5^\circ\text{C}$.

4) За нових умов потік тепла через стінки становить 55 % від початкового. Отже, різниця температур усередині та зовні дорівнює $0,55 \cdot 40^\circ\text{C}$, тобто 22°C . Отже, температура в будинку тепер 22°C , а на зовнішній поверхні цегляної стінки – $\frac{4}{11} \cdot 22^\circ\text{C} = 8^\circ\text{C}$.

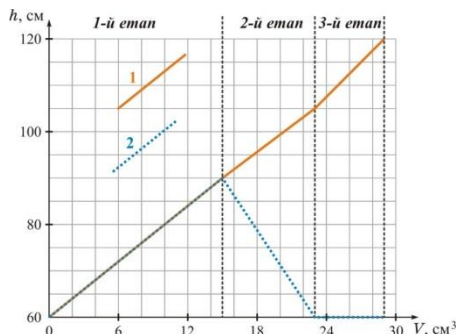
8.5. Розглянемо три етапи процесу.

1. Рівень води в правому вертикальному коліні зростає від b до $b+c$, при цьому рівень води в лівому коліні зменшується на c . Очевидно, на цьому етапі (як і на наступних) залежність висот h_1, h_2 від V є лінійною (на цьому етапі $h_1 = h_2$). Коли кульки піднімаються до точки B , висоту стовпа гасу $h_{\text{гас}}$ можна знайти з умови рівності тисків в обох колінах на рівні межі обох рідин: $\rho_{\text{гас}} g h_{\text{гас}} = 2\rho_{\text{вод}} g h_{\text{вод}}$, звідки $h_{\text{гас}} = 2\rho_{\text{вод}} c / \rho_{\text{гас}} = 75$ см. Зазначимо, що гас у лівому коліні посудини доходить якраз до точки A . Об'єм налитого гасу $V_1 = S h_{\text{гас}} = 15$ см³.

2. Заповнення похилої трубки AB гасом. При цьому гас потрапляє й у праве коліно, тисне на воду та спричиняє зворотне перетікання води в ліве коліно. Цей етап закінчується, коли гас у *обох* колінах посудини встановиться на рівні точки A . При цьому й рівні води мають бути однаковими, тобто повернутися до початкових. Наприкінці цього етапу $h_1 = b+c+d = 105$ см (перша кулька плаває на поверхні гасу), $h_2 = b = 60$ см (друга кулька плаває на межі води та гасу), а загальний об'єм налитого гасу $V_2 = 2S(c+d) + S\sqrt{a^2 + d^2} = 23$ см³.

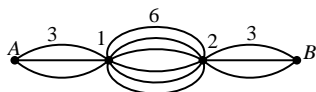
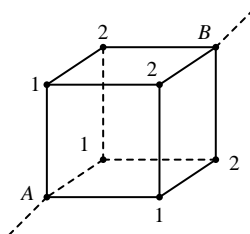
3. На останньому етапі йде заповнення верхніх ділянок вертикальних трубок, рівень гасу в них однаковий. Рівні води не змінюються, $h_2 = b = \text{const}$. Наприкінці процесу $h_1 = b + c + d + f = 120$ см, об'єм гасу $V_3 = V_2 + 2Sf = 29 \text{ см}^3$.

Графіки залежностей $h_1(V)$, $h_2(V)$ наведені на малюнку.



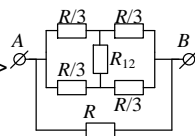
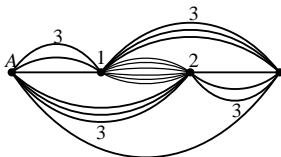
9

9.1. 1. Визначимо опір початкового куба. Через точки А і В проходить вісь симетрії куба АВ, відносно якої: точки 1 – симетричні, точки 2, так само симетричні. Це означає, що існує симетрія струмів і електричного поля, тобто потенціали всіх точок 1 однакові, так само і для точок 2. Якщо з'єднати всі точки 1, струму між ними не буде, струми в дротах не зміняться аналогічно для точок 2. Тоді еквівалентне коли має вигляд:



$$R_{AB1} = \frac{R}{3} + \frac{R}{6} + \frac{R}{3} = \frac{5R}{6}.$$

При наявності всіх діагоналей симетрія не зміниться. З'єднаємо симетричні точки (викинувши дроти, що з'єднують симетричні точки, в них струму немає).



Кількість дротів між точками 1 і 2 не цікава, як і опір R_{12} між цими точками, оскільки маємо збалансований місток Уїтстона (між 1 і 2 струму немає).

$$R_{AB2} = \frac{1}{R/3} + \frac{1}{3} = \frac{R}{4} \Rightarrow \frac{R_{AB1}}{R_{AB2}} = \frac{10}{3} = 3.3. \text{ Опір куба зменшиться у 3,3 раза.}$$

2. Відповідаючи на друге питання використовувати симетрію не можна (її немає). Це питання для комп'ютера або омметра.

9.2. На мал. 1 зображена система (“Нюрнберзькі ножиці”) в недеформованому стані. Якщо причепити тіло m (або прикласти силу $T = mg$), система деформується (видовжується на x), кожна пружина розтягується на $x_1 = x/3$ (не залежно від кількості пружин, мал. 2). Для визначення сили T , що зрівноважує систему при деформації x , скористаємось методом віртуальних переміщень. Нехай під дією сили T система видовжилась (нескінченно мала) на dx (переміщення точки 3), див. мал. 3. Тоді сума робіт всіх сил зав’язків дорівнює нулю. Всі сили пружності однакові

$$F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = F_5 = F_6 = kx_1.$$

При пружини. $Tdx - F_6 dx + F_5 \frac{2}{3} dx - F_4 \frac{2}{3} dx + F_3 \frac{1}{3} dx - F_2 \frac{1}{3} dx + F_1 \cdot 0 = 0.$

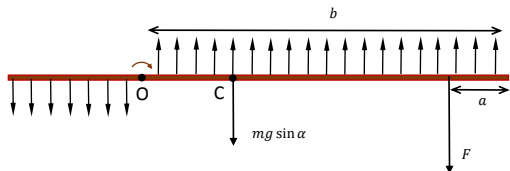
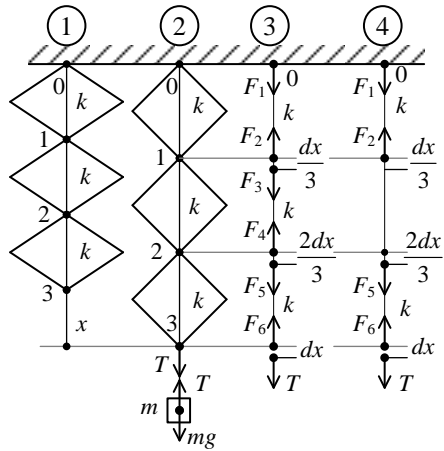
$$T = F_6 = kx_1 = \frac{k}{3} x = k_3 x. \quad k_3 = k/3 - \text{коефіцієнт жорсткості системи (три пружини).}$$

Дві пружини. $Tdx - F_6 dx + F_5 \frac{2}{3} dx - F_2 \frac{1}{3} dx + F_1 \cdot 0 = 0. \quad T = F_6 \frac{2}{3} = \frac{2}{3} kx_1 = \frac{2}{3} kx = k_2 x.$

$k_2 = 2k/9$ – коефіцієнт жорсткості системи (дві пружини).

