关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

第1讲 函数极限与连续

知识结构

- 函数极限的定义及使用
  - 定义
  - 使用
    - 是常数
    - 唯一性
    - 局部有界性
    - 局部保号性
    - 等式脱帽法
- 函数极限的计算
  - 化简先行
    - 等价无穷小替换
    - 恒等变形
    - 及时提出极限存在且不为 0 的因式
  - 洛必达法则
  - 泰勒公式
    - 熟记常用公式
    - 展开原则
  - 无穷小比阶
- 函数极限的存在性
  - 具体型(若洛必达法则失效,用夹逼准则)
  - 抽象型(单调有界准则)
- 函数极限的应用 —— 连续与间断
  - 研究位置
    - 无定义点
    - 分段函数的分段点
  - 连续
    - 内点处
    - 端点处
  - 间断
    - 第一类间断点
      - 跳跃间断点
      - 可去间断点
    - 第二类间断点
      - 无穷间断点
      - 振荡间断点

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

一 函数极限的定义及使用

1. 定义

$\lim\limits_{x\to\cdot} f(x)=A \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0$，当 $x\to\cdot$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$.

【注】$x\to\cdot$ 是指 $x\to x_0, x\to x_0^+, x\to x_0^-, x\to\infty, x\to+\infty, x\to-\infty$ 这六种情形.

2. 使用

当 $\lim\limits_{x\to\cdot} f(x)$ 存在时，

以下各式，只要存在，即为常数：$\lim\limits_{x\to\cdot} f(x)=A$，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A$，$f'(x_0)=A$，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=A$，$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=A$，…

①(**是常数**) 常记 $\lim\limits_{x\to\cdot} f(x)=A$，$A$ 是一个常数.

②(**唯一性**) A 唯一：左极限 = 右极限.

③(**局部有界性**) 当 $x\to\cdot$ 时，$\exists M>0$，$|f(x)|\leqslant M$.

④(**局部保号性**) 当 $x\to\cdot$ 时，若 $A>0$，则 $f(x)>0$；若 $x\to\cdot$ 时，$f(x)\geqslant 0$，则 $A\geqslant 0$.

⑤(**等式脱帽法**) $f(x)=A+\alpha$，其中 $\lim\limits_{x\to\cdot}\alpha=0$.

例 1.1 已知 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在，且 $f(x)=\dfrac{x^{1+x}}{(1+x)^x}-\dfrac{x}{\mathrm{e}}+2\cdot\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$，求 $f(x)$.

【解】设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，则

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^{1+x}}{(1+x)^x}-\frac{x}{\mathrm{e}}\right]+\lim_{x\to+\infty}\left[2\cdot\lim_{x\to+\infty} f(x)\right],$$

即
$$A=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^{1+x}}{(1+x)^x}-\frac{x}{\mathrm{e}}\right]+2A,$$

可得
$$A=-\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^{1+x}}{(1+x)^x}-\frac{x}{\mathrm{e}}\right]$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(1+x)^x-\mathrm{e}x^{1+x}}{\mathrm{e}(1+x)^x}$$
$$=\lim_{x\to+\infty} x\cdot\frac{(1+x)^x-\mathrm{e}x^x}{\mathrm{e}(1+x)^x}$$

分子分母同时除以 x^x，以使 $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ 出现

$$=\lim_{x\to+\infty} x\cdot\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-\mathrm{e}}{\mathrm{e}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}$$

$$\xlongequal{x=\frac{1}{t}}\lim_{t\to0^+}\frac{1}{\mathrm{e}}\cdot\frac{(1+t)^{\frac{1}{t}}-\mathrm{e}}{t\cdot(1+t)^{\frac{1}{t}}}=\frac{1}{\mathrm{e}^2}\lim_{t\to0^+}\frac{(1+t)^{\frac{1}{t}}-\mathrm{e}}{t}$$

极限为 e 并提出极限号外，与前面分母上的 e 相乘得 e^2

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　客服微信：KYFT104　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

$$= \frac{1}{e^2}\lim_{t\to 0^+}\frac{e^{\frac{1}{t}\ln(1+t)}-e}{t} = \frac{1}{e}\lim_{t\to 0^+}\frac{e^{\frac{\ln(1+t)}{t}-1}-1}{t}$$

$$= \frac{1}{e}\cdot\lim_{t\to 0^+}\frac{\ln(1+t)-t}{t^2} = -\frac{1}{2e},$$

故 $f(x)=\dfrac{x^{1+x}}{(1+x)^x}-\dfrac{x}{e}-\dfrac{1}{e}$.

【注】(1) 本题的命制对计算能力提出了较高要求，提醒考生重视计算.

(2) $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 在 $x>0$ 时有以下性质：

① $f(x)$ 单调减少；② $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=e$；③ $(1+x)^{\frac{1}{x}}-e\sim-\dfrac{e}{2}x\ (x\to 0^+)$.

$x_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 在 $n\to\infty$ 时有以下性质：

① $\{x_n\}$ 单调增加；② $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=e$；③ $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n-e\sim-\dfrac{e}{2}\cdot\dfrac{1}{n}$.

