第3讲 一元函数微分学的概念

知识结构

- 导数定义（导数在一点的问题）
  - 分段函数（或含绝对值函数）在分段点
  - 抽象函数在一点
    - 特指点 x_0
    - 泛指点 x
  - 四则运算中的特殊点
    - 太复杂的函数
      - $f=f_1+f_2$
      - $f=f_1\cdot f_2\cdot\cdots\cdot f_n$
    - 求导公式无定义的点
- 微分
  - 定义
  - 可微的充要条件
  - 一阶微分形式的不变性

一　导数定义（导数在一点的问题）

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

【注】(1) $f'(x_0)=\left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$ 是指 f 对 x 在 x_0 处的（瞬时）变化率.

(2) 左导数　$f'_-(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$；

右导数　$f'_+(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

$f'(x_0)$ 存在 $\Leftrightarrow f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=A$（常数）.

(3) 高阶导数　$f^{(n)}(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}\ (n\geqslant 3)$.

① 分段函数（或含绝对值函数）在分段点.

② 抽象函数在一点 $\begin{cases}\text{特指点 } x_0,\\ \text{泛指点 } x.\end{cases}$

③ 四则运算中的特殊点 $\begin{cases}\text{太复杂的函数}\begin{cases}f=f_1+f_2,\\ f=f_1\cdot f_2\cdot\cdots\cdot f_n,\end{cases}\\ \text{求导公式无定义的点.}\end{cases}$

例 3.1 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内有定义，且 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$，则(　　).

(A) 当 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

(B) 当 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=0$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

(C) 当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$

(D) 当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=0$

【解】应选(C).

当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，$f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，设为 a，则有

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{x}{\sqrt{|x|}}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{|x|}}=a\cdot 0=0.$$

对于(A)，(B)，可取反例 $f(x)=\begin{cases}x^3, & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$ 对于(D)，可取反例 $f(x)=x$.

例 3.2 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant 0,\\ \dfrac{1}{n}, & \dfrac{1}{n+1}<x\leqslant\dfrac{1}{n},n=1,2,\cdots,\end{cases}$ 则(　　).

(A) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点　　(B) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点

(C) $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续但不可导　　(D) $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

【解】应选(D).

$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{x}=1$，这是容易的. 但对于 $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$，这是不易的. 由题设，当 $\dfrac{1}{n+1}<x\leqslant\dfrac{1}{n}$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{n}$，故

$$1\leqslant\frac{f(x)}{x}<\frac{n+1}{n}.$$

当 $x\to 0^+$ 时，$n\to\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}=1$，由夹逼准则知 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}=1$，即 $f'_+(0)=1$.

综上，$f'(0)=f'_-(0)=f'_+(0)=1$. 应选(D).

例 3.3 设 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则下列命题错误的是(　　).

(A) 当 $f(x_0)>0$ 时，$|f(x)|$ 在 x_0 处也可导

(B) 当 $f(x_0)<0$ 时，$|f(x)|$ 在 x_0 处也可导

(C) 当 $f(x_0)=0$，且 $f'(x_0)=0$ 时，$|f(x)|$ 在 x_0 处不可导

(D) 当 $f(x_0)=0$，且 $f'(x_0)\neq 0$ 时，$|f(x)|$ 在 x_0 处不可导

【解】应选(C).

记 $\varphi(x)=|f(x)|$，因为 $f(x)$ 在 x_0 处可导，所以 $f(x)$ 在 x_0 处必连续，即

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

当 $f(x_0)>0$ 时，根据极限的保号性，当 $x\to x_0$ 时，有 $f(x)>0$，即 $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$，此时

$$\varphi'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{|f(x)|-|f(x_0)|}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0),$$

(A) 正确.

当 $f(x_0)<0$ 时，同理可得 $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=-\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$，此时

$$\varphi'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{|f(x)|-|f(x_0)|}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{-f(x)+f(x_0)}{x-x_0}=-f'(x_0),$$

(B) 正确.

当 $f(x_0)=0$ 时，有 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{x-x_0}$，此时

$$\varphi'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{|f(x)|}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\left|\frac{f(x)}{x-x_0}\right|=|f'(x_0)|,$$

$$\varphi'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{|f(x)|}{x-x_0}=-\lim_{x\to x_0^-}\left|\frac{f(x)}{x-x_0}\right|=-|f'(x_0)|.$$

