第5章 一元函数微分学的应用（一）——几何应用

A组

1. 设 $f(x)=|x(3-x)|$,则(　　).

(A) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点,但 $(0,0)$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(B) $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点,但 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(C) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点,且 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(D) $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点,且 $(0,0)$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

2. 设 $f(x)=(x-2)\ln(1-x)-2x$,则在 $(0,1)$ 内函数 $f(x)$(　　).

(A) 单调增加且其图形是凹的　　(B) 单调增加且其图形是凸的

(C) 单调减少且其图形是凹的　　(D) 单调减少且其图形是凸的

3. 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}+\arctan t, \\ y=-\dfrac{1}{3}t^3-t+\dfrac{1}{2} \end{cases}$ 确定,则曲线 $y=y(x)$(　　).

(A) 在区间 $\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ 上是凸的,在 $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}+\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上是凹的

(B) 在区间 $\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ 上是凹的,在 $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}+\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上是凸的

(C) 在区间 $\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{1}{6}\right)$ 上是凸的,在 $\left(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{2}+\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上是凹的

(D) 在区间 $\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{1}{6}\right)$ 上是凹的,在 $\left(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{2}+\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上是凸的

4. 设周期函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导,周期为4,且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$,则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(5,f(5))$ 处的切线斜率为(　　).

(A) $\dfrac{1}{2}$　　(B) 0　　(C) -1　　(D) -2

5. 设曲线 $y=x^3+ax+b$ 和 $3y=2x^3-xy^2-4$ 在点 $(1,-2)$ 处相切,其中 a,b 是常数,则(　　).

(A) $a=2,\ b=-5$　　(B) $a=-5,\ b=2$

(C) $a=-4,\ b=1$　　(D) $a=1,\ b=-4$

6. 设 $f(x)$ 的导数在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)}{x}=3$，则 $x=0$（　　）.

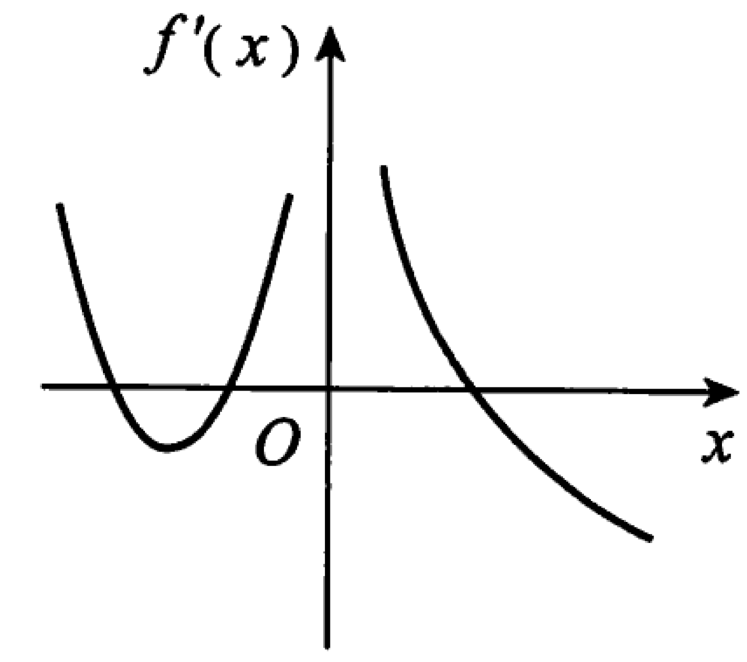
(A) 是 $f(x)$ 的极小值点

(B) 是 $f(x)$ 的极大值点

(C) 不是 $f(x)$ 的极值点，但 $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(D) 不是 $f(x)$ 的极值点，且 $(0,f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

7. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其导函数的图形如图所示，则 $f(x)$ 有（　　）.



