第15讲 微分方程

知识结构

- 一阶微分方程的求解
  - 能写成 $y'=f(x)\cdot g(y)$
  - 能写成 $y'=f(ax+by+c)$
  - 能写成 $y'=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$
  - 能写成 $\dfrac{1}{y'}=f\left(\dfrac{x}{y}\right)$
  - 能写成 $y'+p(x)y=q(x)$
  - 能写成 $y'+p(x)y=q(x)y^n(n\neq 0,1)$(伯努利方程)(仅数学一)
- 二阶可降阶微分方程的求解(仅数学一、数学二)
  - 能写成 $y''=f(x,y')$
  - 能写成 $y''=f(y,y')$
- 高阶常系数线性微分方程的求解
  - 能写成 $y''+py'+qy=f(x)$
  - 能写成 $y''+py'+qy=f_1(x)+f_2(x)$
  - 能写成 $x^2y''+pxy'+qy=f(x)$(欧拉方程)(仅数学一)
  - n 阶常系数齐次线性微分方程的解
- 用换元法求解微分方程
  - 用求导公式逆用来换元
  - 用自变量、因变量或 x,y 地位互换来换元
- 应用题
  - 用极限、导数或积分等式建方程
  - 用几何应用建方程
    - 用曲线切线斜率
    - 用两曲线 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公切线斜率
    - 用截距
    - 用面积
    - 用体积
    - 用平均值
    - 用弧长(仅数学一、数学二)
    - 用侧面积(仅数学一、数学二)
    - 用曲率(仅数学一、数学二)
    - 用形心(仅数学一、数学二)
  - 用变化率建方程
- 差分方程(仅数学三)
  - 齐次差分方程的通解
  - 非齐次差分方程的解

含有未知函数 $y=y(x)$ 的导数或微分的方程叫**微分方程**.

一 一阶微分方程的求解

若是“y'”或“$\mathrm{d}y=\cdots\mathrm{d}x$”，则

1. 可分离变量型(或可换元化为它)

① 能写成 $y'=f(x)\cdot g(y)$.

分离变量写成 $\dfrac{\mathrm{d}y}{g(y)}=f(x)\mathrm{d}x$，两边同时积分 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=\int f(x)\mathrm{d}x$.

② 能写成 $y'=f(ax+by+c)$.

令 $u=ax+by+c$，则 $u'=a+bf(u)$，分离变量写成 $\dfrac{\mathrm{d}u}{a+bf(u)}=\mathrm{d}x$，两边同时积分 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}u}{a+bf(u)}=\int\mathrm{d}x$.

2. 齐次型

① 能写成 $y'=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

令 $\dfrac{y}{x}=u$，换元后分离变量，即 $y=ux$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$，原方程化为 $x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u=f(u)$，$\dfrac{\mathrm{d}u}{f(u)-u}=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$，两边同时积分 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}u}{f(u)-u}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}$.

② 能写成 $\dfrac{1}{y'}=f\left(\dfrac{x}{y}\right)$.

令 $\dfrac{x}{y}=u$，换元后分离变量，即 $x=uy$，$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=u+y\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}$，原方程化为 $y\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}+u=f(u)$，$\dfrac{\mathrm{d}u}{f(u)-u}=\dfrac{\mathrm{d}y}{y}$，两边同时积分 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}u}{f(u)-u}=\int\frac{\mathrm{d}y}{y}$.

3. 一阶线性型(或可换元化为它)

① 能写成 $y'+p(x)y=q(x)$，则

$$y=\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left[\int\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\cdot q(x)\mathrm{d}x+C\right].$$

【注】由于 $\int p(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$ 均应理解为某一不含任意常数的原函数，故公式法亦可写成 $y=\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x}p(t)\mathrm{d}t}\left[\int_{x_0}^{x}q(t)\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{t}p(s)\mathrm{d}s}\mathrm{d}t+C\right]$，这里的 x_0 在题设未提出定值要求时，可按方便解题的原则来取. 此写法在研究解的性质时颇为有用.

② 能写成 $y' + p(x)y = q(x)y^n (n \neq 0,1)$(伯努利方程)(仅数学一).

a. 先变形为 $y^{-n} \cdot y' + p(x)y^{1-n} = q(x)$；

b. 令 $z = y^{1-n}$，得 $\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$，则 $\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx} + p(x)z = q(x)$；

c. 解此一阶线性微分方程即可.

例 15.1 微分方程 $x + yy' = y - xy'$ 的通解为________.

【解】应填 $\arctan\frac{y}{x} + \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) = C$，其中 C 为任意常数.

由题中所给的微分方程，可得

$$y' = \frac{y-x}{y+x} = \frac{\frac{y}{x}-1}{\frac{y}{x}+1},$$

令 $\frac{y}{x} = u$，则 $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$，代入上述方程并分离变量得

$$\frac{1+u}{1+u^2}du = -\frac{1}{x}dx,$$

两边积分得 $$\arctan u + \frac{1}{2}\ln(1+u^2) = -\ln|x| + C,$$

则微分方程的通解为 $\arctan\frac{y}{x} + \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) = C$，其中 C 为任意常数.

例 15.2 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续且有水平渐近线 $y = b \neq 0$，则(　　).

(A) 当 $a > 0$ 时，$y' + ay = f(x)$ 的任意解都满足 $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = \frac{b}{a}$

(B) 当 $a > 0$ 时，$y' + ay = f(x)$ 的任意解都满足 $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = \frac{a}{b}$

(C) 当 $a < 0$ 时，$y' + ay = f(x)$ 的任意解都满足 $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = \frac{b}{a}$

(D) 当 $a < 0$ 时，$y' + ay = f(x)$ 的任意解都满足 $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = \frac{a}{b}$

【解】应选(A).

$y' + ay = f(x)$ 的通解公式为 $y(x) = e^{-ax}\left[\int_0^x e^{at}f(t)dt + C\right]$，$C$ 为任意常数.

当 $a > 0$ 时，

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x e^{at}f(t)dt + C}{e^{ax}} \xlongequal{\text{洛必达法则}} \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{ax}f(x)}{ae^{ax}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{a} = \frac{b}{a}.$$

当 $a < 0$ 时，在通解公式中令 $C = -\int_0^{+\infty} e^{at}f(t)dt$，则

$$y_0(x)=e^{-ax}\left[\int_0^x e^{at}f(t)dt-\int_0^{+\infty}e^{at}f(t)dt\right]$$
$$=-e^{-ax}\int_x^{+\infty}e^{at}f(t)dt,$$

$$\lim_{x\to+\infty}y_0(x)=-\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_x^{+\infty}e^{at}f(t)dt}{e^{ax}}\xlongequal{\text{洛必达法则}}-\lim_{x\to+\infty}\frac{-e^{ax}f(x)}{ae^{ax}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{a}=\frac{b}{a}.$$

若 $C\neq-\int_0^{+\infty}e^{at}f(t)dt$，令 $C=-\int_0^{+\infty}e^{at}f(t)dt+k,k\neq0$，则

$$y(x)=\frac{-\int_x^{+\infty}e^{at}f(t)dt+k}{e^{ax}},$$

$$\lim_{x\to+\infty}y(x)\xlongequal{(*)}\lim_{x\to+\infty}\frac{-\int_x^{+\infty}e^{at}f(t)dt}{e^{ax}}+\lim_{x\to+\infty}\frac{k}{e^{ax}}=\frac{b}{a}+\infty=\infty.$$

综上所述，当 $a>0$ 时，任意解均满足 $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=\dfrac{b}{a}$；

当 $a<0$ 时，只有一个解 $y_0(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=\dfrac{b}{a}$. 选(A).

【注】(*)处不可以直接使用洛必达法则，因为极限不是“$\dfrac{0}{0}$”型.

