第5讲 线性方程组

知识结构

- 具体型方程组
  - 线性方程组理论
    - 齐次线性方程组
      - 解的性质 — ξ_1，ξ_2 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解，则 $k_1\xi_1+k_2\xi_2$ 也是它的解（k_1，$k_2\in\mathbf{R}$）
      - 基础解系
        - ①是解
        - ②线性无关
        - ③ $s=n-r(\boldsymbol{A})$
      - 齐次线性方程组有非零解的充要条件及其通解
        - 充要条件 — $r(\boldsymbol{A})<n$
        - 通解 — $\boldsymbol{x}=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$
    - 非齐次线性方程组
      - 解的性质 — $\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解，则 $\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解
      - 非齐次线性方程组解的情形
        - $r(\boldsymbol{A})=r([\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{b}])=n$ 时，方程组有唯一解
        - $r(\boldsymbol{A})=r([\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{b}])<n$ 时，方程组有无穷多解
        - $r(\boldsymbol{A})\neq r([\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{b}])$ 时，方程组无解
      - 非齐次线性方程组的通解 — $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\eta}^*+k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$
  - 解线性方程组
    - 先用初等行变换将齐次方程组的系数矩阵或非齐次方程组的增广矩阵化为行阶梯形矩阵，再用方程组理论判别、求解
    - "方形"（方程个数 = 未知数个数）的方程组
      - ① $|\boldsymbol{A}|\neq 0\Leftrightarrow$方程组有唯一解 $\Leftrightarrow f(\lambda)\neq 0$
      - ② $|\boldsymbol{A}|=0\Leftrightarrow f(\lambda)=0$
      - ③变体形式：含参数的向量之间的线性关系
  - 公共解与同解问题
    - 公共解
      - ①联立方程 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解
      - ②求出 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解 $k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_s\xi_s$，代入 $\boldsymbol{B}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，求出 k_i 之间的关系，代回 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解
      - ③给出 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系 ξ_1，ξ_2，…，ξ_s 与 $\boldsymbol{B}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系 $\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$，…，$\boldsymbol{\eta}_t$，则公共解 $\gamma=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_s\xi_s=l_1\boldsymbol{\eta}_1+l_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+l_t\boldsymbol{\eta}_t$
    - 同解方程组
      - $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是同解方程组
      - $\Leftrightarrow \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解满足 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，且 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$
      - $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$，且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解满足 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$
      - $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=r\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{bmatrix}\right)$

- 抽象型方程组
  - 解的判定
    - $A_{m\times n}x=0$
      - $r(A)=n$，只有零解
      - $r(A)<n$，有无穷多解
    - $A_{m\times n}x=b$
      - $r(A)\neq r([A\,\vdots\,b])$，无解
      - $r(A)=r([A\,\vdots\,b])=n$，有唯一解
      - $r(A)=r([A\,\vdots\,b])=r<n$，有无穷多解
  - 基础解系与解的结构
    - 基础解系
    - 解的结构
  - 解与系数的关系
- 线性方程组的几何意义（仅数学一）

一 具体型方程组

1. 线性方程组理论

（1）齐次线性方程组．

①解的性质．

对于齐次线性方程组

$$A_{m\times n}x=0,$$

若 ξ_1，ξ_2 是方程组 $Ax=0$ 的解，则 $x=k_1\xi_1+k_2\xi_2$ 也是它的解（k_1，$k_2\in\mathbf{R}$）．

②基础解系．

设 $r(A)<n$，ξ_1，ξ_2，…，ξ_s 是方程组 $Ax=0$ 的一组解向量，如果

（i）ξ_1，ξ_2，…，ξ_s 线性无关；

（ii）方程组 $Ax=0$ 的任一解向量均可由 ξ_1，ξ_2，…，ξ_s 线性表示，即 $s=n-r(A)$．

则称 ξ_1，ξ_2，…，ξ_s 是方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系．

【注】基础解系应满足 3 个条件：①是解；②线性无关；③ $s=n-r(A)$．

③齐次线性方程组有非零解的充要条件及其通解．

齐次线性方程组 $Ax=0$ 有非零解的充要条件是 $r(A)<n$，此时它的通解为

$$x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r},$$

其中 $r=r(A)$，k_1，k_2，…，k_{n-r} 为任意常数，ξ_1，ξ_2，…，ξ_{n-r} 为方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系．

（2）非齐次线性方程组．

①解的性质．

对于非齐次线性方程组

$$A_{m\times n}x=b,$$

若 $x=\eta_1$，$x=\eta_2$ 都是方程组 $Ax=b$ 的解，则 $x=\eta_1-\eta_2$ 是相应的齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解．

②非齐次线性方程组解的情形.

当 $r(A)=r([A \mid b])=n$ 时，方程组有唯一解；

当 $r(A)=r([A \mid b])<n$ 时，方程组有无穷多解；

当 $r(A)\neq r([A \mid b])$ 时，方程组无解.

③非齐次线性方程组的通解.

