第14讲 二重积分

知识结构

- 概念
  - 和式极限
  - 普通对称性
  - 轮换对称性
  - 二重积分比大小
    - 用对称性
    - 用保号性
  - 二重积分中值定理
  - 周期性
- 计算
  - 直角坐标系下的计算法
  - 极坐标系下的计算法
  - 极坐标系与直角坐标系的互相转化

一 概念

1. 和式极限

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}f\left(a+\frac{b-a}{n}i,c+\frac{d-c}{n}j\right)\cdot\frac{b-a}{n}\cdot\frac{d-c}{n},$$

其中 $D=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d\}$.

例 14.1 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=(\quad)$.

(A) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\dfrac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y$　　(B) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\dfrac{1}{(1+x)(1+y)}\mathrm{d}y$

(C) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\dfrac{1}{(1+x)(1+y)}\mathrm{d}y$　　(D) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\dfrac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y$

【解】应选(D).

设 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$，记 $f(x,y)=\dfrac{1}{(1+x)(1+y^2)}$.

用直线 $x=x_i=\dfrac{i}{n}(i=0,1,2,\cdots,n)$ 与 $y=y_j=\dfrac{j}{n}(j=0,1,2,\cdots,n)$ 将 D 分成 n^2 等份，则和式

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{(1+x_i)(1+y_j^2)}\cdot\frac{1}{n^2}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\frac{i}{n}\right)\left(1+\frac{j^2}{n^2}\right)}\cdot\frac{1}{n^2}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}$$

是函数 $f(x,y)$ 在 D 上的一个二重积分的和式，所以

$$\text{原式}=\iint\limits_D\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y,$$

故应选(D).

【注】题目出成了选择题，答案写成了积分的形式，给了考生提示. 只不过，这并不是最后答案，最后答案应该为 $\frac{\pi}{4}\ln 2$. 也就是说，此题如果出成填空题：

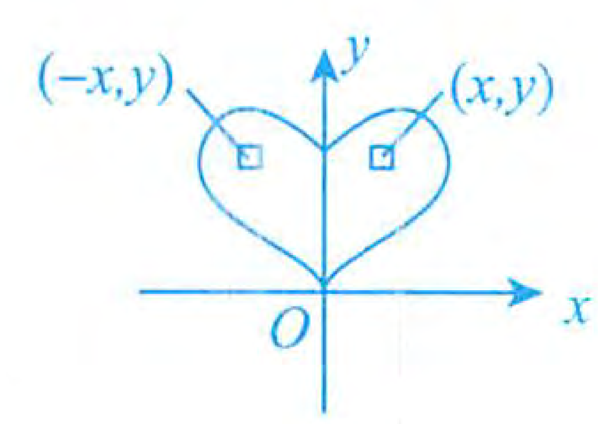
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=\_\_\_\_\_\_,$$

估计做出来的人会更少.

2. 普通对称性

① 若 D 关于 y 轴对称，则

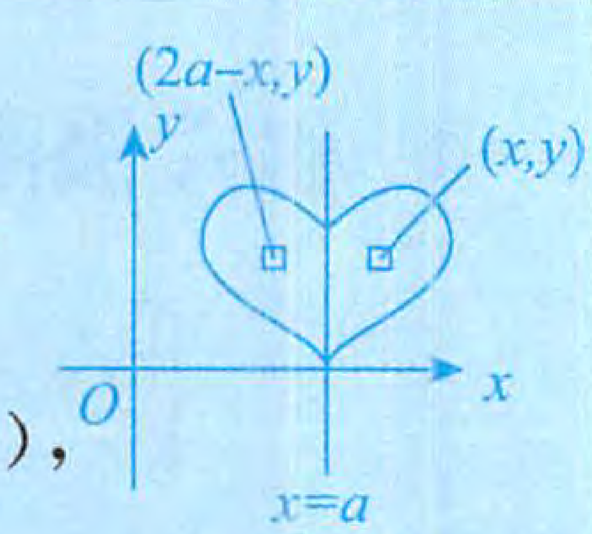
$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\begin{cases}2\iint\limits_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}\sigma, & f(x,y)=f(-x,y),\\ 0, & f(x,y)=-f(-x,y),\end{cases}$$



其中 D_1 是 D 在 y 轴右侧的部分.

【注】若 D 关于 $x=a(a\neq 0)$ 对称，则

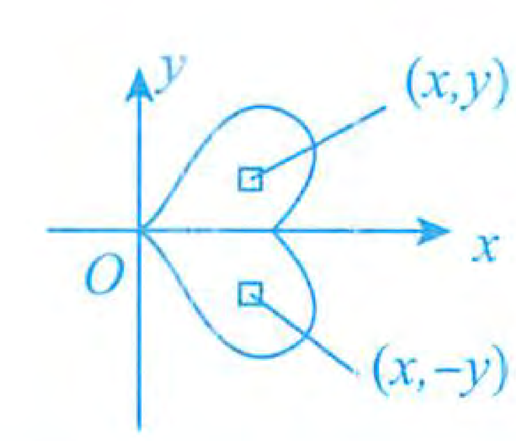
$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\begin{cases}2\iint\limits_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}\sigma, & f(x,y)=f(2a-x,y),\\ 0, & f(x,y)=-f(2a-x,y),\end{cases}$$



其中 D_1 是 D 在 $x=a$ 右侧的部分.