例 15.3 (仅数学一)求微分方程 $y'\cos y=(1+\cos x\sin y)\sin y$ 的通解.

【分析】作适当代换 $z=\sin y$ 便可化为伯努利方程，解之.

【解】令 $z=\sin y$，则 $\dfrac{dz}{dx}=\cos y\dfrac{dy}{dx}$.

代入原方程，得伯努利方程 $\dfrac{dz}{dx}-z=z^2\cos x$，两边同时除以 z^2 得 $z^{-2}\dfrac{dz}{dx}-z^{-1}=\cos x$.

再令 $z^{-1}=u$，则 $z^{-2}\dfrac{dz}{dx}=-\dfrac{du}{dx}$，代入上述方程，得 $\dfrac{du}{dx}+u=-\cos x$.

解此一阶线性微分方程，得

$$u=e^{-\int dx}\left(-\int\cos x\cdot e^{\int dx}dx+C_1\right)=-\frac{1}{2}(\cos x+\sin x)+C_1e^{-x},$$

将 $u=\dfrac{1}{z}$，$z=\sin y$ 代入上式，得 $\dfrac{1}{\sin y}=-\dfrac{1}{2}(\cos x+\sin x)+C_1e^{-x}$.

所以原方程的通解为 $\dfrac{2}{\sin y}+\cos x+\sin x=Ce^{-x}$，其中 C 为任意常数.

二 二阶可降阶微分方程的求解(仅数学一、数学二)

若是“y''”，则

1. 能写成 $y''=f(x,y')$

① 缺 y，令 $y'=p$，$y''=p'$，则原方程变为一阶方程 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=f(x,p)$；

$p=p(x)$

② 若求得其通解为 $p=\varphi(x,C_1)$，即 $y'=\varphi(x,C_1)$，则原方程的通解为

$$y=\int\varphi(x,C_1)\mathrm{d}x+C_2.$$

2. 能写成 $y''=f(y,y')$

① 缺 x，令 $y'=p$，$y''=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\cdot p$，则原方程变为一阶方程 $p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=f(y,p)$；

$p=p(y)$

② 若求得其通解为 $p=\varphi(y,C_1)$，则由 $p=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 得 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi(y,C_1)$，分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y,C_1)}=\mathrm{d}x;$$

③ 两边积分得 $\int\frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y,C_1)}=x+C_2$，即可求得原方程的通解.

例 15.4 求微分方程 $y''[x+(y')^2]=y'$ 满足初始条件 $y(1)=y'(1)=1$ 的特解.

【解】所给方程缺 y，令 $y'=p$，则 $y''=p'$，原方程化为

$$p'(x+p^2)=p,$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}(x+p^2)=p,$$

$$p\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p}=x+p^2,$$

即

$$x'-\frac{1}{p}x=p,$$

由通解公式得

$$x=\mathrm{e}^{\int\frac{1}{p}\mathrm{d}p}\left(\int\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{p}\mathrm{d}p}\cdot p\mathrm{d}p+C_1\right)=p(p+C_1)=p^2+C_1p.$$

由 $p\big|_{x=1}=y'(1)=1$，得 $C_1=0$，故 $p^2=x$.

由 $y'(1)=1$ 知，应取 $p=\sqrt{x}$，即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sqrt{x},$$

解得 $y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C_2$. 又由 $y(1)=1$，得 $C_2=\frac{1}{3}$，故所求特解为

$$y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{3}.$$

【注】方程 $p'(x+p^2)=p$ 亦可用全微分法来做，移项可得

$$p\,dx - x\,dp = p^2\,dp,$$

即

$$\frac{p\,dx - x\,dp}{p^2} = dp,$$

$$d\left(\frac{x}{p}\right) = dp,$$

于是有 $\frac{x}{p} = p + C_1$.

例 15.5 求微分方程 $2y^2y''=[1+(y')^2]^2(x\geqslant 1)$ 满足 $y\Big|_{x=3}=2,y'\Big|_{x=3}=1$ 的特解.

【解】这是缺 x 的二阶微分方程，令 $y'=p,y''=\frac{dp}{dx}=p\frac{dp}{dy}$，所给方程化为

$$2y^2p\frac{dp}{dy}=(1+p^2)^2,$$

分离变量，得

$$\frac{2p\,dp}{(1+p^2)^2}=\frac{dy}{y^2},$$

两边积分得

$$\frac{1}{1+p^2}=\frac{1}{y}+C_1=\frac{1+C_1y}{y},$$

$$1+p^2=\frac{y}{1+C_1y},p^2=\frac{(1-C_1)y-1}{1+C_1y}.$$

初始条件为 $y\Big|_{x=3}=2,p\Big|_{x=3}=y'\Big|_{x=3}=1$. 将 $y=2,p=1$ 代入，得

$$1=\frac{2(1-C_1)-1}{1+2C_1},$$

所以 $C_1=0,p^2=y-1$，则

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{y-1},$$

再分离变量，得

$$\frac{dy}{\sqrt{y-1}}=dx,2\sqrt{y-1}=x+C_2.$$

以 $x=3,y=2$ 代入得 $C_2=-1,2\sqrt{y-1}=x-1(x\geqslant 1)$，所以

$$y=\frac{1}{4}(x-1)^2+1(x\geqslant 1).$$

三 高阶常系数线性微分方程的求解

1. 能写成 $y''+py'+qy=f(x)$

$$\left.\begin{cases}\text{写 } \lambda^2+p\lambda+q=0 \Rightarrow \lambda_1,\lambda_2 \Rightarrow \text{写齐次方程的通解,} \\ \text{设特解 } y^* \Rightarrow \text{代回方程,求待定系数} \Rightarrow \text{特解}\end{cases}\right\} \Rightarrow \text{写出通解.}$$

2. 能写成 $y''+py'+qy=f_1(x)+f_2(x)$

$$\begin{cases}\text{写 } \lambda^2+p\lambda+q=0 \Rightarrow \text{齐次方程的通解,} \\ \text{拆自由项}\begin{cases} y''+py'+qy=f_1(x),\text{写特解 } y_1^*, \\ y''+py'+qy=f_2(x),\text{写特解 } y_2^* \end{cases} \Rightarrow y_1^*+y_2^* \text{ 为特解}\end{cases} \Rightarrow \text{写出通解.}$$

【注】(1) 齐次线性微分方程的通解.

① 若 $p^2-4q>0$，设 λ_1,λ_2 是特征方程的两个不相等的实根，即 $\lambda_1\neq\lambda_2$，可得其通解为

$$y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}.$$

② 若 $p^2-4q=0$，设 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ 是特征方程的两个相等的实根，即二重根，可得其通解为

$$y=(C_1+C_2x)e^{\lambda x}.$$

③ 若 $p^2-4q<0$，设 $\alpha\pm\beta i$ 是特征方程的一对共轭复根，可得其通解为

$$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x).$$

(2) 非齐次线性微分方程的特解.

对于 $y''+py'+qy=f(x)$，考研要求会解以下两种情况：

① 当自由项 $f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}$ 时，特解要设为 $y^*=e^{\alpha x}Q_n(x)x^k$，其中

$$\begin{cases} e^{\alpha x} \text{ 照抄,} \\ Q_n(x) \text{ 为 } x \text{ 的 } n \text{ 次一般多项式,} \\ k=\begin{cases}0, & \alpha\neq\lambda_1,\alpha\neq\lambda_2, \\ 1, & \alpha=\lambda_1 \text{ 或 } \alpha=\lambda_2,\lambda_1\neq\lambda_2, \\ 2, & \alpha=\lambda_1=\lambda_2.\end{cases}\end{cases}$$

② 当自由项 $f(x)=e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x+P_n(x)\sin\beta x]$ 时，特解要设为

$$y^*=e^{\alpha x}[Q_l^{(1)}(x)\cos\beta x+Q_l^{(2)}(x)\sin\beta x]x^k,$$

$$\text{其中}\begin{cases} e^{\alpha x} \text{ 照抄,} \\ l=\max\{m,n\},Q_l^{(1)}(x),Q_l^{(2)}(x) \text{ 分别为 } x \text{ 的两个不同的 } l \text{ 次一般多项式,} \\ k=\begin{cases}0, & \alpha\pm\beta i \text{ 不是特征根,} \\ 1, & \alpha\pm\beta i \text{ 是特征根.}\end{cases}\end{cases}$$

(3) 微分算子法.

