第9讲 一元函数积分学的计算

知识结构

- 基本积分公式
- 不定积分的计算
  - 凑微分法
  - 换元法
  - 分部积分法
  - 有理函数的积分
    - 定义
    - 思想
    - 方法
- 定积分的计算
  - 对称区间上的积分问题
  - 周期性下的积分问题
  - 区间再现下的积分问题
  - 华里士公式
  - 定积分分部积分法中的“升阶”“降阶”问题
  - 分段函数的定积分
- 变限积分的计算
  - 求分段函数的变限积分
  - 直接求导型
  - 换元求导型
  - 拆分求导型
  - 换序型
- 反常积分的计算

一 基本积分公式

①$\int x^k \mathrm{d}x = \dfrac{1}{k+1}x^{k+1} + C, k \neq -1; \begin{cases} \int \dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{x} + C, \\ \int \dfrac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\sqrt{x} + C. \end{cases}$

②$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C$.

③$\int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$；$\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$，$a > 0$ 且 $a \neq 1$.

④$\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$；$\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$；

$\int \tan x\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$；$\int \cot x\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$；

$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \int \sec x\mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + C$；

$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int \csc x\mathrm{d}x = \ln|\csc x - \cot x| + C$；

$\int \sec^2 x\mathrm{d}x = \tan x + C$；$\int \csc^2 x\mathrm{d}x = -\cot x + C$；

$\int \sec x \tan x\mathrm{d}x = \sec x + C$；$\int \csc x \cot x\mathrm{d}x = -\csc x + C$.

⑤$\begin{cases} \int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x + C, \\ \int \frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C(a > 0). \end{cases}$

⑥$\begin{cases} \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin x + C, \\ \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{a} + C(a > 0). \end{cases}$

⑦$\begin{cases} \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C(\text{常见 } a = 1), \\ \int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x = \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + C(|x| > |a| > 0). \end{cases}$

⑧$\begin{cases} \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{b-a}\ln\left|\frac{x+a}{x+b}\right| + C(a \neq b), \\ \int \frac{1}{x^2-a^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C\left(\int \frac{1}{a^2-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C\right). \end{cases}$

⑨$\int \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C(a > |x| \geqslant 0)$.

⑩$\int \sin^2 x\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C\left(\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}\right)$；

$\int \cos^2 x\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C\left(\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}\right)$；

$\int \tan^2 x\mathrm{d}x = \tan x - x + C(\tan^2 x = \sec^2 x - 1)$；

$$\int\cot^2 x\mathrm{d}x=-\cot x-x+C(\cot^2 x=\csc^2 x-1).$$

二 不定积分的计算

1. 凑微分法

$$\int f[g(x)]g'(x)\mathrm{d}x=\int f[g(x)]\mathrm{d}[g(x)]\xlongequal{g(x)=u}\int f(u)\mathrm{d}u.$$

【注】常用的凑微分公式：

① 由于 $x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}(x^2)$，故 $\int xf(x^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int f(x^2)\mathrm{d}(x^2)=\frac{1}{2}\int f(u)\mathrm{d}u$.

② 由于 $\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\mathrm{d}\left(x^{\frac{3}{2}}\right)$，故 $\int\sqrt{x}f\left(x^{\frac{3}{2}}\right)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\int f\left(x^{\frac{3}{2}}\right)\mathrm{d}\left(x^{\frac{3}{2}}\right)=\frac{2}{3}\int f(u)\mathrm{d}u$.

③ 由于 $\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=2\mathrm{d}(\sqrt{x})$，故 $\int\frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\int f(\sqrt{x})\mathrm{d}(\sqrt{x})=2\int f(u)\mathrm{d}u$.

④ 由于 $\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\mathrm{d}\left(-\frac{1}{x}\right)$，故 $\int\frac{f\left(-\frac{1}{x}\right)}{x^2}\mathrm{d}x=\int f\left(-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}\left(-\frac{1}{x}\right)=\int f(u)\mathrm{d}u$.

⑤ 由于 $\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\ln x)(x>0)$，故 $\int\frac{f(\ln x)}{x}\mathrm{d}x=\int f(\ln x)\mathrm{d}(\ln x)=\int f(u)\mathrm{d}u$.

⑥ 由于 $\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)$，故 $\int\mathrm{e}^xf(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x=\int f(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)=\int f(u)\mathrm{d}u$.

⑦ 由于 $a^x\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln a}\mathrm{d}(a^x)$，$a>0$ 且 $a\neq1$，故

$$\int a^xf(a^x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln a}\int f(a^x)\mathrm{d}(a^x)=\frac{1}{\ln a}\int f(u)\mathrm{d}(u).$$

⑧ 由于 $\sin x\mathrm{d}x=\mathrm{d}(-\cos x)$，故

$$\int\sin xf(-\cos x)\mathrm{d}x=\int f(-\cos x)\mathrm{d}(-\cos x)=\int f(u)\mathrm{d}u.$$

⑨ 由于 $\cos x\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\sin x)$，故 $\int\cos xf(\sin x)\mathrm{d}x=\int f(\sin x)\mathrm{d}(\sin x)=\int f(u)\mathrm{d}u$.

⑩ 由于 $\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}=\sec^2 x\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\tan x)$，故 $\int\frac{f(\tan x)}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int f(\tan x)\mathrm{d}(\tan x)=\int f(u)\mathrm{d}u$.

⑪ 由于 $\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}=\csc^2 x\mathrm{d}x=\mathrm{d}(-\cot x)$，故

$$\int\frac{f(-\cot x)}{\sin^2 x}\mathrm{d}x=\int f(-\cot x)\mathrm{d}(-\cot x)=\int f(u)\mathrm{d}u.$$

⑫ 由于 $\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\arctan x)$，故

$$\int \frac{f(\arctan x)}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int f(\arctan x)\mathrm{d}(\arctan x) = \int f(u)\mathrm{d}u.$$

⑬ 由于 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\arcsin x)$，故

$$\int \frac{f(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \int f(\arcsin x)\mathrm{d}(\arcsin x) = \int f(u)\mathrm{d}u.$$

例 9.1 $\int \frac{x\ln x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x =$ ________.

【解】 应填 $-\frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}} - \arcsin \frac{1}{x} + C$.

$$\int \frac{x\ln x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$$

$$= \int \ln x\,\mathrm{d}\left(-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right) = -\frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}} + \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}} - \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}}\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}} - \arcsin\frac{1}{x} + C.$$

例 9.2 $\int e^{r^2(\sin\theta+\cos\theta)^2} r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\mathrm{d}\theta =$ ________.

