第8讲 一元函数积分学的概念与性质

知识结构

- “祖孙三代”$\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t, f(x), f'(x)\right)$的奇偶性、周期性 —— $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t, f(x), f'(x)$ 的 7 条关系
- 积分比大小
  - 用公式或几何意义
  - 用保号性
    - 看正负
    - 作差
- 定积分定义
  - 基本形(能凑成$\frac{i}{n}$)
    - $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f\left(0+\frac{1-0}{n}i\right)\frac{1-0}{n}=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$
    - $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=0}^{n-1} f\left(0+\frac{1-0}{n}i\right)\frac{1-0}{n}=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$
  - 放缩形(凑不成$\frac{i}{n}$)
    - 夹逼准则
    - 放缩后再凑$\frac{i}{n}$
  - 变量形 —— $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f\left(0+\frac{x-0}{n}i\right)\frac{x-0}{n}=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$
- 反常积分的判敛
  - 概念
  - 判别

一 “祖孙三代”$\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t, f(x), f'(x)\right)$的奇偶性、周期性

①$f(x)$为可导的奇函数$\Rightarrow f'(x)$为偶函数.

②$f(x)$为可导的偶函数$\Rightarrow f'(x)$为奇函数.

③$f(x)$是可导的且以T为周期的周期函数$\Rightarrow f'(x)$是以T为周期的周期函数.

④$f(x)$为可积的奇函数$\Rightarrow \begin{cases}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \text{ 为偶函数},\\ \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \text{ 为偶函数}(a\neq 0).\end{cases}$

【注】(1) 若$f(x)$连续，则$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+C$也是偶函数，故$f(x)$的全体原函数均为偶函数.

(2) 只需要被积函数可积，即可有变限积分的相关性质. 只有被积函数连续时，才谈原函数的相关性质，以下同.

$$⑤f(x)\text{ 为可积的偶函数}\Rightarrow\begin{cases}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\text{ 为奇函数},\\ \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t(a\neq 0)\begin{cases}\text{为奇函数,若}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t,\\ \text{为非奇非偶函数,若}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\neq\int_0^x f(t)\mathrm{d}t.\end{cases}\end{cases}$$

【注】若 $f(x)$ 连续，则 $f(x)$ 的全体原函数中，只有 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是奇函数.

⑥$f(x)$ 是可积的且以 T 为周期的周期函数，则 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是以 T 为周期的周期函数 $\Leftrightarrow\int_0^T f(x)\mathrm{d}x=0$.

【注】$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_a^0 f(t)\mathrm{d}t$ 亦是以 T 为周期的周期函数$(a\neq 0)$.

⑦$f(x)$ 是可积的且以 T 为周期的周期函数 $\Rightarrow\int_0^T f(x)\mathrm{d}x=\int_a^{a+T}f(x)\mathrm{d}x$，$a$ 为任意常数.

例 8.1 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{\sin x}+\mathrm{e}^{-\sin x}$，则 $f'''(2\pi)=$______.

【解】应填 0.

因为 $f(x)$ 为偶函数，则 $f'''(x)$ 为奇函数，故 $f'''(0)=0$，又因为 $f(x)$ 以 2π 为周期，故

$$f'''(2\pi)=f'''(0)=0.$$

例 8.2 设 $f(t)$ 为连续函数，a 是常数，则下述命题正确的是(　　).

(A) 若 $f(t)$ 为奇函数，则 $\int_a^x\mathrm{d}y\int_0^y f(t)\mathrm{d}t$ 是 x 的奇函数

(B) 若 $f(t)$ 为偶函数，则 $\int_0^x\mathrm{d}y\int_a^y f(t)\mathrm{d}t$ 是 x 的奇函数

(C) 若 $f(t)$ 为奇函数，则 $\int_0^x\mathrm{d}y\int_y^x f(t)\mathrm{d}t$ 是 x 的奇函数

(D) 若 $f(t)$ 为偶函数，则 $\int_0^x\mathrm{d}y\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是 x 的奇函数

【解】应选(C).

设 $F(t)$ 是 $f(t)$ 的一个原函数. 对于(C)，若 $f(t)$ 是奇函数，则 $f(t)$ 的任一原函数都是偶函数，所以 $F(t)$ 是偶函数.

$$\int_0^x\mathrm{d}y\int_y^x f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x[F(x)-F(y)]\mathrm{d}y=xF(x)-\int_0^x F(y)\mathrm{d}y,$$

因为 $F(x)$ 为偶函数，所以 $xF(x)$ 为 x 的奇函数，$\int_0^x F(y)\mathrm{d}y$ 也是 x 的奇函数，所以 $\int_0^x\mathrm{d}y\int_y^x f(t)\mathrm{d}t$

为 x 的奇函数,(C) 正确.