设 $r(A)=r<n$，若 $\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_{n-r}$ 为方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 相应的齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，$\boldsymbol{\eta}^*$ 为方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个特解，则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\eta}^*+k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r},$$

其中 $k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_{n-r}$ 为任意常数.

【注】①与方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 对应的齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 称为非齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的导出组，故上述结论可简述为非齐次线性方程组的通解等于它的一个特解与其导出组的通解之和.

②当未知数个数等于方程个数，且 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 时，可用克拉默法则求解.

2. 解线性方程组

（1）先用初等行变换将齐次方程组的系数矩阵或非齐次方程组的增广矩阵化为行阶梯形矩阵，再用方程组理论判别、求解.

【注】若不能化成（或很难化成）阶梯形，只要所得矩阵对应的方程组与原方程组同解且易于求解，不化成阶梯形也罢.

（2）“方形”（方程个数 = 未知数个数）的方程组.

若方程组的系数矩阵中含参数 λ，且系数行列式等于 $f(\lambda)$，则

① $|\boldsymbol{A}|\neq 0\Leftrightarrow$方程组有唯一解$\Leftrightarrow f(\lambda)\neq 0$. 此时可用克拉默法则求解.

② $|\boldsymbol{A}|=0\Leftrightarrow f(\lambda)=0$. 求出所有零点后，逐个代入方程组，再求解.

③注意这个知识点的变体形式：含参数的向量之间的线性关系.

例 5.1 已知齐次线性方程组

$$\begin{cases}(a_1+b)x_1+a_2x_2+a_3x_3+\cdots+a_nx_n=0,\\ a_1x_1+(a_2+b)x_2+a_3x_3+\cdots+a_nx_n=0,\\ a_1x_1+a_2x_2+(a_3+b)x_3+\cdots+a_nx_n=0,\\ \qquad\cdots\cdots\\ a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\cdots+(a_n+b)x_n=0,\end{cases}$$

其中$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\neq 0$，讨论 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ 和 b 满足何种关系时，

（1）方程组仅有零解；

（2）方程组有非零解，并求此方程组的一个基础解系.

【解】方程组的系数行列式

1倍加至　1倍加至　⋯　1倍加至　提出 $b+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_1+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ a_1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n\\ a_1 & a_2 & a_3+b & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ b+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n\\ b+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i & a_2 & a_3+b & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ b+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix}$$

(−1)倍加至　(−1)倍加至　(−1)倍加至

$$=\left(b+\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ 1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n\\ 1 & a_2 & a_3+b & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix}=\left(b+\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ 0 & b & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & b & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b \end{vmatrix}$$

$$=b^{n-1}\left(b+\sum_{i=1}^{n}a_i\right).$$

（1）当 $b\neq 0$ 且 $b+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\neq 0$ 时，$r(\boldsymbol{A})=n$，方程组仅有零解．

（2）当 $b=0$ 时，原方程组的同解方程组为 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=0$，由 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\neq 0$ 可知，$a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 不全为零，不妨设 $a_1\neq 0$，得原方程组的一个基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\left[-\frac{a_2}{a_1},1,0,\cdots,0\right]^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\left[-\frac{a_3}{a_1},0,1,\cdots,0\right]^{\mathrm{T}},\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_{n-1}=\left[-\frac{a_n}{a_1},0,0,\cdots,1\right]^{\mathrm{T}}.$$

当 $b=-\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$ 时，有 $b\neq 0$，原方程组的系数矩阵可化为

$(-a_2)$倍加至　$(-a_3)$倍加至　⋮　$(-a_n)$倍加至

$$\begin{bmatrix} a_1-\sum\limits_{i=1}^{n}a_i & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

由此得原方程组的同解方程组为 $x_2=x_1$，$x_3=x_1$，$\cdots$，$x_n=x_1$，故原方程组的一个基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}=[1,1,\cdots,1]^{\mathrm{T}}$.

【注】本题是 n 个方程 n 个未知数，且系数矩阵是特殊形式，故可利用行列式分析解的情况．

例 5.2 设 $A=\begin{bmatrix}\lambda&1&1\\0&\lambda-1&0\\1&1&\lambda\end{bmatrix}$，$b=\begin{bmatrix}a\\1\\1\end{bmatrix}$. 已知线性方程组 $Ax=b$ 存在两个不同的解 .

（1）求 λ，a；

（2）求方程组 $Ax=b$ 的通解 .

即有无穷多解

【解】（1）因为非齐次线性方程组 $Ax=b$ 有两个不同的解，所以系数行列式

$$|A|=\begin{vmatrix}\lambda&1&1\\0&\lambda-1&0\\1&1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0,$$

解得 $\lambda=-1$ 或 1.

当 $\lambda=1$ 时，对方程组 $Ax=b$ 的增广矩阵作初等行变换，有

$$[A\mid b]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&a\\0&0&0&1\\1&1&1&1\end{array}\right]\xrightarrow{\text{互换}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&0&0&1\\1&1&1&a\end{array}\right]\xrightarrow{(-1)\text{倍加至}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&a-1\end{array}\right],$$

则其增广矩阵的秩为 2，系数矩阵 A 的秩为 1，方程组 $Ax=b$ 无解，故 $\lambda=1$ 应舍去 .

