第13讲 多元函数微分学

知识结构

- 概念
  - 极限
  - 连续
  - 偏导数
  - 全微分
  - 偏导数连续
- 复合函数求导法(链式求导规则)
- 隐函数求导法—隐函数存在定理
  - 一个方程的情形
  - 方程组的情形
- 多元函数的极、最值
  - 定义
  - 极值存在的必要条件
  - 极值存在的充分条件
  - 条件最值与拉格朗日乘数法
  - 有界闭区域上连续函数的最值问题
- 偏微分方程(含偏导数的等式)
  - 已知偏导数(或偏增量)的表达式,求 $z=f(x,y)$
  - 给出变换,化已知偏微分方程为常微分方程,求 $f(u)$
  - 给出变换,化已知偏微分方程为指定偏微分方程及其反问题

一 概念

1. 极限

设函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上有定义,$P_0(x_0,y_0)\in D$ 或为 D 的边界上的一点. 如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$,总存在 $\delta>0$,当点 $P(x,y)\in D$,且满足 $0<|PP_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时,恒有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon,$$

则称常数 A 为 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时 $f(x,y)$ 的极限,记作

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A \text{ 或 } \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A,$$

也常记作
$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A.$$

【注】(1) 一元极限中 $x\to x_0$ 有且仅有两种方式($x\to x_0^-$ 和 $x\to x_0^+$)，二重极限中$(x,y)\to(x_0,y_0)$ 一般有无穷多种方式.

(2) 若有两条不同路径使极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 的值不相等或某一路径使极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 的值不存在，都说明 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 不存在.

(3) 除洛必达法则和单调有界准则外，可照搬一元函数求极限的方法来求二重极限，二重极限保持了一元极限的各种性质，如唯一性、局部有界性、局部保号性、运算规则及脱帽法 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A \Leftrightarrow f(x,y)=A+\alpha$，其中当$(x,y)\to(x_0,y_0)$时，$\alpha$ 是无穷小量.

2. 连续

如果 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$，则称函数 $f(x,y)$ 在点(x_0,y_0)处连续. 如果 $f(x,y)$ 在区域 D 上每一点都连续，则称 $f(x,y)$ 在区域 D 上连续.

3. 偏导数

(1) 定义.

设函数 $z=f(x,y)$ 在点(x_0,y_0)处的某邻域内有定义，如果极限
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$
存在，则称此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点(x_0,y_0)处对 x 的**偏导数**，记作
$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},\left.z'_x\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}\text{ 或 } f'_x(x_0,y_0),$$
即
$$f'_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}.$$

类似地，函数 $z=f(x,y)$ 在点(x_0,y_0)处对 y 的偏导数定义为
$$f'_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}.$$

(2) 如果 $z=f(x,y)$ 在区域 D 上的每一点(x,y)处都有偏导数，一般来说，它们仍是 x，y 的函数，则称为 $f(x,y)$ 的偏导函数，简称偏导数，记作$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial x},f'_x(x,y),\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial y},f'_y(x,y)$.

(3) 偏导数的几何意义.

设有二元函数 $z=f(x,y)$，且 $z_0=f(x_0,y_0)$，则 $f'_x(x_0,y_0)$ 在几何上表示曲线 $\begin{cases}z=f(x,y),\\ y=y_0\end{cases}$ 在点(x_0,y_0,z_0)处的切线对 x 轴的斜率. 同理，$f'_y(x_0,y_0)$ 在几何上表示曲线

$\begin{cases}z=f(x,y),\\x=x_0\end{cases}$ 在点(x_0,y_0,z_0)处的切线对 y 轴的斜率.

(4) 高阶偏导数.

如果二元函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $f'_x(x,y)$ 和 $f'_y(x,y)$ 仍然具有偏导数，则它们的偏导数称为 $z=f(x,y)$ 的二阶偏导数，记作

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=f''_{xx}(x,y)=z''_{xx},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=f''_{xy}(x,y)=z''_{xy},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=f''_{yy}(x,y)=z''_{yy},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=f''_{yx}(x,y)=z''_{yx},$$

其中称$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$与$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$为二阶混合偏导数.类似地可以定义 $n(n\geqslant 3)$ 阶偏导数.

(5) 如果函数 $z=f(x,y)$ 的两个二阶混合偏导数$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$及$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$都在区域 D 内连续，则在区域 D 内$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$，即二阶混合偏导数在连续的条件下与求导的次序无关.

4. 全微分

(1) 定义.

设二元函数 $z=f(x,y)$ 在点(x,y)的某邻域内有定义，若 $z=f(x,y)$ 的全增量 $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$ 可以表示为 $\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$，其中 A,B 不依赖于 $\Delta x,\Delta y$，而仅与 x,y 有关，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，则称函数 $z=f(x,y)$ 在点(x,y)处可微，$A\Delta x+B\Delta y$ 称为函数 $z=f(x,y)$ 在点(x,y)处的全微分，记作 $\mathrm{d}z$，即 $\mathrm{d}z=A\Delta x+B\Delta y$.

(2) 若函数 $z=f(x,y)$ 在点(x,y)处可微，则必在点(x,y)处连续.

(3) 可微的必要条件.

如果函数 $z=f(x,y)$ 在点(x,y)处可微，则该函数在点(x,y)处的两个偏导数都存在，且

$$A=\frac{\partial z}{\partial x},B=\frac{\partial z}{\partial y}.$$

(4) 可微的充分条件.