关于选项(A),(B),(D) 为什么不正确,解释如下.

对于(A),$f(t)$ 为奇函数,则 $F(y)=\int_0^y f(t)\mathrm{d}t$ 是 y 的偶函数,但 $\int_a^x F(y)\mathrm{d}y$ 不一定是 x 的奇函数;

对于(B),$f(t)$ 为偶函数,则 $F(y)=\int_a^y f(t)\mathrm{d}t$ 不一定是 y 的奇函数,不再有继续研究的资格了;

对于(D),$f(t)$ 为偶函数,则 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 为 x 的奇函数,$\int_0^x F(x)\mathrm{d}y=xF(x)$ 为 x 的偶函数.

例 8.3 设一阶线性齐次微分方程 $y'+p(x)y=0$ 的系数 $p(x)$ 是以 T 为周期的连续函数,则"该方程的非零解以 T 为周期"是"$\int_0^T p(x)\mathrm{d}x=0$"的(　　).

(A) 充分非必要条件　　(B) 必要非充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既非充分也非必要条件

【解】应选(C).

$y'+p(x)y=0$ 的非零解为 $y=Ce^{-\int p(x)\mathrm{d}x}=Ce^{-\int_0^x p(t)\mathrm{d}t}$,其中 C 是任意非零常数,于是 y 以 T 为周期 $\Leftrightarrow Ce^{-\int_0^x p(t)\mathrm{d}t}$ 以 T 为周期 $\Leftrightarrow \int_0^x p(t)\mathrm{d}t$ 以 T 为周期 $\Leftrightarrow \int_0^T p(x)\mathrm{d}x=0$.

由本讲的"一⑥"可得

二 积分比大小

1. 用公式或几何意义

设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数,则

① $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$.

② $\int_{x_0}^x f'(t)\mathrm{d}t=f(x)-f(x_0)$.

③ $\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x, & f(x)=f(-x),\\ 0, & f(x)=-f(-x).\end{cases}$

2. 用保号性

① 看正负. 如 $|x|\geqslant 0$;当 $x\in[\pi,2\pi]$ 时,$\sin x\leqslant 0$ 等.

② 作差. I_1-I_2,再换元(常用 $x=\pi\pm t$,$x=\dfrac{\pi}{2}\pm t$).

读者应熟记下列常用诱导公式.

① $\sin(\pi \pm t) = \mp \sin t$.

② $\cos(\pi \pm t) = -\cos t$.

③ $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} \pm t\right) = \cos t$.

④ $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} \pm t\right) = \mp \sin t$.

例 8.4 已知 $I_1 = \int_0^1 \dfrac{x}{2(1+\cos x)}\mathrm{d}x$，$I_2 = \int_0^1 \dfrac{\ln(1+x)}{1+\cos x}\mathrm{d}x$，$I_3 = \int_0^1 \dfrac{2x}{1+\sin x}\mathrm{d}x$，则（　　）.

(A) $I_1 < I_2 < I_3$　　(B) $I_2 < I_1 < I_3$

(C) $I_1 < I_3 < I_2$　　(D) $I_3 < I_2 < I_1$

【解】应选(A).

由例 6.14 得，$I_1 < I_2 < I_3$. 故选(A).

例 8.5 设 $I_k = \int_0^{k\pi} e^{x^2}\sin x\,\mathrm{d}x\ (k=1,2,3)$，则（　　）.

(A) $I_1 < I_2 < I_3$　　(B) $I_3 < I_2 < I_1$

(C) $I_2 < I_3 < I_1$　　(D) $I_2 < I_1 < I_3$

【解】应选(D).

首先，由 $I_2 = I_1 + \int_\pi^{2\pi} e^{x^2}\sin x\,\mathrm{d}x$ 及 $\int_\pi^{2\pi} e^{x^2}\sin x\,\mathrm{d}x < 0$，可得 $I_2 < I_1$.