【解】 应填 $\frac{1}{2}e^{r^2(\sin\theta+\cos\theta)^2} + C$.

由于

$$\frac{\mathrm{d}[r^2(\sin\theta+\cos\theta)^2]}{\mathrm{d}\theta} = r^2 \cdot 2(\sin\theta+\cos\theta)(\cos\theta-\sin\theta)$$

$$= 2r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta),$$

即 $\mathrm{d}[r^2(\sin\theta+\cos\theta)^2] = 2r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\mathrm{d}\theta$. 于是

$$\text{原式} = \frac{1}{2}\int e^{r^2(\sin\theta+\cos\theta)^2} \cdot 2r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int e^{r^2(\sin\theta+\cos\theta)^2}\mathrm{d}[r^2(\sin\theta+\cos\theta)^2]$$

$$= \frac{1}{2}e^{r^2(\sin\theta+\cos\theta)^2} + C.$$

2. 换元法

$$\int f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{x=g(u)} \int f[g(u)]\mathrm{d}[g(u)] = \int f[g(u)]g'(u)\mathrm{d}u.$$

【注】(1)$x=g(u)$ 是单调可导函数，且不要忘记计算完后用反函数 $u=g^{-1}(x)$ 回代.

(2) 常用换元方法：

① **三角函数代换**——当被积函数含有如下根式时，可作三角代换，这里 $a>0$.

$$\begin{cases}\sqrt{a^2-x^2}\xrightarrow{\text{令}}x=a\sin t, & |t|<\dfrac{\pi}{2},\\ \sqrt{a^2+x^2}\xrightarrow{\text{令}}x=a\tan t, & |t|<\dfrac{\pi}{2},\\ \sqrt{x^2-a^2}\xrightarrow{\text{令}}x=a\sec t, & \begin{cases}\text{若 } x>0,\text{则 } 0<t<\dfrac{\pi}{2},\\ \text{若 } x<0,\text{则 } \dfrac{\pi}{2}<t<\pi.\end{cases}\end{cases}$$

② **恒等变形后作三角函数代换**——当被积函数中含有根式 $\sqrt{ax^2+bx+c}$ 时，可先化为以下三种形式 $\sqrt{\varphi^2(x)+k^2}$，$\sqrt{\varphi^2(x)-k^2}$，$\sqrt{k^2-\varphi^2(x)}$，再作三角函数代换.

③ **根式代换**——当被积函数中含有 $\sqrt[n]{ax+b}$，$\sqrt{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$，$\sqrt{ae^{bx}+c}$ 等根式时，一般令根式 $\sqrt{*}=t$（因为很难通过根号内换元的办法凑成平方，所以根号无法去掉）. 对既含有 $\sqrt[n]{ax+b}$，也含有 $\sqrt[m]{ax+b}$ 的函数，一般取 m,n 的最小公倍数 l，令 $\sqrt[l]{ax+b}=t$.

④ **倒代换**——当被积函数中分母的幂次比分子高两次及两次以上时，可作倒代换，令 $x=\dfrac{1}{t}$.

⑤ **复杂函数的直接代换**——当被积函数中含有 a^x，e^x，$\ln x$，$\arcsin x$，$\arctan x$ 等时，可考虑直接令复杂函数等于 t，值得指出的是，当 $\ln x$，$\arcsin x$，$\arctan x$ 与 $P_n(x)$ 或 e^{ax} 作乘、除时（其中 $P_n(x)$ 为 x 的 n 次多项式），优先考虑分部积分法.

例 9.3 计算不定积分 $\int\ln\left(1+\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}\right)dx\ (x>0)$.

令 $\dfrac{1}{(t^2-1)(t+1)}=\dfrac{A}{t-1}+\dfrac{B}{t+1}+\dfrac{D}{(t+1)^2}$，通分后代特值 $t=1$，$t=-1$，$t=0$，分别得 $A=\dfrac{1}{4}$，$D=-\dfrac{1}{2}$，$B=-\dfrac{1}{4}$

【解】令 $\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}=t$，则 $x=\dfrac{1}{t^2-1}$，于是

$$\int\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)dx=\int\ln(1+t)\,d\left(\frac{1}{t^2-1}\right)=\frac{\ln(1+t)}{t^2-1}-\int\frac{1}{t^2-1}\cdot\frac{1}{t+1}dt.$$

又
$$\int\frac{1}{(t^2-1)(t+1)}dt=\frac{1}{4}\int\left[\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}-\frac{2}{(t+1)^2}\right]dt$$
$$=\frac{1}{4}\ln(t-1)-\frac{1}{4}\ln(t+1)+\frac{1}{2(t+1)}+C_1,$$

所以

$$\int \ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)\mathrm{d}x = \frac{\ln(1+t)}{t^2-1}+\frac{1}{4}\ln\frac{t+1}{t-1}-\frac{1}{2(t+1)}+C$$

$$= x\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)+\frac{1}{2}\ln(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})-\frac{\sqrt{x}}{2(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})}+C.$$

例 9.4 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}} =$ ________.

【解】应填 $\arctan\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C$.

令 $x=\tan u$，则 $\mathrm{d}x=\sec^2 u\,\mathrm{d}u$.

$$原式=\int\frac{\mathrm{d}u}{\cos u\cdot(2\tan^2 u+1)}=\int\frac{\cos u\,\mathrm{d}u}{2\sin^2 u+\cos^2 u}$$

$$=\int\frac{\mathrm{d}(\sin u)}{1+\sin^2 u}=\arctan(\sin u)+C$$

$$=\arctan\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C.$$

例 9.5 求不定积分$\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}+\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\mathrm{d}x$.

【解】令 $\mathrm{e}^x=t$，则 $x=\ln t$，$\mathrm{d}x=\dfrac{1}{t}\mathrm{d}t$，于是

$$原式=\int\frac{1}{\sqrt{t+1}+\sqrt{t-1}}\cdot\frac{1}{t}\mathrm{d}t=\int\frac{\sqrt{t+1}-\sqrt{t-1}}{2}\cdot\frac{1}{t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\frac{\sqrt{t+1}-\sqrt{t-1}}{t}\mathrm{d}t.$$

对$\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\frac{\sqrt{t+1}}{t}\mathrm{d}t$，令$\sqrt{t+1}=u$，则

$$\frac{1}{2}\int\frac{\sqrt{t+1}}{t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\frac{u}{u^2-1}\cdot 2u\,\mathrm{d}u=\int\frac{u^2}{u^2-1}\mathrm{d}u$$

$$=\int\frac{u^2-1+1}{u^2-1}\mathrm{d}u=u+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|+C_1$$

$$=\sqrt{\mathrm{e}^x+1}+\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}-1}{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}+1}+C_1.$$

对$\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\frac{\sqrt{t-1}}{t}\mathrm{d}t$，令$\sqrt{t-1}=v$，同理有$\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\frac{\sqrt{t-1}}{t}\mathrm{d}t=\sqrt{\mathrm{e}^x-1}-\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}+C_2$. 于是

$$原式=\sqrt{\mathrm{e}^x+1}+\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}-1}{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}+1}-\sqrt{\mathrm{e}^x-1}+\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}+C.$$

3. 分部积分法

$$\int u\,\mathrm{d}v=uv-\int v\,\mathrm{d}u.$$

【注】u，v 的选取原则.

