第6讲 向量组

知识结构

- 定义与定理
  - 定义
    - n 维向量 —— $\alpha=[a_1, a_2, \cdots, a_n]^{\mathrm{T}}$
    - 线性组合 —— $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$
    - 线性表示 —— $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$
    - 线性相关 —— 存在一组不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$，使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=\mathbf{0}$
    - 线性无关 —— 仅当 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$ 时，才有 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=\mathbf{0}$ 成立
  - 判别线性相关性的八大定理
    - 定理 1 —— 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$（$n\geqslant 2$）线性相关的充要条件是向量组中至少有一个向量可由其余的 $n-1$ 个向量线性表示
    - 定理 2 —— 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关，而 $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性相关，则 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表示，且表示方法唯一
    - 定理 3 —— 如果向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表示，且 $t>s$，则 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 线性相关（以少表多，多的相关）
    - 定理 4 —— 设向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表示，则 $r(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t)\leqslant r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$（两向量组中被表示的秩不大）
    - 定理 5 —— 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关
      $\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组 $[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m]x=\mathbf{0}$ 有非零解
      $\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)<m$
    - 定理 6 —— 向量 β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表示
      $\Leftrightarrow$ 非齐次线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=\beta$ 有解
      $\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)=r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta)$
      （向量 β 不能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表示 $\Leftrightarrow Ax=\beta$ 无解 $\Leftrightarrow$ $r(A)\neq r([A, \beta])$）
    - 定理 7 —— 如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 中有一部分向量组线性相关，则整个向量组也线性相关
    - 定理 8 —— 如果 n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关，那么把这些向量对应相同位置各任意添加 m 个分量所得到的新向量（$n+m$ 维）组 $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \cdots, \alpha_s^*$ 也线性无关；如果 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关，那么它们各去掉相同位置的若干个分量所得到的新向量组也线性相关

- 具体型向量关系
  - β 与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$
    - 建立方程组 — $[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \beta$
    - 化阶梯形 — $[A \mid \beta] = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \mid \beta] \xrightarrow{\text{初等行变换}}$ [阶梯形]
    - 讨论
      - $r(A) \neq r([A, \beta]) \Leftrightarrow$ 无解 $\Leftrightarrow$ 不能表示
      - $r(A) = r([A, \beta]) = n \Leftrightarrow$ 唯一解 $\Leftrightarrow$ 唯一一种表示法
      - $r(A) = r([A, \beta]) < n \Leftrightarrow$ 无穷多解 $\Leftrightarrow$ 无穷多种表示法
  - $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$
    - 向量个数大于维数 — 必线性相关
    - 向量个数等于维数
      - $|\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n| = 0 \Leftrightarrow$ 线性相关
      - $|\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n| \neq 0 \Leftrightarrow$ 线性无关
    - 向量个数小于维数
      - $r(A) < n \Leftrightarrow$ 线性相关
      - $r(A) = n \Leftrightarrow$ 线性无关
      - 若线性相关，问 α_s 与 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{s-1}, \alpha_{s+1}, \cdots, \alpha_n$ 的表示关系
  - 求极大线性无关组
    - 定义
      - ①线性无关
      - ②向量组中任一向量均可由它线性表示
    - 求法
      - 构造 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]$
      - $A \xrightarrow{\text{初等行变换}} B$（阶梯形）
      - 算出台阶数 r，按列找出一个秩为 r 的子矩阵即可
- 抽象型向量关系
  - 定义法
    - 写定义式 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$
    - 考查 $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$ 是否成立
  - 用秩 — 秩的公式见第4讲
- 向量组等价 — 向量组（Ⅰ）：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 与向量组（Ⅱ）：$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 等价
  - $\Leftrightarrow r(\text{Ⅰ}) = r(\text{Ⅱ})$，且可单方向表示
  - $\Leftrightarrow r(\text{Ⅰ}) = r(\text{Ⅱ}) = r(\text{Ⅰ}, \text{Ⅱ})$
- 向量空间（仅数学一）
  - 概念
    - 基
    - 维数
    - 坐标
  - 过渡矩阵 — $[\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n] = [\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n]C$
  - 坐标变换 — $\alpha = [\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n]x = [\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n]y = [\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n]Cy$

一 定义与定理

1. 定义

①**n 维向量** n 个数构成的一个有序数组 $[a_1, a_2, \cdots, a_n]^{\mathrm{T}}$ 称为一个 n 维向量，记成 $\boldsymbol{\alpha}=[a_1, a_2, \cdots, a_n]^{\mathrm{T}}$，并称 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 n 维列向量，$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=[a_1, a_2, \cdots, a_n]$ 称为 n 维行向量，其中 a_i（$i=1, 2, \cdots, n$）称为向量 $\boldsymbol{\alpha}$（或 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$）的第 i 个分量.

