Jung Eun Park's Span of the Linear Pain
in Complexity Spin on 20150919

CODING THE MATRIX

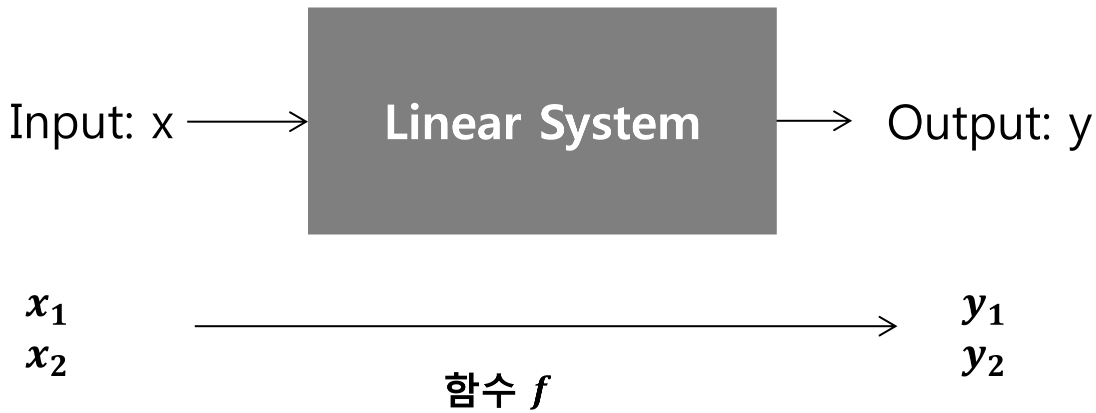
여기저기 빵꾸난 13장

EIGENVECTOR

그래 나도 그게 알고 싶다..

타카하시 신, 만화로 쉽게 배우는 선형대수, 성안당, 2009

선형시스템



$y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ 일 때,

Additivity와 homogeneity를 만족하는 경우, 그 system은 선형 system

- Additivity: f(x + y) = f(x) + f(y)
- Homogeneity: f(a * x) = a f(x) (동질성, 균질성)

→ 두 개의 입력값이 독립적인 결과를 만들어 냄(서로 영향을 주지 않음)
몇 개의 input에 대한 output만 알아도, system의 모든 것을 알 수 있음

현실 세계의 시스템은 비선형인 경우가 많지만, 선형시스템인 것처럼 근사화 시켜서 분석을 수행

자료출처 : 고려대학교 2014 겨울고공학교 '선형대수' 강의자료 by 이건용(고려대학교 전기전자전파공학과)

Eigenvalue, 어따 쓰나요?

eigenvalue를 구하면 다음과 같은 장점이 있다고 한다.

1. 특정한 선형시스템 내의 함수에 의해 복잡한 변환이 일어나더라도, 기존 벡터 x를 크기만 변환하고(scalar) 그 외의 요소(회전이동 등)은 바꾸지 못하는 벡터를 찾음으로써 계산을 쉽게 할 수 있음*.
2. 선형시스템의 변환 행렬이 정방행렬일때, 거듭제곱 계산을 쉽게 만드는 데 이용(행렬의 대각화)
3. 그 밖에 물리학 통계학 등등 여러 분야에 써먹을 수 있다는 설도 있음

* http://blog.naver.com/skkong89/220216233586

고유값(eigenvalue)과 고유벡터(euigenvector)

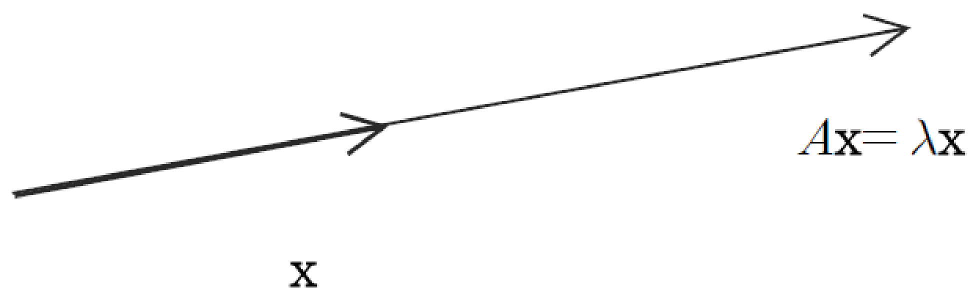
1. 특정한 선형시스템 내의 함수에 의한 복잡미묘한 변환이 일어나더라도, **기존 벡터 x를 크기만 변환하고 (scala) 다른 요소(회전이동 등)은 바꾸지 못하는 벡터**를 찾음으로써 계산을 쉽게 할 수 있음.

『정의1』(고유값(eigenvalue)과 고유벡터(eigenvector))

A : n차의 정사각행렬. $\forall\, \mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in \mathrm{R}^n$, $\lambda \in \mathrm{R}$

다음을 만족할 때 λ를 A의 고유값이라 하고 $\mathbf{x}$를 λ에 대응하는 A의 고유벡터

$$\Longrightarrow \boxed{A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}.}$$



자료출처 : http://monet.skku.ac.kr/~kisoeb/Courses/Chapter04-5.pdf

고유값(eigenvalue)과 고유벡터(euigenvector)

$$\forall\, 0 \neq X \in \mathbb{R}^2,\ A = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},\ x_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix},\ x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$A\,x_1 = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 7 \end{bmatrix} = 7\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \boxed{7\,x_1}$$

$$A\,x_2 = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \boxed{2\,x_2}$$

A가 대각행렬이 아닌데도 결과값이 원래 벡터의 스칼라배가 되었다??