У момент розриву пружини деформовані на $mg = T = k_3 x_0 \Rightarrow x_0 = mg/k_3 = 3mg/k$, це відповідає силі (в системі з двох пружин) $F = k_2 x_0 = 2mg/3$. На тіло m діють сила F і mg . $F_R = mg - F = mg/3$.

9.3. Інтуїтивно здається, що мураха має прикласти силу до краю палички вниз. Доведемо це, припустивши, що силу F прикладено на деякій відстані a від кінця палички. Початкове зміщення палички можна уявити як поворот навколо миттєвої осі обертання. Оскільки у площині схилю на паличку діють проекція сил тяжіння $mg \sin \alpha$ і сила F перпендикулярно паличці, то з умови статичної рівноваги саме у цьому ж напрямку має діяти і сили тертя (інакше паличка матиме прискорення), що можливо тільки тоді, коли миттєва вісь обертання знаходиться на лінії палички. Максимальне значення сили тертя $\mu mg \cos \alpha$ більше за $mg \sin \alpha$, оскільки за умовою, паличка лежить на поверхні. Тоді, якщо вісь обертання поза паличкою, то всі розподілені вздовж палички сили тертя діятимуть проти схилю і тоді $F = \mu mg \cos \alpha - mg \sin \alpha$, але це внаслідок різних плечей сили можливо тільки, коли силу F прикладено до центру мас. Висновок: миттєва вісь обертання проходить через



паличку (точка О), сили тертя з двох сторін від неї діятимуть у різних напрямках (див. мал.).

Сила тертя рівномірно розподілена вздовж палички. Отже, справа від точки О діє вгору вздовж схилу сила $\frac{b}{l}\mu mg \cos \alpha$, а зліва – вниз сила $\frac{l-b}{l}\mu mg \cos \alpha$, які можна вважати прикладеними до середин відповідних відрізків. Тоді

$$F = \frac{b}{l}\mu mg \cos \alpha - \frac{l-b}{l}\mu mg \cos \alpha - mg \sin \alpha.$$

Щоб знайти, як залежить відстань від краю палички до осі обертання b від відстані прикладання сили a , напишемо умови моментів відносно точки, через яку проходить сила F :

$$\frac{b}{l}\mu mg \cos \alpha \left(\frac{b}{2} - a\right) = mg \sin \alpha \left(\frac{l}{2} - a\right) + \frac{l-b}{l}\mu mg \cos \alpha \left(\frac{l+b}{2} - a\right).$$

Введемо для зручності безрозмірні $x = a/l$, $y = b/l$, $k = \tan \alpha/\mu$ і перепишемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} F = \mu mg \cos \alpha (2y - 1 - k), \\ y^2 - 2xy = (k + 1) \left(\frac{1}{2} - x\right). \end{cases}$$

Виражаємо y з другого рівняння і підставляємо у перше.

$$F = \mu mg \cos \alpha (\sqrt{z^2 + 1 - k^2} - z),$$

де $z = 1 + k - 2x > 0$. Якщо вираз для сили переписати у вигляді

$$F = \mu mg \cos \alpha \frac{1 - k^2}{\sqrt{z^2 + 1 - k^2} + z},$$

стає зрозумілим, що сила зменшується при збільшенні z , а, отже, при зменшенні x – до 0. Тоді $x = 0$, $y = \sqrt{2(1+k)}/2$, $z = 1 + k$.

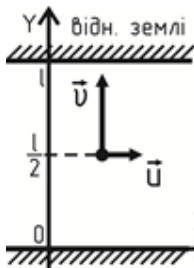
$$F_{\min} = \mu mg \cos \alpha (\sqrt{2(1+k)} - (1+k)).$$

Якщо б паличка знаходилась на горизонтальній площині, $k = \tan \alpha/\mu = 0$ і $F_{\min} = \mu mg(\sqrt{2} - 1) \approx 0,414\mu mg$, а відстань від краю до осі обертання була б $b = \frac{\sqrt{2}}{2}l \approx 0,707l$.

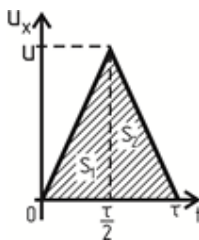
9.4. Розглянемо рух човна відносно землі, розклавши його на взаємно перпендикулярні складові: рух вздовж осі X паралельно до берега та рух вздовж осі Y перпендикулярно до берега (мал. 1).

Вздовж осі Y човен рухається рівномірно прямолінійно зі швидкістю v , бо швидкість течії має нульову проекцію на цю вісь і течія не впливає на рух човна у цьому напрямі: $y(t) = vt$, (1) рівняння

руху човна по осі Y , $\tau = \frac{l}{v}$. (2) час переправи човна через річку.



мал. 1



мал.2

Вздовж осі X човен рухається прямолінійно, але нерівномірно, бо паралельно до берега його рух обумовлений лише течією ріки, а її швидкість лінійно залежить від координати човна по осі Y . Рівняння (1) відображає лінійну залежність координати човна по осі Y від часу, отже, швидкість човна по осі X також лінійно залежить від часу руху (мал. 2). Використовуючи геометричний зміст шляху тіла, знаходимо відстань, на яку течія знесе човен під час переправи, як площу двох прямокутних трикутників $s = S_1 + S_2 = \frac{1}{2} \frac{u\tau}{2} + \frac{1}{2} \frac{u\tau}{2} = \frac{u\tau}{2} = \frac{ul}{2\nu} = \frac{2 \cdot 100}{2 \cdot 4} = 25$ м.

9.5.

1) Площа поперечного перерізу нитки $s = \frac{\pi d^2}{4}$. У робочому режимі опір нитки $R_1 = \frac{U^2}{P} = \rho \frac{L}{s} = \rho_0 \frac{LT}{sT_0}$. Отже, $LT = \frac{sT_0 U^2}{\rho_0 P}$. З іншого боку, зазначена на лампі потужність має збігатися з потужністю випромінювання з половини бокової поверхні нитки $S = \frac{\pi dL}{2}$, тобто $P = \frac{\sigma \cdot \pi dL \cdot T^4}{2}$. З отриманих рівнянь випливає, що:

$$T = \left(\frac{2\rho_0 P^2}{\pi \sigma d s T_0 U^2} \right)^{\frac{1}{3}} = \frac{2}{d} \left(\frac{\rho_0 P^2}{\pi^2 \sigma T_0 U^2} \right)^{\frac{1}{3}} \cong 1950 \text{ K},$$

$$L = \pi d^3 \left(\frac{\pi^2 \sigma}{2P} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{T_0 U^2}{4\rho_0 P} \right)^{\frac{4}{3}} \cong 1,56 \text{ м.}$$

2) Очевидно, протягом часу 0,01 с температура T_1 нитки розжарення не встигає дуже суттєво змінитися. Ця температура залежить від середньої потужності струму

$$P_1 = \frac{U^2}{2R_1} = \frac{U^2 T_0 s}{2\rho_0 T_1 L}.$$

З енергетичного балансу $\frac{U^2 T_0 s}{2\rho_0 T_1 L} = \frac{\sigma \cdot \pi dL \cdot T_1^4}{2}$ отримуємо $T_1^5 = \frac{U^2 T_0 s}{\pi \sigma d L^2 \rho_0 L} = \frac{U^2 T_0 d}{4\sigma L^2 \rho_0}$, тобто $T_1 \cong 1690$ К. Потужність $P_1 \cong 34,4$ Вт.

Як і слід було очікувати, потужність лампи суттєво зменшилася.