① 算子记号.

约定：$D=\frac{d}{dx}$，$Dy=\frac{dy}{dx}$，$D^2=\frac{d^2}{dx^2}$，$D^2y=\frac{d^2y}{dx^2}$，于是微分方程 $y''+py'+qy=f(x)$ 即可写成 $(D^2+pD+q)y=f(x)$，进一步记 $D^2+pD+q=F(D)$，称为算子多项式，它满足普通多项式的运算规则，如因式分解等，则上述微分方程即可写成 $F(D)y=f(x)$，此时它的一个特解为 $y^*=\frac{1}{F(D)}f(x)$.

② 算子性质.

约定："D" 表示求导，如 $D\sin x=\cos x$. "$\frac{1}{D}$" 表示积分，如 $\frac{1}{D}\sin x=-\cos x$（取 $C=0$）.

a. $\frac{1}{F(D)}e^{\alpha x}$ 型.

若 $F(D)\Big|_{D=\alpha}\neq 0$，有 $y^*=\frac{1}{F(D)}e^{\alpha x}=\frac{1}{F(D)\Big|_{D=\alpha}}e^{\alpha x}$.

若 $F(D)\Big|_{D=\alpha}=0$，而 $F'(D)\Big|_{D=\alpha}\neq 0$，有 $y^*=\frac{1}{F(D)}e^{\alpha x}=x\frac{1}{F'(D)\Big|_{D=\alpha}}e^{\alpha x}$.

若 $F(D)\Big|_{D=\alpha}=0$，$F'(D)\Big|_{D=\alpha}=0$，而 $F''(D)\Big|_{D=\alpha}\neq 0$，有

$$y^*=\frac{1}{F(D)}e^{\alpha x}=x^2\frac{1}{F''(D)\Big|_{D=\alpha}}e^{\alpha x}.$$

注例 1 已知 $y''+y'-2y=2$，求 y^*.

解 $y^*=\frac{1}{D^2+D-2}2e^{0x}$，由 $(D^2+D-2)\Big|_{D=0}\neq 0$，得

$$y^*=\frac{1}{(D^2+D-2)\Big|_{D=0}}2e^{0x}=\frac{1}{-2}\cdot 2=-1.$$

注例 2 已知 $y''+y'-2y=e^x$，求 y^*.

解 $y^*=\frac{1}{D^2+D-2}e^x$，由 $(D^2+D-2)\Big|_{D=1}=0$，$(D^2+D-2)'\Big|_{D=1}\neq 0$，得

$$y^*=x\frac{1}{(D^2+D-2)'\Big|_{D=1}}e^x=x\cdot\frac{1}{3}e^x=\frac{1}{3}xe^x.$$

注例 3 已知 $y''-2y'+y=e^x$，求 y^*.

解 $y^*=\frac{1}{D^2-2D+1}e^x$，由

$$(D^2-2D+1)\Big|_{D=1}=0,(D^2-2D+1)'\Big|_{D=1}=0,(D^2-2D+1)''\Big|_{D=1}\neq 0,$$

得
$$y^* = x^2 \frac{1}{(\mathrm{D}^2-2\mathrm{D}+1)''\Big|_{\mathrm{D}=1}} \mathrm{e}^x = x^2 \cdot \frac{1}{2}\mathrm{e}^x = \frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^x.$$

b. $\frac{1}{F(\mathrm{D}^2)}\cos\beta x$ 或 $\frac{1}{F(\mathrm{D}^2)}\sin\beta x$ 型（这里要特别约定，$F(\mathrm{D}^2)$ 是 D^2 及常数构成的算子多项式，即 $F(\mathrm{D}^2)=\mathrm{D}^2+q$）.

若 $F(\mathrm{D}^2)\Big|_{\mathrm{D}=\beta\mathrm{i}} \neq 0$，有 $y^* = \frac{1}{F(\mathrm{D}^2)}\cos\beta x = \frac{1}{F(\mathrm{D}^2)\Big|_{\mathrm{D}=\beta\mathrm{i}}}\cos\beta x$，
$$y^* = \frac{1}{F(\mathrm{D}^2)}\sin\beta x = \frac{1}{F(\mathrm{D}^2)\Big|_{\mathrm{D}=\beta\mathrm{i}}}\sin\beta x.$$

若 $F(\mathrm{D}^2)\Big|_{\mathrm{D}=\beta\mathrm{i}} = 0$，有 $y^* = \frac{1}{F(\mathrm{D}^2)}\cos\beta x = x\frac{1}{[F(\mathrm{D}^2)]'}\cos\beta x$，
$$y^* = \frac{1}{F(\mathrm{D}^2)}\sin\beta x = x\frac{1}{[F(\mathrm{D}^2)]'}\sin\beta x.$$

若为 $\frac{1}{F(\mathrm{D})}\cos\beta x$ 或 $\frac{1}{F(\mathrm{D})}\sin\beta x$ 型，其处理办法参考注例 6.

注例 4 已知 $y''-y=\sin x$，求 y^*.

解 $y^* = \frac{1}{\mathrm{D}^2-1}\sin x$，由 $(\mathrm{D}^2-1)\Big|_{\mathrm{D}=\mathrm{i}} \neq 0$，得
$$y^* = \frac{1}{(\mathrm{D}^2-1)\Big|_{\mathrm{D}=\mathrm{i}}}\sin x = -\frac{1}{2}\sin x.$$

注例 5 已知 $y''+4y=\sin 2x$，求 y^*.

解 $y^* = \frac{1}{\mathrm{D}^2+4}\sin 2x$，由 $(\mathrm{D}^2+4)\Big|_{\mathrm{D}=2\mathrm{i}} = 0$，得
$$y^* = x\frac{1}{(\mathrm{D}^2+4)'}\sin 2x = x\frac{1}{2\mathrm{D}}\sin 2x = \frac{1}{2}x \cdot \frac{1}{\mathrm{D}}\sin 2x = -\frac{1}{4}x\cos 2x.$$

注例 6 已知 $y''-3y'+2y=-\frac{1}{2}\cos 2x$，求 y^*.

解 $y^* = \frac{1}{\mathrm{D}^2-3\mathrm{D}+2}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)$，此为 $\frac{1}{F(\mathrm{D})}\cos\beta x$ 型，此时遵循"先代 $\beta\mathrm{i}$ 到 D^2，然后再处理"的方法. 即
$$y^* = \frac{1}{\mathrm{D}^2-3\mathrm{D}+2}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) = \frac{1}{-4-3\mathrm{D}+2}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3\mathrm{D}+2}\cos 2x$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{3\mathrm{D}-2}{9\mathrm{D}^2-4}\cos 2x = \frac{1}{2}\cdot\frac{3\mathrm{D}-2}{-40}\cos 2x = -\frac{1}{80}(3\mathrm{D}-2)\cos 2x$$
$$= -\frac{1}{80}(3\mathrm{D}\cos 2x - 2\cos 2x) = -\frac{1}{80}(-6\sin 2x - 2\cos 2x)$$

$$=\frac{1}{40}(3\sin 2x+\cos 2x).$$

c. $\frac{1}{F(\mathrm{D})}(x^k+a_1x^{k-1}+\cdots+a_{k-1}x+a_k)$ 型.