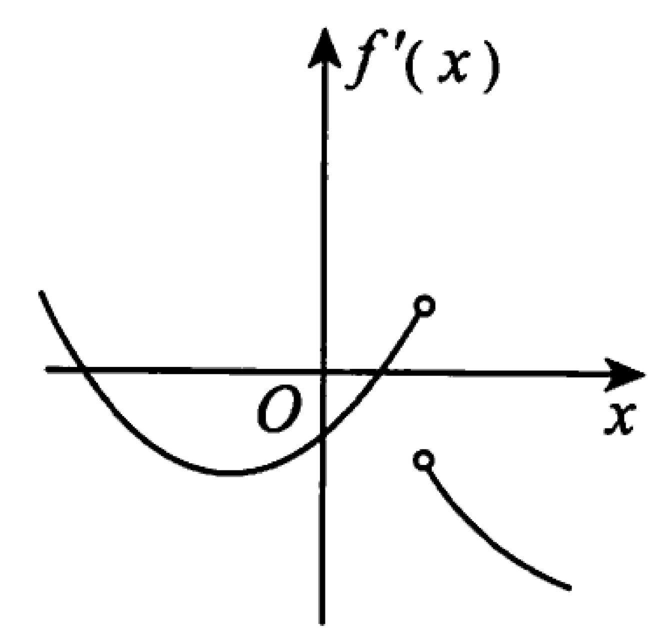
(A)1 个极小值点和 2 个极大值点

(B)2 个极小值点和 1 个极大值点

(C)2 个极小值点和 2 个极大值点

(D)3 个极小值点和 1 个极大值点

8. 设函数 $y=f(x)$ 连续，且其导函数 $f'(x)$ 除间断点外均可导，图形如图所示，则曲线 $y=f(x)$（　　）.



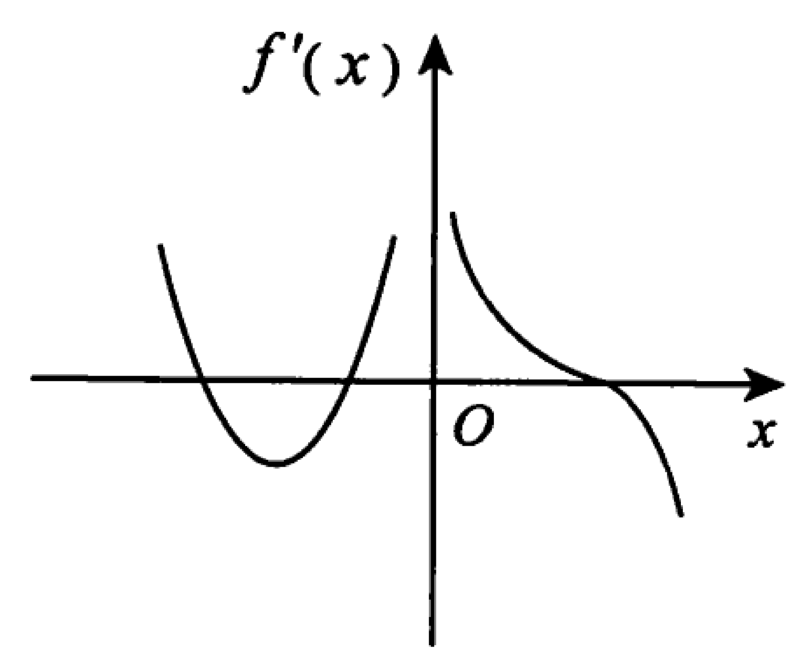
(A) 有两个极大值点，一个极小值点，两个拐点

(B) 有两个极大值点，一个极小值点，一个拐点

(C) 有一个极大值点，两个极小值点，一个拐点

(D) 有一个极大值点，一个极小值点，两个拐点

9. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其一阶导函数 $f'(x)$ 的图形如图所示，并设在 $f'(x)$ 存在处 $f''(x)$ 也存在，则曲线 $y=f(x)$ 的拐点个数为（　　）.



(A)1　　(B)2

(C)3　　(D)4

10. 设常数 $a>0$，$f(x)=\dfrac{1}{3}ax^3-x$，$x\in\left[0,\dfrac{1}{a}\right]$，则（　　）.

(A) 当 $0<a<1$ 时，$f(x)$ 的最大值是 $f\left(\dfrac{1}{a}\right)$

(B) 当 $0<a<1$ 时，$f(x)$ 的最大值是 $f(0)$

(C) 当 $a\geqslant1$ 时，$f(x)$ 的最小值是 $f\left(\dfrac{1}{a}\right)$

(D) 当 $a\geqslant1$ 时，$f(x)$ 的最小值是 $f(0)$

11. 设曲线 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=(1-t)\ln(1+t),\\ y=t+\cos^2t\end{cases}$ 确定，则曲线 $y=y(x)$ 在 $t=0$ 对应的点处的曲率等于（　　）.

(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$　　(B) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　　(C) $\sqrt{2}$　　(D) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

12. 设 $f(x)$ 表示曲线 $y=e^x$ 上任意点 (x,e^x) 处的曲率，则 $f(x)$ 的最大值是（　　）.

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{9}$　　(B) $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$　　(C) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　(D) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

13. 曲线 $y=\sqrt{4x^2-3x+7}-2x$ 的渐近线的条数为（　　）.