当 $\lambda=-1$ 时，对方程组 $Ax=b$ 的增广矩阵作初等行变换，有

$$[A\mid b]=\left[\begin{array}{ccc|c}-1&1&1&a\\0&-2&0&1\\1&1&-1&1\end{array}\right]\xrightarrow{\text{互换}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&1\\0&-2&0&1\\-1&1&1&a\end{array}\right]$$

1倍加至

1倍加至

$$\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&1\\0&-2&0&1\\0&0&0&a+2\end{array}\right]\xrightarrow{\times(-1)}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&1\\0&2&0&-1\\0&0&0&a+2\end{array}\right]=B.$$

因为方程组 $Ax=b$ 有解，所以 $a+2=0$，即 $a=-2$.

综上，$\lambda=-1$，$a=-2$.

（2）当 $\lambda=-1$，$a=-2$ 时，继续对（1）中的矩阵 B 作初等行变换，得

$$B\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&\frac{3}{2}\\0&1&0&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{array}\right],$$

于是方程组 $Ax=b$ 的通解为

$$x=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3\\-1\\0\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},$$

其中 k 为任意常数 .

3. 公共解与同解问题

（1）公共解．

①齐次线性方程组 $A_{m\times n}x=0$ 和 $B_{m\times n}x=0$ 的公共解是满足方程组$\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}x=0$ 的解，即联立方程的解．同理，可求 $Ax=\alpha$ 与 $Bx=\beta$ 的公共解．

②求出 $A_{m\times n}x=0$ 的通解 $k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_s\xi_s$，代入 $B_{m\times n}x=0$，求出 k_i（$i=1,2,\cdots,s$）之间的关系，代回 $A_{m\times n}x=0$ 的通解，即得公共解．

③若给出 $A_{m\times n}x=0$ 的基础解系 ξ_1，ξ_2，…，ξ_s 与 $B_{m\times n}x=0$ 的基础解系 η_1，η_2，…，η_t，则公共解

$$\gamma=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_s\xi_s=l_1\eta_1+l_2\eta_2+\cdots+l_t\eta_t,$$

即

$$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_s\xi_s-l_1\eta_1-l_2\eta_2-\cdots-l_t\eta_t=0,$$

解此式，求出 k_i 或 l_j，$i=1,2,\cdots,s$；$j=1,2,\cdots,t$，即可写出 γ.

【注】①对于齐次线性方程组 $Ax=0$ 和 $Bx=0$，因其必有零公共解，要求公共解，主要着眼于求非零公共解．

② $Ax=0$ 和 $Bx=0$ 有非零公共解 $\Leftrightarrow$ 存在不全为零的数 k_1，k_2，…，k_s 和 l_1，l_2，…，l_t，使得

$$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_s\xi_s=l_1\eta_1+l_2\eta_2+\cdots+l_t\eta_t.$$

（2）同解方程组．

若两个方程组 $A_{m\times n}x=0$ 和 $B_{s\times n}x=0$ 有完全相同的解，则称它们为同解方程组．

于是，

$Ax=0$，$Bx=0$ 是同解方程组

$\Leftrightarrow$ $Ax=0$ 的解满足 $Bx=0$，且 $Bx=0$ 的解满足 $Ax=0$（互相把解代入满足方程组即可）

$\Leftrightarrow r(A)=r(B)$，且 $Ax=0$ 的解满足 $Bx=0$（或 $Bx=0$ 的解满足 $Ax=0$）

$\Leftrightarrow r(A)=r(B)=r\left(\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}\right)$（三秩相同较方便）．

例 5.3 若齐次线性方程组

$$(\text{I})\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=0,\\2x_1+3x_2+5x_3=0,\\x_1+x_2+ax_3=0\end{cases}$$

和

$$(\text{II})\begin{cases}x_1+bx_2+2x_3=0,\\2x_1+b^2x_2+3x_3=0\end{cases}$$

同解，则（　　）．

（A）$a=1$，$b=2$　　　　（B）$a=2$，$b=1$

（C）$a=-1$，$b=2$　　　　（D）$a=2$，$b=-1$

【解】 应选（B）.

