第8讲 相似理论

知识结构

- A 的相似对角化（$A\sim\Lambda$）
  - 充要条件
    - ① A 有 n 个线性无关的特征向量 $\Leftrightarrow A\sim\Lambda$
    - ② $n_i=n-r(\lambda_i E-A)\Leftrightarrow A\sim\Lambda$
  - 充分条件
    - ① A 是实对称矩阵 $\Rightarrow A\sim\Lambda$
    - ② A 有 n 个互异特征值 $\Rightarrow A\sim\Lambda$
    - ③ $A^2-(k_1+k_2)A+k_1k_2E=O$ 且 $k_1\neq k_2\Rightarrow A\sim\Lambda$
    - ④ $r(A)=1$ 且 $\operatorname{tr}(A)\neq 0\Rightarrow A\sim\Lambda$
  - 必要条件
    - $A\sim\Lambda\Rightarrow r(A)=$ 非零特征值的个数（重根按重数算）
  - 否定条件
    - ① $A\neq O$，$A^k=O$（k 为大于 1 的整数）$\Rightarrow A$ 不可相似对角化
    - ② A 的特征值全为 k 但 $A\neq kE\Rightarrow A$ 不可相似对角化
- A 相似于 B（$A\sim B$）
  - 五个性质
    - ① $|A|=|B|$
    - ② $r(A)=r(B)$
    - ③ $\operatorname{tr}(A)=\operatorname{tr}(B)$
    - ④ $\lambda_A=\lambda_B$（或 $|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$）
    - ⑤属于 λ_A 的线性无关的特征向量的个数等于属于 λ_B 的线性无关的特征向量的个数
  - 重要结论
    - ① $A\sim B\Rightarrow A^{\mathrm T}\sim B^{\mathrm T}$，$A^*\sim B^*$，$A^{-1}\sim B^{-1}$（$A$ 可逆）
    - ② $A\sim B\Rightarrow A^m\sim B^m$，$f(A)\sim f(B)$
    - ③ $A\sim B$，$B\sim\Lambda\Rightarrow A\sim\Lambda$
    - ④ $A\sim\Lambda$，$B\sim\Lambda\Rightarrow A\sim B$
    - ⑤ $A\sim C$，$B\sim D\Rightarrow\begin{bmatrix}A&O\\O&B\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}C&O\\O&D\end{bmatrix}$
- 实对称矩阵与正交矩阵
  - 实对称矩阵的重要结论
    - ①特征值均为实数，特征向量均为实向量
    - ②不同特征值对应的特征向量正交（即 $\lambda_1\neq\lambda_2\Rightarrow\xi_1\perp\xi_2\Rightarrow(\xi_1,\xi_2)=0$，建方程）
    - ③可用正交矩阵相似对角化（即存在正交矩阵 Q，使 $Q^{-1}AQ=Q^{\mathrm T}AQ=\Lambda$）
    - ④ A 为 n 阶实对称矩阵 $\Leftrightarrow A$ 有 n 个正交的特征向量
  - 正交矩阵的重要结论
    - ① $A^{\mathrm T}A=E\Leftrightarrow A^{-1}=A^{\mathrm T}$
      - $\Leftrightarrow A$ 由规范正交基组成
      - $\Leftrightarrow A^{\mathrm T}$ 是正交矩阵
      - $\Leftrightarrow A^{-1}$ 是正交矩阵
      - $\Leftrightarrow A^*$ 是正交矩阵
      - $\Leftrightarrow -A$ 是正交矩阵
    - ②若 A，B 为同阶正交矩阵，则 AB 为正交矩阵，$A+B$ 不一定为正交矩阵
    - ③若 A 为正交矩阵，则其实特征值的取值范围为 $\{-1,1\}$

一 A 的相似对角化（$A\sim\Lambda$）

设 n 阶矩阵 A，若存在 n 阶可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$，其中 Λ 是对角矩阵，则称 A 可相似对角化，记作 $A\sim\Lambda$，称 Λ 是 A 的相似标准形．

于是可知，若 A 可相似对角化，即 $P^{-1}AP=\Lambda$，其中 P 可逆，等式两边同时在左边乘 P，有 $AP=P\Lambda$，记

$$P=[\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_n],\ \Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix},$$

则

$$A[\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_n]=[\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_n]\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix},$$

即

$$[A\xi_1,\ A\xi_2,\ \cdots,\ A\xi_n]=[\lambda_1\xi_1,\ \lambda_2\xi_2,\ \cdots,\ \lambda_n\xi_n],$$

也即

$$A\xi_i=\lambda_i\xi_i,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

由 P 可逆，知 $\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_n$ 线性无关．上述过程可逆，于是，n 阶矩阵 A 可相似对角化 $\Leftrightarrow A$ 有 n 个线性无关的特征向量．据此，可得以下结论．

设 A 为 n 阶矩阵．

（1）充要条件．

① A 有 n 个线性无关的特征向量 $\Leftrightarrow A\sim\Lambda$.

② $n_i=n-r(\lambda_iE-A)\Leftrightarrow A\sim\Lambda$.

