第6讲 一元函数微分学的应用（二）——中值定理、微分等式与微分不等式

知识结构

- 中值定理
  - 确定区间
  - 确定辅助函数
    - 简单情形
    - 复杂情形
  - 确定使用的定理
    - 零点定理
    - 介值定理
    - 费马定理
    - 罗尔定理
    - 拉格朗日中值定理
    - 泰勒公式
    - 柯西中值定理
  - 常见的关键点总结
- 微分等式问题（方程的根、函数的零点）
  - 理论依据
  - 考法
- 微分不等式问题
  - 用单调性
  - 用最值
  - 用凹凸性
  - 用拉格朗日中值定理
  - 用柯西中值定理
  - 用带有拉格朗日余项的泰勒公式

一 中值定理

设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，则

定理 1 （**有界与最值定理**）$m \leqslant f(x) \leqslant M$，其中 m, M 分别为 $f(x)$ 在$[a,b]$

上的最小值与最大值.

定理 2 (**介值定理**)当 $m \leqslant \mu \leqslant M$ 时,存在 $\xi \in [a,b]$,使得 $f(\xi)=\mu$.

定理 3 (**平均值定理**)当 $a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$ 时,在 $[x_1,x_n]$ 上至少存在一点 ξ,使得

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

定理 4 (**零点定理**)当 $f(a)\cdot f(b)<0$ 时,存在 $\xi \in (a,b)$,使得 $f(\xi)=0$.

定理 5 (**费马定理**)设 $f(x)$ 在点 x_0 处满足 $\begin{cases}① 可导,\\ ② 取极值,\end{cases}$ 则 $f'(x_0)=0$.

定理 6 (**罗尔定理**)设 $f(x)$ 满足 $\begin{cases}①[a,b] 上连续,\\ ②(a,b) 内可导,\\ ③f(a)=f(b),\end{cases}$ 则存在 $\xi \in (a,b)$,使得 $f'(\xi)=0$.

定理 7 (**拉格朗日中值定理**)设 $f(x)$ 满足 $\begin{cases}①[a,b] 上连续,\\ ②(a,b) 内可导,\end{cases}$ 则存在 $\xi \in (a,b)$,使得

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),$$

或者写成

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

【注】若 $\xi \in (a,b)$,令 $\theta=\dfrac{\xi-a}{b-a}$,则 $\xi=a+\theta(b-a)$,$0<\theta<1$,于是拉格朗日中值定理的变体形式为

$$f(b)-f(a)=f'[a+\theta(b-a)](b-a).$$

定理 8 (**柯西中值定理**)设 $f(x)$,$g(x)$ 满足 $\begin{cases}①[a,b] 上连续,\\ ②(a,b) 内可导,\\ ③g'(x)\neq 0,\end{cases}$ 则存在 $\xi \in (a,b)$,使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

定理 9 (**泰勒公式**)

(1) 带拉格朗日余项的 n 阶泰勒公式. 此公式适用于区间 $[a,b]$,常在证明题中使用,如证不等式、中值等式等.

设函数 $f(x)$ 在含有点 x_0 的区间 (a,b) 内有 $n+1$ 阶导数,则对于 $x \in [a,b]$,有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

其中 ξ 介于 x,x_0 之间.

【注】泰勒公式(一阶为例)的变体形式为

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''[x_0+\theta(x-x_0)]}{2}(x-x_0)^2\ (x\neq x_0),0<\theta<1.$$

(2) 带佩亚诺余项的 n 阶泰勒公式. 此公式仅适用于点 $x=x_0$ 及其邻域,常用于研究点 $x=x_0$ 处的某些结论,如求极限、判定无穷小的阶数、判定极值等.

设 $f(x)$ 在点 x_0 处 n 阶可导,则存在 x_0 的一个邻域,对于该邻域中的任一点 x,有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+$$

$o((x-x_0)^n)$.

定理 10 （积分中值定理）设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a).$$

$\xi\in[a,b]$ 也成立

【注】**"推广的积分中值定理"**：

设 $f(x)$，$g(x)$ 在$[a,b]$上连续，且 $g(x)$ 在$[a,b]$上不变号，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

$\xi\in[a,b]$ 也成立

证 若 $g(x)\equiv 0$，结论显然成立；

若 $g(x)\not\equiv 0$，由于 $g(x)$ 在$[a,b]$上不变号，不妨设 $g(x)>0$. 令

$$F(x)=\int_a^x f(t)g(t)\mathrm{d}t,\ G(x)=\int_a^x g(t)\mathrm{d}t,$$

在$[a,b]$上应用柯西中值定理，有 $\dfrac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)}=\dfrac{F'(\xi)}{G'(\xi)}$，即

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x-0}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x-0}=\frac{f(\xi)g(\xi)}{g(\xi)},$$

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x,\ \xi\in(a,b),$$

其中 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x>0$. 同理可得 $g(x)<0$ 时也成立，得证.

以下所讲内容均应满足诸定理成立的条件，这均为命题者所考虑，为突出重点，所有条件均默认成立.

1. 确定区间

在数轴上标出所有可能用到的点，确定区间.

2. 确定辅助函数

(1) 简单情形：题设 $f(x)$ 即为辅助函数（研究对象）.

(2) 复杂情形.

① 乘积求导公式 $(uv)'=u'v+uv'$ 的逆用.

a. $[f(x)f(x)]'=[f^2(x)]'=2f(x)\cdot f'(x)$.

见到 $f(x)f'(x)$，令 $F(x)=f^2(x)$.

b. $[f(x)\cdot f'(x)]'=[f'(x)]^2+f(x)f''(x)$.

见到 $[f'(x)]^2+f(x)f''(x)$，令 $F(x)=f(x)f'(x)$.

c. $[f(x)\mathrm{e}^{\varphi(x)}]'=f'(x)\mathrm{e}^{\varphi(x)}+f(x)\mathrm{e}^{\varphi(x)}\cdot\varphi'(x)=[f'(x)+f(x)\varphi'(x)]\mathrm{e}^{\varphi(x)}$.

见到 $f'(x)+f(x)\varphi'(x)$，令 $F(x)=f(x)\mathrm{e}^{\varphi(x)}$.

【注】常考以下情形.

(1) $\varphi(x)=x \Rightarrow$ 见到 $f'(x)+f(x)$,令 $F(x)=f(x)\mathrm{e}^{x}$.

(2) $\varphi(x)=-x \Rightarrow$ 见到 $f'(x)-f(x)$,令 $F(x)=f(x)\mathrm{e}^{-x}$.