如果函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$在点$(x,y)$处连续，则函数在该点可微.

(5) 全微分的形式不变性.

设 $z=f(u,v)$，$u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$，如果 $f(u,v)$，$u(x,y)$，$v(x,y)$ 分别有连续偏导数，则复合函数 $z=f(u,v)$ 在(x,y)处的全微分仍可表示为

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v,$$

即无论 u,v 是自变量还是中间变量，上式总成立.

【注】判断函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处是否可微，步骤如下：

① 写出全增量 $\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$；

② 写出线性增量 $A\Delta x+B\Delta y$，其中 $A=f'_x(x_0,y_0)$，$B=f'_y(x_0,y_0)$；

③ 作极限 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{\Delta z-(A\Delta x+B\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$，若该极限等于 0，则 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微，否则，就不可微.

5. 偏导数连续

对于 $z=f(x,y)$，讨论其在某特殊点 (x_0,y_0)（比如二元分段函数的分段点）处偏导数是否连续，是考研的重点.

【注】(1) 判断函数 $z=f(x,y)$ 在特殊点 (x_0,y_0) 处的偏导数是否连续，步骤如下：

① 用定义法求 $f'_x(x_0,y_0)$，$f'_y(x_0,y_0)$；

② 用公式法求 $f'_x(x,y)$，$f'_y(x,y)$；

③ 计算 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f'_x(x,y)$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f'_y(x,y)$.

看 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f'_x(x,y)=f'_x(x_0,y_0)$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f'_y(x,y)=f'_y(x_0,y_0)$ 是否成立. 若成立，则 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的偏导数是连续的.

(2) 一元函数和多元函数在极限存在、连续、可导、可微的相互关系上，有相同之处，更有相异之处，如图 13-1 所示（记号 $\rightarrow$ 表示可推出，$\not\rightarrow$ 表示不一定推出）.

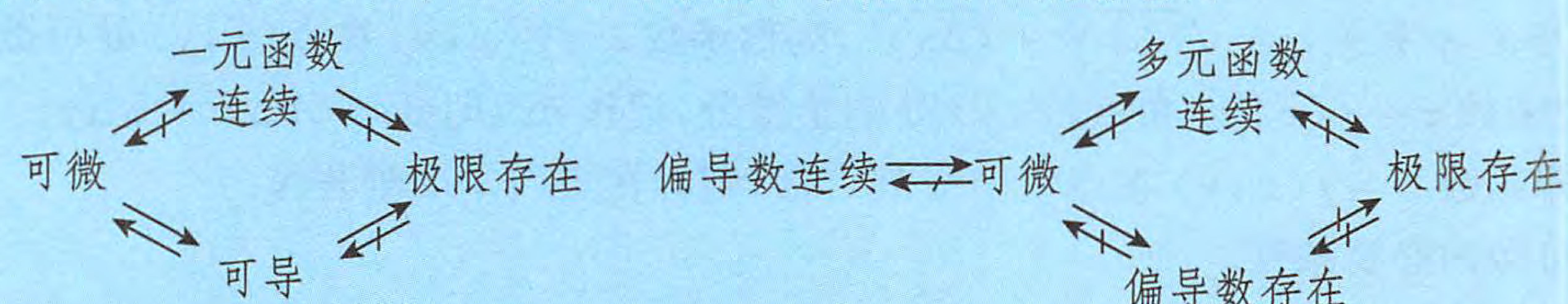


图 13-1

例 13.1 函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{1+xy}-1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处（　　）.

(A) 不连续　　　　(B) 连续但偏导数不存在

(C) 连续，偏导数存在但不可微　　　　(D) 可微

【解】应选(C).

因为 $\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$，且 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}=0$，所以

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sqrt[3]{1+xy}-1}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{3\sqrt{x^2+y^2}}=0=f(0,0),$$

从而 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续. 因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x}=0,\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{0}{y}=0,$$

所以 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处存在偏导数，且 $f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$. 因为

$$\begin{aligned}&\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)-[f'_x(0,0)(x-0)+f'_y(0,0)(y-0)]}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ =&\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sqrt[3]{1+xy}-1}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{3(x^2+y^2)},\end{aligned}$$

而 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x}}\dfrac{xy}{3(x^2+y^2)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{3(x^2+x^2)}=\dfrac{1}{6}\neq 0$，所以

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)-[f'_x(0,0)(x-0)+f'_y(0,0)(y-0)]}{\sqrt{x^2+y^2}}\neq 0,$$

从而函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不可微.

故选(C).

例 13.2 设函数 $f(x,y)=\displaystyle\int_0^{xy}\mathrm{e}^{xt^2}\,\mathrm{d}t$，则 $\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=$______.

【解】应填 $4\mathrm{e}$.

法一

$$f'_y(x,y)=x\mathrm{e}^{x^3y^2},f'_y(x,1)=x\mathrm{e}^{x^3};$$

$$f''_{yx}(x,1)=3x^3\mathrm{e}^{x^3}+\mathrm{e}^{x^3},f''_{yx}(1,1)=4\mathrm{e}.$$

二元初等函数的偏导数仍是初等函数，而初等函数在其定义区域内是连续的.

由于 $f(x,y)$ 的二阶混合偏导数在点 $(1,1)$ 处是相等的，因此 $f''_{xy}(1,1)=4\mathrm{e}$.