如 $A_{5\times5}$　$\lambda_1=\lambda_2=7$，$\lambda_1\to\xi_1$，$\lambda_2\to\xi_2$，$2=5-r(7E-A)$；$\lambda_3=\lambda_4=\lambda_5=2$，$\lambda_3\to\xi_3$，$\lambda_4\to\xi_4$，$\lambda_5\to\xi_5$，$3=5-r(2E-A)$

【注】（1）λ_i 是 n_i 重根，故 $n-r(\lambda_iE-A)$ 表示 $(\lambda_iE-A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解中线性无关的向量个数，也即属于 λ_i 的线性无关的特征向量的个数．当 $n_i=n-r(\lambda_iE-A)$ 时，即知 A 有 n 个线性无关的特征向量，等价于上面的①．

（2）②常用于求秩．

（2）充分条件．

A 实对称 $\begin{cases}\lambda_1\neq\lambda_2\Rightarrow\xi_1\perp\xi_2\\ \lambda_1=\lambda_2\Rightarrow\xi_1,\ \xi_2\text{线性无关}\end{cases}$　　A 普通 $\begin{cases}\lambda_1\neq\lambda_2\Rightarrow\xi_1,\ \xi_2\text{线性无关}\\ \lambda_1=\lambda_2\Rightarrow\xi_1,\ \xi_2\text{可能线性相关，也可能线性无关}\end{cases}$

① A 是实对称矩阵 $\Rightarrow A\sim\Lambda$.

【注】若 A 是实对称矩阵，则 A 必有 n 个线性无关的特征向量，故 $A\sim\Lambda$.

② A 有 n 个互异特征值 $\Rightarrow A\sim\Lambda$.

【注】由于不同特征值对应的特征向量线性无关，故当 A 有 n 个互异特征值时，A 必有 n 个线性无关的特征向量，故 $A\sim\Lambda$.

③ $A^2-(k_1+k_2)A+k_1k_2E=O$ 且 $k_1\neq k_2\Rightarrow A\sim\Lambda$.

④ $r(A)=1$ 且 $\operatorname{tr}(A)\neq 0\Rightarrow A\sim\Lambda$.

（3）必要条件.

$A\sim\Lambda\Rightarrow r(A)=$ 非零特征值的个数（重根按重数算）.

$r(A)=r(P^{-1}AP)=r(\Lambda)$

（4）否定条件.

① $A\neq O$，$A^k=O$（k 为大于 1 的整数）$\Rightarrow A$ 不可相似对角化.

② A 的特征值全为 k 但 $A\neq kE\Rightarrow A$ 不可相似对角化.

例 8.1 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&0\\1&a&b\end{bmatrix}$ 仅有两个不同的特征值. 若 A 相似于对角矩阵，求 a，b 的值，并求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

【解】因为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&0\\-1&\lambda-2&0\\-1&-a&\lambda-b\end{vmatrix}=(\lambda-b)(\lambda-1)(\lambda-3),$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1=b$，$\lambda_2=1$，$\lambda_3=3$.

因为矩阵 A 仅有两个不同的特征值，所以 $\lambda_1=\lambda_2$ 或 $\lambda_1=\lambda_3$.

①当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时，有 $b=1$. 因为 A 相似于对角矩阵，所以 $r(E-A)=1$，故 $a=1$.

解方程组 $(E-A)x=0$，得 A 的对应于特征值 1 的线性无关的特征向量 $\xi_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$，$\xi_2=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$.

对于 $\lambda_3=3$，解方程组 $(3E-A)x=0$，得 A 的对应于特征值 3 的特征向量 $\xi_3=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$.

令 $P=[\xi_1,\xi_2,\xi_3]=\begin{bmatrix}-1&0&1\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}$，则 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{bmatrix}$.

②当 $\lambda_1=\lambda_3=3$ 时，有 $b=3$. 因为 A 相似于对角矩阵，所以 $r(3E-A)=1$，故 $a=-1$.

解方程组 $(3E-A)x=0$，得 A 的对应于特征值 3 的线性无关的特征向量 $\eta_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$，$\eta_2=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$.

对于 $\lambda_2=1$，解方程组 $(E-A)x=0$，得 A 的对应于特征值 1 的特征向量 $\eta_3=\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$.

令 $\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3]=\begin{bmatrix}1&0&-1\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.

例 8.2 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2-(k_1+k_2)\boldsymbol{A}+k_1k_2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，且 $k_1\neq k_2$，证明：$\boldsymbol{A}$ 可相似对角化.

【证】设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，根据 $\boldsymbol{A}^2-(k_1+k_2)\boldsymbol{A}+k_1k_2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，可得

$$\lambda^2-(k_1+k_2)\lambda+k_1k_2=0,$$

故 $\lambda=k_1$ 或 k_2，即 $\boldsymbol{A}$ 的特征值的取值范围是 $\{k_1, k_2\}$.

由第 4 讲"二（12）"知，若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2-(k_1+k_2)\boldsymbol{A}+k_1k_2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，且 $k_1\neq k_2$，则

$$r(\boldsymbol{A}-k_1\boldsymbol{E})+r(\boldsymbol{A}-k_2\boldsymbol{E})=n.$$

现设 $r(\boldsymbol{A}-k_1\boldsymbol{E})=r$，则齐次线性方程组 $(k_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有 $n-r$ 个线性无关解，所以 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 k_1 的线性无关的特征向量有 $n-r$ 个，记为 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$，且 $r(\boldsymbol{A}-k_2\boldsymbol{E})=n-r$，齐次线性方程组 $(k_2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有 $n-(n-r)=r$ 个线性无关解，所以 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 k_2 的线性无关的特征向量有 r 个，记为 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_r$.