여기서 Ax = λx ($\lambda \neq 0, \lambda \in$ R) 를 만족시키는 7과 2가 A의 고유값(eigenvalue),
고유값에 대응하는 A의 고유벡터가 $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ 과 $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$이다.

7에 대응 2에 대응

예제출처 : 타카하시 신, 만화로 쉽게 배우는 선형대수, pp.227~pp.237, 성안당, 2009

고유값과 고유벡터 구하기

이미 답을 알고 있는 앞의 예제에서 구해봅시당

$\forall\ 0 \neq \mathrm{X} \in \mathbb{R}^2$, $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ 의 고유값, 고유벡터는?

$\mathrm{Ax} = \lambda \mathrm{x}(\lambda \neq 0, \lambda \in \mathrm{R})$, 이를 만족시키는 고유벡터 $\mathrm{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$라고 하면, $(A - \lambda I)\mathrm{x} = 0$

$$\begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda I \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

양변에 단위행렬 I 을 곱하고 식을 좌변으로 정리

$$\begin{bmatrix} 8-\lambda & -3 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

왜? 앞에서 고유벡터는 영벡터가 아니라고 했으니께

식 (1)이 자명한(trivial) 해를 가질 조건이 계수행렬의 행렬식(determinant) ≠ 0이므로,
0아닌 해(자명하지 않은 해)를 가질 필요충분조건은 det의 값이 0이 되는 것이다.

$$|A - \lambda I| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} 8-\lambda & -3 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (8-\lambda)(1-\lambda) - (-3)(2) = \lambda^2 - 9\lambda + 16 = 0$$

$$= (\lambda - 7)(\lambda - 2)$$

얘를 'A의 특성방정식'이라고 해요
얘의 해가 고유값이 되는 거임

∴ 고유값은 $\lambda_1 = 7$, $\lambda_2 = 2$

위에서 구한 고유값을 식 (1) : $\begin{bmatrix} 8-\lambda & -3 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$ 에 대입하면 고유벡터를 구할 수 있다.

1) λ_1 = 7 에 대응하는 고유벡터 $\mathbf{x}_1$ = $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 8-7 & -3 \\ 2 & 1-7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{l} x_1 - 3y_1 = 0 \\ 2x_1 - 6y_1 = 0 \end{array} \right.$$

위의 두 식은 같으므로 우리는 $x_1 = 3y_1$ 라는 것만 알 수 있다. → 고유값 7에 대응하는 고유공간

$$\mathrm{x}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3y_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3C_1 \\ C_1 \end{bmatrix} = C_1 \boxed{\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}} \qquad (C_1 \neq 0, C_1 \in \mathrm{R})$$

C_1, C_2 값에 따라 각 고유공간 내에 무수히 많은 고유벡터가 존재하지만, 가장 기본적인 C_1 , C_2 = 1 인 경우를 채택해도 ok

2) λ_2 = 2 에 대응하는 고유벡터 $\mathbf{x}_2$ = $\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 8-2 & -3 \\ 2 & 1-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{l} 6x_2 - 3y_2 = 0 \\ 2x_2 - \ \ y_2 = 0 \end{array} \right.$$

위의 두 식은 같으므로 우리는 $y_2 = 2x_2$ 라는 것만 알 수 있다. → 고유값 2에 대응하는 고유공간

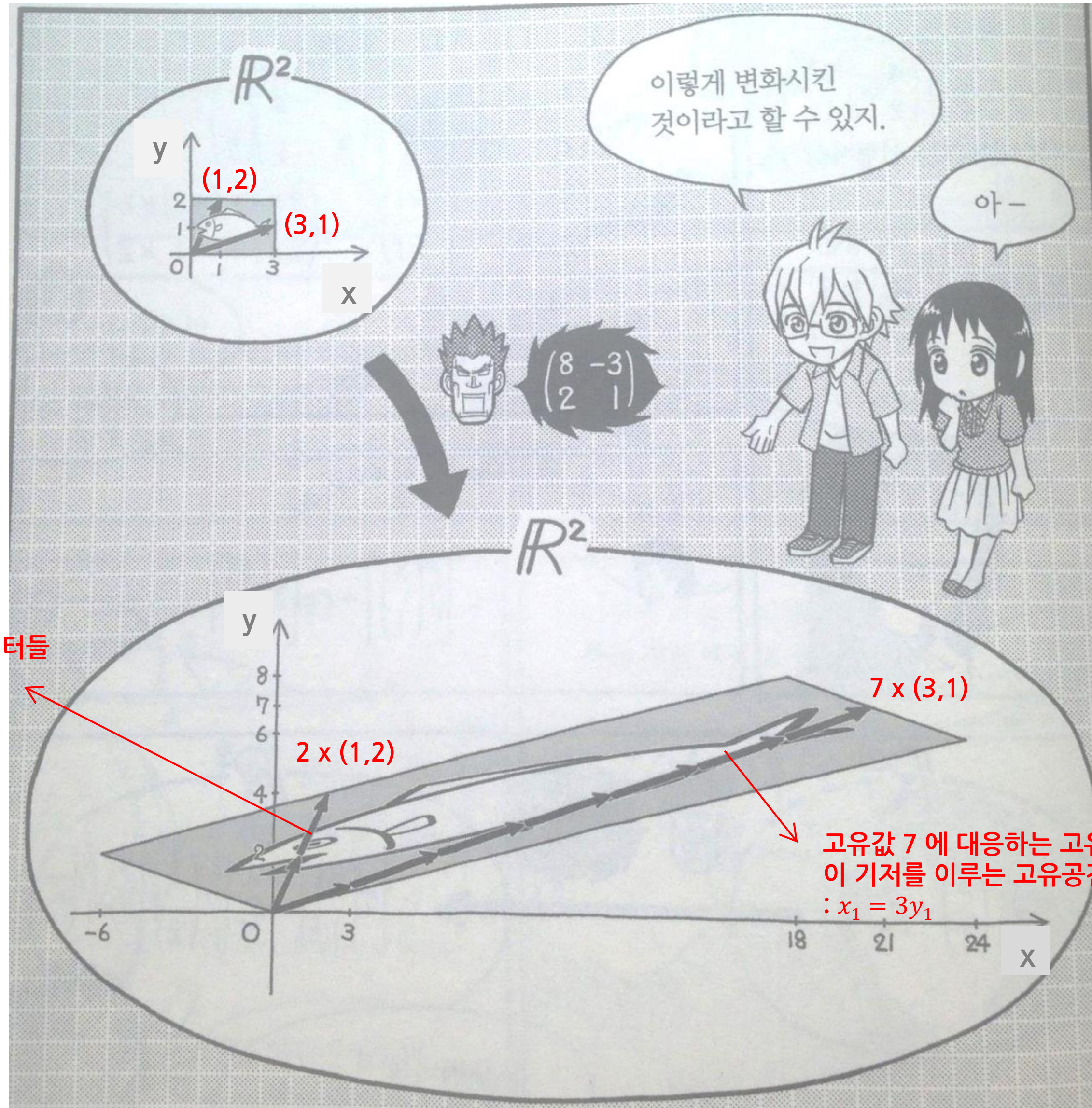
$$\mathrm{x}_1 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ 2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_2 \\ 2C_2 \end{bmatrix} = C_2 \boxed{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}} \qquad (C_2 \neq 0, C_2 \in \mathrm{R})$$