$y^*=\frac{1}{F(\mathrm{D})}(x^k+a_1x^{k-1}+\cdots+a_{k-1}x+a_k)=Q_k(\mathrm{D})(x^k+a_1x^{k-1}+\cdots+a_{k-1}x+a_k)$.

这里 $Q_k(\mathrm{D})$ 是将 $\frac{1}{F(\mathrm{D})}$ 展开为(常借助 $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^k+\cdots$)形式上的泰勒级数，即 $\frac{1}{F(\mathrm{D})}=b_0+b_1\mathrm{D}+b_2\mathrm{D}^2+\cdots+b_k\mathrm{D}^k+\cdots$，取该展开式到 D^k 项的一个多项式.

注例 7 已知 $y''+y'=x^2+1$，求 y^*.

解
$$y^*=\frac{1}{\mathrm{D}^2+\mathrm{D}}(x^2+1)=\frac{1}{\mathrm{D}}\cdot\frac{1}{1+\mathrm{D}}(x^2+1),$$

下面将 $\frac{1}{1+\mathrm{D}}$ 作 D 的 2 次展开：

$$\frac{1}{1+\mathrm{D}}=1-\mathrm{D}+\mathrm{D}^2+\cdots,$$

于是

$$\begin{aligned}y^*&=\frac{1}{\mathrm{D}}\cdot(1-\mathrm{D}+\mathrm{D}^2)(x^2+1)=\left(\frac{1}{\mathrm{D}}-1+\mathrm{D}\right)(x^2+1)\\&=\frac{1}{\mathrm{D}}(x^2+1)-(x^2+1)+\mathrm{D}(x^2+1)\\&=\frac{1}{3}x^3+x-x^2-1+2x=\frac{1}{3}x^3-x^2+3x-1.\end{aligned}$$

d. $\frac{1}{F(\mathrm{D})}\mathrm{e}^{\alpha x}v(x)$ 型.

$y^*=\frac{1}{F(\mathrm{D})}\mathrm{e}^{\alpha x}v(x)=\mathrm{e}^{\alpha x}\cdot\frac{1}{F(\mathrm{D}+\alpha)}v(x)$，这里 $v(x)$ 是实函数.

注例 8 已知 $y''+4y'+5y=\mathrm{e}^{-2x}\sin x$，求 y^*.

解
$$\begin{aligned}y^*&=\frac{1}{\mathrm{D}^2+4\mathrm{D}+5}\mathrm{e}^{-2x}\sin x=\mathrm{e}^{-2x}\cdot\frac{1}{(\mathrm{D}-2)^2+4(\mathrm{D}-2)+5}\sin x\\&=\mathrm{e}^{-2x}\cdot\frac{1}{\mathrm{D}^2+1}\sin x=\mathrm{e}^{-2x}\cdot x\frac{1}{(\mathrm{D}^2+1)'}\sin x\\&=\mathrm{e}^{-2x}\cdot x\frac{1}{2\mathrm{D}}\sin x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\cdot x(-\cos x)=-\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{-2x}\cos x.\end{aligned}$$

注例 9 已知 $y''-3y'+2y=2x\mathrm{e}^x$，求 y^*.

解
$$y^*=\frac{1}{\mathrm{D}^2-3\mathrm{D}+2}2x\mathrm{e}^x=2\mathrm{e}^x\cdot\frac{1}{(\mathrm{D}+1)^2-3(\mathrm{D}+1)+2}x=2\mathrm{e}^x\cdot\frac{1}{\mathrm{D}^2-\mathrm{D}}x$$

$$=2e^x\cdot\frac{1}{D}\cdot\frac{1}{D-1}x=2e^x\cdot\frac{1}{D}\cdot(-1-D)x=2e^x\cdot\left(-\frac{1}{D}-1\right)x$$

$$=2e^x\cdot\left(-\frac{1}{2}x^2-x\right)=-x(x+2)e^x.$$

例 15.6 微分方程 $y''-y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界的解为 ________.

【解】应填 $y=-\frac{1}{2}\sin x$.

由注例 4，知 $y^*=-\frac{1}{2}\sin x$，又由 $y''-y=0$，知 $\lambda^2-1=0$，解得 $\lambda=\pm 1$，即

$$y_{齐通}=C_1e^x+C_2e^{-x},$$

于是该微分方程的通解为

$$y=C_1e^x+C_2e^{-x}-\frac{1}{2}\sin x,$$

由题意，只有 $C_1=C_2=0$ 时，$y=-\frac{1}{2}\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界，故有界的解只有 $y=-\frac{1}{2}\sin x$.

3. 能写成 $x^2y''+pxy'+qy=f(x)$（欧拉方程）（仅数学一）

① 当 $x>0$ 时，令 $x=e^t$，则 $t=\ln x$，$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$，于是

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt},\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right)=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2},$$

方程化为
$$\frac{d^2y}{dt^2}+(p-1)\frac{dy}{dt}+qy=f(e^t),$$

即可求解（最后结果别忘了用 $t=\ln x$ 回代成 x 的函数）.

② 当 $x<0$ 时，令 $x=-e^t$，同理可得.

4. n 阶常系数齐次线性微分方程的解

① 若 λ 为单实根，写 $Ce^{\lambda x}$；

② 若 λ 为 k 重实根，写

$$(C_1+C_2x+C_3x^2+\cdots+C_kx^{k-1})e^{\lambda x};$$

③ 若 λ 为单复根 $\alpha\pm\beta i$，写

$$e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x);$$

④ 若 λ 为二重复根 $\alpha\pm\beta i$，写

$$e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x+C_3x\cos\beta x+C_4x\sin\beta x).$$

【注】(1) 如果解中含特解 $e^{\lambda x}$，则 λ 至少为单实根；
(2) 如果解中含特解 $x^{k-1}e^{\lambda x}$，则 λ 至少为 k 重实根；
(3) 如果解中含特解 $e^{\alpha x}\cos\beta x$ 或 $e^{\alpha x}\sin\beta x$，则 $\alpha\pm\beta i$ 至少为单复根；
(4) 如果解中含特解 $e^{\alpha x}x\cos\beta x$ 或 $e^{\alpha x}x\sin\beta x$，则 $\alpha\pm\beta i$ 至少为二重复根.

如，$y'''-y=0$，有 $\lambda^3-1=0$，即 $(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+1)=0$，解得 $\lambda_1=1,\lambda_{2,3}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$，故

$$y_{齐通}=C_1e^x+e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right),$$

其中 C_1,C_2,C_3 为任意常数.

例 15.7 设 $y=y(x)$ 为可导函数，且满足 $y(0)=2$ 及 $\frac{dy}{dx}+y(x)=\int_0^x 2y(t)dt+e^x$，则 $y(x)=$________.

【解】应填 $\frac{10}{9}e^{-2x}+\frac{8}{9}e^x+\frac{1}{3}xe^x$.

由题设知 $y(0)=2,\frac{dy}{dx}=-y(x)+\int_0^x 2y(t)dt+e^x$，右边对 x 可导，所以 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 存在，于是可得

$$y''+y'-2y=e^x, \tag{*}$$
$$y'(0)=-1.$$

微分方程(*)对应的齐次方程的特征方程为

$$\lambda^2+\lambda-2=(\lambda-1)(\lambda+2)=0,$$

解得特征根 $\lambda_1=-2,\lambda_2=1$，则对应齐次方程的通解为 $Y=C_1e^{-2x}+C_2e^x$.