②**线性组合** 设有 m 个 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 及 m 个数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$，则向量

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m$$

称为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的线性组合.

③**线性表示** 若向量 $\boldsymbol{\beta}$ 能表示成向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的线性组合，即存在 m 个数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$，使得

$$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m,$$

则称向量 $\boldsymbol{\beta}$ 能被向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示.

④**线性相关** 对于向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$，若存在一组不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$，使得线性组合

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0},$$

则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关.

【注】含有零向量或含有成比例的向量的向量组必线性相关.

⑤**线性无关** 若不存在不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$，使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$ 成立，则称 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，即只有当 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$ 时，才有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$ 成立，则称 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

【注】单个非零向量，两个不成比例的向量均线性无关.

2. 判别线性相关性的八大定理

定理1 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$（$n\geqslant 2$）线性相关的充要条件是向量组中至少有一个向量可由其余的 $n-1$ 个向量线性表示.

其等价命题：向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$（$n\geqslant 2$）线性无关的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 中任一向量都不能由其余的 $n-1$ 个向量线性表示.

定理2 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，而 $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示，且表示方法唯一.

定理3 如果向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示，且 $t>s$，则 $\boldsymbol{\beta}_1,$

$\boldsymbol{\beta}_2$，…，$\boldsymbol{\beta}_t$ 线性相关.（此定理可简单表述为以少表多，多的相关.）

其等价命题：如果向量组 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，…，$\boldsymbol{\beta}_t$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示，且 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，…，$\boldsymbol{\beta}_t$ 线性无关，则 $t\leqslant s$.

定理 4 设向量组 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，…，$\boldsymbol{\beta}_t$ 能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示，则 $r(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t)\leqslant r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s)$.（此定理可简单表述为两向量组中被表示的向量组的秩不大.）

定理 5 设 m 个 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$，其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=[a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{n1}]^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\alpha}_2=[a_{12}, a_{22}, \cdots, a_{n2}]^{\mathrm{T}},$$

$$\cdots\cdots$$

$$\boldsymbol{\alpha}_m=[a_{1m}, a_{2m}, \cdots, a_{nm}]^{\mathrm{T}}.$$

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组

$$[\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m]\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0} \tag{$*$}$$

有非零解 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m)<m$.

其等价命题：$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关的充分必要条件是齐次线性方程组（$*$）只有零解.

【注】(1) 如果 $n<m$，即方程个数小于未知数个数，则齐次线性方程组（$*$）求解时必有自由未知量，即必有非零解. 因此，任何 $n+1$ 个 n 维向量都是线性相关的. 所以在 n 维空间中，任何一个线性无关的向量组最多只能含 n 个向量.

(2) n 个 n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow |\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n|=0 \Leftrightarrow \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解.

（线性无关 $\Leftrightarrow |\boldsymbol{A}|\neq 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有零解）

定理 6 向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示

$$\Leftrightarrow \text{非齐次线性方程组}[\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{bmatrix}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_s\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{\beta}\text{ 有解}$$

$$\Leftrightarrow r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s)=r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\beta}).$$

其等价命题：向量 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示 $\Leftrightarrow \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 无解 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})\neq r([\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\beta}])$.

定理 7 如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$ 中有一部分向量组线性相关，则整个向量组也线性相关.

其等价命题：如果 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，则其任一部分向量组线性无关.

定理 8 如果 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，那么把这些向量对应相同位置各任意添加 m 个分量所得到的新向量（$n+m$ 维）组 $\boldsymbol{\alpha}_1^*$，$\boldsymbol{\alpha}_2^*$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s^*$ 也线性无关；如果 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，那么它们各去掉相同位置的若干个分量所得到的新向量组也线性相关.

定理7和定理8可简单记为
部分相关，整体相关；
整体无关，部分无关；
原来无关，延长无关；
原来相关，缩短相关

二 具体型向量关系

1. $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$

（1）建立方程组 $[\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{\beta}$.

（2）化阶梯形 $[\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{\beta}] = [\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n \mid \boldsymbol{\beta}] \xrightarrow{\text{初等行变换}} [\ \ \vdots\ \ ]$.