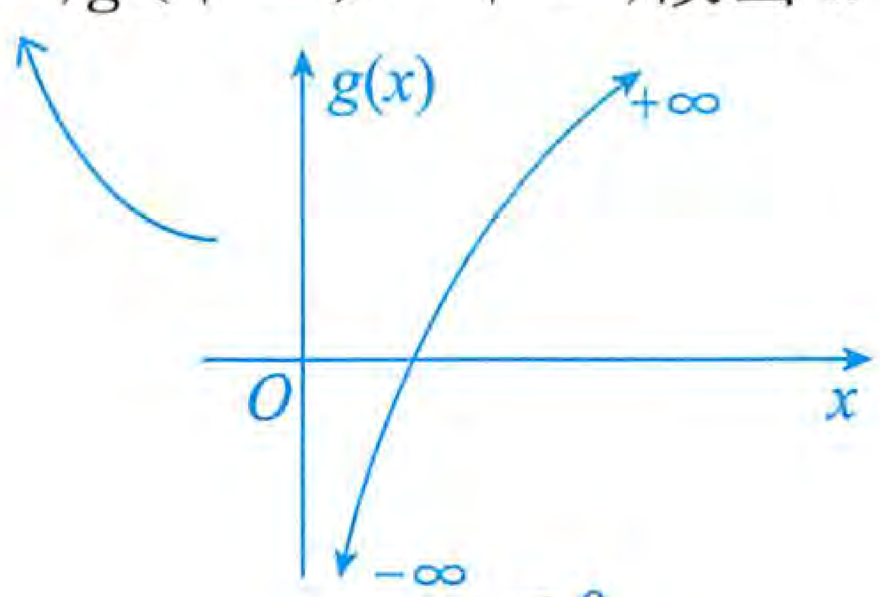
若 $f'(x_0)=0$，则 $\varphi'_+(x_0)=\varphi'_-(x_0)=0$，此时 $\varphi(x)=|f(x)|$ 在 x_0 处可导，且导数为 0. 若 $f'(x_0)\neq 0$，则 $\varphi'_+(x_0)\neq\varphi'_-(x_0)$，此时 $\varphi(x)=|f(x)|$ 在 x_0 处不可导.

综上，选(C).

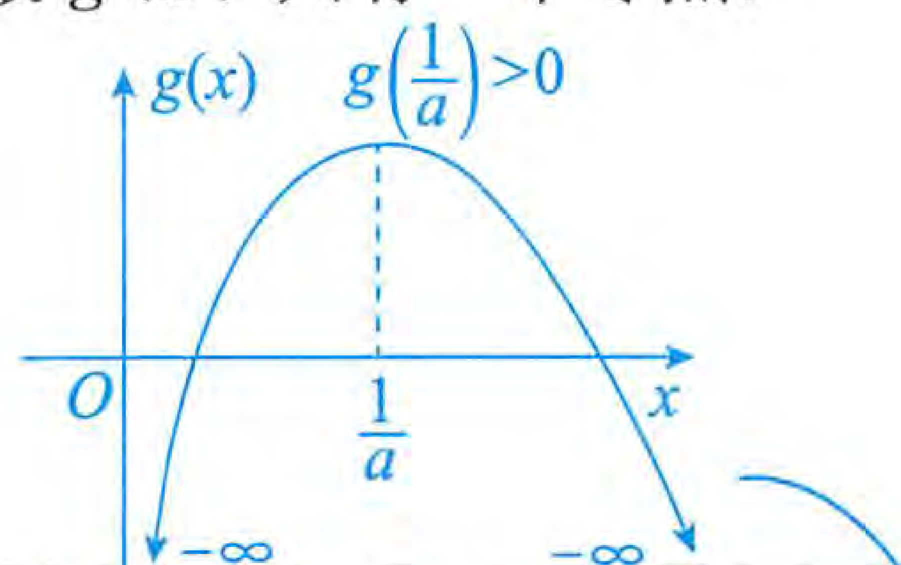
例 3.4 若函数 $f(x)=|\ln x-ax|$ 有两个不可导点，求常数 a 的取值范围.

【解】令 $g(x)=\ln x-ax$，则 $g'(x)=\dfrac{1}{x}-a$，$g''(x)=-\dfrac{1}{x^2}$，由例 3.3 的(D) 可知，函数 $f(x)=|\ln x-ax|$ 的不可导点即为使 $g(x)=0$ 且 $g'(x)\neq 0$ 的点.

当 $a\leqslant 0$ 时，$g'(x)=\dfrac{1}{x}-a>0(x>0)$，函数 $g(x)$ 在其定义域 $(0,+\infty)$ 上单调增加. 又 $g(0^+)=-\infty$，$g(+\infty)=+\infty$，故当 $a\leqslant 0$ 时，函数 $g(x)$ 只有一个零点.