设微分方程(*)的特解为

$$y^*=Axe^x,$$

亦可用微分算子法求特解．由三 2 注例 2，可得 $y^*=x\frac{1}{F'(D)|_{D=1}}e^x=\frac{x}{3}e^x$

代入(*)式解得 $A=\frac{1}{3}$，从而 $y^*=\frac{1}{3}xe^x$. 故微分方程的通解为

$$y=C_1e^{-2x}+C_2e^x+\frac{1}{3}xe^x.$$

由初始条件 $y(0)=2,y'(0)=-1$，可得 $C_1=\frac{10}{9},C_2=\frac{8}{9}$，故特解为

$$y(x)=\frac{10}{9}e^{-2x}+\frac{8}{9}e^x+\frac{1}{3}xe^x.$$

例 15.8 求微分方程 $y''+4y'+5y=e^{-2x}\sin x$ 的通解.

【解】对应齐次方程的特征方程 $\lambda^2+4\lambda+5=0$ 有一对共轭复根 $\lambda_{1,2}=-2\pm i$，故对应齐次方程的通解为 $Y=e^{-2x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$. 下面求微分方程的特解.

法一 原方程的自由项 $f(x)=e^{-2x}\sin x=e^{-2x}(0\cdot\cos x+1\cdot\sin x)$，故设特解为

$$y^*=e^{-2x}(A\cos x+B\sin x)x,$$

代回原方程，解得 $A=-\dfrac{1}{2}, B=0$，故

$$y^*=-\frac{1}{2}xe^{-2x}\cos x.$$

法二　用微分算子法求特解.

由三 2 注例 8，可得 $y^*=-\dfrac{1}{2}xe^{-2x}\cos x$.

于是所求通解为 $y=e^{-2x}(C_1\cos x+C_2\sin x)-\dfrac{1}{2}xe^{-2x}\cos x$，其中 C_1, C_2 为任意常数.

例 15.9　设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数，

$$y(x)=\int_0^x e^t\,dt\int_0^{x-t}f(u)\,du\ (-\infty<x<+\infty).$$

(1) 证明：$y=y(x)$ 是微分方程 $y''-y'=f(x)$ 满足初始条件 $y(0)=0, y'(0)=0$ 的解；
(2) 求微分方程 $y''-y'=f(x)$ 的通解.

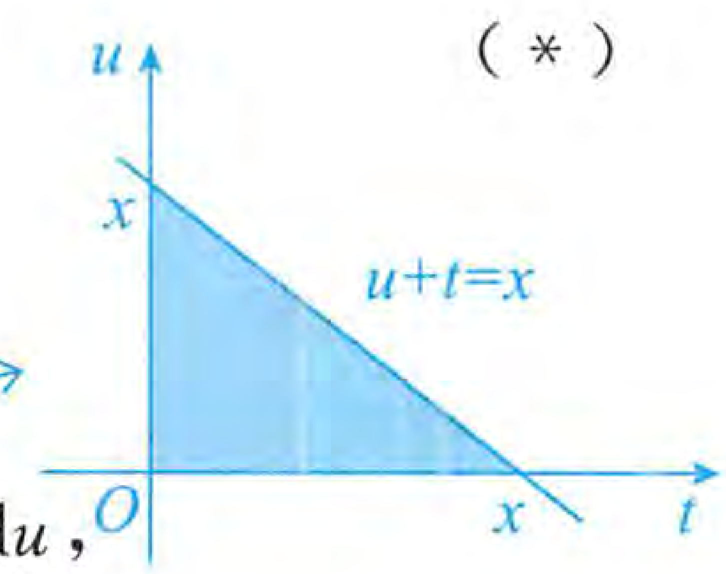
(1)【证】**法一**　记 $F(t)=\int_0^t f(u)\,du$，则 $F'(t)=f(t)$，且 $y(x)=\int_0^x e^tF(x-t)\,dt$. 对积分作变量代换 $v=x-t$，得

$$y(x)=\int_0^x e^{x-v}F(v)\,dv=e^x\int_0^x e^{-v}F(v)\,dv,$$

$$y'(x)=e^x\int_0^x e^{-v}F(v)\,dv+e^x\cdot e^{-x}F(x)=y(x)+F(x),$$

$$y''(x)=y'(x)+F'(x)=y'(x)+f(x),\tag{*}$$

所以 $y''(x)-y'(x)=f(x)$，且 $y(0)=0, y'(0)=0$.



法二

$$y(x)=\int_0^x e^t\,dt\int_0^{x-t}f(u)\,du=\int_0^x du\int_0^{x-u}e^tf(u)\,dt$$

$$=\int_0^x (e^{x-u}-1)f(u)\,du=e^x\int_0^x e^{-u}f(u)\,du-\int_0^x f(u)\,du,$$

$$y'(x)=e^x\int_0^x e^{-u}f(u)\,du+e^x\cdot e^{-x}f(x)-f(x)=e^x\int_0^x e^{-u}f(u)\,du,$$

$$y''(x)=e^x\int_0^x e^{-u}f(u)\,du+e^x\cdot e^{-x}f(x)=e^x\int_0^x e^{-u}f(u)\,du+f(x),$$

则
$$y''(x)-y'(x)=f(x),$$
且
$$y(0)=0, y'(0)=0.$$

(2)【解】根据上述结果，$y(x)=\int_0^x e^t\,dt\int_0^{x-t}f(u)\,du$ 是微分方程 $y''-y'=f(x)$ 的一个特解. 因为特征方程 $\lambda^2-\lambda=0$ 的根为 $\lambda_1=0, \lambda_2=1$，所以齐次方程 $y''-y'=0$ 的通解为 $Y=C_1+C_2e^x$. 根据二阶非齐次线性微分方程通解的结构，可知 $y''-y'=f(x)$ 的通解为

$$y=C_1+C_2e^x+\int_0^x e^t\,dt\int_0^{x-t}f(u)\,du\ (C_1, C_2\text{ 为任意常数}).$$

例 15.10　（仅数学一）欧拉方程 $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+4x\dfrac{dy}{dx}+2y=0\ (x>0)$ 的通解为 ______.

【解】应填 $y=\dfrac{C_1}{x}+\dfrac{C_2}{x^2}$，其中 C_1,C_2 为任意常数.

由题设，$x>0$，令 $x=e^t$，则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x}\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right),$$

代入原方程，得 $\dfrac{d^2y}{dt^2}+3\dfrac{dy}{dt}+2y=0$，解此方程得通解为

$$y=C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}=\frac{C_1}{x}+\frac{C_2}{x^2}(C_1,C_2\text{ 为任意常数}).$$

例 15.11 以 $y_1=te^t,y_2=\sin 2t$ 为两个特解的四阶常系数齐次线性微分方程为(　　).

(A) $y^{(4)}-2y'''+5y''-8y'+4y=0$

(B) $y^{(4)}-2y'''+5y''+8y'+4y=0$

(C) $y^{(4)}+2y'''+5y''-8y'+4y=0$

(D) $y^{(4)}-2y'''-5y''-8y'+4y=0$

【解】应选(A).

由 $y_1=te^t$ 可知 $\lambda=1$ 至少为二重根，由 $y_2=\sin 2t$ 可知 $\lambda=\pm 2i$ 至少是单复根，故所求方程对应的特征方程的根为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=2i,\lambda_4=-2i$. 其特征方程为

$$(\lambda-1)^2(\lambda^2+4)=\lambda^4-2\lambda^3+5\lambda^2-8\lambda+4=0.$$

故所求微分方程为 $y^{(4)}-2y'''+5y''-8y'+4y=0$.

四 用换元法求解微分方程

1. 用求导公式逆用来换元

2. 用自变量、因变量或 x,y 地位互换来换元

例 15.12 微分方程 $\cos y\cdot y'-\sin y=e^x$ 的通解为________.

【解】应填 $\sin y=e^x(x+C)$，其中 C 为任意常数.

