第11讲 一元函数积分学的应用（二）——积分等式与积分不等式

知识结构

- 积分等式
  - 常用积分等式
  - 通过证明某特殊积分等式求某特殊积分
  - 通过积分法证明积分等式
  - 积分形式的中值定理
- 积分不等式
  - 用函数的性态
  - 处理被积函数
    - 已知 $f(x) \leqslant g(x)$，用积分保号性证得 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$，$a<b$
    - 用拉格朗日中值定理
    - 用泰勒公式
    - 用积分法

一 积分等式

(1) 常用积分等式(见第 9 讲“三、定积分的计算”).

(2) 通过证明某特殊积分等式求某特殊积分.

(3) 通过积分法证明积分等式.

(4) 积分形式的中值定理.

例 11.1 设 $f(x)$ 是连续的偶函数，且是以 T 为周期的周期函数.

(1) 证明：$\int_0^{nT} xf(x)\mathrm{d}x = \dfrac{n^2T}{2}\int_0^T f(x)\mathrm{d}x\ (n=1,2,3,\cdots)$；

(2) 利用(1) 的结论计算 $I=\int_0^{n\pi} x\,|\sin x|\,\mathrm{d}x$.

(1)【证】
$$\int_0^{nT} xf(x)\mathrm{d}x \xlongequal{x=nT-t} nT\int_0^{nT} f(t)\mathrm{d}t - \int_0^{nT} tf(t)\mathrm{d}t,$$
于是有
$$\int_0^{nT} xf(x)\mathrm{d}x = \frac{nT}{2}\int_0^{nT} f(x)\mathrm{d}x.$$

又 $f(x+T)=f(x)$，则

$$\int_0^{nT} f(x)\mathrm{d}x = n\int_0^T f(x)\mathrm{d}x,$$

故

$$\int_0^{nT} xf(x)\mathrm{d}x = \frac{n^2T}{2}\int_0^T f(x)\mathrm{d}x\ (n=1,2,3,\cdots).$$

(2)【解】$|\sin x|$ 是连续的以 π 为周期的偶函数，故

$$I=\int_0^{n\pi} x|\sin x|\mathrm{d}x = \frac{n^2\pi}{2}\int_0^{\pi}|\sin x|\mathrm{d}x$$

$$=\frac{n^2\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x = n^2\pi.$$

例 11.2 设 $\varphi(x)$ 是可微函数 $f(x)$ 的反函数，且 $f(1)=0$，$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=1$，则 $\int_0^1\left[\int_0^{f(x)}\varphi(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x=$________.

【解】应填 2.

$$\int_0^1\left[\int_0^{f(x)}\varphi(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x = x\int_0^{f(x)}\varphi(t)\mathrm{d}t\Big|_0^1-\int_0^1 x\varphi[f(x)]\cdot f'(x)\mathrm{d}x$$

$$=-\int_0^1 x^2\cdot f'(x)\mathrm{d}x=-\int_0^1 x^2\mathrm{d}[f(x)]$$

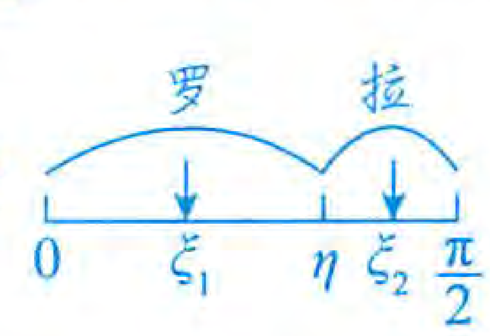
$$=-x^2f(x)\Big|_0^1+2\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=2.$$

例 11.3 设 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上有连续的二阶导数，且 $f(0)=2, f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$，$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{e}^{\sin x}\cos x\mathrm{d}x=2(\mathrm{e}-1)$. 证明：存在 $\xi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，使得 $f''(\xi)<0$.

【证】由推广的积分中值定理知，$\exists\,\eta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，使得 $f(\eta)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{\sin x}\cos x\mathrm{d}x=2(\mathrm{e}-1)$.