以上均是常用的性质，要熟悉.

例 1.2 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\left[a\arctan\dfrac{1}{x}+(1+|x|)^{\frac{1}{x}}\right]$ 存在，则常数 $a=$ _____.

【解】应填 $\dfrac{1-e^2}{\pi e}$.

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\left[a\arctan\dfrac{1}{x}+(1+|x|)^{\frac{1}{x}}\right]$ 存在，且

$$\lim_{x\to 0^-}\left[a\arctan\frac{1}{x}+(1+|x|)^{\frac{1}{x}}\right]=\lim_{x\to 0^-}a\arctan\frac{1}{x}+\lim_{x\to 0^-}(1-x)^{\frac{1}{x}}=-\frac{\pi}{2}a+\frac{1}{e},$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left[a\arctan\frac{1}{x}+(1+|x|)^{\frac{1}{x}}\right]=\lim_{x\to 0^+}a\arctan\frac{1}{x}+\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\frac{\pi}{2}a+e,$$

所以 $-\dfrac{\pi}{2}a+\dfrac{1}{e}=\dfrac{\pi}{2}a+e$. 故 $a=\dfrac{1-e^2}{\pi e}$.

例 1.3 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且在点 $x=a$ 处取最小值，在点 $x=b$ 处取最大值，则 (　　).

(A) $f'_+(a)\leqslant 0, f'_-(b)\leqslant 0$　　(B) $f'_+(a)\leqslant 0, f'_-(b)\geqslant 0$

(C) $f'_+(a)\geqslant 0, f'_-(b)\leqslant 0$　　(D) $f'_+(a)\geqslant 0, f'_-(b)\geqslant 0$

【解】应选(D).

因为 $f(a)$ 是最小值，所以 $f(x)\geqslant f(a), x\in(a,b]$，又 $f'_+(a)$ 存在，故

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\geqslant 0.$$

因为 $f(b)$ 是最大值，所以 $f(x)\leqslant f(b), x\in[a,b)$，又 $f'_-(b)$ 存在，故

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　客服微信：KYFT104　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

$$f'_-(b)=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}\geqslant 0.$$

应选(D).

【注】(1) 本题考查可导函数在端点处取最值的必要条件，总结如下：
设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必存在最大(小)值，且
① 若 $f(x)$ 在 $x=a$ 处取 $[a,b]$ 上的最大(小)值，则 $f'_+(a)\leqslant 0(\geqslant 0)$；
② 若 $f(x)$ 在 $x=b$ 处取 $[a,b]$ 上的最大(小)值，则 $f'_-(b)\geqslant 0(\leqslant 0)$.
(2) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且在点 $x=c\in(a,b)$ 处取最小或最大值，则必有 $f'(c)=0$，此为费马定理.
(3) 在考研中，要习惯函数 $f(x)$ 的"升阶"或"降阶". 若本题命制成 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，$x\in[a,b]$，此谓"升阶". 则 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数，于是
① 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且当 $f(x)$ 在 $x=a$ 处取得最大(小)值时，有 $F''_+(a)\leqslant 0(\geqslant 0)$.
② 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且当 $f(x)$ 在 $x=b$ 处取得最大(小)值时，有 $F''_-(b)\geqslant 0(\leqslant 0)$.
③ 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且当 $f(x)$ 在 $x=c\in(a,b)$ 处取得最大或最小值时，有 $F''(c)=0$.

例 1.4 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{f(x)}-\cos x+\sin x}{x}=0$，则 $f'(0)=$_____.

【解】应填 -1.

因题设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{f(x)}-\cos x+\sin x}{x}=0$，所以

若 $\lim\limits_{x\to\bullet}f(x)=A$，则 $f(x)=A+\alpha$，其中 $\alpha\to 0(x\to\bullet)$

$$\frac{\mathrm{e}^{f(x)}-\cos x+\sin x}{x}=\alpha,$$

其中 $\lim\limits_{x\to 0}\alpha=0$，从而 $f(x)=\ln(\alpha x+\cos x-\sin x)$.

因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，所以

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\ln(\alpha x+\cos x-\sin x)=0,$$

$$\begin{aligned}
f'(0)&=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\alpha x+\cos x-\sin x)}{x} &(*)\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha x+\cos x-\sin x-1}{x} &(**)\\
&=\lim_{x\to 0}\left(\alpha-\frac{1-\cos x}{x}-\frac{\sin x}{x}\right)\\
&=0-0-1=-1.
\end{aligned}$$

$\ln u\sim u-1(u\to 1)$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

【注】(*) 式不能用洛必达法则，因为不知道 α 是否可导. (**) 式来自等价无穷小替换.

微信公众号：神灯考研　客服微信：KYFT104　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源

二 函数极限的计算

即为七种未定式（“$\frac{0}{0}$”型，“$\frac{\infty}{\infty}$”型，“$\infty\cdot 0$”型，“$\infty-\infty$”型，“∞^0”型，“0^0”型，“1^∞”型）的计算.

1. 化简先行

(1) 等价无穷小替换.