法二 当 $x>0$ 时，$f(x,y)=\displaystyle\int_0^{xy}\mathrm{e}^{xt^2}\,\mathrm{d}t\xlongequal[u=\sqrt{x}t]{\frac{u}{\sqrt{x}}=t}\int_0^{x^{\frac{3}{2}}y}\mathrm{e}^{u^2}\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}u=\frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{x^{\frac{3}{2}}y}\mathrm{e}^{u^2}\,\mathrm{d}u$，得

$$f'_x(x,y)=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\int_0^{x^{\frac{3}{2}}y}\mathrm{e}^{u^2}\,\mathrm{d}u+\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\mathrm{e}^{x^3y^2}\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}y,$$

故当 $x=1$ 时，有 $f'_x(1,y)=-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{y}\mathrm{e}^{u^2}\,\mathrm{d}u+\dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{y^2}\cdot y$. 则

$$f''_{xy}(1,y)=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{y^2}+\frac{3}{2}\cdot\mathrm{e}^{y^2}\cdot 2y\cdot y+\frac{3}{2}\mathrm{e}^{y^2}\cdot 1,$$

$$f''_{xy}(1,1)=-\frac{1}{2}\mathrm{e}+3\mathrm{e}+\frac{3}{2}\mathrm{e}=4\mathrm{e}.$$

例 13.3 设 $z_1=|xy|,z_2=\begin{cases}\dfrac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$ 则(　　).

(A) z_1 在点 $(0,0)$ 处不可微，z_2 在点 $(0,0)$ 处不可微

(B) z_1 在点 $(0,0)$ 处不可微，z_2 在点 $(0,0)$ 处可微

(C) z_1 在点 $(0,0)$ 处可微，z_2 在点 $(0,0)$ 处不可微

(D) z_1 在点 $(0,0)$ 处可微，z_2 在点 $(0,0)$ 处可微

【解】 应选(C).

$$\left.\frac{\partial z_1}{\partial x}\right|_{(0,0)}=\lim_{x\to 0}\frac{z_1(x,0)-z_1(0,0)}{x-0}=0,$$

$$\left.\frac{\partial z_1}{\partial y}\right|_{(0,0)}=\lim_{y\to 0}\frac{z_1(0,y)-z_1(0,0)}{y-0}=0,$$

$$\frac{z_1(x,y)-z_1(0,0)-\left.\frac{\partial z_1}{\partial x}\right|_{(0,0)}\cdot x-\left.\frac{\partial z_1}{\partial y}\right|_{(0,0)}\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

$$0\leqslant\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}\leqslant\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0,$$

故 z_1 在点 $(0,0)$ 处可微.

$$\left.\frac{\partial z_2}{\partial x}\right|_{(0,0)}=\lim_{x\to 0}\frac{z_2(x,0)-z_2(0,0)}{x-0}=0,$$

$$\left.\frac{\partial z_2}{\partial y}\right|_{(0,0)}=\lim_{y\to 0}\frac{z_2(0,y)-z_2(0,0)}{y-0}=0,$$

$$\frac{z_2(x,y)-z_2(0,0)-\left.\frac{\partial z_2}{\partial x}\right|_{(0,0)}\cdot x-\left.\frac{\partial z_2}{\partial y}\right|_{(0,0)}\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x|y|}{x^2+y^2}.$$

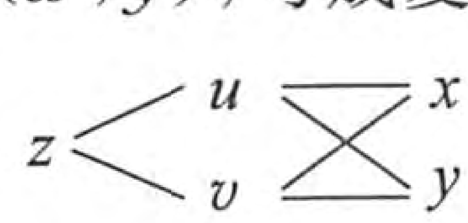
取 $y=x$，则

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x}}\frac{x|y|}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x|x|}{2x^2},\ \lim_{x\to 0^+}\frac{x|x|}{2x^2}=\frac{1}{2},\ \lim_{x\to 0^-}\frac{x|x|}{2x^2}=-\frac{1}{2},$$

极限不存在，故 z_2 在点 $(0,0)$ 处不可微.

二 复合函数求导法(链式求导规则)

设 $z=z(u,v)$，$u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$，写成复合结构图为

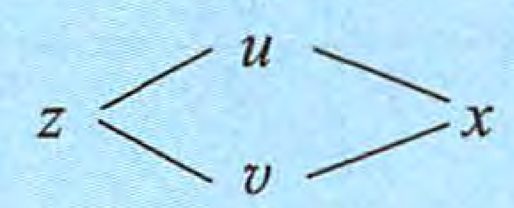


于是

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}.$$

【注】(1) 全导数：若 $z=z(u,v)$，$u=u(x)$，$v=v(x)$，即 z 最终只是 x 的函数，则 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ 叫**全导数**. 写成复合结构图为

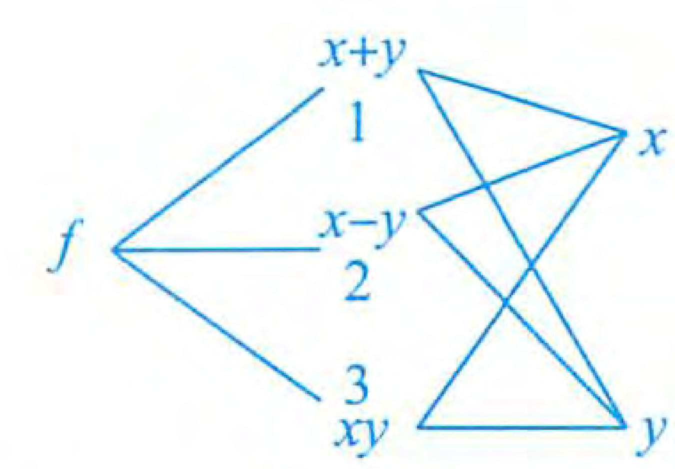


于是
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}.$$

(2) 无论 z 对哪个变量求导，也无论 z 已经求了几阶导，求导后的新函数仍然具有与原函数完全相同的复合结构.

