# 第 8 章　一元函数积分学的概念与性质

## A组

1. 已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $\cos x$，则 $f'(x)$ 等于(　　).

(A) $\cos x$　　(B) $-\cos x$　　(C) $\sin x$　　(D) $-\sin x$

2. 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，$a$ 为非零常数，则下列命题正确的是(　　).

(A) $\int \frac{1}{x}f(\ln ax)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}F(\ln ax)+C$

(B) $\int \frac{1}{x}f(\ln ax)\mathrm{d}x=F(\ln ax)+C$

(C) $\int \frac{1}{x}f(\ln ax)\mathrm{d}x=aF(\ln ax)+C$

(D) $\int \frac{1}{x}f(\ln ax)\mathrm{d}x=\frac{1}{x}F(\ln ax)+C$

3. 设 $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\geqslant 0,\\ \sin x, & x<0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 则在区间 $(-1,1)$ 内(　　).

(A) $f(x)$ 与 $g(x)$ 都存在原函数

(B) $f(x)$ 与 $g(x)$ 都不存在原函数

(C) $f(x)$ 存在原函数，$g(x)$ 不存在原函数

(D) $f(x)$ 不存在原函数，$g(x)$ 存在原函数

4. 设 $f(x)=\begin{cases}e^{x^2}+x^2, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 则 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是(　　).

(A) 可导的奇函数　　(B) 连续，但在 $x=0$ 处不可导的奇函数

(C) 可导的偶函数　　(D) 连续，但在 $x=0$ 处不可导的偶函数

5. 设 $f(x)=\begin{cases}e^{x}, & x\geqslant 0,\\ x, & x<0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 则下列说法正确的是(　　).



(A) $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上存在原函数　　(B) $g'(0)$ 存在

(C) $g(x)$ 在 $[-1,1]$ 上存在原函数　　(D) 令 $F(x)=\int_{-1}^x f(t)\mathrm{d}t$，则 $F'(0)$ 存在

6. 设函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上二阶可导，$f''(x)>0$，且满足 $|f(x)|\leqslant x^2$，记 $I=\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x$，

则（　　）.

(A) $I>0$

(B) $I<0$

(C) $I=0$

(D) $I$ 与 0 的大小关系不确定

**7.** 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且为单调减少的正值函数，记 $I_1=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，$I_2=\int_0^1 f(\sin x)\mathrm{d}x$，$I_3=\int_0^1 \sin f(x)\mathrm{d}x$，则（　　）.

(A) $I_1<I_2<I_3$

(B) $I_3<I_2<I_1$

(C) $I_2<I_3<I_1$

(D) $I_3<I_1<I_2$

**8.** 设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^2}\cos^6 x\mathrm{d}x$，$N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 x+\cos^6 x)\mathrm{d}x$，$P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^3 x-\cos^6 x)\mathrm{d}x$，则（　　）.

(A) $N<P<M$

(B) $M<P<N$

(C) $N<M<P$

(D) $P<M<N$

**9.** 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且对 $\forall x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，有

$$f(x_1+x_2)+2f(x_1-x_2)=3f(x_1)-f(x_2),$$

则 $\int_0^2 f(x-1)\mathrm{d}x=$（　　）.

(A) $-1$　　(B) 0　　(C) 1　　(D) 2

**10.** 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上连续，且满足 $f(x)=\int_0^1 \mathrm{e}^{x+t}f(t)\mathrm{d}t+x$，则 $\frac{f(0)}{f(2)}=$（　　）.

(A) $\frac{1}{3\mathrm{e}^2}$　　(B) $\frac{1}{2\mathrm{e}^2}$　　(C) $\frac{1}{3}$　　(D) $\frac{1}{2}$

**11.** $\int \mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=$（　　）.

(A) $\begin{cases}-\mathrm{e}^{-x}+C, & x\geqslant 0,\\ \mathrm{e}^{x}+C, & x<0\end{cases}$

(B) $\begin{cases}-\mathrm{e}^{-x}+C, & x\geqslant 0,\\ \mathrm{e}^{x}-2+C, & x<0\end{cases}$

(C) $\begin{cases}-\mathrm{e}^{-x}+C, & x\geqslant 0,\\ \mathrm{e}^{x}+C+2, & x<0\end{cases}$

(D) $\begin{cases}\mathrm{e}^{x}+C, & x\geqslant 0,\\ -\mathrm{e}^{-x}+C, & x<0\end{cases}$

**12.** 下列反常积分中，收敛的是（　　）.

(A) $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}}$

(B) $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(x^2-1)}$

(C) $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x-1)}}$

(D) $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-1}}$

**13.** $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\left(1+\frac{2}{n}\right)^2\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)^2}=$ ________.



**14.** 已知 $f(x)=a^{x^3}$，$a>0$ 且 $a\neq 1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\ln[f(1)f(2)\cdots f(n)]=$ ________.

**15.** 已知 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, & x\neq 0,\\ \lim\limits_{n\to\infty}2\left[\frac{n}{(n+1)^2}+\frac{n}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{n}{(n+n)^2}\right], & x=0,\end{cases}$ 求 $f'(0)$.

**16.** 设 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$ 上连续，且 $f(x)>0$，证明函数 $F(x)=\dfrac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}$ 在$(0,+\infty)$ 内单调增加.

**17.** 设 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$ 内连续，且以 $T$ 为周期，证明：

(1) $\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x$（$a$ 为任意实数）；

(2) $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 以 $T$ 为周期 $\Leftrightarrow \int_0^T f(x)\mathrm{d}x=0$；

(3) $\int f(x)\mathrm{d}x$（$f(x)$ 的全体原函数）的周期为 $T \Leftrightarrow \int_0^T f(x)\mathrm{d}x=0$.