① 普通函数型.

当 $x\to 0$ 时，

$$\sin x\sim x,\tan x\sim x,\arcsin x\sim x,\arctan x\sim x,e^x-1\sim x,$$

$$\ln(1+x)\sim x,\ln(x+\sqrt{1+x^2})\sim x,a^x-1=e^{x\ln a}-1\sim x\ln a(a>0\text{ 且 }a\neq 1),$$

$$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,1-\cos^\alpha x\sim\frac{\alpha}{2}x^2,(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x(\alpha\neq 0).$$

【注】(1) 当 $x\to 0$ 时，$\ln(x+\sqrt{1+x^2})\sim x$.

证 由于 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{1}=1$，于是当 $x\to 0$ 时，$\ln(x+\sqrt{1+x^2})\sim x$.

(2) 当 $x\to 0$ 时，$1-\cos^\alpha x\sim\frac{\alpha}{2}x^2$.

证 当 $x\to 0$ 时，$1-\cos^\alpha x=1-(1+\cos x-1)^\alpha\overset{(1+u)^\alpha-1\sim\alpha u,u\to 0}{\sim}-\alpha(\cos x-1)\sim\frac{\alpha}{2}x^2$.

以下 ②，③，④，⑤ 中，设所给抽象函数均为研究区间上的连续函数.

② 复合函数型.

当 $x\to 0$ 时，$f(x)\sim ax^m$，$g(x)\sim bx^n$，$ab\neq 0$，m,n 为正整数，则 $f[g(x)]\sim ab^m x^{mn}$.

【注 1】**证** 当 $x\to 0$ 时，$f[g(x)]\sim a[g(x)]^m\sim a(bx^n)^m=ab^m x^{mn}$，证毕.

如，当 $x\to 0$ 时，$\cos(e^{\frac{x^2}{2}}-1)-1\sim cx^k$，则 $ck=$_____.

解 应填 $-\frac{1}{2}$.

当 $x\to 0$ 时，

$$f(x)=\cos x-1\sim-\frac{1}{2}x^2,g(x)=e^{\frac{x^2}{2}}-1\sim\frac{1}{2}x^2,$$

故 $f[g(x)]\sim\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot x^{2\cdot 2}=-\frac{1}{8}x^4$，于是 $c=-\frac{1}{8}$，$k=4$，$ck=-\frac{1}{2}$.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

【注 2】对于命题 ②，若 m,n 为正实数，则要求 $x\to 0^+$，此时，该命题亦成立.

如，当 $x\to 0^+$ 时，$e^{(\sqrt{\sin^3 x})^3}-1\sim cx^k$，则 $ck=$_____.

解 应填$\frac{9}{2}$.

当 $x\to 0^+$ 时，$f(x)=e^{x^3}-1\sim x^3$，$g(x)=\sqrt{\sin^3 x}\sim x^{\frac{3}{2}}$，则 $f[g(x)]\sim x^{\frac{9}{2}}$，于是

$$c=1,k=\frac{9}{2},ck=\frac{9}{2}.$$

考生若看出当狗 $\to 0$ 时，$\cos 狗-1\sim-\frac{1}{2}狗^2$，$e^{狗}-1\sim 狗$，则能更快速地解决问题. 事实上，② 是为后面的 ④ 服务的.

③ 变上限积分型.

当 $x\to 0$ 时，$f(x)\sim ax^m$，$a\neq 0$，m 为正整数，则$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\sim\int_0^x at^m\mathrm{d}t$.

【注 1】**证** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x at^m\mathrm{d}t}\xlongequal{洛必达法则}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{ax^m}=1$，证毕.

如，当 $x\to 0$ 时，$\int_0^x(e^{t^3}-1)\mathrm{d}t\sim\int_0^x t^3\mathrm{d}t=\frac{1}{4}t^4\Big|_0^x=\frac{1}{4}x^4$.

【注 2】对于命题 ③，若 m 为正实数，则要求 $x\to 0^+$，此时，该命题亦成立.

如，当 $x\to 0^+$ 时，$\int_0^x\ln(1+\sqrt{t^3})\mathrm{d}t\sim\int_0^x t^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}t=\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}\Big|_0^x=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}$.

④ 复合函数与变上限积分型.

当 $x\to 0$ 时，$f(x)\sim ax^m$，$g(x)\sim bx^n$，$ab\neq 0$，m,n 为正整数，则$\int_0^{g(x)}f(t)\mathrm{d}t\sim\int_0^{bx^n}at^m\mathrm{d}t$.

【注 1】**证** 令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，由 ③ 知，当 $x\to 0$ 时，$F(x)\sim\int_0^x at^m\mathrm{d}t=\frac{a}{m+1}x^{m+1}$.

又由 ② 知当 $x\to 0$ 时，$\int_0^{g(x)}f(t)\mathrm{d}t=F[g(x)]\sim\frac{a}{m+1}(bx^n)^{m+1}=\frac{ab^{m+1}}{m+1}x^{(m+1)n}=\int_0^{bx^n}at^m\mathrm{d}t$. 证毕.