（3）讨论.

①$r(\boldsymbol{A}) \neq r([\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\beta}]) \Leftrightarrow$ 无解 $\Leftrightarrow$ 不能表示.

②$r(\boldsymbol{A}) = r([\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\beta}]) = n \Leftrightarrow$ 唯一解 $\Leftrightarrow$ 唯一一种表示法.

③$r(\boldsymbol{A}) = r([\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\beta}]) < n \Leftrightarrow$ 无穷多解 $\Leftrightarrow$ 无穷多种表示法.

【注】含未知参数是常考题型.

例 6.1 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1 = [1, -1, 1]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = [1, a, -1]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = [a, 1, 2]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta} = [4, a^2, -4]^{\mathrm{T}}$, 若 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，且表示法不唯一.

（1）求 a 的值；

（2）求 $\boldsymbol{\beta}$ 由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示的表达式.

【解】设 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + x_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\beta}$，即

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + ax_3 = 4, \\ -x_1 + ax_2 + x_3 = a^2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -4. \end{cases} \qquad (*)$$

$$[\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{\beta}] \overset{\text{互换}}{=} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 4 \\ -1 & a & 1 & a^2 \\ 1 & -1 & 2 & -4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -4 \\ -1 & a & 1 & a^2 \\ 1 & 1 & a & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{(-1)\text{倍加至}}_{\text{互换}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & a & 4 \\ -1 & a & 1 & a^2 \end{array}\right] \text{1倍加至}$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & a-2 & 8 \\ 0 & a-1 & 3 & a^2-4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & a-2 & 8 \\ 0 & 2(a-1) & 6 & 2a^2-8 \end{array}\right] (1-a)\text{倍加至}$$

$\times 2$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & a-2 & 8 \\ 0 & 0 & (a+1)(4-a) & 2a(a-4) \end{array}\right].$$

（1）由题设，知 $r(\boldsymbol{A}) = r([\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\beta}]) < 3$，从而 $a = 4$.

（2）结合（1），有

$$[A \vdots \beta] \to \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\times\frac{1}{2}} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{1倍加至}} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

方程组（*）的通解为$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$，$k$ 为任意常数．所以

$$\beta = -3k\alpha_1 + (4-k)\alpha_2 + k\alpha_3,\ k \text{ 为任意常数}.$$

2.α_1，α_2，…，α_n

（1）若向量个数大于维数，则必线性相关．

（2）若向量个数等于维数，则可用行列式讨论．

$|\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n| = 0 \Leftrightarrow$ 线性相关；

$|\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n| \neq 0 \Leftrightarrow$ 线性无关．

（3）若向量个数小于维数，则化阶梯形 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n] \xrightarrow{\text{初等行变换}} [\ ]$．

①$r(A) < n \Leftrightarrow$ 线性相关．

②$r(A) = n \Leftrightarrow$ 线性无关．

③若线性相关，问 α_s 与 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{s-1}, \alpha_{s+1}, \cdots, \alpha_n$ 的表示关系，回到“1”即可．

【注】含未知参数是常考题型．

例 6.2　已知 3 维列向量组 α_1，α_2，α_3 线性无关，则向量组 $\alpha_1-\alpha_2$，$\alpha_2-k\alpha_3$，$\alpha_3-\alpha_1$ 也线性无关的充要条件是________．

【解】应填 $k \neq 1$.

$$[\alpha_1-\alpha_2, \alpha_2-k\alpha_3, \alpha_3-\alpha_1] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -k & 1 \end{bmatrix}.$$

因 α_1，α_2，α_3 线性无关，故 $\alpha_1-\alpha_2$，$\alpha_2-k\alpha_3$，$\alpha_3-\alpha_1$ 线性无关的充要条件是

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -k & 1 \end{vmatrix} = 1-k \neq 0,\ \text{即 } k \neq 1.$$

例 6.3　设 3 维向量组 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，$\alpha_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$，$\alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$，$\alpha_4 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$．又设 A 是 3 阶矩阵，且满足 $A\alpha_1 = \alpha_2$，$A\alpha_2 = \alpha_3$，$A\alpha_3 = \alpha_4$，则 $A\alpha_4 =$________．

【解】应填 $\begin{bmatrix}7\\5\\2\end{bmatrix}$.