上述两个方程组的系数矩阵分别记为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 同解，故

$$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=r\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{bmatrix}\right).$$

注意到 $\boldsymbol{A}$ 中有 2 阶子式 $\begin{vmatrix}1&2\\2&3\end{vmatrix}\neq 0$，于是 $r(\boldsymbol{A})\geqslant 2$，而 $\boldsymbol{B}$ 只有两行，则 $r(\boldsymbol{B})\leqslant 2$，故

$$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=r\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{bmatrix}\right)=2.$$

因为 $r(\boldsymbol{A})=2$，所以 $|\boldsymbol{A}|=0$，即

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&5\\1&1&a\end{vmatrix}=2-a=0,$$

故 $a=2$. 又 $r\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{bmatrix}\right)=2$，对 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{bmatrix}$ 作初等行变换，有

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{bmatrix}=\begin{array}{r}\\(-1)\text{倍加至}\\\\\\(-1)\text{倍加至}\end{array}\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&5\\1&1&2\\1&b&2\\2&b^2&3\end{bmatrix}\begin{array}{l}\\(-2)\text{倍加至}\\\\\\(-2)\text{倍加至}\end{array}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-1&-1\\0&-1&-1\\0&b-2&-1\\0&b^2-4&-3\end{bmatrix},$$

故 $\begin{cases}b-2=-1,\\b^2-4=-3,\end{cases}$ 解得 $b=1$.

例 5.4 设 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有基础解系

$$\boldsymbol{\alpha}_1=[1,\ 1,\ 2,\ 1]^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\alpha}_2=[0,\ -3,\ 1,\ 0]^{\mathrm{T}},$$

$\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 有基础解系

$$\boldsymbol{\beta}_1=[1,\ 3,\ 0,\ 2]^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\beta}_2=[1,\ 2,\ -1,\ a]^{\mathrm{T}},$$

若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 没有非零公共解，则 a 的取值范围为________.

【解】 应填 $(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$.

由题设知，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有通解 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 有通解 $k_3\boldsymbol{\beta}_1+k_4\boldsymbol{\beta}_2$.

$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 和 $\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$ 没有非零公共解，故不存在不全为 0 的数 k_1，k_2，k_3，k_4，使得

$$\boldsymbol{\eta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2=k_3\boldsymbol{\beta}_1+k_4\boldsymbol{\beta}_2,$$

即 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2-k_3\boldsymbol{\beta}_1-k_4\boldsymbol{\beta}_2=\mathbf{0}$ 只有零解．因

(−1)倍加至　(−1)倍加至　(−2)倍加至

$$[\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ -\boldsymbol{\beta}_1,\ -\boldsymbol{\beta}_2]=\begin{bmatrix}1&0&-1&-1\\1&-3&-3&-2\\2&1&0&1\\1&0&-2&-a\end{bmatrix}$$

3倍加至　互换

$$\to\begin{bmatrix}1&0&-1&-1\\0&-3&-2&-1\\0&1&2&3\\0&0&-1&1-a\end{bmatrix}$$

$$\times\frac{1}{4}\ \to\begin{bmatrix}1&0&-1&-1\\0&1&2&3\\0&0&4&8\\0&0&-1&1-a\end{bmatrix}$$

1倍加至

$$\to\begin{bmatrix}1&0&-1&-1\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&-1&1-a\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&0&-1&-1\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&3-a\end{bmatrix}.$$

故当 $a\neq3$ 时，$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ -\boldsymbol{\beta}_1,\ -\boldsymbol{\beta}_2)=4$，方程组 $[\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ -\boldsymbol{\beta}_1,\ -\boldsymbol{\beta}_2]\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 只有零解，此时 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$，$\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$ 没有非零公共解．

二　抽象型方程组

1. 解的判定

（1）$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$.

当 $r(\boldsymbol{A})=n$ 时，方程组只有零解；

当 $r(\boldsymbol{A})<n$ 时，方程组有无穷多解．

（2）$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$.

当 $r(\boldsymbol{A})\neq r([\boldsymbol{A}\ \vdots\ \boldsymbol{b}])$ 时，方程组无解；

当 $r(\boldsymbol{A})=r([\boldsymbol{A}\ \vdots\ \boldsymbol{b}])=n$ 时，方程组有唯一解；

当 $r(\boldsymbol{A})=r([\boldsymbol{A}\ \vdots\ \boldsymbol{b}])=r<n$ 时，方程组有无穷多解．

例 5.5 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，则以下命题中

①若 $Ax=0$ 只有零解，则 $Ax=b$ 必有解；

②若 $Ax=0$ 有无穷多解，则 $Ax=b$ 必有解；

③若 $Ax=b$ 有唯一解，则 $Ax=0$ 只有零解；

④若 $Ax=b$ 有无穷多解，则 $Ax=0$ 必有无穷多解 .

所有真命题的序号为（　　）.

（A）①②　　（B）②③

（C）③④　　（D）①③④

【解】应选（C）.

若 $Ax=0$ 只有零解，则由 $r(A)=n$（列满秩）不能得到 $r([A \vdots b])=n$，故 $Ax=b$ 可能有解，可能无解 . ①不正确 .

若 $Ax=0$ 有无穷多解（有非零解），则由 $r(A)<n$（列不满秩）不能得到 $r(A)=r([A \vdots b])$，故 $Ax=b$ 可能有解，可能无解 . ②不正确 .

若 $Ax=b$ 有唯一解，则

$$r(A)=r([A \vdots b])=n,$$

故 $Ax=0$ 只有零解 . ③正确 .

若 $Ax=b$ 有无穷多解，则

$$r(A)=r([A \vdots b])<n,$$

故 $Ax=0$ 有非零解 . ④正确 .