其次，$I_3 = I_1 + \int_\pi^{3\pi} e^{x^2}\sin x\,\mathrm{d}x$，其中

$$\begin{aligned}\int_\pi^{3\pi} e^{x^2}\sin x\,\mathrm{d}x &= \int_\pi^{2\pi} e^{x^2}\sin x\,\mathrm{d}x + \underbrace{\int_{2\pi}^{3\pi} e^{x^2}\sin x\,\mathrm{d}x}_{\text{令 } x=y+\pi} \\ &= \int_\pi^{2\pi} e^{x^2}\sin x\,\mathrm{d}x + \int_\pi^{2\pi} e^{(y+\pi)^2}\underbrace{\sin(y+\pi)}_{\sin(y+\pi)=-\sin y}\mathrm{d}y \\ &= \int_\pi^{2\pi}\left[e^{x^2} - e^{(x+\pi)^2}\right]\sin x\,\mathrm{d}x > 0,\end{aligned}$$

故 $I_3 > I_1$，从而 $I_2 < I_1 < I_3$，故选(D).

【注】作为选择题，可用几何意义，大致画出 $y = e^{x^2}\sin x$ 在 $[0,3\pi]$ 上的图像，如图 8-1 所示. 其中 $0 < S_1 < S_2 < S_3$，则

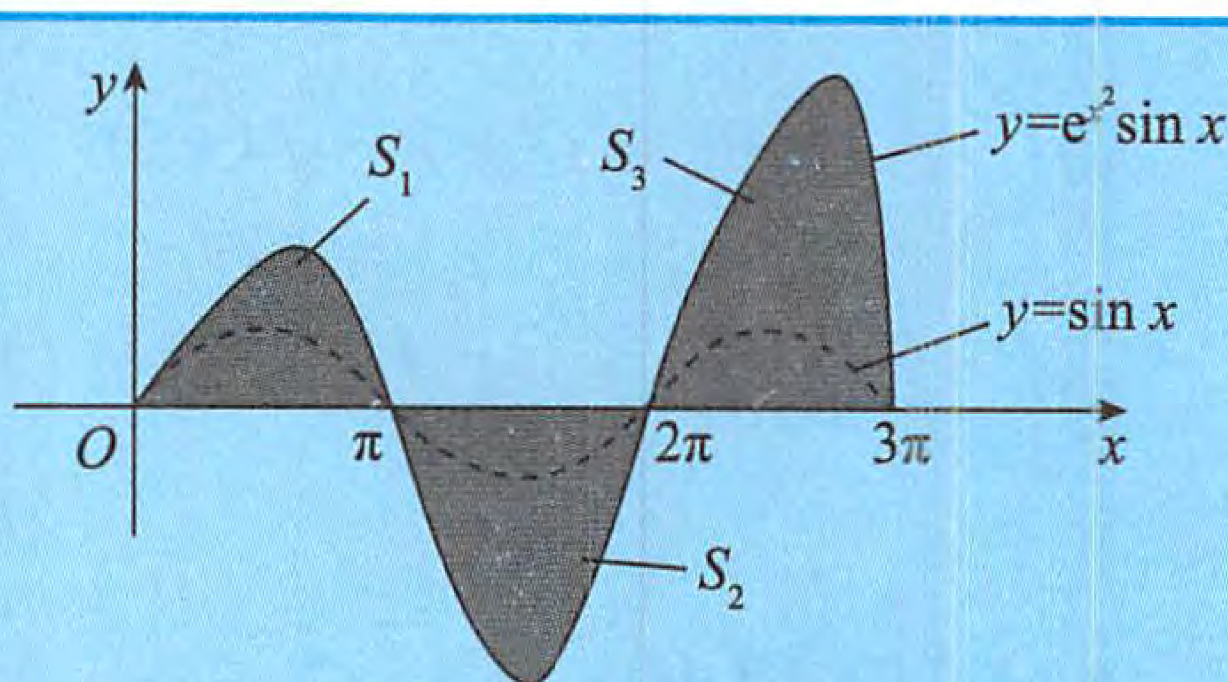

图 8-1

$$I_1 = \int_0^\pi e^{x^2}\sin x\,\mathrm{d}x = S_1 > 0,$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} e^{x^2}\sin x\,\mathrm{d}x = S_1 + (-S_2) = S_1 - S_2 < 0,$$

$$I_3 = \int_0^{3\pi} e^{x^2}\sin x\,\mathrm{d}x = S_1 + (-S_2) + S_3 = S_1 + (S_3 - S_2) > S_1 > 0.$$

综上所述，$I_2 < I_1 < I_3$，故选(D).

三 定积分定义

有一类数列和的极限计算，可用定积分定义来处理.

1. 基本形(能凑成$\frac{i}{n}$)

若数列通项中含下面四种形式：

①$\frac{i}{n}$；

②$n+i(an+bi,ab\neq0)$；

③n^2+i^2；

④n^2+ni.