(3) $\varphi(x)=kx \Rightarrow$ 见到 $f'(x)+kf(x)$,令 $F(x)=f(x)\mathrm{e}^{kx}$.

(4) $(uv)''=u''v+2u'v'+uv''$ 亦有可能考到.

② 商的求导公式 $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ 的逆用.

a. $\left[\dfrac{f(x)}{x}\right]'=\dfrac{f'(x)x-f(x)}{x^2}$.

见到 $f'(x)x-f(x)$,$x\neq 0$,令 $F(x)=\dfrac{f(x)}{x}$.

b. $\left[\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right]'=\dfrac{f''(x)f(x)-[f'(x)]^2}{f^2(x)}$.

见到 $f''(x)f(x)-[f'(x)]^2$,$f(x)\neq 0$,令 $F(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

c. $[\ln f(x)]'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$,故 $[\ln f(x)]''=\left[\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right]'=\dfrac{f''(x)f(x)-[f'(x)]^2}{f^2(x)}$.

见到 $f''(x)f(x)-[f'(x)]^2$,$f(x)\neq 0$,亦可考虑令 $F(x)=\ln f(x)$.

③ 见到“$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$”或“$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续”,可令 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

④ 题设给出“$F(x)$”或“$F(a)$”,亦可作为提示,令 $F(x)$ 为辅助函数.

3. 确定使用的定理

(1) 零点定理.

常用于找 $f(c)=0$(由 $f(a)>0$,$f(b)<0$,则 $f(c)=0$).

(2) 介值定理.

常用于找 $f(c)=\mu$(由 $f(a)=A$,$f(b)=B$,$A<\mu<B$,则 $f(c)=\mu$).

(3) 费马定理.

常用于证 $f'(\xi)=0$(若 $f(x)$ 在区间 I 上有最值点 ξ,并且此最值点 ξ 不是区间 I 的端点而是 I 内部的点,那么点 ξ 必是 $f(x)$ 的一个极值点,且当在点 ξ 处可导时,由费马定理,有 $f'(\xi)=0$).

(4) 罗尔定理.

常用于

① 证 $F'(\xi)=0$.

② 证 $F^{(n)}(\xi)=0$,$n\geqslant 2$.

(5) 拉格朗日中值定理.

常用于

① 题设中有 f 与 f' 的关系或“$f(b)-f(a)$”.

② 证 $F'(\xi)>$（或 $<$）0.

③ 证 $F^{(n)}(\xi)>$（或 $<$）$0,n\geqslant 2$.

④ 证 $F[f'(\eta),f'(\tau)]=0$.

⑤$f'(x)$ 的正负可考到单调性.

(6) 泰勒公式.

常用于

① 题设中有 f 与 $f^{(n)}$ 的关系，$n\geqslant 2$.

② 证 $F^{(n)}(\xi)>$（$<$ 或 $=$）$0,n\geqslant 2$.

③$f''(x)$ 的正负可考到凹凸性.

(7) 柯西中值定理.

常用于

① 两个具体函数所满足的式子.

② 一个具体函数与一个抽象函数所满足的式子.

③ 与拉格朗日中值定理综合.

4. 常见的关键点总结

(1) 用题设告之，如 $f(a)=0,f''(x)>0$ 等.

(2) 用极限（连续、可导、保号性，算极限）.

① 若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续且 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{x-x_0}=A$，则 $f(x_0)=0,f'(x_0)=A$.

② 若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)}{x-x_0}<0$，则 $\exists\delta>0$，使得 $\forall x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时，有 $f(x)<0$.

③ 考虑等式两边取极限.

(3) 用零点、介值定理.

① 若 $f(a)>0,f(b)<0\Rightarrow f(c)=0$.

② 若 $f(a)=A,f(b)=B\Rightarrow f(c)=\mu,A<\mu<B$.

(4) 用积分（中值定理、保号性、原函数定义，算积分）.

① 如 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=A$，则 $f(\xi)=\dfrac{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}{b-a}=\dfrac{A}{b-a}$.

② 保号性：a. 若 $f(x)\geqslant 0$ 且不恒等于零，$a<b$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$.

b. 若 $f(x)\geqslant g(x)$，且不恒等，$a<b$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

③$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

④ 考虑等式两边算积分.

(5) 用费马定理.

可导极值点处 $\Rightarrow f'(x_0)=0$.

(6) 用奇偶性质.

$f(x)$ 是奇函数且在原点有定义 $\Rightarrow f(0)=0$.

$f(x)$ 是可导的偶函数 $\Rightarrow f'(0)=0$.

(7) 用几何条件.

①$f(x)$ 与 $g(x)$ 交于点 a,则 $F(a)=f(a)-g(a)=0$.

②$f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 a 处有公切线,则 $F'(a)=f'(a)-g'(a)=0$.

③$f(x)$ 与 $g(x)$ 存在相等的最大值.

(8) 用行列式条件.

如 $f(x)=\begin{vmatrix}1 & x & 4\\ 2 & x+1 & 7\\ 3 & 3x & 9\end{vmatrix}$,则 $f(1)=0$.

例 6.1 设函数 $f(x)=x\int_1^0 \mathrm{e}^{-x^2t^2}\mathrm{d}t$,则当 $0<a<x<b$ 时,有( ).

(A)$xf(x)>af(a)$ (B)$bf(b)>xf(x)$

(C)$xf(a)>af(x)$ (D)$xf(b)>bf(x)$

【解】应选(D).

由
$$f(x)=\int_1^0 \mathrm{e}^{-(xt)^2}\mathrm{d}(xt)\xlongequal{\text{令 } xt=u}\int_x^0 \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u,$$
得 $f(0)=0,f'(x)=-\mathrm{e}^{-x^2},f''(x)=2x\mathrm{e}^{-x^2}$,当 $x>0$ 时,有
$$f(x)<0,f'(x)<0,f''(x)>0.$$

于是,令 $g(x)=xf(x),x>0$,则 $g'(x)=f(x)+xf'(x)<0$,$g(x)$ 单调减少,故 $g(b)<g(x)<g(a)$,即 $bf(b)<xf(x)<af(a)$,选项(A),(B) 错误.