因为 $k_1\neq k_2$，所以 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}, \boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_r$ 线性无关，于是 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 共有 n 个线性无关的特征向量，故 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化.

【注】常考 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$ 的情形.

例 8.3 设 n 阶矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_1b_1&a_1b_2&\cdots&a_1b_n\\a_2b_1&a_2b_2&\cdots&a_2b_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_nb_1&a_nb_2&\cdots&a_nb_n\end{bmatrix}.$$

已知 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})=a\neq 0$. 证明：矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以相似对角化.

【证】设 $\boldsymbol{\alpha}=[a_1, a_2, \cdots, a_n]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=[b_1, b_2, \cdots, b_n]^{\mathrm{T}}$，则矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$. 于是

$$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{AA}=(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})=(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)\boldsymbol{A}=\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}=a\boldsymbol{A}.$$

设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\xi(\neq\boldsymbol{0})$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ 的特征向量，则由 $\boldsymbol{A}^2=a\boldsymbol{A}$，根据第 7 讲"二（3）"的"③"，有 $\lambda^2=a\lambda$，即 $\lambda(\lambda-a)=0$，故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值的取值范围是 $\{0, a\}$. 又 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})=a\neq 0$，所以 $\lambda_1=a$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一重特征值，$\lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_n=0$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 $n-1$ 重特征值.

对于特征值 $\lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_n=0$，齐次线性方程组 $(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的系数矩阵的秩

$$r(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=r(-\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A})$$

$$=r(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})\leqslant\min\{r(\boldsymbol{\alpha}), r(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\}=1.$$

又因为 $\operatorname{tr}(A)=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i=a\neq 0$，故 $a_ib_i\,(i=1,2,\cdots,n)$ 不全为零，由此可知

$$r(A)\geqslant 1,$$

所以 $r(0E-A)=1$. 因此，矩阵 A 的属于 $n-1$ 重特征值 0 的线性无关的特征向量个数为 $n-1$. 从而，A 有 n 个线性无关的特征向量，故 A 可以相似对角化.

例 8.4 设 A 是 n 阶非零矩阵，若存在正整数 $k\,(k>1)$ 使得 $A^k=O$，证明：A 不可相似对角化.

【证】设 λ 是 A 的特征值，$\xi\,(\neq 0)$ 是 A 的属于 λ 的特征向量，则 $A\xi=\lambda\xi$，由第 7 讲"二（3）"中的"③"，因 $A^k=O$，故 $\lambda^k=0$，即 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$，$A$ 的特征值全是零.

若 A 能与对角矩阵 Λ 相似，则 Λ 的主对角线元素为 A 的全部特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$. 而 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$，于是 $\Lambda=O$，即存在可逆矩阵 P，使得

$$A=P\Lambda P^{-1}=POP^{-1}=O,$$

这与题设 $A\neq O$ 矛盾，故 A 不可相似对角化.

【注】若懂得了例 8.4 的道理，命题中若出现 $\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$，因 $\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}^2=O$，$\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}^3=O$，而它们本身不是零矩阵，则可直接判别出其不可相似对角化.

例 8.5 设

$$A=\begin{bmatrix}k&a_1&a_2\\0&k&a_3\\0&0&k\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}k&0&0\\b_1&k&0\\b_2&b_3&k\end{bmatrix},$$

a_i 与 $b_i\,(i=1,2,3)$ 均不全为零，证明：A，B 均不可相似对角化.

【证】设 λ_A，λ_B 分别是 A，B 的特征值，由 $|\lambda_AE-A|=0$，$|\lambda_BE-B|=0$，知 A，B 的特征值全为 k. 若 A，B 均能与对角矩阵 Λ 相似，则 $\Lambda=kE$，即存在可逆矩阵 P，Q，使得 $P^{-1}AP=\Lambda=kE$，$Q^{-1}BQ=\Lambda=kE$，也即 $A=P(kE)P^{-1}=kE$，$B=Q(kE)Q^{-1}=kE$，这与题设 a_i 与 $b_i\,(i=1,2,3)$ 均不全为零矛盾，故 A，B 均不可相似对角化.

【注】若懂得了例 8.5 的道理，命题中若出现 $\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}2&0&0\\1&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$ 等，均可直接判别出其不可相似对角化.

二、A 相似于 B（$A\sim B$）

设 A，B 都是 n 阶方阵，若存在 n 阶可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=B$，则称矩阵 A 相似于矩阵 B，记作 $A\sim B$.

【注】①若 $A\sim B$，$B\sim C$，则 $A\sim C$. 这个性质（传递性）以后常用.
②用定义法可证一些重要且有趣的结论，如：若 A 可逆，则 $AB\sim BA$.
证 由于 $A^{-1}(AB)A=BA$，故 $AB\sim BA$.

1. 五个性质

若 $A\sim B$，则

① $|A|=|B|$.

② $r(A)=r(B)$.

③ $\operatorname{tr}(A)=\operatorname{tr}(B)$.

④ $\lambda_A=\lambda_B$（或 $|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$）.