2. 基础解系与解的结构

（1）基础解系 .

基础解系需满足 3 个条件：①是解；②线性无关；③ $s=n-r(A)$.

（2）解的结构 .

①齐次线性方程组 $Ax=0$ 有基础解系 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$，则通解为

$$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r},$$

其中 $k_1, k_2, \cdots, k_{n-r}$ 是任意常数 .

②非齐次线性方程组 $Ax=b$ 有特解 η，对应的齐次线性方程组 $Ax=0$ 有基础解系 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$，则 $Ax=b$ 的通解为

$$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}+\eta,$$

其中 $k_1, k_2, \cdots, k_{n-r}$ 是任意常数 .

【注】① $\eta, \eta+\xi_1, \eta+\xi_2, \cdots, \eta+\xi_{n-r}$ 是 $Ax=b$ 的 $n-r+1$ 个线性无关的解 .

②方程组 $Ax=b$ 的任一解均可由 $\eta, \eta+\xi_1, \cdots, \eta+\xi_{n-r}$ 线性表示 .

例 5.6 设 A 是 3 阶非零矩阵，满足 $A^2=O$，若非齐次线性方程组 $Ax=b$ 有解，则其线性无关解向量的个数是（　　）.

（A）1　　　　（B）2

（C）3　　　　（D）4

【解】应选（C）.

由于 A 是 3×3 矩阵，$A^2=AA=O$，故 $r(A)+r(A)\leqslant 3$，得 $r(A)\leqslant 1$. 又 $A\neq O$，则 $r(A)\geqslant 1$，从而知 $r(A)=1$. 齐次方程组 $Ax=0$ 的基础解系中线性无关解向量的个数为 $n-r(A)=3-1=2$，故由上述的注可知，非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的线性无关解向量的个数是 3，故选（C）.

例 5.7 设 3 阶矩阵 $A=[\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3]$ 有 3 个不同的特征值，且 $\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$.

（1）证明 $r(A)=2$；

（2）若 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，求方程组 $Ax=\beta$ 的通解.

（1）【证】由 $\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$，知 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$ 线性相关，故 $r(A)\leqslant 2$.

又因为 A 有 3 个不同的特征值，故 A 必可相似对角化，于是 A 至少有 2 个不为零的特征值，从而 $r(A)\geqslant 2$. 故 $r(A)=2$.　由第4讲“二”的“公式（17）”可知

（2）【解】由 $\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3=0$，知 $A\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}=0$，故 $\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}$ 为方程组 $Ax=0$ 的一个解.

又 $r(A)=2$，所以 $\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}$ 为 $Ax=0$ 的一个基础解系.

因为 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=A\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$，所以 $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ 为方程组 $Ax=\beta$ 的一个特解. 故 $Ax=\beta$ 的通解为

$$x=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix},$$

其中 k 为任意常数.

3. 解与系数的关系

若齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\ \qquad\cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0\end{cases}$$

有解 $\beta=[b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n]^{\mathrm T}$，即

$$a_{i1}b_1+a_{i2}b_2+\cdots+a_{in}b_n=0\ (i=1,2,\cdots,m),$$

记 $\boldsymbol{\alpha}_i=[a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}]\ (i=1,2,\cdots,m)$，上式即为

$$\boldsymbol{\alpha}_i\boldsymbol{\beta}=0\ (i=1,2,\cdots,m),$$

故系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量与 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解向量正交.

例 5.8 设 $\boldsymbol{\alpha}_i=[a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}]\ (i=1,2,\cdots,m)$ 为齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\\quad\cdots\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0\end{cases}\qquad ①$$

的系数矩阵的行向量，已知方程组①有非零解 $\boldsymbol{\beta}=[b_1,b_2,\cdots,b_n]^{\mathrm{T}}$，且行向量组的秩 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)=m$. 证明：向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 线性无关.

【证】设存在数 $k_0,k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得

$$k_0\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}+k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0},\qquad ②$$

②式两端的右边乘 $\boldsymbol{\beta}$，得

$$k_0\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}+k_1\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\beta}+k_2\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\beta}+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m\boldsymbol{\beta}=0.\qquad ③$$

因 $\boldsymbol{\beta}$ 是方程组①的非零解，故有 $\boldsymbol{\alpha}_i\boldsymbol{\beta}=0\ (i=1,2,\cdots,m)$，且 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\neq0$，从而由③式得 $k_0\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=0$，故 $k_0=0$.

将 $k_0=0$ 代入②式，得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}.$$

由于 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)=m$，即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，故 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$，又 $k_0=0$，故向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 线性无关.

