무한수열과 무한급수

복작복잡스핀 | 160116

홍수린

10장의 목차

발제 목차

1. 수열
2. 급수
3. 양수 항을 갖는 급수의 판정법(적분판정법, 비교판정법)
4. 반드시 양수 항이 아니어도 되는 급수 판정법(교대급수판정법, 비판정법, 근 판정법)

1. 수열

(무한)수열

수열(sequence)은 다음과 같이 일정한 순서로 쓰여진 수의 나열로 생각할 수 있다.

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

수 a_1은 **첫째 항**, a_2는 **둘째 항**, 그리고 일반적으로 a_n은 ***n* 번째** 항이라 한다. 여기서는 무한수열만을 다루며, 따라서 a_{n+1}은 a_n의 다음 항이다.

모든 양의 정수 n에 대응하는 수 a_n이 존재하므로 수열은 정의역이 양의 정수들의 집합인 함수로 정의할 수 있음에 주목하자. 그렇지만 통상 수 n의 함숫값은 기호 $f(n)$ 대신 a_n으로 쓴다.

기호 수열 $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$을 다음과 같이 나타내기도 한다.

$$\{a_n\} \quad \text{또는} \quad \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

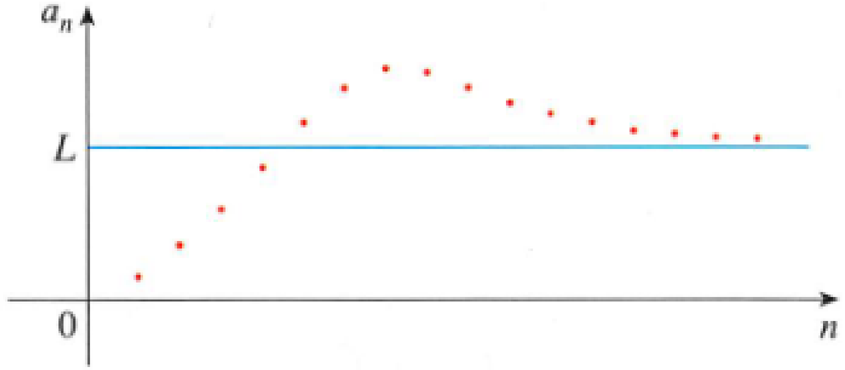
1. 수열

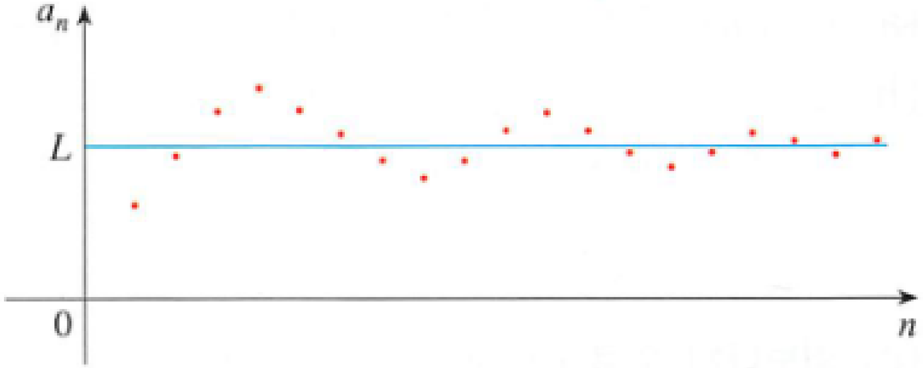
수열의 극한

Ⅰ **정의** 수열 $\{a_n\}$에서 n을 충분히 크게 잡아 항 a_n이 L에 근접하게 만들 수 있다면, 수열 $\{a_n\}$의 **극한**은 L이라 하고 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \quad \text{또는} \quad n \to \infty \text{일 때} \quad a_n \to L$$

$\lim_{n\to\infty} a_n$이 존재하면 수열은 **수렴한다**고 하고, 그렇지 않으면 수열 $\{a_n\}$은 **발산한다**고 한다.





1. 수열

수열의 극한과 함수의 극한

정의 2와 3.4절 정의 5를 비교해 보면 $\lim_{n\to\infty} a_n = L$과 $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$의 차이는 단지 n이 정수라는 것뿐이다. 따라서 다음 정리를 얻으며, 그림 6은 이 정리를 그래프로 설명한다.

3 정리 $\lim_{n\to\infty} f(x) = L$이고 n이 정수일 때 $f(n) = a_n$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n = L$이다.

3.4절의 정의 5 (p.197)

5 정의 함수 f가 어떤 구간 (a, ∞)에서 정의된다고 하자. 이때 다음 기호는 임의의 $\varepsilon > 0$에 대해 $x > N$일 때 $|f(x) - L| < \varepsilon$을 만족하는 수 N이 존재한다는 것을 의미한다.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$를 다른 기호로 나타내면 아래와 같다.

$x \to \infty$일 때 $f(x) \to L$

1. 수열

수열의 극한과 함수의 극한

정의 2와 3.4절 정의 5를 비교해 보면 $\lim_{n\to\infty} a_n = L$과 $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$의 차이는 단지 n이 정수라는 것뿐이다. 따라서 다음 정리를 얻으며, 그림 6은 이 정리를 그래프로 설명한다.

3 정리 $\lim_{n\to\infty} f(x) = L$이고 n이 정수일 때 $f(n) = a_n$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n = L$이다.

