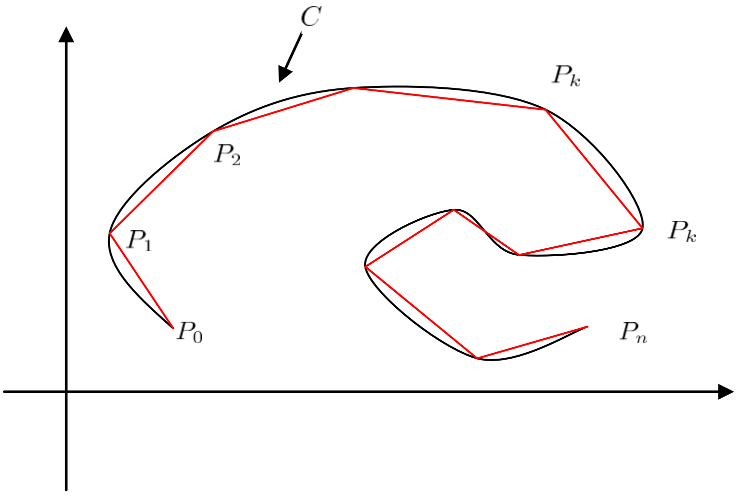
9.1 매개변수로 정의되는 곡선

매개변수 방정식



x와 y가 매개변수라 불리는 t의 연속함수로 연립방정식

$$x = f(t),\ y = g(t), \quad a \le t \le b$$

로 주어졌을 때, 이 방정식을 **매개변수방정식**이라 한다.

t가 변할 때, 점 $(x, y) = (f(t), g(t))$도 변하고 그 자취를 따라 곡선 C가 형성되며 이것을 **매개변수곡선**이라 부른다.

예를 들어 포물선 $y = x^2$은 매개변수 t에 대하여

$$x = t \ ,\ y = t^2$$

이라는 매개변수 방정식으로 표시할 수 있고 시계 반대 방향으로 한 바퀴 도는 반지름 a인 원은

$$x = a\cos t\,,\ \ y = a\sin t \quad (0 \le t \le 2\pi)$$

로 나타낼 수 있다.

x축을 따라 반지름이 r인 원을 굴렸을 때, 원주 위의 한 점 P가

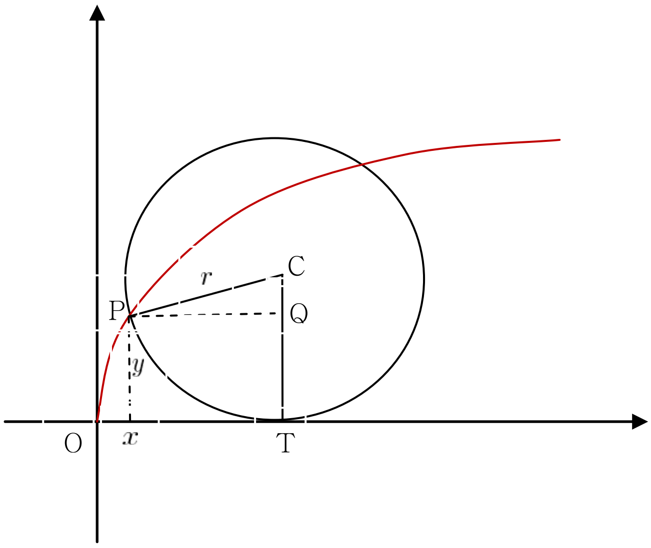
그리는 곡선인 싸이클로이드의 매개변수 방정식은

$$x = r(t - \sin t) \quad , \quad y = r(1 - \cos t)$$

이다. 이 식이 나오는 이유는 다음과 같다.