因 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 均为具体型向量（分量为常数），故先寻找它们的关系．设 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_4$，于是

$$\left[\begin{array}{ccc:c}1&5&1&-2\\1&3&3&2\\0&2&-1&-3\end{array}\right]\xrightarrow{(-1)\text{倍加至}}\left[\begin{array}{ccc:c}1&5&1&-2\\0&-2&2&4\\0&2&-1&-3\end{array}\right]\xrightarrow{\times\left(-\frac{1}{2}\right)}\left[\begin{array}{ccc:c}1&5&1&-2\\0&1&-1&-2\\0&2&-1&-3\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[(-5)\text{倍加至}]{(-2)\text{倍加至}}\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&6&8\\0&1&-1&-2\\0&0&1&1\end{array}\right]\xrightarrow[(-6)\text{倍加至}]{1\text{倍加至}}\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&0&2\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\end{array}\right],$$

此方程组有唯一解 $x_1=2$，$x_2=-1$，$x_3=1$，得 $\boldsymbol{\alpha}_4=2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{A}(2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=2\underset{=\boldsymbol{\alpha}_2}{\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1}-\underset{=\boldsymbol{\alpha}_3}{\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2}+\underset{=\boldsymbol{\alpha}_4}{\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3}=2\begin{bmatrix}5\\3\\2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\3\\-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2\\2\\-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\5\\2\end{bmatrix}.$$

3. 求极大线性无关组

（1）定义．

在向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$ 中，若存在部分组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 满足：

①$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性无关；

②向量组中任一向量 $\boldsymbol{\alpha}_i$（$i=1,2,\cdots,s$）均可由 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性表示．

则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 是原向量组的一个极大线性无关组．

【注】向量组的极大线性无关组一般不唯一，只由一个零向量组成的向量组不存在极大线性无关组，一个线性无关的向量组的极大线性无关组就是该向量组本身．

（2）求法．

给出列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_n$，可按如下步骤求其极大线性无关组．

①构造 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]$．

②$\boldsymbol{A}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\boldsymbol{B}$（阶梯形）．

③算出台阶数 r，按列找出一个秩为 r 的子矩阵即可．

例 6.4 设向量组

$\boldsymbol{\alpha}_1=[1,1,1,3]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[-1,-3,5,1]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=[3,2,-1,a+2]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=[-2,-6,10,a]^{\mathrm{T}}$.

（1）a 为何值时，该向量组线性无关？并在此时将向量 $\boldsymbol{\alpha}=[4,1,6,10]^{\mathrm{T}}$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$

线性表示；

（2）a 为何值时，该向量组线性相关？并在此时求出它的秩和一个极大线性无关组．

【解】 对矩阵 $[\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}]$ 作初等行变换，有

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \boldsymbol{\alpha}_3 & \boldsymbol{\alpha}_4 & \boldsymbol{\alpha} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 2 & -6 & 1 \\ 1 & 5 & -1 & 10 & 6 \\ 3 & 1 & a+2 & a & 10 \end{bmatrix} \end{array} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & -4 & 12 & 2 \\ 0 & 4 & a-7 & a+6 & -2 \end{bmatrix}$$

(−1)倍加至　(−1)倍加至　(−3)倍加至　3倍加至　2倍加至

它们具有完全相同的线性相关性

$$\xrightarrow{\times\left(-\frac{1}{7}\right)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & -7 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & a-9 & a-2 & -8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a-9 & a-2 & -8 \end{bmatrix} \to \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-2 & 1-a \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} \boldsymbol{\beta}_1 & \boldsymbol{\beta}_2 & \boldsymbol{\beta}_3 & \boldsymbol{\beta}_4 & \boldsymbol{\beta} \end{array} \end{array}.$$

−(a−9)倍加至

（1）当 $a \neq 2$ 时，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关．此时设 $\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\alpha}_4$，解得

$$x_1=2,\ x_2=\frac{3a-4}{a-2},\ x_3=1,\ x_4=\frac{1-a}{a-2},$$

即

$$\boldsymbol{\alpha}=2\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{3a-4}{a-2}\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\frac{1-a}{a-2}\boldsymbol{\alpha}_4\ (a \neq 2).$$

（2）当 $a=2$ 时，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关．此时，向量组的秩等于 3. $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$（或 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$）为其一个极大线性无关组．

三　抽象型向量关系

1. 定义法

已知某些向量关系，研究另一些向量关系．

（1）写定义式 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0}$.