⑤属于 λ_A 的线性无关的特征向量的个数等于属于 λ_B 的线性无关的特征向量的个数.

【注】(1) 若①，②，③，④，⑤中至少有一个不成立，则 A 不相似于 B.
(2) 性质⑤的两种证明方法如下.
证 法一 若 $A\sim B$，则 $\lambda E-A\sim\lambda E-B$，所以 $r(\lambda E-A)=r(\lambda E-B)$，故 $n-r(\lambda E-A)=n-r(\lambda E-B)$，即性质⑤成立.
法二 由 $A\sim B$，则存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=B$，若 A 属于 λ 的线性无关的特征向量是 ξ_1，ξ_2，…，ξ_s，可知 B 属于 λ 的线性无关的特征向量是 $P^{-1}\xi_1$，$P^{-1}\xi_2$，…，$P^{-1}\xi_s$，故 A 和 B 对应于特征值 λ 的线性无关的特征向量的个数相同.

2. 重要结论

(1) $A\sim B\Rightarrow A^{\mathrm{T}}\sim B^{\mathrm{T}}$，$A^*\sim B^*$，$A^{-1}\sim B^{-1}$（$A$ 可逆）.

(2) $A\sim B\Rightarrow A^m\sim B^m$，$f(A)\sim f(B)$.

【注】(1) 由 $P^{-1}A^mP=B^m$，$P^{-1}f(A)P=f(B)$，有 $A^m=PB^mP^{-1}$，$f(A)=Pf(B)P^{-1}$.
若 $B=\Lambda$，则 $A^m=P\Lambda^mP^{-1}$，$f(A)=Pf(\Lambda)P^{-1}$.
(2) 进一步地，若 $P^{-1}AP=B$ 且当 A 可逆时，记 $L(A)=af(A)\pm bA^{-1}\pm cA^*$，则 $P^{-1}L(A)P=L(B)$，即 $L(A)\sim L(B)$，且当 $b=0$ 时，不再要求 A 可逆.

(3) $A\sim\Lambda$，$B\sim\Lambda\Rightarrow A\sim B$.

【注】$P^{-1}AP=B$，$Q^{-1}BQ=\Lambda\Rightarrow Q^{-1}P^{-1}APQ=\Lambda\Rightarrow(PQ)^{-1}APQ=\Lambda$. 令 $PQ=C$，则 $C^{-1}AC=\Lambda$，考试中可能要求求出矩阵 C.

(4) $A\sim\Lambda$，$B\sim\Lambda\Rightarrow A\sim B$.

【注】$P^{-1}AP=\Lambda$，$Q^{-1}BQ=\Lambda \Rightarrow P^{-1}AP=Q^{-1}BQ \Rightarrow QP^{-1}APQ^{-1}=B \Rightarrow (PQ^{-1})^{-1}APQ^{-1}=B$. 令 $PQ^{-1}=C$，则 $C^{-1}AC=B$，考试中可能要求求出矩阵 C.

（5）$A\sim C$，$B\sim D \Rightarrow \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} C & O \\ O & D \end{bmatrix}$.

例 8.6　下列矩阵中，与矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 相似的为（　　）.

（A）$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$　（B）$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$　（C）$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$　（D）$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

【解】应选（A）.

法一　设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，$A$ 和各选项中的矩阵都不相似于对角矩阵，对这样的两个矩阵，要判定它们相似一般没有简单的方法，而判定它们不相似一般是有简单办法的.

若 A 相似于 B，则 $A-E$ 相似于 $B-E$，从而 $r(A-E)=r(B-E)$.

$$A-E=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ r(A-E)=2,$$

当 B 取（B），（C），（D）中的任一矩阵时，$r(B-E)=1$，从而（B），（C），（D）都排除，故选（A）.

法二　矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 的特征值为 $\lambda=1$（3 重），其线性无关的特征向量只有 1 个.

$|\lambda E-A|=(\lambda-1)^3=0$　　　$n-r(E-A)=3-2=1$

将选项中的 4 个矩阵分别记为 A_1，A_2，A_3，A_4，它们都是以 $\lambda=1$ 为 3 重特征值的矩阵.

$n-r(E-A_1)=3-2=1$

选项（A）中的矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 只有 1 个线性无关的特征向量；

$n-r(E-A_2)=3-1=2$

选项（B）中的矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 有 2 个线性无关的特征向量；

$n-r(E-A_3)=3-1=2$

选项（C）中的矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 也有 2 个线性无关的特征向量；

选项（D）中的矩阵 $\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ 也有 $\overset{n-r(E-A_4)=3-1=2}{2}$ 个线性无关的特征向量 .

根据“1. 五个性质”中的性质⑤，可知只有选项（A）符合要求 .

例 8.7 已知 A 是 3 阶矩阵，且 $A\sim\Lambda=\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{bmatrix}$. 设 $B=A^3-6A^2+11A-E$，则 $B=$________.

【解】应填 $5E$.

由 $A\sim\Lambda=\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{bmatrix}$，知存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$，则

$$
\begin{aligned}
B&=f(A)=Pf(\Lambda)P^{-1}\\
&=P(\Lambda^3-6\Lambda^2+11\Lambda-E)P^{-1}\\
&=P\left(\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{bmatrix}^3-6\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{bmatrix}^2+11\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}\right)P^{-1}\\
&=P\begin{bmatrix}1-6+11-1&&\\&8-24+22-1&\\&&27-54+33-1\end{bmatrix}P^{-1}\\
&=P\begin{bmatrix}5&&\\&5&\\&&5\end{bmatrix}P^{-1}=5E.
\end{aligned}
$$

例 8.8 设 A，B 是可逆矩阵，且 A 与 B 相似，则下列结论错误的是（　　）.