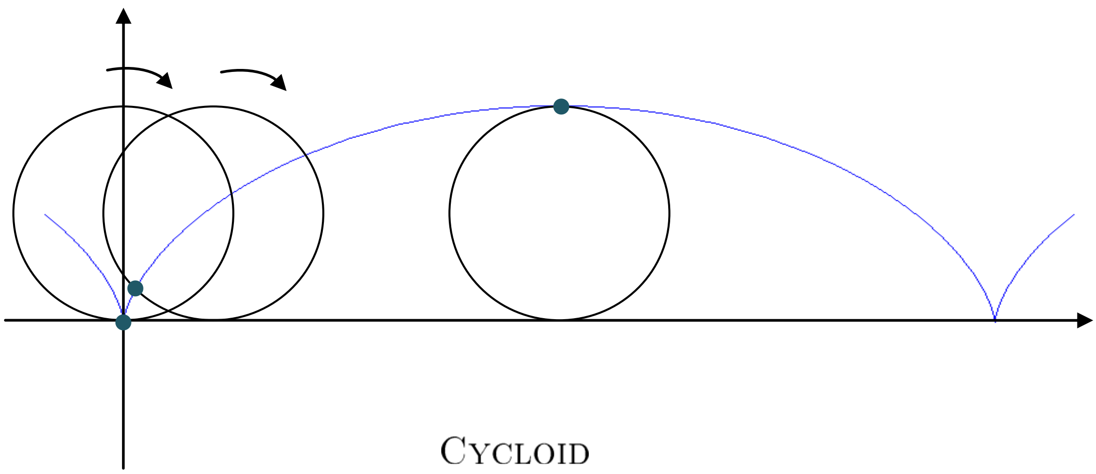
$$x = |OT| - |PQ| = |PT| - r\sin t = rt - r\sin t$$

$$y = |CT| - |CQ| = r - r\cos t$$



원이 한 번 회전할 때 싸이클로이드 하나의 호가 만들어지므로 이 때 매개변수 t의

범위는 $0 \le t \le 2\pi$이다.



CYCLOID

이 곡선을 뒤집어 놓은 형태가 최단시간 강하곡선 문제의 해이며 또 등시곡선 문제

의 해이다. 최단시간 강하곡선문제란 한 점 A에서 수직이 아닌 낮은 곳의 B까지 가장 빨리 미끄러져 가는 경로를 찾는 문제인데 중력만 작용하고 마찰을 무시한다. 등시곡선 문제는 곡선 위의 어느 점에 있더라도 가장 낮은 곳까지 미끄러지는데 걸리는 시간이 같아지는 곡선을 찾는 문제이다.

9.2 매개곡선의 미적분

접선

매개변수 방정식 $x = f(t), \quad y = g(t), \quad \alpha \le t \le \beta$ 로 정의된 곡선은 매개변수를 소거하여 $y = F(x)$ 의 형태로 나타낼 수 있다. 방정식 $y = F(x)$ 에 $x = f(t)$ 와 $y = g(t)$ 를 대입하면, $g(t) = F(f(t))$ 가 되고, g, F, f 가 미분가능하면, 연쇄법칙에 의하여

$$g'(t) = F'(f(t))f'(t) = F'(x)f'(t)$$

를 얻는다. $f'(t) \neq 0$ 이면 $F'(x)$ 를 다음과 같이 분수로 나타낼 수 있다.

$$F'(x) = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

곡선 $y = F(x)$ 위의 점 $(x, F(x))$ 에서 접선의 기울기는 $F'(x)$ 로 위 식을 이용하면 매개변수를 제거하지 않아도 그 값을 얻을 수 있다. 라이프니츠의 표기법을 사용하여 다시 쓰면

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \quad , \quad \frac{dx}{dt} \neq 0$$

이다. 이 식에서 $\frac{dy}{dt} = 0$ 이고 $\frac{dx}{dt} \neq 0$ 인 점에서는 수평접선이, $\frac{dy}{dt} \neq 0$ 이고 $\frac{dx}{dt} = 0$

인 점에서는 수직접선이 접한다. $\dfrac{dy}{dt}=0$ 과 $\dfrac{dx}{dt}=0$ 을 동시에 만족하는 점에서는 극한 $\lim_{t\to *}\dfrac{dy/dt}{dx/dt}$ 를 계산하고 결정한다. *는 $\dfrac{dy}{dt}=0$ 과 $\dfrac{dx}{dt}=0$ 를 동시에 만족하는 t 의 좌우 극한을 뜻한다.

곡선의 오목, 볼록성을 판정하는데 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 을 이용하는데 다음과 같이 유도된다.

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}$$

여기서 두 번째 등식에서는 합성함수 미분법이 세 번째 등식에서는 역함수 미분법이 각각 적용되었다.

넓이

매개변수 방정식 $x=f(t),\ y=g(t),\ \alpha\le t\le\beta$로 주어진 영역의 넓이는 치환적분을 이용하여 다음과 같이 구한다.

$$A=\int_\alpha^\beta y\,dx=\int_\alpha^\beta g(t)f'(t)dt$$

이다.