∴ A의 고유값 λ_1 = 7 에 대응하는 고유벡터 $\mathbf{x}_1$ = $\begin{bmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$

λ_2 = 2 에 대응하는 고유벡터 $\mathbf{x}_2$ = $\begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \end{bmatrix}$

앞의 결과를 그래프상에서 보면, $\forall\, 0 \neq X \in \mathbb{R}^2$, $A = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

행렬 A는 x-y평면 위의 요소를 아래와 같이 변형시키며,



고유값 2 에 대응하는 고유벡터들
이 기저를 이루는 고유공간 :
$y_2 = 2x_2$

고유값 7 에 대응하는 고유벡터들
이 기저를 이루는 고유공간
: $x_1 = 3y_1$

고유값과 고유벡터의 성질

【예제 1】 $\forall \mathbf{x} \in \mathrm{R}^n$, $I_n\mathbf{x} = 1\mathbf{x}$이므로

1 단위행렬 I_n의 고유값: $\lambda = 1$하나뿐이고, 모든 $0 \neq \mathbf{x} \in \mathrm{R}^n$: 고유값 1에 대응하는 I_n의 고유벡터이다.

[NOTE]

2 $\forall \mathbf{x} \in \mathrm{R}^n$: 고유값 λ에 대응하는 A의 고유벡터(즉, $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$)일 때, $\forall k \in \mathrm{R}$,

$$A(k\mathbf{x}) = kA\mathbf{x} = k(\lambda\mathbf{x}) = \lambda(k\mathbf{x})$$이므로,

즉, $k\mathbf{x}$: λ에 대응하는 A의 고유벡터가 된다.

따라서, λ에 대응하는 A의 고유벡터는 무수히 많다.

3 **A가 정방삼각행렬(대각행렬, 상삼각/하삼각행렬)이면, A의 고유값은 주대각성분이다.**

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a & c \\ 0 & b \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & b \end{bmatrix} \qquad (a, b, c \neq 0, a, b, c \in \mathrm{R})$$

세 행렬 모두 $|A - \lambda I|$ = (a- λ) (b- λ) = 0이므로, 고유값은 주대각성분 a,b

13.1 비연속 동적 프로세스 모델링

: 시간이나 상태에 따라 변화하는 동적인 계(system)의 모델링

13.1.1 이자가 붙는 은행계좌(교재 13장 p.511)

A은행
연이율 5%

B은행
연이율 3%

처음 계좌 잔고 $$X^{(0)} = \begin{bmatrix} \text{A은행 최초입금액} \\ \text{B은행 최초입금액} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1{}^{(0)} \\ x_2{}^{(0)} \end{bmatrix}$$

t 년 후 계좌 잔고 $$X^{(t)} = \begin{bmatrix} \text{A은행 계좌 잔고} \\ \text{B은행 계좌 잔고} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1{}^{(t)} \\ x_2{}^{(t)} \end{bmatrix}$$

t + 1년 후 계좌 잔고 $$X^{(t+1)} = \begin{bmatrix} \text{A은행 계좌 잔고} \\ \text{B은행 계좌 잔고} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1{}^{(t)} + 0.05x_1{}^{(t)} \\ x_2{}^{(t)} + 0.03x_2{}^{(t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.05x_1{}^{(t)} \\ 1.03x_2{}^{(t)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.05 & 0 \\ 0 & 1.03 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1{}^{(t)} \\ x_2{}^{(t)} \end{bmatrix}$$

$$X^{(t+1)} = \begin{bmatrix} 1.05 & 0 \\ 0 & 1.03 \end{bmatrix} X^{(t)}$$

애를 A라고 할게요

$$
\begin{aligned}
x^{(100)} &= Ax^{(99)} \\
&= A(Ax^{(98)}) \\
&= A(A(Ax^{(97)})) \\
&\vdots \\
&= \underbrace{A \cdot A \cdot \cdot \cdot A}_{\text{100제곱}} x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1.05 & 0 \\ 0 & 1.03 \end{bmatrix}^{100} x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1.05^{100} & 0 \\ 0 & 1.03^{100} \end{bmatrix} x^{(0)}
\end{aligned}
$$

이게 가능한 건 왜? A가 대각행렬이라 그래요.
근데 A가 대각행렬이 아니면?
A의 거듭제곱 계산을 간단하게 만들려면
A를 대각행렬처럼 나타내면 되지 않을까요?
고유값, 고유벡터를 여따 쓴대요.

