第4讲 一元函数微分学的计算

知识结构

- 基本求导公式
- 复合函数求导
- 隐函数求导
- 反函数求导
- 分段函数求导(含绝对值)
  - 在分段点用导数定义求导(定义法)
  - 在非分段点用导数公式求导(公式法)
- 对数求导法
- 幂指函数求导法
- 参数方程确定的函数求导
- 高阶导数
  - 归纳法
  - 莱布尼茨公式
  - 泰勒展开式

一 基本求导公式

以下求导公式均在其定义域上进行.

①$(x^k)'=kx^{k-1}$(k为任意实数).

②$(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}$.

③$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$;$(a^x)'=a^x\ln a$,$a>0$,$a\neq 1$.

④$(\sin x)'=\cos x$;$(\cos x)'=-\sin x$;

$(\tan x)'=\sec^2 x$;$(\cot x)'=-\csc^2 x$;

$(\sec x)'=\sec x\tan x$；$(\csc x)'=-\csc x\cot x$；

$(\ln|\cos x|)'=-\tan x$；$(\ln|\sin x|)'=\cot x$；

$(\ln|\sec x+\tan x|)'=\sec x$；$(\ln|\csc x-\cot x|)'=\csc x$.

⑤$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$；$(\operatorname{arccot} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$.

⑥$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

⑦$[\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})]'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$，常见 $a=1$；

$(\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|)'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$，常见 $a=1$.

二 复合函数求导

设 $u=g(x)$ 在点 x 处可导，$y=f(u)$ 在点 $u=g(x)$ 处可导，则

$$\{f[g(x)]\}'=f'[g(x)]g'(x).$$

【注】$\{f[g(x)]\}'=\dfrac{\mathrm{d}\{f[g(x)]\}}{\mathrm{d}x}$，而 $f'[g(x)]=\dfrac{\mathrm{d}\{f[g(x)]\}}{\mathrm{d}[g(x)]}$，要看清楚求导符号的位置，不要弄错了.

例 4.1 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图像如图 4-1 所示，设 $u(x)=f[g(x)]$，则 $u'(1)=$________.

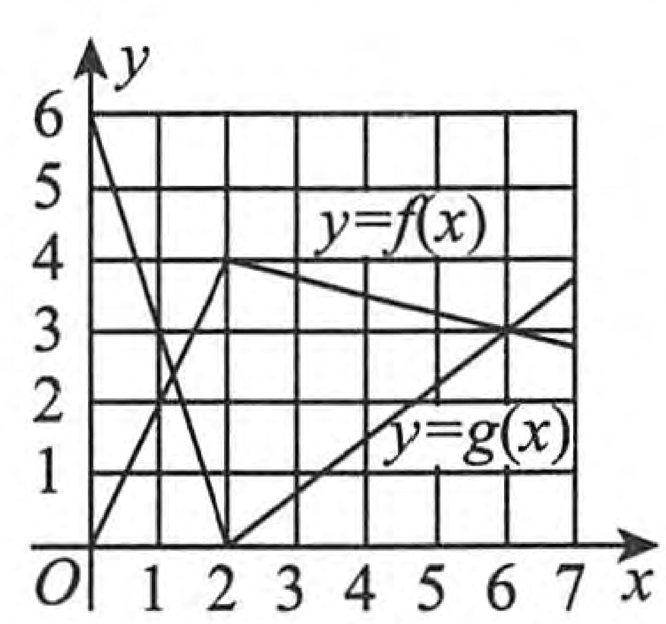

图 4-1

【解】应填 $\dfrac{3}{4}$.

由 $u'(x)=f'[g(x)]\cdot g'(x)$，有 $u'(1)=f'[g(1)]\cdot g'(1)$，其中

$$g(1)=3,g'(1)=\frac{0-6}{2-0}=-3,f'(3)=\frac{3-4}{6-2}=-\frac{1}{4},$$

故
$$u'(1)=f'(3)\cdot g'(1)=-\frac{1}{4}\cdot(-3)=\frac{3}{4}.$$

三 隐函数求导

设函数 $y=y(x)$ 是由方程 $F(x,y)=0$ 确定的可导函数，则有三种方法可求出导数.