예제 x축과 싸이클로이드의 한 호로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하여라.

싸이클로이드의 한 호는 $0\le t\le 2\pi$로 주어진다.

$$A=\int_0^{2\pi}(r-r\cos\theta)(r-r\cos\theta)d\theta=3\pi r^2$$

호의 길이

매개변수 방정식 $x = f(t),\ y = g(t),\ \alpha \le t \le \beta$로 주어진 호의 길이는 $\frac{dx}{dt} > 0$이라 가정할 때 다음과 같이 유도된다.

$$
\begin{aligned}
L &= \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + \left(\frac{dy/dt}{dx/dt}\right)^2}\frac{dx}{dt}dt \\
&= \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt
\end{aligned}
$$

예제 싸이클로이드의 한 호의 길이를 구하여라.

$$
\begin{aligned}
L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(1-\cos t)^2 + r^2\sin^2 t}\ dt = 2r\int_0^{2\pi} \sin(t/2)dt = 8r.
\end{aligned}
$$

예제 구간 $[-1, 3]$에서 곡선 $x = 2(2t+3)^{3/2}, \quad y = 3(t+1)^2$ 의 길이를 구하여라.

$$
\frac{dx}{dt} = 6(2t+3)^{1/2}, \qquad \frac{dy}{dt} = 6(t+1)
$$

이므로

$$
L = \int_{-1}^{3} \sqrt{36(2t+3) + 36(t^2+2t+1}dt = 72
$$

이다.

곡면의 넓이

매개변수 방정식 $x = f(t),\ y = g(t),\ \alpha \le t \le \beta$로 주어진 곡선을 x축 주위로 회전시

켜 얻은 회전곡면의 넓이를 구하려면 함수 $y=F(x), a\le x\le b$의 그래프를 x축 주위로 회전시켜 얻은 회전곡면의 곡면적의 식을 이용하여 다음과 같이 유도한다.

$$\begin{aligned} S &= \int_a^b 2\pi F(x)\sqrt{1+[F'(x)]^2}dx = \int_a^b 2\pi y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx \\ &= \int_\alpha^\beta 2\pi y\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt \end{aligned}$$

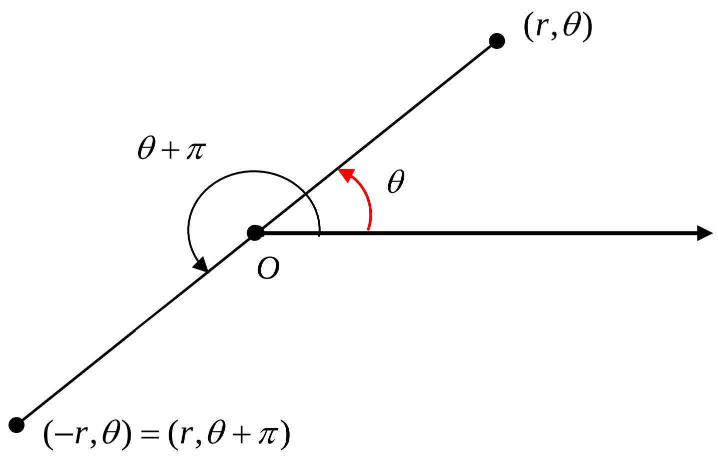
9.3 극좌표

두 개의 직선을 수평과 수직으로 긋고 축으로 사용하여 평면 위의 점을 표현하는 좌표계를 직교좌표계라고 한다. 이와 다른 방식으로 평면 위의 점을 나타내는 좌표계에 대해 알아보자.

우선 **극점**(Pole, 직교좌표계에서는 원점이라고 부른다) 이라 부르는 점 O를 평면 위에 잡는다. 그리고 **극축**(Polar Axis)이라 부르는 O에서 시작하는 반직선을 오른쪽으로 수평이 되게 그린다. 이는 직교좌표의 양의 방향인 x축과 같다. 이 두 기준에 대하여 평면 위의 임의의 점을 표현하는 방법은 다음과 같다. O와 다른 하나의 점 P를 정하자. 점 P와 점 O사이의 거리를 r이라 하자. 다음 그림과 같이 극축에서 선분 OP에 이르는 반시계 방향으로 잰 각을 θ라 하자. 그렇다면, 점 P는 순서쌍(r,θ)로 나타낼 수 있고 이를 **극좌표계**(Polar Coordinate System)라 한다.