3) Очевидно, за відсутності струму температура нитки дещо знижується, а потім знов підвищується. Оцінимо перепад температури ΔT між моментами закінчення «імпульсу» напруги (відповідає максимальній температурі) та початком наступного «імпульсу» (відповідає мінімальній температурі): $m\Delta T = P_1 \tau$. Тут $m = \rho^* L S$ — маса нитки розжарення, ρ^* — густина вольфраму, 0,01 с — проміжок часу коли напруга відсутня. Звідси дістанемо $\Delta T = \frac{4P_1 \tau}{\pi \sigma \rho^* d^2 L} \cong 110$ К.

Отже, можна вважати, що відхилення температури від середньої сягає ± 55 К, що дійсно значно менше від отриманого значення температури. Проте таких відхилень досить, щоб виникало неприємне та стомлююче «підморгування» лампи.

10.1. Див. 9.1.

10.2. На малюнку фрагмент ілюстрації з будівельного сайту. Оскільки частинки мають однакові розміри у вертикальному і горизонтальному напрямках, як на малюнку з умови, вважаємо їх кубічними цеглинками. Тоді кут, під яким розходяться навантаження у ґрунті, дорівнює 45° .

Знайдемо точку, що рівновіддалена від сторін прямокутного трикутника зі сторонами 3, 4, 5. Взагалі, мова йде про центр вписаного кола, але і без цього знання її легко знайти. З малюнку, де відстані наведені у SI, знаходимо $5 = 3 - x + 4 - x$, звідки $x = 1$ м.

Розподіл сил знайдемо з умови статичної рівноваги (правила моментів сил) відносно сторін трикутника. Відносно сторони 3 м (вісь обертання – вертикальна пунктирна лінія на малюнку 2) маємо (у SI)

$$mgx = F_1 \cdot 4 \text{ звідки } F_1 = \frac{mg}{4} = 75 \cdot 10^3 \text{ Н.}$$

$$\text{Відносно сторони 4 м (горизонтальний пункт)} - mgx = F_2 \cdot 3 \text{ і } F_1 = \frac{mg}{3} = 100 \cdot 10^3 \text{ Н.}$$

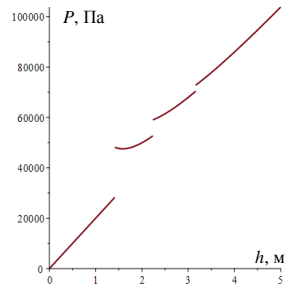
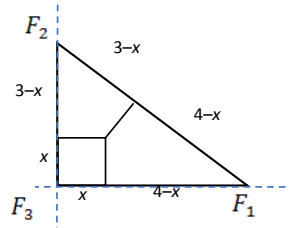
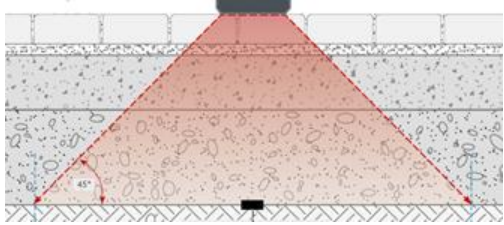
Значення третьої сили, яка відповідає прямому куту, можна найти, наприклад, таким чином: $F_3 = mg - F_1 - F_2 = mg - \frac{mg}{4} - \frac{mg}{3} = \frac{5mg}{12} = 125 \cdot 10^3 \text{ Н.}$

Оскільки площі опор в умові не задані, знехтуємо їх розмірами при визначенні тиску на глибині h . Вважатимемо, що від кожної опори йде вниз конус додаткового навантаження з кутом при вершині 45° . Тоді радіус конуса дорівнює його висоті h ,

отже, додатковий тиск буде $\frac{F}{\pi h^2}$, а загальний (без

урахування атмосферного): $P = \rho gh + \frac{F}{\pi h^2}$.

Відстані від вершин трикутника до лінії центру мас знайдемо з теореми Піфагора: від $F_1 - \sqrt{10}$ м, від $F_2 - \sqrt{5}$ м, від $F_3 - \sqrt{2}$ м. Тоді на глибині $\sqrt{2}$ м конус додаткового навантаження від найближчої опори почне впливати на загальний тиск. Тиск від другої опори «підключиться» на глибині $\sqrt{5}$ м, а від першої – на глибині $\sqrt{10}$ м.



$$P = \rho gh + \frac{F}{\pi h^2}, \text{ де } \begin{cases} F = 0, & h < \sqrt{2} \\ F = F_3, & \sqrt{2} \leq h < \sqrt{5} \\ F = F_3 + F_2, & \sqrt{5} \leq h < \sqrt{10} \\ F = mg, & h \geq \sqrt{10} \end{cases}$$

Графік залежності тиску у ґрунті від глибини під точкою центру мас має розриви, а також невеликий мінімум для глибини $\approx 1,6$ м, що неможливо для рідин та газів, а у нас виникає внаслідок конічного розповсюдження навантаження у напрямку сили.

10.3. Розглянемо малу частинку траєкторії світла. Очевидно, що траєкторія світла у пластинці з неоднорідним показником заломлення не буде прямою. Однак, у деяких випадках, на перший погляд, складної залежності $n(z)$, траєкторія може все одно бути простою кривою.

Пластинку можна подумки розбити на множини тонких шарів, перпендикулярних осі z , шари можна вибрати достатньо тонкими, щоб зміною показника заломлення у кожному окремому шарі можна було знехтувати. Запишемо закон заломлення для променя, коли, він знаходиться у точці з координатою z і проходить границю розділу сусідніх шарів. Кут падіння – α , кут заломлення – $\alpha + \Delta\alpha$.

$$n(z_0) = n(z) \sin \alpha = n(z + \Delta z) \sin(\alpha + \Delta\alpha), \text{ або}$$

$$\frac{1}{1 + \frac{z_0}{a}} = \frac{\sin \alpha}{1 + \frac{z}{a}} = \frac{1}{1 + \frac{z + \Delta z}{a}} (\sin \alpha \cos \Delta\alpha + \sin \Delta\alpha \cos \alpha).$$

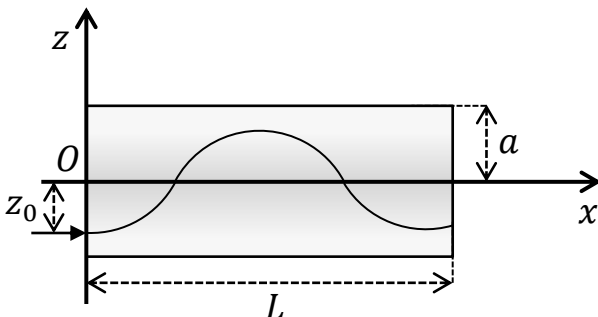
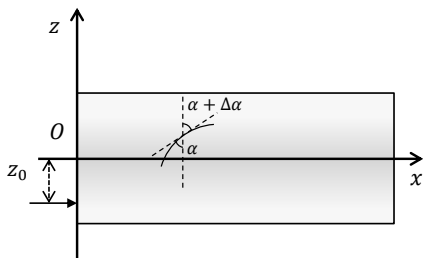
$|\Delta\alpha| \ll 1$, бо показники заломлення шарів z і $z + \Delta z$ відрізняються мало, отже, $\cos \Delta\alpha \approx 1$, $\sin \Delta\alpha \approx \Delta\alpha$. Звідси отримуємо:

$$\Delta z = (a + z_0) \cos \alpha \cdot \Delta\alpha.$$

Також зауважимо, що для відстані Δl , яку пройшов промінь, і зміни координати Δz виконується рівність $\Delta l \cos \alpha = \Delta z$. Отже, маємо такий вираз:

$$\frac{\Delta l}{\Delta\alpha} = a + z_0 = \text{const.}$$

Таку властивість з плоских кривих має лише коло, оскільки траєкторія світла з



заданими початковими умовами однозначно визначена, то траєкторія має бути дугою кола радіусом $R = a + z_0$, центр якого розташований на відстані a від осі.