例 13.4 设 $z=f(x+y,x-y,xy)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\mathrm{d}z$ 与 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

【解】 由于



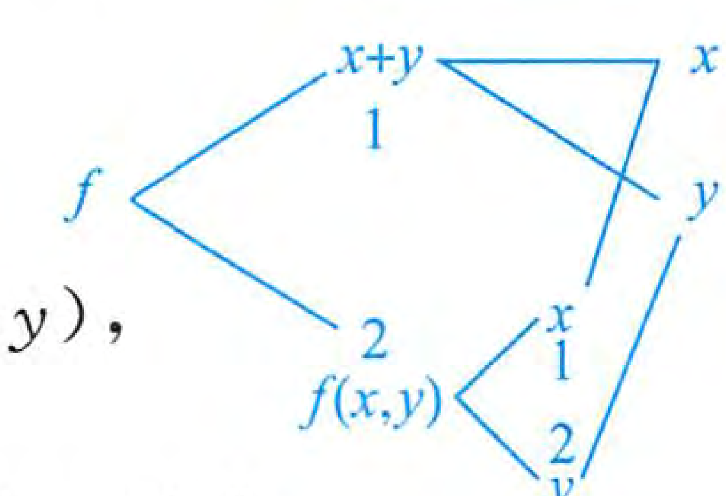
$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_1+f'_2+yf'_3,\ \frac{\partial z}{\partial y}=f'_1-f'_2+xf'_3,$$

因此

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=(f'_1+f'_2+yf'_3)\mathrm{d}x+(f'_1-f'_2+xf'_3)\mathrm{d}y,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=f''_{11}\cdot 1+f''_{12}\cdot(-1)+f''_{13}\cdot x+f''_{21}\cdot 1+f''_{22}\cdot(-1)+f''_{23}\cdot x+f'_3+\\&\quad y[f''_{31}\cdot 1+f''_{32}\cdot(-1)+f''_{33}\cdot x]\\&=f'_3+f''_{11}-f''_{22}+xyf''_{33}+(x+y)f''_{13}+(x-y)f''_{23}.\end{aligned}$$

例 13.5 已知函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，$f(1,1)=2$ 是 $f(u,v)$ 的极值，$z=f[x+y,f(x,y)]$，求 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}$.



【解】
$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_1[x+y,f(x,y)]+f'_2[x+y,f(x,y)]\cdot f'_1(x,y),$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=f''_{11}[x+y,f(x,y)]+f''_{12}[x+y,f(x,y)]\cdot f'_2(x,y)+\\&\quad f''_{12}(x,y)\cdot f'_2[x+y,f(x,y)]+f'_1(x,y)\{f''_{21}[x+y,f(x,y)]+\\&\quad f''_{22}[x+y,f(x,y)]\cdot f'_2(x,y)\}.\end{aligned}$$

$f(1,1)$ 是 $f(u,v)$ 的极值

由题意知
$$\underline{f'_1(1,1)=0,f'_2(1,1)=0},$$

从而
$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=f''_{11}(2,2)+f'_2(2,2)f''_{12}(1,1).$$

三 隐函数求导法

设以下所给函数的偏导数均连续.

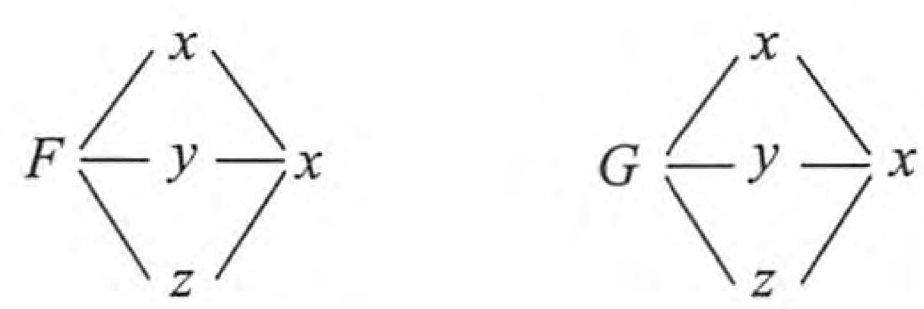
1. 一个方程的情形

设 $F(x,y,z)=0$，$P_0(x_0,y_0,z_0)$，若满足 ①$F(P_0)=0$；②$F'_z(P_0)\neq 0$，则在点 P_0 的某邻域内可确定 $z=z(x,y)$，且有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}.$$

2. 方程组的情形

设$\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0,\end{cases}$当满足$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z}\\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z}\end{vmatrix}\neq 0$时，可确定$\begin{cases}y=y(x),\\z=z(x),\end{cases}$其复合结构图为



且有
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}}=-\frac{\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial z}\\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial z}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z}\\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z}\end{vmatrix}},\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}}=-\frac{\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial x}\\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial x}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z}\\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z}\end{vmatrix}}.$$

例 13.6 若函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $\mathrm{e}^{x+2y+3z}+xyz=1$ 确定，则 $\mathrm{d}z\Big|_{(0,0)}=$ ______.