A, B 계좌에 각각 1불씩 최초 입금했다고 하면,
100년 후 잔고는 각각 131불, 19불이 된다.

→ **t 가 작을 때는 초기값이 중요하며, 변수 간 초기값 차이가 작으면 별 영향이 없지만,**
t 가 충분히 커지고 나면 t 가 증가할수록 초기값에 약간의 차이만 있어도 큰 차이가 발생하며,
결국 t가 중요한 요소가 된다

행렬의 대각화(diagonalization)

다시 앞에서 고유값, 고유벡터를 구한 예제로 돌아갑니다.

$\forall\ 0 \neq X \in \mathbb{R}^2$, $A = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ 의 고유값 $\boldsymbol{\lambda_1}$ **= 7 에 대응하는 고유벡터** $\mathbf{x_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$

$\boldsymbol{\lambda_2}$ **= 2 에 대응하는 고유벡터** $\mathbf{x_2} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \end{bmatrix}$

$$A\,x_1 = 7x_1 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 7\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \times 7 \\ 1 \times 7 \end{bmatrix}$$

$$A\,x_2 = 2x_2 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 2 \\ 2 \times 2 \end{bmatrix}$$

위 두 개의 식을 하나로 정리할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \times 7 & 1 \times 2 \\ 1 \times 7 & 2 \times 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

양변의 우측에 $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$ 를 곱하면,

$$\begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}_{\text{고유벡터}}\underbrace{\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{\text{주대각성분이 고유값으로 이루어진 대각행렬}}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$$

행렬의 대각화 가능 조건

1. 정방행렬 A가 **가역행렬 P에 대해 A = PDP $^{-1}$ ($\Leftrightarrow$ D = P $^{-1}$AP $\Leftrightarrow$ AP = PD) 를 만족하는 대각행렬 D가 존재하면 A는 대각화 가능(Diagonalizable) 하다.**

$$\begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$$

A

고유벡터

주대각성분이
고유값으로 이루어진
대각행렬

여기서 P는 A의 고유벡터들을 열벡터로 가지는 행렬이며, D는 고유값들을 대각성분으로 가지는 대각행렬이다. 즉,

$$A = [\, x_1 \mid x_2 \,] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} [\, x_1 \mid x_2 \,]^{-1} = PDP^{-1}$$

행렬의 대각화 가능 조건

2. n차 정방행렬 A가 n개의 일차독립인 고유벡터를 가지면 A는 대각화 가능하며, 그 역도 성립한다.(필요충분조건)

3. n차 정방행렬 A가 n개의 모두 다른 고유값을 가지면 A는 대각화 가능하다.
그러나 고유값 중에 서로 같은 것이 있는(특성방정식에 중근이 있는) 경우 중에도 대각화 가능한 경우가 있다.

ex) 단위행렬

4. 모든 정방행렬이 대각화 가능하지는 않다.

행렬의 유사성(Similarity)

A와 D 사이에 **A = PDP $^{-1}$ ((⇔ D = P $^{-1}$AP ⇔ AP = PD)** 의 관계가 성립하면,
즉 대각화 가능하면 A와 D는 **유사행렬(Similar Matrix)**라고 하며,
유사행렬(Similar Matrix)들은 동일한 고유값을 가진다.

➡ 대각화 가능한 행렬 A의 고유값이 λ , 이에 대응하는 고유벡터가 υ 라면,

$A\upsilon = \lambda\upsilon$, $A = PDP^{-1}$ (⇔ $D = P^{-1}A\,P$ ⇔ $AP = PD$) 을 만족하는 A의 유사행렬 D가 존재

$\omega = P^{-1}\upsilon$ 라고 하면,

$$
\begin{aligned}
D\omega &= (P^{-1}A\,P)\omega \\
&= (P^{-1}A\,P)(P^{-1}\upsilon) \\
&= P^{-1}A\,\upsilon \\
&= P^{-1}\lambda\upsilon \\
&= \lambda P^{-1}\upsilon \\
&= \lambda\omega
\end{aligned}
$$

∴ $D\omega = \lambda\omega$ 이므로 λ는 A의 유사행렬 D의 고유값이기도 하다

행렬의 대각화를 이용한 거듭제곱 계산

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}} = \underset{P}{\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}} \underset{D}{\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}} \underset{P^{-1}}{\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}}$$

$$A^{100} = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{100}$$

$$= (PDP^{-1})^{100}$$

$$= (PD\underbrace{\boxed{P^{-1})(P}}_{}{}^{=I}D\,P^{-1})(PD\,P^{-1}) \cdots\cdots (PD\,P^{-1})$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{100제곱}$$

$$= PD^{100}P^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7^{100} & 0 \\ 0 & 2^{100} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$$

