第 5 章　线性方程组

A 组

1. 设有三条直线 $l_1:a_1x+b_1y=c_1, l_2:a_2x+b_2y=c_2, l_3:a_3x+b_3y=c_3$，其中 $a_i,b_i,c_i\neq 0(i=1,2,3)$，记 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{bmatrix}$，则 $r(\boldsymbol{A})=2$ 是三条直线相交于一点的(　　).

(A) 充分必要条件　　(B) 充分而非必要条件

(C) 必要而非充分条件　　(D) 既非必要也非充分条件

2. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均为线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解，则下列向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\frac{1}{4}(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3),\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2-4\boldsymbol{\alpha}_3,$$

其中是相应的齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解向量的个数为(　　).

(A)4　　(B)3　　(C)2　　(D)1

3. 设 $\boldsymbol{\xi}_1=[1,-2,3,2]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_2=[2,0,5,-2]^{\mathrm{T}}$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，则下列向量中是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解向量的是(　　).

(A)$\boldsymbol{\alpha}_1=[1,-3,3,3]^{\mathrm{T}}$　　(B)$\boldsymbol{\alpha}_2=[0,0,5,-2]^{\mathrm{T}}$

(C)$\boldsymbol{\alpha}_3=[-1,-6,-1,10]^{\mathrm{T}}$　　(D)$\boldsymbol{\alpha}_4=[1,6,1,0]^{\mathrm{T}}$

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 是秩为 $n-1$ 的 n 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的两个不同的解向量，k 是任意常数，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解必定是(　　).

(A)$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$　　(B)$k\boldsymbol{\alpha}_1$　　(C)$k(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$　　(D)$k(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)$

5. 齐次线性方程组

$$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+\lambda^2x_3=0,\\ x_1+\lambda x_2+x_3=0,\\ x_1+x_2+\lambda x_3=0\end{cases}$$

的系数矩阵为 $\boldsymbol{A}$，若存在 3 阶矩阵 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$，使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则(　　).

(A)$\lambda=-2$ 且 $|\boldsymbol{B}|=0$　　(B)$\lambda=-2$ 且 $|\boldsymbol{B}|\neq 0$

(C)$\lambda=1$ 且 $|\boldsymbol{B}|=0$　　(D)$\lambda=1$ 且 $|\boldsymbol{B}|\neq 0$

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 4×5 矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关，则下列说法不正确的是(　　).

(A)$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有零解　　(B)$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 必有无穷多解

(C) 对任意的 $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解　　(D) 对任意的 $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解

7. 已知非齐次线性方程组

$$A_{3\times4}x=b \qquad ①$$

有通解 $k_1[1,2,0,-2]^{\mathrm{T}}+k_2[4,-1,-1,-1]^{\mathrm{T}}+[1,0,-1,1]^{\mathrm{T}}$，则满足方程组 ① 且满足条件 $x_1=x_2,x_3=x_4$ 的解是________.

8. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，若向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+t\boldsymbol{\alpha}_2$ 同为该方程组的一个基础解系，则 t________.

9. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\\2&a+1&a+3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}$ 是 3 阶非零矩阵，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解是________.

10. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶方阵，$\boldsymbol{A}^*$ 为其伴随矩阵，且 $\boldsymbol{A}^*=\begin{bmatrix}1&2&-2\\-1&-2&2\\3&6&-6\end{bmatrix}$.

(1) 确定矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 和 $\boldsymbol{A}$ 的秩；

(2) 讨论线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系由多少个线性无关的解向量构成，并给出该方程组的通解.

11. 设 $n(n\geqslant3)$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&a&a&\cdots&a\\a&1&a&\cdots&a\\a&a&1&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a&a&\cdots&1\end{bmatrix}$，如果 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的秩为 1，求 a 的值，并求此时齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解.