反　对　幂　指(三)　三(指)

相对位置在左边的宜选作 u，用来求导；相对位置在右边的宜选作 v，用来积分. 即

① 被积函数为 $P_n(x)e^{kx}$，$P_n(x)\sin ax$，$P_n(x)\cos ax$ 等形式时，一般来说选取 $u=P_n(x)$；

② 被积函数为 $e^{ax}\sin bx$，$e^{ax}\cos bx$ 等形式时，u 可以取其中两因子中的任意一个；

③ 被积函数为 $P_n(x)\ln x$，$P_n(x)\arcsin x$，$P_n(x)\arctan x$ 等形式时，一般分别选取

$u=\ln x$，$u=\arcsin x$，$u=\arctan x$.

例 9.6　$\int e^x\left(\frac{1-x}{1+x^2}\right)^2 dx=$________.

【解】应填 $\frac{e^x}{1+x^2}+C$.

$$\begin{aligned}
&\int e^x\left(\frac{1-x}{1+x^2}\right)^2 dx\\
=&\int e^x\cdot\frac{1+x^2-2x}{(1+x^2)^2}dx=\int e^x\cdot\frac{1}{1+x^2}dx-\int e^x\cdot\frac{2x}{(1+x^2)^2}dx\\
=&\int\frac{e^x}{1+x^2}dx+\int e^x d\left(\frac{1}{1+x^2}\right)=\int\frac{e^x}{1+x^2}dx+\frac{e^x}{1+x^2}-\int\frac{e^x}{1+x^2}dx\\
=&\frac{e^x}{1+x^2}+C.
\end{aligned}$$

【注】分部积分法可能创造出积分再现或积分抵消的情形，是积分中常见的情形.

例 9.7　设 n 为非负整数，则 $\int_0^1 x^2\ln^n x dx=$________.

【解】应填 $\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}n!$.

记

$$\begin{aligned}
a_n&=\int_0^1 x^2\ln^n x\,dx=\int_0^1\ln^n x\,d\left(\frac{1}{3}x^3\right)\\
&=\frac{1}{3}x^3\ln^n x\Big|_0^1-\int_0^1\frac{1}{3}x^3\cdot n\ln^{n-1}x\cdot\frac{1}{x}dx
\end{aligned}$$

$\lim\limits_{x\to0^+}x^\alpha\ln^\beta x=0,\forall\alpha,\beta>0.$

$$=-\frac{n}{3}\int_0^1 x^2\ln^{n-1}x dx=-\frac{n}{3}a_{n-1},n=1,2,\cdots,$$

于是 $a_n=-\frac{n}{3}a_{n-1}=\left(-\frac{n}{3}\right)\left(-\frac{n-1}{3}\right)a_{n-2}=\cdots=\left(-\frac{n}{3}\right)\left(-\frac{n-1}{3}\right)\cdots\left(-\frac{1}{3}\right)a_0$，又 $a_0=\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$，故 $a_n=\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}n!$.

例 9.8　设 n 为正整数，则 $\int_0^\pi x^2\cos nx dx=$________.

【解】应填$(-1)^n\dfrac{2\pi}{n^2}$.

$$\int_0^{\pi}x^2\cos nx\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}x^2\mathrm{d}\left(\frac{\sin nx}{n}\right)=\frac{1}{n}x^2\cdot\sin nx\Big|_0^{\pi}-\frac{2}{n}\int_0^{\pi}x\sin nx\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{2}{n}\int_0^{\pi}x\,\mathrm{d}\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)=-\frac{2}{n}\left[x\cdot\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{2\pi}{n^2}(-1)^n-\frac{2}{n^2}\int_0^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2\pi}{n^2}(-1)^n-\frac{2}{n^2}\cdot\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi}$$

$$=(-1)^n\frac{2\pi}{n^2}.$$

【注】亦可用如下表格法：

x^2	$\oplus$ $2x$	$\ominus$ 2	$\oplus$ 0 $\ominus$
$\cos nx$	$\frac{1}{n}\sin nx$	$-\frac{1}{n^2}\cos nx$	$-\frac{1}{n^3}\sin nx$

则

$$\int_0^{\pi}x^2\cos nx\,\mathrm{d}x=x^2\cdot\frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi}+2x\cdot\frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_0^{\pi}-2\cdot\frac{1}{n^3}\sin nx\Big|_0^{\pi}=(-1)^n\frac{2\pi}{n^2}.$$

例 9.9 设 $a_n=\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-x}\sin nx\mathrm{d}x,n=1,2,\cdots$.

(1) 求 a_n 的表达式；

(2) 计算$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{na_n}{1-\mathrm{e}^{-2\pi}}\right)^{n^2}$.

【解】(1) 由表格法：

e^{-x}	$\oplus$ $-\mathrm{e}^{-x}$	$\ominus$ e^{-x} $\oplus$
$\sin nx$	$-\frac{1}{n}\cos nx$	$-\frac{1}{n^2}\sin nx$

得

$$\int\mathrm{e}^{-x}\sin nx\mathrm{d}x=-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\cos nx-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{n^2}\sin nx-\frac{1}{n^2}\int\mathrm{e}^{-x}\sin nx\mathrm{d}x,$$

于是

$$\int\mathrm{e}^{-x}\sin nx\mathrm{d}x\overset{(*)}{=\!=}-\frac{n\mathrm{e}^{-x}}{1+n^2}\left(\cos nx+\frac{1}{n}\sin nx\right)+C.$$

$$a_n=\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-x}\sin nx\mathrm{d}x=-\frac{n\mathrm{e}^{-x}}{1+n^2}\left(\cos nx+\frac{1}{n}\sin nx\right)\Big|_0^{2\pi}$$

$$=-\frac{n}{1+n^2}\mathrm{e}^{-2\pi}+\frac{n}{1+n^2}=\frac{n}{1+n^2}(1-\mathrm{e}^{-2\pi}).$$

(2) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{na_n}{1-e^{-2\pi}}\right)^{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{1+n^2}\right)^{n^2}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}n^2\cdot\frac{n^2-1-n^2}{1+n^2}}=e^{-1}.$$

【注】(*)处亦可直接套用如下公式：

① $$\int e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{\begin{vmatrix}(e^{ax})' & (\sin bx)'\\ e^{ax} & \sin bx\end{vmatrix}}{a^2+b^2}+C=\frac{ae^{ax}\sin bx-be^{ax}\cos bx}{a^2+b^2}+C;$$

② $$\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{\begin{vmatrix}(e^{ax})' & (\cos bx)'\\ e^{ax} & \cos bx\end{vmatrix}}{a^2+b^2}+C=\frac{ae^{ax}\cos bx+be^{ax}\sin bx}{a^2+b^2}+C.$$

于是有 $\int e^{-x}\sin nx\,dx=\dfrac{-e^{-x}\sin nx-ne^{-x}\cos nx}{(-1)^2+n^2}+C.$

4. 有理函数的积分

(1) 定义.