Модуль середньої швидкості світла в пластинці: $v_{\text{сеп}} = \frac{L}{t}$. Проте

наведемо також підрахунок середньої шляхової швидкості v коли промінь рухається у верхній половині пластинки, то він рухається по дузі кола з центром на нижньому краю пластинки і радіусом R . Нижня частина траєкторії – аналогічне коло з центром на верхній поверхні пластинки. Отже, траєкторія буде частинами кіл, які впорядковані, як на малюнку.

Знайдемо, яку відстань вздовж x проходить промінь, рухаючись від середини до точки максимального відхилення від середини:

$$d = \sqrt{R^2 - (R - |z_0|)^2} = \sqrt{z_0^2 + 2a|z_0|}.$$

Довжина однієї дуги кола:

$$l_n = 2R\varphi = 2(a + |z_0|) \arccos\left(\frac{a}{a + |z_0|}\right).$$

Оскільки $L \gg a$, то отримаємо формулу для довжини шляху світла – l .

$$l = l_n \frac{L}{2d} = \frac{L(a + |z_0|)}{\sqrt{z_0^2 + 2a|z_0|}} \arccos\left(\frac{a}{a + |z_0|}\right).$$

Тоді ефективна швидкість світла:

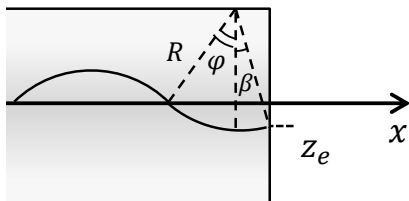
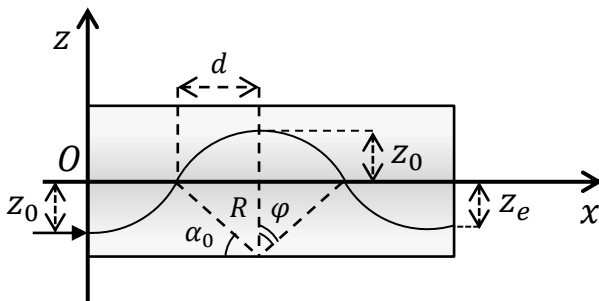
$$v = \frac{L(a + |z_0|)}{t\sqrt{z_0^2 + 2a|z_0|}} \arccos\left(\frac{a}{a + |z_0|}\right).$$

Щоб знайти $|z_e|$, вже не можна нехтувати початковими і кінцевими частинами кола, бо тільки поведінка променя на останній дузі кола має вирішальне значення. Знайдемо, яку частину останнього кола проходить світло перед виходом з пластинки:

$$d_e = 2d \left\{ \frac{L - d}{2d} \right\}.$$

Фігурна дужка – функція дробової частини. Формула, наведена вище, враховує найпершу «чверть хвилі» і d_e дорівнює останній частині «півхвилі».

Розглянемо останню частину кола



для світла перед виходом. З теореми Піфагора знайдемо відстань до осі симетрії, на якій світло покидає пластинку:

$$|z_e| = \sqrt{R^2 - (d - d_e)^2} - a = \sqrt{(a + |z_0|)^2 - \left(\sqrt{z_0^2 + 2a|z_0|} - 2d \left\{ \frac{L-d}{2d} \right\}^2 \right)^2} - a,$$

Отже, отримаємо таку залежність від відстані до осі симетрії:

$$|z_e| = \sqrt{a^2 + 4d^2 \left(\left\{ \frac{L-d}{2d} \right\} - \left\{ \frac{L-d}{2d} \right\}^2 \right)} - a,$$

де $d = \sqrt{z_0^2 + 2a|z_0|}$.

10.4. Розв'язок задачі при відсутності поля тяжіння або при розриві на невеликій відстані від ракети.

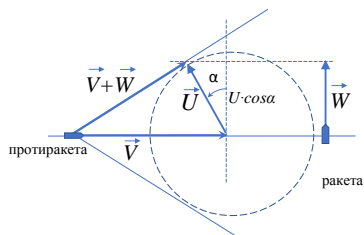
Розглянемо рух уламків в нерухомій системі стороннього спостерігача. До швидкостей уламків додається початкова швидкість протиракети, тому уламки розлітаються в конус – *див. малюнок*.

Ракета буде уражена, якщо складова швидкості уламків, яка перпендикулярна напрямку руху протиракети, буде більше ніж швидкість ракети

$$W \leq U \cdot \cos \alpha.$$

Оскільки уламки розлітаються у всіх напрямках, то зрозуміло, що відповідь:

$$W \leq U.$$



10.5. *Див. 9.2.* Оскільки з боку системи на тіло m діє квазіпружна сила $F = k_2 x$,

тіло коливається гармонічно. Період коливань тіла $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_2}} = 3\pi \sqrt{\frac{2m}{k}}$. В момент

початку коливань $x_0 = 3mg/k$. В положенні рівноваги $x_p = mg/k_2 = 9mg/(2k)$. Тоді амплітуда коливань $A = x_p - x_0 = 3mg/(2k)$.

11

11.1. Нехай індуктивність одного витка, намотаного на одне осердя, дорівнює L . Індуктивність одного витка, намотаного на два осердя, при розімкненому ключі K складає відповідно $2L$ (нагадаємо, що індуктивність – це коефіцієнт пропорційності між струмом і створеним ним магнітним потоком, $\Phi = LI$), тому повна індуктивність вхідного кола при розімкненому ключі K складає $(N - N_1) \cdot L + N_1 \cdot 2L = (N + N_1) \cdot L$.

Якщо ключ K замкнений, завдяки явищу електромагнітної індукції ідеальний замкнений виток (за умовою він не має активного опору подібно до надпровідників) повністю скомпенсує будь-які спроби змінити магнітний потік у першому осерді, тобто перетворює це осердя на немагнітне середовище. Отже, при замкненому ключі

індуктивність кожного витка визначається лише одним осердям і складає L , а індуктивність первинної обмотки – $L \cdot N$.

Тоді можна записати систему двох рівнянь для амплітуд струмів при розімкненому

та замкненому ключі К:
$$I_1 = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + [\omega L(N + N_1)]^2}}, \quad (1) \quad I_2 = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L N)^2}}. \quad (2)$$

Розв'язавши систему (1) та (2), знаходимо:
$$N_1 = N \left[\frac{(U_m/I_1)^2 - R^2}{(U_m/I_2)^2 - R^2} - 1 \right].$$

Для ідеального трансформатора $U_{вих} = \frac{N_2}{N} U_L$, (3) де, U_L – падіння напруги на ін-

дуктивному опорі $X_L = \sqrt{\left(\frac{U_m}{I_2}\right)^2 - R^2}$ первинної обмотки.