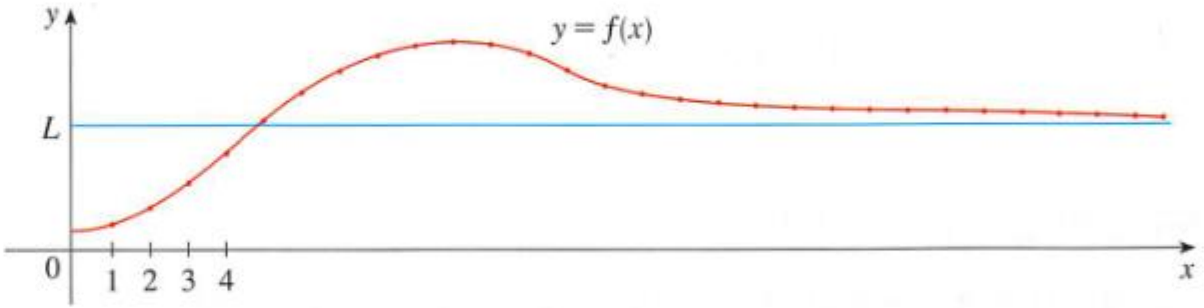


그림 6

단조수열

10 **정의** $n \geq 1$인 모든 n에 대해, $a_n < a_{n+1}$, 즉 $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$일 때 수열 $\{a_n\}$은 **증가수열**이라 한다. $n \geq 1$인 모든 n에 대해 $a_n > a_{n+1}$일 때 **감소수열**이라 한다. 증가하거나 감소하는 수열을 **단조수열**이라 한다.

1. 수열

유계수열

정의 $n \geq 1$인 모든 n에 대해 $a_n \leq M$을 만족하는 수 M이 존재하면, 수열 $\{a_n\}$은 **위로 유계**(bounded above)라 한다.
$n \geq 1$인 모든 n에 대해 $m \leq a_n$을 만족하는 수 m이 존재하면, 수열 $\{a_n\}$은 **아래로 유계**(bounded below)라 한다. 위로 유계인 동시에 아래로 유계인 수열 $\{a_n\}$을 **유계수열**(bounded sequence)이라 한다.

* 유계=bounded. 즉 '위로 유계'는 위쪽으로 더 나가지 못하고 막혀 있다는 것

유계수열, 단조수열의 수렴

예를 들어 수열 $a_n = n$은 아래로 유계이지만($a_n > 0$), 위로 유계는 아니다. 수열 $a_n = n/(n+1)$은 모든 n에 대해 $0 < a_n < 1$이므로 유계이다.

모든 유계수열이 수렴하는 것은 아니다. [예를 들어 예제 7로부터 수열 $a_n = (-1)^n$은 $-1 \le a_n \le 1$을 만족하지만 발산한다.] 또한 단조수열이 반드시 수렴하는 것은 아니다($a_n = n \to \infty$). 그러나 유계수열이고 단조수열이면 반드시 수렴한다. 이런 사실은 정리 $\boxed{12}$와 같이 증명된다. 그러나 그림 12를 보면 직관적으로 왜 그것이 참인지를 이해할 수 있다. $\{a_n\}$이 증가하고 모든 n에 대해 $a_n \le M$이면 항들은 빽빽이 모이게 되고 어떤 수 L에 접근한다.

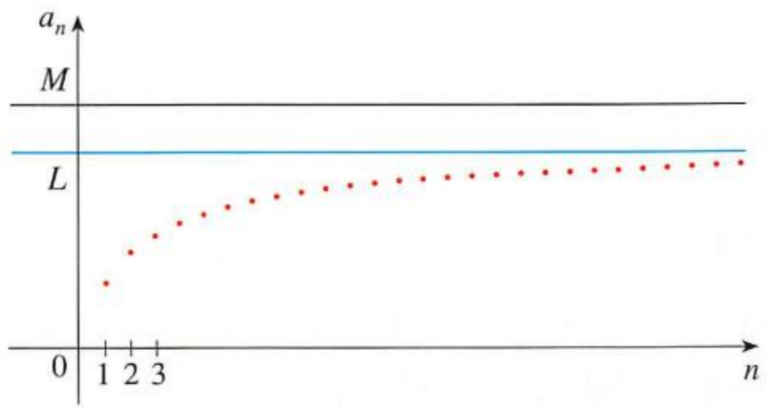


그림 12

(무한)급수

일반적으로 무한수열 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$의 각 항을 더하면, 다음 형태를 얻는다.

$$\boxed{1} \qquad a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

이것을 **무한급수**(infinite series) 또는 간단히 **급수**(series)라 하며 다음과 같은 기호로 나타낸다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{또는} \quad \sum a_n$$

2. 급수

급수 관련 개념 정리

ex. 등차수열의 합: 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + 99 + 100

- 급수(級數)란 수학에서 수열들의 각 항의 합. 즉, 급수란 여러 수들의 합연산으로 표현
- 급수는 유한 급수와 무한 급수로 나눌 수 있음
- 유한 급수는 쉽게 구할 수 있지만 무한 급수는 그 정확한 합을 구하기 위해서는 해석학의 여러 정리들이 필요
- 무한 급수는 Sn, 즉 급수의 부분합으로 이루어지는 수열의 극한값

$$S_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

  - n이 무한대로 갈 때 그 극한이 유한한 값을 갖는다면 이 급수는 수렴(이 극한값 S가 '무한급수의 합')
  - 만약 이 값이 무한하거나 존재하지 않는다면, 이 급수는 발산
  - 하지만 그 극한값이 0으로 간다고 해도, 이 급수가 항상 수렴하는 것은 아님

반례: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots.$
(수열은 0으로 수렴하지만 급수는 수렴하지 않음)

2. 급수

급수의 합

처음 n항의 합
0.50000000
0.75000000
0.87500000
0.93750000
0.96875000
0.98437500
0.99218750
0.99902344
0.99996948
0.99999905
0.99999997

그러면 아래 급수의 항을 더해 보자.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$$

$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \frac{31}{32}, \frac{63}{64}, \ldots, 1-\frac{1}{2^n}, \ldots$을 얻을 수 있다. 왼쪽 표는 항을 계속 더함에 따라 **부분합**은 더욱더 1에 가까워진다는 것을 보여 준다. 실제로 급수의 항을 충분히 많이 더하면 부분합을 1에 원하는 만큼 가깝게 만들 수 있다. 따라서 이 무한급수의 합이 1이라고 말하는 것이 타당해 보이고 다음과 같이 쓴다.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=1$$

급수의 수렴과 발산

$\boxed{2}$ **정의** 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$에 대해 s_n을 다음과 같은 n 번째 부분합이라 하자.