令 $u=\sin y$，则 $\cos y\cdot y'=u'$，代入方程，得到一阶线性微分方程 $u'-u=e^x$. 故

$$u=e^{\int dx}\left(\int e^x\cdot e^{-\int dx}dx+C\right)=e^x(x+C),$$

即 $\sin y=e^x(x+C)$ 为所求通解，其中 C 为任意常数.

例 15.13 (1) 将 $x=x(y)$ 的微分方程 $\dfrac{d^2x}{dy^2}+(y+\sin x)\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^3=0$ 化成 $y=y(x)$ 的微分方程，并求出满足初始条件 $x(0)=0,x'(0)=\dfrac{2}{3}$ 的特解 $y(x)$；

(2) 利用(1)的结论，求由曲线 $x=x(y)$，直线 $y=y(\pi)$ 及 y 轴围成的平面图形 D 绕 y 轴旋转一周而成的旋转体的体积 V.

【解】(1) 利用 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{1}{y'}$ 及 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=-\dfrac{y''}{(y')^3}$，可将 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}+(y+\sin x)\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^3=0$ 化成 $y''-y=\sin x$，解此常系数非齐次线性微分方程得

$$y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{2}\sin x.$$

又 $x(0)=0, x'(0)=\dfrac{2}{3}$，可知

$$y(0)=C_1+C_2=0,$$

$$y'(0)=C_1-C_2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2},$$

可得 $C_1=1, C_2=-1$，特解为

$$y(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{2}\sin x.$$

(2) 由于 $y'(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}-\dfrac{1}{2}\cos x>0$，因此 $y=y(x)$ 单调增加，且 $y(0)=0$，故它在第一象限内的图形及平面图形 D 如图 15-1 所示.

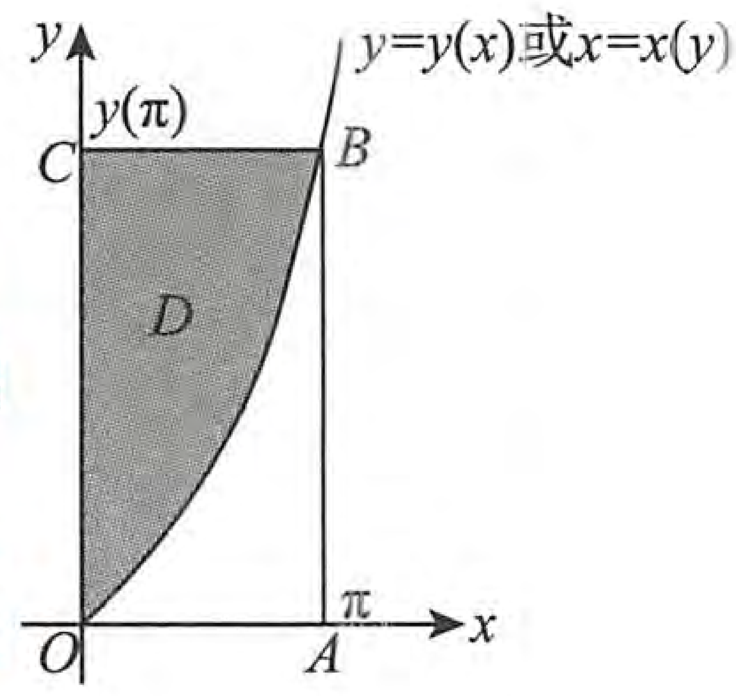


图 15-1

$$V=\underbrace{\pi\cdot\pi^2\cdot y(\pi)}_{\text{矩形 }OABC\text{ 绕 }y\text{ 轴旋转一周而成的旋转体体积}}-\underbrace{2\pi\int_0^{\pi}xy(x)\mathrm{d}x}_{\text{曲边三角形 }OAB\text{ 绕 }y\text{ 轴旋转一周而成的旋转体体积}}$$

$$=\pi^3(\mathrm{e}^{\pi}-\mathrm{e}^{-\pi})-2\pi\int_0^{\pi}x\left(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{2}\sin x\right)\mathrm{d}x$$

$$=\pi^3(\mathrm{e}^{\pi}-\mathrm{e}^{-\pi})-2\pi\int_0^{\pi}x\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}+\frac{1}{2}\cos x\right)$$

$$=\pi^3(\mathrm{e}^{\pi}-\mathrm{e}^{-\pi})-2\pi\left[\left(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}+\frac{1}{2}\cos x\right)x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\left(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}+\frac{1}{2}\cos x\right)\mathrm{d}x\right]$$

$$=\pi^3(\mathrm{e}^{\pi}-\mathrm{e}^{-\pi})-2\pi^2\left(\mathrm{e}^{\pi}+\mathrm{e}^{-\pi}-\frac{1}{2}\right)+2\pi\left(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}+\frac{1}{2}\sin x\right)\Big|_0^{\pi}$$

$$=\pi^3(\mathrm{e}^{\pi}-\mathrm{e}^{-\pi})-2\pi^2\left(\mathrm{e}^{\pi}+\mathrm{e}^{-\pi}-\frac{1}{2}\right)+2\pi(\mathrm{e}^{\pi}-\mathrm{e}^{-\pi})$$

$$=(\pi^3+2\pi)(\mathrm{e}^{\pi}-\mathrm{e}^{-\pi})-2\pi^2(\mathrm{e}^{\pi}+\mathrm{e}^{-\pi})+\pi^2.$$

五 应用题

1. 用极限、导数或积分等式建方程

2. 用几何应用建方程

(1) 用曲线切线斜率.

$$k=f'(x_0)=\tan\alpha.$$

(2) 用两曲线 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公切线斜率.

$$f'(x_0)=g'(x_0).$$

(3) 用截距.

$$Y-y=y'(X-x)\begin{cases}\text{令 } Y=0,\text{则 } X=x-\dfrac{y}{y'}(x\text{ 轴上的截距});\\ \text{令 } X=0,\text{则 } Y=y-xy'(y\text{ 轴上的截距}).\end{cases}$$

如，令 $X=Y$，建等式(方程).

(4) 用面积.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

(5) 用体积.

$$V_x=\int_a^b \pi f^2(x)\mathrm{d}x,V_y=\int_a^b 2\pi x\,|f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

(6) 用平均值.

$$\overline{f}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi).$$

(7) 用弧长.（仅数学一、数学二）

$$s=\int_a^b\sqrt{1+(y_x')^2}\,\mathrm{d}x.$$

(8) 用侧面积.（仅数学一、数学二）

$$S=\int_a^b 2\pi\,|y(x)|\sqrt{1+(y_x')^2}\,\mathrm{d}x.$$

(9) 用曲率.（仅数学一、数学二）

$$k=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

(10) 用形心.（仅数学一、数学二）

$$\overline{x}=\frac{\iint\limits_D x\,\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma},\overline{y}=\frac{\iint\limits_D y\,\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma}.$$

例 15.14 设 $f(u,v)$ 具有连续偏导数，且满足 $f_u'(u,v)+f_v'(u,v)=uv$，则函数 $y=e^{-2x}f(x,x)$ 满足条件 $y\big|_{x=0}=1$ 的表达式为________.

【解】应填 $y=\left(\dfrac{x^3}{3}+1\right)e^{-2x}$.

$$y'=-2e^{-2x}f(x,x)+e^{-2x}f'_u(x,x)+e^{-2x}f'_v(x,x)=-2y+x^2e^{-2x},$$

因此，y 满足一阶线性微分方程 $y'+2y=x^2e^{-2x}$，其通解为

$$y=e^{-\int 2dx}\left(\int x^2e^{-2x}e^{\int 2dx}dx+C\right)=\left(\frac{x^3}{3}+C\right)e^{-2x}.$$

由 $y\Big|_{x=0}=1$，得 $C=1$，所以 $y=\left(\frac{x^3}{3}+1\right)e^{-2x}$.