形如 $\int\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx\ (n<m)$ 的积分称为**有理函数的积分**，其中 $P_n(x)$，$Q_m(x)$ 分别是 x 的 n 次多项式和 m 次多项式.

(2) 思想.

若 $Q_m(x)$ 在实数域内可因式分解，则因式分解后再把 $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ 拆成若干项最简有理分式之和.

(3) 方法.

①$Q_m(x)$ 的一次单因式 $(ax+b)$ 产生一项 $\dfrac{A}{ax+b}$.

②$Q_m(x)$ 的 k 重一次因式 $(ax+b)^k$ 产生 k 项，分别为 $\dfrac{A_1}{ax+b},\dfrac{A_2}{(ax+b)^2},\cdots,\dfrac{A_k}{(ax+b)^k}$.

③$Q_m(x)$ 的二次单因式 px^2+qx+r 产生一项 $\dfrac{Ax+B}{px^2+qx+r}$.

④$Q_m(x)$ 的 k 重二次因式 $(px^2+qx+r)^k$ 产生 k 项，分别为

$$\frac{A_1x+B_1}{px^2+qx+r},\frac{A_2x+B_2}{(px^2+qx+r)^2},\cdots,\frac{A_kx+B_k}{(px^2+qx+r)^k}.$$

$q^2-4pr<0$

例 9.10 求 $\displaystyle\int\frac{x+2}{(2x+1)(x^2+x+1)}dx$.

【解】设 $\dfrac{x+2}{(2x+1)(x^2+x+1)}=\dfrac{A}{2x+1}+\dfrac{Bx+D}{x^2+x+1}$，通分后可得

$$x+2=A(x^2+x+1)+(Bx+D)(2x+1),$$

代特值 $x=-\dfrac{1}{2}$，$x=0$，$x=1$，得 $A=2$，$D=0$，$B=-1$，故

$$\text{原式}=\int\left(\frac{2}{2x+1}-\frac{x}{x^2+x+1}\right)dx$$

$$=\ln|2x+1|-\int\frac{x}{x^2+x+1}dx$$

已是最简有理分式，请注意看接下来的积分方法.

$$=\ln|2x+1|-\frac{1}{2}\int\frac{(2x+1)-1}{x^2+x+1}dx$$

分子凑为"k(分母)$'$+常数".

$$=\ln|2x+1|-\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$=\ln|2x+1|-\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

三 定积分的计算

1. 对称区间上的积分问题

若函数 $f(x)$ 在对称区间 $[-a,a](a>0)$ 上连续，则

(1) 当 $f(x)$ 为奇函数时，$\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$；

(2) 当 $f(x)$ 为偶函数时，$\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_{0}^{a}f(x)dx$.

【注】① 上述两式常称为"偶倍奇零".
② 常考"通过平移后"实现"偶倍奇零".

(3) $\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_{0}^{a}[f(x)+f(-x)]dx$.

【注】上述结论的证明：

偶函数

$$\int_{-a}^{a}f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}[f(x)+f(-x)]dx$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\int_{0}^{a}[f(x)+f(-x)]dx$$

$$=\int_{0}^{a}[f(x)+f(-x)]dx.$$

例 9.11 $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^4 x}{1+e^{-x}}dx=$________.

【解】应填 $\frac{3\pi}{16}$.

注意到积分区间关于原点对称，则

$$I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\sin^4 x}{1+e^{-x}}+\frac{\sin^4(-x)}{1+e^{-(-x)}}\right]dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\,dx=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{16}.$$

2. 周期性下的积分问题

设 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数，即 $f(x+T)=f(x)$，则 $\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x$. 更一般地，有 $\int_a^{a+nT} f(x)\mathrm{d}x=n\int_0^T f(x)\mathrm{d}x$.

例 9.12 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(1+\cos^2 x)\mathrm{d}x=$________.

【解】应填 $\frac{3\pi}{2}$.

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(1+\cos^2 x)\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}1\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\cos^2 x\mathrm{d}x=\pi+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\mathrm{d}x$$

$$=\pi+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\mathrm{d}x=\pi+2\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{2}.$$

例 9.13 函数 $F(x)=\int_x^{x+2\pi} f(t)\mathrm{d}t$，其中 $f(t)=\mathrm{e}^{\sin^2 t}(1+\sin^2 t)\cos 2t$，则 $F(x)$(　　).

(A) 为正常数　　(B) 为负常数　　(C) 恒为零　　(D) 不是常数

【解】应选(B).

由于被积函数连续且以 π 为周期(2π 也是周期)，故 $F(x)=F(0)=\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t=2\int_0^{\pi} f(t)\mathrm{d}t$，即 $F(x)$ 为常数. 由于被积函数是变号的，为确定积分值的符号，可通过分部积分转化为被积函数定号的情形，即

$$2\int_0^{\pi} f(t)\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{\sin^2 t}(1+\sin^2 t)\mathrm{d}(\sin 2t)$$

$$=\mathrm{e}^{\sin^2 t}(1+\sin^2 t)\sin 2t\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin 2t\,\mathrm{d}[\mathrm{e}^{\sin^2 t}(1+\sin^2 t)]$$

$$=-\int_0^{\pi}\sin^2 2t\,\mathrm{e}^{\sin^2 t}(2+\sin^2 t)\mathrm{d}t<0,$$

故 $F(x)$ 为负常数.

