

第 10 章 一元函数积分学的应用 (一)

—— 几何应用



A 组

1. 设曲线 $y = 2\sqrt{x}$ 与其上一点 $(t, 2\sqrt{t})$ 处的切线以及直线 $x = 1, x = 3$ 围成的平面区域的面积记为 $A(t), t > 0$, 则当 $A(t)$ 取得最小值时相应切线的方程为().

(A) $y = \sqrt{2}x + \frac{1}{\sqrt{2}}$

(B) $y = x + \frac{1}{2}$

(C) $y = \frac{x}{2} + 2$

(D) $y = \frac{x}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}$

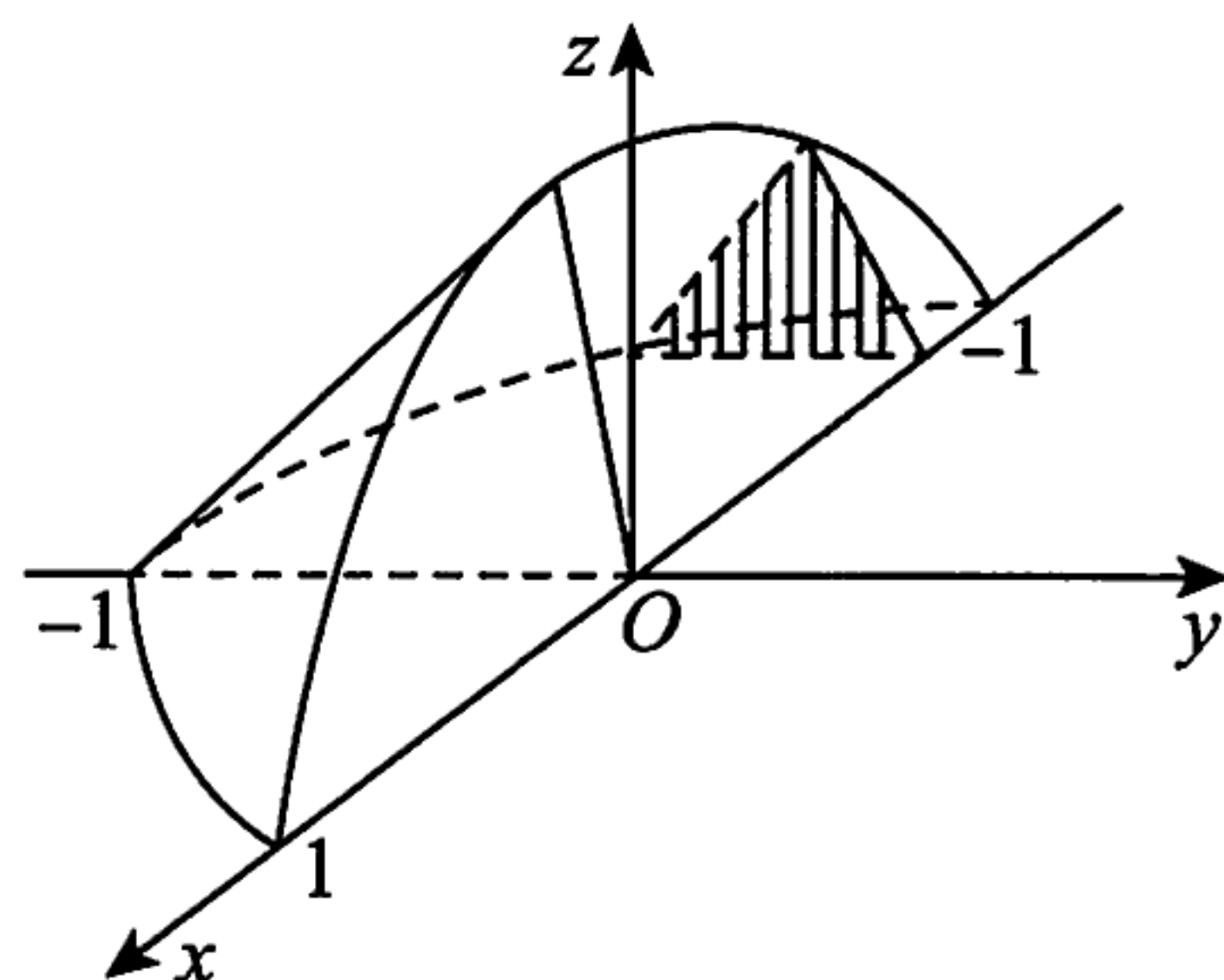
2. 如图所示, 设立体的底是 xOy 平面上介于 $y = x^2 - 1$ 和 $y = 0$ 之间的平面区域, 该立体垂直于 x 轴的任一截面是一个等边三角形, 则此立体的体积为().