如，当 $x\to 0$ 时，$\int_0^{2-2\cos x}(e^{t^2}-1)\mathrm{d}t\sim\int_0^{x^2}t^2\mathrm{d}t=\frac{1}{3}t^3\Big|_0^{x^2}=\frac{1}{3}x^6$，

$\int_0^{x^2}(e^{t^3}-1)\mathrm{d}t\sim\int_0^{x^2}t^3\mathrm{d}t=\frac{1}{4}t^4\Big|_0^{x^2}=\frac{1}{4}x^8$（此例中 $g(x)=x^2$，属于 ④ 的特殊情形）.

【注 2】对于命题 ④，若 m,n 为正实数，则要求 $x\to 0^+$，此时，该命题亦成立.

如，当 $x\to 0^+$ 时，$\int_0^{1-\cos x}\sqrt{\sin t^3}\mathrm{d}t\sim\int_0^{\frac{1}{2}x^2}t^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}t=\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}\Big|_0^{\frac{1}{2}x^2}=\frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{2}}x^5=\frac{\sqrt{2}}{20}x^5$.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

⑤ 推广型.

若$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=A\neq 0$，$\lim\limits_{x\to 0} h(x)=0$，且在 $x\to 0$ 时，$h(x)\neq 0$，则当 $x\to 0$ 时，

$$\int_0^{h(x)} f(t)\mathrm{d}t \sim Ah(x).$$

【注】**证** 先看一个引理. 若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$，$\lim\limits_{x\to 0} h(x)=0$，且在 $x\to 0$ 时，$h(x)\neq 0$，则

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{h(x)} f(t)\mathrm{d}t}{\int_0^{h(x)} g(t)\mathrm{d}t}=1.$$

证引理：记 $h(x)=u$，则$\lim\limits_{x\to 0} u=0$，$x\to 0$ 时，$u\neq 0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{h(x)} f(t)\mathrm{d}t}{\int_0^{h(x)} g(t)\mathrm{d}t}=\lim_{u\to 0}\frac{\int_0^{u} f(t)\mathrm{d}t}{\int_0^{u} g(t)\mathrm{d}t}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{u\to 0}\frac{f(u)}{g(u)}=1,$$

引理证毕.

于是，当 $g(x)=A\neq 0$，$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=A\neq 0$ 时，有$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{h(x)} f(t)\mathrm{d}t}{\int_0^{h(x)} A\mathrm{d}t}=1$，即当 $x\to 0$ 时，

$\int_0^{h(x)} f(t)\mathrm{d}t\sim Ah(x)$，证毕.

如，$F(x)=\int_0^{5x}\dfrac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$，$G(x)=\int_0^{\sin x}(1+t)^{\frac{1}{t}}\mathrm{d}t$. 则当 $x\to 0$ 时，

$$F(x)\sim\int_0^{5x}1\mathrm{d}t=5x,\ G(x)\sim\int_0^{\sin x}\mathrm{e}\mathrm{d}t=\mathrm{e}\sin x\sim \mathrm{e}x,$$

它们是同阶非等价无穷小.

⑥ 若 α,β 都是同一自变量变化过程 $x\to\cdot$ 下的无穷小量，且 $\alpha=o(\beta)(x\to\cdot)$，则

a. $\alpha+\beta\sim\beta(x\to\cdot)$；b. $\alpha+\beta$ 与 β 在 $x\to\cdot$ 时同号.

(2) 恒等变形.

恒等变形
- 提取公因式.
- 换元$\left(x=\dfrac{1}{t}\text{ 等}\right)$.
- 通分.
- $u^v=\mathrm{e}^{v\ln u}$.
- 用公式
  - 因式分解$(a^n-b^n=(a-b)\cdot(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$ 等).
  - 分子有理化$(\sqrt{a}-\sqrt{b}=\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ 等).
- 用定理.

牛顿-莱布尼茨公式：$f(x)-f(x_0)=\int_{x_0}^{x} f'(t)\mathrm{d}t$

拉格朗日中值定理：$f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0)$

积分中值定理：$\int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t=f(\xi)(x-x_0)$

泰勒公式：$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2)$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研 客服微信：KYFT104 QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

(3) 及时提出极限存在且不为 0 的因式.

2. 洛必达法则

$$
\text{洛必达法则}\begin{cases}
\lim\limits_{x\to\cdot}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\cdot}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}.\\
\lim\limits_{x\to\cdot}\dfrac{\int_a^x f(t)\mathrm{d}t}{\int_a^x g(t)\mathrm{d}t}=\lim\limits_{x\to\cdot}\dfrac{f(x)}{g(x)}.\\
\lim\limits_{x\to\cdot}\dfrac{\int_a^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t}{\int_a^{\psi(x)} g(t)\mathrm{d}t}=\lim\limits_{x\to\cdot}\dfrac{f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)}{g[\psi(x)]\cdot\psi'(x)}.
\end{cases}
$$

【注】考研中，使用洛必达法则要满足三个条件：(1) 当 $x\to\cdot$ 时，所求极限是“$\frac{0}{0}$”型或“$\frac{\infty}{\infty}$”型；(2) 当 $x\to\cdot$ 时，分子、分母均可导；(3) 极限结果为 $0, c(c\neq 0), \infty$.