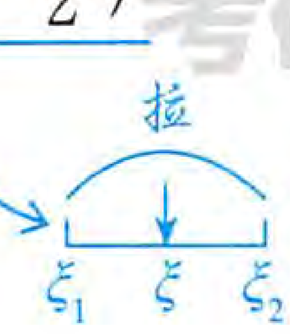
又 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{\sin x}\cos x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{\sin x}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\mathrm{e}-1$，于是 $f(\eta)\cdot(\mathrm{e}-1)=2(\mathrm{e}-1)$，即 $\exists\,\eta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，使得 $f(\eta)=2$.

因 $f(0)=2, f(\eta)=2, f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$，由罗尔定理知，存在 $\xi_1\in(0,\eta)$，使得 $f'(\xi_1)=0$，又由拉格朗日中值定理知，存在 $\xi_2\in\left(\eta,\frac{\pi}{2}\right)$，使得



$$f'(\xi_2)=\frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f(\eta)}{\frac{\pi}{2}-\eta}=\frac{1-2}{\frac{\pi}{2}-\eta}<0,$$

再由拉格朗日中值定理知，存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，使得 $f''(\xi)=\frac{f'(\xi_2)-f'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}<0$.



二 积分不等式

(1) 用函数的性态.

例 11.4 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，$f'(x)>0$，$f''(x)>0$（见图 11-1），证明：

$$\frac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a)>\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

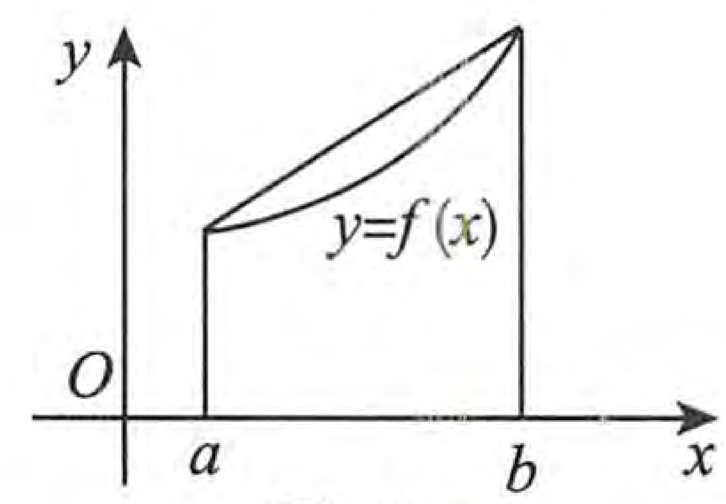


图 11-1

【分析】首先将某一限（取上限或下限）变量化，然后移项构造辅助函数，由辅助函数的单调性来证明不等式，此方法多用于所给条件为“$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续”的情形.

【证】令

$$F(x)=\frac{1}{2}[f(a)+f(x)](x-a)-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t,$$

则
$$\begin{aligned}F'(x)&=\frac{1}{2}f'(x)(x-a)+\frac{1}{2}[f(a)+f(x)]-f(x)\\&=\frac{1}{2}f'(x)(x-a)+\underbrace{\frac{1}{2}f(a)-\frac{1}{2}f(x)}_{\text{拉格朗日中值定理}}\\&=\frac{1}{2}f'(x)(x-a)-\frac{1}{2}f'(\eta)(x-a)\\&=\frac{1}{2}[f'(x)-f'(\eta)](x-a)>0\ (x>a),\end{aligned}$$

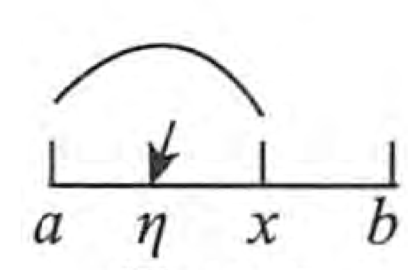


图 11-2

其中 $\eta\in(a,x)$（见图 11-2）. 所以 $F(x)$ 严格单调增加，故 $F(b)>F(a)=0$，即

$$\frac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a)>\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

例 11.5 证明：当 $0\leqslant a\leqslant 1$ 时，$\int_0^a(1-x^2)^{\frac{5}{2}}\mathrm{d}x\geqslant\frac{5a\pi}{32}$.

