# 第3章 矩阵运算

## A组

**1.** 设 $n$ 维行向量 $\boldsymbol{\alpha}=\left[\frac{1}{2},0,\cdots,0,\frac{1}{2}\right]$，矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$，则 $\boldsymbol{AB}=($　　$)$.

(A) $\boldsymbol{O}$　　(B) $-\boldsymbol{E}$　　(C) $\boldsymbol{E}$　　(D) $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$

**2.** 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶可逆矩阵，则下列等式中，不一定成立的是(　　).

(A) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}+(\boldsymbol{A}^{-1})^2$　　(B) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^2$

(C) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^*)^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*+(\boldsymbol{A}^*)^2$　　(D) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}^2$

**3.** 设 $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶方阵，$\boldsymbol{B}$ 为 3 阶方阵，$|\boldsymbol{A}|=2$，$|\boldsymbol{B}|=3$，$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{C}^*=($　　$)$.

(A) $\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&-3\boldsymbol{A}^*\\-2\boldsymbol{B}^*&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}$　　(B) $\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&3\boldsymbol{A}^*\\2\boldsymbol{B}^*&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&-2\boldsymbol{B}^*\\-3\boldsymbol{A}^*&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}$　　(D) $\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&2\boldsymbol{B}^*\\3\boldsymbol{A}^*&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}$

**4.** 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是同阶方阵，且 $(\boldsymbol{AB})^2=\boldsymbol{E}$，则有(　　).

(A) $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}$　　(B) $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$

(C) $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{BA}$　　(D) $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{AB}$

**5.** 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第二列加到第一列得矩阵 $\boldsymbol{B}$，再交换 $\boldsymbol{B}$ 的第二行与第三行得单位矩阵，记

$$\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix},$$

则 $\boldsymbol{A}^{-1}=($　　$)$.

(A) $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$　　(B) $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2$　　(C) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1$　　(D) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}$

**6.** 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}+a_{11}&a_{32}+a_{12}&a_{33}+a_{13}\end{bmatrix},$$



$$\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix},\boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix},$$

则必有（　　）.

(A)$\boldsymbol{AP}_1\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{B}$　　(B)$\boldsymbol{AP}_2\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{B}$

(C)$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$　　(D)$\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$

**7.** 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 3 阶矩阵，且 $\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，则必有（　　）.

(A) 互换矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的第 1,2 行得矩阵 $\boldsymbol{B}$

(B) 互换矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的第 1,2 列得矩阵 $\boldsymbol{B}^{-1}$

(C) 互换矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 1,2 行得矩阵 $\boldsymbol{B}^{-1}$

(D) 互换矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 1,2 列得矩阵 $\boldsymbol{B}^{-1}$

**8.** 设 $n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，则下列命题错误的是（　　）.

(A) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$

(B) 若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 等价，则 $\boldsymbol{B}$ 可逆

(C) 若 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{PB}=\boldsymbol{E}$

(D) 若 $|\boldsymbol{A}|>0$，则 $|\boldsymbol{B}|>0$

**9.** 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{\Lambda},\boldsymbol{P}$ 为 4 阶矩阵，其中 $\boldsymbol{P}$ 可逆，$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}-1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\Lambda P}$，则 $\boldsymbol{A}^{10}=$ ________.

**10.** 设 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵，若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{A}=$ ________.

**11.** 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵，满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，则 $(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})^{-1}=$ ________.

**12.** 已知 $\boldsymbol{E}_2(3)\boldsymbol{AE}_{12}\boldsymbol{E}_{13}(-1)=\begin{bmatrix}1&0&1\\2&1&4\\-3&2&5\end{bmatrix}$，其中 $\boldsymbol{E}_2(3),\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{13}(-1)$ 均为 3 阶初等矩阵，则矩阵 $\boldsymbol{A}=$ ________.

**13.** 设 $n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B},(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$. 证明：$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$.

**14.** 设 $\boldsymbol{A}$ 是主对角元素为 0 的 4 阶实对称矩阵，$\boldsymbol{E}$ 是 4 阶单位矩阵，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&&&\\&0&&\\&&2&\\&&&2\end{bmatrix}$，且 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB}$ 是不可逆的对称矩阵，求 $\boldsymbol{A}$.

**15.** 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&1&1\\-1&0&-1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&-1\\2&0\\5&-3\end{bmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{B}$，求 $\boldsymbol{X}$.



## B组

**1.** 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均为 $n$ 阶矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵，若 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB},\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{CA}$，则 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}=$（　　）.