② 若 D 关于 x 轴对称，则

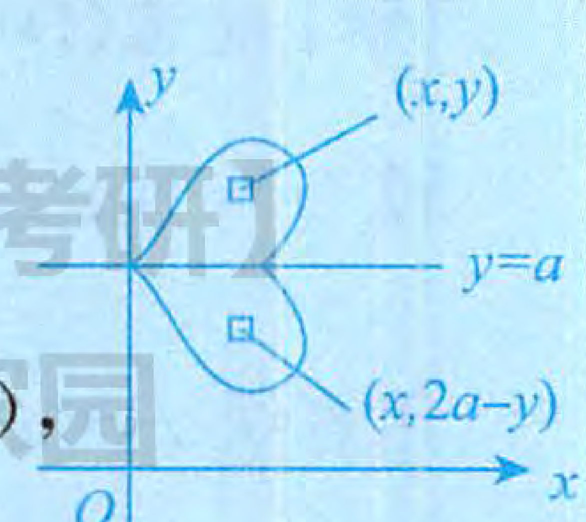
$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\begin{cases}2\iint\limits_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}\sigma, & f(x,y)=f(x,-y),\\ 0, & f(x,y)=-f(x,-y),\end{cases}$$



其中 D_1 是 D 在 x 轴上侧的部分.

【注】若 D 关于 $y=a(a\neq 0)$ 对称，则

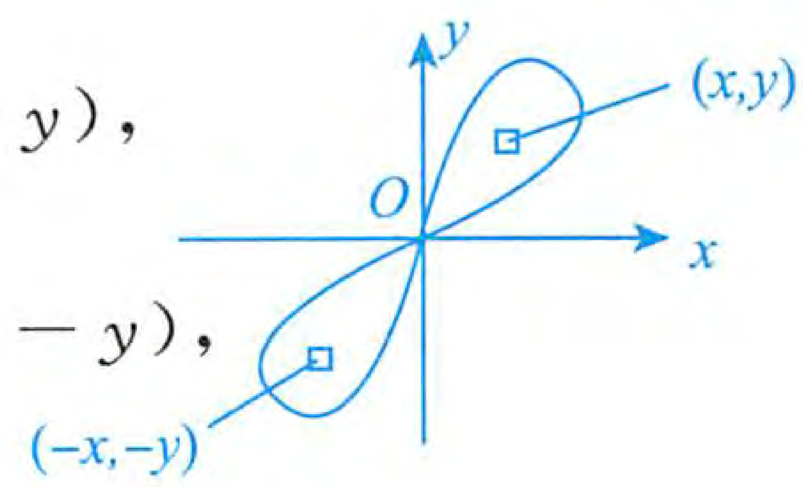
$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\begin{cases}2\iint\limits_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}\sigma, & f(x,y)=f(x,2a-y),\\ 0, & f(x,y)=-f(x,2a-y),\end{cases}$$



其中 D_1 是 D 在 $y=a$ 上侧的部分.

③ 若 D 关于原点对称，则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\begin{cases}2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma, & f(x,y)=f(-x,-y),\\ 0, & f(x,y)=-f(-x,-y),\end{cases}$$

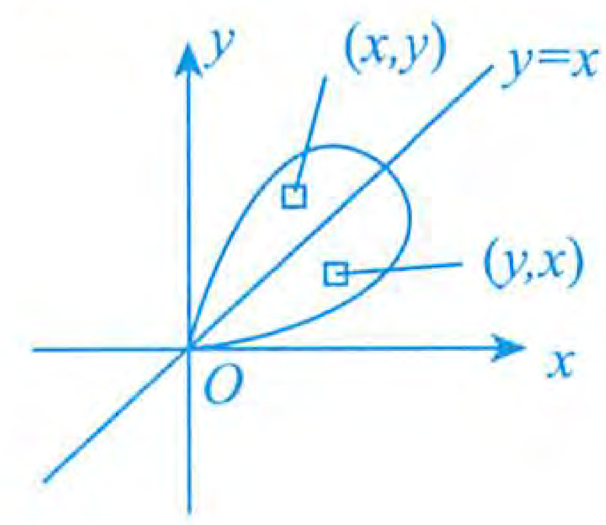


其中 D_1 是 D 关于原点对称的半个部分.

④ 若 D 关于 $y=x$ 对称，则

x, y 对调, $f(x,y)=f(y,x)$

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\begin{cases}2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma, & \underline{f(x,y)=f(y,x)},\\ 0, & f(x,y)=-f(y,x),\end{cases}$$



其中 D_1 是 D 关于 $y=x$ 对称的半个部分.

3. 轮换对称性

x, y 对调，一般 $f(x,y)\neq f(y,x)$

在直角坐标系中，若将 D 中的 x,y 对调后，<u>D 不变</u>，则有

$$I=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D f(y,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

【注】在直角坐标系中，若 $f(x,y)+f(y,x)\underset{(>)}{=}a$，则

$$I=\frac{1}{2}\iint\limits_D[f(x,y)+f(y,x)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\underset{(>)}{=}\frac{1}{2}\iint\limits_D a\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{a}{2}S_D.$$

例 14.2 设区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$，则 $\iint\limits_D(\sin x+\cos y)^2\mathrm{d}\sigma=$ ________.

【解】应填 π.

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\iint\limits_D(\sin^2 x+\cos^2 y+2\sin x\cos y)\mathrm{d}\sigma\\&=\iint\limits_D(\sin^2 x+\cos^2 y)\mathrm{d}\sigma\overset{\text{轮换对称性}}{=}\iint\limits_D(\sin^2 y+\cos^2 x)\mathrm{d}\sigma\\&=\frac{1}{2}\iint\limits_D[(\sin^2 x+\cos^2 y)+(\sin^2 y+\cos^2 x)]\mathrm{d}\sigma\\&=\frac{1}{2}\iint\limits_D 2\mathrm{d}\sigma=\pi\cdot 1^2=\pi.\end{aligned}$$

4. 二重积分比大小

(1) 用对称性.