法一 方程 $F(x,y)=0$ 两边对自变量 x 求导(注意 $y=y(x)$，即将 y 看作中间变量)，得到一个关于 y' 的方程，解该方程便可求出 y'.

法二 由复合函数求导公式可得

$$\mathrm{d}\{f[g(x)]\}=f'[g(x)]g'(x)\mathrm{d}x. \qquad (*)$$

(*)式就是**微分形式的不变性**——无论 u 是中间变量还是自变量，$\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u$ 都成立.

【注】有时会用到二元函数全微分形式的不变性：设 $z=f(u,v)$，$u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$，如果 $f(u,v)$，$u(x,y)$，$v(x,y)$ 分别有连续偏导数，则复合函数 $z=f(u,v)$ 在 (x,y) 处的全微分仍可表示为 $\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v$，即无论 u,v 是自变量还是中间变量此式总成立. 如 $z=xy^2$，则 $\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=y^2\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y$.

法三 由隐函数存在定理可得 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F'_x}{F'_y}$.

例 4.2 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $x^y=y^x+\cos x^3$ 所确定，则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$________.

【解】应填 $-\frac{yx^{y-1}-y^x\ln y+3x^2\sin x^3}{x^y\ln x-xy^{x-1}}$.

由 $F[x,y(x)]=0$，两边对 x 求导，有 $F'_x+F'_y\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$，解得 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F'_x}{F'_y}$，此即公式法.

令

$$F(x,y)=x^y-y^x-\cos x^3,$$

则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F'_x}{F'_y}=-\frac{yx^{y-1}-y^x\ln y+3x^2\sin x^3}{x^y\ln x-xy^{x-1}}.$$

【注】用上面公式法求导时，x,y 视为独立的自变量，即计算 F'_x 时 y 为常数，计算 F'_y 时 x 为常数.

例 4.3 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\cos(x^2+y^2)+\mathrm{e}^x-xy^2=0$ 所确定，则 $\mathrm{d}y=$________.

【解】应填 $\frac{\mathrm{e}^x-y^2-2x\sin(x^2+y^2)}{2y[x+\sin(x^2+y^2)]}\mathrm{d}x$.

法一 将原方程两边直接对 x 求导数，注意 y 是 x 的函数，解方程求出 y' 即可.

$$-(2x+2y\cdot y')\sin(x^2+y^2)+\mathrm{e}^x-y^2-x\cdot 2y\cdot y'=0,$$

得

$$y'=\frac{\mathrm{e}^x-y^2-2x\sin(x^2+y^2)}{2y[x+\sin(x^2+y^2)]},$$

故

$$\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{e}^x-y^2-2x\sin(x^2+y^2)}{2y[x+\sin(x^2+y^2)]}\mathrm{d}x.$$

法二　将方程 $\cos(x^2+y^2)+e^x-xy^2=0$ 两边同时求微分，得

$$-(2x\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y)\sin(x^2+y^2)+e^x\mathrm{d}x-y^2\mathrm{d}x-2xy\mathrm{d}y=0,$$

故
$$\mathrm{d}y=\frac{e^x-y^2-2x\sin(x^2+y^2)}{2y[x+\sin(x^2+y^2)]}\mathrm{d}x.$$

法三　公式法.

令 $F(x,y)=\cos(x^2+y^2)+e^x-xy^2$，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F'_x}{F'_y}=\frac{e^x-y^2-2x\sin(x^2+y^2)}{2y[x+\sin(x^2+y^2)]},$$

故
$$\mathrm{d}y=\frac{e^x-y^2-2x\sin(x^2+y^2)}{2y[x+\sin(x^2+y^2)]}\mathrm{d}x.$$

例 4.4　设 $y=y(x)$ 是由方程 $\int_0^y e^{-t^2}\mathrm{d}t=2y-\ln(1+x)$ 所确定的二阶可导函数，且 $y(0)=0$，则 $y''\Big|_{x=0}=$ ________.