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

수열 $\{s_n\}$이 수렴하고 $\lim_{n \to \infty} s_n = s$가 실수로 존재할 때 급수 $\sum a_n$은 **수렴한다**고 하며, 다음과 같이 나타낸다.

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = s \quad \sum a_n \quad \text{또는} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

수 s를 급수의 **합**이라 한다. 수열 $\{s_n\}$이 발산할 때 급수는 **발산한다**고 한다.

기하급수의 발산

4 다음 기하급수는 $|r| < 1$이면 수렴한다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots$$

그 합은 다음과 같다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r} \qquad |r| < 1$$

$|r| \geq 1$이면 기하급수는 발산한다.

기하급수의 발산 ex

예제 3 다음 기하급수의 합을 구하라.

$$5-\frac{10}{3}+\frac{20}{9}-\frac{40}{27}+\cdots$$

풀이 첫째 항이 $a=5$이고 공비가 $r=-2/3$이다. $|r|=2/3<1$이므로 $\boxed{4}$에 의해 이 급수는 수렴하고 합은 다음과 같다.

$$5-\frac{10}{3}+\frac{20}{9}-\frac{40}{27}+\cdots=\frac{5}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}=\frac{5}{\frac{5}{3}}=3$$

n	s_n
1	5.000000
2	1.666667
3	3.888889
4	2.407407
5	3.395062
6	2.736626
7	3.175583
8	2.882945
9	3.078037
10	2.947975

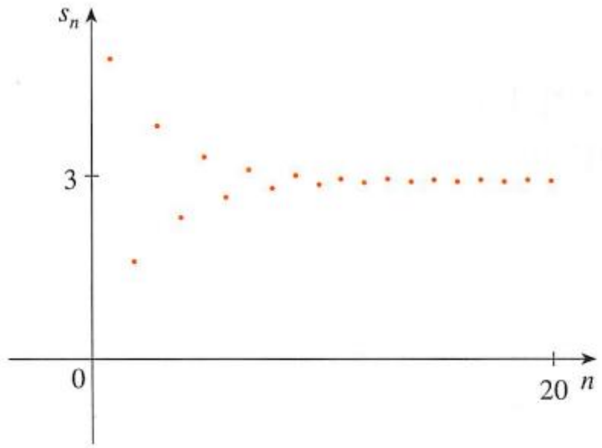


그림 2

조화급수의 발산

- 조화수열(harmonic progression): 그 역수로 이루어진 수열이 등차수열이 되는 수열
- 조화급수(harmonic series) 란 다음의 발산하는 무한급수

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots.$$

- 수열 각각의 항은 점차 0 에 가까워지고 있음에도 불구하고, 총합은 무한대로 발산. 발산하는 속도는 매우 느려서 $\log_n$에 가까움

3. 양수 항 급수의 판정법

1. 발산판정법divergence test

6 정리 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이다.

증명 $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$이라 하면 $a_n = s_n - s_{n-1}$이다. $\sum a_n$이 수렴하므로 수열 $\{s_n\}$도 수렴한다. $\lim_{n\to\infty} s_n = s$라 하자. $n\to\infty$일 때 $n-1\to\infty$이므로 $\lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s$이다. 그러므로 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} \\ &= s - s = 0\end{aligned}$$

1. 발산판정법divergence test

7 발산판정법 $\lim_{n\to\infty} a_n$이 존재하지 않거나 $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$이면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산한다.

발산판정법은 정리 6으로부터 결과가 나온다. 실제로 급수가 발산하지 않으면 급수는 수렴한다. 따라서 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이다.

예제 9 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n^2+4}$이 발산함을 보여라.

풀이

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{5n^2+4} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{5+\frac{4}{n^2}} = \frac{1}{5} \neq 0$$

그러므로 발산판정법에 따라 이 급수는 발산한다.

1. 발산판정법divergence test

1. 발산판정법divergence test

- 급수가 수렴하면 수열의 극한값이 0(수렴) (정리 6)
- 수열의 극한값이 0이라도 급수가 항상 수렴하는 것은 아님: 조화급수의 반례 (note 2)
  - 역이 성립하지 않음
  - 급수의 수렴 발산 여부는 알 수 없음
- 발산판정법: 수열의 극한값이 존재하지 않거나 0이 아니면 급수는 발산한다 (정리 7)

3. 양수 항 급수의 판정법

2. 적분판정법

항들이 양의 정수의 제곱의 역수인 다음과 같은 급수를 조사해 보자.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$$

n 번째 항까지의 합 s_n에 대한 간단한 공식은 없지만 컴퓨터로 생성한 오른쪽 표로부터 $n \to \infty$일 때 부분합은 1.64 부근의 값에 접근하고 있음을 알 수 있다. 그래서 급수는 수렴할 것으로 보인다.

n	$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}$
5	1.4636
10	1.5498
50	1.6251
100	1.6350
500	1.6429
1000	1.6439
5000	1.6447

3. 양수 항 급수의 판정법

2. 적분판정법: 개념 cont.