再令 $h(x)=\dfrac{f(x)}{x},x>0$,则

拉格朗日中值定理

$$\begin{aligned}h'(x)&=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}\\&=\frac{xf'(x)-[f(x)-f(0)]}{x^2}=\frac{xf'(x)-f'(\xi)\cdot x}{x^2}\\&=\frac{f'(x)-f'(\xi)}{x},\end{aligned}$$

其中 $0<\xi<x$.由 $f''(x)>0$,知 $f'(x)$ 单调增加,$f'(x)>f'(\xi)$,则 $h'(x)>0$,$h(x)$ 单调增加,故 $h(a)<h(x)<h(b)$,即 $\dfrac{f(a)}{a}<\dfrac{f(x)}{x}<\dfrac{f(b)}{b}$,也即 $af(x)>xf(a)$,$xf(b)>bf(x)$,选项(C) 错误,选(D).

例 6.2 设 $f(x)$ 在$[0,a]$上可导,且 $f'(x)\geqslant b>0$,则对于命题

① 当 $f\left(\dfrac{a}{4}\right)\geqslant 0$ 时,$|f(x)|\geqslant\dfrac{ab}{2},x\in\left(\dfrac{3a}{4},a\right)$;

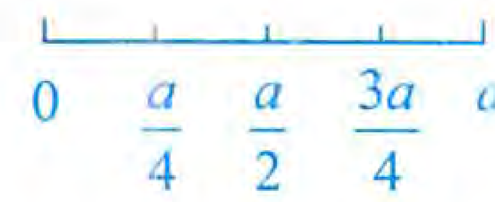
② 当 $f\left(\dfrac{3a}{4}\right)\leqslant 0$ 时,$|f(x)|\geqslant\dfrac{ab}{2},x\in\left(0,\dfrac{a}{4}\right)$.

下列说法正确的是(　　).

(A)① 正确,② 不正确　　　　(B)① 不正确,② 正确

(C)①② 均正确　　　　(D)①② 均不正确

【解】应选(C).



由拉格朗日中值定理,有

$$f\left(\frac{3a}{4}\right)-f\left(\frac{a}{4}\right)=f'(\xi)\cdot\left(\frac{3a}{4}-\frac{a}{4}\right)=\frac{a}{2}f'(\xi)\geqslant\frac{ab}{2},\frac{a}{4}<\xi<\frac{3a}{4},$$

故 $f\left(\frac{3a}{4}\right)\geqslant\frac{ab}{2}+f\left(\frac{a}{4}\right)$. 当 $f\left(\frac{a}{4}\right)\geqslant 0$ 时,$f\left(\frac{3a}{4}\right)\geqslant\frac{ab}{2}$,又 $f'(x)\geqslant b>0$,$f(x)$ 单调增加,于是当 $x\in\left(\frac{3a}{4},a\right)$ 时,$|f(x)|=f(x)\geqslant f\left(\frac{3a}{4}\right)\geqslant\frac{ab}{2}$.

又 $f\left(\frac{a}{4}\right)\leqslant f\left(\frac{3a}{4}\right)-\frac{ab}{2}$,当 $f\left(\frac{3a}{4}\right)\leqslant 0$ 时,$f\left(\frac{a}{4}\right)\leqslant-\frac{ab}{2}$,又 $f(x)$ 单调增加,于是当 $x\in\left(0,\frac{a}{4}\right)$ 时,$f(x)\leqslant f\left(\frac{a}{4}\right)\leqslant-\frac{ab}{2}$,即 $|f(x)|\geqslant\frac{ab}{2}$.

例 6.3 设函数 $f(x)$ 在$[0,1]$上二阶可导,且$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$,则(　　).

(A) 当 $f'(x)<0$ 时,$f\left(\frac{1}{2}\right)<0$　　　　(B) 当 $f''(x)<0$ 时,$f\left(\frac{1}{2}\right)<0$

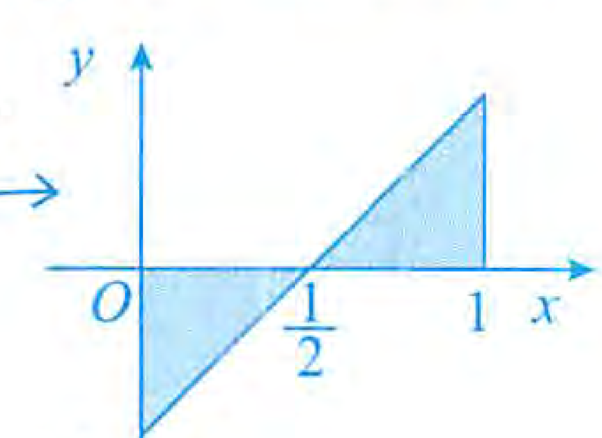
(C) 当 $f'(x)>0$ 时,$f\left(\frac{1}{2}\right)<0$　　　　(D) 当 $f''(x)>0$ 时,$f\left(\frac{1}{2}\right)<0$

【解】应选(D).

$f(x)$ 在$[0,1]$上二阶可导,则由带拉格朗日余项的泰勒公式有

可从几何上直接得出 $\int_0^{2x_0}(x-x_0)\mathrm{d}x=0$.

$$f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}f''(\xi)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2,$$



其中 ξ 介于 x 与$\frac{1}{2}$之间. 又在$[0,1]$上取积分得

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f\left(\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x+\underline{\int_0^1 f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x}+\frac{1}{2}\int_0^1 f''(\xi)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{d}x,$$

$$0=f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\Big|_0^1+\frac{1}{2}\int_0^1 f''(\xi)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{d}x,$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}\int_0^1 f''(\xi)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{d}x.$$

$f''(\xi)$ 不能提至积分号外,因为此处的 ξ 与 x 有关,是 $\xi=\xi(x)$,不是常数

故当 $f''(x)>0$ 时,有 $f''(\xi)>0$,则 $f\left(\frac{1}{2}\right)<0$. 因此选(D).

由积分保号性,$\int_0^1 f''(\xi)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{d}x>0$

例 6.4 设 $f(x)$ 在$[2,4]$上一阶可导且 $f'(x)\geqslant M>0$,$f(2)>0$. 证明:

(1) 对任意的 $x\in[3,4]$,均有 $f(x)>M$;

(2) 存在 $\xi\in(3,4)$,使得 $f(\xi)>M\cdot\frac{e^{\xi-3}}{e-1}$.

【证】(1) 在$[2,3]$上对$f(x)$应用拉格朗日中值定理，有

$$f(3)-f(2)=f'(\eta)\geqslant M>0,$$

其中$\eta\in(2,3)$. 又$f(2)>0$，故

$$f(3)=f(2)+f'(\eta)>M.$$

又在$[2,4]$上$f'(x)>0$，$f(x)$单调增加，于是对任意的$x\in[3,4]$，均有$f(x)>M$.