（A）A^{T} 与 B^{T} 相似　　（B）A^2+A^{-1} 与 B^2+B^{-1} 相似

（C）$A+A^{\mathrm{T}}$ 与 $B+B^{\mathrm{T}}$ 相似　　（D）A^*-A^{-1} 与 B^*-B^{-1} 相似

【解】应选（C）.

由本讲的“二 2（1）”和“二 2（2）”的“注（2）”可知，（A），（B），（D）均正确，（C）错误 .

例 8.9 设 A，P 均为 3 阶矩阵，$P=[\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3]$，其中 γ_1，γ_2，γ_3 为 3 维列向量且线性无关，若 $A[\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3]=[\gamma_3,\gamma_2,\gamma_1]$.

（1）证明：A 可相似对角化；

（2）若 $P=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&1&0\\0&3&1\end{bmatrix}$，求可逆矩阵 C，使得 $C^{-1}AC=\Lambda$，并写出对角矩阵 Λ.

（1）【证】记 $B=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$，则由例 7.7 得 $A\sim B$，且 B 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=-1$，B 的特征向量为

$$\xi_1=[1,0,1]^{\mathrm{T}},\ \xi_2=[0,1,0]^{\mathrm{T}},\ \xi_3=[1,0,-1]^{\mathrm{T}}.$$

记 $Q=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&-1\end{bmatrix}$，则 $Q^{-1}BQ=\Lambda=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{bmatrix}$，故 B 可相似对角化，即 $B\sim\Lambda$，由传递性知，$A\sim\Lambda$.

（2）【解】因为 $AP=PB$，所以 $B=P^{-1}AP$，由（1）知，

$$Q^{-1}BQ=Q^{-1}(P^{-1}AP)Q=\Lambda，即\ (PQ)^{-1}A(PQ)=\Lambda=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{bmatrix}.$$

令 $C=PQ=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&1&0\\0&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1&2\\0&1&0\\1&3&-1\end{bmatrix}$，即为所求 .

例 8.10 设 3 阶矩阵 A 与 B 乘积可交换，α_1，α_2，α_3 是线性无关的 3 维列向量，且满足

$$A\alpha_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\ A\alpha_2=\alpha_3,\ A\alpha_3=2\alpha_2+\alpha_3.$$

（1）求 A 的全部特征值；

（2）证明：B 与对角矩阵相似 .

（1）【解】$A[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&2\\1&1&1\end{bmatrix}$，因为 α_1，α_2，α_3 线性无关，所以矩阵 $P=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$ 可逆，且有

$$P^{-1}AP=C,\ C=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&2\\1&1&1\end{bmatrix}.$$

由于 A 与 C 相似，因此 A 与 C 具有相同的特征值 . 由

$$|\lambda E-C|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&0\\-1&\lambda&-2\\-1&-1&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2)=0,$$

得特征值 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=1$，$\lambda_3=2$.

（2）【证】由（1）知 A 有 3 个互不相同的特征值，故 A 与对角矩阵相似，则 A 有 3 个线性无关的特征向量 . 又因为 A 与 B 乘积可交换，故由第 7 讲“三（2）”中的“⑤”知，A 的特征向量都是 B 的特征向量，即 B 有 3 个线性无关的特征向量，因此 B 也与对角矩阵相似 .

【注】(1) 若考解答题，则需证明第 7 讲"三 (2)"中的"⑤"，不可直接使用．

(2) 设 λ_i，μ_i ($i=1,2,3$) 分别为 A 与 B 的特征值，且 λ_i 互不相等．由于 A 与 B 有相同的特征向量，可设它们为 β_1，β_2，β_3，则有

$$A\beta_i=\lambda_i\beta_i,\ B\beta_i=\mu_i\beta_i,\ i=1,\ 2,\ 3.$$

令 $Q=[\beta_1,\beta_2,\beta_3]$，则 Q 可逆，且

$$Q^{-1}AQ=\Lambda_1=\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&\lambda_3\end{bmatrix},\ Q^{-1}BQ=\Lambda_2=\begin{bmatrix}\mu_1&&\\&\mu_2&\\&&\mu_3\end{bmatrix}.$$

三 实对称矩阵与正交矩阵

1. 实对称矩阵的重要结论

若 A 为实对称矩阵，则

①特征值均为实数，特征向量均为实向量．

②不同特征值对应的特征向量正交．

(即 $\lambda_1\neq\lambda_2\Rightarrow\xi_1\perp\xi_2\Rightarrow(\xi_1,\xi_2)=0$，建方程)

③可用正交矩阵相似对角化．

(即存在正交矩阵 Q，使 $Q^{-1}AQ=Q^{\mathrm{T}}AQ=\Lambda$)