(A)$\boldsymbol{E}$　　(B)$-\boldsymbol{E}$　　(C)$\boldsymbol{A}$　　(D)$-\boldsymbol{A}$

**2.** 设 $E$ 是 $n$ 阶单位矩阵，$E+A$ 是 $n$ 阶可逆矩阵，则下列关系式中不恒成立的是(　　).

(A) $(E-A)(E+A)^2=(E+A)^2(E-A)$

(B) $(E-A)(E+A)^T=(E+A)^T(E-A)$

(C) $(E-A)(E+A)^{-1}=(E+A)^{-1}(E-A)$

(D) $(E-A)(E+A)^*=(E+A)^*(E-A)$

**3.** 已知 $A$ 是 $n$ 阶方阵，$E$ 是 $n$ 阶单位矩阵，且 $A^3=E$，则 $\begin{bmatrix} O & -E \\ A & O \end{bmatrix}^{98}=$(　　).

(A) $\begin{bmatrix} A & E \\ O & A \end{bmatrix}$　　(B) $\begin{bmatrix} A & O \\ E & A \end{bmatrix}$　　(C) $\begin{bmatrix} A & O \\ O & A \end{bmatrix}$　　(D) $\begin{bmatrix} -A & O \\ O & -A \end{bmatrix}$

**4.** 设

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{34} & a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{44} & a_{43} & a_{42} & a_{41} \end{bmatrix},$$

$$P_1=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, P_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

其中 $A$ 可逆，则 $B^{-1}$ 等于(　　).

(A) $A^{-1}P_1P_2$　　(B) $P_1A^{-1}P_2$　　(C) $P_1P_2A^{-1}$　　(D) $P_2A^{-1}P_1$

**5.** 设 $A=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} c_1 & b_1+2a_1 & a_1 \\ c_2 & b_2+2a_2 & a_2 \\ c_3 & b_3+2a_3 & a_3 \end{bmatrix}$，$|A|=2$，则 $B^*A=$(　　).

(A) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$　　(B) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$　　(D) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

**6.** 设 $A,B$ 均为3阶矩阵，将 $A$ 的第二行加到第三行得到矩阵 $C$，将 $B$ 的第一列的 $-3$ 倍加到第三列得到矩阵 $D$，已知 $CD=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$，则 $AB=$(　　).

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$　　(B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$　　(C) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$　　(D) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$



**7.** 设 $A$ 是3阶可逆矩阵，把 $A$ 的第1列的2倍加到第2列得到 $B$，$A^*$，$B^*$ 分别是 $A,B$ 的伴随矩阵，则 $B^*$ 可由(　　).

(A) $A^*$ 的第1行的 $-2$ 倍加到第2行得到

(B) $A^*$ 的第2行的 $-2$ 倍加到第1行得到

(C) $-A^*$ 的第 1 行的 $-2$ 倍加到第 2 行得到

(D) $-A^*$ 的第 2 行的 $-2$ 倍加到第 1 行得到

8. 设 $A,B$ 均为 $n$ 阶矩阵，且 $AB=A+B$，则下列命题

① 若 $A$ 可逆，则 $B$ 可逆；　② 若 $A+B$ 可逆，则 $B$ 可逆；

③ 若 $B$ 可逆，则 $A+B$ 可逆；　④ $A-E$ 恒可逆.

正确的个数为(　　).

(A)1　(B)2　(C)3　(D)4

9. 设 $A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&3&-2\\-1&0&4\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&7&-1\\0&3&0\\-3&-2&4\end{bmatrix}$，则 $A^2(BA)^*(AB^{-1})^{-1}=$ ______.

10. 设 $A^{-1}=\begin{bmatrix}1&-2&2\\0&1&3\\3&-1&4\end{bmatrix}$，则 $(A^*)^{-1}=$ ______.

11. 设 $B=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，$A=E+B+B^2+B^3$，则 $A^{-1}=$ ______.

12. 设 $A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-2&3&0&0\\0&-4&5&0\\0&0&-6&7\end{bmatrix}$，$B=(E+A)^{-1}(E-A)$，则 $(E+B)^{-1}=$ ______.

13. 设 $A$ 为 4 阶可逆矩阵，若将矩阵 $A$ 的第二、三列交换位置，再将第四列乘 $-2$ 加至第二列，得到矩阵 $B$，则 $B^{-1}A=$ ______.

14. 已知 $A=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}^5\begin{bmatrix}1&0&0\\0&5&0\\0&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}^4$，则 $A^{-1}=$ ______.

15. 已知 $\alpha=[1,2,3]$，$\beta=\left[1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right]$，$A=\alpha^T\beta$，若 $A$ 满足方程 $A^3-2\lambda A^2-\lambda^2A=O$，则 $\lambda=$ ______.

16. 设 $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&4\\0&0&1\end{bmatrix}$，则 $A^n=$ ______ $(n\geqslant 3)$.

17. 已知 $A=\begin{bmatrix}3&1&0&0&0\\0&3&1&0&0\\0&0&3&0&0\\0&0&0&3&-1\\0&0&0&-9&3\end{bmatrix}$，则 $A^n=$ ______ $(n\geqslant 2)$.



18. 设 $A=\begin{bmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{bmatrix}$，矩阵 $X$ 满足 $A^*X=A^{-1}+2X$，则 $X^*=$ ______.