【解】 应填 $-\frac{1}{3}\mathrm{d}x-\frac{2}{3}\mathrm{d}y$.

先求 $z(0,0)$. 在原方程中令 $x=0,y=0$ 得 $\mathrm{e}^{3z(0,0)}=1$，故 $z(0,0)=0$.

令 $F(x,y,z)=\mathrm{e}^{x+2y+3z}+xyz-1$，则由公式法，知

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}=-\frac{\mathrm{e}^{x+2y+3z}\cdot 1+yz}{\mathrm{e}^{x+2y+3z}\cdot 3+xy},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}=-\frac{\mathrm{e}^{x+2y+3z}\cdot 2+xz}{\mathrm{e}^{x+2y+3z}\cdot 3+xy},$$

当 $x=0,y=0,z=0$ 时，$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{3},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2}{3}$，则

$$\mathrm{d}z\Big|_{(0,0)}=-\frac{1}{3}\mathrm{d}x-\frac{2}{3}\mathrm{d}y.$$

【注】 此题还有以下两种解法，一是复合函数求导法，二是利用全微分形式不变性.

复合函数求导法 将方程两端对 x 求偏导数得

$$\mathrm{e}^{x+2y+3z}\left(1+3\frac{\partial z}{\partial x}\right)+yz+xy\frac{\partial z}{\partial x}=0,$$

令 $x=0,y=0,z=0$ 可得 $1+3\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)}=0$，即 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)}=-\dfrac{1}{3}$.

将方程两端对 y 求偏导数得

$$e^{x+2y+3z}\left(2+3\frac{\partial z}{\partial y}\right)+xz+xy\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

令 $x=0,y=0,z=0$ 可得 $2+3\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0)}=0$，即 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0)}=-\dfrac{2}{3}$.

因此 $$\left.dz\right|_{(0,0)}=\left.\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)\right|_{(0,0)}=-\frac{1}{3}dx-\frac{2}{3}dy.$$

利用全微分形式不变性 对于一元函数：$d[\varphi(u)]=\varphi'(u)du$；

对于多元函数：$d[\varphi(u,v,w)]=\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}du+\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}dv+\dfrac{\partial\varphi}{\partial w}dw$.

将原方程两端求全微分得

$$e^{x+2y+3z}d(x+2y+3z)+d(xyz)=0,$$

即 $$e^{x+2y+3z}(dx+2dy+3dz)+yzdx+xzdy+xydz=0,$$

令 $x=0,y=0,z=0$ 可得 $\left.dx+2dy+3dz\right|_{(0,0)}=0$，则

$$\left.dz\right|_{(0,0)}=-\frac{1}{3}dx-\frac{2}{3}dy.$$

综上，公式法、复合函数求导法、利用全微分形式不变性是常用的三种方法.

例 13.7 设 $y=y(x),z=z(x)$ 是由方程 $z=xf(x+y)$ 和 $F(x,y,z)=0$ 所确定的函数，其中 f 和 F 分别具有一阶连续导数和一阶连续偏导数，且 $F'_y+xf'F'_z\neq 0$，求 $\dfrac{dz}{dx}$.

【解】 令 $G(x,y,z)=xf(x+y)-z$，由公式法，知

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}}=-\frac{\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial x}\\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial x}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z}\\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z}\end{vmatrix}}=-\frac{\begin{vmatrix}F'_y & F'_x\\ xf' & f+xf'\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F'_y & F'_z\\ xf' & -1\end{vmatrix}}$$

$$=\frac{(f+xf')F'_y-xf'F'_x}{F'_y+xf'F'_z}.$$

【注】 本题亦可用下面的方法求解.

分别在 $z=xf(x+y)$ 和 $F(x,y,z)=0$ 的两端对 x 求导，得

$$\begin{cases}\dfrac{dz}{dx}=f+x\left(1+\dfrac{dy}{dx}\right)f',\\ F'_x+F'_y\dfrac{dy}{dx}+F'_z\dfrac{dz}{dx}=0,\end{cases}$$

整理后得

$$\begin{cases}-xf'\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{dz}{dx}=f+xf',\\ F'_y\dfrac{dy}{dx}+F'_z\dfrac{dz}{dx}=-F'_x,\end{cases}$$

由此解得
$$\frac{dz}{dx}=\frac{(f+xf')F'_y-xf'F'_x}{F'_y+xf'F'_z}.$$

四 多元函数的极、最值

1. 定义

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内有定义，如果在此邻域内都有 $f(x,y)\leqslant f(x_0,y_0)$（或 $f(x,y)\geqslant f(x_0,y_0)$），则称函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处取得极大值（或极小值）.

2. 极值存在的必要条件

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处具有偏导数，且在点 (x_0,y_0) 处取得极值，则它在该点的偏导数必为零，即

$$f'_x(x_0,y_0)=0,f'_y(x_0,y_0)=0.$$

【注】偏导数不存在的点也可能是极值点，如 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点 $(0,0)$ 处的情形：$f'_x(0,0)$，$f'_y(0,0)$ 均不存在，但点 $(0,0)$ 是极小值点.

3. 极值存在的充分条件

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内连续，且具有一阶及二阶连续偏导数，又 $f'_x(x_0,y_0)=0,f'_y(x_0,y_0)=0$. 令

$$f''_{xx}(x_0,y_0)=A,f''_{xy}(x_0,y_0)=B,f''_{yy}(x_0,y_0)=C,$$

则

(1) 当 $AC-B^2>0$ 时，$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处取得极值，且当 $A<0$ 时，取得极大值，当 $A>0$ 时，取得极小值；

(2) 当 $AC-B^2<0$ 时，$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处不取得极值；

(3) 当 $AC-B^2=0$ 时，$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处是否取得极值不能确定，还需另作讨论（一

般用定义法).