(2) 用保号性.

例 14.3 设平面闭区域 $D_i(i=1,2,3,4)$ 是由

$$L_1:x^2+y^2=1,L_2:x^2+y^2=2,$$
$$L_3:x^2+2y^2=2,L_4:2x^2+y^2=2$$

围成的平面区域，记

$$I_i=\iint\limits_{D_i}\left(1-x^2-\frac{1}{2}y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

则 $\max\{I_1,I_2,I_3,I_4\}=($　　$)$.

(A) I_1　　(B) I_2　　(C) I_3　　(D) I_4

【解】应选(D).

曲线 $L_i(i=1,2,3,4)$ 如图 14-1 所示. 记被积函数为 $f(x,y)=1-\left(x^2+\frac{1}{2}y^2\right)$，由于 $L_4:2x^2+y^2=2$，则 D_4 内部为 $x^2+\frac{y^2}{2}<1$，于是 D_4 内部有 $f(x,y)>0$，而 D_4 外部有 $f(x,y)<0$.

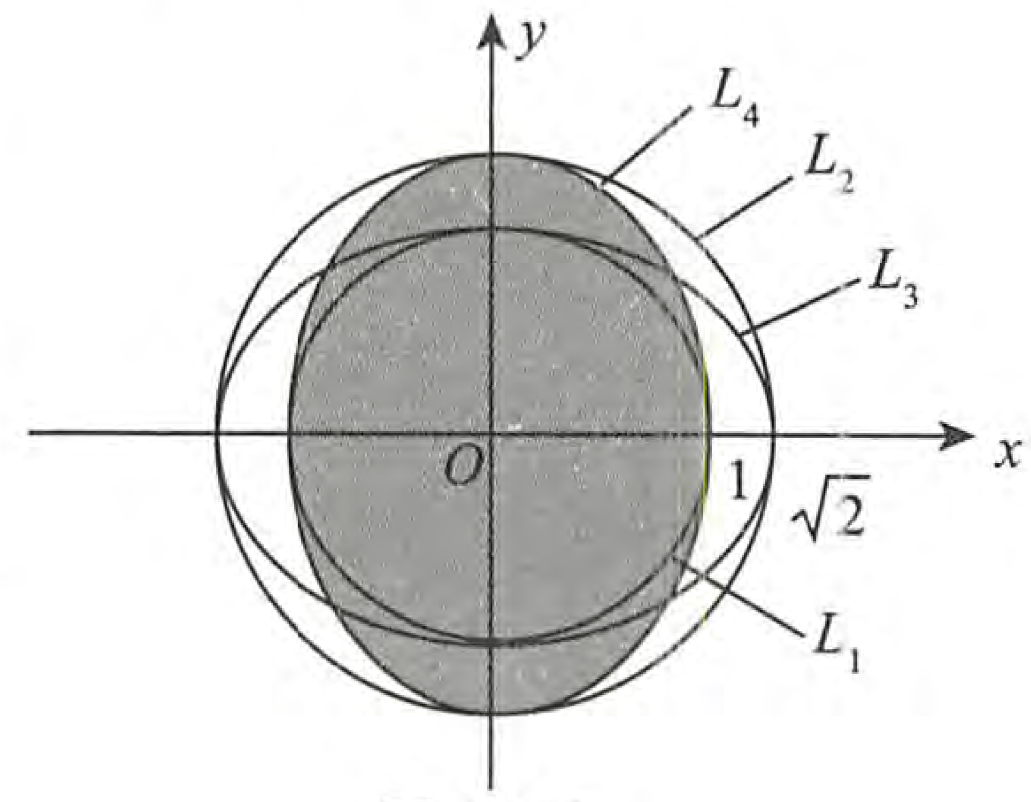


图 14-1

① 比较 I_1 与 I_4：

$$I_4=\iint\limits_{D_4}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_4-D_1}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=I_1+\iint\limits_{\underbrace{D_4-D_1}_{f(x,y)>0}}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y>I_1.$$

② 比较 I_2 与 I_4：

$$I_2=\iint\limits_{D_2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_4}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2-D_4}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=I_4+\iint\limits_{\underbrace{D_2-D_4}_{f(x,y)<0}}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y<I_4.$$

③ 比较 I_3 与 I_4. 如图 14-2 所示，将 D_3,D_4 中互不重合的部分分别记为 $D_{31},D_{32},D_{41},D_{42}$，则

$$I_3=\iint\limits_{D_{31}}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_{32}}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_3\cap D_4}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$f(x,y)<0$

$$<\iint\limits_{D_{41}}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_{42}}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_3\cap D_4}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=I_4.$$