극좌표로 평면 위의 점을 나타낼 때 몇 가지 추가되는 규칙은 다음과 같다.

먼저, $r>0$인 (r,θ)에서 $(-r,\theta)$을 표시할 수도 있는데, 이때는 주어진 각θ에 π를 더한 각과 $r(>0)$로 만든 좌표를 표시하게 된다.



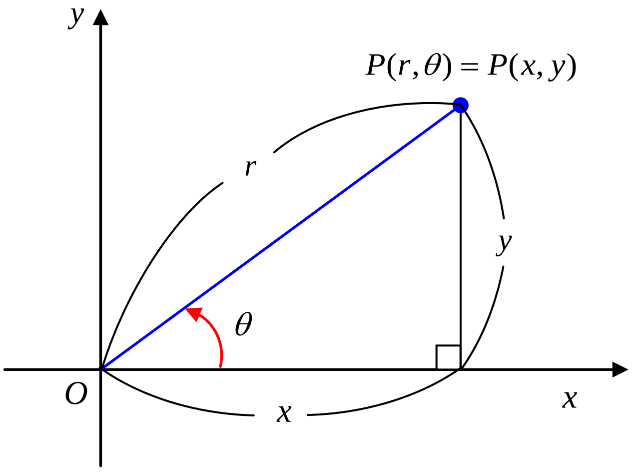
극점은 $r=0$이고 θ는 임의의 실수로 표현할 수 있다.

이러한 규칙에 따르면 극점이 아닌 경우에는 모든 정수에 대하여, $(r,\theta+2n\pi)$ 와 (r,θ)는 같은 점이 된다. 그러므로 극점을 포함한 모든 평면 위의 점들에 대한 극좌표의 표현은 유일하지 않다. 일반적으로 극점을 제외한 극좌표 (r,θ)로 표현되는 점은 다음과 같은 표현을 갖는다.

$$(r,\theta+2n\pi), \qquad (-r,\theta+(2n+1)\pi).$$

극좌표계와 직교좌표계의 관계

좌표계를 도입할 경우 평면 위의 점의 위치를 그 좌표계에 따라 표현할 수 있다. 그러므로 새롭게 소개된 극좌표계의 좌표와 직교좌표와의 관계를 조사할 필요가 있다. 극좌표와 직교좌표 사이의 관계는 오른쪽의 그림으로부터 쉽게 알 수



있다.

주어진 점 P 의 직교좌표계의 좌표를 (x, y), 극좌표계의 좌표를 (r, θ) 라 하자. 왼쪽의 그림으로부터

$$\cos\theta = \frac{x}{r}, \quad \sin\theta = \frac{y}{r}$$

임을 알 수 있다. 따라서,

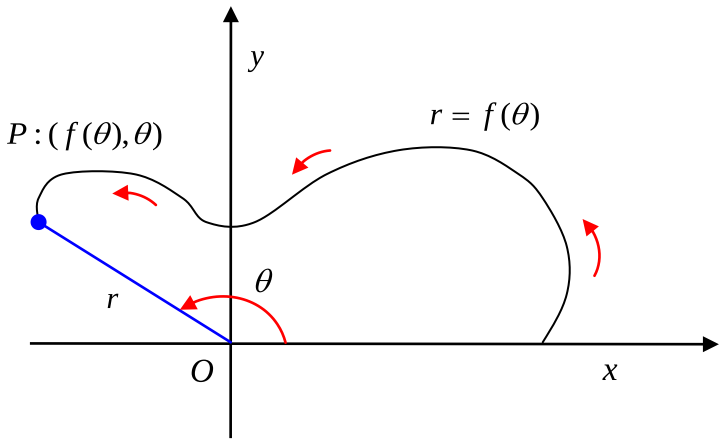
$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

이다. 이 식은 모든 실수 r 과 θ 에 대하여도 역시 성립함을 보일 수 있으며, 극좌표가 하나 결정되면 이 점에 대한 유일한 직교좌표의 표현을 이 식으로부터 얻을 수 있다.