4. 条件最值与拉格朗日乘数法

求目标函数 $u=f(x,y,z)$ 在条件 $\begin{cases}\varphi(x,y,z)=0,\\ \psi(x,y,z)=0\end{cases}$ 下的最值，则

(1) 构造辅助函数 $F(x,y,z,\lambda,\mu)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)+\mu\psi(x,y,z)$；

(2) 令

$$\begin{cases}F'_x=f'_x+\lambda\varphi'_x+\mu\psi'_x=0,\\ F'_y=f'_y+\lambda\varphi'_y+\mu\psi'_y=0,\\ F'_z=f'_z+\lambda\varphi'_z+\mu\psi'_z=0,\\ F'_\lambda=\varphi(x,y,z)=0,\\ F'_\mu=\psi(x,y,z)=0;\end{cases}$$

(3) 解上述方程组得备选点 $P_i,i=1,2,3,\cdots,n$，并求 $f(P_i)$，取其最大值为 $u_{\max}$，最小值为 $u_{\min}$；

(4) 根据实际问题，必存在最值，所得即为所求.

5. 有界闭区域上连续函数的最值问题

(1) 理论依据 —— 最大值与最小值定理：在有界闭区域 D 上的多元连续函数，在 D 上一定有最大值和最小值.

(2) 求法.

① 根据 $f'_x(x,y),f'_y(x,y)$ 为 0 或不存在，求出 D 内部的所有可疑点；

② 用拉格朗日乘数法或代入法求出 D 边界上的所有可疑点；

③ 比较以上所有可疑点的函数值大小，取其最小者为最小值，最大者为最大值.

例 13.8 设函数 $u(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，在 D 的内部具有二阶连续偏导数，且满足 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\neq 0$ 及 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，则(　　).

(A) $u(x,y)$ 的最大值和最小值都在 D 的边界上取得

(B) $u(x,y)$ 的最大值和最小值都在 D 的内部取得

(C) $u(x,y)$ 的最大值在 D 的内部取得，最小值在 D 的边界上取得

(D) $u(x,y)$ 的最小值在 D 的内部取得，最大值在 D 的边界上取得

【解】应选(A).

因为 $u(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，所以 $u(x,y)$ 在 D 上必然有最大值和最小值. 假设在内部存在驻点 (x_0,y_0)，则 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}=\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}=0$，且在点 (x_0,y_0) 处

$$A=\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{(x_0,y_0)},B=\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}=\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\right|_{(x_0,y_0)},C=\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{(x_0,y_0)}.$$

由条件可知 $AC-B^2<0$，显然 $u(x_0,y_0)$ 不是极值，当然也不是最值，所以 $u(x,y)$ 的最大

值点和最小值点必定都在区域 D 的边界上，所以应选(A).

例 13.9 已知函数 $f(x,y)$ 在点(0,0)的某邻域内连续，且

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)-axy}{(x^2+y^2)^2}=1,$$

其中 a 为非零常数，则 $f(0,0)$(　　).

(A) 是极大值　　(B) 是极小值

(C) 不是极值　　(D) 是否取极值与 a 有关

【解】 应选(C).

由极限脱帽法，知 $\dfrac{f(x,y)-axy}{(x^2+y^2)^2}=1+\alpha$，其中 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\alpha=0$，于是有

$$f(x,y)=axy+(x^2+y^2)^2+\alpha\cdot(x^2+y^2)^2.$$

故 $f(0,0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=0$，又在 $y=x$ 上，$f(x,x)=ax^2+4x^4+\alpha\cdot 4x^4$，故当 $|x|$ 充分小时，$f(x,x)\sim ax^2$，$f(x,x)$ 与 a 同号；在 $y=-x$ 上，$f(x,-x)=-ax^2+4x^4+\alpha\cdot 4x^4$，故当 $|x|$ 充分小时，$f(x,-x)\sim(-ax^2)$，$f(x,-x)$ 与 $-a$ 同号.

综上，在点(0,0)附近，$f(x,y)$ 的值有正有负，所以 $f(0,0)=0$ 不是极值.

例 13.10 设 $a>0,b>0$，函数 $f(x,y)=2\ln|x|+\dfrac{(x-a)^2+by^2}{2x^2}$ 在 $x<0$ 时的极小值为 2，且 $f''_{yy}(-1,0)=1$.

(1) 求 a,b 的值；

(2) 求 $f(x,y)$ 在 $x>0$ 时的极值.

【解】(1)

$$f'_x(x,y)=\frac{2x^2+ax-a^2-by^2}{x^3},\quad f'_y(x,y)=\frac{by}{x^2}.$$

令 $\begin{cases}f'_x(x,y)=0,\\ f'_y(x,y)=0,\end{cases}$ 得驻点 $(-a,0)$，$\left(\dfrac{a}{2},0\right)$. 又

$$f''_{xx}(x,y)=\frac{-2x^2-2ax+3a^2+3by^2}{x^4},\quad f''_{xy}(x,y)=\frac{-2by}{x^3},\quad f''_{yy}(x,y)=\frac{b}{x^2},$$

由 $f''_{yy}(-1,0)=1$，知 $b=1$，故在点 $(-a,0)$ 处，

$$A=f''_{xx}(-a,0)=\frac{3}{a^2},\quad B=f''_{xy}(-a,0)=0,\quad C=f''_{yy}(-a,0)=\frac{1}{a^2}.$$

由于 $AC-B^2=\dfrac{3}{a^4}>0$，且 $A>0$，因此 $f(-a,0)$ 是函数 $f(x,y)$ 的极小值，极小值为 $f(-a,0)=2\ln a+2=2$，故 $a=1$.