13.1 비연속 동적 프로세스 모델링

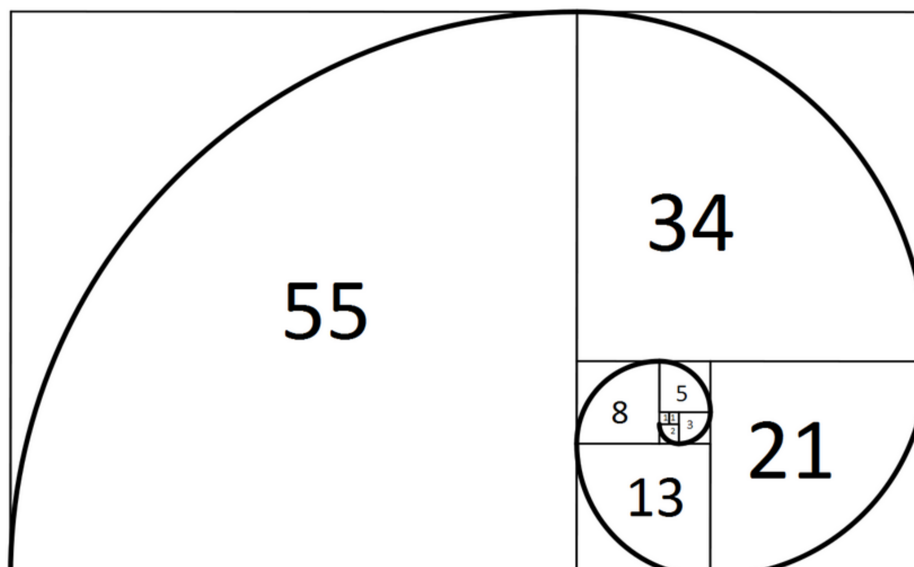
13.1.2 피보나치 수(Fibonacci Numbers)

Rules : 처음 두 항은 1이고, 세 번째 항부터는 바로 앞의 두 항의 합

\+

1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 …

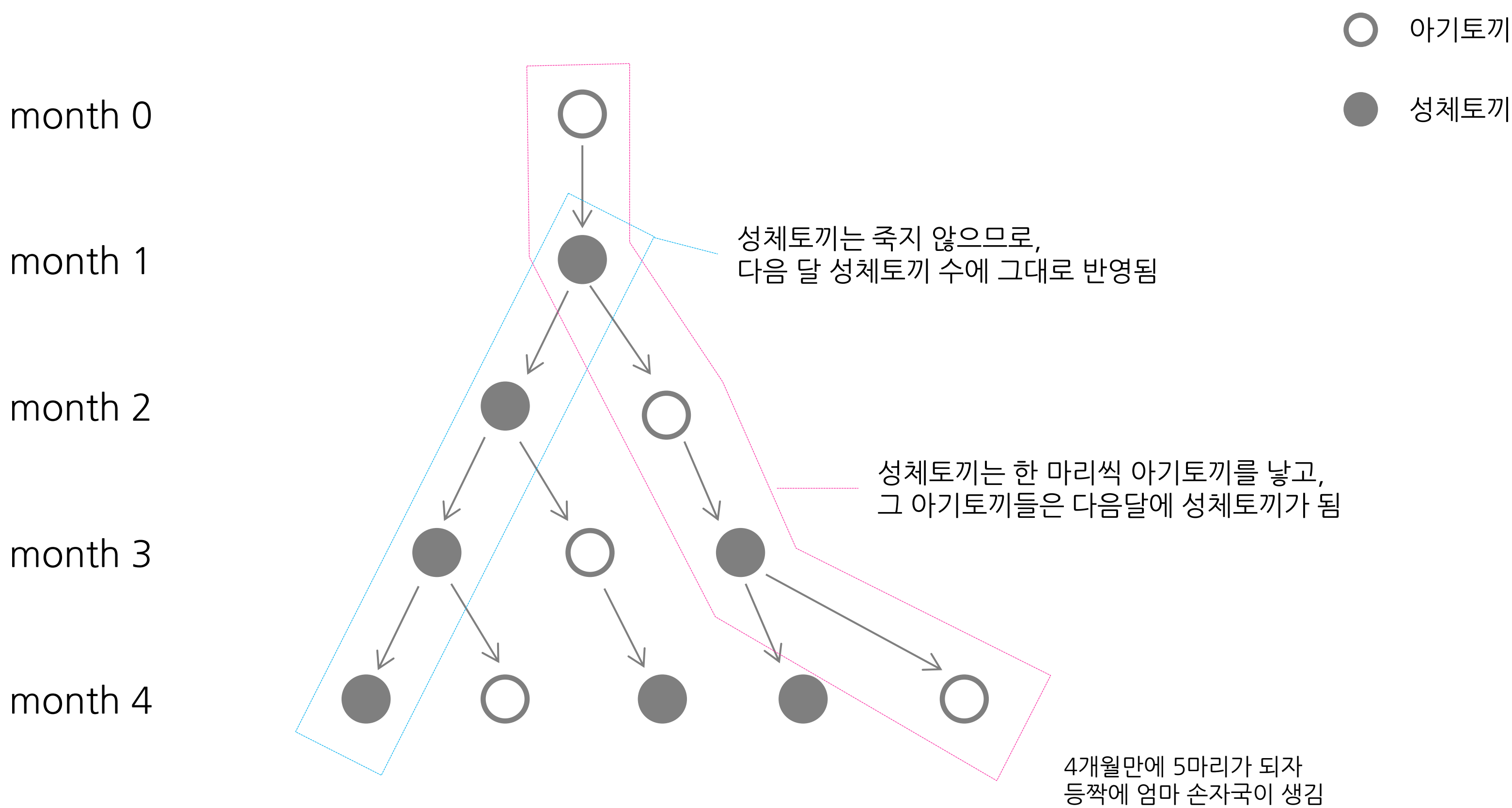
\+



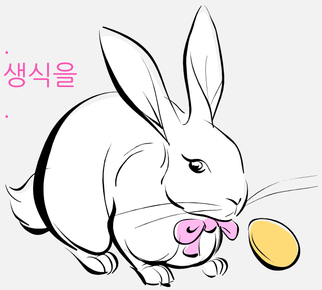
Rules : 모델링을 위한 조건의 단순화

1. 매월 각 성체 토끼는 성별에 상관없이 한 마리의 아기 토끼를 낳는다
2. 아기 토끼는 성체가 되는데 한 달이 소요된다
3. 토끼는 죽지 않는다.