$f(x,y)>0$

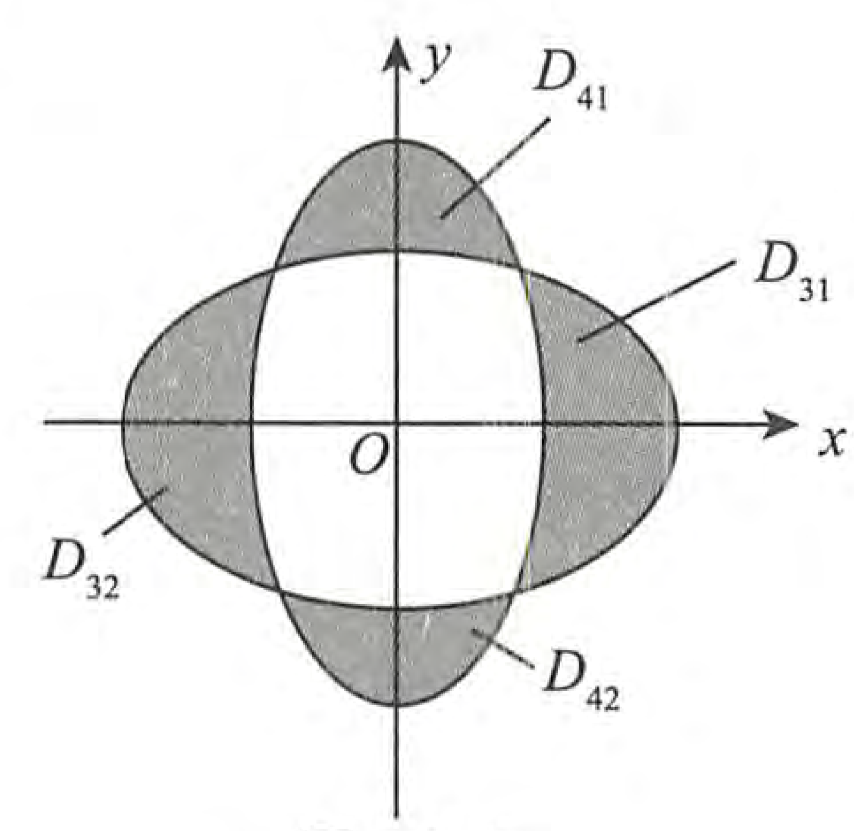


图 14-2

所以 $\max\{I_1,I_2,I_3,I_4\}=I_4$，即应选(D).

例 14.4　设 $J_i=\iint\limits_{D_i}\sqrt[3]{x-y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y(i=1,2,3)$，其中 $D_1=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$，$D_2=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant\sqrt{x}\}$，$D_3=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,x^2\leqslant y\leqslant 1\}$，则(　　).

(A) $J_1<J_2<J_3$　　(B) $J_3<J_1<J_2$

(C) $J_2<J_3<J_1$　　(D) $J_2<J_1<J_3$

【解】应选(B).

如图 14-3(a) 所示，D_1 被直线 $y=x$ 分成 D_{11} 和 D_{12} 两部分，故 $\iint\limits_{D_1}\sqrt[3]{x-y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$

$\iint\limits_{D_{11}+D_{12}} \sqrt[3]{x-y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，由于$\sqrt[3]{x-y}=-\sqrt[3]{y-x}$，故由普通对称性，有 $J_1=\iint\limits_{D_1}\sqrt[3]{x-y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$.

如图 14-3(b) 所示，作辅助线 $y=x^2$，将 D_2 分为 D_{21} 和 D_{22} 两部分，由普通对称性知，$\iint\limits_{D_{21}}\sqrt[3]{x-y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$. 而在 D_{22} 上，$\sqrt[3]{x-y}\geqslant 0$，由保号性知，

$$J_2=\iint\limits_{D_2}\sqrt[3]{x-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{22}}\sqrt[3]{x-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y>0.$$

如图 14-3(c) 所示，作辅助线 $y=\sqrt{x}$，将 D_3 分为 D_{31} 和 D_{32} 两部分，由普通对称性知，$\iint\limits_{D_{32}}\sqrt[3]{x-y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$. 而在 D_{31} 上，$\sqrt[3]{x-y}\leqslant 0$，由保号性知，

$$J_3=\iint\limits_{D_3}\sqrt[3]{x-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{31}}\sqrt[3]{x-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y<0.$$

综上，$J_3<J_1<J_2$.