(2) 在点 $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$ 处，

$$A=f''_{xx}\left(\frac{1}{2},0\right)=24,\quad B=f''_{xy}\left(\frac{1}{2},0\right)=0,\quad C=f''_{yy}\left(\frac{1}{2},0\right)=4.$$

由于 $AC-B^2=96>0$，且 $A>0$，因此 $f\left(\dfrac{1}{2},0\right)$ 是函数 $f(x,y)$ 的极小值，极小值为

$f\left(\frac{1}{2},0\right)=\frac{1}{2}-2\ln 2.$

例 13.11 设 a,b 为实数，函数 $f(x,y)=ax^2+by^2$ 在点(2,1)处沿方向 $\boldsymbol{l}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$ 的方向导数最大，最大值为 $4\sqrt{5}$.

(1) 求 a,b 的值；

(2) 在曲线 $f(x,y)=4$ 上求一点，使其到直线 $2x+3y-6=0$ 的距离最短.

【解】(1) 函数 $f(x,y)=ax^2+by^2$ 在点(2,1)处的梯度为

$$\mathbf{grad}\, f\Big|_{(2,1)}=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)\Big|_{(2,1)}=(2ax,2by)\Big|_{(2,1)}=(4a,2b).$$

由题设条件知，$\sqrt{(4a)^2+(2b)^2}=4\sqrt{5}$ 且 $\frac{4a}{1}=\frac{2b}{2}=k>0$，解得 $\begin{cases}a=1,\\b=4.\end{cases}$

(2) 由(1)可知，$f(x,y)=x^2+4y^2$，设 $P(x,y)$ 为曲线 $x^2+4y^2=4$ 上任意一点，则点 P 到直线 $2x+3y-6=0$ 的距离

$$d=\frac{|2x+3y-6|}{\sqrt{13}}.$$

点 (x_0,y_0) 到直线 $Ax+By+C=0$ 的距离公式：$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

因为求函数 d 的最小值点即求 d^2 的最小值点(见注)，所以问题可抽象为如下数学模型：

求目标函数 $d^2=\frac{1}{13}(2x+3y-6)^2$ 在约束条件 $x^2+4y^2=4$ 下的最小值.

作拉格朗日函数 $F(x,y,\lambda)=\frac{1}{13}(2x+3y-6)^2+\lambda(x^2+4y^2-4)$，令

$$\begin{cases}F'_x=\frac{4}{13}(2x+3y-6)+2\lambda x=0, & ①\\[2mm] F'_y=\frac{6}{13}(2x+3y-6)+8\lambda y=0, & ②\\[2mm] F'_\lambda=x^2+4y^2-4=0. & ③\end{cases}$$

若 $\lambda=0$，则原方程组转化为 $\begin{cases}2x+3y-6=0,\\x^2+4y^2-4=0,\end{cases}$ 即为求曲线与直线的交点. 事实上，二者并不相交，此时方程组无解.

若 $\lambda\neq 0$，由①，②得 $\dfrac{\frac{4}{13}}{\frac{6}{13}}=\frac{-2x}{-8y}$，$x=\frac{8}{3}y$，代入③式，解得 $x_1=\frac{8}{5}$，$y_1=\frac{3}{5}$；$x_2=-\frac{8}{5}$，$y_2=-\frac{3}{5}$，且

$$d\Big|_{(x_1,y_1)}=\frac{1}{\sqrt{13}},\quad d\Big|_{(x_2,y_2)}=\frac{11}{\sqrt{13}}.$$

根据问题的实际意义可知，最短距离一定存在，因此 $\left(\frac{8}{5},\frac{3}{5}\right)$ 即为所求点.

【注】(1) 需先证明直线和曲线不相交，用反证法证明如下.

设$\begin{cases}2x+3y-6=0,\\x^2+4y^2-4=0\end{cases}$有解，则 $25y^2-36y+20=0$ 有解，这与该方程的判别式 $\Delta=(-36)^2-4\times25\times20<0$ 矛盾，即$\begin{cases}2x+3y-6=0,\\x^2+4y^2-4=0\end{cases}$无解.

(2) 见到$\sqrt{u}$，$\sqrt[3]{u}$，$u>0$，用 u 来求最值.

(3) 见到 $|u|$，要知道 $|u|=\sqrt{u^2}$，即用 u^2 来求最值.

(4) 见到 $u_1u_2u_3$，其中 $u_i>0, i=1,2,3$，要想到取对数，写成 $\ln u_1+\ln u_2+\ln u_3$，再求最值.

(2)，(3)，(4) 三个处理手段均是由于前后两者有相同的单调性，即有相同的最值点，而后者计算起来更方便.

五 偏微分方程(含偏导数的等式)

(1) 已知偏导数(或偏增量)的表达式，求 $z=f(x,y)$.

(2) 给出变换，化已知偏微分方程为常微分方程，求 $f(u)$.

(3) 给出变换，化已知偏微分方程为指定偏微分方程及其反问题.