【注】这里的正交矩阵 Q 是由 A 的单位正交化的特征向量组成的，Λ 是由 A 的特征值组成的，注意 Q 的每一列与 Λ 的每一个主对角线元素要对应．

④ A 为 n 阶实对称矩阵 $\Leftrightarrow A$ 有 n 个正交的特征向量．

【注】证 充分性是读者很熟悉的结论，但其必要性却鲜有人知．

(必要性) 设 β_1，β_2，…，β_n 是 n 阶矩阵 A 的 n 个相互正交的特征向量 (注意，n 个相互正交的特征向量必是 n 个线性无关的特征向量)，则该 n 阶矩阵 A 必可相似对角化，将相互正交的特征向量 β_1，β_2，…，β_n 单位化处理成 γ_1，γ_2，…，γ_n，则 γ_1，γ_2，…，γ_n 仍是该 n 阶矩阵 A 的特征向量．令 $Q=[\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n]$，则 $Q^{-1}AQ=\Lambda$，从而 $A=Q\Lambda Q^{-1}$，进而 $A^{\mathrm{T}}=(Q\Lambda Q^{-1})^{\mathrm{T}}=(Q^{-1})^{\mathrm{T}}\Lambda^{\mathrm{T}}Q^{\mathrm{T}}=(Q^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\Lambda Q^{-1}=Q\Lambda Q^{-1}=A$，于是 A 是实对称矩阵．

2. 正交矩阵的重要结论

①若 A 为正交矩阵，则

$$A^{\mathrm{T}}A=E\Leftrightarrow A^{-1}=A^{\mathrm{T}}$$

即组成A的每一行（列）
均为两两正交的单位向量

$$\Leftrightarrow A \text{ 由规范正交基组成}$$

$\Leftrightarrow A^{\mathrm{T}}$ 是正交矩阵

$\Leftrightarrow A^{-1}$ 是正交矩阵

$\Leftrightarrow A^{*}$ 是正交矩阵

$\Leftrightarrow -A$ 是正交矩阵 .

②若 A，B 为同阶正交矩阵，则 AB 为正交矩阵，$A+B$ 不一定为正交矩阵 .

③若 A 为正交矩阵，则其实特征值的取值范围为 $\{-1, 1\}$.

【注】证　设 $A\alpha=\lambda\alpha$，$\alpha\neq 0$，于是 $\alpha^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}=(A\alpha)^{\mathrm{T}}=(\lambda\alpha)^{\mathrm{T}}=\lambda\alpha^{\mathrm{T}}$，因为 $A^{\mathrm{T}}A=E$，从而 $\alpha^{\mathrm{T}}\alpha=\alpha^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}A\alpha=(\lambda\alpha^{\mathrm{T}})\lambda\alpha=\lambda^2\alpha^{\mathrm{T}}\alpha$，则 $(1-\lambda^2)\alpha^{\mathrm{T}}\alpha=0$. 因为 α 是实特征向量，所以 $\alpha^{\mathrm{T}}\alpha=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2>0$，可知 $\lambda^2=1$，由于 λ 是实数，故只能是 -1 或 1.

例 8.11　设 A 是 3 阶实对称矩阵，满足 $A+A^2+\dfrac{1}{2}A^3=O$，则 $r(A)=$________.

【解】应填 0.

设 λ 是 A 的任一特征值，则 $\lambda+\lambda^2+\dfrac{1}{2}\lambda^3=0$，解得 $\lambda=0$ 或 $\lambda=-1\pm\mathrm{i}$，其中 i 是虚数单位 . 因为 A 是实对称矩阵，其特征值 λ 为实数，所以只能为 $\lambda=0$（三重），且 A 相似于对角矩阵 $\begin{bmatrix}0 & & \\ & 0 & \\ & & 0\end{bmatrix}$，故 $r(A)=0$.

例 8.12　设 A 为 3 阶正交矩阵，它的第一行第一列位置的元素是 1，又设 $\beta=[1, 0, 0]^{\mathrm{T}}$，则方程组 $Ax=\beta$ 的解为________.

【解】应填 $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$.

正交矩阵的几何背景：每一列（行）长度为1

A 为 3 阶正交矩阵且 $a_{11}=1$，则 A 可逆且 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & a_{22} & a_{23}\\ 0 & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$，根据克拉默法则知，$Ax=\beta$ 有唯一解，且

$$x=A^{-1}\beta=A^{\mathrm{T}}\beta=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & a_{22} & a_{32}\\ 0 & a_{23} & a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}.$$

例 8.13　设 A 为 n 阶正交矩阵，则以下两个命题

①若 $|A|=-1$，则 -1 是 A 的特征值；

②若 $|A|=1$，则 1 是 A 的特征值 .

说法正确的是（　　）.

（A）①正确，②也正确　　（B）①正确，②不正确

（C）①不正确，②正确　　（D）①不正确，②也不正确

【解】 应选（B）.

因为 A 为正交矩阵，故 $A^{\mathrm{T}}=A^{-1}$.

若 $|A|=-1$，则

$$
\begin{aligned}
|-E-A|&=|-AA^{\mathrm{T}}-A|=|A(-A^{\mathrm{T}}-E)|\\
&=|A||(-E-A)^{\mathrm{T}}|=-|-E-A|,
\end{aligned}
$$

所以 $|-E-A|=0$，故 -1 是 A 的特征值 . ①正确 .