12. 已知线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=a,\\3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0,\\x_2+2x_3+2x_4+6x_5=b,\\5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=2.\end{cases}$$

(1) 求方程组的导出组的基础解系；

(2) 求 a,b 为何值时，方程组有解；

(3) 当方程组有解时，求方程组的全部解.

13. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\\2&1&2&-6\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&7&4\\0&-2&-1\\a&2&1\\3&7&b\end{bmatrix}$. 若矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解，求 a,b 的值，并求该矩阵方程的全部解.

14. 设三元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 1，已知 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 是它的三个解向量，且 $\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2=[1,2,3]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3=[2,-1,1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}_3+\boldsymbol{\eta}_1=[0,2,0]^{\mathrm{T}}$，求该非齐次线性方程组的通解.

15. 已知 4 阶方阵 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 均为 4 维列向量，其中 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$，如果 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$，求线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

16. 已知方程组（Ⅰ）

$$\begin{cases}x_1+x_4=1,\\x_2-2x_4=2,\\x_3+x_4=-1\end{cases}$$

与方程组（Ⅱ）

$$\begin{cases}-2x_1+x_2+ax_3-5x_4=1,\\x_1+x_2-x_3+bx_4=4,\\3x_1+x_2+x_3+2x_4=c\end{cases}$$

是同解方程组，求参数 a,b,c.

17. 求方程组（Ⅰ）$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0,\\x_1+3x_2+ax_3=0,\\x_1+3x_2+a^2x_3=0\end{cases}$ 与（Ⅱ）$\begin{cases}x_1+3x_2+x_3=a-1,\\x_1+x_2+x_3=a^2-a\end{cases}$ 的公共解.

B组

1. 设 $\boldsymbol{Ax}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\mathbf{0}$ 有通解 $k[1,0,2,-1]^{\mathrm{T}}$，其中 k 是任意常数，$\boldsymbol{A}$ 中去掉第 $i(i=1,2,3,4)$ 列的矩阵记成 $\boldsymbol{A}_i$，则下列方程组中有非零解的方程组是（　　）.

(A) $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{y}=\mathbf{0}$　　(B) $\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{y}=\mathbf{0}$

(C) $\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{y}=\mathbf{0}$　　(D) $\boldsymbol{A}_4\boldsymbol{y}=\mathbf{0}$

2. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 均是4维列向量，记 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]$，$\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5]$. 已知方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\alpha}_5$ 有通解 $k[1,-1,2,0]^{\mathrm{T}}+[2,1,0,1]^{\mathrm{T}}$，其中 k 是任意常数，则下列向量不是方程组 $\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$ 的解的是（　　）.

(A) $[1,-2,-2,0,-1]^{\mathrm{T}}$　　(B) $[0,3,-4,1,-1]^{\mathrm{T}}$

(C) $[2,1,0,1,-1]^{\mathrm{T}}$　　(D) $[3,0,2,1,-1]^{\mathrm{T}}$

3. 已知 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_r(r\geqslant 3)$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系，则下列向量组也是 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系的是（　　）.

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1=-\boldsymbol{\xi}_2-\boldsymbol{\xi}_3-\cdots-\boldsymbol{\xi}_r,\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\xi}_1-\boldsymbol{\xi}_3-\boldsymbol{\xi}_4-\cdots-\boldsymbol{\xi}_r,$
$\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2-\boldsymbol{\xi}_4-\cdots-\boldsymbol{\xi}_r,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r=\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+\boldsymbol{\xi}_{r-1}$

(B) $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}_3+\cdots+\boldsymbol{\xi}_r,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_3+\boldsymbol{\xi}_4+\cdots+\boldsymbol{\xi}_r,$
$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}_4+\cdots+\boldsymbol{\xi}_r,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r=\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+\boldsymbol{\xi}_{r-1}$

(C) $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_r$ 的一个等价向量组

(D) $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_r$ 的一个等秩向量组

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 实矩阵，则对任意 m 维列向量 $\boldsymbol{b}$，线性方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$（　　）.