(A) $\frac{\sqrt{3}}{15}$

(B) $\frac{2\sqrt{3}}{15}$

(C) $\frac{3\sqrt{3}}{15}$

(D) $\frac{4\sqrt{3}}{15}$



3. 圆域 $D = \{(x, y) \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq R^2\} (b > R > 0)$ 绕直线 $y = -1$ 旋转一周所形成的旋转体的体积为().

(A) $4\pi^2(b+1)R^2$

(B) $2\pi^2(b+1)R^2$

(C) $4\pi^2(b-1)R^2$

(D) $2\pi^2(b-1)R^2$

4. 设曲线 $y = \cos x (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$ 与 x 轴, y 轴所围图形被曲线 $y = a \sin x (a > 0)$ 分成面积相等的两部分, 则常数 a 的值为_____.

5. 设 D 是由曲线 $y = x^3 (x \geq 0)$ 与直线 $y = ax$ 所围成的平面图形, 已知 D 分别绕两坐标轴旋转一周所形成的旋转体的体积相等, 则常数 a 的值为_____.

6. 曲线 $r = 1 + \cos \theta$ 介于 $0 \leq \theta \leq \pi$ 的弧长为_____.

7. 设 L 是位于 x 轴的区间 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上的细棒, 已知 L 上任一点 $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 处的点密度为 $\rho(x) = 1 + \sin x$, 则该细棒的质心坐标 $\bar{x} =$ _____.

8. 设 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \sqrt{4x - x^2}, x \leq 1\}$, 则 D 绕 y 轴旋转一周所形成的旋转体的体积为_____.

9. 求曲线 $y = x^2 - 2x (1 \leq x \leq 3)$ 与直线 $y = 0, x = 1, x = 3$ 所围成的封闭图形的面积, 并求该平面图形绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积.

10. 设抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 通过 $(0, 0)$ 和 $(1, 2)$ 两点, 其中 $a < -2$. 求 a, b, c 的值, 使得该抛物线与曲线 $y = -x^2 + 2x$ 所围成区域的面积最小.

11. 设曲线 $y = ax^2 (x \geq 0, \text{常数 } a > 0)$ 与曲线 $y = 1 - x^2$ 交于点 A , 过坐标原点 O 和点 A 的直线与曲线 $y = ax^2$ 围成一平面图形 D .

(1) 求 D 绕 x 轴旋转一周所成的旋转体的体积 $V(a)$;

(2) 求 a 的值使 $V(a)$ 为最大.

12. 设星形线的方程为 $\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t \end{cases} (a > 0)$, 求:

(1) 它所围成图形的面积;

(2) 它的弧长;

(3) 它绕 x 轴旋转一周所成的旋转体的体积和表面积.



B 组

1. 由曲线 $y = \sqrt{2x - x^2}$ 与直线 $y = x$ 围成的平面图形绕直线 $x = 2$ 旋转一周得到的旋转体的体积为().

(A) $\frac{\pi^2}{2} + \frac{2\pi}{3}$

(B) $\frac{\pi^2}{2} + \frac{4\pi}{3}$

(C) $\frac{\pi^2}{2} - \frac{2\pi}{3}$

(D) $\frac{\pi^2}{2} - \frac{4\pi}{3}$

2. 心形线 $r = 2(1 + \cos \theta)$ 和 $\theta = 0, \theta = \frac{\pi}{2}$ 围成的图形绕极轴旋转一周所成旋转体的体积 $V =$ ().

