第2讲 余子式和代数余子式的计算

知识结构

- 用行列式 — $k_1A_{i1}+k_2A_{i2}+\cdots+k_nA_{in}=\begin{vmatrix} & * & & \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \\ & * & & \end{vmatrix}$
- 用矩阵 — 当 $|A|\neq 0$ 时，$A^*=|A|A^{-1}$
- 用特征值 — 设 A 为 3 阶矩阵，当 A 为可逆矩阵时，记其特征值为 λ_1，λ_2，λ_3，则 $A_{11}+A_{22}+A_{33}=\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_3+\lambda_1\lambda_2$

一 用行列式

由
$$a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\begin{vmatrix} & * & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ & * & & \end{vmatrix}, \qquad ①$$
得
$$k_1A_{i1}+k_2A_{i2}+\cdots+k_nA_{in}=\begin{vmatrix} & * & & \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \\ & * & & \end{vmatrix}, \qquad ②$$

其中 * 处表示元素不变，①，②的区别仅在于第 i 行的元素 a_{i1}，a_{i2}，…，a_{in} 换成了 k_1，k_2，…，k_n，这样，给出不同的系数 k_1，k_2，…，k_n，就得到不同的行列式.

【注】若要求 $k_1M_{i1}+k_2M_{i2}+\cdots+k_nM_{in}$，只需用 $M_{ij}=(-1)^{i+j}A_{ij}$ 化为关于 A_{ij} 的线性组合即可.

例 2.1 设 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -5 & 3 \\ 3 & 0 & a & b \\ 1 & -3 & 5 & 0 \end{vmatrix}=A_{41}-A_{42}+A_{43}+10$，其中 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式，则 a，b 的值为（　　）.

（A）$a=4$，$b=1$　（B）$a=1$，$b=4$　（C）$a=4$，b 为任意常数　（D）$a=1$，b 为任意常数

【解】应选（C）.

$$A_{41}-A_{42}+A_{43}=1\cdot A_{41}+(-1)\cdot A_{42}+1\cdot A_{43}+0\cdot A_{44}=\begin{vmatrix}2&1&0&-1\\-1&2&-5&3\\3&0&a&b\\1&-1&1&0\end{vmatrix},$$

故

见例1.1

$$\begin{vmatrix}2&1&0&-1\\-1&2&-5&3\\3&0&a&b\\1&-3&5&0\end{vmatrix}-(A_{41}-A_{42}+A_{43})=\begin{vmatrix}2&1&0&-1\\-1&2&-5&3\\3&0&a&b\\1&-3&5&0\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}2&1&0&-1\\-1&2&-5&3\\3&0&a&b\\1&-1&1&0\end{vmatrix}=10(a-3)=10,$$

所以 $a=4$，b 为任意常数．

二 用矩阵

当 $|A|\neq 0$ 时，

$$A^{*}=|A|A^{-1}. \qquad ③$$

由于 A^{*} 由 A_{ij} 组成，用③式求出 A^{*}，即得到所有的 A_{ij}，但要注意，此方法要求 $|A|\neq 0$，这是前提，也是一种限制．

例 2.2 设 $A=\begin{bmatrix}0&0&0&5&6\\0&0&0&7&8\\1&2&3&0&0\\0&1&4&0&0\\0&0&1&0&0\end{bmatrix}$，则 $|A|$ 中所有元素的代数余子式之和为________．

【解】应填 -4.

令 $B=\begin{bmatrix}5&6\\7&8\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&4\\0&0&1\end{bmatrix}$，则

由第3讲"三"中的"2⑦"知

$$A=\begin{bmatrix}O&B\\C&O\end{bmatrix},\ A^{-1}=\begin{bmatrix}O&C^{-1}\\B^{-1}&O\end{bmatrix},$$

其中 $B^{-1}=\begin{bmatrix}-4&3\\\frac{7}{2}&-\frac{5}{2}\end{bmatrix}$，$C^{-1}=\begin{bmatrix}1&-2&5\\0&1&-4\\0&0&1\end{bmatrix}$.

于是，

$$|A|=(-1)^{2\times 3}|B||C|=(-2)\times 1=-2,$$

$$A^*=|A|A^{-1}=-2\begin{bmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{bmatrix}=-2\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

故 $|A|$ 中所有元素的代数余子式之和为 $\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5}A_{ij}=-2\times 2=-4.$

三 用特征值

设 A 为 3 阶矩阵，当 A 为可逆矩阵时，记其特征值为 λ_1，λ_2，λ_3，则 A^{-1} 的特征值为 λ_1^{-1}，λ_2^{-1}，λ_3^{-1}，且由 $A^*=|A|A^{-1}=\lambda_1\lambda_2\lambda_3A^{-1}$，可知 A^* 的特征值为

$$\lambda_1^*=\lambda_1\lambda_2\lambda_3\cdot\lambda_1^{-1}=\lambda_2\lambda_3,\ \lambda_2^*=\lambda_1\lambda_2\lambda_3\cdot\lambda_2^{-1}=\lambda_1\lambda_3,\ \lambda_3^*=\lambda_1\lambda_2\lambda_3\cdot\lambda_3^{-1}=\lambda_1\lambda_2,$$

故由

$$A^*=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix},$$

知 $A_{11}+A_{22}+A_{33}=\mathrm{tr}(A^*)=\lambda_1^*+\lambda_2^*+\lambda_3^*=\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_3+\lambda_1\lambda_2.$

这些公式易记、好用，考生应熟知 .

例 2.3 已知 3 阶方阵 A 的特征值为 -1，2，3，则 $A_{11}+A_{22}+A_{33}=$________.

【解】应填 1.

记 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=3$，由上述公式，有

$$\begin{aligned} A_{11}+A_{22}+A_{33}=\mathrm{tr}(A^*)&=\lambda_1^*+\lambda_2^*+\lambda_3^* \\ &=\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_3+\lambda_1\lambda_2 \\ &=2\times3+(-1)\times3+(-1)\times2 \\ &=6-3-2=1. \end{aligned}$$