3. 泰勒公式

(1) 熟记常用公式.

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},$$

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n)!}x^{2n}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},-1<x\leqslant 1,$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\ |x|<1,$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^nx^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n,\ |x|<1,$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+o(x^2)(x\to 0,\alpha\neq 0),$$

$$\tan x=x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)(x\to 0),$$

$$\arcsin x=x+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)(x\to 0),$$

$$\arctan x=x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)(x\to 0).$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　客服微信：KYFT104　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源

(2) 展开原则.

① $\frac{A}{B}$ 型，适用**"上下同阶"原则.**

具体来说，如果分母(或分子)是 x 的 k 次幂，则应把分子(或分母)展开到 x 的 k 次幂，称为**"上下同阶"原则.**

例 1.5 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)\ln(1-x)+x^2}{x^4}=$_____.

【解】应填 $-\frac{5}{12}$.

这样展开才能出现全部的 x^4 项

应展开至出现所有的4次方项，而不能只展开至出现部分4次方项.

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\left[x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\right]\left[-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\right]+x^2}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2-\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{3}x^4+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^4+o(x^4)+x^2}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{3}x^4+\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^4+o(x^4)}{x^4}=-\frac{5}{12}.$$

②$A-B$ 型，适用**"幂次最低"原则.**

具体来说，即将 A,B 分别展开到它们的系数不相等的 x 的最低次幂为止.

例 1.6 设当 $x\to 0$ 时，$f(x)=\tan x-\ln(1+x)$ 与 ax^b 等价，则 $ab=$_____.

【解】应填 1.

当 $x\to 0$ 时，

此即为系数不相等的 x 的最低次幂

$$f(x)=\tan x-\ln(1+x)=x+0\cdot x^2+o(x^2)-\left[x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right]$$

$$=\frac{1}{2}x^2+o(x^2),$$

前一项展开式补上 x^2 项前的系数 0，以便与后一项展开式的 $-\frac{1}{2}x^2$ 对应

故 $a=\frac{1}{2}$，$b=2$，于是 $ab=1$.

4. 无穷小比阶

$$\lim_{x\to\cdot}\frac{f(x)}{g(x)}\overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=\!=\!=}\begin{cases}0, & ①\\ c\neq 0, & ②\\ \infty. & ③\end{cases}$$

① 称 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的**高阶无穷小.**

② 称 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的**同阶无穷小**($c=1$ **时称等价无穷小**).

③ 称 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的**低阶无穷小.**

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

例 1.7 当 $x \to 0$ 时，$\int_0^{x^2}(e^{t^3}-1)dt$ 是 x^7 的(　　).

(A) 等价无穷小　　(B) 低阶无穷小

(C) 高阶无穷小　　(D) 同阶但非等价无穷小

【解】应选(C).

法一
$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}(e^{t^3}-1)dt}{x^7}=\lim_{x\to 0}\frac{2(e^{x^6}-1)}{7x^5}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^6}{7x^5}=0.$$

法二 由"二、1(1) 等价无穷小替换"的结论 ④，当 $x \to 0$ 时，$\int_0^{x^2}(e^{t^3}-1)dt \sim \int_0^{x^2}t^3dt=\frac{1}{4}t^4\Big|_0^{x^2}=\frac{1}{4}x^8$，为 x^7 的高阶无穷小. 故选(C).

例 1.8 设 $\tan x-\ln(1+x)=x\sin f(x)$，其中 $|f(x)|<\frac{\pi}{2}$，则当 $x \to 0$ 时，$f(x)$ 是(　　).

(A) 比 x 高阶的无穷小量　　(B) 比 x 低阶的无穷小量

(C) 与 x 同阶但不等价的无穷小量　　(D) 与 x 等价的无穷小量

【解】应选(C).

因为 $\tan x-\ln(1+x)=x\sin f(x)$，所以

$\tan x-\ln(1+x)\sim\frac{1}{2}x^2(x\to 0)$ 来自例 1.6

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\ln(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{1}{2},$$

即有
$$\lim_{x\to 0}\sin f(x)=0.$$

注意到 $|f(x)|<\frac{\pi}{2}$，可知 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$，即 $f(x)$ 是 $x \to 0$ 时的无穷小量，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin f(x)}{f(x)}=1$，故
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin f(x)}{x}=\frac{1}{2},$$
即当 $x \to 0$ 时，$f(x)$ 是与 x 同阶但不等价的无穷小量，选项(C) 正确.

例 1.9 当 $x \to 0$ 时，$(3+2\tan x)^x-3^x$ 是 $3\sin^2x+x^3\cos\frac{1}{x}$ 的(　　).

(A) 高阶无穷小　　(B) 低阶无穷小

(C) 等价无穷小　　(D) 同阶但非等价无穷小

【解】应选(D).

当 $\beta=o(\alpha)$ 时，$\alpha+\beta\sim\alpha$.