(2) 令$F(x)=\int_3^x f(t)\mathrm{d}t$，$G(x)=\mathrm{e}^x$，在$[3,4]$上对$F(x)$，$G(x)$应用柯西中值定理，有

$$\frac{F(4)-F(3)}{G(4)-G(3)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)},\xi\in(3,4),$$

即

$$\frac{\int_3^4 f(x)\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^3(\mathrm{e}-1)}=\frac{f(\xi)}{\mathrm{e}^\xi},\xi\in(3,4).$$

又由(1)，

$$\int_3^4 f(x)\mathrm{d}x>\int_3^4 M\mathrm{d}x=M,$$

故$\dfrac{f(\xi)}{\mathrm{e}^\xi}>\dfrac{M}{\mathrm{e}^3(\mathrm{e}-1)}$，即$f(\xi)>M\cdot\dfrac{\mathrm{e}^{\xi-3}}{\mathrm{e}-1}$.

【注】$\xi\in(3,4)$，故$\dfrac{\mathrm{e}^{\xi-3}}{\mathrm{e}-1}$与1的大小关系不确定，不能简单认为(1)成立则(2)必成立.

例 6.5 设函数$f(x)$在区间$[0,2]$上具有三阶导数，$f(0)=0$，$f(2)=2$，且

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-1}{\ln x}=1,$$

证明：至少存在一点$\xi\in(0,2)$，使得$f'''(\xi)=0$.

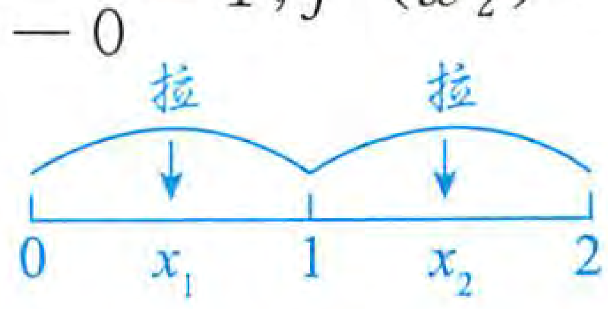
【证】由$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-1}{\ln x}=1$，得$\lim\limits_{x\to1}[f(x)-1]=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-1}{\ln x}\cdot\ln x=0$，故$\lim\limits_{x\to1}f(x)=1$.

又$f(x)$在$x=1$处连续，得$f(1)=\lim\limits_{x\to1}f(x)=1$，且

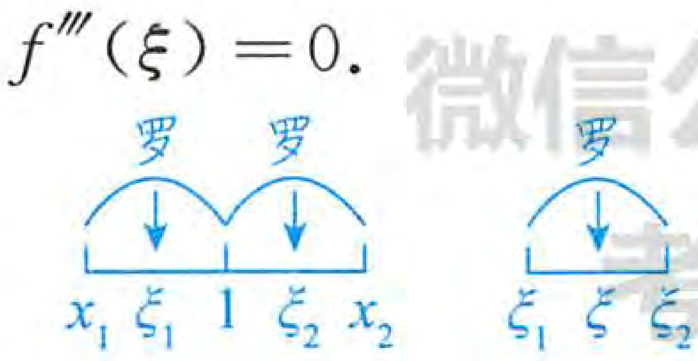
$$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-1}{\ln x}=1.$$ $\ln x\sim x-1(x\to1)$

由于函数$f(x)$在$[0,2]$上具有三阶导数，故由拉格朗日中值定理知，存在$x_1\in(0,1)$，$x_2\in(1,2)$，使得

$$f'(x_1)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{1-0}{1-0}=1,f'(x_2)=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=\frac{2-1}{2-1}=1.$$



由罗尔定理知，存在$\xi_1\in(x_1,1)$，$\xi_2\in(1,x_2)$，使得$f''(\xi_1)=f''(\xi_2)=0$. 再由罗尔定理知，存在$\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,2)$，使得$f'''(\xi)=0$.



例 6.6 设函数$f(x)$在$[-2,2]$上二阶可导且$|f(x)|\leqslant1$，又

$$\frac{1}{2}[f'(0)]^2+[f(0)]^3>\frac{3}{2},$$

由题设 $\frac{1}{2}[f'(0)]^2+[f(0)]^3>\frac{3}{2}$，可考虑令 $F(x)=\frac{1}{2}[f'(x)]^2+[f(x)]^3$

证明：存在 $\xi\in(-2,2)$，使得 $f''(\xi)+3[f(\xi)]^2=0$.

【证】 构造函数 $F(x)=\frac{1}{2}[f'(x)]^2+[f(x)]^3$，则需证存在 $\xi\in(-2,2)$，使得 $F'(\xi)=0$，$f'(\xi)\neq 0$.

根据拉格朗日中值定理，存在 $\alpha\in(-2,0)$，使得

$$|f'(\alpha)|=\frac{|f(0)-f(-2)|}{0-(-2)}\leqslant\frac{|f(0)|+|f(-2)|}{2}\leqslant\frac{1+1}{2}=1.$$

于是，$F(\alpha)=\frac{1}{2}[f'(\alpha)]^2+[f(\alpha)]^3\leqslant\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$.

同理，存在 $\beta\in(0,2)$，使得 $|f'(\beta)|=\frac{|f(2)-f(0)|}{2}\leqslant 1$.

于是，$F(\beta)=\frac{1}{2}[f'(\beta)]^2+[f(\beta)]^3\leqslant\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$.

因为 $F(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续，所以 $F(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上必存在最大值. 又 $F(0)=\frac{1}{2}[f'(0)]^2+[f(0)]^3>\frac{3}{2}$，可见 $F(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上的最大值必在 (α,β) 内某点 $\xi(\xi\in(\alpha,\beta)\subset(-2,2))$ 处取到，故由费马定理知，$F'(\xi)=0$，即 $f'(\xi)\{f''(\xi)+3[f(\xi)]^2\}=0$. 但 $f'(\xi)\neq 0$，否则 $F(\xi)=[f(\xi)]^3>\frac{3}{2}$，与 $|f(x)|\leqslant 1$ 矛盾. 因此，$f''(\xi)+3[f(\xi)]^2=0$.

例 6.7 设 $f(x)=\int_0^x e^{t^2}\,dt$，$x>0$.

(1) 证明：$\int_0^x e^{t^2}\,dt=xf'[x\cdot\theta(x)]$，且 $\theta(x)$ 唯一，其中 $0<\theta(x)<1$；

(2) 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\theta(x)$.