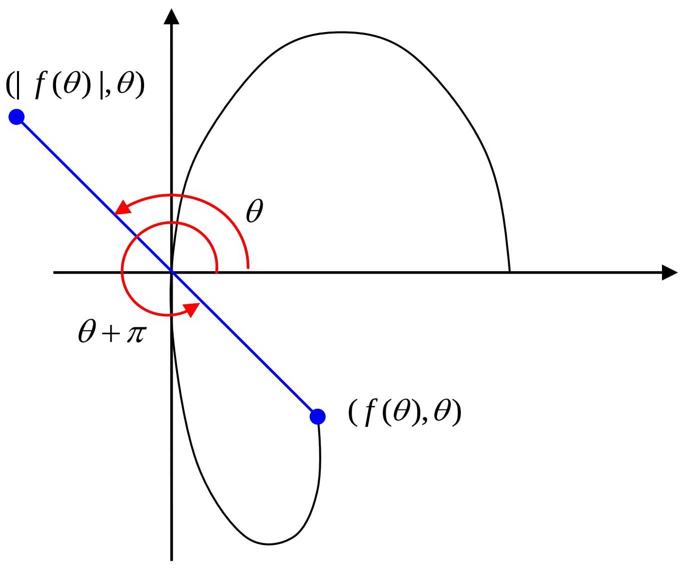
이제 직교좌표로부터 극좌표를 얻는 식을 생각해보자. 위의 그림으로부터 피타고라스 정리를 사용하면 $r^2 = x^2 + y^2$ 임을 알 수 있고, 또한 선분 OP 의 기울기가 $\frac{y}{x}$ 라는 사실로부터 $\tan\theta = \frac{y}{x}$ 임을 알 수 있다. 그러나 극좌표로부터 직교좌표를 구하는 경우와는 달리 직교좌표가 결정되면 이식을 만족하는 r 과 θ 는 무수히 많으며, 이중 심지어는 주어진 점을 표현하지 않는 경우도 생긴다. 그러므로 이 식으로부터 좌표를 변환하려고 할 때는 구해진 r 과 θ 가 변환하고자 하는 점을 나타내는지 정확히 확인하여야 한다.

극곡선

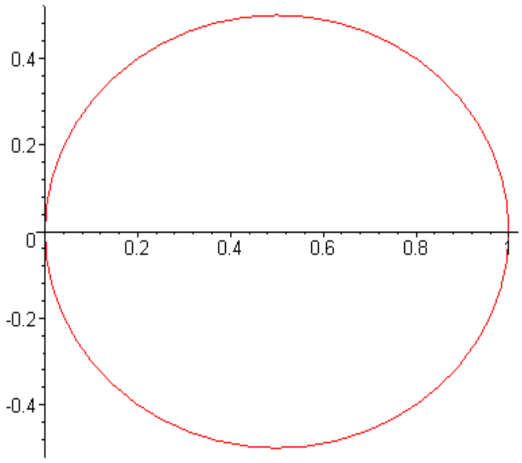
극좌표에서 표현할 수 있는 수학적인 문제를 해결하기 위하여 r 과 θ 의 관계식으로 표현된 방정식을 극방정식(Polar Equation) 이라 한다. 극방정식은 $r = f(\theta)$ 또는 $F(r, \theta) = 0$ 의 형태로 표현된다. 이 방정식을 만족하는 모든 점 (r, θ) 의 집합을 좌표평면 위에 표현한 도형을 극방정식의 그래프 또는 극곡선(Polar Curve)이라 한다.



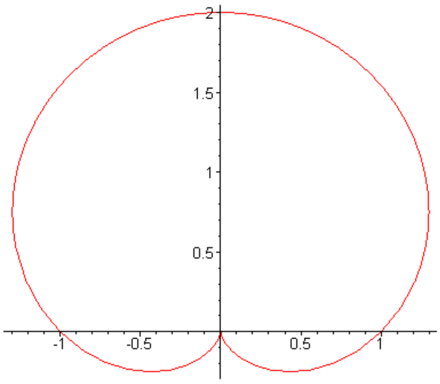
그래프를 그리는 방법은 다음과 같다. 극축($\theta=0$)으로부터 반시계 방향으로 θ를 증가 시키면서 평면 위의 점 $(f(\theta),\theta)$을 그려 나간다. (그림 참조) 단, $f(\theta)$의 값이 음의 값을 가질 경우는 그림과 같이 점$(|f(\theta)|,\theta)$을 극점에 대하여 대칭이동한 위치에 점을 표시한다.