若 $|A|=1$，则

$$
\begin{aligned}
|E-A|&=|AA^{\mathrm{T}}-A|=|A(A^{\mathrm{T}}-E)|=|A||-(E-A)^{\mathrm{T}}|\\
&=(-1)^n|A||E-A|=(-1)^n|E-A|,
\end{aligned}
$$

当 n 为奇数时，$|E-A|=0$，此时 1 是 A 的特征值，当 n 为偶数时，未必有 $|E-A|=0$，此时 1 未必是 A 的特征值 . 故②不正确 .

例 8.14 设 A 是 3 阶实对称矩阵，已知 A 的每行元素之和为 3，且有二重特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$. 求 A 的全部特征值、特征向量，并求 A^n.

【解】法一 A 是 3 阶矩阵，每行元素之和为 3，即有

$$
A\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\3\\3\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},
$$

故知 A 有特征值 $\lambda_3=3$，对应的特征向量为 $\xi_3=[1,\ 1,\ 1]^{\mathrm{T}}$，所以对应于 $\lambda_3=3$ 的全部特征向量为 $k_3\xi_3$（k_3 为任意非零常数）.

又 A 是实对称矩阵，不同特征值对应的特征向量正交，故设 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 对应的特征向量为 $\xi=[x_1,\ x_2,\ x_3]^{\mathrm{T}}$，于是

$$
\xi_3^{\mathrm{T}}\xi=x_1+x_2+x_3=0,
$$

解得 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的线性无关的特征向量为

$$
\xi_1=[-1,\ 1,\ 0]^{\mathrm{T}},\quad \xi_2=[-1,\ 0,\ 1]^{\mathrm{T}}.
$$

所以对应于 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的全部特征向量为 $k_1\xi_1+k_2\xi_2$（k_1，k_2 为不全为零的任意常数）.

取 $P=[\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3]=\begin{bmatrix}-1&-1&1\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}$，则 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&3\end{bmatrix}$，故

$$
A=P\Lambda P^{-1},\quad A^n=P\Lambda P^{-1}\cdots P\Lambda P^{-1}=P\Lambda^nP^{-1},
$$

其中 P^{-1} 可如下求得：

$$
\left[\begin{array}{ccc:ccc}-1&-1&1&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\0&1&1&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\text{互换}}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&0&1&0\\-1&-1&1&1&0&0\\0&1&1&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\text{互换}}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&0&1&0\\0&1&1&0&0&1\\-1&-1&1&1&0&0\end{array}\right]\text{1倍加至}
$$

$$\xrightarrow{1倍加至}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&0&1&0\\0&1&1&0&0&1\\0&-1&2&1&1&0\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&0&1&0\\0&1&1&0&0&1\\0&0&3&1&1&1\end{array}\right]\xrightarrow{\times\frac{1}{3}}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&0&1&0\\0&1&1&0&0&1\\0&0&1&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{array}\right]\begin{array}{l}(-1)倍加至\\(-1)倍加至\end{array}$$

$$\rightarrow\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\0&1&0&-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\0&0&1&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{array}\right],$$

则 $\boldsymbol{P}^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1&2&-1\\-1&-1&2\\1&1&1\end{bmatrix}$，故

$$\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^n\boldsymbol{P}^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1&-1&1\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&3\end{bmatrix}^n\begin{bmatrix}-1&2&-1\\-1&-1&2\\1&1&1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1&-1&1\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&3^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&2&-1\\-1&-1&2\\1&1&1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2+3^n&-1+3^n&-1+3^n\\-1+3^n&2+3^n&-1+3^n\\-1+3^n&-1+3^n&2+3^n\end{bmatrix}.$$

法二 由法一得，$\boldsymbol{A}\xi_3=\lambda_3\xi_3$，其中 $\lambda_3=3$，$\xi_3=[1,1,1]^{\mathrm{T}}$. 所以对应于 $\lambda_3=3$ 的全部特征向量为 $k_3\xi_3$（k_3 为任意非零常数）.

设 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 对应的特征向量为 $\xi=[x_1,x_2,x_3]^{\mathrm{T}}$，则

$$\xi_3^{\mathrm{T}}\xi=x_1+x_2+x_3=0,$$

取 $\xi_1=[1,-1,0]^{\mathrm{T}}$，再取 ξ_2 与 ξ_1 正交，设 $\xi_2=[1,1,x]^{\mathrm{T}}$，代入上式得 $\xi_2=[1,1,-2]^{\mathrm{T}}$，所以对应于 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的全部特征向量为 $k_1\xi_1+k_2\xi_2$（k_1，k_2 为不全为零的任意常数）.

将 ξ_1，ξ_2，ξ_3 单位化，并取正交矩阵

$$\boldsymbol{Q}=[\xi_1^{\circ},\xi_2^{\circ},\xi_3^{\circ}]=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&-\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix},$$

则
$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&3\end{bmatrix}=\boldsymbol{\Lambda},$$

$$A^n=Q\Lambda^nQ^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&-\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&3^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2+3^n&-1+3^n&-1+3^n\\-1+3^n&2+3^n&-1+3^n\\-1+3^n&-1+3^n&2+3^n\end{bmatrix}.$$

法三 由法一得，A 的特征值为 1，1，3，A 的对应于 $\lambda_3=3$ 的特征向量为 $\xi_3=[1,1,1]^{\mathrm{T}}$，则 A^n 的特征值为 $1,1,3^n$，A^n-E 的特征值为 $0,0,3^n-1$，其对应于 3^n-1 的特征向量仍为 $\xi_3=[1,1,1]^{\mathrm{T}}$，单位化得 $\eta=\frac{1}{\sqrt{3}}[1,1,1]^{\mathrm{T}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\xi_3$.