(1)**【证】** 对 $f(x)$ 在 $[0,x]$ 上用拉格朗日中值定理，有

$$f(x)-f(0)=f'[x\cdot\theta(x)]\cdot x,\ 0<\theta(x)<1,$$

即

$$\int_0^x e^{t^2}\,dt=xf'[x\cdot\theta(x)],\ 0<\theta(x)<1.$$

若另有 $\theta^*(x)$，使得 $f(x)-f(0)=f'[x\cdot\theta^*(x)]x\ (0<\theta^*(x)<1)$，则

$$f'[x\cdot\theta(x)]x-f'[x\cdot\theta^*(x)]x=f''(\xi)x[\theta(x)-\theta^*(x)]x=0,$$

其中 ξ 介于 $x\cdot\theta(x)$ 与 $x\cdot\theta^*(x)$ 之间，而 $f''(x)>0$，$x>0$，故 $\theta(x)=\theta^*(x)$. 证毕.

(2)**【解】** 由(1)知，$\int_0^x e^{t^2}\,dt=x\cdot e^{[x\cdot\theta(x)]^2}\ (0<\theta(x)<1)$，解得

$$\theta(x)=\frac{1}{x}\cdot\sqrt{\ln\frac{\int_0^x e^{t^2}\,dt}{x}},$$

$$\ln\frac{\int_0^x e^{t^2}dt}{x}=\ln\left(1+\frac{\int_0^x e^{t^2}dt}{x}-1\right)\sim\frac{\int_0^x e^{t^2}dt}{x}-1=\frac{\int_0^x e^{t^2}dt-x}{x}\ (x\to 0^+)$$

故
$$\lim_{x\to 0^+}\theta(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\cdot\sqrt{\frac{\int_0^x e^{t^2}\,dt-x}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{\frac{\int_0^x e^{t^2}\,dt-x}{x^3}}$$
$$=\sqrt{\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x e^{t^2}\,dt-x}{x^3}}=\sqrt{\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{x^2}-1}{3x^2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

例 6.8 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，且 $a=\int_0^1 f(x)\,dx\neq 0$，证明：在区间 $(0,1)$ 内至少存在不同的两点 ξ_1,ξ_2，使得
$$\frac{1}{f(\xi_1)}+\frac{1}{f(\xi_2)}=\frac{2}{a}.$$

【证】 令 $F(x)=\frac{1}{a}\int_0^x f(t)\,dt,x\in[0,1]$，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，$F(0)=0,F(1)=1$. 由连续函数的介值定理知，至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $F(\xi)=\frac{1}{2}$，即
$$\frac{1}{a}\int_0^{\xi} f(t)\,dt=\frac{1}{2},\xi\in(0,1).$$

由拉格朗日中值定理知，存在 $\xi_1\in(0,\xi)$ 及 $\xi_2\in(\xi,1)$，使得
$$F'(\xi_1)=\frac{F(\xi)-F(0)}{\xi-0}=\frac{\frac{1}{2}-0}{\xi}=\frac{1}{2\xi},$$
$$F'(\xi_2)=\frac{F(1)-F(\xi)}{1-\xi}=\frac{1-\frac{1}{2}}{1-\xi}=\frac{1}{2(1-\xi)}.$$

由于 $F'(x)=\frac{1}{a}f(x)$，因此
$$\frac{1}{f(\xi_1)}+\frac{1}{f(\xi_2)}=\frac{1}{aF'(\xi_1)}+\frac{1}{aF'(\xi_2)}$$
$$=\frac{1}{a}[2\xi+2(1-\xi)]$$
$$=\frac{2}{a}.$$

例 6.9 设函数 $f(x)=\arctan x$. 若 $f(x)=xf'(\xi)$，则 $\lim_{x\to 0}\frac{\xi^2}{x^2}=($ $)$.

(A)1 (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{3}$

【解】 应选(D).

因为 $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$，且 $f(x)=xf'(\xi)$，所以当 $x\neq 0$ 时，可知 $f'(\xi)=\frac{1}{1+\xi^2}=\frac{f(x)}{x}=$

$\dfrac{\arctan x}{x}$，从而 $\xi^2=\dfrac{x-\arctan x}{\arctan x}$. 又当 $x\to 0$ 时，$\arctan x=x-\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)$，故

$$\lim_{x\to 0}\frac{\xi^2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^2\arctan x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\left[x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\right]}{x^3}=\frac{1}{3}.$$

二 微分等式问题(方程的根、函数的零点)

1. 理论依据

(1) 零点定理及其推广.

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)f(b)<0$，则 $f(x)=0$ 在 (a,b) 内至少有一个根.

【注】推广的零点定理：若 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\alpha$，$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=\beta$，且 $\alpha\cdot\beta<0$，则 $f(x)=0$ 在 (a,b) 内至少有一个根，这里 a,b,α,β 可以是有限数，也可以是无穷大.

(2) 用导数工具研究函数性态.

(3) 罗尔原话(罗尔定理的推论).

若 $f^{(n)}(x)=0$ 至多有 k 个根，则 $f(x)=0$ 至多有 $k+n$ 个根.

(4) 实系数奇次方程 $x^{2n+1}+a_1x^{2n}+\cdots+a_{2n}x+a_{2n+1}=0$ 至少有一个实根.

2. 考法

(1) 证明恒等式.

(2) 函数的零点个数(方程根的个数、曲线交点的个数).

① 至少几个. ② 至多几个. ③ 恰有几个.

【注】常含参数讨论.

(1) 导数中不含参数，即辅助函数 $f'(x)$ 中不含参数，于是研究函数性态的过程中不讨论参数，结果中讨论参数，即根据参数的取值不同，研究曲线与 x 轴的位置关系.

(2) 导数中含参数，即辅助函数 $f'(x)$ 中含参数，于是研究函数性态的过程中讨论参数，即根据参数的取值不同，研究曲线不同的性态，从而确定其与 x 轴的交点个数.

(3) 方程(列)问题(见第 2 讲).

(4) 区间(列)问题(见第 2 讲).

例 6.10 (1) 证明：$\arcsin\sqrt{x}+\arcsin\sqrt{1-x}=\dfrac{\pi}{2}$；

(2) 计算 $\displaystyle\int_0^1\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x(1-x)}}\mathrm{d}x$.