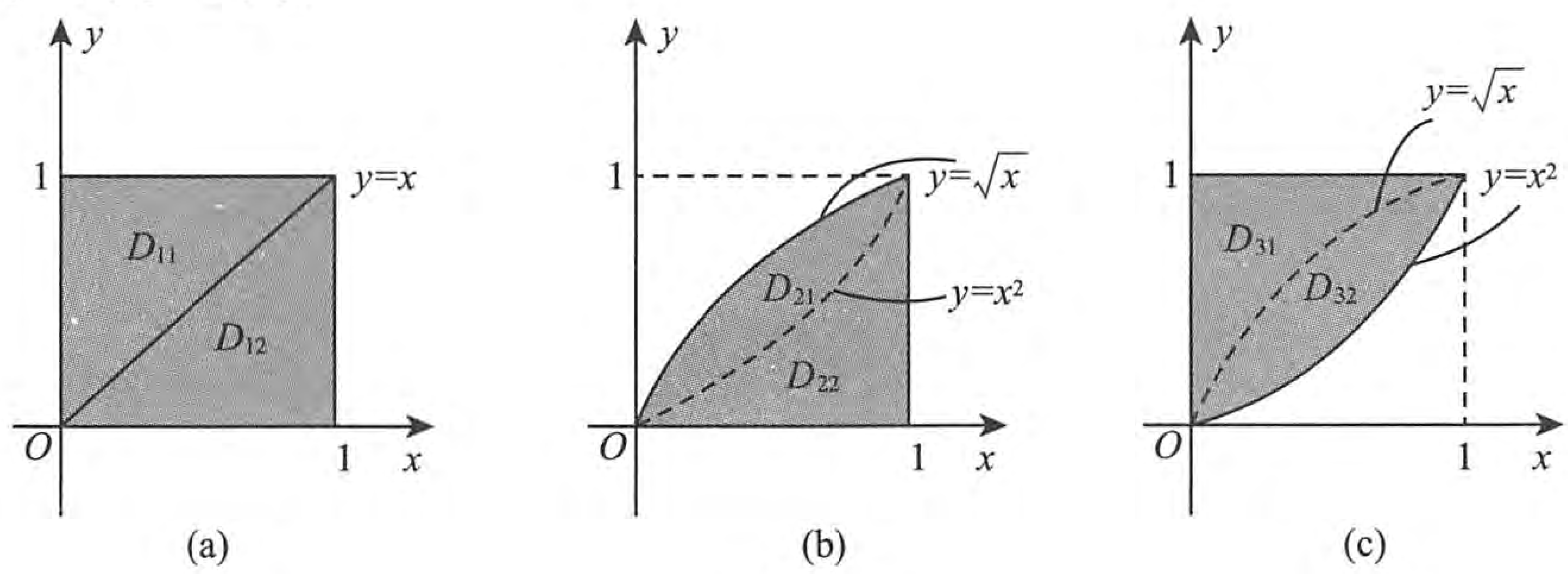


图 14-3

5. 二重积分中值定理

设函数 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上连续，σ 是 D 的面积，则在 D 上至少存在一点 (ξ,η)，使得

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}\sigma=f(\xi,\eta)\sigma.$$

例 14.5 设 $D_t=\{(x,y)\mid 2x^2+3y^2\leqslant 6t\}(t>0)$，

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{1-xy}-1}{\mathrm{e}^{xy}-1}, & (x,y)\neq(0,0),\\ a, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

为连续函数，令 $F(t)=\iint\limits_{D_t}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，则 $F'_+(0)=$________.

【解】应填 $-\dfrac{\sqrt{6}\pi}{3}$.

积分区域 D_t 的面积为 $A=\sqrt{6}\pi t$. 因为 $f(x,y)$ 为连续函数，所以

$$a=f(0,0)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt[3]{1-xy}-1}{\mathrm{e}^{xy}-1}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{-\frac{1}{3}xy}{xy}=-\frac{1}{3}.$$

由二重积分中值定理，存在 $(\xi,\eta)\in D_t$，使得

$$F(t)=\iint_{D_t} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{6}\pi t f(\xi,\eta).$$

于是，

$$F'_+(0)=\lim_{t\to 0^+}\frac{F(t)-F(0)}{t-0}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\sqrt{6}\pi t f(\xi,\eta)}{t}=\lim_{t\to 0^+}\sqrt{6}\pi f(\xi,\eta)$$

$$=\sqrt{6}\pi f(0,0)=-\frac{\sqrt{6}\pi}{3}.$$

【注】此题的被积函数命制成具体函数，但$\iint\limits_{D_t} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$难以计算，故考虑利用二重积分中值定理来处理．同理，若被积函数命制成抽象函数，也可以考虑利用二重积分中值定理来处理．如

设$f(x,y)$具有二阶连续偏导数，

$$D_t=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant t,0\leqslant y\leqslant t\},$$

令$F(t)=\iint\limits_{D_t} f''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，求$F'_+(0)$．

解
$$F'_+(0)=\lim_{t\to 0^+}\frac{F(t)-F(0)}{t-0}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\iint\limits_{D_t} f''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{t}$$

$$\xlongequal{\text{积分中值定理}}\lim_{t\to 0^+}\frac{f''_{xy}(\xi,\eta)\cdot t^2}{t}=\lim_{t\to 0^+}\underset{\substack{\uparrow\\ 0}}{t}\cdot \underset{\substack{\uparrow\\ f''_{xy}(0,0)}}{f''_{xy}(\xi,\eta)}=0.$$

6. 周期性

若化为累次积分后，一元积分有用周期性的机会，则可化简计算．

例 14.6 设$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant \pi,0\leqslant y\leqslant \pi\}$，计算$I=\iint\limits_D |\cos(x+y)|\mathrm{d}\sigma$．

【解】$I=\int_0^\pi \mathrm{d}x\int_0^\pi |\cos(x+y)|\mathrm{d}y$，注意到$|\cos(a+y)|$是$|\cos y|$的水平平移，$|\cos y|$的周期为$\pi$，故$\int_0^\pi |\cos(x+y)|\mathrm{d}y=\int_0^\pi |\cos y|\mathrm{d}y=2$，于是$I=\int_0^\pi 2\mathrm{d}x=2\pi$．

【注】(1) 充分利用被积函数的性质，得出了此题如此简捷精彩的解法，可见基本功的重要性．

(2) **(仅数学一)** 若将问题升维至三重积分，设

$$I=\iiint\limits_\Omega |\cos(x+y+z)|\mathrm{d}v,\Omega=\{(x,y,z)\mid 0\leqslant x\leqslant\pi,0\leqslant y\leqslant\pi,0\leqslant z\leqslant\pi\},$$

计算I，方法完全一样．

$$I=\int_0^\pi \mathrm{d}x\int_0^\pi \mathrm{d}y\int_0^\pi |\cos(x+y+z)|\mathrm{d}z.$$

注意到$|\cos(a+z)|$是$|\cos z|$的水平平移，故

$$\int_0^\pi |\cos(x+y+z)|\mathrm{d}z=\int_0^\pi |\cos z|\mathrm{d}z=2,I=\int_0^\pi \mathrm{d}x\int_0^\pi 2\mathrm{d}y=2\pi^2.$$

二 计算

1. 直角坐标系下的计算法

在直角坐标系下，按照积分次序的不同，一般将二重积分的计算分为两种情况.

(1)$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y$，其中 D 如图 14-4(a) 所示，为 X 型区域：$\varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x),a\leqslant x\leqslant b$；

(2)$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_c^d\mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}f(x,y)\mathrm{d}x$，其中 D 如图 14-4(b) 所示，为 Y 型区域：$\psi_1(y)\leqslant x\leqslant\psi_2(y),c\leqslant y\leqslant d$.