例 15.15 设 $p(x)$ 连续，y_1,y_2 是二阶齐次线性微分方程

$$y''+\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}y'+p(x)y=0(0<x<1)$$

的两个线性无关解，记 $f(x)=y_1y'_2-y_2y'_1$.

(1) 求 $f(x)$ 满足的一阶微分方程；

(2) 求 $f(x)$ 的表达式.

【解】(1) 由题意得

$$\begin{aligned}f'(x)&=(y_1y'_2-y_2y'_1)'=y'_1y'_2+y_1y''_2-y'_2y'_1-y_2y''_1=y_1y''_2-y_2y''_1\\&=y_1\left[-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}y'_2-p(x)y_2\right]-y_2\left[-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}y'_1-p(x)y_1\right]\\&=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}(y_1y'_2-y_2y'_1)=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}f(x),\end{aligned}$$

故 $f(x)$ 满足的一阶微分方程为

$$f'(x)+\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}f(x)=0.$$

(2) 由 $f'(x)+\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}f(x)=0$，得 $f(x)=C_1e^{-\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}dx}$. 令 $x=\sin t$，则

$$\begin{aligned}\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}dx&=\int\frac{\cos^2t}{\sin t}dt=\int\frac{1-\sin^2t}{\sin t}dt=\int\csc t\,dt-\int\sin t\,dt\\&=\ln|\csc t-\cot t|+\cos t+C_2=\ln\left|\frac{1}{x}-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right|+\sqrt{1-x^2}+C_2\\&=\ln\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}+\sqrt{1-x^2}+C_2,\end{aligned}$$

故

$$f(x)=C_1e^{-\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}dx}=C_1e^{-\left(\ln\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}+\sqrt{1-x^2}+C_2\right)}=\frac{Cxe^{-\sqrt{1-x^2}}}{1-\sqrt{1-x^2}}(0<x<1),$$

其中 C 是任意常数.

例 15.16 已知函数 $f(x),g(x)$ 满足方程 $f'(x)-g(x)=e^x$ 及 $g'(x)-f(x)=0$，$f(0)=g(0)=0$，计算$\int_0^1e^{-x^2}[f'(x)-2xg'(x)]dx$.

【解】由 $f'(x)-g(x)=e^x, g'(x)=f(x)$，得

$$g''(x)-g(x)=e^x,$$

解此二阶微分方程，得

$$g(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}+\frac{1}{2}xe^x.$$

由 $g'(0)=f(0)=g(0)=0$，得 $C_1=-\frac{1}{4}, C_2=\frac{1}{4}$，故

$$g(x)=-\frac{1}{4}(e^x-e^{-x})+\frac{1}{2}xe^x,$$

$$f(x)=\frac{1}{4}(e^x-e^{-x})+\frac{1}{2}xe^x.$$

又 $$e^{-x^2}[f'(x)-2xg'(x)]=e^{-x^2}[f'(x)-2xf(x)]$$
$$=e^{-x^2}f'(x)+e^{-x^2}(-2x)f(x)=[e^{-x^2}f(x)]',$$

故 $$\int_0^1 e^{-x^2}[f'(x)-2xg'(x)]dx=e^{-x^2}f(x)\Big|_0^1$$
$$=e^{-1}f(1)-f(0)=e^{-1}\left(\frac{e-e^{-1}}{4}+\frac{1}{2}e\right)$$
$$=\frac{3}{4}-\frac{1}{4e^2}.$$

例 15.17 已知 $f(xy)=yf(x)+xf(y)$ 对任意正实数 x,y 均成立，且 $f'(1)=e$，求 $f(xy)$ 的极小值.

【解】对式子 $f(xy)=yf(x)+xf(y)(x,y>0)$，令 $x=1$，则 $f(y)=yf(1)+f(y)$，即 $f(1)=0$.

又当 $x>0$ 时，

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left[x\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\right]-f(x)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{xf\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)+\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)f(x)-f(x)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}+\frac{f(x)}{x}$$
$$=f'(1)+\frac{f(x)}{x}=e+\frac{f(x)}{x},$$

即 $f'(x)+\left(-\frac{1}{x}\right)f(x)=e$，于是

$$f(x)=e^{-\int\left(-\frac{1}{x}\right)dx}\left[\int e^{\int\left(-\frac{1}{x}\right)dx}e\,dx+C\right]=x(e\ln x+C).$$

由 $f(1)=0$，有 $C=0$，即 $f(x)=ex\ln x$.

故 $f(xy)=exy\ln(xy)$，令 $xy=u$，则有

$$f(u)=eu\ln u, f'(u)=e(\ln u+1)\xlongequal{令}0,$$

解得 $u=e^{-1}$，$f''(u)=\frac{e}{u}$，$f''(e^{-1})=e^2>0$，于是 $f(u)$ 的极小值为 $f(e^{-1})=-1$，即 $f(xy)$ 的极小值为 -1.

3. 用变化率建方程

例 15.18 设一个地区人口的增长率与当时的人口总数成正比，$N(t)$ 表示在 t 时刻该地区的人口总量，N_0 是初始时刻 $t=0$ 时的人口数，比例为 $r-bN(t)\,(r-bN(t)>0)$，求 $N(t)$ 的表达式.

【解】由题设，

$$\frac{d[N(t)]}{dt}=[r-bN(t)]N(t),$$

分离变量得

$$\frac{d[N(t)]}{[r-bN(t)]N(t)}=dt,$$

由待定系数法，得

$$\frac{1}{[r-bN(t)]N(t)}=\frac{A}{r-bN(t)}+\frac{B}{N(t)},$$

即
$$1=AN(t)+B[r-bN(t)],$$

令 $N(t)=0$，得 $B=\frac{1}{r}$，令 $N(t)=\frac{r}{b}$，得 $A=\frac{b}{r}$. 即

$$\frac{1}{r}\left[\frac{1}{N(t)}+\frac{b}{r-bN(t)}\right]d[N(t)]=dt,$$

两边积分得

$$\ln N(t)-\ln[r-bN(t)]=rt+C_1.$$

即
$$\frac{N(t)}{r-bN(t)}=Ce^{rt},$$

代入初始条件 $N(t)\Big|_{t=0}=N_0$，得 $C=\frac{N_0}{r-bN_0}$. 整理得

$$N(t)=\frac{r}{b+\left(\frac{r}{N_0}-b\right)e^{-rt}}.$$

【注】常称为人口增长问题.

例 15.19 在 xOy 平面上，设 $|PQ|=1$，初始时刻 P 在原点，Q 在 $(1,0)$ 点，若 P 点沿着 y 轴的正方向移动，且 Q 点的运动方向始终指向 P 点，求 Q 点的运动轨迹.