(1)【证】记 $f(x)=\arcsin\sqrt{x}+\arcsin\sqrt{1-x}$，则

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{1-(1-x)}}\cdot\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}=0,$$

即 $f(x)$ 恒为常数,又 $f(0)=\frac{\pi}{2}$,故 $f(x)=\arcsin\sqrt{x}+\arcsin\sqrt{1-x}=\frac{\pi}{2}$.

(2)【解】令 $x=1-t$,则

$$\int_0^1\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x(1-x)}}\mathrm{d}x=-\int_1^0\frac{\arcsin\sqrt{1-t}}{\sqrt{1-t(1-t)}}\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{\arcsin\sqrt{1-t}}{\sqrt{1-t(1-t)}}\mathrm{d}t,$$

所以

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\arcsin\sqrt{x}+\arcsin\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x(1-x)}}\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi}{4}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x(1-x)}}\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi}{4}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi}{4}\ln\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)+\sqrt{\frac{3}{4}+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}\right]\Bigg|_0^1=\frac{\pi}{4}\ln 3.\end{aligned}$$

$\int\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\mathrm{d}x=\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})+C$

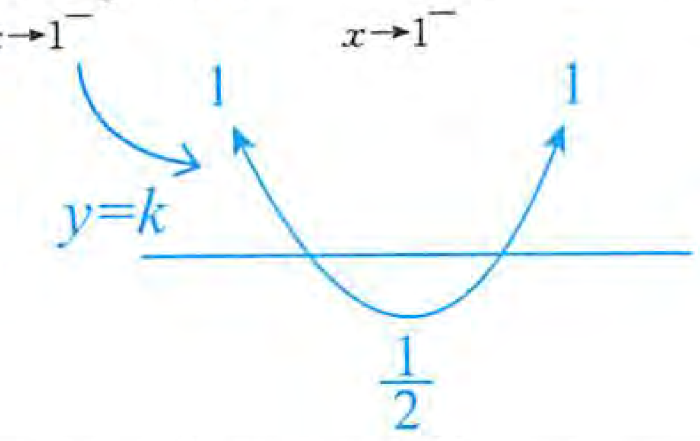
例 6.11 若方程 $x^x(1-x)^{1-x}=k$ 在区间 $(0,1)$ 内有且仅有两个不同的实根,求 k 的取值范围.

【解】令 $f(x)=x^x(1-x)^{1-x}$,$0<x<1$,则由例 4.7 可知,$f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right]$ 上单调减少,在 $\left[\frac{1}{2},1\right)$ 上单调增加,$x=\frac{1}{2}$ 为最小值点,且

$$f_{\min}(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}.$$

又 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}x^x(1-x)^{1-x}=\lim\limits_{x\to0^+}x^x=1$,$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}x^x(1-x)^{1-x}=\lim\limits_{x\to1^-}(1-x)^{1-x}=1$,

可直接记住此结论.



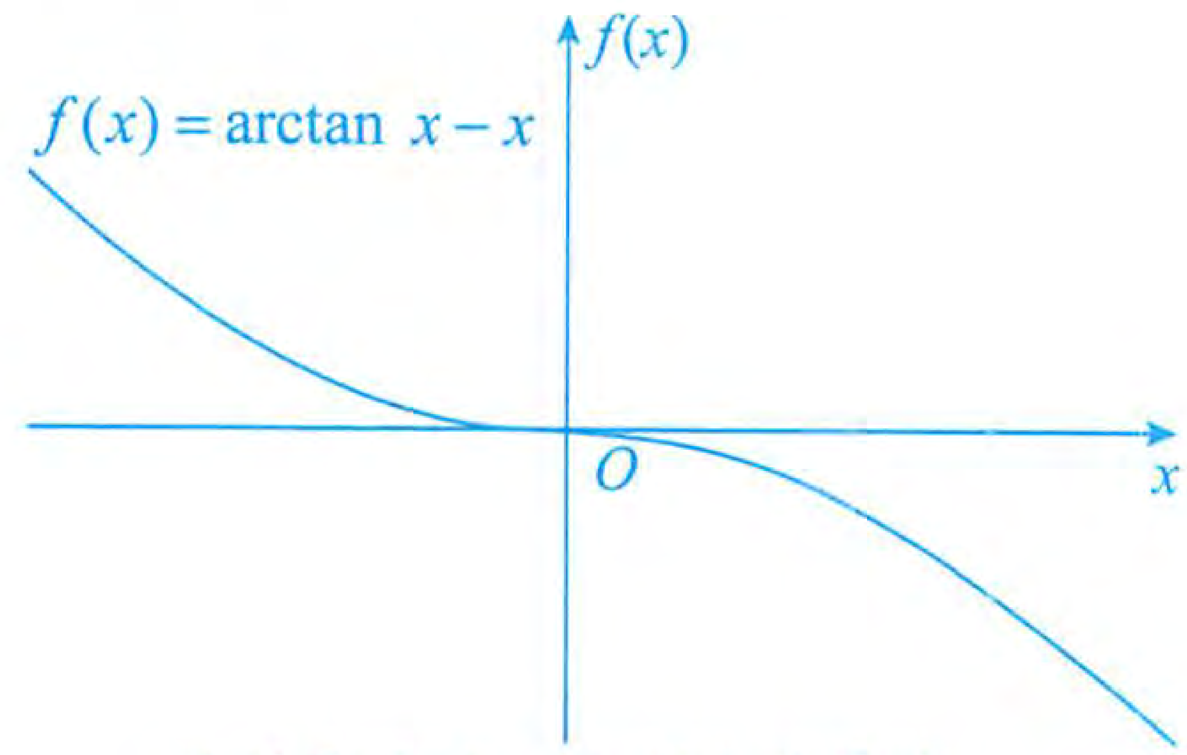
为明确端点处取值的情况,此处必须求极限.

则由介值定理知,当 $\frac{1}{2}<k<1$ 时,方程在区间 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 与 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 内各有一个实根,即在区间 $(0,1)$ 内有且仅有两个不同的实根.

例 6.12 求方程 $k\arctan x-x=0$ 的不同实根的个数,其中 k 为参数.

【解】令 $f(x)=k\arctan x-x$,则 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 内的奇函数,且 $f(0)=0$,$f'(x)=\frac{k-1-x^2}{1+x^2}$.

当 $k-1\leqslant 0$，即 $k\leqslant 1$ 时，$f'(x)<0(x\neq 0)$，$f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内单调减少，方程 $f(x)=0$ 只有一个实根 $x=0$.