**19.** 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 为 $n$ 阶矩阵，若 $\boldsymbol{ABCD}=\boldsymbol{E}$，证明：

(1)$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 均为可逆矩阵；

(2)$\boldsymbol{BCDA}=\boldsymbol{CDAB}=\boldsymbol{E}$.

**20.** 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 $n$ 阶矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为 $n$ 阶单位矩阵.

(1) 计算$\begin{bmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E} & -\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}\end{bmatrix}$；

(2) 利用(1) 的结果证明$\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|\,|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|$.

**21.** 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & a_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1}\\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}(a_1a_2\cdots a_n\neq 0,n\geqslant 3)$，求：

(1) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有元素的代数余子式之和；

(2) 矩阵 $\boldsymbol{X}$，使得 $\boldsymbol{AXA}^*=\boldsymbol{A}^*+|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$.

**22.** 设矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3 & -2\\ 0 & 1 & 2 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足$(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{C}^{-1}$，求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

**23.** 设 $\boldsymbol{\alpha}=[a_1,a_2,\cdots,a_n]^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{\beta}=[b_1,b_2,\cdots,b_n]^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{0}$，且 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=0$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$，计算：

(1) $|\boldsymbol{A}|$；(2)$\boldsymbol{A}^n$；(3)$\boldsymbol{A}^{-1}$.

## C组

**1.** 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n$ 阶矩阵，则下列说法错误的是(　　).

(A) 对任意的 $n$ 维列向量 $\boldsymbol{\xi}$，有 $\boldsymbol{A\xi}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$

(B) 对任意的 $n$ 维列向量 $\boldsymbol{\xi}$，有 $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\xi}=0$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$

(C) 对任意的 $n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$，有 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$

(D) 对任意的 $n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$，有 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$

**2.** 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为 $n$ 维单位列向量，$\boldsymbol{P}$ 是 $n$ 阶可逆矩阵，则下列矩阵中可逆的是(　　).

(A)$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$　　(B)$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P\alpha P}^{-1}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$

(C)$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\beta P}-\boldsymbol{\beta\alpha}^{\mathrm{T}}$　　(D)$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}}$



**3.** 设 $n$ 阶实矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，$A_{ij}$ 是 $a_{ij}$ 的代数余子式，$|a_{ij}|$，$|A_{ij}|$ 分别表示两个表达式的绝对值，则下列结论不正确的是(　　).

(A) 若 $|\boldsymbol{A}|=1$ 且对任意 $i,j$ 均有 $a_{ij}=-A_{ij}$，则 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵

(B) 若 $|\boldsymbol{A}|=-1$ 且对任意 $i,j$ 均有 $a_{ij}=-A_{ij}$，则 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵

(C) 若 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵且 $|\boldsymbol{A}|=1$，则对任意 $i,j$，有 $|a_{ij}|=|A_{ij}|$

(D) 若 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵且 $|\boldsymbol{A}|=-1$，则对任意 $i,j$，有 $|a_{ij}|=|A_{ij}|$

**4.** 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$，其中 $a,b,c$ 为实数，则下列选项中，不能使得 $\boldsymbol{A}^{100}=\boldsymbol{E}$ 的是(　　).

(A) $a=1,b=2,c=-1$　　(B) $a=1,b=-2,c=-1$

(C) $a=-1,b=2,c=1$　　(D) $a=-1,b=2,c=-1$

**5.** 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(1) 证明当 $n\geqslant 3$ 时，有 $\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{A}^{n-2}+\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}$；(2) 求 $\boldsymbol{A}^{100}$.

**6.** 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵，已知 $\boldsymbol{E}_m+\boldsymbol{AB}$ 可逆.

(1) 验证 $\boldsymbol{E}_n+\boldsymbol{BA}$ 可逆，且 $(\boldsymbol{E}_n+\boldsymbol{BA})^{-1}=\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{B}(\boldsymbol{E}_m+\boldsymbol{AB})^{-1}\boldsymbol{A}$；

(2) 设 $\boldsymbol{W}=\begin{bmatrix} 1+a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & 1+a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & 1+a_3b_3 \end{bmatrix}$，其中 $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$. 证明 $\boldsymbol{W}$ 可逆，并求 $\boldsymbol{W}^{-1}$.

**7.** 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶可逆矩阵，$\boldsymbol{\alpha}=[a_1,a_2,a_3]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=[b_1,b_2,b_3]^{\mathrm{T}}$ 是 3 维列向量，且 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\neq -1$.

(1) 验证：$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}-\dfrac{\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}}{1+\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}}$；

(2) 设 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$，利用(1) 中结论求 $\boldsymbol{B}^{-1}$.

**8.** 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $n\times m$ 矩阵，证明：$|\boldsymbol{E}_m-\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{BA}|$，其中 $\boldsymbol{E}_k$ 为 $k$ 阶单位矩阵.