如 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n+3}+\frac{1}{2n+6}+\cdots+\frac{1}{2n+3n}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{2n+3i}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{2+3\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}$

$=\int_0^1\frac{1}{2+3x}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}(\ln 5-\ln 2).$

如 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2+i^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}$

$=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}.$

则能凑成$\frac{i}{n}$，比如

①$n+i=n\left(1+\frac{i}{n}\right)$；

②$n^2+i^2=n^2\left[1+\left(\frac{i}{n}\right)^2\right]$；

③$n^2+ni=n^2\left(1+\frac{i}{n}\right)$.

于是可直接用定积分定义

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f\left(0+\frac{1-0}{n}i\right)\frac{1-0}{n}=\int_0^1f(x)\mathrm{d}x,$$

或

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}f\left(0+\frac{1-0}{n}i\right)\frac{1-0}{n}=\int_0^1f(x)\mathrm{d}x.$$

2. 放缩形(凑不成$\frac{i}{n}$)

(1) 夹逼准则.

如 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2+i}$.

有 $\underbrace{\frac{n^2}{n^2+n}}_{\text{极限为 }1}<\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2+i}<\underbrace{\frac{n^2}{n^2+1}}_{\text{极限为 }1}$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2+i}=1$.

如通项中含n^2+i，则凑不成$\frac{i}{n}$，这时考虑对通项放缩，用夹逼准则.

(2) 放缩后再凑$\frac{i}{n}$.

如通项中含$\frac{i^2+1}{n^2}$，虽凑不成$\frac{i}{n}$，但放缩为$\left(\frac{i}{n}\right)^2<\frac{i^2+1}{n^2}<\left(\frac{i+1}{n}\right)^2$，则可凑成$\frac{i}{n}$.

3. 变量形

若通项中含$\frac{x}{n}i$，则考虑下面的式子：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(0+\frac{x-0}{n}i\right)\frac{x-0}{n}=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t.$$

例 8.6 设 $f(x)=x^2, f[\varphi(x)]=-x^2+2x+3$ 且 $\varphi(x)\geqslant 0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^3}\sum\limits_{i=1}^{n} i^2(n-i)\cdot\dfrac{1}{n+\varphi(x)}=(\quad)$.

(A) $\dfrac{1}{12}$ (B) $\dfrac{1}{6}$ (C) $\dfrac{1}{3}$ (D) $\dfrac{2}{3}$

【解】应选(A).

由题设，$f[\varphi(x)]=\varphi^2(x)=-x^2+2x+3$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$，则

$$\varphi(x)=\sqrt{-x^2+2x+3},$$

其中 $-x^2+2x+3\geqslant 0$，即 $(x-3)(x+1)\leqslant 0$，解得 $-1\leqslant x\leqslant 3$，此为 $\varphi(x)$ 的定义域.

又 $(-x^2+2x+3)'=-2x+2\xlongequal{令}0$，解得 $x=1$，故当 $-1\leqslant x<1$ 时，导数大于 0；当 $1<x\leqslant 3$ 时，导数小于 0. 所以 $\varphi(1)=2$ 为最大值，$\varphi(-1)=\varphi(3)=0$ 为最小值，即 $[0,2]$ 为 $\varphi(x)$ 的值域.

又

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2\left(1-\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n+2}\leqslant\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2(n-i)\cdot\frac{1}{n+\varphi(x)}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2\left(1-\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n},$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2\left(1-\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n}=\int_0^1 x^2(1-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{12},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+2}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2\left(1-\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n}=1\cdot\int_0^1 x^2(1-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{12},$$

故由夹逼准则得，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^3}\sum\limits_{i=1}^{n} i^2(n-i)\cdot\dfrac{1}{n+\varphi(x)}=\dfrac{1}{12}$，选(A).

例 8.7 设 $f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(1+\cos\dfrac{x}{n}+\cos\dfrac{2x}{n}+\cdots+\cos\dfrac{n-1}{n}x\right), & x>0,\\ a, & x=0,\\ f(-x), & x<0\end{cases}$

连续，则 $a=$________.

【解】应填 1.

当 $x>0$ 时，

$$\begin{aligned}f(x)&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\cos\frac{x}{n}i=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x}\sum_{i=0}^{n-1}\cos\frac{x}{n}i\cdot\frac{x}{n}\\&=\frac{1}{x}\int_0^x\cos t\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\sin t\Big|_0^x=\frac{\sin x}{x};\end{aligned}$$

当 $x<0$ 时，$f(x)=f(-x)=\dfrac{\sin(-x)}{-x}=\dfrac{\sin x}{x}$.