(A) 20π

(B) 40π

(C) 80π

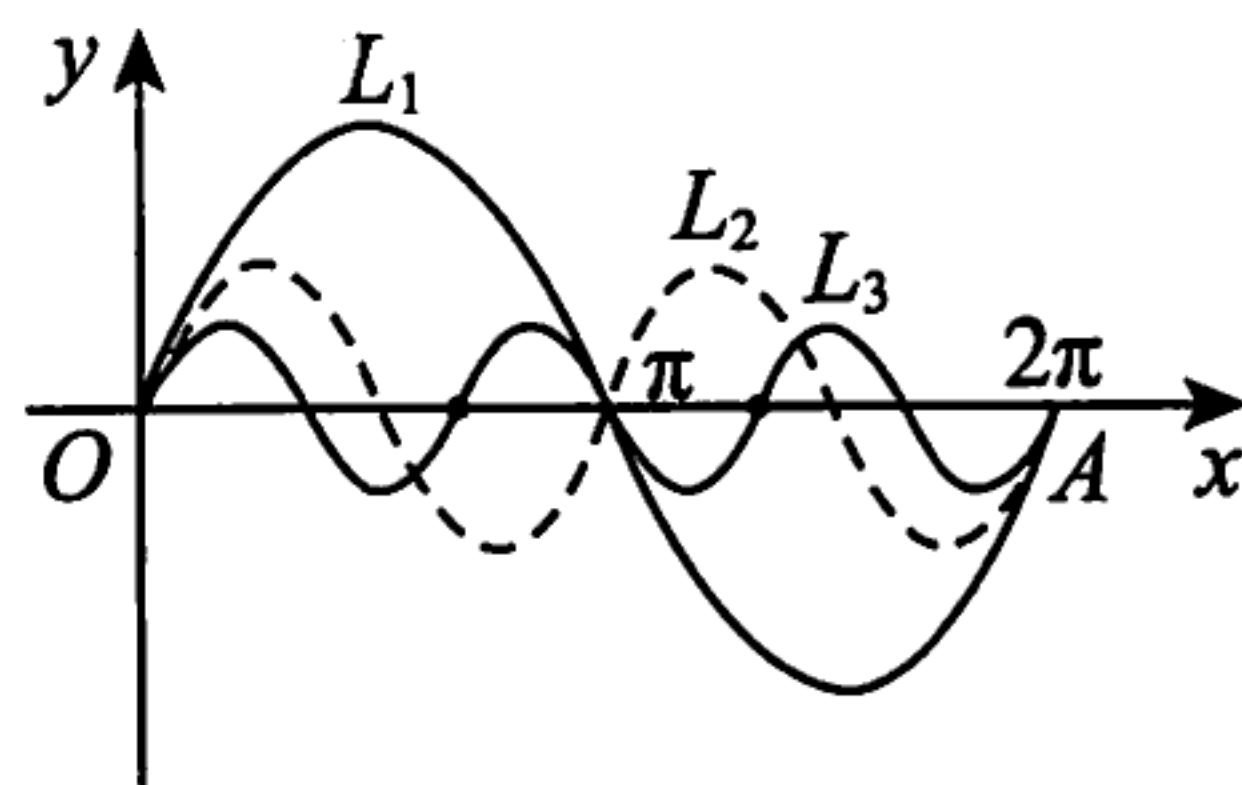
(D) 160π

3. 从点 $O(0, 0)$ 到点 $A(2\pi, 0)$ 有铁路、公路和盘山路三种路线(见图), 它们的方程分别为

$L_1: y = \sin x;$

$L_2: y = \frac{1}{2} \sin 2x;$

$L_3: y = \frac{1}{3} \sin 3x.$



记它们的路线长度分别为 l_1, l_2, l_3 , 则().

(A) $l_2 < l_1 < l_3$

(B) $l_3 < l_2 < l_1$

(C) $l_1 < l_3 < l_2$

(D) $l_1 = l_2 = l_3$

4. 设曲线弧方程为 $y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^x \sqrt{\cos t} dt \left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right)$, 则其弧长为_____.