У результаті, амплітуди напруги (3) на вторинній обмотці при розімкненому та за-

мкненому ключі:
$$U_{m_вих_1,2} = \frac{N_2}{N} X_L I_{1,2} = I_{1,2} \cdot \frac{N_2}{N} \cdot \sqrt{\left(\frac{U_m}{I_2}\right)^2 - R^2}.$$

11.2. Виходячи з умови задачі про те, що потрібно _____ час, будемо шукати модель явища, за допомогою якою ми зможемо це зробити.

1. Сила тяги забезпечується за рахунок реактивної тяги, пов'язаної з імпульсом, який надають іони ксенона, що викидаються з сопла іонного двигуна з будь-якою швидкістю.

2. Для оцінки будемо вважати F сталою на вказаному проміжку часу.

3. Сила тяги F буде рівною зміні імпульсу за одиницю часу, тобто імпульсові іона P_i , що викидається з двигуна назовні, помноженому на кількість іонів N , яка викидатиметься за одиницю часу. $F = P_i N$

4. Кількість іонів, що викидаються з сопла, буде залежати від потенціалу оболонки космічної станції, яку будемо вважати металевою кулею.

5. Виходячи з закону збереження електричного заряду, якщо космічну оболонку залишають позитивно заряджені частинки, а оболонка не заземлена, то вона буде заряджатися негативним зарядом.

6. Потенціал цього заряду буде зменшувати швидкість вилітаючих позитивних зарядів до нуля.

7. Імпульс іона відповідатиме кінетичній енергії, яку цей іон набуде після прискорення напругою U . Оскільки іони односторонні, їхній електричний заряд дорівнюватиме елементарному (e). Маємо $\frac{P_i^2}{2M_i} = eU$, тобто $P_i = \sqrt{2eM_i U}$ де M_i – маса атома

ксенону.

Електричний струм, що витікає з двигуна, дорівнюватиме зарядові одного іона, помноженому на кількість іонів N , яка викидатиметься за одиницю часу: $I = eN$.

Підставляємо сюди $N \left(N = \frac{F}{P_i} = \frac{F}{\sqrt{2eM_i U}} \right)$, тоді $I = e \frac{F}{\sqrt{2eM_i U}} = F \sqrt{\frac{e}{2M_i U}}$

Електричний заряд, який накопичуватиметься на станції за час t , дорівнюватиме:

$$Q = It = tF \sqrt{\frac{e}{2M_i U}}. \text{ Іони припинять покидати станцію, коли електричний потенціал}$$

на її поверхні $\phi \geq U$. Потенціал металевої сферичної оболонки: $U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_0}$, де R_0 –

характерний розмір станції. Звідси $Q = 4\pi\epsilon_0 R_0 U$.

Прирівнюючи два вирази для заряду станції, отримаємо:

$$Q = 4\pi\epsilon_0 R_0 U = tF \sqrt{\frac{e}{2M_i U}}.$$

$$\text{Звідси час роботи двигунів: } t = \frac{4\pi\epsilon_0 R_0 U}{F} \sqrt{\frac{2M_i U}{e}} = \frac{4\pi\epsilon_0 R_0 U^{\frac{3}{2}}}{F} \sqrt{\frac{2M_i}{e}}.$$

Підставивши числові значення, отримаємо $t \approx 1.7 \cdot 10^{-9} \text{ c} = 1.7 \text{ ns}$. Це верхня гранична межа часу, яка дуже маленька.

Це свідчить про те, що заходи з електричної нейтралізації при застосуванні іонних двигунів слід застосовувати обов'язково.

11.3. Очевидно, що прискорення першого спостерігача у системі відліку K не дорівнює a_1 – прискоренню у супутній системі відліку, хоча б тому що спостерігач змг б досягти швидкостей більших за швидкість світла.

Запишемо вираз для приросту швидкості у супутній, для першого спостерігача, системі відліку K_1 (оскільки швидкість у цій системі нескінченно мала, то усіма релятивістськими ефектами всередині системи можна знехтувати):

$$dv_1' = a_1 dt'.$$

Перейдемо до системи відліку K . Для цього знайдемо приріст швидкості в системі K , який відповідає dv_1' . Для цього запишемо формулу додавання швидкостей:

$$v_1 + dv_1 = \frac{v_1 + dv_1'}{1 + \frac{v_1 dv_1'}{c^2}}.$$

Нехтуючи нескінченно малими другого і вищих порядків, отримаємо:

$$dv_1 = \left(1 - \frac{v_1^2}{c^2}\right) dv_1' = \left(1 - \frac{v_1^2}{c^2}\right) a_1 dt' = \left(1 - \frac{v_1^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} a_1 dt.$$

У останньому переході ми використали формулу для релятивістського сповільнення часу

$$dt' = \left(1 - \frac{v_1^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} dt.$$

Прискорення відносно нерухомої системи відліку

$$\frac{dv_1}{dt} = a_1 \left(1 - \frac{v_1^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

можна було отримати, продиференціювавши закон додавання швидкостей за часом. Аналогічний вигляд має формула для другого прискорення.

Проінтегруємо отриманий вираз, розділивши змінні:

$$\int_0^{v_1} \left(1 - \frac{v_1^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} dv_1 = \int_0^t a_1 dt \rightarrow \frac{v_1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} = a_1 t \rightarrow v_1 = \frac{a_1 t}{\sqrt{1 + \frac{a_1^2 t^2}{c^2}}}$$

Проінтегруємо ще раз, щоб отримати $x_1(t)$:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{a_1 t}{\sqrt{1 + \frac{a_1^2 t^2}{c^2}}} \rightarrow \int_{x_1(0)}^{x_1} dx_1 = \int_0^t \frac{a_1 t dt}{\sqrt{1 + \frac{a_1^2 t^2}{c^2}}} \rightarrow x_1 = \frac{c^2}{a_1} \sqrt{1 + \frac{a_1^2 t^2}{c^2}}.$$

Таким чином, маємо:

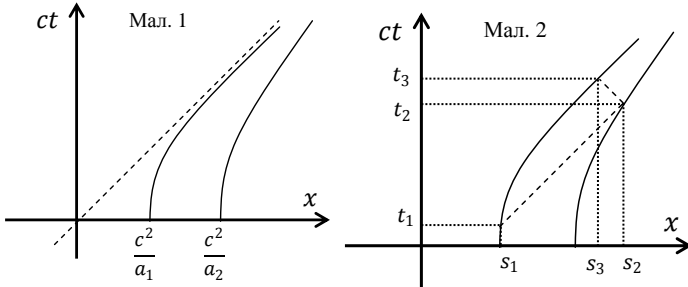
$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = \left(1 - \frac{v_1^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} a_1, \quad x_1 = \frac{c^2}{a_1} \sqrt{1 + \frac{a_1^2 t^2}{c^2}}.$$

Для другого спостерігача вираз буду аналогічним:

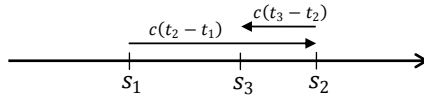
$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} = \left(1 - \frac{v_2^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} a_2, \quad x_2 = \frac{c^2}{a_2} \sqrt{1 + \frac{a_2^2 t^2}{c^2}}.$$

Тепер розглянемо рух променя світла між спостерігачами у системі відліку K .

Для наочності, наприклад, можна побудувати залежність координати від часу (просторово – часову діаграму). Як можна побачити з формул для $x_1(t)$ та $x_2(t)$, отримані нами криві є гіперболами (мал. 1, зображені однорідними лініями). Пунктирними лініями зображені траєкторії променів світла (мал. 2).