三 线性方程组的几何意义（仅数学一）

设线性方程组

$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=d_1,\\a_2x+b_2y+c_2z=d_2,\\a_3x+b_3y+c_3z=d_3.\end{cases}$$

表达平面Π_i的方向　　　　表达确定方向后Π_i的位置

记 $$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{bmatrix},\quad \overline{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}a_1&b_1&c_1&d_1\\a_2&b_2&c_2&d_2\\a_3&b_3&c_3&d_3\end{bmatrix},$$

且 $\Pi_i\ (i=1,2,3)$ 表示第 i 张平面：$a_ix+b_iy+c_iz=d_i$，$\boldsymbol{\alpha}_i\ (i=1,2,3)$ 表示第 i 张平面的法向量 $[a_i,b_i,c_i]$，即 $\boldsymbol{A}$ 的行向量，$\boldsymbol{\beta}_i\ (i=1,2,3)$ 表示 $[a_i,b_i,c_i,d_i]$，即 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 的行向量.

【注】以下 $i \neq j$.

① $\boldsymbol{\alpha}_i$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_j$ 线性相关 $\Leftrightarrow \Pi_i$ 与 Π_j 平行或重合.

② $\boldsymbol{\alpha}_i$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_j$ 线性无关 $\Leftrightarrow \Pi_i$ 与 Π_j 相交.

③ $\boldsymbol{\beta}_i$ 与 $\boldsymbol{\beta}_j$ 线性相关 $\Leftrightarrow \Pi_i$ 与 Π_j 重合.

如 $\Pi_1: x+y+z=1$，$\Pi_2: 2x+2y+2z=2$，其中

$$\boldsymbol{\beta}_1=[1,\ 1,\ 1,\ 1],\ \boldsymbol{\beta}_2=[2,\ 2,\ 2,\ 2],$$

$\boldsymbol{\beta}_1$ 与 $\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关，故 Π_1 与 Π_2 重合.

④ $\boldsymbol{\beta}_i$ 与 $\boldsymbol{\beta}_j$ 线性无关 $\Leftrightarrow \Pi_i$ 与 Π_j 不重合.

如 $\Pi_1: x+y+z=0$，$\Pi_2: x+y+z=1$，其中

$$\boldsymbol{\beta}_1=[1,\ 1,\ 1,\ 0],\ \boldsymbol{\beta}_2=[1,\ 1,\ 1,\ 1],$$

$\boldsymbol{\beta}_1$ 与 $\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关，故 Π_1 与 Π_2 不重合.

于是可按不同情形列表 5-1 和表 5-2.