（2）考查 $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$ 是否成立．

【注】 常用方法：

①在“(1)”的两边同乘某些量，重新组合等；

②转化为证某齐次线性方程组只有零解；

③常与特征值、基础解系、正定等综合．

2. 用秩

秩的公式见第 4 讲．

例 6.5 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，且 n 维列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，则下列对 m 维列向量组 $A\boldsymbol{\alpha}_1$，$A\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$A\boldsymbol{\alpha}_s$ 的描述

①若 $r(A)=n$，则向量组 $A\boldsymbol{\alpha}_1$，$A\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$A\boldsymbol{\alpha}_s$ 必线性无关；

②若 $r(A)<n$，则向量组 $A\boldsymbol{\alpha}_1$，$A\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$A\boldsymbol{\alpha}_s$ 必线性相关．

正确的是（　　）．

（A）①正确，②也正确　　（B）①正确，但②不正确

（C）①不正确，但②正确　　（D）①不正确，②也不正确

【解】应选（B）．

$$[A\boldsymbol{\alpha}_1, A\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, A\boldsymbol{\alpha}_s]=A[\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s].$$

若 $r(A)=n$，则

$$r([A\boldsymbol{\alpha}_1, A\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, A\boldsymbol{\alpha}_s])=r(A[\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s])=r([\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s])=s,$$

此时 $A\boldsymbol{\alpha}_1$，$A\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$A\boldsymbol{\alpha}_s$ 必线性无关，故①正确．　由第4讲“二（4）”的“①”得到

若 $r(A)<n$，则方程组 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，下面分两种情形讨论：

a. 若 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的某非零解 ξ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示，即存在不全为 0 的数 k_1，k_2，…，k_s，有 $\xi=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s$，此时 $\boldsymbol{0}=A\xi=k_1A\boldsymbol{\alpha}_1+k_2A\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_sA\boldsymbol{\alpha}_s$，根据定义，此时 $A\boldsymbol{\alpha}_1$，$A\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$A\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关．

b. 若 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的任一非零解 ξ 均不可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示，即对任意不全为 0 的数 k_1，k_2，…，k_s，都有 $\xi\neq k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s$，此时 $\boldsymbol{0}=A\xi\neq k_1A\boldsymbol{\alpha}_1+k_2A\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_sA\boldsymbol{\alpha}_s$，根据定义，此时 $A\boldsymbol{\alpha}_1$，$A\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$A\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，故②不正确．应选（B）．

例 6.6 设 A 是 3 阶方阵，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 均为 3 维列向量，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1\neq\boldsymbol{0}$，$A\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$，$A\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$A\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，证明：$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关．

【证】用定义证．设存在数 k_1，k_2，k_3，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}. \qquad ①$$

在①式两边的左边乘 A，且利用题设条件，得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+k_3(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{0}, \qquad ②$$

②式－①式，得

$$k_2\boldsymbol{\alpha}_1+k_3\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{0}, \qquad ③$$

在③式两边的左边乘 A，且利用题设条件，得

$$k_2\boldsymbol{\alpha}_1+k_3(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{0}, \qquad ④$$

④式－③式，得

$$k_3\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{0}.$$

因 $\boldsymbol{\alpha}_1\neq\boldsymbol{0}$，故 $k_3=0$，代入③式，得 $k_2=0$，将 $k_3=k_2=0$ 代入①式，得 $k_1=0$，故若要①式成立，必须有 $k_1=k_2=k_3=0$，故 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关．

例 6.7 设 A 为 3 阶非零矩阵，$\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3]$，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，若齐次线性方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的

一个基础解系为$\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}$，则齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系为（　　）.

（A）$\boldsymbol{\beta}_1$　　　　（B）$\boldsymbol{\beta}_2$　　　　（C）$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$　　　　（D）$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$

【解】应选（D）.

由题设知，$r(\boldsymbol{A})\geqslant 1$，$r(\boldsymbol{B})=2$. 由于 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，故 $r(\boldsymbol{A})\leqslant 3-r(\boldsymbol{B})=1$，则 $r(\boldsymbol{A})=1$，从而齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系含有两个线性无关的解向量. 又由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，知 $\boldsymbol{B}$ 的列向量均为方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解向量. 由于$\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}$是方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解，而 $\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\beta}_3]$，故 $\boldsymbol{\beta}_1+2\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{0}$，从而 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关. 因此，$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_3$ 一定线性无关. 事实上，若 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关，则存在不全为零的数 k_1，k_2，使得 $k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{0}$，由于 $\boldsymbol{\beta}_1=-2\boldsymbol{\beta}_2$，故 $-2k_1\boldsymbol{\beta}_2+k_2\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{0}$，这表明 $\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关，即矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的任意两个列向量均线性相关，从而 $r(\boldsymbol{B})<2$，这与 $r(\boldsymbol{B})=2$ 矛盾. 故齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系为 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_3$ 或 $\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$. 应选（D）.