(A)0　　(B)1　　(C)2　　(D)3

14. 曲线 $y=\dfrac{x-1}{1-e^{x}}$ 的渐近线的条数为(　　).

(A)0　　(B)1　　(C)2　　(D)3

15. 曲线 $y=\ln\left(e-\dfrac{1}{x}\right)$ 的全部渐近线为________.

16. 若直线 $y=2x+3$ 是曲线 $y=(ax+b)e^{\frac{1}{x}}$ 的渐近线，则 $a+b$ 的值为________.

17. 曲线 $4x^2+y^2=4$ 在点 $(0,2)$ 处的曲率为________.

18. 曲线 $y=x^{x^2}(x>0)$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程为________.

19. 若曲线 $C:y=f(x)$ 由方程 $2x-y=2\arctan(y-x)$ 确定，则曲线 C 在点 $\left(1+\dfrac{\pi}{2},2+\dfrac{\pi}{2}\right)$ 处的切线方程为________.

20. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[f(x)+1]x^2}{x-\sin x}=2$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为________.

21. 设 $y=y(x)$ 是由参数方程 $\begin{cases}x=te^{t},\\ y=t^2e^{t}\end{cases}(t>-1)$ 所确定的函数，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xy'(x)}{e^{x^2}-1}=$________.

22. 曲线 $e^{x}-e^{y}=xy$ 在点 $(0,0)$ 处的曲率为________.

23. 已知 $a_n=\dfrac{(1+n)^3}{(1-n)^2}$，$n=2,3,\cdots$，则数列 $\{a_n\}$ 的最小值为________.

24. 曲线 $\begin{cases}x=t^3+3t+1,\\ y=3t^5+5t^3+2\end{cases}$ 在其拐点处的法线方程为________.

25. 设函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 处可微，且满足

$$2f(2+x)+f(2-x)=3+2x+o(x), \tag{①}$$

这里 $o(x)$ 表示比 x 高阶的无穷小(当 $x\to 0$ 时)，求微分 $d[f(x)]\Big|_{x=2}$，并求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线方程.

26. 设函数 $f(x)=\begin{cases}ae^{2x}-4x^2, & x>0,\\ bx+1, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处可导.

(1) 求常数 a,b 的值；

(2) 求当 $x>0$ 时，曲线 $y=f(x)$ 的凹凸区间及拐点.

27. 用火车在两地之间运送货物，设每节车厢的装载量相同. 若每次拖挂 8 节车厢，则一天最多能来回 10 次，若每次拖挂 12 节车厢，则一天最多只能来回 8 次. 已知车厢增多的节数与来回减少的次数成正比，问每次拖挂多少节车厢才能使一天的运货总量最大?

B组

1. 设函数 $f(x)=x^4-\dfrac{4}{3}x^3+2x^2+ax+b$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，其中 a,b 是常数，则(　　).

(A) 对任意实数 b，$f(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上单调减少

(B) 对任意实数 a，$f(x)$ 在区间 $(-1,+\infty)$ 上单调增加

(C) 存在无穷多个实数 a，$f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内单调减少

(D) 存在某个实数 b，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是单调函数

2. 设 n 为正整数，则关于函数 $f(x)=\left(1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$ 的极值，下列说法正确的是(　　).

(A) 仅有极小值　　(B) 仅有极大值

(C) 既无极小值也无极大值　　(D) 是否有极值依赖于 n 的取值

3. 设函数 $f(x)$ 有连续导数，且满足 $f(x)+3\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{2}{3}$，则 $f(x)$ 必存在(　　).

(A) 极大值 $-\dfrac{1}{3}$　　(B) 极大值 $-\dfrac{1}{3}\ln 3$

(C) 极小值 $\dfrac{1}{3}$　　(D) 极小值 $\dfrac{1}{3}\ln 3$

4. 曲线 $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & x<0, \\ (3-x)\sqrt{x}, & x\geqslant 0 \end{cases}$ 的拐点个数为(　　).

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

5. 设函数 $\varphi(x)$ 在点 $x=1$ 的某邻域内具有三阶导数，且 $\varphi(1)\neq 0$，$f(x)=(x-1)^3\varphi(x)$，则(　　).

(A) 函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处取得极大值

(B) 函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处取得极小值

(C) 点 $(1,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(D) 点 $(1,0)$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

6. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处存在三阶导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\sqrt[3]{1-x^3}}=a\,(a>0)$，则(　　).