이런 생각을 기하학적인 논법으로 확인할 수 있다. 그림 1은 $y = 1/x^2$의 곡선과 이 곡선 아래에 놓인 직사각형을 나타낸다. 각각의 직사각형의 밑변은 길이 1인 구간이고 높이는 구간의 오른쪽 끝점에서 $y = 1/x^2$의 함숫값과 일치한다. 따라서 직사각형들의 넓이의 합은 다음과 같다.

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

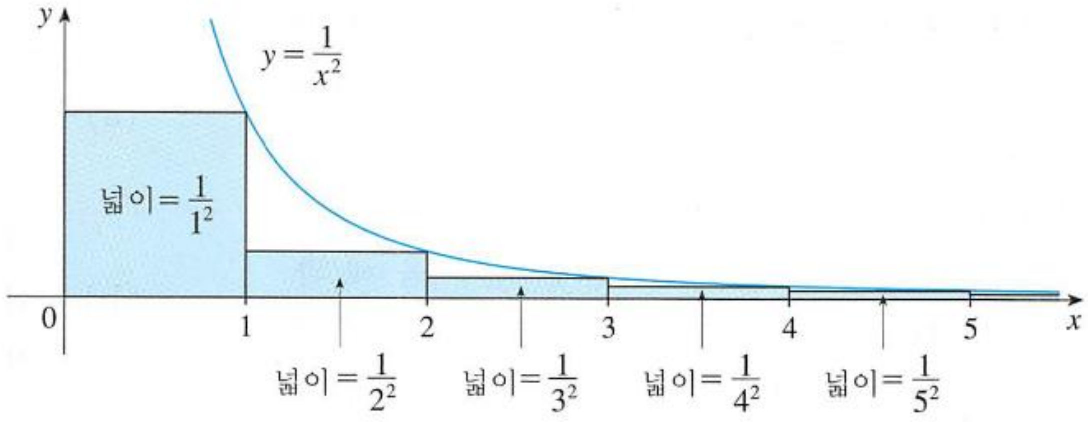


그림 1

2. 적분판정법: 개념 cont.

첫 번째 직사각형을 제외한 나머지 직사각형의 전체 넓이는 $x \geq 1$일 때 곡선 $y = 1/x^2$ 아래의 넓이, 즉 적분 $\int_1^\infty 1/x^2\,dx$의 값보다 작다. 7.8절에서 이 이상적분은 수렴하고 그 값이 1임을 보였다. 따라서 그림으로부터 모든 부분합은 다음과 같이 2보다 작다는 것을 알 수 있다.

$$\frac{1}{1^2} + \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = 2$$

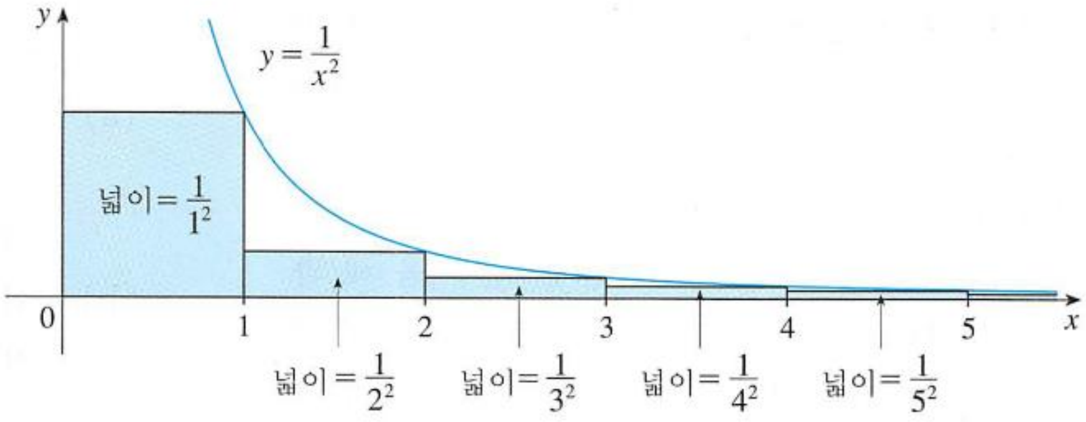


그림 1

3. 양수 항 급수의 판정법

2. 적분판정법: 7.8장의 이상적분(참고)

형태 1: 무한 구간

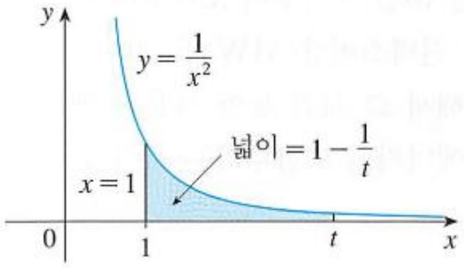


그림 1

곡선 $y = 1/x^2$의 아래와 x축 위, 그리고 직선 $x = 1$의 오른쪽에 놓이는 무한 영역 S를 생각하자. S가 무한히 뻗어 나가기 때문에 넓이도 무한일 것이라 생각할 수 있다. 그러나 좀 더 자세히 살펴보자. 직선 $x = t$의 왼쪽에 있는 S의 일부 넓이(그림 1에서 색칠한 부분)는 다음과 같다.

$$A(t) = \int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big]_1^t = 1 - \frac{1}{t}$$

즉 t가 얼마나 크든지 상관없이 $A(t) < 1$이고, 따라서 다음과 같음을 알 수 있다.