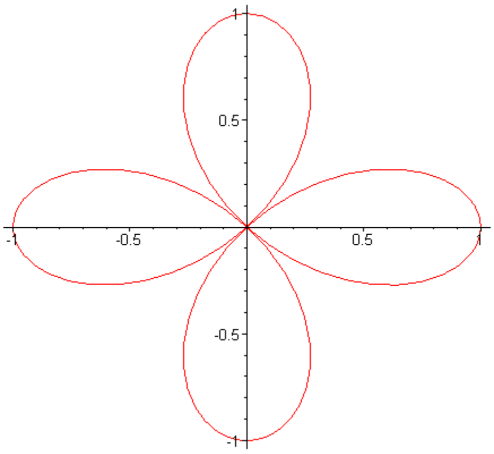
예제 극곡선 $r=\cos\theta$의 개형을 그려라.



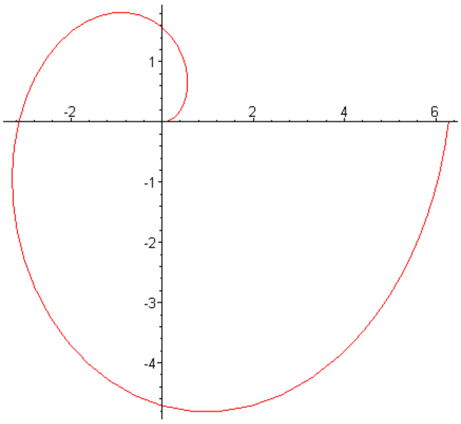
예제 극곡선 $r = 1 + \sin\theta$의 개형을 그려라.



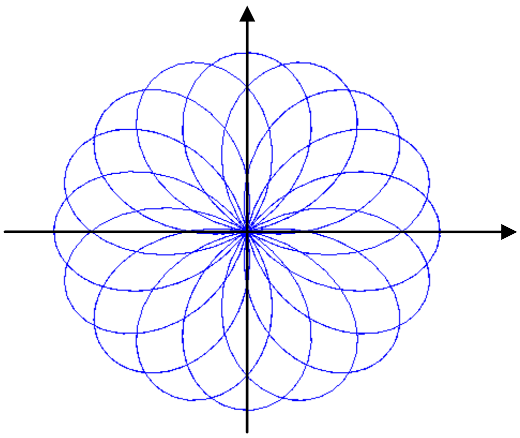
예제 극곡선 $r = \cos 2\theta$의 개형을 그려라.



예제 극곡선 $r=\theta, (0 \le \theta \le 2\pi)$의 개형을 그려라.



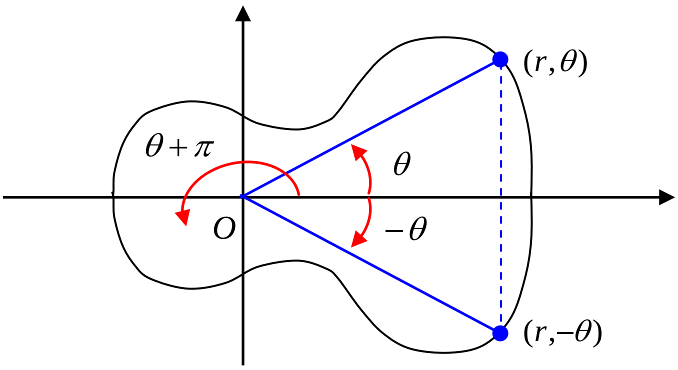
예제 극곡선 $r=\cos\frac{8}{5}\theta,\ (0 \le \theta \le 2\pi)$의 개형을 그려라.



극곡선의 대칭성

극방정식의 그래프를 그릴 때 유용하게 쓰이는 극그래프의 성질 중 대칭성에 대하여 알아보자. 대칭성을 설명하는 가장 손쉬운 방법은 그래프의 형태를 생각하는 것이다.