例 6.8　设 3 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关.

（1）证明：存在 3 维非零向量 $\boldsymbol{\xi}$，$\boldsymbol{\xi}$ 既可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示，也可由 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$ 线性表示；

（2）若 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,\ -2,\ 3]^{\mathrm T}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[2,\ 1,\ 1]^{\mathrm T}$，$\boldsymbol{\beta}_1=[-2,\ 1,\ 4]^{\mathrm T}$，$\boldsymbol{\beta}_2=[-5,\ -3,\ 5]^{\mathrm T}$，求既可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示，也可由 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$ 线性表示的所有非零向量 $\boldsymbol{\xi}$.

（1）**【证】**因 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$ 均是 3 维向量，4 个 3 维向量必线性相关，由定义知，存在不全为零的数 k_1，k_2，λ_1，λ_2，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_1\boldsymbol{\beta}_1+\lambda_2\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{0},$$

即

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2=-\lambda_1\boldsymbol{\beta}_1-\lambda_2\boldsymbol{\beta}_2.$$

取

$$\boldsymbol{\xi}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2=-\lambda_1\boldsymbol{\beta}_1-\lambda_2\boldsymbol{\beta}_2,$$

若 $\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{0}$，则 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2=-\lambda_1\boldsymbol{\beta}_1-\lambda_2\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{0}$. 因 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$ 也线性无关，从而得出 $k_1=k_2=0$，且 $\lambda_1=\lambda_2=0$，这和 k_1，k_2，λ_1，λ_2 不全为零矛盾，故 $\boldsymbol{\xi}\neq\boldsymbol{0}$，所以存在既可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示，也可由 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$ 线性表示的非零向量 $\boldsymbol{\xi}$.

（2）**【解】**设 $\boldsymbol{\xi}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2=-\lambda_1\boldsymbol{\beta}_1-\lambda_2\boldsymbol{\beta}_2$，得齐次线性方程组 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_1\boldsymbol{\beta}_1+\lambda_2\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{0}$，将 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$ 合并成矩阵，并作初等行变换，得

$$[\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2]\ \overset{\text{2倍加至}}{=}\begin{bmatrix}1&2&-2&-5\\-2&1&1&-3\\3&1&4&5\end{bmatrix}\underset{\text{(-3)倍加至}}{\rightarrow}\begin{bmatrix}1&2&-2&-5\\0&5&-3&-13\\0&-5&10&20\end{bmatrix}\underset{\text{1倍加至}}{\rightarrow}\begin{bmatrix}1&2&-2&-5\\0&5&-3&-13\\0&0&7&7\end{bmatrix},$$

解得 $[k_1,\ k_2,\ \lambda_1,\ \lambda_2]=k[-1,\ 2,\ -1,\ 1]$，故既可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示，又可由 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$ 线性表示的所有非零向量为

$$\boldsymbol{\xi}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2=-k\boldsymbol{\alpha}_1+2k\boldsymbol{\alpha}_2=-k\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix}+2k\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}3\\4\\-1\end{bmatrix},$$ 其中 k 是任意非零常数.

或 $\xi=-\lambda_1\beta_1-\lambda_2\beta_2=k\beta_1-k\beta_2=k\begin{bmatrix}-2\\1\\4\end{bmatrix}-k\begin{bmatrix}-5\\-3\\5\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}3\\4\\-1\end{bmatrix}$，其中 k 是任意非零常数．

四 向量组等价

给出向量组（Ⅰ）：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$；向量组（Ⅱ）：$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$，其中 $\alpha_i\ (i=1, 2, \cdots, s)$ 与 $\beta_j\ (j=1, 2, \cdots, t)$ 同维，若 α_i 均可由 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 线性表示，且 β_j 均可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表示，则称向量组（Ⅰ）与向量组（Ⅱ）等价．

其等价命题：

（1）$r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)=r(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t)$，且可单方向表示．

【注】所谓可单方向表示，是指 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 与 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 这两个向量组中的某一个向量组可由另一个向量组线性表示．

（2）$r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)=r(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t)=r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t)$（三秩相同）．