由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3\cos\frac{1}{x}}{3\sin^2x}=\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}x\cos\frac{1}{x}=0$，知 $3\sin^2x+x^3\cos\frac{1}{x}\sim 3\sin^2x\sim 3x^2(x\to 0)$，故

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

$$\lim_{x\to 0}\frac{(3+2\tan x)^x-3^x}{3\sin^2 x+x^3\cos\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{3^x\left[\left(1+\frac{2}{3}\tan x\right)^x-1\right]}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln\left(1+\frac{2}{3}\tan x\right)}-1}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln\left(1+\frac{2}{3}\tan x\right)}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{2}{3}\tan x}{3x^2}=\frac{2}{9},$$

所以当 $x\to 0$ 时，它们为同阶但非等价无穷小，故选(D).

例 1.10 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x\int_0^x e^{-t^2}dt+e^{-x^2}-\sqrt{\pi}x\right)=$_____.

【解】应填 0.

当 $x\to+\infty$ 时，极限为 0

由于 $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$，故分子 $\xrightarrow{x\to+\infty}0$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2x\int_0^x e^{-t^2}dt+e^{-x^2}-\sqrt{\pi}x\right)=\lim_{x\to+\infty}x\left(2\int_0^x e^{-t^2}dt-\sqrt{\pi}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\int_0^x e^{-t^2}dt-\sqrt{\pi}}{\frac{1}{x}}$$

$$\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{-x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to+\infty}2x^2e^{-x^2}=0.$$

例 1.11 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right]=$_____.

【解】应填 $-\frac{1}{2}$.

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\underbrace{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}_{\sim x}\underbrace{\ln(1+x)}_{\sim x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x^2}$$

$$\xlongequal{(*)}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\xi}[1+x-(x+\sqrt{1+x^2})]}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1+x^2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=-\frac{1}{2}.$$

【注】(*)处来自拉格朗日中值定理，即令 $f(u)=\ln u$，在 $[1+x,x+\sqrt{1+x^2}]$ 上应用拉格朗日中值定理，有 $\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\ln(1+x)=\frac{1}{\xi}[(x+\sqrt{1+x^2})-(1+x)]$，其中 ξ 介于 $1+x$ 与 $x+\sqrt{1+x^2}$ 之间，显然当 $x\to 0$ 时，$1+x$ 与 $x+\sqrt{1+x^2}$ 都趋于1，于是 $\xi\to 1$.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

例 1.12 设 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x\leqslant 0,\\ x^2, & x>0,\end{cases}$ 则 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\int_{-\infty}^x f(t)dt\right]^{\frac{1}{x-\sin x}}=$_____.

微信公众号：神灯考研　客服微信：KYFT104　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

【解】应填 e^2.　因为 $x\to 0^+$，故有 $x>0$.　$\lim u^v \overset{\text{“}1^\infty\text{”}}{=\!=} e^{\lim(u-1)v}$

当 $x>0$ 时，$\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{0} e^t\mathrm{d}t+\int_0^x t^2\mathrm{d}t=1+\frac{1}{3}x^3$，于是原式 $=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{3}x^3\right)^{\frac{1}{x-\sin x}}=e^A$，

其中 $A=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x-\sin x}\cdot\left(1+\frac{1}{3}x^3-1\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{\frac{1}{6}x^3}\cdot\frac{1}{3}x^3=2$，故原式 $=e^2$.

$x>0$，故 $(-\infty,x)$ 要拆成 $(-\infty,0)$ 与 $(0,x)$ 两段，因为在这两段上 $f(x)$ 表达式不同.

三　函数极限的存在性

1. 具体型

若给出具体函数求极限，但极限式不满足“二、2”的注中提到的使用洛必达法则的三个条件中的任意一个：(1) 当 $x\to\bullet$ 时，所求极限是“$\frac{0}{0}$”型或“$\frac{\infty}{\infty}$”型；(2) 当 $x\to\bullet$ 时，分子、分母均可导；(3) 极限结果为 $0,c(c\neq 0),\infty$，则洛必达法则失效. 可考虑用夹逼准则：若 ①$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，②$\lim\limits_{x\to\bullet}g(x)=A$，$\lim\limits_{x\to\bullet}h(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to\bullet}f(x)=A$. 这里，① 中无须验证等号；$A$ 可为 0，$c(c\neq 0)$，∞.

例 1.13　设 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，则 $\lim\limits_{x\to 0}x\left[\frac{10}{x}\right]=$_____.

【解】应填 10.

当 $x\to 0$ 时，$\frac{10}{x}\to\infty$，对于 $[\infty]$，此时想到极限计算的利器——夹逼准则（当常规求极限的方法，比如等价无穷小替换、泰勒公式、洛必达法则无法使用时，一定要能够想起这个“两边夹击”的重要方法）.

根据 $x-1<[x]\leqslant x$，有

$$\frac{10}{x}-1<\left[\frac{10}{x}\right]\leqslant\frac{10}{x},$$

于是当 $x>0$ 时，$10-x<x\cdot\left[\frac{10}{x}\right]\leqslant 10$；当 $x<0$ 时，$10-x>x\cdot\left[\frac{10}{x}\right]\geqslant 10$.