3. 区间再现下的积分问题

设以下抽象函数均为连续函数.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x. \tag{1}$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_a^b[f(x)+f(a+b-x)]\mathrm{d}x. \tag{2}$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^{\frac{a+b}{2}}[f(x)+f(a+b-x)]\mathrm{d}x. \tag{3}$$

【注】①(1) 的证明：令 $x=a+b-t$，则

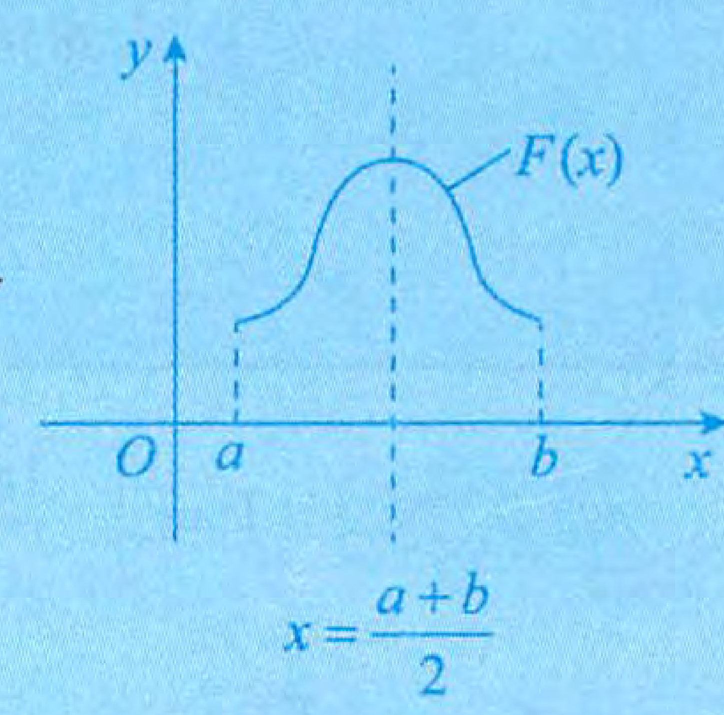
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_b^a f(a+b-t)(-\mathrm{d}t)=\int_a^b f(a+b-t)\mathrm{d}t=\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x.$$

此结论称为**区间再现公式**.

② 由上述结论，等式两边相加，再除以 2，有公式(2)：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_a^b[f(x)+f(a+b-x)]\mathrm{d}x.$$

③ 令 $F(x)=f(x)+f(a+b-x)$，则 $F(a+b-x)=f(a+b-x)+f(x)=F(x)$，故 $F(x)$ 以 $x=\frac{a+b}{2}$ 为对称轴，故又有公式(3)：$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^{\frac{a+b}{2}}[f(x)+f(a+b-x)]\mathrm{d}x.$



$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x. \tag{4}$$

【注】由“公式(2)”，有

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\{xf(\sin x)+(\pi-x)f[\sin(\pi-x)]\}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}[xf(\sin x)+\pi f(\sin x)-xf(\sin x)]\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x. \tag{5}$$

【注】由“公式(3)”，有

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{xf(\sin x)+(\pi-x)f[\sin(\pi-x)]\}\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[xf(\sin x)+\pi f(\sin x)-xf(\sin x)]\mathrm{d}x\\&=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x. \tag{6}$$

【注】由“公式(1)”，有

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x&=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x,\sin x)\mathrm{d}x. \tag{7}$$

【注】由"公式(1)"，有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right),\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x,\sin x)\mathrm{d}x.$$

例 9.14 $I=\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x=$________.

【解】应填$\frac{\pi}{8}\ln 2$.

令 $x=\tan t$，则

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan t)\mathrm{d}t \xlongequal{令 u=\frac{\pi}{4}-t} \int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left[1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-u\right)\right]\mathrm{d}u$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(1+\frac{1-\tan u}{1+\tan u}\right)\mathrm{d}u=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\frac{2}{1+\tan u}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{\pi}{4}\ln 2-I,$$

得 $I=\frac{\pi}{8}\ln 2$.

例 9.15 $\int_0^{\pi} x\sqrt{\cos^2 x-\cos^4 x}\,\mathrm{d}x=$________.

【解】应填$\frac{\pi}{2}$.

$$\int_0^{\pi} x\sqrt{\cos^2 x-\cos^4 x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi} x\sqrt{\cos^2 x\cdot(1-\cos^2 x)}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\pi} x\sqrt{(1-\sin^2 x)\cdot\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$$

$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(1-\sin^2 x)\cdot\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cdot\sin x\mathrm{d}x=\pi\cdot\frac{1}{2}\sin^2 x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}.$$

4. 华里士公式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x$$

$$=\begin{cases}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{3}\cdot 1, & n\text{ 为大于 1 的奇数},\\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, & n\text{ 为正偶数}.\end{cases} \tag{8}$$

$$\int_0^{\pi}\sin^n x\mathrm{d}x=\begin{cases}2\cdot\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{2}{3}\cdot 1, & n\text{ 为大于 1 的奇数},\\ 2\cdot\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\text{ 为正偶数}.\end{cases}\tag{9}$$

$$\int_0^{\pi}\cos^n x\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & n\text{ 为正奇数},\\ 2\cdot\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\text{ 为正偶数}.\end{cases}\tag{10}$$

$$\int_0^{2\pi}\cos^n x\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}\sin^n x\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & n\text{ 为正奇数},\\ 4\cdot\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\text{ 为正偶数}.\end{cases}\tag{11}$$

例 9.16 设 $f(x)$ 为连续函数，$\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(2x)\mathrm{d}x-f(x)=\cos^4 x$，则 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x=$________.

【解】 应填 $\dfrac{3\pi}{4(\pi-4)}$.

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[f(x)+\cos^4 x]\,\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(2x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\\&\xlongequal[2\mathrm{d}x=\mathrm{d}t]{\text{令 }2x=t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\underbrace{\left[\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)\mathrm{d}t\right]}_{\text{常数}}\mathrm{d}x-\frac{3\pi}{16}\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)\mathrm{d}t\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x-\frac{3\pi}{16}\\&=\frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)\mathrm{d}t-\frac{3\pi}{16},\end{aligned}$$

故 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x=\frac{-\frac{3\pi}{16}}{1-\frac{\pi}{4}}=\frac{3\pi}{4(\pi-4)}$.

例 9.17 设数列 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}$，$n=2,3,\cdots$，计算 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^{\ln(1+\mathrm{e}^{2n})}$.