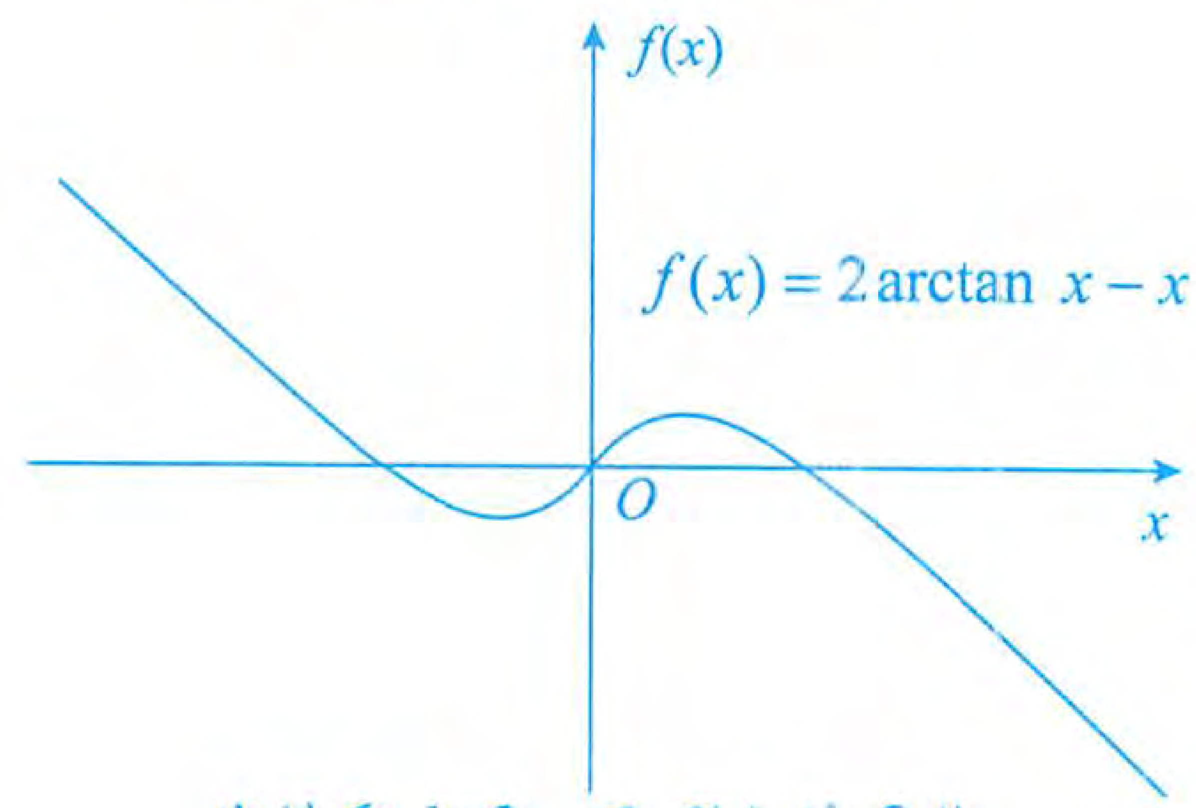


此处取 $k=1$，画 $f(x)$ 的图像

当 $k-1>0$，即 $k>1$ 时，在区间 $(0,\sqrt{k-1})$ 内，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调增加，在区间 $(\sqrt{k-1},+\infty)$ 内，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调减少，所以 $f(\sqrt{k-1})$ 是 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内的最大值，从而 $f(\sqrt{k-1})>f(0)=0$. 又因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$，所以由连续函数的零点定理知，存在 $\xi\in(\sqrt{k-1},+\infty)$，使得 $f(\xi)=0$.

由 $f(x)$ 是奇函数及其单调性可知，当 $k>1$ 时，方程 $f(x)=0$ 有 3 个不同的实根

$$x=-\xi,x=0,x=\xi,\xi\in(\sqrt{k-1},+\infty).$$



此处取 $k=2$，画 $f(x)$ 的图像

三 微分不等式问题

1. 用单调性

(1) 若 $\lim\limits_{x\to a^+}F(x)\geqslant 0$，且当 $x\in(a,b)$ 时 $F'(x)\geqslant 0$，则在 (a,b) 内 $F(x)\geqslant 0$.

【注】(1) 若在 $x=a$ 处 $F(x)$ 右连续，则可用 $F(a)$ 代替 $\lim\limits_{x\to a^+}F(x)$.

(2) 若当 $x\in(a,b)$ 时，$F'(x)>0$，则在 (a,b) 内 $F(x)>0$.

(2) 若 $\lim\limits_{x\to b^-}F(x)\geqslant 0$，且当 $x\in(a,b)$ 时 $F'(x)\leqslant 0$，则在 (a,b) 内 $F(x)\geqslant 0$.

【注】(1) 若在 $x=b$ 处 $F(x)$ 左连续，则可用 $F(b)$ 代替 $\lim\limits_{x\to b^-}F(x)$.

(2) 若当 $x\in(a,b)$ 时，$F'(x)<0$，则在 (a,b) 内 $F(x)>0$.

上面讲的区间 (a,b) 既可以是有限区间，也可以是无穷区间.

2. 用最值

如果在 (a,b) 内 $F(x)$ 有最小值 m，则在 (a,b) 内 $F(x)\geqslant m$. 且除这些最小值点外，均有 $F(x)>m$.

对于最大值 M，有类似的结论.

3. 用凹凸性

如果 $\forall x\in I$，$F''(x)\geqslant 0$，则

① $\forall x_1,x_2 \in I$,有

$$\frac{F(x_1)+F(x_2)}{2} \geqslant F\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$

② $\forall x_1,x_2 \in I$,对 $\forall \lambda_1,\lambda_2 \in (0,1)$,且 $\lambda_1+\lambda_2=1$,有

$$\lambda_1 F(x_1)+\lambda_2 F(x_2) \geqslant F(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2).$$

③ $\forall x,x_0 \in I$,且 $x \neq x_0$,有 $F(x) > F(x_0)+F'(x_0)(x-x_0)$.

如果 $\forall x \in I, F''(x) \leqslant 0$,则有与上面所述相反的不等式.

