第 11 章　一元函数积分学的应用（二）
——积分等式与积分不等式

A 组

1. 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，且 $f(x)>0$，证明：至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^{\xi} f(x)\mathrm{d}x+\int_{a+b-\xi}^{b} f(x)\mathrm{d}x.$$

2. 证明：$\dfrac{2}{\sqrt[4]{\mathrm{e}}}\leqslant\displaystyle\int_0^2 \mathrm{e}^{x^2-x}\mathrm{d}x\leqslant 2\mathrm{e}^2$.

3. 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且 $f(a)=0$，$|f'(x)|\leqslant k$，证明：$\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{(b-a)^2}{2}k$.

4. 设 $f(x)$ 在闭区间$[0,1]$上有二阶导数，且 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$，$f''(x)>0$，证明：$\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\geqslant 1$.

5. 已知函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上连续且单调增加，证明：

$$\int_a^b \frac{b-x}{b-a}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

B 组

1. 设 $f(x)$ 是$[0,1]$上连续且单调减少的正值函数，则对于任意的 $a,b(0<a<b<1)$，下列结论不正确的是（　　）.

(A)$a\displaystyle\int_0^b f(x)\mathrm{d}x>b\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$　　(B)$b\displaystyle\int_0^a f(x)\mathrm{d}x>a\int_0^b f(x)\mathrm{d}x$

(C)$a\displaystyle\int_0^b \sqrt{f(x)}\mathrm{d}x<b\int_0^a \sqrt{f(x)}\mathrm{d}x$　　(D)$b\displaystyle\int_0^a \sqrt{f(x)}\mathrm{d}x<b\int_0^b \sqrt{f(x)}\mathrm{d}x$

2. 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续，证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使$\displaystyle\int_0^{\xi} f(t)\mathrm{d}t=(1-\xi)f(\xi)$. 若 $f(x)>0$ 且单调减少，则 ξ 是唯一的.

3. 设函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上具有二阶连续导数，证明：存在 $\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{24}(b-a)^3f''(\xi).$$

4. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，且单调减少，证明：

(1) 对任意的 $x\in(0,1)$，有 $\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t<(1-x)\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$；

(2) 对任意的 $x\in[0,1)$，有 $\int_x^1 (t-x)f(t)\mathrm{d}t<\frac{(1-x)^2}{2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$；

(3) $\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x<\frac{1}{3}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

5. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有连续的导数，证明：

$$\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x\leqslant \max\left\{\int_0^1 |f'(x)|\mathrm{d}x,\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right|\right\}.$$

C组

1. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在一阶导数，且 $|f'(x)|\leqslant M$，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$. 证明：当 $x\in[a,b]$ 时，

$$\left|\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{1}{8}(b-a)^2M.$$

2. (1) 证明不等式

$$\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<1+\ln n;$$

(2) 证明数列 $a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n+1)$ 单调增加，且 $0<a_n<1$；

(3) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}{\ln n}$.

3. (1) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上非负连续且不恒为零，证明：必有 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$；

(2) 在 $[0,2]$ 上是否存在可导函数 $f(x)$，满足

$$f(0)=f(2)=1,\ |f'(x)|\leqslant 1,\left|\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant 1,$$

并说明理由 .