Нехай у системі відліку K промінь світла був випромінений першим спостерігачем у момент часу t_1 у точці з координатою $s_1 = x_1(t_1)$, прийнятий другим спостерігачем та відбитий у протилежному напрямку в момент часу t_2 в точці $s_2 = x_2(t_2)$, знов прийнятий першим спостерігачем у момент часу t_3 у точці $s_3 = x_1(t_3)$ (дивись мал. 2 або 3).



Спочатку знайдемо залежність між проміжком часу τ за власним годинником першого спостерігача та моментами часу t_1 і t_3 у системі K . Для цього використаємо формулу для релятивістського сповільнення часу:

$$\begin{aligned} d\tau &= \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}} dt \rightarrow \tau = \int_{t_1}^{t_3} \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}} dt = \int_{t_1}^{t_3} \frac{dt}{\sqrt{1 + \frac{a_1^2 t^2}{c^2}}} \\ &= \frac{c}{a_1} \ln \frac{a_1 t_3 + \sqrt{c^2 + a_1^2 t_3^2}}{a_1 t_1 + \sqrt{c^2 + a_1^2 t_1^2}}. \end{aligned} \quad (1)$$

Тепер, для наочності, використаємо *малюнок 2 (або 3)* та знайдемо кінематичні співвідношення:

$$\begin{aligned} s_2 - s_3 &= c(t_3 - t_2), \\ s_2 - s_1 &= c(t_2 - t_1). \end{aligned}$$

З першого рівняння отримаємо:

$$\frac{c}{a_2} \sqrt{1 + \frac{a_2^2 t_2^2}{c^2}} + t_2 = t_3 + \frac{c}{a_1} \sqrt{1 + \frac{a_1^2 t_3^2}{c^2}}. \quad (2)$$

Зазначимо, що останній вираз співпадає з чисельником логарифма. Аналогічно отримаємо

$$\frac{c^2}{a_2} \sqrt{1 + \frac{a_2^2 t_2^2}{c^2}} - \frac{c^2}{a_1} \sqrt{1 + \frac{a_1^2 t_1^2}{c^2}} = c(t_2 - t_1).$$

Або

$$\frac{c}{a_2} \sqrt{1 + \frac{a_2^2 t_2^2}{c^2}} - t_2 = \frac{c}{a_1} \sqrt{1 + \frac{a_1^2 t_1^2}{c^2}} - t_1.$$

Щоб отримати знаменник логарифма, помножимо і розділимо ліву і праву частину рівності на відповідні спряжені вирази:

$$t_1 + \frac{c}{a_1} \sqrt{1 + \frac{a_1^2 t_1^2}{c^2}} = \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 \left(\frac{c}{a_2} \sqrt{1 + \frac{a_2^2 t_2^2}{c^2}} + t_2\right). \quad (3)$$

Підставивши вирази 2 і 3 у формулу 1 для проміжку часу за власним годинником першого спостерігача, отримаємо остаточний вираз для τ :

$$\tau = \frac{c}{a_1} \ln \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 = 2 \frac{c}{a_1} \ln \frac{a_1}{a_2}.$$

Можна бачити цікавий факт: відстань, виміряна першим спостерігачем до другого, не залежить від часу, а залежить тільки від прискорень спостерігачів. Це виконується лише за умови запропонованих початкових умов.

$$L = \frac{c^2}{a_1} \ln \frac{a_1}{a_2}.$$

Таку несподівану, на перший погляд, відповідь можна пояснити у системі відліку K тим, що на виміри відстані впливають декілька конкуруючих ефектів, які врівноважують один одного при правильно підібраних початкових умовах. Перший ефект: скорочення різниці координат спостерігачів з часом, оскільки швидкість першого завжди більша швидкості другого. Другий ефект: при великих швидкостях спостерігачів, світло витрачає все більше і більше часу у системі K , щоб досягти другого спостерігача. Третій ефект: для спостерігачів власні часи τ_1 і τ_2 течуть повільніше, ніж час t зі збільшенням швидкостей спостерігачів у системі відліку K .

Таким чином, можна говорити про коректний спосіб визначення відстані «радарним способом», оскільки отримана нами відповідь не залежить від часу і точки простору, у якій першим спостерігачем було випромінене світло. Це означає, що для всіх систем відліку, які рухаються з постійною швидкістю вздовж осі OX відносно системи K , виміряна відстань буде однаковою, тобто інваріантом.

11.4.

1) Повна кількість радіоактивних ядер у надрах планети у початковий момент становить

$$N_0 = \frac{\eta M_0}{A m_a}, \quad (1)$$

де $m_a = 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг – атомна одиниця маси. Тоді, за законом радіоактивного розпаду, кількість ядер, що розпалися від початку до моменту часу t , дорівнює

$$\Delta N(t) = N_0 \left(1 - 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}} \right). \quad (2)$$

За умовою задачі, в момент часу t_0 гамма-випромінювання в об'ємі планети чинить тиск, який зрівноважує лапласівський тиск з боку оболонки:

$$p_{rad} = \frac{1}{3} \epsilon_{rad} = \frac{1}{3} \frac{\Delta N(t_0) E_0}{\frac{4}{3} \pi R_0^3} = p_L = \frac{2\sigma}{R_0}. \quad (3)$$

Примітка. У задачі вважається, що матеріал оболонки дуже швидко виходить з області пружних деформацій і майже увесь час зазнає незворотних непружних розтягів (т.зв. текучих деформацій), а тому може бути ефективно охарактеризований певним коефіцієнтом поверхневого натягу σ . При цьому його можна приписати як оболонці в цілому, так і кожній з двох її поверхонь (за аналогією з мильною бульбашкою). У першому випадку слід обчислювати лапласівський тиск, як у формулі (3), у другому випадку треба писати $p_L = \frac{4\sigma}{R_0}$. Головне розуміти, який конкретно коефіцієнт мається на увазі.

Тоді з рівняння (3) знайдемо шуканий момент часу t_0 :

$$t_0 = -T_{1/2} \log_2 \left(1 - \frac{8\pi R_0^2 \sigma}{E_0 N_0} \right) = -T_{1/2} \log_2 \left(1 - \frac{8\pi Z m_a R_0^2 \sigma}{\eta E_0 M_0} \right). \quad (4)$$

2) Запишемо аналог рівняння (3) для довільного моменту часу $t > t_0$, і поділимо його почленно на рівність (3):

$$\frac{1 - 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}}}{1 - 2^{-\frac{t_0}{T_{1/2}}}} = \left(\frac{R(t)}{R_0} \right)^2. \quad (5)$$

Беручи до уваги те, що частота t_0 і час існування оболонки (який, як ми побачимо, за порядком величини порівняний з t_0) набагато менші від періоду напіврозпаду ізотопу, показникову функцію можна наближено розкласти при малому значенні аргументу:

$$2^{-\frac{t}{T_{1/2}}} = e^{-\frac{t}{T_{1/2}} \ln 2} \approx 1 - \frac{t}{T_{1/2}} \ln 2. \quad (6)$$

Тоді ліва частина рівності (3) значно спроститься і закон зміни радіуса оболонки буде наступним:

$$R(t) = R_0 \sqrt{t/t_0}, \quad t \geq t_0. \quad (7)$$

Час руйнування t_1 знайдемо з умови того, що площа оболонки зросла вдвічі:

$$4\pi R^2(t_1) = 4\pi R_0^2 \frac{t_1}{t_0} = 2 \cdot 4\pi R_0^2, \quad \Rightarrow \quad t_1 = 2t_0. \quad (8)$$