이 사실을 모르는 영숙님은 산에서 아기토끼를 한 마리 잡아왔다.(~~웰컴투헬~~)



나는 토끼.
내가 단위생식을 한다고 쳐.
그냥.



Rules : 모델링을 위한 조건의 단순화

1. 매월 각 성체 토끼는 성별에 상관없이 한 마리의 아기 토끼를 낳는다
2. 아기 토끼는 성체가 되는데 한 달이 소요된다
3. 토끼는 죽지 않는다.

시간변수 t에 따른 토끼 수를 일반화하여 벡터로 나타내면,

처음 잡아온 토끼 수 $$X^{(0)} = \begin{bmatrix} \text{최초 성체토끼 수} \\ \text{최초 아기토끼 수} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1{}^{(0)} \\ x_2{}^{(0)} \end{bmatrix}$$

t 개월 후 토끼 수 $$X^{(t)} = \begin{bmatrix} \text{t 개월 후 성체토끼 수} \\ \text{t 개월 후 아기토끼 수} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1{}^{(t)} \\ x_2{}^{(t)} \end{bmatrix}$$

t + 1개월 후 토끼 수 $$X^{(t+1)} = \begin{bmatrix} \text{t+1개월 후 성체토끼 수} \\ \text{t+1개월 후 아기토끼 수} \end{bmatrix}$$

한 달 전에 나온 아기토끼가 다 자람

$$= \begin{bmatrix} \text{t개월 후 성체토끼 수 + t 개월 후 아기토끼 수} \\ \text{t개월 후 성체토끼 수} \end{bmatrix}$$

한 달 전 성체토끼들이
한 마리씩 낳았음

$$= \begin{bmatrix} x_1{}^{(t)} + x_2{}^{(t)} \\ x_1{}^{(t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1{}^{(t)} \\ x_2{}^{(t)} \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ \mathbf{X^{(t)}} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{t} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1{}^{(0)}} \\ \boldsymbol{x_2{}^{(0)}} \end{bmatrix}$$

t개월 후 영숙님은 토끼 몇 마리와 살게 될까?

$$\mathbf{X}^{(t)} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{t} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

피보나치 수열을 계속 더하기만 하면 쉽게 구할 수 있는 편이지만,
만약 행렬의 성분이 좀 더 복잡하고, t가 엄청나게 크다면 어떻게 하나요

앞에서 얘기한 대로 행렬을 대각화 해 봅시다.

일단 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 의 고유값과 고유벡터를 구해보아요.

$\forall\ 0 \neq X \in \mathbb{R}^2$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 의 고유값은 $\boldsymbol{\lambda_1} = \frac{\mathbf{1+\sqrt{5}}}{\mathbf{2}}$, $\boldsymbol{\lambda_2} = \frac{\mathbf{1-\sqrt{5}}}{\mathbf{2}}$

고유값 $\lambda_1 = \frac{\mathbf{1+\sqrt{5}}}{\mathbf{2}}$ 에 대응하는 고유벡터 $X_1 = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{1+\sqrt{5}}}{\mathbf{2}} \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = \frac{\mathbf{1-\sqrt{5}}}{\mathbf{2}}$ 에 대응하는 고유벡터 $X_2 = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{1-\sqrt{5}}}{\mathbf{2}} \\ 1 \end{bmatrix}$

n차정방행렬 A가 n개의 고유값 λ을 가지면 PD P^{-1} 의 형태로 대각화할 수 있으므로,

A의 고유벡터(열벡터)를 $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$ 라고 하면,

$$A = PDP^{-1} = [v_1|v_2]\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}[v_1|v_2]^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1\end{bmatrix}^{-1}$$

t개월 후 토끼 $x^{(t)} = A^t\begin{bmatrix}0 \\ 1\end{bmatrix}$

$$= (PDP^{-1})^t\begin{bmatrix}0 \\ 1\end{bmatrix}$$

$$= (PD^tP^{-1})\begin{bmatrix}0 \\ 1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2}\end{bmatrix}^t\begin{bmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0 \\ 1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^t & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0 \\ 1\end{bmatrix}$$

손으로 풀만큼 간단하지는 않다.
어쨌든 1년만 지나도 토끼는 233마리가 되어
영숙님 등에는 엄마의 손자국이 남게 된다.
해피엔딩.