表 5-1　方程组有解的情形

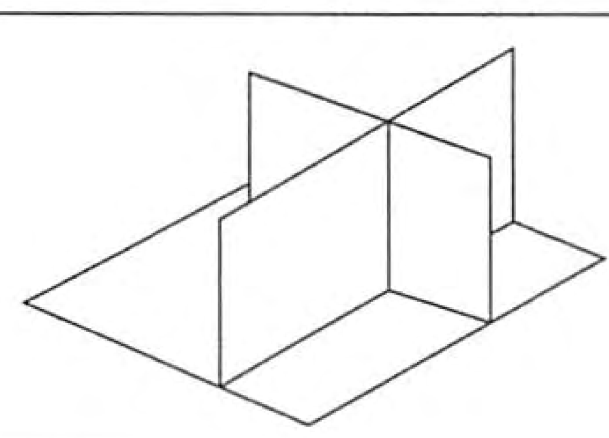
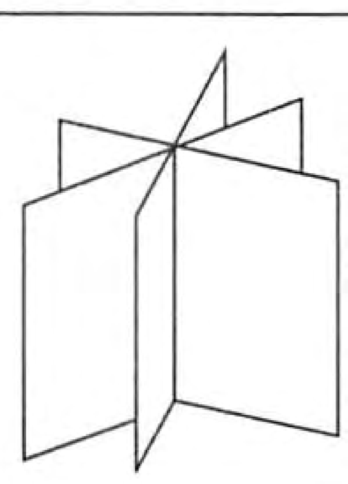
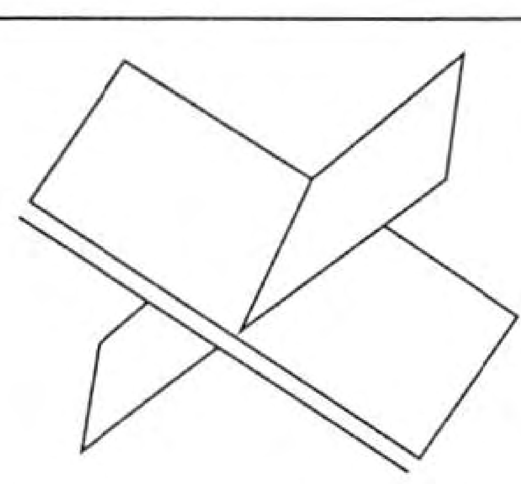
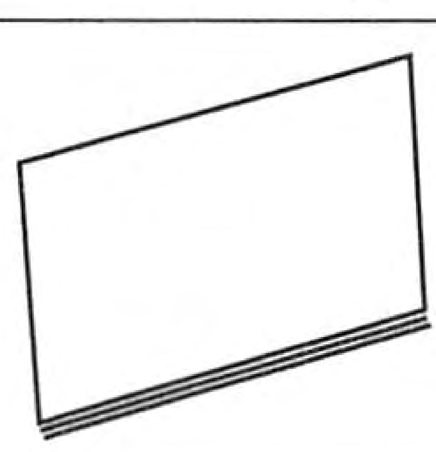
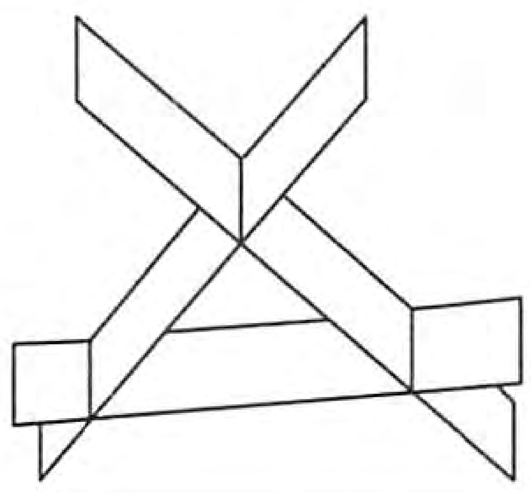
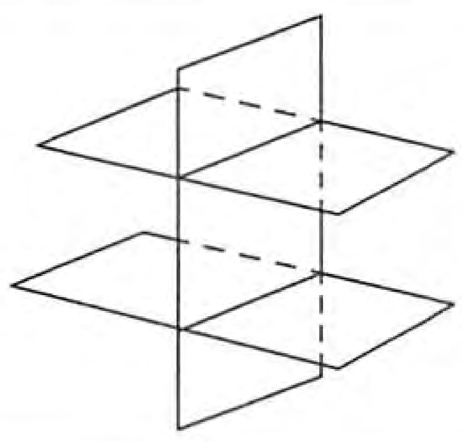
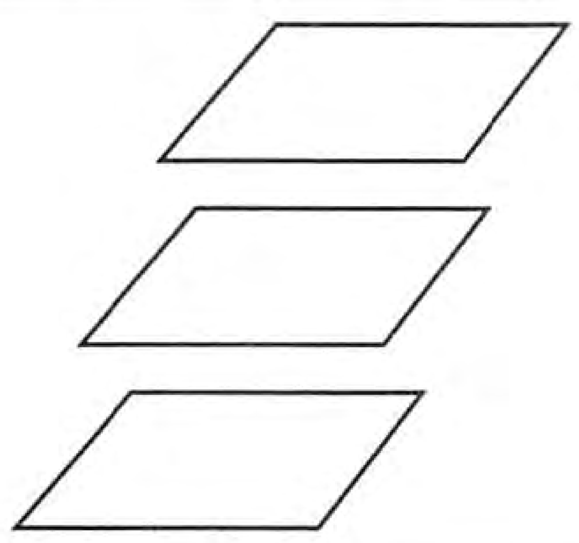
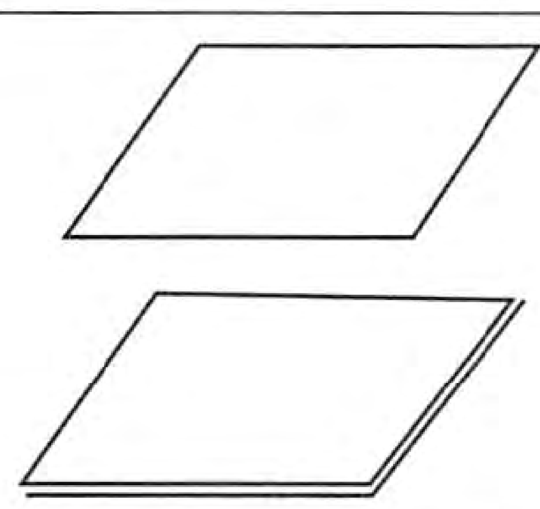
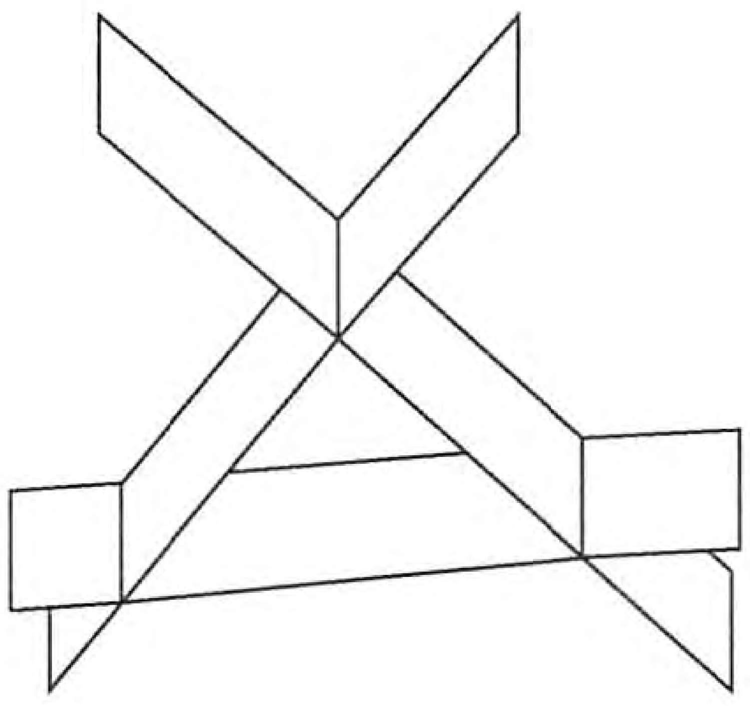
图形	几何意义	代数表达
	三张平面相交于一点	$r(A)=r(\overline{A})=3$
	三张平面相交于一条直线	$r(A)=r(\overline{A})=2$， 且 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$ 中任意两个向量都线性无关 任何两个面都不重合
	两张平面重合， 第三张平面与之相交	$r(A)=r(\overline{A})=2$， 且 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$ 中有两个向量线性相关 存在两个面重合
	三张平面重合	$r(A)=r(\overline{A})=1$