例 6.9 求常数 a 的值，使 $\alpha_1=[1, 1, a]^T$，$\alpha_2=[1, a, 1]^T$，$\alpha_3=[a, 1, 1]^T$ 能由 $\beta_1=[1, 1, a]^T$，$\beta_2=[-2, a, 4]^T$，$\beta_3=[-2, a, a]^T$ 线性表示，但 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示．

【解】$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 能由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表示，则 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\leqslant r(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$．又 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，故 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)<r(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$，而 $r(\beta_1, \beta_2, \beta_3)\leqslant 3$，于是 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)<3$，从而 $|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3|=0$，解得 $a=1$ 或 $a=-2$．否则由上述“等价命题（1）”知，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 等价．

当 $a=1$ 时，$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\beta_1=[1, 1, 1]^T$，显然 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 可由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表示，而此时 $\beta_2=[-2, 1, 4]^T$ 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，即 $a=1$ 符合题意．

当 $a=-2$ 时，有

$$\begin{array}{r}\\ (-1)\text{倍加至}\\ 2\text{倍加至}\end{array}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&-2&-2&1&1&-2\\1&-2&-2&1&-2&1\\-2&4&-2&-2&1&1\end{array}\right]\to\begin{array}{r}\\ \\ \text{互换}\end{array}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&-2&-2&1&1&-2\\0&0&0&0&-3&3\\0&0&-6&0&3&-3\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&-2&-2&1&1&-2\\0&0&-6&0&3&-3\\0&0&0&0&-3&3\end{array}\right].$$

可知 $r(\beta_1, \beta_2, \beta_3)=2$，而 $r([\beta_1, \beta_2, \beta_3, \alpha_2])=3$，故 α_2 不能由向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表示，所以 $a=-2$ 不符合题意．

综上所述，$a=1$．

例 6.10 已知向量组

（Ⅰ）：$\alpha_1=[1, 1, 4]^T$，$\alpha_2=[1, 0, 4]^T$，$\alpha_3=[1, 2, a^2+3]^T$；

（Ⅱ）：$\beta_1=[1, 1, a+3]^T$，$\beta_2=[0, 2, 1-a]^T$，$\beta_3=[1, 3, a^2+3]^T$．

若向量组（Ⅰ）与向量组（Ⅱ）等价，求 a 的值，并将 β_3 用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示．

【解】记 $A=[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \mid \beta_1, \beta_2, \beta_3]$，对 A 作初等行变换，得

$$A=\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&1&1&1&0&1\\1&0&2&1&2&3\\4&4&a^2+3&a+3&1-a&a^2+3\end{array}\right]\xrightarrow{(-1)倍加至,\ (-4)倍加至}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&1&1&1&0&1\\0&-1&1&0&2&2\\0&0&a^2-1&a-1&1-a&a^2-1\end{array}\right]\xrightarrow{\times(-1)}$$

$$\xrightarrow{}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&1&1&1&0&1\\0&1&-1&0&-2&-2\\0&0&a^2-1&a-1&1-a&a^2-1\end{array}\right]\xrightarrow{(-1)倍加至}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&2&1&2&3\\0&1&-1&0&-2&-2\\0&0&a^2-1&a-1&1-a&a^2-1\end{array}\right]=B.$$

当 $a=-1$ 时,

$$B=\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&2&1&2&3\\0&1&-1&0&-2&-2\\0&0&0&-2&2&0\end{array}\right],$$

因为 $r(\mathrm{I})\neq r(\mathrm{II})$，所以向量组（Ⅰ）与向量组（Ⅱ）不等价.

当 $a=1$ 时,

$$B=\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&2&1&2&3\\0&1&-1&0&-2&-2\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right],$$

因为 $r(\mathrm{I})=r(\mathrm{II})=r(\mathrm{I},\mathrm{II})$，所以向量组（Ⅰ）与向量组（Ⅱ）等价，且 $\boldsymbol{\beta}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2$.

当 $a\neq\pm1$ 时，因为 $r(\mathrm{I})=r(\mathrm{II})=r(\mathrm{I},\mathrm{II})$，所以向量组（Ⅰ）与向量组（Ⅱ）等价. 又

$$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_3]\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\end{bmatrix},$$

所以 $\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

五 向量空间（仅数学一）

1. 概念

设 V 是向量空间，如果 V 中有 r 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$，满足

① $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关；

② V 中任一向量都可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示.

则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 为向量空间 V 的一个基，称 r 为向量空间 V 的维数，并称 V 为 r 维向量空间.