综上所述，$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ a, & x=0.\end{cases}$ 故由 $f(x)$ 连续，得 $a=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

例 8.8 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+1+1}+\dfrac{n}{n^2+1+2^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+1+(n-1)^2}\right]=$______.

【解】应填 $\dfrac{\pi}{4}$.

$$原式=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{n}{n^2+1+i^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{1+\dfrac{i^2+1}{n^2}}\cdot\frac{1}{n},$$

因为 $\dfrac{i^2}{n^2}<\dfrac{i^2+1}{n^2}<\dfrac{(i+1)^2}{n^2}$，所以 $\dfrac{1}{1+\dfrac{(i+1)^2}{n^2}}<\dfrac{1}{1+\dfrac{i^2+1}{n^2}}<\dfrac{1}{1+\dfrac{i^2}{n^2}}$，从而

$$\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{1+\dfrac{(i+1)^2}{n^2}}\cdot\frac{1}{n}<\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{1+\dfrac{i^2+1}{n^2}}\cdot\frac{1}{n}<\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{1+\dfrac{i^2}{n^2}}\cdot\frac{1}{n},$$

其中
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{1+\dfrac{(i+1)^2}{n^2}}\cdot\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\dfrac{i^2}{n^2}}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{\pi}{4},$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{1+\dfrac{i^2}{n^2}}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}.$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=0}^{n-1}\dfrac{1}{1+\dfrac{i^2+1}{n^2}}\cdot\dfrac{1}{n}=\dfrac{\pi}{4}$，即原式 $=\dfrac{\pi}{4}$.

四 反常积分的判敛

1. 概念

① $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 叫无穷区间上的反常积分.

② $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，其中 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\infty$，$a$ 叫瑕点，此积分叫无界函数的反常积分.

2. 判别

① 判别时要求每个积分有且仅有一个奇点.

+∞，-∞，瑕点，统称为奇点.

② 尺度 $\begin{cases}\int_0^1\dfrac{1}{x^p}\mathrm{d}x\begin{cases}0<p<1\text{ 时，收敛，}\\ p\geqslant 1\text{ 时，发散，}\end{cases}\\ \int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^p}\mathrm{d}x\begin{cases}p>1\text{ 时，收敛，}\\ p\leqslant 1\text{ 时，发散.}\end{cases}\end{cases}$

③ 比较判别法.

比较准则 Ⅰ 设函数 $f(x),g(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续，且 $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)(a \leqslant x < +\infty)$，则

a. 当 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛时，$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；

b. 当 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散时，$\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 发散.

比较准则 Ⅱ 设函数 $f(x),g(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续，且 $f(x) \geqslant 0, g(x) > 0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lambda$（有限或 ∞），则

a. 当 $\lambda \neq 0$ 时，$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 有相同的敛散性；

b. 当 $\lambda = 0$ 时，若 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛；

c. 当 $\lambda = \infty$ 时，若 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 发散，则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 也发散.

【注】无界函数的反常积分有类似的准则.

例 8.9 若反常积分 $\int_1^{+\infty}\left(\mathrm{e}^{-\cos\frac{1}{x}} - \mathrm{e}^{-1}\right)x^k\mathrm{d}x$ 收敛，则 k 的取值范围是________.

【解】应填 $k < 1$.

盯着 $x \to +\infty$ 看，由 $\mathrm{e}^{-\cos\frac{1}{x}} - \mathrm{e}^{-1} = \mathrm{e}^{-1}\left(\mathrm{e}^{-\cos\frac{1}{x}+1} - 1\right)$，知当 $x \to +\infty$ 时，

$$\mathrm{e}^{-\cos\frac{1}{x}+1} - 1 \sim 1 - \cos\frac{1}{x} \sim \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2},$$

即原反常积分与 $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^{2-k}}\mathrm{d}x$ 同敛散，故当 $2-k > 1$，即 $k < 1$ 时，原反常积分收敛.

例 8.10 已知 $\alpha > 0$，则对于反常积分 $\int_0^1 \dfrac{\ln x}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ 的敛散性的判别，正确的是（ ）.

(A) 当 $\alpha \geqslant 1$ 时，积分收敛　　(B) 当 $\alpha < 1$ 时，积分收敛

(C) 敛散性与 α 的取值无关，必收敛　　(D) 敛散性与 α 的取值无关，必发散

【解】应选(B).