5. $f(x) = \int_x^1 \cos t^2 dt$ 在区间 $[0, 1]$ 上的平均值为_____.

6. 双纽线 $r^2 = a^2 \cos 2\theta (a > 0)$ 绕极轴旋转一周所围成的旋转曲面面积 $S =$ _____.

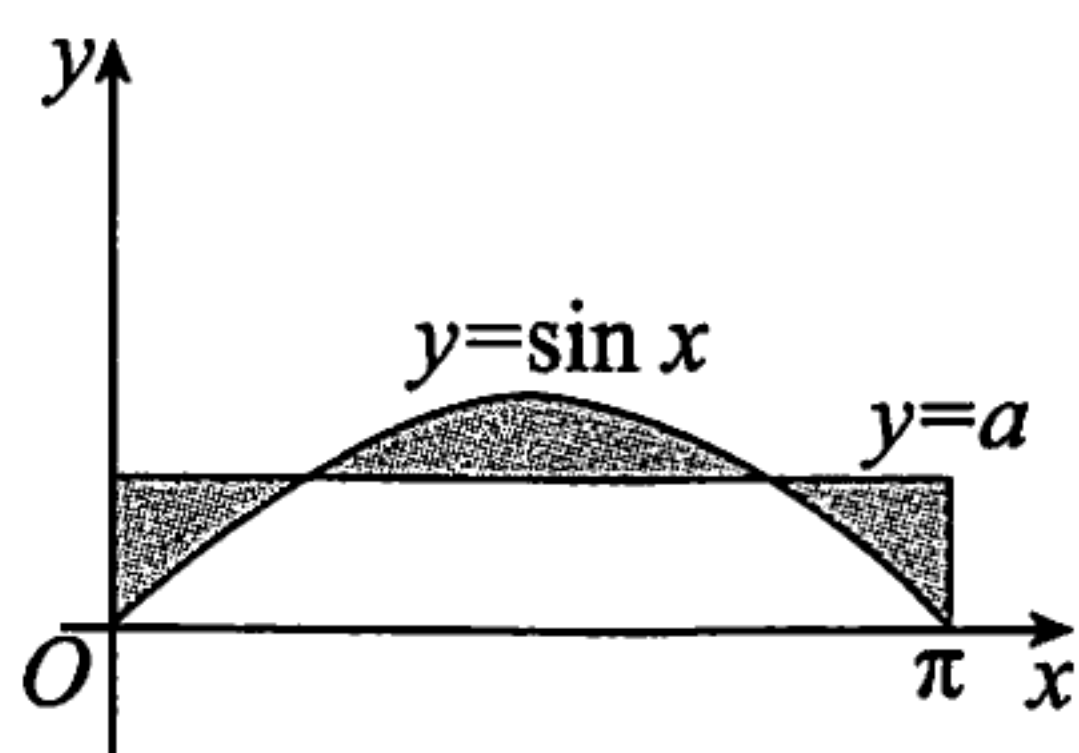
7. 求曲线 $y = \int_0^x e^{-\sqrt{t}} dt$ 与 y 轴及其 $x \rightarrow +\infty$ 方向的水平渐近线所围图形的面积.

8. 已知摆线的参数方程为 $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$ 其中 $0 \leq t \leq 2\pi$, 常数 $a > 0$. 设该摆线一拱的弧

长的数值等于该弧段绕 x 轴旋转一周所得旋转曲面面积的数值, 求 a 的值.