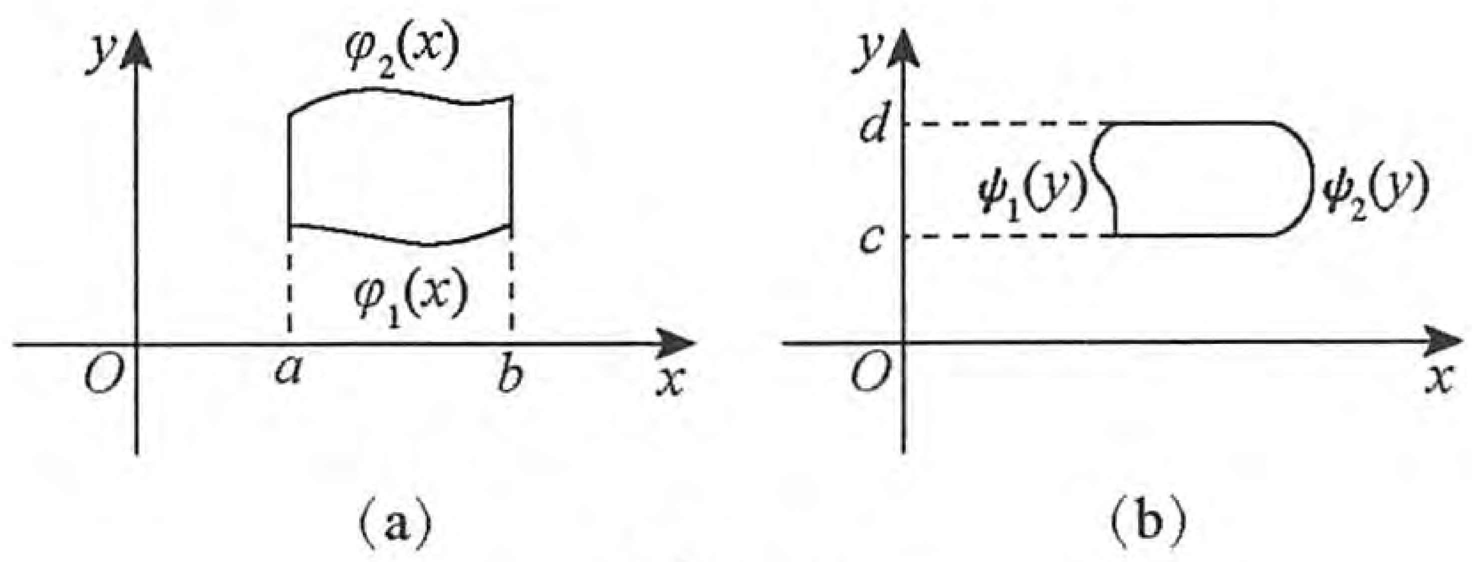


图 14-4

【注】下限须小于上限.

2. 极坐标系下的计算法

在极坐标系下，按照积分区域与极点位置关系的不同，一般将二重积分的计算分为三种情况，如图 14-5 所示.

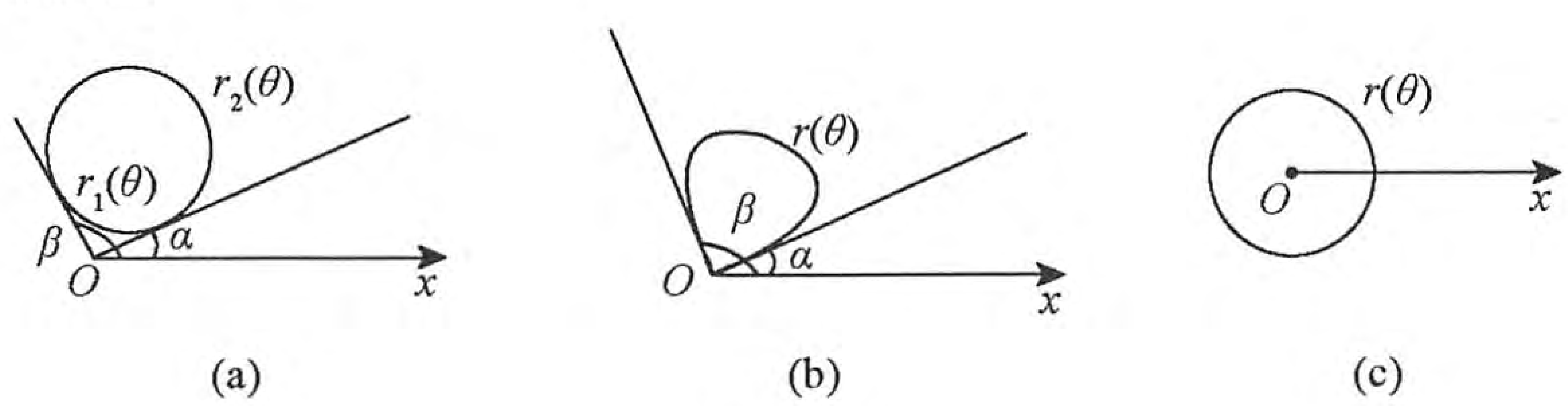


图 14-5

(1)$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_\alpha^\beta\mathrm{d}\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$（极点 O 在区域 D 外部，如图 14-5(a) 所示）；

(2)$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_\alpha^\beta\mathrm{d}\theta\int_0^{r(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$（极点 O 在区域 D 边界上，如图 14-5(b) 所示）；

(3)$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{r(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$（极点 O 在区域 D 内部，如图 14-5(c) 所示）.