13.7 누승법(= 거듭제곱법/ 멱법, Power Method)

대각화 가능한 행렬 A의 n개의 서로 다른 고유값 λ 들을 **절대값의 크기순으로** 정렬

→ 고유값 : $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots\cdots \geq |\lambda_n|$

→ 고유벡터 : v_1 , ⋯⋯ , v_n　　$Av = \lambda v$

어떤 랜덤벡터 x_0 를 선택하고, 임의의 음수가 아닌 정수 t 에 대해 $x_t = A^t x_0$ 라고 한다.

x_0 를 고유벡터에 대하여 나타내면,

$$x_0 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \cdots\cdots + \alpha_n v_n$$

t = 0일 때 $A^t = 1$

그러면 $x_t = A^t x_0$ 이므로

$$= A^t (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \cdots\cdots + \alpha_n v_n)$$

$$= \alpha_1 A^t v_1 + \alpha_2 A^t v_2 + \alpha_3 A^t v_3 + \cdots\cdots + \alpha_n A^t v_n$$

$$= \alpha_1 \lambda_1{}^t v_1 + \alpha_2 \lambda_2{}^t v_2 + \alpha_3 \lambda_3{}^t v_3 + \cdots\cdots + \alpha_n \lambda_n{}^t v_n$$

$\alpha_1 \neq 0$, $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ 이면,
t가 증가할수록 υ_1 의 계수 $\alpha_1\lambda^t$ 는 다른 모든 계수들보다 더 빠르게 커져서
t가 충분히 큰 경우 다른 계수들보다 압도적으로 커지게 되어,
두 번째 항 이후를 오차로 간주할 수 있게 된다.

$$x_t = \alpha_1{\lambda_1}^t\upsilon_1 + \underbrace{\alpha_2{\lambda_2}^t\upsilon_2 + \alpha_3{\lambda_3}^t\upsilon_3 + \cdots\cdots + \alpha_n{\lambda_n}^t\upsilon_n}_{\text{ERROR}}$$

즉, x_t 는 $\alpha_1{\lambda_1}^t\upsilon_1$ 에 수렴

그런데 υ_1 이 A의 고유벡터이므로, $\alpha_1{\lambda_1}^t\upsilon_1$ 역시 A의 고유벡터이다.

따라서 결국 $x_t = \alpha_1{\lambda_1}^t\upsilon_1$ + error 는 A의 고유벡터에 근사한 근사고유벡터(Approximate Eigenvector)

그러면 Ax_t 는 $\lambda_1 x_t$ 에 수렴하므로, x_t 로부터 대응하는 고유값 λ_1 을 구할 수 있다.

이처럼 절대값이 가장 큰 고유값(λ_1)에 가까운 근사고유값과 이 근사고유값에 대응하는 근사 고유벡터를 찾는 방법을 **누승법(power method)**이라고 한다.
A가 sparse 행렬인 경우 계산 복잡도가 낮아 매우 유용하다.

but 누승법이 항상 성립하는 것은 아니다. 가령 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ 의 경우, 절대값이 동일한 두 개의 서로 다른 고유값을 가져 ($|\lambda_1| = |\lambda_2| = i$) 누승법을 이용할 수 없다. → 다른 방법이 필요

13.8 마르코프 연쇄(Markov Chain)

변수의 상태를 통계적 확률로 표현할 수 있는 동력계(dynamical system)를 확률과정(stochastic process)라 한다. 확률행렬(stochastic matrix)의 열벡터는 확률벡터로, 일반적으로 음이 아닌 성분으로 구성되고 성분의 합이 1인 벡터를 확률벡터라 한다.

〈최신선형대수, H. Anton & R. C. Busby〉

마르코프 연쇄는 상태벡터가 연속 시간 간격에서 확률벡터이며, 또한 연속적인 시간 간격에서의 상태벡터들이 다음과 같은 방정식과 관련된 동력계이다.

x(k+1) = P x(k)

여기서 P = $[P_{ij}]$ 는 확률행렬이고, P_{ij} 는 시스템(계)이 시각 t = k 상태 j 에 있다면, 시각 t = k+1에 시스템(계)가 i의 상태일 확률이다. P를 시스템의 추이행렬(=천이행렬, transition matrix)라고 한다.

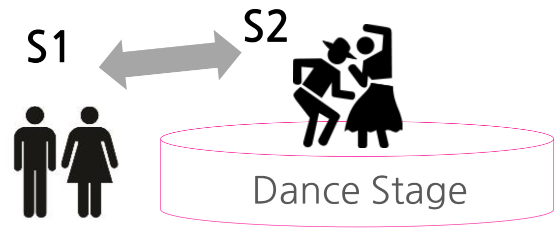
음…?

13.8.1 개체 수 이동에 관한 모델링

토끼 때문에 시무룩해 진 영숙님이 댄스클럽에 갔다.

Rules - 댄스클럽에서 새로운 곡이 시작될 때마다 :

1. 무대 아래(S1)에 있던 사람의 56%가 무대 위(S2)로 이동
2. 무대 위(S2)에 있던 사람의 12%가 무대 아래(S1)로 이동
3. 클럽에 새로 들어오거나 나가는 사람은 없음(전체 개체수 변화 X)



흘러나오는 곡 수 t에 따른 S1, S2의 사람 수를 벡터로 나타내면,

처음에 있었던 사람 수 $$X^{(0)} = \begin{bmatrix} \text{처음에 } S1\text{에 있던 사람수} \\ \text{처음에 } S2\text{에 있던 사람수} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1{}^{(0)} \\ x_2{}^{(0)} \end{bmatrix}$$

t 번째 곡이 끝난 후 사람수 $$X^{(t)} = \begin{bmatrix} \text{t번째 곡이 끝난 후 } S1\text{에 있는 사람수} \\ \text{t번째 곡이 끝난 후 } S2\text{에 있는 사람수} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1{}^{(t)} \\ x_2{}^{(t)} \end{bmatrix}$$

t+1 번째 곡이 끝난 후 사람수 $$X^{(t+1)} = \begin{bmatrix} \text{t+1번째 곡이 끝난 후 } S1\text{에 있는 사람수} \\ \text{t+1번째 곡이 끝난 후 } S2\text{에 있는 사람수} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.44 & 0.12 \\ 0.56 & 0.88 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1{}^{(t)} \\ x_2{}^{(t)} \end{bmatrix}$$

$$\therefore X^{(t)} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0.44 \\ 0.56 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 0.12 \\ 0.88 \end{matrix}} \end{bmatrix}^{t} \begin{bmatrix} x_1{}^{(0)} \\ x_2{}^{(0)} \end{bmatrix}$$