【解】 应填 -1.

对方程 $\int_0^y e^{-t^2}\mathrm{d}t=2y-\ln(1+x)$ 两边关于 x 连续求导两次，得

$$e^{-y^2}y'=2y'-\frac{1}{1+x},$$

$$-2ye^{-y^2}(y')^2+e^{-y^2}y''=2y''+\frac{1}{(1+x)^2}.$$

将 $x=0,y=0$ 代入上式，得 $y''\Big|_{x=0}=-1$.

四　反函数求导

设单调函数 $y=f(x)$ 可导，且 $f'(x)\neq 0$，则存在反函数 $x=\varphi(y)$，且 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}$，即

$$\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}.$$

在 $y=f(x)$ 二阶可导的情况下，记 $f'(x)=y'_x$，$\varphi'(y)=x'_y\ (x'_y\neq 0)$，则有

$$y'_x=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}=\frac{1}{x'_y},\ y''_{xx}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{x'_y}\right)}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{x'_y}\right)}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{1}{x'_y}=\frac{-x''_{yy}}{(x'_y)^3}.$$

反过来，则有
$$x'_y=\frac{1}{y'_x},\ x''_{yy}=\frac{-y''_{xx}}{(y'_x)^3}.$$

例 4.5　设 $y=f(x)=x\int_0^2 e^{-(xt)^2}\mathrm{d}t+x^2$，其在 $x=0$ 的某邻域内与 $x=g(y)$ 互为反函数，

则 $g''(0)=$________.

【解】应填 $-\dfrac{1}{4}$.

由
$$x\int_0^2 \mathrm{e}^{-(xt)^2}\mathrm{d}t \xlongequal{\text{令 } xt=u} \int_0^{2x}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u,$$

得
$$f(x)=\int_0^{2x}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u+x^2,$$

于是 $f'(x)=2\mathrm{e}^{-4x^2}+2x$，$f''(x)=-16x\mathrm{e}^{-4x^2}+2$，$f'(0)=2$，$f''(0)=2$，且 $f(0)=0$，故
$$g''(0)=\frac{-f''(0)}{[f'(0)]^3}=-\frac{1}{4}.$$

五 分段函数求导(含绝对值)

(1) 在分段点用导数定义求导(定义法).

(2) 在非分段点用导数公式求导(公式法).

例 4.6 已知函数 $f(x)$ 连续且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，$g(x)=\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t$，求 $g'(x)$ 并证明 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

【解】由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，知 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$，又 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，所以 $f(0)=0$，从而
$$g(0)=\int_0^1 f(0)\mathrm{d}t=0.$$

当 $x\neq0$ 时，令 $u=xt$，则
$$g(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u.$$

故
$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u, & x\neq0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

定义法

于是
$$g'(0)=\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{2x}=\frac{1}{2}.$$

当 $x\neq0$ 时，$g'(x)=\dfrac{f(x)}{x}-\dfrac{1}{x^2}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$.

公式法

故
$$g'(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}-\dfrac{1}{x^2}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u, & x\neq0,\\ \dfrac{1}{2}, & x=0.\end{cases}$$

因为
$$\lim_{x\to0}g'(x)=\lim_{x\to0}\left[\frac{f(x)}{x}-\frac{1}{x^2}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u\right]=\frac{1}{2}=g'(0),$$

所以 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

六 对数求导法

对于多项相乘、相除、开方、乘方的式子，一般先取对数再求导. 设 $y=f(x)$ $(y\neq 0)$，则

① 等式两边加绝对值符号后取对数，得 $\ln|y|=\ln|f(x)|$；

② 两边对自变量 x 求导(同样注意 $y=f(x)$，即将 y 看作中间变量)，得

$$\frac{1}{y}y'=[\ln|f(x)|]'\Rightarrow y'=y[\ln|f(x)|]'.$$

例 4.7 求 $f(x)=x^x(1-x)^{1-x}$ 在 $(0,1)$ 内的最小值.