若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是 r 维向量空间 V 的一个基，则 V 中任一向量 ξ 都可由这个基唯一地线性表示：

$$\xi=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_r\boldsymbol{\alpha}_r,$$

称有序数组 $x_1,x_2,\cdots,x_r$ 为向量 ξ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 下的坐标. 从而 V 可表示为

$$V=\{\xi=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_r\boldsymbol{\alpha}_r\mid x_1,x_2,\cdots,x_r\in\mathbf{R}\}.$$

2. 过渡矩阵

设 V 的两个基 $\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$，…，$\boldsymbol{\eta}_n$；ξ_1，ξ_2，…，ξ_n，若

$$[\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n] = [\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n]\boldsymbol{C},$$

则称 $\boldsymbol{C}$ 为由基 ξ_1，ξ_2，…，ξ_n 到基 $\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$，…，$\boldsymbol{\eta}_n$ 的**过渡矩阵**（注意 $\boldsymbol{C}$ 的位置）.

3. 坐标变换

$$\boldsymbol{\alpha} = [\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n]\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n]\boldsymbol{y} \xlongequal{\text{由“2”}} [\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n]\boldsymbol{C}\boldsymbol{y},$$

其中 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 称为**坐标变换公式**.

例 6.11　设 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 3 维向量空间 $\mathbf{R}^3$ 的一个基，则由基 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2$，$\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 的过渡矩阵为________.

【解】应填 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$.

按过渡矩阵的定义，即求 $[\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1] = \left[\boldsymbol{\alpha}_1, \frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2, \frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_3\right]\boldsymbol{P}$ 中的矩阵 $\boldsymbol{P}$. 由于

$$[\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1] = \left[\boldsymbol{\alpha}_1, \frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2, \frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_3\right]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix},$$

故过渡矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

例 6.12　设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 $\mathbf{R}^3$ 的一个基，且

$$\boldsymbol{\beta}_1 = 2\boldsymbol{\alpha}_1 + 2a\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\beta}_2 = 2\boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 + (a+1)\boldsymbol{\alpha}_3.$$

（1）证明：向量组 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$ 为 $\mathbf{R}^3$ 的一个基；

（2）当 a 为何值时，存在非零向量 ξ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 与基 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标相同，并求出所有的 ξ.

（1）【证】由于

$$[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3] = [2\boldsymbol{\alpha}_1+2a\boldsymbol{\alpha}_3, 2\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1+(a+1)\boldsymbol{\alpha}_3] = [\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3]\boldsymbol{P},$$

其中

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2a & 0 & a+1 \end{bmatrix},$$

且 $|\boldsymbol{P}| = 4 \neq 0$，所以 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$ 为 $\mathbf{R}^3$ 的一个基.

（2）【解】设 ξ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 与基 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标向量为 $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$，则

$$\xi=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\boldsymbol{x}=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]\boldsymbol{x}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\boldsymbol{P}\boldsymbol{x},$$

即

$$(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}.$$

因为

(−2a)倍加至

$$\boldsymbol{P}-\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\2a&0&a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&-a\end{bmatrix},$$

故当 $a=0$ 时，方程组 $(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，且所有非零解为

$$\boldsymbol{x}=k\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\ k\text{ 为任意非零常数}.$$

故在两个基下坐标相同的所有非零向量为 $\xi=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\begin{bmatrix}k\\0\\-k\end{bmatrix}=k(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3)$，$k$ 为任意非零常数.

【注】经常见到矩阵中含未知参数，但其行列式却不含参数，考生应习惯这种巧妙的命题设置.

例 6.13 由向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}2\\2\\4\end{bmatrix}$ 生成的向量空间 $V=\mathrm{span}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}=\{k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3|k_1,k_2,k_3\in\mathbf{R}\}$，则 V 的一个规范正交基为________.

【解】应填 $\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$，$\frac{1}{\sqrt6}\begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix}$.

由题设可得 $\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，所以 V 中的任意向量均可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示，又 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，故 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 为向量空间 V 的一个基，将其标准正交化，得

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|}\boldsymbol{\beta}_1=\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|}\boldsymbol{\beta}_2=\frac{1}{\sqrt6}\begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix},$$

从而 $\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$，$\frac{1}{\sqrt6}\begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix}$ 为向量空间 V 的一个规范正交基.

这里填两个向量而不是三个向量，这是因为此向量空间的维数是2.