# 第 3 章　一元函数微分学的概念

## A组

**1.** 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{x^2}-1}{x}, & x>0,\\ x^2g(x), & x\leqslant 0,\end{cases}$ 其中 $g(x)$ 为有界函数，则在 $x=0$ 处，$f(x)$(　　).

(A) 极限不存在　　(B) 极限存在但不连续

(C) 连续但不可导　　(D) 可导

**2.** 设函数 $f(x)$ 可导，且 $y=f(x^3)$. 当自变量 $x$ 在 $x=-1$ 处取得增量 $\Delta x=-0.1$ 时，相应的函数增量 $\Delta y$ 的线性主部为 0.3，则 $f'(-1)=$(　　).

(A) $-1$　　(B) 0.1　　(C) 1　　(D) 0.3

**3.** 若 $f(x)=e^{10x}x(x+1)(x+2)\cdots(x+10)$，则 $f'(0)=$ ________.

**4.** 设对任意 $x$，$f(x)$ 满足 $f(x+1)=2f(x)$，且 $f'(0)=C$(常数)，则 $f'(1)=$ ________.

**5.** 已知 $f(x)=\sqrt{1+x}+\arcsin\dfrac{1-x}{1+x^2}$，则 $f'(1)=$ ________.

**6.** 设 $y=f(x)$ 由方程 $\sin(xy)+\ln y-x=1$ 确定，则 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f\left(\dfrac{2}{n}\right)-e\right]=$ ________.

**7.** 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，在区间 $[0,2]$ 上，$f(x)=x(x^2-4)$. 设对任意的 $x$ 都满足 $f(x)=kf(x+2)$，其中 $k$ 为非零常数.

(1) 写出 $f(x)$ 在 $[-2,0)$ 上的表达式；

(2) 问 $k$ 为何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导？

**8.** 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，且对任意的 $x,x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，有

$$f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2),\quad f(x)=1+xg(x),$$

其中 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=1$. 证明：$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内处处可导.

## B组

**1.** 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2^x-e^{-x}+x}{\arctan x}, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处（　　）.

(A) 可导，且 $f'(0)=\dfrac{1}{2}(\ln^2 2+1)$　　(B) 可导，且 $f'(0)=\dfrac{1}{2}(\ln^2 2-1)$

(C) 不可导　　(D) 是否可导与 $a$ 的取值有关

**2.** 设函数 $f(x)$ 是定义在 $(-1,1)$ 内的奇函数，且 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}=a\neq 0$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的导数（　　）.

(A) 等于 $a$　　(B) 等于 $-a$　　(C) 等于 0　　(D) 不存在

**3.** 函数 $f(x)=|x^3-4x|\sqrt[3]{x^2-2x-8}$ 的不可导的点的个数为（　　）.

(A)0　　(B)1　　(C)2　　(D)3

**4.** 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某邻域内有定义，在 $x=a$ 的某去心邻域内可导，则下述命题正确的是（　　）.

(A) 若 $\lim\limits_{x\to a}f'(x)=A$，则 $f'(a)=A$　　(B) 若 $f'(a)=A$，则 $\lim\limits_{x\to a}f'(x)=A$

(C) 若 $\lim\limits_{x\to a}f'(x)=\infty$，则 $f'(a)$ 不存在　　(D) 若 $f'(a)$ 不存在，则 $\lim\limits_{x\to a}f'(x)=\infty$

**5.** 已知 $f(0)=0$，$f'(0)=2$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[f\left(\dfrac{1}{n^2}\right)-\dfrac{1}{n^2}+1\right]^{3n^2}=$ ________.

**6.** 已知 $f(0)=f'(0)=1$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)e^x-1}{f(x)\cos x-1}=$ ________.

**7.** 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处存在二阶导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)-\ln(1+x)}{x^3}=2$，求 $f(0)$，$f'(0)$ 及 $f''(0)$.

**8.** 设函数 $y=f(x)=\begin{cases}1-2x^2, & x<-1,\\ x^3, & -1\leqslant x\leqslant 2,\\ 12x-16, & x>2.\end{cases}$

(1) 写出 $f(x)$ 的反函数 $g(x)$ 的表达式；

(2) 讨论 $g(x)$ 是否有不可导点，若有，指出这些点.

**9.** 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，且对任意 $x$ 与 $y$，均满足 $f(x+y)=f(x)e^y+f(y)e^x$，$f'(0)$ 存在且等于 $a$，$a\neq 0$. 证明：对任意 $x$，$f'(x)$ 存在，并求 $f(x)$.

## C组

**1.** 下列命题：

① 设 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f'(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)$ 均存在，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处必连续；

② 设 $f'_-(x_0)$ 与 $f'_+(x_0)$ 均存在，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处必连续；

③ 设 $f(x_0^-)$ 与 $f(x_0^+)$ 均存在，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处必连续；

④ 设 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f'(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)$ 中至少有一个不存在，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处必不可导.

正确的个数为(　　).

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)4

**2.** 设 $f(x)=\int_0^1\ln\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y,0\leqslant x\leqslant 1$，则 $f'_+(0)=$(　　).

(A) $-\frac{\pi}{2}$　　(B) $\frac{\pi}{2}$　　(C) $-\pi$　　(D) $\pi$

**3.** 设 $f''(a)$ 存在，$f'(a)\neq 0$，则 $\lim\limits_{x\to a}\left[\frac{1}{f'(a)(x-a)}-\frac{1}{f(x)-f(a)}\right]=$ ________.

**4.** (1) 设 $f(x)=\sqrt{x+5}\cdot\sqrt[3]{2x-7}$，$g(x)=\sqrt{x-3}\cdot\sqrt[3]{3x-11}$，求 $f'(4)$，$g'(4)$；

(2) 求极限 $I=\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x+5}\cdot\sqrt[3]{2x-7}-3}{1-\sqrt{x-3}\cdot\sqrt[3]{3x-11}}$.