$$\lim_{t\to\infty} A(t) = \lim_{t\to\infty}\left(1 - \frac{1}{t}\right) = 1$$

그림 2와 같이 색칠한 부분의 넓이는 $t \to \infty$일 때 1로 접근한다. 따라서 무한 영역 S의 넓이는 1

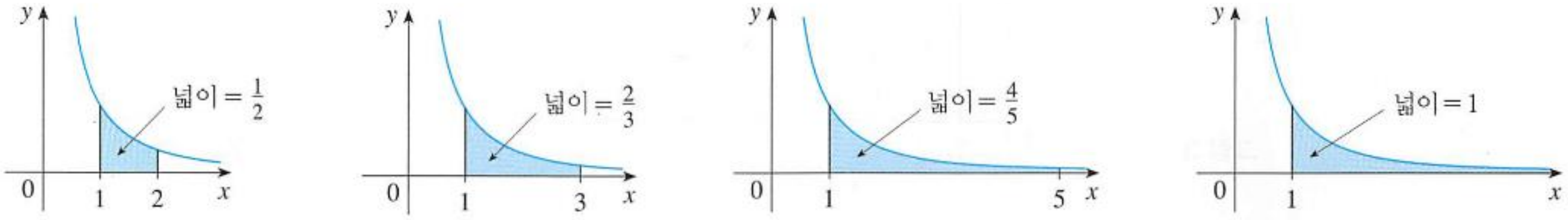


그림 2

3. 양수 항 급수의 판정법

2. 적분판정법: 개념 cont.

즉 부분합은 유계이다. 또한 (모든 항이 양수이므로) 부분합은 증가하는 것을 안다. 그러므로 (단조수열정리에 의해) 부분합은 수렴하므로 급수는 수렴하고, 다음과 같이 급수의 합(부분합의 극한)은 2보다 작다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots < 2$$

유계수열이고 단조수열이면
반드시 수렴

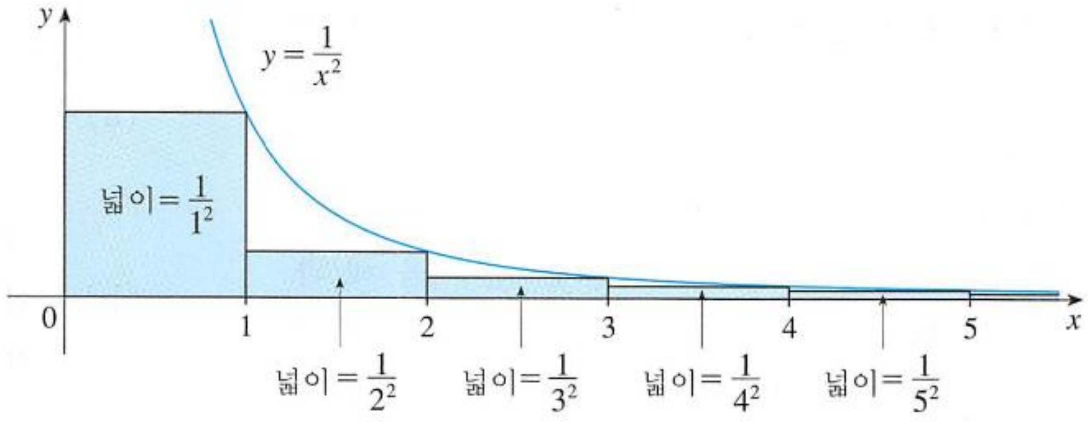


그림 1

2. 적분판정법: 개념 정리

적분판정법 f가 $[1, \infty)$에서 연속이고 양의 값을 갖는 감소함수라 하고, $a_n = f(n)$이라 하자. 그러면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하기 위한 필요충분조건은 이상적분 $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$가 수렴하는 것이다. 다시 말해 다음이 성립한다.

(i) $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$가 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 수렴한다.

(ii) $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$가 발산하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산한다.

2. 적분판정법: p-급수

예제 2의 급수를 **p-급수**(p-series)라 한다. p-급수는 이번 장 나머지에서 매우 중요하므로 예제 2의 결과를 다음과 같이 요약한다.

1 p-급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$은 $p > 1$이면 수렴하고 $p \le 1$이면 발산한다.

예제 3

(a) 다음 급수는 $p = 3 > 1$인 p-급수이므로 수렴한다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \cdots$$

(b) 다음 급수는 $p = \frac{1}{3} < 1$인 p-급수이므로 발산한다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \cdots$$

3. 양수 항 급수의 판정법

2. 적분판정법: 합(sum)의 추정=나머지(remainder) 추정

적분판정법을 이용해서 급수 $\sum a_n$이 수렴하는 것을 보일 수 있다고 가정하자. 그리고 이 급수의 합 s의 근삿값을 구한다고 하자. 물론 $\lim_{n\to\infty} s_n = s$이므로 임의의 부분합은 s에 근사한다. 그러나 근삿값이 얼마나 적절한가 알기 위해서는 다음과 같이 **나머지**(remainder)의 크기를 추정해야 한다.

정확히 알 수 없는 진짜 급수의 합

$$R_n = s - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots$$

a_n까지로 추정한 급수의 합

나머지 R_n은 n 항까지의 합 s_n이 전체합에 대한 근삿값으로 사용될 때 발생하는 오차이다.

2. 적분판정법: 나머지(remainder) 추정

같은 개념과 표현을 적분판정법에 적용하고, f가 $[n, \infty)$에서 감소한다고 가정하자. $x > n$일 때 $y = f(x)$ 아래의 넓이와 직사각형들의 넓이를 그림 3과 같이 비교하면 다음을 알 수 있다.