(A) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点

(B) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点

(C) 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 左侧邻域的图形是凹的，右侧邻域的图形是凸的

(D) 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 左侧邻域的图形是凸的，右侧邻域的图形是凹的

7. 设 $f(x)$ 满足 $f''(x)+(1-\cos x)f'(x)+xf(x)=\sin x$，且 $f(0)=2$，则(　　).

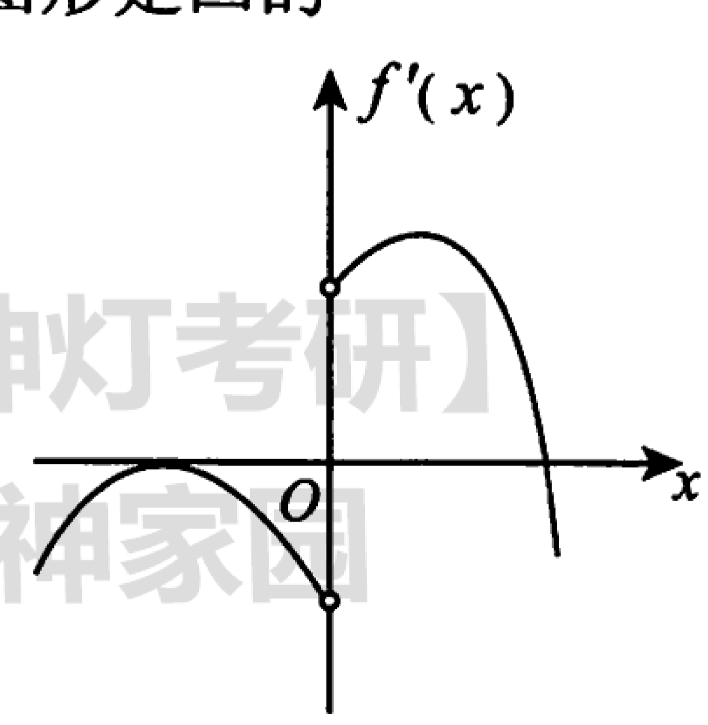
(A) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点

(B) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点

(C) 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 左侧邻域的图形是凹的，右侧邻域的图形是凸的

(D) 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 左侧邻域的图形是凸的，右侧邻域的图形是凹的

8. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其一阶导函数 $f'(x)$ 的图形如图所示，并设在 $f'(x)$ 存在处 $f''(x)$ 亦存在，则曲线 $y=f(x)$(　　).



(A) 有 1 个极大值点与 1 个拐点

(B) 有 1 个极小值点，1 个极大值点与 1 个拐点

(C) 有 1 个极小值点，1 个极大值点与 2 个拐点

(D) 有 1 个极小值点，1 个极大值点与 3 个拐点

9. 曲线 $y=a^x$ 与直线 $y=x$ 相交的充要条件是(　　).

(A)$0<a\leqslant 1$　　(B)$0<a\leqslant \mathrm{e}$

(C)$0<a\leqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$　　(D)$0<a\leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{e}}}$

10. 已知抛物线 $L: y=ax^2+bx+c$ 在其上的点 $P(1,2)$ 处的曲率圆的方程为 $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{5}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}$，则 $(a,b,c)=$（　　）.

(A)$(2,3,-3)$　　(B)$(2,-3,3)$　　(C)$(-2,3,-3)$　　(D)$(-2,-3,3)$

11. 设函数 $f(x)=x\mathrm{e}^{-x}-\sqrt{4x^2-3x+5}$，则曲线 $y=f(x)$ 的斜渐近线为________.

12. 设曲线 $y=y(x)$ 在 $\left(1,\dfrac{1}{4}\right)$ 点与直线 $4x-4y-3=0$ 相切，且 $y=y(x)$ 满足方程 $y''=6\sqrt{y}$. 则该曲线在相应 $x\in[-1,1]$ 上 (x,y) 点的曲率为________.

13. 设 $f(x)$ 是四次多项式，其最高次幂项的系数为 1，已知曲线 $y=f\left(\sin\dfrac{\pi x}{2}\right)-\sin f(x)$ 在 $x=0$，$x=1$ 处与 x 轴相切，则 $f(x)$ 的表达式为________.

14. 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $\displaystyle\int_x^{2y+x}\mathrm{e}^{-(t-x)^2}\,\mathrm{d}t=x^2+3\sin x$ 确定，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为________.

15. 设曲线 $y=f(x)$ 的参数方程为 $\begin{cases}x(t)=t-\sin t,\\ y(t)=1-\cos t,\end{cases}$ $0\leqslant t\leqslant 2\pi$，$P(x,y)(0<x<\pi)$ 是曲线上的动点，在点 P 处作曲线的切线，记该切线在 x 轴上的截距为 $u(x)$，求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{u(x)}{x}$.