【解】 $a_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}\xlongequal{\text{令 }x=\tan t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2 t}{(\sec^2 t)^n}\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n-2}t\,\mathrm{d}t$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}t\,\mathrm{d}t}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n-2}t\,\mathrm{d}t}=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n-2)!!}{(2n-3)!!}\cdot\frac{2}{\pi}=\frac{2n-1}{2n},$$

于是

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^{\ln(1+\mathrm{e}^{2n})}&=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{\ln(1+\mathrm{e}^{2n})}\\&=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\ln(1+\mathrm{e}^{2n})\cdot\left(-\frac{1}{2n}\right)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(1+\mathrm{e}^{2n})}{\ln\mathrm{e}^{2n}}\cdot\ln\mathrm{e}^{2n}\cdot\left(-\frac{1}{2n}\right)}\end{aligned}$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}2n\cdot\left(-\frac{1}{2n}\right)}=e^{-1}.$$

5. 定积分分部积分法中的"升阶""降阶"问题

例 9.18 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to\infty}t^2\sin\frac{x}{t}\cdot\left[g\left(2x+\frac{1}{t}\right)-g(2x)\right]$，且 $g(x)$ 的一个原函数为 $\ln(x+1)$，求$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

【解】由题设知，$f(x)=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{\sin\frac{x}{t}}{\frac{x}{t}}\cdot x\cdot\dfrac{g\left(2x+\frac{1}{t}\right)-g(2x)}{\frac{1}{t}}$，由于

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\sin\frac{x}{t}}{\frac{x}{t}}=1,\lim_{t\to\infty}\frac{g\left(2x+\frac{1}{t}\right)-g(2x)}{\frac{1}{t}}=g'(2x),$$

故 $f(x)=xg'(2x)$，则

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x&=\int_0^1 xg'(2x)\mathrm{d}x\xlongequal{令 2x=t}\int_0^2\frac{t}{2}g'(t)\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\int_0^2 x\,\mathrm{d}[g(x)]\\&=\frac{1}{4}\left[xg(x)\Big|_0^2-\int_0^2 g(x)\mathrm{d}x\right]=\frac{1}{4}\left[x\cdot\frac{1}{1+x}-\ln(x+1)\right]\Bigg|_0^2\\&=\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}-\ln 3\right)=\frac{1}{6}-\frac{1}{4}\ln 3.\end{aligned}$$

【注】仔细观察解题过程便可发现，已知的是$\int g(x)\mathrm{d}x$，而起点是 $g'(x)$，要用分部积分法，将 $g'(x)$ 变为 $g(x)$，再变为$\int g(x)\mathrm{d}x$，这叫"降阶".

例 9.19 设 $f(x)=\int_0^x e^{-t^2+2t}\mathrm{d}t$，求$\int_0^1(x-1)^2f(x)\mathrm{d}x$.

【解】由题设知，$f(0)=0$，$f'(x)=e^{-x^2+2x}$，则

$$\begin{aligned}\int_0^1(x-1)^2f(x)\mathrm{d}x&=\frac{1}{3}(x-1)^3f(x)\Big|_0^1-\frac{1}{3}\int_0^1(x-1)^3f'(x)\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{3}\int_0^1(x-1)^3e^{-x^2+2x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{6}\int_0^1(x-1)^2e^{-(x-1)^2+1}\mathrm{d}[(x-1)^2]\\&\xlongequal{令 t=(x-1)^2}-\frac{e}{6}\int_1^0 te^{-t}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{6}(e-2).\end{aligned}$$

【注】知道了 $f'(x)$ 的表达式，便想到用分部积分法，使得$\int_0^1(x-1)^2f(x)\mathrm{d}x$ 中的 $f(x)$ 作为 u（求导）的身份，出现 $f'(x)$，这叫"升阶".

6. 分段函数的定积分

例 9.20 设 $f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x\geqslant 0,\\ 1+x^2, & x<0,\end{cases}$ 则 $\int_{-2}^{2} f(x-1)\mathrm{d}x=$ ________.

【解】应填 $13-\mathrm{e}^{-1}$.

在积分中作变量代换，令 $x-1=t$，有

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2} f(x-1)\mathrm{d}x&=\int_{-3}^{1} f(t)\mathrm{d}t=\int_{-3}^{0} f(t)\mathrm{d}t+\int_{0}^{1} f(t)\mathrm{d}t\\&=\int_{-3}^{0}(1+t^2)\mathrm{d}t+\int_{0}^{1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\\&=\left(t+\frac{t^3}{3}\right)\Big|_{-3}^{0}-\mathrm{e}^{-t}\Big|_{0}^{1}=13-\mathrm{e}^{-1}.\end{aligned}$$

例 9.21 $\int_{0}^{\ln 4}[\mathrm{e}^x]\mathrm{d}x=$ ________.（$[\mathrm{e}^x]$ 表示不超过 e^x 的最大整数）

【解】应填 $5\ln 2-\ln 3$.

当 $0\leqslant x\leqslant \ln 4$ 时，有 $1\leqslant \mathrm{e}^x\leqslant 4$，以 $\mathrm{e}^x=1,2,3,4$ 来划分$[0,\ln 4]$，则

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\int_{0}^{\ln 2}[\mathrm{e}^x]\mathrm{d}x+\int_{\ln 2}^{\ln 3}[\mathrm{e}^x]\mathrm{d}x+\int_{\ln 3}^{\ln 4}[\mathrm{e}^x]\mathrm{d}x\\&=\int_{0}^{\ln 2}1\mathrm{d}x+\int_{\ln 2}^{\ln 3}2\mathrm{d}x+\int_{\ln 3}^{\ln 4}3\mathrm{d}x\\&=\ln 2+2(\ln 3-\ln 2)+3(\ln 4-\ln 3)\\&=5\ln 2-\ln 3.\end{aligned}$$

四 变限积分的计算

1. 求分段函数的变限积分

例 9.22 设 $f(x)=\begin{cases}2x+\dfrac{3}{2}x^2, & -1\leqslant x<0,\\ \dfrac{x\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$ 求函数 $F(x)=\int_{-1}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ 的表达式.

【解】当 $x\in[-1,0)$ 时，

$$F(x)=\int_{-1}^{x} f(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^{x}\left(2t+\frac{3}{2}t^2\right)\mathrm{d}t=\left(t^2+\frac{1}{2}t^3\right)\Big|_{-1}^{x}=\frac{1}{2}x^3+x^2-\frac{1}{2};$$