表 5–2 方程组无解的情形

图形	几何意义	代数表达
	三张平面两两相交，且交线相互平行	$r(A)=2$，$r(\overline{A})=3$，且 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 中任意两个向量都线性无关 任何两个面都相交
	两张平面平行，第三张平面与它们相交	$r(A)=2$，$r(\overline{A})=3$，且 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 中有两个向量线性相关 存在两个面平行但不重合
	三张平面相互平行但不重合	$r(A)=1$，$r(\overline{A})=2$，且 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$ 中任意两个向量都线性无关 任何两个面都不重合
	两张平面重合，第三张平面与它们平行但不重合	$r(A)=1$，$r(\overline{A})=2$，且 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$ 中有两个向量线性相关 存在两个面重合

例 5.9 如图所示，有三张平面两两相交，交线相互平行，它们的方程

$$a_{i1}x+a_{i2}y+a_{i3}z=d_i\ (i=1,\ 2,\ 3)$$



组成的线性方程组的系数矩阵和增广矩阵分别记为 A，$\overline{A}$，则（　　）.

（A）$r(A)=2$，$r(\overline{A})=3$

（B）$r(A)=2$，$r(\overline{A})=2$

（C）$r(A)=1$，$r(\overline{A})=2$

（D）$r(A)=1$，$r(\overline{A})=1$

【解】应选（A）.

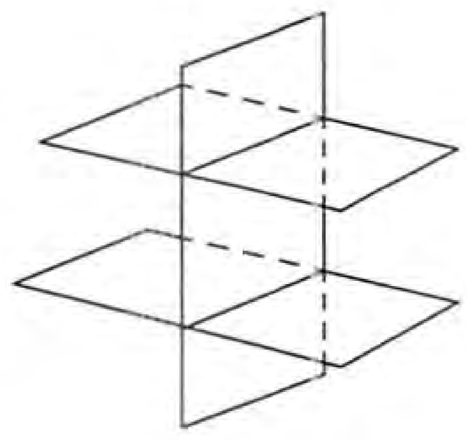
根据表 5–2 中第一种情形，知 $r(A)=2$，$r(\overline{A})=3$，故选（A）.

【注】此题是 2019 年数学一考研真题，所给选项只讨论了 $r(A)$ 与 $r(\overline{A})$，事实上，在表 5–2 中第二种情形亦是 $r(A)=2$，$r(\overline{A})=3$，故还可考更为细致的问题.

例 5.10 如图所示，有三张平面，其中有两张平面平行，第三张平面与它们相交，其方程

$$a_{i1}x+a_{i2}y+a_{i3}z=d_i\ (i=1，2，3)$$

组成的线性方程组的系数矩阵和增广矩阵分别记为 $\boldsymbol{A}$，$\overline{\boldsymbol{A}}$，$\boldsymbol{\alpha}_i=[a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}]$，$i=1，2，3$，$j=1，2，3$，则（　　）.



（A）$r(\boldsymbol{A})=2$，$r(\overline{\boldsymbol{A}})=2$，且任给 $i\neq j$，均有 $r(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j)=2$

（B）$r(\boldsymbol{A})=2$，$r(\overline{\boldsymbol{A}})=2$，且存在 $i\neq j$，使得 $r(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j)=1$

（C）$r(\boldsymbol{A})=2$，$r(\overline{\boldsymbol{A}})=3$，且任给 $i\neq j$，均有 $r(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j)=2$

（D）$r(\boldsymbol{A})=2$，$r(\overline{\boldsymbol{A}})=3$，且存在 $i\neq j$，使得 $r(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j)=1$

【解】应选（D）.

由表 5-2 中第二种情形可知，$r(\boldsymbol{A})=2$，$r(\overline{\boldsymbol{A}})=3$，且在 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 中存在两个向量线性相关，即存在 $i\neq j$，使得 $r(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j)=1$. 选（D）.