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots \le \int_n^\infty f(x)\, dx$$

같은 방법으로 그림 4로부터 다음을 알 수 있다.

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots \ge \int_{n+1}^\infty f(x)\, dx$$

따라서 다음과 같은 오차 추정을 증명한다.

2 적분판정법에 대한 나머지 추정 $x \ge n$에서 f가 연속이고 양이며 감소함수로서 $f(k) = a_k$이고, $\sum a_n$는 수렴한다고 가정하자. $R_n = s - s_n$이면 다음이 성립한다.

$$\int_{n+1}^\infty f(x)\, dx \le R_n \le \int_n^\infty f(x)\, dx$$

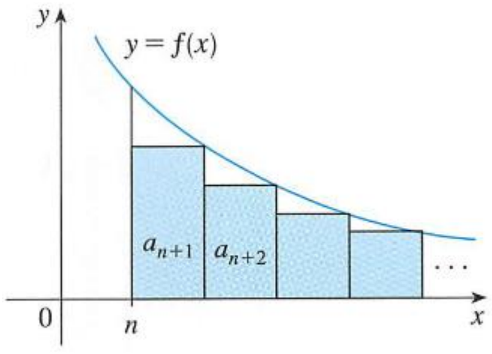


그림 3

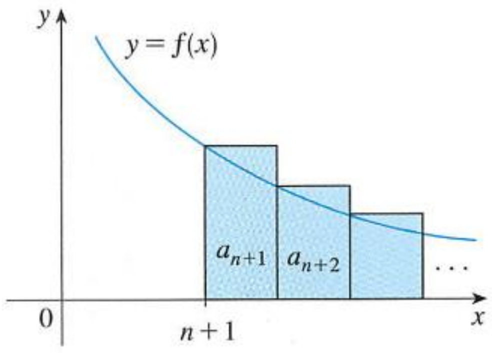


그림 4

3. 양수 항 급수의 판정법

3. 비교판정법: 개념 cont.

급수의 모든 항이 양수인 급수에만 적용되는 다음 판정법을 증명하는 데 비슷한 논의를 사용할 수 있다. 첫 부분은 급수의 항이 알고 있는 **수렴하는** 급수의 항보다 **작으면** 그 급수는 또한 수렴함을 말한다. 둘째 부분은 급수의 항이 알고 있는 **발산하는** 급수의 항보다 **크면** 그 급수는 또한 발산함을 말한다.

비교판정법 $\sum a_n$과 $\sum b_n$의 각 항이 모두 양수인 급수일 때

(i) $\sum b_n$이 수렴하고, 모든 n에 대해 $a_n \le b_n$이면 $\sum a_n$도 수렴한다.

(ii) $\sum b_n$이 발산하고, 모든 n에 대해 $a_n \ge b_n$이면 $\sum a_n$도 발산한다.

3. 비교판정법의 표준급수

- p-급수 [$\sum 1/n^p$은 $p>1$이면 수렴하고 $p \le 1$이면 발산한다(10.3절의 1 참조).]
- 기하급수 [$\sum ar^{n-1}$은 $|r|<1$이면 수렴하고 $|r| \ge 1$이면 발산한다(10.2절의 4 참조).]

3. 비교판정법의 표준급수 ex

예제 1 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2+4n+3}$가 수렴하는지 발산하는지 판정하라.

풀이 충분히 큰 n에 대해 분모를 지배하는 항은 $2n^2$이므로 주어진 급수를 급수 $\sum 5/(2n^2)$와 비교한다. 다음을 관찰하자.

$$\frac{5}{2n^2+4n+3} < \frac{5}{2n^2}$$

왜냐하면 좌변의 분모가 더 크기 때문이다. (비교판정법의 기호로 a_n은 좌변이고 b_n은 우변이다.) 이때 다음을 알 수 있다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2} = \frac{5}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$p = 2 > 1$인 p-급수이므로 수렴한다. 따라서 비교판정법 (i)에 의해 다음은 수렴한다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2+4n+3}$$

3. 비교판정법: 극한비교판정법

극한비교판정법 $\sum a_n$과 $\sum b_n$의 항이 양수이고 $c > 0$인 유한수에 대해 다음이 성립하면 두 급수는 모두 수렴하거나 모두 발산한다.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$$

증명 m과 M을 $m < c < M$인 양수라 하자. 충분히 큰 n에 대해 a_n/b_n은 c에 매우 가깝게 되므로 다음을 만족하는 N이 존재한다.

$$m < \frac{a_n}{b_n} < M, \qquad n > N$$

따라서 $$mb_n < a_n < Mb_n, \qquad n > N$$

$\sum b_n$이 수렴하면 $\sum Mb_n$도 수렴한다. 따라서 비교판정법의 (i)에 의해 $\sum a_n$도 수렴한다. $\sum b_n$이 발산하면 $\sum mb_n$역시 발산하고 비교판정법의 (ii)에 의해 $\sum a_n$도 발산한다. ■

3. 비교판정법: 합(sum)의 추정

비교판정법을 이용해서 비교급수 $\sum b_n$으로 급수 $\sum a_n$의 수렴성을 보인다면, 나머지들을 비교해서 $\sum a_n$의 합을 추정할 수 있다. 10.3절과 같이 나머지를 생각하자.

$$R_n = s - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots$$

비교급수 $\sum b_n$에 대해 대응하는 나머지를 생각한다.

$$T_n = t - t_n = b_{n+1} + b_{n+2} + \cdots$$

모든 n에 대해 $a_n \le b_n$이므로 $R_n \le T_n$이다. $\sum b_n$이 p-급수이면 10.3절에서와 같이 나머지 T_n을 계산할 수 있다. $\sum b_n$이 기하급수이면 T_n은 기하급수의 합이 되므로 정확하게 계산할 수 있다(연습문제 18 참조). 어느 경우라도 R_n은 T_n보다 작다.