【解】如图 15-2 所示，当 P 点沿着 y 轴向上移动时，记 Q 点的轨迹形成曲线 $y=y(x)$. 并设曲线上 Q 点的坐标为 (x,y)，P 点坐标为 $(0,Y)$，由 $|PQ|=1$，得

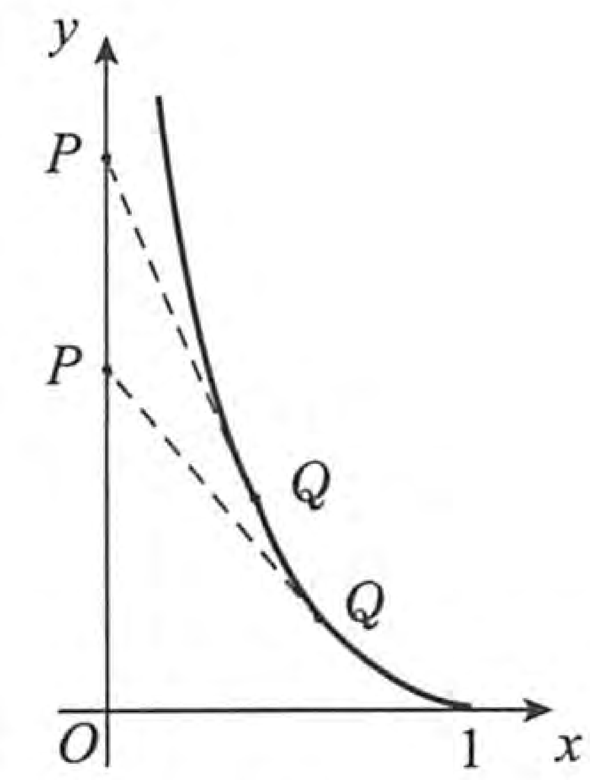


图 15-2

$Y>y$，故取负值

$$x^2+(y-Y)^2=1,\text{即 } y-Y=-\sqrt{1-x^2}.$$

由题意知，QP 的方向就是曲线 $y=y(x)$ 在 (x,y) 点的切线方向，故

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y-Y}{x}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x},$$

两边积分得

$$y=-\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\mathrm{d}x.$$

亦可令 $x=\sin t$，其具体过程见例 15.15

令 $x=\cos t$，则

$$\begin{aligned}y&=-\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\mathrm{d}x=\int\frac{\sin^2 t}{\cos t}\mathrm{d}t=\int\frac{1-\cos^2 t}{\cos t}\mathrm{d}t\\&=\int\sec t\,\mathrm{d}t-\int\cos t\,\mathrm{d}t\\&=\ln|\sec t+\tan t|-\sin t+C\\&=\ln\left|\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right|-\sqrt{1-x^2}+C\\&=\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}-\sqrt{1-x^2}+C.\end{aligned}$$

由 $x=1$ 时，$y=0$，可得 $C=0$. 故 Q 点的轨迹方程为

$$y=\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}-\sqrt{1-x^2}.$$

【注】这种曲线叫曳物线，又叫追踪曲线. 这是因为当 P 沿已知路径逃跑时，追踪者 Q 从某点出发，盯住 P 追赶，则追踪者 Q 跑过的路线就是曳物线.

例 15.20 (仅数学三) 已知生产某产品的固定成本为 $a(a>0)$，生产 x 个单位的边际成本与平均成本之差为 $\frac{x}{a}-\frac{a}{x}$，且当产量的数值等于 a 时，相应的总成本为 $2a$，则总成本 C 与产量 x 的函数关系式为 ________.

【解】应填 $C(x)=\frac{1}{a}x^2+a$.

由题意，得
$$\frac{\mathrm{d}[C(x)]}{\mathrm{d}x}-\frac{C(x)}{x}=\frac{x}{a}-\frac{a}{x},$$

故
$$C(x)=\mathrm{e}^{-\int\left(-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x}\left[\int\left(\frac{x}{a}-\frac{a}{x}\right)\mathrm{e}^{\int\left(-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C_0\right]$$

$$=e^{\ln x}\left[\int\left(\frac{x}{a}-\frac{a}{x}\right)e^{-\ln x}\mathrm{d}x+C_0\right]=x\left[\int\left(\frac{1}{a}-\frac{a}{x^2}\right)\mathrm{d}x+C_0\right]$$

$$=x\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}+C_0\right)=\frac{1}{a}x^2+a+C_0x,$$

又由题设，$C(a)=2a$，得 $C_0=0$，于是 $C(x)=\frac{1}{a}x^2+a$.

六、差分方程（仅数学三）

一阶常系数线性差分方程的一般形式为

$$y_{t+1}+ay_t=f(t), \tag{①}$$

其中 $f(t)$ 为已知函数，a 为非零常数.

当 $f(t)\equiv 0$ 时，方程 ① 变为

$$y_{t+1}+ay_t=0, \tag{②}$$

我们称 $f(t)\neq 0$ 时的 ① 为**一阶常系数非齐次线性差分方程**，② 为其对应的**一阶常系数齐次线性差分方程**.

1. 齐次差分方程的通解

通过迭代，并由数学归纳法可得 ② 的通解为

$$y_C(t)=C\cdot(-a)^t,$$

这里 C 为任意常数.

2. 非齐次差分方程的解

定理 1 若 y_t^* 是非齐次差分方程 ① 的一个特解，$y_C(t)$ 是齐次差分方程 ② 的通解，则非齐次差分方程 ① 的通解为

$$y_t=y_C(t)+y_t^*.$$

定理 2 若 $\overline{y}_t$ 与 $\tilde{y}_t$ 分别是差分方程

$$y_{t+1}+ay_t=f_1(t)$$

和

$$y_{t+1}+ay_t=f_2(t)$$

的解，则

$$y_t=\overline{y}_t+\tilde{y}_t$$

是差分方程

$$y_{t+1}+ay_t=f_1(t)+f_2(t)$$

的解.

非齐次差分方程 ① 的特解 y_t^* 形式的设定见下表.

① 中 $f(t)$ 的形式	取待定特解的条件	试取特解的形式
$f(t)=d^t\cdot P_m(t)$ d 为非零常数	$a+d\neq 0$	$y_t^*=d^t\cdot Q_m(t)$
	$a+d=0$	$y_t^*=t\cdot d^t\cdot Q_m(t)$
$f(t)=b_1\cos\omega t+b_2\sin\omega t$ $\omega\neq 0$ 且 b_1,b_2 为不同时为零的常数	$D=\begin{vmatrix} a+\cos\omega & \sin\omega \\ -\sin\omega & a+\cos\omega \end{vmatrix}\neq 0$	$y_t^*=\alpha\cos\omega t+\beta\sin\omega t$ α,β 为待定常数
	$D=0$	$y_t^*=t(\alpha\cos\omega t+\beta\sin\omega t)$

例 15.21 若某线性差分方程的通解为 $y_t=2^{t-1}(2C+t)$（C 为任意常数），则该差分方程为________.

【解】 应填 $y_{t+1}-2y_t=2^t$.

由于线性差分方程的通解为

$$y_t=C\cdot 2^t+t\cdot 2^{t-1}\ (C\text{ 为任意常数}),$$

故该差分方程为一阶非齐次线性差分方程，且 $Y_t=C\cdot 2^t$ 为相应的齐次差分方程的通解，而 $y_t^*=t\cdot 2^{t-1}$ 为所求差分方程(非齐次线性差分方程)的一个特解，故可设所求差分方程为

$$y_{t+1}-2y_t=f(t).$$

将特解 $y_t^*=t\cdot 2^{t-1}$ 代入，得 $f(t)=2^t$，故所求差分方程为 $y_{t+1}-2y_t=2^t$.

例 15.22 求方程满足给定条件的特解：

$$y_{t+1}+4y_t=17\cos\frac{\pi}{2}t,\ y_0=1.$$

【解】 对应的齐次差分方程的通解为

$$y_C(t)=C(-4)^t.$$

由于

$$D=\begin{vmatrix} 4+\cos\frac{\pi}{2} & \sin\frac{\pi}{2} \\ -\sin\frac{\pi}{2} & 4+\cos\frac{\pi}{2} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}=17\neq 0,$$

故非齐次差分方程应具有特解形式为

$$y_t^*=B_0\cos\frac{\pi}{2}t+B_1\sin\frac{\pi}{2}t.$$

代入原方程后可求得 $B_0=4,B_1=1$. 于是，原方程的通解为

$$y_t=C(-4)^t+4\cos\frac{\pi}{2}t+\sin\frac{\pi}{2}t.$$

代入定解条件 $y_0=1$，得 $C=-3$，即得所求特解为

$$y_t=-3(-4)^t+4\cos\frac{\pi}{2}t+\sin\frac{\pi}{2}t.$$