3) Відносно центра планети мотоцикліст перебуває на кутовій відстані $\Delta\varphi = \pi$ від космодрому. Її треба подолати за час, поки оболонка ще не зруйнувалася. За нескінченно малий час dt мотоцикліст пройде лінійну відстань $dl = v dt$, а відповідна кутова відстань становитиме

$$d\varphi = \frac{dl}{R(t)} = \frac{v dt}{R(t)}. \quad (9)$$

Проінтегруємо обидві частини рівності від t_0 до деякого моменту часу t , знайдемо пройдену кутову відстань:

$$\Delta\varphi(t) = \int_{t_0}^t \frac{v dt'}{R(t')} = \int_{t_0}^t \frac{v \sqrt{t_0} dt'}{R_0 \sqrt{t'}} = 2 \frac{vt_0}{R_0} \left(\sqrt{\frac{t}{t_0}} - 1 \right). \quad (10)$$

Мотоцикліст приїде до космодрому у момент часу, коли пройдена кутова відстань становить $\Delta\varphi = \pi$. Звідси знайдемо повний час руху:

$$t_k = t_0 \left(1 + \frac{\pi R_0}{2vt_0} \right)^2. \quad (11)$$

Мінімальну швидкість, необхідну для вчасної евакуації, знайдемо з умови того, що $t_k = t_1 = 2t_0$:

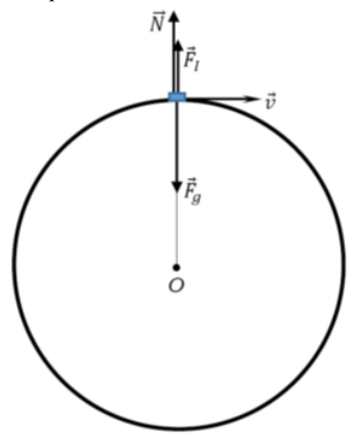
$$v_{min} = \frac{\pi}{2(\sqrt{2} - 1)} \frac{R_0}{t_0}. \quad (12)$$

Мінімальну швидкість можна знайти безпосередньо інтегруючи рівність (9) від t_0 до $t_1 = 2t_0$ і вимагаючи, щоб повна пройдена кутова відстань була не меншою, ніж π . Але так чи інакше, вираз (11) для повного часу руху потрібен буде у подальших пунктах, тому він має бути знайдений в роботі. Бали за отримання виразу (11) враховуються при оцінюванні третього пункту задачі.

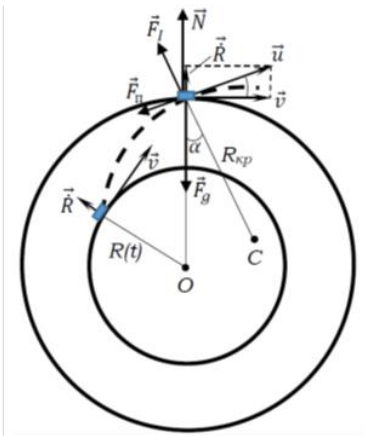
4) Власна система відліку мотоцикліста не є інерціальною, адже планета розширюється, а мотоцикліст здійснює обертальний рух відносно її центру. В неінерціальних системах відліку окрім реальних активних сил, які мають фізичну причину (гравітація, електромагнітні поля, сили реакції і тертя і т.д.), присутні ще й сили інерції. Вони є фіктивними, бо не мають фізичної причини і носія, а вводяться лише для того, щоб можна було записати другий закон Ньютона у такій же формі, як і в інерціальних системах відліку, тобто кожній зміні стану руху приписати дію певної сили.

Якби розширення не було (див. мал. 1), то відцентрова сила інерції \vec{F}_I була б спрямована від центру планети (точки О) точно по радіусу кола. Вона відігравала б роль лише в балансі сил у нормальному напрямку: визначала б величину сили нормальної реакції \vec{N} , але не впливала б на дотичний рух. Тому за відсутності розширення рівномірний рух поверхнею планети не потребує сили тяги (за умови, що силами опору знехтували).

Якщо ж планета розширюється, то траєкторія руху мотоцикла вже не є колом, оскільки його відстань до центру постійно зростає (див. мал. 2). Тому відцентрова сила інерції \vec{F}_I напрямлена не від центру планети (точки О), а від центру кривини траєкторії (точки С), що зміщений від центру планети вперед по руху мотоцикла. Як наслідок, існує її проекція, напрямлена проти руху мотоцикла, яка мусить бути скомпенсована силою тяги, щоб забезпечити рівномірний рух. Інша компонента, напрямлена перпендикулярно до поверхні планети, разом із силою тяжіння \vec{F}_g компенсується силою нормальної реакції \vec{N} . Окрім відцентрової сили інерції \vec{F}_I , є ще сила, пов'язана з тим, що швидкість мотоцикліста u змінюється за абсолютним значенням, т.зв. поступальна сила інерції \vec{F}_n (див. мал.2). Ця сила також має проекції і в нормальному, і в тангенціальному напрямках (відносно поверхні планети). Тангенціальна компонента компенсується силою тяги двигуна, а нормальна – силою нормальної реакції.



Мал. 1



Мал. 2

Обчислення сили тяги може бути здійснене кількома методами лише у випадку, коли швидкість розширення планети набагато менша за швидкість руху тіла. Тоді кут відхилення відцентрової сили інерції від радіального напрямку малий і це дозволяє не знаходити точного рівняння траєкторії і положення центру її кривини. Також у цьому наближенні можна знехтувати поступальною силою інерції.

Відцентрова сила інерції має вигляд:

$$F_I = \frac{mu^2}{R_{кр}(t)} \approx \frac{mv^2}{R(t)}, \quad (13)$$

де в силу обговореного вище наближення, радіус кривини траєкторії наближено можна вважати поточним радіусом планети. Тангенс малого кута відхилення напрямку сили інерції від радіуса можна знайти з подібного трикутника швидкостей:

$$\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha \approx \frac{\dot{R}(t)}{v}. \quad (14)$$

Тоді сила тяги, яка за модулем дорівнює проекції сили інерції проти напрямку руху, має вигляд:

$$F(t) \approx F_I \cdot \alpha = mv \frac{\dot{R}}{R}. \quad (15)$$

Незважаючи на всі наближення в розрахунках, кінцева відповідь (15) для сили тяги виявляється справедливою в загальному випадку, для довільної швидкості розширення (це може бути показано із закону зміни моменту імпульсу мотоцикла відносно центру планети або враховуючи обидві сили інерції і обчислюючи точно радіус кривини траєкторії). Але знаходження сили тяги є поза межами умови задачі, тому ці обчислення не обов'язкові. Бажано хоча б на якісному рівні зрозуміти, що рівномірний рух планетою, що розширюється, вимагає прикладання сили.

Тепер зупинимося на нормальній компоненті сили інерції. Вважаючи розширення набагато повільнішим за швидкість руху мотоцикліста, $\dot{R} \ll v$, можна вважати кут відхилення центру кривини траєкторії від центру планети малим і використати, що $\cos \alpha \approx 1$. Тоді складова сили інерції, перпендикулярна до поверхні, має вигляд:

$$F_{In} \approx \frac{mv^2}{R(t)} = \frac{mv^2 \sqrt{t_0}}{R_0 \sqrt{t}}. \quad (16)$$

Ця сила ефективно змінить значення прискорення вільного падіння. Окрім того, прискорення вільного падіння зменшиться ще й за рахунок зростання радіуса планети. Якщо взяти до уваги обидва ці ефекти, то отримаємо наступне значення прискорення вільного падіння, що відчуває мотоцикліст:

$$g_{\text{eff}}(t) = \frac{GM_0}{R^2(t)} - \frac{F_{In}}{m} = g_0 \frac{t_0}{t} - \frac{v^2 \sqrt{t_0}}{R_0 \sqrt{t}}, \quad (17)$$

де $g_0 = \frac{GM_0}{R_0^2}$ – прискорення вільного падіння на планеті початкового радіусу і для нерухомого спостерігача.