확률 Matrix이므로 열의 합은 1이다

A = $\begin{bmatrix} 0.44 & 0.12 \\ 0.56 & 0.88 \end{bmatrix}$ **의** 고유값은 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0.32$ → 서로 다른 n개의 고유값을 가지므로 대각화 가능

→ D = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.32 \end{bmatrix}$ = $P^{-1}A\,P$ 를 만족하는, 고유벡터로 이루어진 P 가 존재함. 그 중 하나가 P= $\begin{bmatrix} 0.209529 & -1 \\ 0.977802 & 1 \end{bmatrix}$

$$X^{(t)} = \begin{bmatrix} 0.44 & 0.12 \\ 0.56 & 0.88 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} x_1{}^{(0)} \\ x_2{}^{(0)} \end{bmatrix} = (PDP^{-1})^t \begin{bmatrix} x_1{}^{(0)} \\ x_2{}^{(0)} \end{bmatrix} = PD^tP^{-1} \begin{bmatrix} x_1{}^{(0)} \\ x_2{}^{(0)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.21 & -1 \\ 0.98 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & .32 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} 0.84 & 0.84 \\ -0.82 & 0.18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.21 & -1 \\ 0.98 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^t & 0 \\ 0 & .32^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.84 & 0.84 \\ -0.82 & 0.18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix}$$

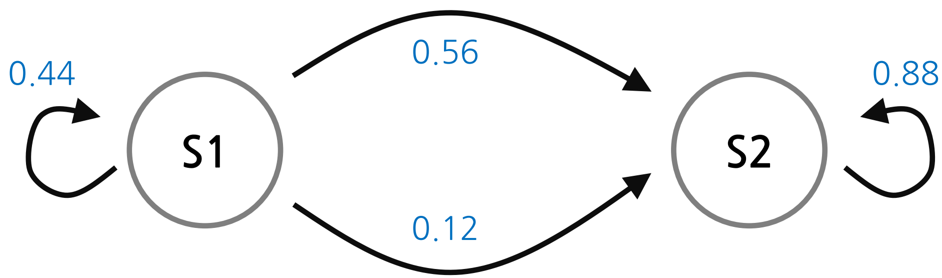
$$= 1^t(0.84x_1^{(0)} + 0.84x_2^{(0)}) \begin{bmatrix} 0.21 \\ 0.98 \end{bmatrix} + (0.32)^t(-0.82x_1^{(0)} + 0.18x_2^{(0)}) \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= 1^t \left(x_1^{(0)} + x_2^{(0)}\right) \begin{bmatrix} 0.18 \\ 0.82 \end{bmatrix} + (\boxed{0.32})^t \left(-0.82x_1^{(0)} + 0.18x_2^{(0)}\right) \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

t가 증가할수록 $(0.32)^t$ 가 점점 작아지면서,
초기값에 상관없이 무대 위에 있는 사람 수의 비율은 82%에 점점 가까워진다.

13.8.2 선택된 한 사람에 대한 모델링

상태 변화에 따른 위치에 대한 확률분포식 : t번째 곡 이후 영숙님은 무대 위에 있을까, 아래에 있을까?



t 번째 곡이 끝난 후 영숙님의 체류 확률

$$X^{(t)} = \begin{bmatrix} t\text{번째 곡이 끝난 후 영숙님이 } S1\text{에 있을 확률} \\ t\text{번째 곡이 끝난 후 영숙님이 } S2\text{에 있을 확률} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {x_1}^{(t)} \\ {x_2}^{(t)} \end{bmatrix}$$

t+1 번째 곡이 끝난 후 영숙님의 체류 확률

$$X^{(t+1)} = \begin{bmatrix} t+1\text{번째 곡이 끝난 후 영숙님이 } S1\text{에 있을 확률} \\ t+1\text{번째 곡이 끝난 후 영숙님이 } S2\text{에 있을 확률} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.44 & 0.12 \\ 0.56 & 0.88 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {x_1}^{(t)} \\ {x_2}^{(t)} \end{bmatrix}$$

$$\therefore X^{(t)} = \begin{bmatrix} 0.44 & 0.12 \\ 0.56 & 0.88 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} {x_1}^{(0)} \\ {x_2}^{(0)} \end{bmatrix}$$

앞의 경우와 천이확률이 같으므로, 같은 결과

$$= 1^t \left(x_1^{(0)} + x_2^{(0)}\right) \begin{bmatrix} 0.18 \\ 0.82 \end{bmatrix} + (0.32)^t \left(-0.82x_1^{(0)} + 0.18x_2^{(0)}\right) \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

t가 증가할수록 $(0.32)^t$ 가 점점 작아지면서, 초기값에 상관없이(처음에 어디 있었는지와 상관없이) 영숙님이 무대 위에 있을 확률은 82%에 점점 가까워진다.

13장에는 이외에도 인터넷 웜, 양의 정부호행렬, Markov Chain의 시불변 분포, PageRank, 행렬식의 성질을 이용한 평행사변형의 면적 및 평행육면체의 부피 구하기, 고유값 및 대각화 제반 증명 등이 있으나 시간 및 이해력 부족으로 인하여 생략하였습니다.