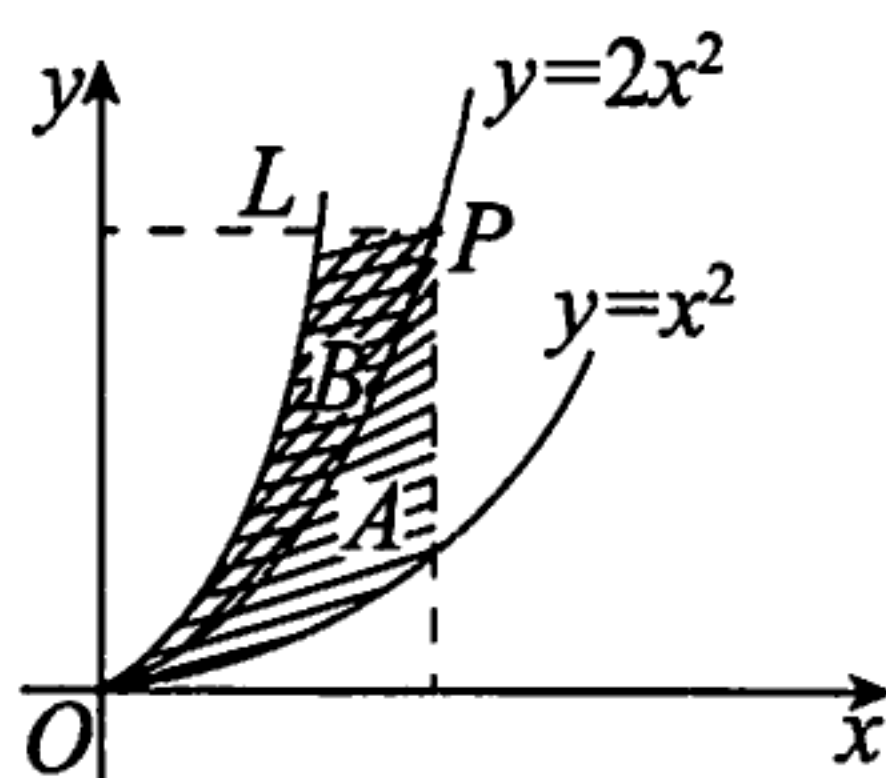
9. 求曲线 $y = \frac{\cos x}{x} \sqrt{\sin x}$ 在 $[\pi, 4\pi]$ 上与 x 轴所围图形绕 y 轴旋转一周所得旋转体体积.

10. 如图所示, 阴影部分由曲线 $y = \sin x (0 \leq x \leq \pi)$, 直线 $y = a (0 \leq a \leq 1)$, $x = \pi$ 以及 y 轴围成. 此图形绕直线 $y = a$ 旋转一周形成旋转体. 问 a 为何值时, 旋转体有最小体积、最大体积?



11. (1) 如图所示, 设曲线 L 具有如下性质: 中间曲线 $y = 2x^2 (x > 0)$ 上每一点 P 都使得图中 A 的面积等于 B 的面积. 求曲线 L 的方程;

(2) 如图所示, A, B 绕 y 轴旋转一周所得的旋转体体积相等, 求曲线 L 的方程.



12. 试证曲线 $y = \sin x (0 \leq x \leq 2\pi)$ 的弧长等于椭圆 $x^2 + 2y^2 = 2$ 的周长.

C 组



1. 圆域 $D = \{(x, y) \mid (x-3)^2 + (y-4)^2 \leq 5\}$ 绕直线 $4x - 3y - 20 = 0$ 旋转一周所形成的旋转体的体积为 _____.

2. 设 b 为常数, 且介于曲线 $y = \frac{x^3 + bx + 1}{x(x+1)}$ 与它的斜渐近线之间的从 $x = 1$ 延伸到 $x \rightarrow +\infty$ 的图形的面积为有限值, 求 b 及该面积的值.

3. (1) 设一个圆的半径为 a , 圆外有一条距圆心为 ρ 的直线 L , 记圆绕 L 旋转一周所得旋转体体积为 V_0 , 求 V_0 ;

(2) 两个相互外切的圆同时内切于半径为 R 的圆 M , 三圆心共线. 连接三圆心的直线垂直于圆 M 外的直线 EF , 且圆心 M 到 EF 的距离为 $2R$. 求两个小圆的半径, 使得这 3 个圆所围成的平面图形绕 EF 旋转时所得旋转体体积最大.

4. 设 $D = \{(x, y) \mid \sqrt{x^2 + y^2} - x \leq x^2 + y^2 \leq \sqrt{x^2 + y^2} + x\}$, 求:

(1) D 的面积;

(2) D 的周长;

(3) D 绕 y 轴旋转一周所形成的旋转体的体积.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园