例 13.12 设函数 $f(x,y)$ 可微，$f(0,0)=0$，$\dfrac{\partial f}{\partial x}=-f(x,y)$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}=e^{-x}\cos y$，求 $f(x,x)$ 在$[0,+\infty)$ 的部分与 x 轴围成的图形绕 x 轴旋转一周所成的旋转体体积.

【解】由$\dfrac{\partial f}{\partial y}=e^{-x}\cos y$ 得 $f(x,y)=e^{-x}\sin y+\varphi(x)$，于是$\dfrac{\partial f}{\partial x}=-e^{-x}\sin y+\varphi'(x)$.

又$\dfrac{\partial f}{\partial x}=-f(x,y)$，故

$$-e^{-x}\sin y+\varphi'(x)=-e^{-x}\sin y-\varphi(x),$$

于是有 $\varphi'(x)+\varphi(x)=0$，解得 $\varphi(x)=Ce^{-x}$，即 $f(x,y)=e^{-x}\sin y+Ce^{-x}$. 由 $f(0,0)=0$，得 $C=0$，所以 $f(x,y)=e^{-x}\sin y$. 于是

$$\begin{aligned}V&=\int_0^{+\infty}\pi f^2(x,x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\pi e^{-2x}\sin^2 x\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\pi e^{-2x}\frac{1-\cos 2x}{2}\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty}e^{-2x}(1-\cos 2x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty}e^{-2x}\mathrm{d}x-\frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty}e^{-2x}\cos 2x\mathrm{d}x\\&\xlongequal{u=2x}\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\int_0^{+\infty}e^{-u}\cos u\mathrm{d}u,\end{aligned}$$

其中

$$\int_0^{+\infty}e^{-u}\cos u\mathrm{d}u=\left.\frac{\begin{vmatrix}(e^{-u})' & (\cos u)'\\ e^{-u} & \cos u\end{vmatrix}}{(-1)^2+1^2}\right|_0^{+\infty}=\left.\frac{1}{2}(-e^{-u}\cos u+e^{-u}\sin u)\right|_0^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{2}[0-(-1)]=\frac{1}{2},$$

故

$$V=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\pi}{8}.$$

【注】对于数学一的考生，还应熟悉这种命题方法：设 $f(x,y)$ 可微，其在点 (x,y) 处沿方向 $\boldsymbol{l}_1=-\boldsymbol{i}$ 的方向导数为 $f(x,y)$，沿方向 $\boldsymbol{l}_2=-\boldsymbol{j}$ 的方向导数为 $-\mathrm{e}^{-x}\cos y$，就是题设中的条件：$\frac{\partial f}{\partial x}=-f(x,y)$，$\frac{\partial f}{\partial y}=\mathrm{e}^{-x}\cos y$，当然更为复杂的命题方法，见例 17.10.

例 13.13 设函数 $f(u)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导，$z=xf\left(\frac{y}{x}\right)+y$ 满足关系式 $x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=2z$，且 $f(1)=1$.

考研真题还考过 $f(\sqrt{x^2+y^2})$，$f(\mathrm{e}^x\cos y)$ 等，均应令括号中的表达式为 u.

(1) 求 $f(x)$ 的表达式；

(2) 求曲线 $y=f(x)$ 的所有渐近线.

【解】(1) 令 $u=\frac{y}{x}$，则 $z=xf(u)+y$，于是

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f(u)+xf'(u)\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=f(u)-\frac{y}{x}f'(u),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=xf'(u)\cdot\frac{1}{x}+1=f'(u)+1,$$

代入 $x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=2z$，得

$$xf(u)-yf'(u)-yf'(u)-y=2xf(u)+2y,$$

即 $2yf'(u)+xf(u)+3y=0$，方程两边同时除以 $2y$，得 $f'(u)+\frac{1}{2\frac{y}{x}}f(u)+\frac{3}{2}=0$，即

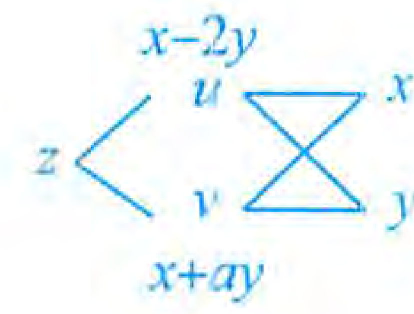
$$f'(u)+\frac{1}{2u}f(u)=-\frac{3}{2}.$$

由例 5.14 可知，$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}(2-x^{\frac{3}{2}})$.

(2) 由例 5.14 可知，$x=0$ 是曲线 $y=f(x)$ 的铅直渐近线，$y=-x$ 是曲线 $y=f(x)$ 的斜渐近线.

例 13.14 设 $z=z(x,y)$ 有二阶连续偏导数，用变换 $u=x-2y$，$v=x+ay$ 可把方程 $6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 化简为 $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$，求常数 a.

【解】由复合函数求导法得



$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=-2\frac{\partial z}{\partial u}+a\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}&=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\\&=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\\&=-2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+(a-2)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+a\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}&=-2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)+a\left(\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)\\&=-2\left(-2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+a\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\right)+a\left(-2\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}+a\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)\\&=4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-2a\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}-2a\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}+a^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\\&=4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-4a\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+a^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.\end{aligned}$$

由 $6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，得 $(10+5a)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+(6+a-a^2)\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0$.

当 $\begin{cases}10+5a\neq 0,\\a^2-a-6=0,\end{cases}$ 即 $a=3$ 时，$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$.