3. 비교판정법: 합(sum)의 추정 ex

예제 5 급수 $\sum \dfrac{1}{n^3+1}$의 합의 근삿값으로 처음 100개 항의 합을 이용하라. 이 근삿값으로 얻은 오차를 추정하라.

풀이 다음이 성립한다.

$$\frac{1}{n^3+1} < \frac{1}{n^3}$$

그러므로 주어진 급수는 비교판정법에 따라 수렴한다. 비교급수 $\sum 1/n^3$에 대한 나머지 T_n은 적분판정법에 대한 나머지 계산을 이용해서 10.3절 예제 5에서 계산했다.

$$T_n \le \int_n^\infty \frac{1}{x^3}\,dx = \frac{1}{2n^2}$$

따라서 주어진 급수의 나머지 R_n은 다음을 만족한다.

$$R_n \le T_n \le \frac{1}{2n^2}$$

$n = 100$일 때 다음을 얻는다.

$$R_{100} \le \frac{1}{2(100)^2} = 0.00005$$

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^3+1} \approx \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n^3+1} \approx 0.6864538$$

오차는 0.00005보다 작다.

1. 교대급수판정법: 교대급수

급수의 각 항의 부호가 교대로 나타나는 급수를 **교대급수**(alternating series)라 한다. 다음 두 예를 보자.

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$$

$$-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}+\frac{4}{5}-\frac{5}{6}+\frac{6}{7}-\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n}{n+1}$$

위의 예와 같은 교대급수의 n번째 항은 다음과 같은 형태임을 알 수 있다.

$$a_n=(-1)^{n-1}b_n \qquad \text{또는} \qquad a_n=(-1)^{n}b_n$$

여기서 b_n은 양수이다. (실제로 $b_n=|a_n|$이다.)

다음 판정법은 교대급수의 항들이 절댓값을 취했을 때 감소하면서 0으로 수렴하면 교대급수는 수렴한다는 것이다.

1. 교대급수판정법: 개념

교대급수판정법 교대급수

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + b_5 - b_6 + \cdots, \qquad b_n > 0$$

가 다음 두 조건을 만족하면 이 급수는 수렴한다.

(i) 모든 n에 대해 $b_{n+1} \le b_n$

(ii) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

4. 양수 또는 음수 항 급수의 판정법

1. 교대급수판정법: 개념

증명하기에 앞서 그림 1을 살펴보자. 먼저 수직선에 $s_1 = b_1$을 그리고, b_2를 빼서 s_2를 구하면 s_2는 s_1의 왼쪽에 놓인다. 그 다음 b_3를 더해 s_3를 구하면 s_3는 s_2의 오른쪽에 놓인다. 그러나 $b_3 < b_2$이므로 s_3은 s_1의 왼쪽에 놓이게 된다. 이 과정을 계속하면 부분합이 앞뒤로 진동함을 알 수 있다. $b_n \to 0$이므로 단계를 거듭할수록 점점 더 작아진다. 짝수 부분합 s_2, s_4, s_6, ...은 증가하고, 홀수 부분합 s_1, s_3, s_5, ...는 감소한다. 즉 두 수열은 어떤 수 s(급수의 합)에 수렴할 것 같다. 그러므로 아래 증명에서 짝수 부분합과 홀수 부분합으로 나눠서 생각한다.

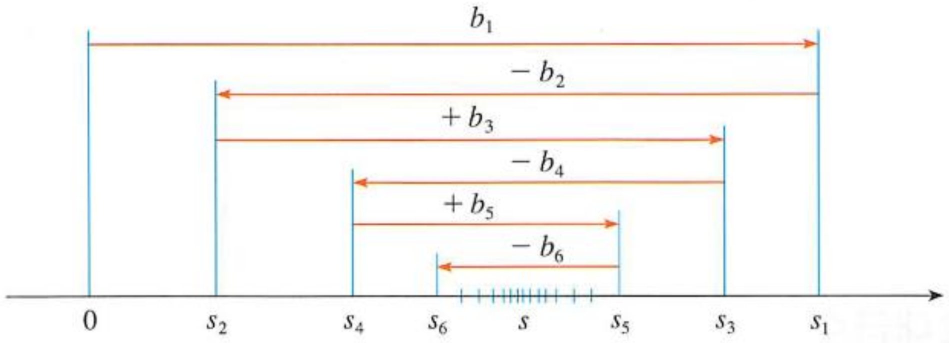


그림 1

4. 양수 또는 음수 항 급수의 판정법

1. 교대급수판정법: 합(sum)의 추정

임의의 수렴하는 급수의 부분합 s_n은 전체합 s의 근삿값으로 이용될 수는 있지만, 근삿값의 정확도를 추정할 수 없는 경우에는 별로 쓸모가 없다. $s \approx s_n$을 이용할 때 나타나는 오차는 나머지 $R_n = s - s_n$이다. 다음 정리는 교대급수판정법의 조건을 만족하는 급수에 대한 오차의 크기는 처음으로 무시할 수 있는 항의 절댓값인 b_{n+1}보다 작다는 것을 보여 준다.