Нехай тепер мотоцикліст використовує старомодний годинник на основі математичного маятника. Тобто час за його годинником пропорційний кількості коливань математичного маятника n , а коефіцієнт пропорційності – це період коливань маят-

ника на звичайній планеті (оскільки годинник був відкалібрований ще до розширення):

$$\tau = T_0 n, \quad T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g_0}}. \quad (18)$$

Насправді, прискорення вільного падіння зменшується за законом (17), тому період коливань постійно зростає:

$$T(t) = 2\pi \left(\frac{l}{g_{\text{eff}}(t)} \right)^{1/2} = \frac{T_0}{\left(\frac{t_0}{t} - \frac{v^2}{g_0 R_0} \frac{\sqrt{t_0}}{\sqrt{t}} \right)^{1/2}}. \quad (19)$$

Виходячи з цього за фізичний проміжок часу dt маятник зробить кількість коливань

$$dn = \frac{dt}{T(t)}. \quad (20)$$

Таким чином проміжок власного часу, який мине, становить:

$$d\tau = T_0 dn = \frac{T_0}{T(t)} dt = \left(\frac{t_0}{t} - \frac{v^2}{g_0 R_0} \frac{\sqrt{t_0}}{\sqrt{t}} \right)^{1/2} dt. \quad (21)$$

Щоб дізнатися, який час збіг по власному годиннику мотоцикліста, проінтегруємо моє рівняння (21) в межах від t_0 до t_k , заданого виразом (11):

$$\begin{aligned} \Delta\tau &= \int_{t_0}^{t_k} \left(\frac{t_0}{t} - \frac{v^2}{g_0 R_0} \frac{\sqrt{t_0}}{\sqrt{t}} \right)^{1/2} dt = \left| \frac{t}{t_0} = x^2, \quad dt = 2t_0 x dx \right| = \\ &= 2t_0 \int_1^{1+\frac{\pi R_0}{2v\sqrt{t_0}}} \left(1 - \frac{v^2}{g_0 R_0} x \right)^{1/2} dx \\ &= \frac{4t_0}{3} \frac{g_0 R_0}{v^2} \left[\left(1 - \frac{v^2}{g_0 R_0} \right)^{3/2} - \left(1 - \frac{v^2}{g_0 R_0} - \frac{\pi v}{2g_0 t_0} \right)^{3/2} \right]. \end{aligned} \quad (22)$$

Якщо вважати вплив сил інерції нехтовно малим (це можна робити, коли швидкість мотоцикла v значно менша за першу космічну швидкість для планети $v_I = \sqrt{g_0 R_0}$), то слід знехтувати під інтегралом доданком з v^2 . Тоді вираз значно спроститься, і ми матимемо для проміжку власного часу наступний вираз:

$$\Delta\tau = \int_{t_0}^{t_k} \left(\frac{t_0}{t} \right)^{1/2} dt = 2t_0 \int_1^{1+\frac{\pi R_0}{2v\sqrt{t_0}}} dx = \frac{\pi R_0}{v}. \quad (23)$$

Годинник відстане відносно фізичного часу, вимірюваного космічним спостерігачем, на величину:

$$\delta t = (t_k - t_0) - \Delta\tau. \quad (24)$$

У загальному випадку сюди слід підставити вираз (22). Якщо сили інерції нехтовно малі у порівнянні з гравітаційними, час затримки обчислимо за виразом (23):

$$\delta t = \frac{\pi^2 R_0^2}{4v^2 t_0}. \quad (25)$$

Швидкість роздування можна охарактеризувати часом очікування t_0 , чим він більший, тим повільніше роздувається оболонка. Якщо спрямувати $t_0 \rightarrow \infty$ (роздування відсутнє), то і відставання між годинниками ніякого не буде.

Оскільки при врахуванні сил інерції підінтегральний вираз у (22) лише зменшується, то власний час вимірюваний по годиннику мотоцикліста вийде ще меншим. Таким чином, сили інерції призводять до зростання відставання власного годинника від космічного часу.

5) Розширення можна ідентифікувати за наступними ознаками:

- безпосередньо за зміною відстані між віддаленими об'єктами (методами ехолокації, за розривами ліній електропередачі, розходженням рейок залізниці на стиках і т. п.);

- за зменшенням ваги тіл, вимірюваної пружинними вагами (чи іншими, що не використовують порівняння ваги з еталоном, тобто не шальковими терезами);

- за уповільненням ходу математичного маятника шляхом вимірювання його періоду коливань по пружинному, електронному, кварцовому чи атомному годиннику;

- за виникненням сил інерції, що протидіють будь-якому рухові (див. відповідь на 4-те запитання), хоча ці сили досить слабкі, якщо розширення повільне;

Екзотичні методи:

- за зменшенням атмосферного тиску (та ж вага повітря розподіляється на більшу площу);

- за допомогою геологічної розвідки (визначення відстані до твердих порід планети методами ехолокації);

- за зміною висоти орбіт штучних супутників над поверхнею планети;

- за ефектом Доплера (наприклад, акустичним) при передачі звукових сигналів між віддаленими об'єктами;

- якщо в планеті є природний супутник, то за зміною часу проходження його через тінь планети під час затемнення...

Тут вітається творчість учнів.

11.5. Якщо не користуватись табличним значенням густини повітря при нормальних умовах. $\rho = 1,3 \text{ кг/м}^3$, то його можна визначити із рівняння стану ідеального газу: $PV = (m/\mu)RT$, з якого густина $\rho = P\mu/RT \approx 1,29 \text{ кг/м}^3$ (при атмосферному тиску $P = 10^5 \text{ Па}$; моль повітря – $\mu = 29 \text{ г/моль}$; $R = 8,31 \text{ Дж/(град}\cdot\text{моль)}$; $T = 273 \text{ К}$.

Витрати палива за час $t = 1 \text{ с}$ складуть $m = 12000 \text{ кг}$; $12000 \text{ с} = 1 \text{ кг/с}$.

Відстань, що долає літак за одну секунду – $L = 900 \text{ км/год} : 3600 \text{ с} = 250 \text{ м}$.

Об'єм повітря, що прокачується за цей час $t = 1 \text{ с}$ через реактивні двигуни, – $V = S \times L = 250 \text{ м}^3$.

Маса цього повітря разом із паливом, що викидається за час $t = 1 \text{ с}$:

$$M = \rho \cdot V + m = 1,29 \text{ кг/м}^3 \times 250 \text{ м}^3 + 1 \text{ кг} = 322,5 \text{ кг}.$$

При силі тяги двигунів $F = 170 \text{ кН}$ швидкість вильоту газів складатиме (із закону збереження імпульсу): $u = F \cdot t / M = 527,1 \text{ м/с}$.

Витрати палива зменшуватимуться через зменшення сили тяжіння та відповідної підйомної сили, що призводить до зменшення сили опору повітря, зокрема через зменшення кута атаки і т. ін.