

Numerical Problem

$$\begin{array}{c|c|c|c} & x_1 & x_2 & y \\ \hline n=1 & 1 & 2 & 5 \\ \hline n=2 & 3 & 4 & 11 \end{array}$$

$$\theta = ?$$

$$\theta = (X^T X)^{-1} X^T \vec{y}$$

Design matrix

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$x^{(2)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\theta = (X^T X)^{-1} X^T \vec{y}$$

$$X^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$X^T X = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+9 & 2+12 \\ 2+12 & 4+16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 14 \\ 14 & 20 \end{bmatrix}$$

$$(X^T X)^{-1} = \frac{1}{\det(X^T X)} \begin{bmatrix} 20 & -14 \\ -14 & 10 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 20 & -14 \\ -14 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\det(X^T X) = 200 - 196 = 4$$

inverse

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det[A]} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$x^T y^{\rightarrow} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 + 33 \\ 10 + 44 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38 \\ 54 \end{bmatrix}$$

$$\theta = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 20 & -14 \\ -14 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 38 \\ 54 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 760 - 756 \\ -156 + 540 \\ 532 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\theta = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

To check: $y = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2$
 $= 1 \times 1 + 2 \times 2 = 5$