【解】取对数，得

$$\ln f(x)=x\ln x+(1-x)\ln(1-x),$$

则
$$[\ln f(x)]'=\frac{1}{f(x)}f'(x)=\ln x+1-\ln(1-x)-(1-x)\cdot\frac{1}{1-x}$$
$$=\ln x-\ln(1-x)=\ln\frac{x}{1-x},$$

于是
$$f'(x)=f(x)\ln\frac{x}{1-x}.$$

令 $f'(x)=0$，得 $x=\frac{1}{2}$，当 $0<x<\frac{1}{2}$ 时，$f'(x)<0$；当 $\frac{1}{2}<x<1$ 时，$f'(x)>0$. 故 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right]$ 内单调减少，在 $\left[\frac{1}{2},1\right)$ 内单调增加，$x=\frac{1}{2}$ 为最小值点，且

$$f_{\min}(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}.$$

七 幂指函数求导法

对于 $u(x)^{v(x)}\ (u(x)>0,u(x)\neq 1)$，除了用上面的对数求导法外，还可以先化成指数函数

$$u(x)^{v(x)}=\mathrm{e}^{v(x)\ln u(x)},$$

然后对 x 求导，得

$$[u(x)^{v(x)}]'=[\mathrm{e}^{v(x)\ln u(x)}]'=u(x)^{v(x)}\left[v'(x)\ln u(x)+v(x)\cdot\frac{u'(x)}{u(x)}\right].$$

例 4.8 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^{2x}, & x>0,\\ x\mathrm{e}^x+1, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 则 $f'(x)=$ ______.

【解】应填 $\begin{cases}2x^{2x}(\ln x+1), & x>0,\\ \mathrm{e}^x(x+1), & x<0.\end{cases}$

当 $x>0$ 时，$f'(x)=(x^{2x})'=(\mathrm{e}^{2x\ln x})'=2x^{2x}(\ln x+1)$；当 $x<0$ 时，$f'(x)=\mathrm{e}^x(x+1)$.

因为 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^{2x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\mathrm{e}^{2x\ln x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2x\ln x}{x}=-\infty$，所以 $f'(0)$ 不存在.

综上，
$$f'(x)=\begin{cases}2x^{2x}(\ln x+1), & x>0,\\ \mathrm{e}^x(x+1), & x<0.\end{cases}$$

八 参数方程确定的函数求导

设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t)\end{cases}$ 确定，且 $\varphi(t),\psi(t)$ 均二阶可导，$\varphi'(t)\neq0$，其中 t 是参数，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\Big/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}.$$

例 4.9 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=x(t),\\ y=\int_0^{t^2}\ln(1+u)\mathrm{d}u\end{cases}$ 确定，其中 $x(t)$ 是初值问题 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-2t\mathrm{e}^{-x}=0,\\ x\Big|_{t=0}=0\end{cases}$ 的解，求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

【解】 由 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-2t\mathrm{e}^{-x}=0$ 得 $\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$，两端积分并由条件 $x\Big|_{t=0}=0$，得 $\mathrm{e}^x=1+t^2$，即

$$x=\ln(1+t^2).$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\ln(1+t^2)\cdot2t}{\frac{2t}{1+t^2}}=(1+t^2)\ln(1+t^2),$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(1+t^2)\ln(1+t^2)]}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{2t\ln(1+t^2)+2t}{\frac{2t}{1+t^2}}=(1+t^2)[\ln(1+t^2)+1].$$

九 高阶导数

(1) 归纳法.

比如，设 $y=2^x$，则 $y'=2^x\ln2,y''=2^x(\ln2)^2,\cdots$，得出通式

$$y^{(n)}=2^x(\ln2)^n,n=0,1,2,\cdots.$$

例 4.10 已知函数 $f(x)$ 具有任意阶导数，且 $f'(x)=[f(x)]^3$，则当 n 为大于 1 的整数

时，$f(x)$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(x)=$________.