(A) 无解　　(B) 有解

(C) 必有唯一解　　(D) 必有无穷多解

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵，则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 有非零公共解的一个充分条件是（　　）.

(A) $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$　　(B) $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leqslant n$

(C) $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})<n$　　(D) $n<r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})<2n$

6. 已知 $r(\boldsymbol{A})=r_1$，且方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\alpha}$ 有解，$r(\boldsymbol{B})=r_2$，且 $\boldsymbol{By}=\boldsymbol{\beta}$ 无解，设 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]$，$\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n]$，且 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n,\boldsymbol{\beta})=r$，则（　　）.

(A) $r=r_1+r_2$　　(B) $r>r_1+r_2$　　(C) $r=r_1+r_2+1$　　(D) $r\leqslant r_1+r_2+1$

7. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}$ 为实矩阵，且 $A_{ij}=-a_{ij}$（A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式），$a_{22}=-1$，$|\boldsymbol{A}|=-1$，则方程组 $\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}$ 的解为________.

8. 已知 4 阶方阵 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 均为 4 维列向量，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，若

$$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+2\boldsymbol{\alpha}_4,$$

则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为________.

9. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&2\\-1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&4&0\\-1&0&-2\\a&b&c\end{bmatrix}$，且矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有无穷多解，则 $\boldsymbol{X}=$ ________.

10. 若方程组

$$(\mathrm{I})\begin{cases}ax_1+x_2+x_3=a^3,\\(1+a)x_1+(1+a)x_2+2x_3=a(a^2+1)\end{cases}$$

与方程组

$$(\mathrm{II})\begin{cases}x_1+x_2+ax_3=a^2,\\(1+a)x_1+2x_2+(1+a)x_3=1+a^2,\\(1+a)x_1+(1+a)x_2+2x_3=1+a\end{cases}$$

同解，则 $a=$ ________.

11. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&-1&3\\a&1&b\\4&c&6\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}$ 是 3 阶方阵，$r(\boldsymbol{B})>1$，且 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}$，求：

(1) $\boldsymbol{A}^n(n\geqslant1)$；

(2) 齐次线性方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的通解.

12. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{X}$ 均是 3 阶矩阵，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&9&7\\1&11&7\\7&5&7\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&10&5\\-3&14&4\\6&2&7\end{bmatrix},$$

则是否存在 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BX}$？若存在，求出所有的 $\boldsymbol{X}$，若不存在，说明理由.

13. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2\\1&-1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{X}$ 是 2 阶方阵.

(1) 求满足 $\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{O}$ 的所有 $\boldsymbol{X}$；

(2) 方程 $\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{E}$,其中 $\boldsymbol{E}$ 是2阶单位阵,问方程是否有解?若有解,求满足方程的所有 $\boldsymbol{X}$,若无解,说明理由.

14. 已知 $\boldsymbol{\eta}_1=[-3,2,0]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\eta}_2=[-1,0,-2]^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组

$$\begin{cases}ax_1+bx_2+cx_3=2,\\x_1+2x_2-x_3=1,\\2x_1+x_2+x_3=-4\end{cases}$$

的两个解向量,求方程组的通解,并确定参数 a,b,c.

15. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 均为4维列向量,记 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]$,$\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$. 已知非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为

$$[1,-1,2,1]^{\mathrm{T}}+k_1[1,2,0,1]^{\mathrm{T}}+k_2[-1,1,1,0]^{\mathrm{T}}(k_1,k_2\text{ 为任意常数}).$$

(1) 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关;

(2) 求方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

16. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为4维列向量组,其中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,$\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$. 记 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,-\boldsymbol{\alpha}_1+a\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3]$,且方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\alpha}_4$ 有无穷多解. 求:

(1) 常数 a 的值;

(2) 方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\alpha}_4$ 的通解.

17. 设三元线性方程有通解

$$k_1\begin{bmatrix}-1\\3\\2\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}2\\-3\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\-1\\3\end{bmatrix},$$

其中 k_1,k_2 为任意常数,求原方程.