可见，无论 $x>0$，还是 $x<0$，不等式两边均趋于同一极限，故 $\lim\limits_{x\to 0}x\left[\frac{10}{x}\right]=10$.

例 1.14　设函数 $f(x)=x-[x]$，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=$_____.

【解】应填 $\frac{1}{2}$.

当 $x\in[0,1)$ 时，$f(x)=x-[x]=x$，又由于

$$f(x+1)=x+1-[x+1]=x+1-([x]+1)=x-[x]=f(x),$$

故 $f(x)$ 是周期为 1 的周期函数，其图像如图 1-1 所示.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　客服微信：KYFT104　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源

$\int_0^n f(t)\mathrm{d}t = n\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$，表示 n 个三角形的面积，每个三角形的面积为 $\frac{1}{2}$，故为 $\frac{n}{2}$.

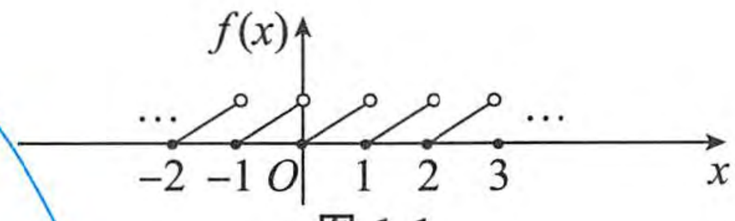

图 1-1

当 $n \leqslant x < n+1$ 时，$\frac{n}{2} = \int_0^n f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x f(t)\mathrm{d}t < \int_0^{n+1} f(t)\mathrm{d}t = \frac{n+1}{2}$，于是

$$\frac{n}{2(n+1)} = \frac{1}{n+1}\int_0^n f(t)\mathrm{d}t < \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t < \frac{1}{n}\int_0^{n+1} f(t)\mathrm{d}t = \frac{n+1}{2n}.$$

当 $0<a<y<b$，$0<c<x<d$ 时，有 $\frac{a}{d}<\frac{y}{x}<\frac{b}{c}$

当 $x \to +\infty$ 时，$n \to \infty$，由夹逼准则，有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$.

【注】上面两题再次考到了取整函数的两个重要公式：
(1) $[x+n]=[x]+n$，其中 n 为正整数.
(2) $x-1<[x]\leqslant x$.
考生要熟悉它们.

2. 抽象型

若给出抽象函数求极限，可考虑用单调有界准则：若当 $x \to +\infty$ 时，$f(x)$ 单调增加(减少)且 $f(x)$ 有上界(下界)，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在.

例 1.15 (1) 证明：当 $x \geqslant 1$ 时，$\frac{1}{1+x} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$；

(2) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上连续可导，且

$$f'(x) = \frac{1}{1+f^2(x)}\left[\sqrt{\frac{1}{x}} - \sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right],$$

证明：$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在.

【证】(1) 当 $x \geqslant 1$ 时，对 $\ln t$ 在 $[x,x+1]$ 上应用拉格朗日中值定理，有

$$\ln(x+1) - \ln x = \frac{1}{\xi}, x < \xi < x+1,$$

即

$$\frac{1}{1+x} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}.$$

(2) 由(1)知，$\sqrt{\frac{1}{x}} - \sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} > 0$，又 $\frac{1}{1+f^2(x)} > 0$，故 $f'(x) > 0$，于是当 $x \geqslant 1$ 时，$f(x)$ 严格单调增加，又

$$f'(x) \leqslant \sqrt{\frac{1}{x}} - \sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} < \sqrt{\frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x+1}},$$

上式两边从 1 到 x 积分，有

$$f(x) - f(1) = \int_1^x f'(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_1^x \left(\sqrt{\frac{1}{t}} - \sqrt{\frac{1}{t+1}}\right)\mathrm{d}t$$
$$< \int_1^{+\infty}\left(\sqrt{\frac{1}{t}} - \sqrt{\frac{1}{t+1}}\right)\mathrm{d}t = (2\sqrt{t} - 2\sqrt{t+1})\Big|_1^{+\infty}$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

$$=2\lim_{t\to+\infty}(\sqrt{t}-\sqrt{t+1})-(2-2\sqrt{2})$$
$$=2\lim_{t\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{t}+\sqrt{t+1}}-(2-2\sqrt{2})$$
$$=2(\sqrt{2}-1),$$

即
$$f(x)<2(\sqrt{2}-1)+f(1),$$
故 $f(x)$ 有上界. 由单调有界准则，知 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在.

四 函数极限的应用——连续与间断

1. 研究位置

由于一切初等函数在其定义区间内必连续，故只研究两类特殊的点：① 无定义点（必为间断点），② 分段函数的分段点（可能是连续点，也可能是间断点）.

2. 连续

(1) 内点处. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，其中 $x_0\in(a,b)$，则称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处**连续**.

(2) 端点处. 设 $x\in[a,b]$. 若 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=f(a)$，则称 $f(x)$ 在 $x=a$ 处**右连续**；若 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=f(b)$，则称 $f(x)$ 在 $x=b$ 处**左连续**.