$a\leqslant 0$



$a>0$

当 $a>0$ 时，令 $g'(x)=0$，得函数 $g(x)$ 的唯一驻点 $x=\dfrac{1}{a}$. 因为 $g''\left(\dfrac{1}{a}\right)=-a^2<0$，所以 $g\left(\dfrac{1}{a}\right)=-\ln a-1$ 是函数 $g(x)$ 的最大值. 由于 $g(0^+)=-\infty$，$g(+\infty)=-\infty$，因此当最大值

$g\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln a-1>0$，即 $0<a<e^{-1}$ 时，函数 $g(x)$ 有两个零点，设为 $x_1\in\left(0,\frac{1}{a}\right)$，$x_2\in\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$，显然 $g'(x_1)\neq 0$，$g'(x_2)\neq 0$. 因此，当 $0<a<e^{-1}$ 时，函数 $f(x)=|\ln x-ax|$ 有两个不可导点.

例 3.5 设 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{10x}-10)+\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2-2x+2}}$，则 $f'(0)=$________.

【解】应填 $-9!+\frac{\sqrt{2}}{2}$.

令
$$u(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{10x}-10),$$
$$g(x)=(e^{2x}-2)\cdots(e^{10x}-10),$$
$$v(x)=\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2-2x+2}},$$

则 $u(x)=(e^x-1)g(x)$，$u'(x)=e^xg(x)+(e^x-1)g'(x)$，$u'(0)=g(0)=-9!$.

又
$$v'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2-2x+2}}-0}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

所以
$$f'(0)=u'(0)+v'(0)=-9!+\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

例 3.6 已知 $f(x)=\sqrt[3]{x^2}\sin x$，则 $f'(x)=$________.

【解】应填 $\begin{cases}\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\sin x+\sqrt[3]{x^2}\cos x, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

当 $x\neq 0$ 时，$f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\sin x+\sqrt[3]{x^2}\cos x$. 当 $x=0$ 时，
$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{x^2}\cdot\frac{\sin x}{x}=0.$$

所以
$$f'(x)=\begin{cases}\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\sin x+\sqrt[3]{x^2}\cos x, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

【注】若 $f'(x)=(\sqrt[3]{x^2}\sin x)'=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\sin x+\sqrt[3]{x^2}\cos x$，由于该式在 $x=0$ 处无定义，得出 $f'(0)$ 不存在，这无疑是错误的. 错误产生于 $\sqrt[3]{x^2}$ 在 $x=0$ 处不可导，所以乘积的求导法则不适用. 这也说明，即使不是分段函数，有时也要用定义求导，而且表达式中部分式子在某点不可导，但整体表达式在该点也可能可导.

二 微分

(1) 定义.

设函数 $y=f(x)$ 在点 x 的某邻域内有定义，若对应于自变量的增量 Δx，函数的增量 Δy 可以表示为 $\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$，其中 A 与 Δx 无关，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x 处可微，并把 $A\Delta x$ 称为 $y=f(x)$ 在点 x 处相应于自变量增量 Δx 的**微分**，记作 $\mathrm{d}y$ 或 $\mathrm{d}[f(x)]$，即 $\mathrm{d}y=A\Delta x$.

(2) 可微的充要条件.

函数 $y=f(x)$ 在点 x 处可微的充分必要条件是 $f(x)$ 在点 x 处可导. 此时 $A=f'(x)$，即 $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$.

(3) 一阶微分形式的不变性.

设 $y=f(u)$ 可微，则微分 $\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u$，其中 u 不论是自变量还是中间变量，微分形式保持不变.

【注】$\mathrm{d}(x^n)=nx^{n-1}\mathrm{d}x$ 叫幂的微分；$\mathrm{d}x^n=(\mathrm{d}x)^n$ 叫微分的幂.

例 3.7 设函数 $y=f(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y=\dfrac{y\Delta x}{x+\sqrt{x^2+y^2}}+o(\Delta x)$，且 $f(0)=1$，则 $y=f(x)$ 在点 $x=0$ 处的微分 $\mathrm{d}y=(\quad)$.

(A) 0 (B) $\mathrm{d}x$ (C) $2\mathrm{d}x$ (D) $3\mathrm{d}x$

【解】应选(B).

由 $\Delta y=\dfrac{y\Delta x}{x+\sqrt{x^2+y^2}}+o(\Delta x)$，知 $y'=\dfrac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}$，又 $f(0)=1$，可得 $y'(0)=1$，进而 $\mathrm{d}y\Big|_{x=0}=y'(0)\mathrm{d}x=\mathrm{d}x$，应选(B).

例 3.8 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{d}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)}{\mathrm{d}(x^2)}=$ ______.

【解】应填 $-\dfrac{1}{6}$.

$$\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)}{\mathrm{d}(x^2)}=\lim_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x(x-\tan x)}{2x^3}=-\frac{1}{6}.$$