18. 已知齐次线性方程组(Ⅰ)为 $\begin{cases}x_1+x_2-x_3=0,\\x_2+x_3-x_4=0,\end{cases}$ 齐次线性方程组(Ⅱ)的基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1=[-1,1,2,4]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_2=[1,0,1,1]^{\mathrm{T}}.$$

(1) 求方程组(Ⅰ)的基础解系;

(2) 求方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)的全部非零公共解,并将非零公共解分别由方程组(Ⅰ),(Ⅱ)的基础解系线性表示.

19. 已知齐次线性方程组(Ⅰ)的基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1=[1,0,1,1]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\xi}_2=[2,1,0,-1]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\xi}_3=[0,2,1,-1]^{\mathrm{T}}$,添加两个方程

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0,\\x_1+2x_2+2x_4=0\end{cases}$$

后组成齐次线性方程组(Ⅱ),求(Ⅱ)的基础解系.

C组

1. 设 $n(n\geqslant 2)$ 为正整数,$\boldsymbol{A}$ 是 $(n-1)\times n$ 矩阵,划去 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 列后构成的 $n-1$ 阶行列式记为 a_j,令 $b_j=(-1)^{j-1}a_j(j=1,2,\cdots,n)$,则对于 n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$,下列结论一定正确的是(　　).

(A) 向量$[a_1,a_2,\cdots,a_n]^T$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个解

(B) 向量$[b_1,b_2,\cdots,b_n]^T$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个解

(C) 向量$[a_1,a_2,\cdots,a_n]^T$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系

(D) 向量$[b_1,b_2,\cdots,b_n]^T$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 4 阶矩阵，向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 是齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，则齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解为(　　).

(A)$C_1\boldsymbol{\alpha}+C_2\boldsymbol{\beta}$，其中 C_1,C_2 为任意常数

(B)$C_1\boldsymbol{\alpha}+C_2\boldsymbol{\gamma}$，其中 C_1,C_2 为任意常数

(C)$C_1\boldsymbol{\beta}+C_2\boldsymbol{\gamma}$，其中 C_1,C_2 为任意常数

(D)$C_1\boldsymbol{\alpha}+C_2\boldsymbol{\beta}+C_3\boldsymbol{\gamma}$，其中 C_1,C_2,C_3 为任意常数

3. 已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A})=2$，其伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 可经初等行变换化为矩阵 $\boldsymbol{B}$，又设 $\boldsymbol{b}$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的一个非零列向量，则(　　).

(A) 方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 同解　　(B) 方程组 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 同解

(C) 方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{b}$ 同解　　(D) 方程组 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{b}$ 同解

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，对于齐次线性方程组(Ⅰ)$\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 和(Ⅱ)$\boldsymbol{A}^{n+1}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，现有命题

①(Ⅰ)的解必是(Ⅱ)的解；　　②(Ⅱ)的解必是(Ⅰ)的解；

③(Ⅰ)的解不一定是(Ⅱ)的解；　　④(Ⅱ)的解不一定是(Ⅰ)的解.

其中正确的是(　　).

(A)①④　　(B)①②　　(C)②③　　(D)③④

5. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 乘积可交换，$\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{r_1}$ 和 $\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{r_2}$ 分别是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，且对于 n 阶矩阵 $\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$，满足 $r(\boldsymbol{CA}+\boldsymbol{DB})=n$. 证明：

(1)$r\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{bmatrix}\right)=n$ 且 $\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{r_1},\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{r_2}$ 线性无关；

(2)$\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{r_1},\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{r_2}$ 是方程组 $\boldsymbol{ABx}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

6. (1) 设 r 个 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，$\boldsymbol{\beta}$ 是 n 维向量，且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关. 证明：$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表出，且表出法唯一；

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\times r$ 矩阵，$r(\boldsymbol{A})=r$. 若方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解，证明方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 必有唯一解，并求其解.