当 $\alpha < 1$ 时，取充分小的正数 ε，使得 $\alpha + \varepsilon < 1$，由于

$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{\ln x}{x^\alpha}}{\frac{1}{x^{\alpha+\varepsilon}}}$ 是比较判别法

$$\lim_{x\to0^+} x^{\alpha+\varepsilon}\frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x\to0^+} x^\varepsilon \ln x = \lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{x^{-\varepsilon}} = \lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\varepsilon x^{-\varepsilon-1}} = \lim_{x\to0^+}\left(-\frac{1}{\varepsilon}x^\varepsilon\right) = 0,$$

故当 $x \to 0^+$ 时，$\dfrac{1}{x^{\alpha+\varepsilon}}$ 是比 $\dfrac{\ln x}{x^\alpha}$ 高阶的无穷大量，因为当 $\alpha+\varepsilon < 1$ 时，$\int_0^1\dfrac{1}{x^{\alpha+\varepsilon}}\mathrm{d}x$ 收敛，于是 $\int_0^1\dfrac{\ln x}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ 收敛，选项(B) 正确；

当 $\alpha \geqslant 1$ 时，由于 $\lim\limits_{x\to0^+} x^{\alpha}\dfrac{\ln x}{x^{\alpha}}=\infty$，故当 $x\to0^+$ 时，$\dfrac{1}{x^{\alpha}}$ 是比 $\dfrac{\ln x}{x^{\alpha}}$ 低阶的无穷大量，因为当 $\alpha \geqslant 1$ 时，$\int_0^1 \dfrac{1}{x^{\alpha}}\mathrm{d}x$ 发散，于是 $\int_0^1 \dfrac{\ln x}{x^{\alpha}}\mathrm{d}x$ 发散.

$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{\ln x}{x^{\alpha}}}{\frac{1}{x^{\alpha}}}$ 是比较判别法

例 8.11 设 p 为常数，若反常积分 $\int_0^1 \dfrac{\ln x}{x^p(1-x)^{1-p}}\mathrm{d}x$ 收敛，则 p 的取值范围是（　　）.

(A) $(-1,1)$　　(B) $(-1,2)$　　(C) $(-\infty,1)$　　(D) $(-\infty,2)$

【解】应选(A).

原反常积分可写为 $\int_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{\ln x}{x^p(1-x)^{1-p}}\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1 \dfrac{\ln x}{x^p(1-x)^{1-p}}\mathrm{d}x$. 对任意 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{\ln x}{x^p(1-x)^{1-p}}}{\frac{1}{x^{p+\varepsilon}}}=\lim_{x\to0^+}x^{\varepsilon}\cdot\ln x=0.$$

由于 $\lim\limits_{x\to0^+}(1-x)^{1-p}=1$，故可对比例 8.10 中的 $\dfrac{\ln x}{x^{\alpha}}$.

若 $\int_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{x^{p+\varepsilon}}\mathrm{d}x$ 收敛，即 $p<1$，则 $\int_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{\ln x}{x^p(1-x)^{1-p}}\mathrm{d}x$ 也收敛.

由 $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\frac{\ln x}{x^p(1-x)^{1-p}}}{\frac{1}{(1-x)^{-p}}}=-1\neq0$，知若 $\int_{\frac{1}{2}}^1 \dfrac{1}{(1-x)^{-p}}\mathrm{d}x$ 收敛，即 $p>-1$，则 $\int_{\frac{1}{2}}^1 \dfrac{\ln x}{x^p(1-x)^{1-p}}\mathrm{d}x$ 也收敛. 故选(A).

例 8.12 已知 $\int_1^{+\infty}\left[\dfrac{2x^3+ax+1}{x(x+2)}-(2x-4)\right]\mathrm{d}x=b$，$a,b$ 为常数，则 $ab=$________.

【解】应填 $-4\ln 3$.

$$b=\int_1^{+\infty}\frac{(a+8)x+1}{x(x+2)}\mathrm{d}x,$$

若 $a+8\neq0$，则由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{(a+8)x+1}{x(x+2)}}{\frac{1}{x}}=a+8$，知 $\int_1^{+\infty}\dfrac{(a+8)x+1}{x(x+2)}\mathrm{d}x$ 发散，与题设矛盾，故 $a=-8$，于是

$$\begin{aligned}b&=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(x+2)}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\ln\frac{x}{x+2}\Big|_1^{+\infty}=\frac{1}{2}\cdot\left(-\ln\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\ln 3,\end{aligned}$$

所以 $ab=-4\ln 3$.