3. 间断

前提：$f(x)$ 在 $x=x_0$ 左、右两侧均有定义.

对于 ① $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$；② $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$；③ $f(x_0)$.

(1) 若 ①，② 均存在但 ① 不等于 ②，则 $x=x_0$ 为**跳跃间断点**.

(2) 若 ①，② 均存在且 ① 等于 ② 但不等于 ③，则 $x=x_0$ 为**可去间断点**.

其中(1)(2) 组成**第一类间断点**.

(3) 若 ①，② 至少有一个不存在且为无穷大，则 $x=x_0$ 为**无穷间断点**.

(4) 若 ①，② 不存在且振荡，则 $x=x_0$ 为**振荡间断点**.

其中(3)(4) 属于**第二类间断点**.

例 1.16 设在 $x=0$ 的某去心邻域内 $f(x)=\dfrac{\int_0^3 x\sqrt{9-x^2t^2}\,dt-9x}{\arctan^3 x}$，且 $f(0)=a$，若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$_____.

【解】 应填 $-\dfrac{3}{2}$.

$\int_0^3 x\sqrt{9-x^2t^2}\,dt\xlongequal{令\,xt=u}\int_0^{3x}\sqrt{9-u^2}\,du$，故

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　客服微信：KYFT104　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{3x}\sqrt{9-u^2}\,\mathrm{d}u-9x}{x^3}$$

$$\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{9-9x^2}\cdot 3-9}{3x^2}$$

$$=3\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x^2}=3\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(-x^2)}{x^2}=-\frac{3}{2}.$$

于是当 $a=-\frac{3}{2}$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=-\frac{3}{2}$，即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

例 1.17 函数 $f(x)=\dfrac{(x^2-x)\,|x+1|}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\int_1^x t\,|\sin t|\,\mathrm{d}t}$ 的第一类间断点的个数为(　　).

(A)0　　(B)1　　(C)2　　(D)3

【解】 应选(C).

$\int_1^{-1}t|\sin t|\mathrm{d}t=0$ 是考生易忽略的.

令 $g(x)=\int_1^x t\,|\sin t|\,\mathrm{d}t$，则 $g(1)=0$，$g(-1)=0$. 又 $g'(x)=x\,|\sin x|$，故当 $x\in[0,+\infty)$ 时，$g'(x)\geqslant 0$，当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$g'(x)\leqslant 0$，于是 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上只有两个零点 $x=\pm 1$，故 $f(x)$ 共有三个间断点 $x=0,\pm 1$.

在 $x=0$ 处，

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{(x-1)\,|x+1|}{\int_1^x t\,|\sin t|\,\mathrm{d}t}\cdot\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}=\frac{1}{\int_0^1 t\,|\sin t|\,\mathrm{d}t}\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}},$$

其中 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}\xlongequal{-\frac{1}{x}=t}-\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^t}{t}=-\infty$，则 $x=0$ 为第二类无穷间断点.

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}=0$ 可不写.

在 $x=-1$ 处，

$$\lim_{x\to -1}f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{x^2-x}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}\cdot\lim_{x\to -1}\frac{|x+1|}{\int_1^x t\,|\sin t|\,\mathrm{d}t}=2\mathrm{e}\cdot\lim_{x\to -1}\frac{|x+1|}{\int_1^x t\,|\sin t|\,\mathrm{d}t},$$

其中

$$\lim_{x\to(-1)^+}\frac{|x+1|}{\int_1^x t\,|\sin t|\,\mathrm{d}t}=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{x+1}{\int_1^x t\,|\sin t|\,\mathrm{d}t}$$

$$\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to(-1)^+}\frac{1}{x\,|\sin x|}=-\frac{1}{\sin 1},$$

同理可得 $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{|x+1|}{\int_1^x t\,|\sin t|\,\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{\sin 1}$，则 $x=-1$ 为第一类跳跃间断点.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

在 $x=1$ 处，

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x\,|x+1|}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\int_1^x t\,|\sin t|\,\mathrm{d}t}=\frac{2}{\mathrm{e}}\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\int_1^x t\,|\sin t|\,\mathrm{d}t}$$

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

$$\xlongequal{\text{洛必达法则}} \frac{2}{e}\lim_{x\to 1}\frac{1}{x\,|\sin x|}=\frac{2}{e\cdot\sin 1},$$

则 $x=1$ 为第一类可去间断点.

综上，函数 $f(x)=\dfrac{(x^2-x)\,|x+1|}{e^{\frac{1}{x}}\int_1^x t\,|\sin t|\,dt}$ 的第一类间断点的个数为 2，应选(C).

【注】事实上，由第 8 讲"一 ④"的结论，因 $t\,|\sin t|$ 为奇函数，故 $g(x)=\int_1^x t\,|\sin t|\,dt$ 为偶函数，只需研究 $x\geqslant 0$ 时的性态即可，也就是 $g(-1)=g(1)$，$g(x)$ 在 $x=0$ 左右两侧单调性相反.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451