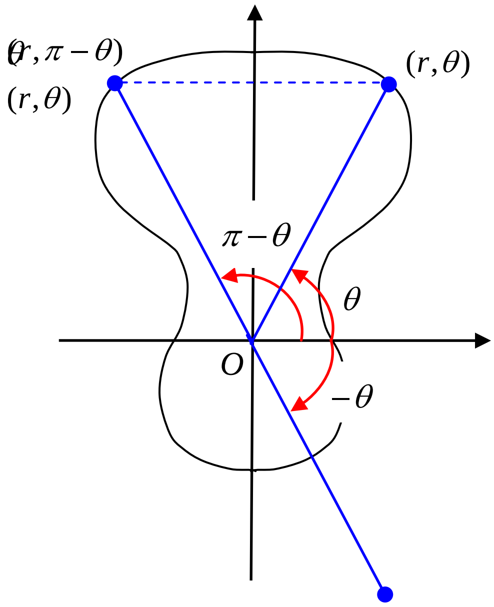
1) x축 대칭



그림과 같이 x 축 대칭이 되기 위해서는 극방정식 $r=f(\theta)$ 에 대하여, θ 와

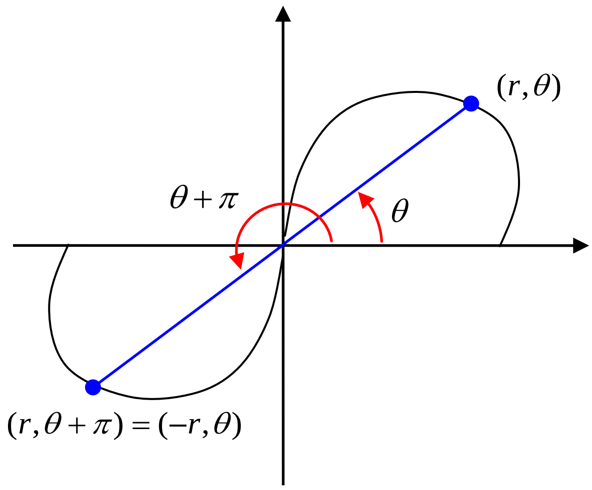
$-\theta$에서의 함수 값이 같아야 한다. 즉, $f(\theta)=f(-\theta)$. 더욱이 $f(\theta+\pi)=-f(\theta)$가 성립한다.

2) y **축 대칭**



그림과 같이 y축 대칭이 되기 위해서는 극방정식 $r=f(\theta)$에 대하여, θ와 $\pi-\theta$에서의 함수 값이 같아야 한다. 즉, $f(\theta)=f(\pi-\theta)$. 더욱이 $f(-\theta)=-f(\theta)$가 성립함을 주의 하여야 한다.

3) **극점 대칭**



그림과 같이 극점 대칭이 되기 위해서는 극방정식 $r = f(\theta)$ 에 대하여, θ와 $\pi+\theta$ 에서의 함수 값이 같아야 한다. 즉, $f(\theta) = f(\pi+\theta)$. 더욱이 $f(\theta) = -f(\theta)$가 성립함을 주의 하여야 한다.

극곡선에 대한 접선

주어진 극방정식 $r = f(\theta)$ 의 그래프(또는 극곡선)에 대한 접선을 구할 때에 매개변수방정식의 결과를 이용한다. 즉 평면 위의 직교좌표 (x, y) 의 x와 y를 각각 적당한 매개변수로 표현하는데 주어진 극방정식과 두 식 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ 로부터 θ를 매개변수로 하는 다음의 매개변수 방정식을 얻을 수 있다. 즉,

$$x(\theta) = f(\theta)\cos\theta,$$

$$y(\theta) = f(\theta)\sin\theta.$$

위의 식으로부터 주어진 극방정식을 만족하는 극곡선은 매개변수화된 곡선이 되고, 이로부터 접선의 방정식을 얻을 수 있다.

우선 주어진 점에서의 접선의 기울기를 구해보자. 접선의 기울기는 다음의 계산을 통해 얻을 수 있다.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\frac{df}{d\theta}\sin\theta + f(\theta)\cos\theta}{\frac{df}{d\theta}\cos\theta - f(\theta)\sin\theta}.$$

이 식으로부터 수평접선은 $\frac{dy}{d\theta} = 0$ 이고 $\frac{dx}{d\theta} \neq 0$ 인 점에서, 수직접선은 $\frac{dy}{d\theta} \neq 0$ 이고 $\frac{dx}{d\theta} = 0$ 인 점에서 접한다. $\frac{dy}{d\theta} = 0$ 과 $\frac{dx}{d\theta} = 0$ 을 동시에 만족하는 점에서는 극한 $\lim_{\theta \to *} \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}$ 를 계산하고 결정한다. 이 식에서 *는 $\frac{dy}{d\theta} = 0$ 과 $\frac{dx}{d\theta} = 0$ 을 동시에 만족하는 θ의 좌우 극한을 뜻한다.