【注】极坐标系与直角坐标系选择的一般原则：

一般来说，给出一个二重积分．

① 看被积函数是否为 $f(x^2+y^2)$，$f\left(\dfrac{y}{x}\right)$，$f\left(\dfrac{x}{y}\right)$ 等形式；

② 看积分区域是否为圆或者圆的一部分．

如果 ①，② 至少满足其中之一，那么优先选用极坐标系．否则，就优先考虑直角坐标系．

3. 极坐标系与直角坐标系的互相转化

一是用好$\begin{cases}x=r\cos\theta,\\y=r\sin\theta\end{cases}$这个公式；二是画出积分区域 D 的图形，做好上、下限的转化．

【注】**(1) 关于积分区域 D．**

关于积分区域 D $\begin{cases}\text{图形变换}\\\text{直角系方程给出}\\\text{极坐标方程给出}\\\text{参数方程给出}\\\text{动区域(含其他参数)}\end{cases}$

(2) 关于被积函数 $f(x,y)$．

关于被积函数 $f(x,y)$ $\begin{cases}\text{分段函数(含绝对值)}\\\text{最大、最小值函数}\\\text{取整函数}\\\text{符号函数}\\\text{抽象函数}\\\text{复合函数 } f(u),u\left\langle\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.\\\text{偏导函数 } f''_{xy}(x,y)\end{cases}$

(3) 换元法．

二重积分亦有如定积分一脉相承的换元法，有时很有用，现介绍于此，供参考，若能够用上，可直接使用，不必证明．

先回顾一元函数积分换元法，见"①"，再看二重积分换元法，见"②"．

① $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{x=\varphi(t)} \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$．

a. $f(x)\to f[\varphi(t)]$．

b. $\displaystyle\int_a^b \to \int_\alpha^\beta$．

c. $\mathrm{d}x\to\varphi'(t)\mathrm{d}t$．

注意：$x=\varphi(t)$ 单调，存在一阶连续导数．

② $\iint\limits_{D_{xy}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \xlongequal[y=y(u,v)]{x=x(u,v)} \iint\limits_{D_{uv}} f[x(u,v),y(u,v)]\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$

a. $f(x,y)\to f[x(u,v),y(u,v)]$.

b. $\iint\limits_{D_{xy}}\to\iint\limits_{D_{uv}}$.

c. $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\to\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$.

注意：其中$\begin{cases}x=x(u,v),\\y=y(u,v)\end{cases}$是$(x,y)$面到$(u,v)$面的一对一映射，$x=x(u,v)$，$y=y(u,v)$存在一阶连续偏导数，$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\neq 0$.

另外，令$\begin{cases}x=r\cos\theta,\\y=r\sin\theta,\end{cases}$则

$$\iint\limits_{D_{xy}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{r\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\left|\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta}\\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta}\end{vmatrix}\right|\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$=\iint\limits_{D_{r\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\left|\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}\right|\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\iint\limits_{D_{r\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

这就是直角坐标系到极坐标系的换元过程.

还有一个三重积分的换元法(**仅数学一**)，与上述中"①，②"一脉相承，写在后面的第18讲的三重积分处，供参考.

例 14.7 设 D 为曲线$\begin{cases}x=\cos^3 t,\\y=\sin^3 t\end{cases}$与坐标轴所围有界区域在第一象限的部分，则$\iint\limits_D(\sqrt{x}-\sqrt{y}+1)\mathrm{d}\sigma=$________.

【解】应填$\dfrac{3\pi}{32}$.

如图 14-6 所示，D 关于 $y=x$ 对称，则

$$\iint\limits_D(\sqrt{x}-\sqrt{y})\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D(\sqrt{y}-\sqrt{x})\mathrm{d}\sigma,$$

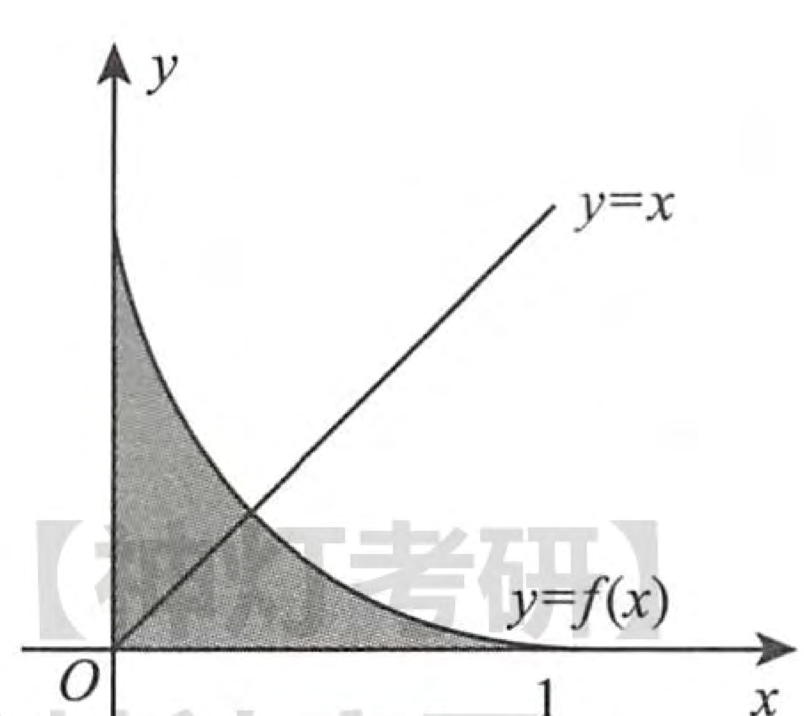


图 14-6

故

$$\iint\limits_D(\sqrt{x}-\sqrt{y})\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{2}\iint\limits_D(\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{y}-\sqrt{x})\mathrm{d}\sigma=0,$$

于是

$$\text{原式}=\iint_D \mathrm{d}\sigma=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{f(x)} \mathrm{d}y=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 y(t)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^3 t\,\mathrm{d}(\cos^3 t)=\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^3 t\cdot 3\cos^2 t\cdot(-\sin t)\mathrm{d}t$$

$$=3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t(1-\sin^2 t)\mathrm{d}t$$

$$=3\cdot\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3\pi}{32}.$$

例 14.8 设平面区域 $D=\{(x,y)\mid -1<x<1,-1<y<1\}$，$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，则 $\iint\limits_D \max\{[x],y\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ________.