当 $x\in[0,1]$ 时，

$$\begin{aligned}F(x)&=\int_{-1}^{x} f(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^{0} f(t)\mathrm{d}t+\int_{0}^{x} f(t)\mathrm{d}t=\left(t^2+\frac{1}{2}t^3\right)\Big|_{-1}^{0}+\int_{0}^{x}\frac{t\mathrm{e}^t}{(\mathrm{e}^t+1)^2}\mathrm{d}t\\&=-\frac{1}{2}+\int_{0}^{x}(-t)\mathrm{d}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^t+1}\right)=-\frac{1}{2}-\frac{t}{\mathrm{e}^t+1}\Big|_{0}^{x}+\int_{0}^{x}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t+1}\end{aligned}$$

$$=-\frac{1}{2}-\frac{x}{e^x+1}+\int_0^x \frac{d(e^t)}{e^t(e^t+1)}=-\frac{1}{2}-\frac{x}{e^x+1}+\int_0^x\left(\frac{1}{e^t}-\frac{1}{e^t+1}\right)d(e^t)$$

$$=-\frac{1}{2}-\frac{x}{e^x+1}+\ln\frac{e^t}{e^t+1}\Big|_0^x=-\frac{1}{2}-\frac{x}{e^x+1}+\ln\frac{e^x}{e^x+1}-\ln\frac{1}{2},$$

所以
$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{2}+x^2-\dfrac{1}{2}, & -1\leqslant x<0,\\ \ln\dfrac{e^x}{e^x+1}-\dfrac{x}{e^x+1}+\ln 2-\dfrac{1}{2}, & 0\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

2. 直接求导型

可直接用下述求导公式(Ⅰ),(Ⅱ)求导的积分称为**直接求导型**.

(Ⅰ) $\left[\int_a^{\varphi(x)} f(t)dt\right]_x' = f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)$.

(Ⅱ) $\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)dt\right]_x' = f[\varphi_2(x)]\cdot\varphi_2'(x)-f[\varphi_1(x)]\varphi_1'(x)$.

例 9.23 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内可导, $f(0)=0$, 且其反函数为 $g(x)$. 若 $\int_0^{f(x)} g(t)dt = x^2e^x$, 求 $f(x)$.

【解】等式两边对 x 求导,得 $g[f(x)]f'(x)=2xe^x+x^2e^x$, 而 $g[f(x)]=x$, 故

$$xf'(x)=2xe^x+x^2e^x.$$

当 $x\neq 0$ 时, $f'(x)=2e^x+xe^x$, 两边对 x 积分得 $f(x)=(x+1)e^x+C$.

由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处右连续,故由

$$0=f(0)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}[(x+1)e^x+C],$$

得 $C=-1$, 因此 $f(x)=(x+1)e^x-1(x\geqslant 0)$.

【注】部分考生对 $g[f(x)]=x$ 这一反函数的基本性质不熟悉,导致后续无法化简;积分方程往往都是通过求导转化为微分方程再去求解. 另外,本题利用初始条件确定 C 的值的过程值得体会.

3. 换元求导型

先用换元法处理,再用求导公式(Ⅰ),(Ⅱ)求导的积分称为**换元求导型**.

例 9.24 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内可导, $f(0)=0$, 其反函数为 $g(x)$. 若

$$\int_x^{x+f(x)} g(t-x)dt = x^2\ln(1+x),$$

求 $f(x)$.

【解】令 $t-x=u$, 则 $dt=du$, 于是

$$\int_x^{x+f(x)} g(t-x)dt=\int_0^{f(x)} g(u)du=x^2\ln(1+x).$$

将等式$\int_0^{f(x)} g(u)\mathrm{d}u = x^2\ln(1+x)$两边对$x$求导，同时注意到$g[f(x)]=x$，于是有

$$xf'(x)=2x\ln(1+x)+\frac{x^2}{1+x}.$$

当$x\neq 0$时，有$f'(x)=2\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}$，两边对$x$积分得

$$\begin{aligned}f(x)&=\int\left[2\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}\right]\mathrm{d}x\\&=2[\ln(1+x)+x\ln(1+x)-x]+x-\ln(1+x)+C\\&=\ln(1+x)+2x\ln(1+x)-x+C.\end{aligned}$$

可知$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=C$，由于$f(x)$在$x=0$处右连续，又$f(0)=0$，解得$C=0$，于是

$$f(x)=\ln(1+x)+2x\ln(1+x)-x\ (x\geqslant 0).$$

例 9.25 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内非负连续，且

$$\int_0^x tf(x^2)f(x^2-t^2)\mathrm{d}t=\sin^2(x^2),$$

求$f(x)$在$[0,\pi]$上的平均值.

【解】令$x^2-t^2=u$，则

$$\begin{aligned}\int_0^x tf(x^2)f(x^2-t^2)\mathrm{d}t&=f(x^2)\left[-\frac{1}{2}\int_{x^2}^0 f(u)\mathrm{d}u\right]\\&=\frac{1}{2}f(x^2)\int_0^{x^2} f(u)\mathrm{d}u,\end{aligned}$$

于是有$f(x^2)\int_0^{x^2} f(u)\mathrm{d}u=2\sin^2(x^2)$，再令$x^2=v$，有

$$f(v)\int_0^v f(u)\mathrm{d}u=2\sin^2 v.$$

又令$F(v)=\int_0^v f(u)\mathrm{d}u$，于是

$$F(v)F'(v)=2\sin^2 v,$$

上式在$[0,\pi]$上对v作积分，有

$$\int_0^\pi F(v)F'(v)\mathrm{d}v=\int_0^\pi F(v)\mathrm{d}[F(v)]=\frac{1}{2}F^2(v)\Big|_0^\pi=2\int_0^\pi \sin^2 v\mathrm{d}v=\pi,$$

故$F(\pi)=\sqrt{2\pi}$，则$f(x)$在$[0,\pi]$上的平均值为$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

【注】(1) 连续函数$f(x)$的一个原函数表达形式常写为$F(x)=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$，考生须熟知. 见到$f(x)\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$，一般令$F(x)=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$，这样便有$F'(x)=f(x)$，即得$F'(x)F(x)$，于是$\int F'(x)F(x)\mathrm{d}x=\int F(x)\mathrm{d}[F(x)]=\frac{1}{2}F^2(x)+C$，此思路非常重要.

(2) 平均值是考研重点.

4. 拆分求导型

需先拆分区间化成若干个积分，再用求导公式（Ⅰ），（Ⅱ）求导的积分（往往带绝对值）称为**拆分求导型**.

例 9.26 设 $|x|\leqslant 1$，求积分 $I(x)=\int_{-1}^{1}|t-x|\mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t$ 的最大值.

积分变量 t 与求导变量 x 的取值在同一区间，不需要分情况讨论.