교대급수추정정리 교대급수의 합 $s = \sum (-1)^{n-1} b_n$이 다음 조건을 만족한다고 하자.

$$\text{(i) } b_{n+1} \le b_n \text{과} \qquad \text{(ii) } \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

그러면 다음이 성립한다.

$$|R_n| = |s - s_n| \le b_{n+1}$$

2. 비판정법 및 근판정법: 절대수렴

임의의 주어진 급수 $\sum a_n$에 대응하는 원래 급수의 각 항에 절댓값을 취한 다음과 같은 급수를 생각하자.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots$$

1 **정의** 절댓값의 급수 $\sum |a_n|$이 수렴할 때, 급수 $\sum a_n$은 **절대 수렴**(absolutely convergent)한다고 한다.

급수 $\sum a_n$이 양수 항을 갖는 급수이면 $|a_n| = a_n$이므로 이 경우에는 절대 수렴과 수렴은 같음에 주목하자.

예제 1 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots$은 절대 수렴한다.

왜냐하면 다음과 같이 $p = 2$인 p-급수이므로 수렴하기 때문이다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

2. 비판정법 및 근판정법: 조건부수렴

2 **정의** 급수 $\sum a_n$이 수렴하지만 절대 수렴하지 않을 때, 급수 $\sum a_n$을 **조건부 수렴**(conditionally convergent)한다고 한다.

예제 2 다음 교대조화급수는 수렴한다(10.5절 예제 1 참조).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

그러나 이에 대응하는 다음과 같은 절댓값의 급수는 조화급수($p = 1$인 p-급수)이므로 이 급수는 절대 수렴하지 않는다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

2. 비판정법 및 근판정법: 절대수렴

3 **정리** 급수 $\sum a_n$이 절대 수렴하면 그 급수는 수렴한다.

4. 양수 또는 음수 항 급수의 판정법

2. 비판정법 및 근판정법: 비(ratio)판정법

- 비판정법 또는 비율판정법은 궁극적으로 0이 아닌 실 또는 복소항 급수의 수렴 여부를 판정하는 방법
- 장 르 롱 달랑베르가 처음으로 출간. 달랑베르의 판정법, 코시의 비율판정법으로도 불림
- a_n의 극한값 L이 존재하는 경우, …

2. 비판정법 및 근판정법: 비(ratio)판정법

a_n의 극한값 L이 존재하는 경우, …

비판정법

(i) $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 절대 수렴한다(따라서 수렴한다).

(ii) $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L > 1$ 또는 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산한다.

(iii) $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$이면 비판정법으로 결론을 이끌어 낼 수 없다. 즉 $\sum a_n$의 수렴 또는 발산에 대한 어떤 결론도 내릴 수 없다.

4. 양수 또는 음수 항 급수의 판정법

2. 비판정법 및 근판정법: 근(root)판정법

다음 판정법은 n차 거듭제곱이 나오는 경우에 적용하면 편리하다. 증명은 비판정법의 증명과 유사하므로 연습문제 21로 남겨 둔다.

근판정법

(i) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 절대 수렴한다(따라서 수렴한다).

(ii) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$ 또는 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$이면, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산한다.

(iii) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$이면 근판정법으로 결론을 내릴 수 없다.

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$이면, 근판정법의 (iii)은 이 판정법이 아무런 정보도 주지 않음을 말한다. 이때 급수 $\sum a_n$은 수렴할 수도 있고 발산할 수도 있다. (비판정법에서 $L = 1$이면 근판정법에서도 $L = 1$일 것이므로 근판정법을 시도하지 않는다. 그 역도 마찬가지이다.)

3. 급수 판정을 위한 전략

1. 급수가 $\sum 1/n^p$ 형태이면 p-급수이고, 이 급수는 $p>1$이면 수렴하고 $p \le 1$이면 발산한다.
2. 급수의 형태가 $\sum ar^{n-1}$ 또는 $\sum ar^n$ 이면 이는 기하급수이고 $|r| < 1$이면 수렴하고 $|r| \ge 1$이면 발산한다. 급수를 이런 형태로 바꾸기 위해서는 약간의 대수적인 조작이 필요하다.
3. 주어진 급수가 p-급수나 기하급수와 비슷한 형태를 취한 경우에는 비교판정법 중 하나를 고려해야 한다. 특히 a_n이 n에 관한 유리함수나 대수함수(다항함수의 제곱근을 포함하는)이면 그 급수를 p-급수와 비교할 수 있다. 10.4절 연습문제에서 대부분의 급수가 이 형태를 가지고 있음에 유의한다. (p의 값은 분자와 분모에 있는 n의 최고차수인 상태로 유지해서 10.4절처럼 선택되어야 한다.) 비교판정법은 양수 항의 급수에만 적용할 수 있으나 $\sum a_n$이 음수 항을 포함하면 절대급수 $\sum |a_n|$에 비교판정법을 적용하면 된다.

3. 급수 판정을 위한 전략

4. 한눈에 $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$임을 알아볼 수 있으면 발산판정법을 이용한다.
5. 급수의 형태가 $\sum(-1)^{n-1}b_n$ 또는 $\sum(-1)^n b_n$이면 교대급수판정법을 확실히 적용할 수 있다.
6. 계승이나 다른 곱(상수의 n 번째 거듭제곱도 포함해)을 포함한 급수는 종종 비판정법을 이용하는 것이 편리하다. 모든 p-급수에 대해 $n\to\infty$일 때 $|a_{n+1}/a_n|\to 1$임을 명심하자. 그러므로 n의 모든 유리함수와 대수함수에 대해서도 마찬가지이다. 따라서 비판정법은 그런 급수에 대해서는 이용하면 안 된다.
7. a_n이 $(b_n)^n$ 형태이면 근판정법이 유용하다.
8. $\int_1^\infty f(x)\,dx$가 쉽게 구해지는 $a_n = f(n)$이라면 (이 판정법의 전제조건이 만족된다는 가정에서) 적분판정법이 효과적이다.

THANK YOU☺