【解】 应填 $\frac{1}{2}$.

依题意，$[x]=\begin{cases}-1, & -1<x<0,\\ 0, & 0\leqslant x<1,\end{cases}$ 进而

$$\max\{[x],y\}=\begin{cases}y, & -1<x<0,-1<y<1 \text{ 或 } 0\leqslant x<1,0\leqslant y<1,\\ 0, & 0\leqslant x<1,-1<y<0.\end{cases}$$

因此，原式 $=\int_{-1}^0 \mathrm{d}x\int_{-1}^1 y\mathrm{d}y+\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 y\mathrm{d}y=\frac{1}{2}$.

例 14.9 设 $f(t)=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2} x\left[1+\frac{f(\sqrt{x^2+y^2})}{x^2+y^2}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $x\geqslant 0,y\geqslant 0,t>0$.

(1) 求 $f(t)$ 的表达式；

(2) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{\int_0^x (\mathrm{e}-\mathrm{e}^{\cos t})\mathrm{d}t}$.

【解】(1) $f(t)=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2} x\left[1+\frac{f(\sqrt{x^2+y^2})}{x^2+y^2}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^t r\cos\theta\left[1+\frac{f(r)}{r^2}\right]\cdot r\mathrm{d}r$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^t [r^2+f(r)]\mathrm{d}r=\frac{t^3}{3}+\int_0^t f(r)\mathrm{d}r,$$

即 $f(t)=\frac{t^3}{3}+\int_0^t f(r)\mathrm{d}r$，且 $f(0)=0$.

上式两端对 t 求导，得 $f'(t)=t^2+f(t)$，即 $f'(t)-f(t)=t^2$，解得

$$f(t)=2\mathrm{e}^t-t^2-2t-2(t>0).$$

(2) $$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{\int_0^x(\mathrm{e}-\mathrm{e}^{\cos t})\mathrm{d}t}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\mathrm{e}^x-x^2-2x-2}{\int_0^x(\mathrm{e}-\mathrm{e}^{\cos t})\mathrm{d}t}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\mathrm{e}^x-2x-2}{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{\cos x}}=\frac{2}{\mathrm{e}}\lim_{x\to 0^+}\frac{\mathrm{e}^x-x-1}{1-\mathrm{e}^{\cos x-1}}$$

$$=\frac{2}{\mathrm{e}}\lim_{x\to 0^+}\frac{1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)-x-1}{1-\cos x}=\frac{2}{\mathrm{e}}.$$

例 14.10 设

$$D=\{(x,y)\mid 4x^2+y^2<1,x\geqslant 0,y\geqslant 0\},$$

则积分 $I=\iint\limits_D(1-12x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$________.

【解】应填 0.

令$\begin{cases}x=\frac{1}{2}r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\end{cases}$则

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1(1-r^2-2r^2\cos^2\theta)\boxed{\frac{r}{2}}\mathrm{d}r$$

$$=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta}\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1(1-r^2)r\mathrm{d}r-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r=\frac{\pi}{16}-\frac{\pi}{16}=0.$$

例 14.11 设有界区域 D 是由圆 $x^2+y^2=1$ 和直线 $y=x$ 以及 x 轴所围图形在第一象限的部分，计算二重积分$\iint\limits_D\mathrm{e}^{(x+y)^2}(x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

【解】法一 在极坐标系中，区域 D 可表示为

$$\left\{(r,\theta)\mid 0\leqslant r\leqslant 1,0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\right\},$$

所以

$$\iint\limits_D\mathrm{e}^{(x+y)^2}(x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{e}^{r^2(\sin\theta+\cos\theta)^2}r^3(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}r\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{r^2(\sin\theta+\cos\theta)^2}r^3(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{r^2(\sin\theta+\cos\theta)^2}\mathrm{d}[r^2(\sin\theta+\cos\theta)^2]$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 r\left[\mathrm{e}^{r^2(\sin\theta+\cos\theta)^2}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right]\mathrm{d}r=\frac{1}{2}\int_0^1 r(\mathrm{e}^{2r^2}-\mathrm{e}^{r^2})\mathrm{d}r=\frac{(\mathrm{e}-1)^2}{8}.$$

法二 令$\begin{cases}u=x-y,\\ v=x+y,\end{cases}D_{uv}=\{(u,v)\mid u^2+v^2\leqslant 2,v\geqslant u\geqslant 0\}.$

因为 D：$\begin{cases}x=\dfrac{u+v}{2},\\ y=\dfrac{v-u}{2},\end{cases}(u,v)\in D_{uv}$，所以

$$\iint\limits_D\mathrm{e}^{(x+y)^2}(x^2-y^2)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{uv}}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{v^2}uv\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\frac{1}{2}\int_0^1 u\,\mathrm{d}u\int_u^{\sqrt{2-u^2}}\mathrm{e}^{v^2}v\,\mathrm{d}v$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^1(\mathrm{e}^{2-u^2}-\mathrm{e}^{u^2})u\mathrm{d}u=\frac{(\mathrm{e}-1)^2}{8}.$$