【解】应填$(2n-1)!![f(x)]^{2n+1}$.

$$f'(x)=[f(x)]^3,f''(x)=3[f(x)]^2f'(x)=3[f(x)]^5,$$
$$f'''(x)=3\cdot5[f(x)]^4f'(x)=3\cdot5[f(x)]^7,$$
$$f^{(4)}(x)=3\cdot5\cdot7[f(x)]^6f'(x)=3\cdot5\cdot7[f(x)]^9,$$

由归纳法易知，$f^{(n)}(x)=(2n-1)!!\ [f(x)]^{2n+1}$.

【注】这里$(2n-1)!!=1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\cdots\cdot(2n-1)$.

例 4.11 已知函数 $f(x)=\dfrac{x^2}{1-x^2}$，则 $f^{(n)}(x)=$________$(n=1,2,3,\cdots)$.

【解】应填$\dfrac{n!}{2}\left[\dfrac{1}{(1-x)^{n+1}}+\dfrac{(-1)^n}{(1+x)^{n+1}}\right]$.

$$f(x)=\frac{x^2-1+1}{1-x^2}=-1+\frac{1}{1-x^2}=-1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right).$$

又 $$\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2},\left(\frac{1}{1-x}\right)''=\frac{2}{(1-x)^3},\left(\frac{1}{1-x}\right)'''=\frac{3\times2}{(1-x)^4},$$

$$\cdots\cdots$$

于是得到$\left(\dfrac{1}{1-x}\right)^{(n)}=\dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$，同理得到$\left(\dfrac{1}{1+x}\right)^{(n)}=\dfrac{(-1)^nn!}{(1+x)^{n+1}}$.

因此 $$f^{(n)}(x)=\frac{n!}{2}\left[\frac{1}{(1-x)^{n+1}}+\frac{(-1)^n}{(1+x)^{n+1}}\right].$$

【注】常用高阶导数(n 为正整数)：$(e^{ax+b})^{(n)}=a^ne^{ax+b}$；

$[\sin(ax+b)]^{(n)}=a^n\sin\left(ax+b+\dfrac{n\pi}{2}\right)$；$[\cos(ax+b)]^{(n)}=a^n\cos\left(ax+b+\dfrac{n\pi}{2}\right)$；

$[\ln(ax+b)]^{(n)}=(-1)^{n-1}a^n\dfrac{(n-1)!}{(ax+b)^n}$；$\left(\dfrac{1}{ax+b}\right)^{(n)}=(-1)^na^n\dfrac{n!}{(ax+b)^{n+1}}$.

例 4.12 设 $f(x,y)=\dfrac{y}{y-x}$，n 为大于 1 的整数，则$\left.\dfrac{\partial^nf}{\partial x^n}\right|_{(2,1)}=$________.

【解】应填$(-1)^{n+1}\cdot n!$.

$\left(\dfrac{1}{x}\right)^{(n)}=(-1)^n\cdot\dfrac{n!}{x^{n+1}}$

视 y 为常数，则

$$\frac{\partial^nf}{\partial x^n}=(-y)\cdot\left(\frac{1}{x-y}\right)_x^{(n)}=(-y)\cdot(-1)^n\cdot\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{n!}{(x-y)^{n+1}}},$$

故

$$\left.\frac{\partial^nf}{\partial x^n}\right|_{(2,1)}=(-1)\cdot(-1)^n\cdot n!=(-1)^{n+1}\cdot n!.$$

(2) 莱布尼茨公式.

设 $u=u(x)$，$v=v(x)$ 均 n 阶可导，则

$$(u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)},$$

$$(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+C_n^1u^{(n-1)}v'+C_n^2u^{(n-2)}v''+\cdots+C_n^ku^{(n-k)}v^{(k)}+\cdots+C_n^{n-1}u'v^{(n-1)}+uv^{(n)}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^ku^{(n-k)}v^{(k)}. \tag{*}$$

(*)式就是乘积的高阶导数的**莱布尼茨公式**，其中 $u^{(0)}=u,v^{(0)}=v$.