## B组

**1.** 设 $f(u)$ 为$(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数，$a$ 为常数，则下述积分为 $x$ 的偶函数的是（　　）.

(A) $\int_a^x \mathrm{d}u\int_0^u f(v^2)\mathrm{d}v$　　(B) $\int_a^x \mathrm{d}u\int_0^u f(v^3)\mathrm{d}v$

(C) $\int_a^x \mathrm{d}u\int_0^u [f(v)]^2\mathrm{d}v$　　(D) $\int_a^x \mathrm{d}u\int_0^u [f(v)]^3\mathrm{d}v$

**2.** 设 $f(x)$ 是以 2 为周期的连续函数，$G(x)=2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-x\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t$，则（　　）.

(A) $G(x)$ 是以 2 为周期的周期函数，$G'(x)$ 也是以 2 为周期的周期函数

(B) $G(x)$ 是以 2 为周期的周期函数，$G'(x)$ 不是以 2 为周期的周期函数

(C) $G(x)$ 不是以 2 为周期的周期函数，$G'(x)$ 是以 2 为周期的周期函数

(D) $G(x)$ 不是以 2 为周期的周期函数，$G'(x)$ 也不是以 2 为周期的周期函数

**3.** 下列反常积分中，收敛的是（　　）.

(A) $\int_0^2 \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+x^3}}$　　(B) $\int_0^2 \dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+2}}$

(C) $\int_1^{+\infty} \dfrac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}\ln(1+x)}$　　(D) $\int_0^{+\infty} \dfrac{x\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{x^4}}$

**4.** 设 $a>0$，$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\arctan x}{x^{\frac{a+1}{2}}}, & 0<x<1, \\ \dfrac{\ln\left(1+\sin\dfrac{1}{x^a}\right)}{x^b\ln\cos\dfrac{1}{x}}, & 1\leqslant x<+\infty. \end{cases}$ 若 $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则（　　）.

(A) $a>3$ 且 $a+b>3$　　(B) $a>3$ 且 $a+b<3$

(C) $a<3$ 且 $a+b>3$　　(D) $a<3$ 且 $a+b<3$



**5.** 设 $m$ 与 $n$ 都是常数，若反常积分 $\int_0^{+\infty} \dfrac{x^n(1-\mathrm{e}^{-x})}{(1+x)^m}\mathrm{d}x$ 收敛，则 $m$ 与 $n$ 的取值范围为（　　）.

(A) $n>-2, m>n+1$　　(B) $n>-2, m<n+1$

(C)$n<-2,m<n+1$　　(D)$n<-2,m>n+1$

**6.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}}{n}=$______.

**7.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{2}{n+2}+\cdots+\dfrac{3n}{4n}\right)=$______.

**8.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n})\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)}{(n+1)(n+2)}=$______.

**9.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\dfrac{3^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{3^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}\right)=$______.

**10.** 设 $f(x)$ 连续，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，且 $f(x)=x+x\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+x^2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$，求 $f(x)$.

**11.** 已知 $f(x)$ 在$[-1,1]$上连续，$f(x)=3x-\sqrt{1-x^2}\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x$，求 $f(x)$.

**12.** 比较$\int_0^1\dfrac{x\sin\frac{\pi}{2}x}{1+x}\mathrm{d}x$ 与$\int_0^1\dfrac{x\cos\frac{\pi}{2}x}{1+x}\mathrm{d}x$ 的大小关系，并说明理由.

**13.** 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，$F(1)=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\pi$，若在定义域$(0,+\infty)$ 内，有 $f(x)F(x)=\dfrac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}$，求 $f(x)$.

**14.** 设 $f(x)$ 连续，且积分$\int_0^1[f(x)+xf(xt)]\mathrm{d}t$ 的结果与 $x$ 无关，求 $f(x)$.

**15.** 判别$\int_1^{+\infty}\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{1+x}\right]\mathrm{d}x$ 的敛散性.

## C组

**1.** 设 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$ 内连续，下述命题中

① 对任意 $a$，$\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=0$ 的充要条件是 $f(x)$ 为奇函数；

② 对任意 $a$，$\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$ 的充要条件是 $f(x)$ 为偶函数；

③ 对任意 $a$，$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 具有周期 $T$ 的充要条件是 $f(x)$ 具有周期 $T$.

正确的个数为(　　).

(A)0　　(B)1　　(C)2　　(D)3



**2.** 下列反常积分中，收敛的是(　　).

(A)$\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{x^2+x^3}\mathrm{d}x$　　(B)$\int_2^{+\infty}\dfrac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$

(C) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\sin 2x}}dx$　　(D) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\ln x}dx$

**3.** 若反常积分 $\int_0^1 x^a(1-x)^b \ln x dx$ 收敛，则(　　).

(A) $a<-1$ 且 $a+b>-3$　　(B) $b<-2$ 且 $a+b>-3$

(C) $a>-1$ 且 $b<-2$　　(D) $a>-1$ 且 $b>-2$

**4.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+\frac{1}{n}}+\frac{1}{n+\frac{1+1}{n}}+\frac{1}{n+\frac{4+1}{n}}+\cdots+\frac{1}{n+\frac{(n-1)^2+1}{n}}\right]=$ ______.

**5.** 设函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上连续，$\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，且满足

$$f(x)=\frac{\ln x}{(1+x)^2}+\frac{1+x^2}{1+x^4}\int_1^{+\infty} f(x)dx,$$

则 $\int_1^{+\infty} f(x)dx=$ ______.