从而由实对称矩阵的相关结论（见注（2））得，

$$A^n-E=(3^n-1)\eta\eta^{\mathrm{T}}=(3^n-1)\frac{1}{\sqrt{3}}\xi_3\frac{1}{\sqrt{3}}\xi_3^{\mathrm{T}}=\frac{1}{3}(3^n-1)\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix},$$

故 $A^n=\frac{1}{3}(3^n-1)\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}+E=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2+3^n&-1+3^n&-1+3^n\\-1+3^n&2+3^n&-1+3^n\\-1+3^n&-1+3^n&2+3^n\end{bmatrix}$.

【注】(1) 因为 A 是实对称矩阵，所以不同特征值对应的特征向量正交，且不仅存在可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP=\Lambda$，还存在正交矩阵 Q，使

$$Q^{-1}AQ=Q^{\mathrm{T}}AQ=\Lambda.$$

法二中利用正交矩阵 Q 有 $Q^{-1}=Q^{\mathrm{T}}$，避免了用初等变换求逆矩阵，较简便.

(2) 设 n 阶实对称矩阵 A 属于特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的单位正交特征向量为 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$，则

$$A=\lambda_1\xi_1\xi_1^{\mathrm{T}}+\lambda_2\xi_2\xi_2^{\mathrm{T}}+\cdots+\lambda_n\xi_n\xi_n^{\mathrm{T}}.$$

证 令 $Q=[\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n]$，有 $Q^{\mathrm{T}}AQ=\Lambda$，即

$$A=Q\Lambda Q^{\mathrm{T}}=[\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n]\begin{bmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1^{\mathrm{T}}\\\xi_2^{\mathrm{T}}\\\vdots\\\xi_n^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$$

$$=\lambda_1\xi_1\xi_1^{\mathrm{T}}+\lambda_2\xi_2\xi_2^{\mathrm{T}}+\cdots+\lambda_n\xi_n\xi_n^{\mathrm{T}}.$$

例 8.15 设 α，β 是 3 维单位正交列向量组，$A=\alpha\beta^{\mathrm{T}}+\beta\alpha^{\mathrm{T}}$.

(1) 证明：A 可相似对角化；

（2）若 $\alpha=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$，$\beta=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$，求正交矩阵 C，使得 C^TA^*C 为对角矩阵，并求此对角矩阵．

（1）【证】$A^T=(\alpha\beta^T+\beta\alpha^T)^T=\beta\alpha^T+\alpha\beta^T=A$，即 A 为实对称矩阵，必可相似对角化．

（2）【解】因为 α，β 是单位正交列向量组，所以

$$A\alpha=(\alpha\beta^T+\beta\alpha^T)\alpha=\beta, \quad ①$$

$$A\beta=(\alpha\beta^T+\beta\alpha^T)\beta=\alpha, \quad ②$$

① + ②得 $A(\alpha+\beta)=1(\alpha+\beta)$，① − ②得 $A(\alpha-\beta)=(-1)(\alpha-\beta)$．

又 α 与 β 正交，α 与 β 线性无关，$\alpha+\beta\neq\mathbf{0}$，$\alpha-\beta\neq\mathbf{0}$，于是 1，−1 是 A 的两个特征值，且 $\alpha+\beta$，$\alpha-\beta$ 分别为对应的特征向量．

又 $r(A)\leqslant r(\alpha\beta^T)+r(\beta\alpha^T)\leqslant r(\alpha)+r(\beta)=2$，所以 $Ax=\mathbf{0}$ 必有非零解．设 γ 是齐次线性方程组 $Ax=\mathbf{0}$ 的一个非零解，即有 $A\gamma=0\gamma$，于是 0 是 A 的一个特征值，γ 是其对应的特征向量．

设 $\gamma=[x_1, x_2, x_3]^T$，由 $(\gamma, \alpha+\beta)=0$，$(\gamma, \alpha-\beta)=0$，其中

$$\alpha+\beta=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\1\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix},\quad \alpha-\beta=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\-1\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix},$$

有

$$\begin{cases}\frac{\sqrt{2}}{2}x_1+x_2+\frac{\sqrt{2}}{2}x_3=0,\\\frac{\sqrt{2}}{2}x_1-x_2+\frac{\sqrt{2}}{2}x_3=0,\end{cases}$$

解得 $\gamma=[-1, 0, 1]^T$. 单位化，有

$$\eta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha+\beta)=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix},\quad \eta_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha-\beta)=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix},\quad \eta_3=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix},$$

记 $C=[\eta_1, \eta_2, \eta_3]$，则 $C^TAC=C^{-1}AC=\begin{bmatrix}1&&\\&-1&\\&&0\end{bmatrix}=\Lambda$，故 $A\sim\Lambda$.

由本讲“二 2（2）”的“注（2）”，得 $A^*\sim\Lambda^*$，且

$$C^TA^*C=C^{-1}A^*C=\Lambda^*=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}.$$