【注】① 见到求两个函数乘积的高阶导数，一般用莱布尼茨公式即可，有时要结合“(1) 归纳法”中的通式；对于一个函数求高阶导数较困难时，若能转化成两个函数的乘积形式，亦可用莱布尼茨公式.

② 若 n 不太大，其系数 $C_n^0,C_n^1,C_n^2,\cdots,C_n^{n-1},C_n^n$ 的记忆方法可按下述“三角形”：

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

例 4.13 设 $f(x)=(x^3-1)^n$，则 $f^{(n)}(1)=$________.

【解】应填 $3^nn!$.

$f(x)=(x^3-1)^n=(x-1)^n(x^2+x+1)^n$. 由莱布尼茨公式，得

$$f^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k[(x-1)^n]^{(k)}[(x^2+x+1)^n]^{(n-k)},$$

故 $f^{(n)}(1)=C_n^0(x-1)^n[(x^2+x+1)^n]^{(n)}\Big|_{x=1}+C_n^1[(x-1)^n]'[(x^2+x+1)^n]^{(n-1)}\Big|_{x=1}+\cdots+$

$[(x-1)^n]^{(n-1)}=n!(x-1)$　　$[(x-1)^n]^{(n)}=n!$

$C_n^{n-1}[(x-1)^n]^{(n-1)}[(x^2+x+1)^n]'\Big|_{x=1}+C_n^n[(x-1)^n]^{(n)}(x^2+x+1)^n\Big|_{x=1}$

$=3^nn!$.

【注】多项式 $P_n=(x-x_0)^n$ 的求导规律应当清楚，即 $P_n^{(n-1)}=n!(x-x_0)$，而 $P_n^{(n)}=n!$.

(3) 泰勒展开式.

① 任何一个无穷阶可导的函数都可写成

抽象展开

$$y=f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

或者

$$y=f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

具体展开

② 题目给出一个具体的无穷阶可导函数 $y=f(x)$，可以通过已知公式展开成幂级数. 这些已知公式为

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots,-\infty<x<+\infty.$$

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^nx^n+\cdots,-1<x<1.$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots,-1<x<1.$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots,-1<x\leqslant 1.$$

$$\begin{aligned}\sin x&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\\&=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots,-\infty<x<+\infty.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos x&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\\&=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots,-\infty<x<+\infty.\end{aligned}$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots,$$

$$\begin{cases}x\in(-1,1), & \alpha\leqslant -1,\\ x\in(-1,1], & -1<\alpha<0,\\ x\in[-1,1], & \alpha>0,\alpha\notin\mathbf{N}_+,\\ x\in\mathbf{R}, & \alpha\in\mathbf{N}_+.\end{cases}$$

$$\tan x=x+\frac{1}{3}x^3+\cdots.$$

$$\arcsin x=x+\frac{1}{6}x^3+\cdots.$$

$$\arctan x=x-\frac{1}{3}x^3+\cdots.$$

由唯一性，比较系数

③ 函数泰勒展开式的唯一性：无论 $f(x)$ 由何种方法展开，其泰勒展开式具有唯一性. 于是我们可以通过比较 ①，② 中公式的系数，获得 $f^{(n)}(x_0)$ 或者 $f^{(n)}(0)$.

例 4.14 设函数 $f(x)=\dfrac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$，则 $f^{(4)}(0)=$________.

【解】 应填 -48.

$$\begin{aligned}f(x)=\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}&=1+\frac{2x}{1-x+x^2}=1+2x\cdot\frac{1+x}{1+x^3}\\&=1+2x(1+x)[1-x^3+o(x^3)]\\&=1+2x+2x^2-2x^4+o(x^4)(x\to 0).\end{aligned}$$

具体展开　　$\dfrac{1}{1+x^3}=1-x^3+o(x^3)$

又 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$，由泰勒展开式的唯一性，有 $\dfrac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4=-2x^4$，故

抽象展开

$$f^{(4)}(0)=-2\cdot 4!=-48.$$