4. 用拉格朗日中值定理

如果所给题中的 $F(x)$ 在区间$[a,b]$上满足拉格朗日中值定理的条件,并设当 $x \in (a,b)$ 时 $F'(x) \geqslant A$(或 $\leqslant A$),则有

$$F(b)-F(a) \geqslant A(b-a)(\text{或 } F(b)-F(a) \leqslant A(b-a)).$$

5. 用柯西中值定理

如果所给题中的 $F(x)$ 与 $G(x)$ 在区间$[a,b]$上满足柯西中值定理的条件,并设当 $x \in (a,b)$ 时$\dfrac{F'(x)}{G'(x)} \geqslant A$(或 $\leqslant A$),则有

$$\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)} \geqslant A(\text{或 } \leqslant A).$$

6. 用带有拉格朗日余项的泰勒公式

如果所给条件为(或能推导出)$F''(x)$ 存在且大于 0(或小于 0),那么常想到使用带有拉格朗日余项的泰勒公式来证明,将 $F(x)$ 在适当的 $x=x_0$ 处展开,

$$F(x)=F(x_0)+F'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}F''(\xi)(x-x_0)^2(\xi \text{ 介于 } x \text{ 与 } x_0 \text{ 之间}),$$

于是有 $F(x) \geqslant$(或 $\leqslant$)$F(x_0)+F'(x_0)(x-x_0)$.

例 6.13 设 $f(x)=\left(1-\dfrac{a}{x}\right)^x$,其中 $x>a>0$.

(1) 求 $f(x)$ 的水平渐近线;

(2) 证明:$e^a f(x)<1$.

(1)【解】由于 $x>0$,故只研究 $x \to +\infty$ 时的情形.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{a}{x}\right)^x=e^{\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1-\frac{a}{x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot\left(-\frac{a}{x}\right)}=e^{-a},$$

故 $y=e^{-a}$ 为 $f(x)$ 的水平渐近线.

(2)【证】$f(x)=e^{x\ln\left(1-\frac{a}{x}\right)}$,$x>a>0$,其中

$$x\ln\left(1-\frac{a}{x}\right)=x\ln\frac{x-a}{x}=x[\ln(x-a)-\ln x],$$

故

$$f'(x)=\left(1-\frac{a}{x}\right)^x \cdot \left[\ln(x-a)-\ln x+\frac{x}{x-a}-1\right]$$

$$=\left(1-\frac{a}{x}\right)^{x}\left[\ln(x-a)-\ln x+\frac{a}{x-a}\right], \qquad (*)$$

由拉格朗日中值定理，有

$$\ln(x-a)-\ln x=\frac{1}{\xi}\cdot(-a), x-a<\xi<x,$$

即$\frac{1}{\xi}<\frac{1}{x-a}$，于是$\frac{1}{\xi}(-a)>-\frac{a}{x-a}$.

因此（$*$）式大于0，即 $f'(x)>0$，$f(x)$ 严格单调增加，因 $f(x)$ 的水平渐近线为 $y=\mathrm{e}^{-a}$，故 $f(x)<\mathrm{e}^{-a}$，即 $\mathrm{e}^{a}f(x)<1$，证毕.

例 6.14 证明：当 $0<x<1$ 时，$\frac{x}{2(1+\cos x)}<\frac{\ln(1+x)}{1+\cos x}<\frac{2x}{1+\sin x}$.

【证】令 $f(x)=\frac{x}{2}-\ln(1+x)$，$x\in[0,1]$，则

$$f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{1+x}=\frac{x-1}{2(1+x)}<0, x\in(0,1).$$

又 $f(0)=0$，故$\frac{x}{2}<\ln(1+x)$ $(x\in(0,1))$，又因为 $x\in(0,1)$，$1+\cos x>0$，则

$$\frac{x}{2(1+\cos x)}<\frac{\ln(1+x)}{1+\cos x}.$$

现比较$\frac{\ln(1+x)}{1+\cos x}$和$\frac{2x}{1+\sin x}$. 当 $x\in(0,1)$ 时，$\cos\frac{x}{2}>\sin\frac{x}{2}$，则

$$\left(2\cos\frac{x}{2}\right)^{2}>\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)^{2},$$

即
$$4\cos^{2}\frac{x}{2}>1+\sin x,$$

故
$$2(1+\cos x)>1+\sin x,$$

因此
$$\frac{1}{2(1+\cos x)}<\frac{1}{1+\sin x},$$

又
$$\ln(1+x)<x, x\in(0,1),$$

则
$$\frac{\ln(1+x)}{1+\cos x}<\frac{2x}{1+\sin x}.$$

证毕.

例 6.15 已知 $f(x)$ 为二阶可导的正值函数，$f(0)=f'(0)=1$，$f(x)f''(x)\geqslant[f'(x)]^{2}$，则（ ）.

(A) $f(2)\leqslant\mathrm{e}^{2}\leqslant\sqrt{f(1)f(3)}$ (B) $\mathrm{e}^{2}\leqslant f(2)\leqslant\sqrt{f(1)f(3)}$

(C) $\sqrt{f(1)f(3)}\leqslant\mathrm{e}^{2}\leqslant f(2)$ (D) $\sqrt{f(1)f(3)}\leqslant f(2)\leqslant\mathrm{e}^{2}$

【解】应选(B).

令 $g(x)=\ln f(x)$，则

$$g'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)},g''(x)=\frac{f(x)f''(x)-[f'(x)]^2}{[f(x)]^2}\geqslant 0,$$

故由带拉格朗日余项的泰勒公式,有

$$\begin{aligned}g(x)&=g(0)+g'(0)x+\frac{g''(\xi)}{2}x^2\\&=\ln f(0)+\frac{f'(0)}{f(0)}x+\frac{g''(\xi)}{2}x^2\\&=x+\frac{g''(\xi)}{2}x^2\geqslant x,\end{aligned}$$

第二种解法:因为 $g''(x)\geqslant 0$,且 $g(x)$ 在 $(0,g(0))$ 处的切线为 $y-g(0)=g'(0)(x-0)$,即 $y=x$,根据本讲"三3③"的结论,也可得 $g(x)\geqslant x$.

其中 ξ 介于 $0,x$ 之间,即 $f(x)\geqslant e^x$,$f(2)\geqslant e^2$.

又由于 $g''(x)\geqslant 0$,有 $\frac{g(x_1)+g(x_2)}{2}\geqslant g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$,即

$$f(x_1)f(x_2)\geqslant f^2\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right),x_1,x_2\in(-\infty,+\infty).$$

令 $x_1=1,x_2=3$,有 $f(1)f(3)\geqslant f^2\left(\frac{1+3}{2}\right)=f^2(2)$,即 $f(2)\leqslant\sqrt{f(1)f(3)}$. 于是 $e^2\leqslant f(2)\leqslant\sqrt{f(1)f(3)}$,选(B).