16. 求曲线 $y=x^2+5x+4$ 过点 $(0,3)$ 的切线方程.

17. 设 $f(x)=(1+\sin 2x)^{\frac{1}{x}}(x\neq 0)$，且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，求 $f(0)$ 的值，并求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程.

18. 求当 $x>0$ 时曲线 $y=\dfrac{x^2\arctan x}{x-1}$ 的斜渐近线方程.

19. 设 $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}$，求 $x>0$ 时曲线 $y=f(x)$ 的斜渐近线方程.

20. 求方程 $2y^3-2y^2+2xy+y-x^2=0$ 确定的函数 $y=y(x)$ 的极值.

21. 设函数 $f(x)$ 可导，且满足 $xf'(x)=f'(-x)+1$，$f(0)=0$，求：

(1)$f'(x)$；

(2) 函数 $f(x)$ 的极值.

22. 曲线 $y=y(x)$ 可表示为 $\begin{cases}x=t^3-t,\\ y=t^4+t,\end{cases}$ t 为参数. 证明：

(1)$t=0$ 对应的点为 $y=y(x)$ 的拐点；

(2)$g(t)=\sqrt{\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}$ 在 $t=0$ 处取得极大值.

23. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上可导，且 $f'(x)>0$，

$$F(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{1}xf(u)\,\mathrm{d}u+\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{f(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u.$$

求 $F(x)$ 的单调区间，并求曲线 $y=F(x)$ 的凹凸区间及拐点坐标.

24. 求函数 $f(x)=\begin{cases}x^{2x}, & x>0,\\ x+2, & x\leqslant 0\end{cases}$ 的单调区间和极值.

25. 设函数 $f(x)$ 满足 $3f(x)+4x^2f\left(-\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{7}{x}=0(x\neq 0)$，求 $f(x)$ 的极大值与极小值.

26. 设 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases}x=3t^2+2t+3,\\ y=e^y\sin t+1\end{cases}$ 所确定，求曲线 $y=y(x)$ 在 $t=0$ 对应的点处的曲率 k.

27. 设有曲线弧 $y=\sin x(0<x<\pi)$.

(1) 求出曲线弧的最小曲率半径；

(2) 求与曲线弧在曲率半径最小的点处相切且具有相同曲率和相同凹凸性的抛物线方程.

C组

1. 要使曲线 $y=\dfrac{x}{e^{ax}+b}$ 有 3 条渐近线，则常数 a,b 的取值范围为(　　).

(A) $a<0,b<0$　　(B) $a>0,b<0$ 且 $b\neq -1$

(C) $a\neq 0,b<0$　　(D) $a\neq 0,b<0$ 且 $b\neq -1$

2. 函数 $f(x)=\int_0^x \sin^2(\pi t)\mathrm{d}t-\dfrac{x^2}{2}$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的驻点共有(　　).

(A)1 个　　(B)2 个　　(C)3 个　　(D)4 个

3. 设函数 $f(x)=\max\limits_{0\leqslant y\leqslant 1}\dfrac{|x-y|}{x+y+1}$，$0\leqslant x\leqslant 1$，则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最小值与最大值分别为(　　).

(A)$0,2-\sqrt{3}$　　(B)$0,\dfrac{1}{2}$　　(C)$\dfrac{\sqrt{3}-1}{2},\dfrac{1}{2}$　　(D)$2-\sqrt{3},\dfrac{1}{2}$

4. 求 $y=\sqrt{4x^2+x}\ln\left(2+\dfrac{1}{x}\right)$ 的全部渐近线.

5. 设函数 $f(x)=\begin{cases}3x^2+2x^3, & x\leqslant 0,\\ \ln(1+x)-x^2, & x>0,\end{cases}$ 求 $f'(x)$ 的极小值.

6. 设 $f(x)$ 满足方程 $\dfrac{1}{x}f''(x)+3x[f'(x)]^2=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\ln^2(1+x)-x$，若 $x_0(x_0>0)$ 是 $f(x)$ 的一个驻点，证明：x_0 是 $f(x)$ 的极大值点.

7. 求函数 $f_n(x)=x^n e^{-n^2x}(n=2,3,\cdots)$ 在 $[0,+\infty)$ 内的最值，并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$，$x\geqslant 0$.

8. 在极坐标曲线 $r=e^\theta$ 的 $\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 范围内的曲线上找一点，使经过它的切线与 x 轴，y 轴的正向所围成的三角形的面积最小，并求出此最小面积的值.