$-1\quad x\quad 1$

$-1\quad t\quad 1$

【解】由题设知，$I(x)=\int_{-1}^{1}|t-x|\mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t$

$$=\int_{-1}^{x}(x-t)\mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t+\int_{x}^{1}(t-x)\mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t$$

$$=x\int_{-1}^{x}\mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t-\int_{-1}^{x}t\mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t+\int_{x}^{1}t\mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t-x\int_{x}^{1}\mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t,$$

$$I'(x)=\int_{-1}^{x}\mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t+x\mathrm{e}^{2x}-x\mathrm{e}^{2x}-x\mathrm{e}^{2x}-\int_{x}^{1}\mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t+x\mathrm{e}^{2x}=\int_{-1}^{x}\mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t-\int_{x}^{1}\mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t$$

$$=\mathrm{e}^{2x}-\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{2}+\mathrm{e}^{-2})\xlongequal{\text{令}}0,$$

得 $x=\frac{1}{2}\ln\frac{\mathrm{e}^{2}+\mathrm{e}^{-2}}{2}$ 为唯一驻点，$I''(x)=2\mathrm{e}^{2x}>0$，故 $x=\frac{1}{2}\ln\frac{\mathrm{e}^{2}+\mathrm{e}^{-2}}{2}$ 为 $I(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的最小值，最大值只能在端点 $x=-1$，$x=1$ 处取得. 又

$$I(-1)=\frac{3}{4}\mathrm{e}^{2}+\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2},\ I(1)=\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2}-\frac{5}{4}\mathrm{e}^{-2},$$

所以 $I_{\max}=I(-1)=\frac{3}{4}\mathrm{e}^{2}+\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2}$.

例 9.27 设函数 $f(x)=\int_{0}^{1}|t^{2}-x^{2}|\mathrm{d}t\ (x>0)$，求 $f'(x)$，并求 $f(x)$ 的最小值.

【解】当 $0<x\leqslant 1$ 时，$f(x)=\int_{0}^{x}|t^{2}-x^{2}|\mathrm{d}t+\int_{x}^{1}|t^{2}-x^{2}|\mathrm{d}t$

$$=\int_{0}^{x}(x^{2}-t^{2})\mathrm{d}t+\int_{x}^{1}(t^{2}-x^{2})\mathrm{d}t=\frac{4}{3}x^{3}-x^{2}+\frac{1}{3};$$

当 $x>1$ 时，
$$f(x)=\int_{0}^{1}(x^{2}-t^{2})\mathrm{d}t=x^{2}-\frac{1}{3}.$$

积分变量 t 与求导变量 x 的取值不在同一区间，需要分情况讨论.

$0\quad t\quad 1$

$0\quad x\quad +\infty$

所以
$$f(x)=\begin{cases}\frac{4}{3}x^{3}-x^{2}+\frac{1}{3}, & 0<x\leqslant 1,\\ x^{2}-\frac{1}{3}, & x>1,\end{cases}$$

而
$$f'_{-}(1)=\lim_{x\to 1^{-}}\frac{\frac{4}{3}x^{3}-x^{2}+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}}{x-1}=2,\ f'_{+}(1)=\lim_{x\to 1^{+}}\frac{x^{2}-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}}{x-1}=2,$$

故
$$f'(x)=\begin{cases}4x^{2}-2x, & 0<x\leqslant 1,\\ 2x, & x>1.\end{cases}$$

由 $f'(x)=0$ 得唯一驻点 $x=\frac{1}{2}$，又 $f''\left(\frac{1}{2}\right)>0$，从而 $x=\frac{1}{2}$ 为 $f(x)$ 的最小值点，最小值

为 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$.

5. 换序型

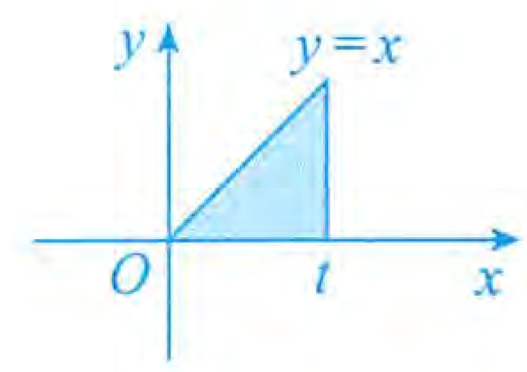
积分是一种累次积分(即先算里面一层积分，再算外面一层积分)，一般里面一层积分不易处理，故化为二重积分再交换积分次序，称这种类型的积分为**换序型**.

例 9.28 极限 $\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{1}{t^5}\int_0^t \mathrm{d}y\int_y^t \frac{\sin(xy)^2}{x}\mathrm{d}x=$ ________.

【解】 应填 $\frac{1}{15}$.

将二重积分交换积分次序，得

$$\int_0^t \mathrm{d}y\int_y^t \frac{\sin(xy)^2}{x}\mathrm{d}x=\int_0^t \frac{1}{x}\mathrm{d}x\int_0^x \sin(xy)^2\mathrm{d}y.$$



记 $\int_0^x \sin(xy)^2\mathrm{d}y=f(x)$，则

$$\text{原极限}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\int_0^t \frac{1}{x}f(x)\mathrm{d}x}{t^5}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\frac{1}{t}f(t)}{5t^4}$$

$ty=u$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)}{5t^5}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\int_0^t \sin(ty)^2\mathrm{d}y}{5t^5}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\frac{1}{t}\int_0^{t^2}\sin u^2\mathrm{d}u}{5t^5}$$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{\int_0^{t^2}\sin u^2\mathrm{d}u}{5t^6}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\sin t^4\cdot 2t}{30t^5}=\frac{1}{15}.$$

五 反常积分的计算

在收敛的条件下.

① $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=F(+\infty)-F(a)$，其中 $F(+\infty)$ 是指 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$.

② 若 a 为瑕点，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$，其中 $F(a)$ 是指 $\lim\limits_{x\to a^+}F(x)$.

③ 换元后，有可能实现反常积分与定积分的相互转化.

例 9.29 求 $\int_0^1 \frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

【解】 由于 $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}=+\infty$，故 $\int_0^1 \frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$ 是反常积分.

令 $\arcsin x=t$，则 $x=\sin t$，$t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$，则

换元，将反常积分转化为定积分．

$$\int_0^1 \frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t\sin^2 t}{\cos t}\cos t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{t}{2} - \frac{t\cos 2t}{2}\right)\mathrm{d}t = \frac{t^2}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\,\mathrm{d}(\sin 2t)$$

$$= \frac{\pi^2}{16} - \frac{t\sin 2t}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{8}\cos 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4}.$$

例 9.30 求 $\int_0^{+\infty} \frac{(1+2t^2)t^2}{(1+t^2)^3}\mathrm{d}t$.

【解】 令 $t=\tan u$，则

$$\text{原式} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sec^2 u + \tan^2 u)\tan^2 u}{\sec^6 u}\mathrm{d}(\tan u)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 u\tan^2 u + \tan^4 u}{\sec^4 u}\mathrm{d}u$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 u + \sin^4 u)\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{7\pi}{16}.$$