【证】令 $f(a)=\int_0^a(1-x^2)^{\frac{5}{2}}\mathrm{d}x-\frac{5a\pi}{32}$，则

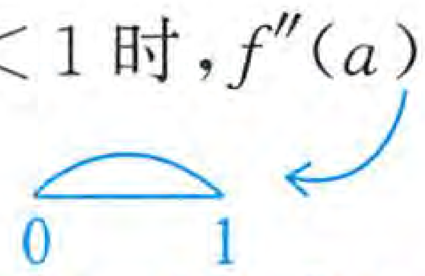
$$f(0)=0,$$

$$f(1)=\int_0^1(1-x^2)^{\frac{5}{2}}\mathrm{d}x-\frac{5\pi}{32}\xlongequal{\text{令 } x=\sin t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6 t\mathrm{d}t-\frac{5\pi}{32}=\frac{5}{6}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{32}=0,$$

且 $f(a)$ 在 $[0,1]$ 上存在二阶导数.

$$f'(a)=(1-a^2)^{\frac{5}{2}}-\frac{5\pi}{32},\ f''(a)=-5a(1-a^2)^{\frac{3}{2}}.$$

当 $0<a<1$ 时，$f''(a)<0$，故 $f(a)>0$. 因此，对于任意 $a\in[0,1]$，$f(a)\geqslant 0$，即



$f(a)$ 在 $0<a<1$ 上是凸的.

$$\int_0^a(1-x^2)^{\frac{5}{2}}\mathrm{d}x\geqslant\frac{5a\pi}{32}.$$

(2) 处理被积函数.

① **已知 $f(x) \leqslant g(x)$，用积分保号性证得** $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$，$a < b$.

例 11.6 设 $f(x)$ 为正值连续函数且 $f(x) < a$，a 为正常数，则 $\forall b \in (0,1)$，有(　　).

(A) $a\int_0^1 \sqrt{f(bx)}\mathrm{d}x < \sqrt{b}$　　(B) $a\int_0^1 \sqrt{f(bx)}\mathrm{d}x < b$

(C) $b\int_0^1 \sqrt{f(bx)}\mathrm{d}x < \sqrt{a}$　　(D) $b\int_0^1 \sqrt{f(bx)}\mathrm{d}x < a$

【解】应选(C).

$$\int_0^1 \sqrt{f(bx)}\mathrm{d}x \xlongequal[\mathrm{d}x=\frac{1}{b}\mathrm{d}t]{bx=t} \int_0^b \sqrt{f(t)}\,\frac{1}{b}\mathrm{d}t = \frac{1}{b}\int_0^b \sqrt{f(t)}\,\mathrm{d}t$$

$$< \frac{1}{b}\int_0^1 \sqrt{f(t)}\,\mathrm{d}t < \frac{1}{b}\int_0^1 \sqrt{a}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{a}}{b},$$

即 $b\int_0^1 \sqrt{f(bx)}\mathrm{d}x < \sqrt{a}$，选(C).

② **用拉格朗日中值定理.**

用拉格朗日中值定理处理被积函数 $f(x)$，再作不等式，进一步，用积分保号性. 此方法多用于所给条件为"$f(x)$ 一阶可导"且题中有较简单函数值(甚至为 0) 的题目.

例 11.7 设 $f(x)$ 在[0,1]上二阶可导，$f(0)=0$，$f'(x)>0$，$f''(x)>0$，则对于

$$M=\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\mathrm{d}x,\ N=\int_{\frac{1}{2}}^1 \left[f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right]\mathrm{d}x,\ P=\frac{1}{4}\left[f(1)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right],$$

其大小顺序排列正确的是(　　).

(A) $N<M<P$　　(B) $P<M<N$

(C) $M<P<N$　　(D) $M<N<P$

【解】应选(D).

$$N=\int_{\frac{1}{2}}^1 \left[f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right]\mathrm{d}x \xlongequal{令\, x-\frac{1}{2}=t} \int_0^{\frac{1}{2}} \left[f\left(t+\frac{1}{2}\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right]\mathrm{d}t，于是$$

$$N-M=\int_0^{\frac{1}{2}} \left[f\left(x+\frac{1}{2}\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)-f(x)\right]\mathrm{d}x,$$

其中

$$f\left(x+\frac{1}{2}\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)=f'(\xi_1)\cdot x,\ \frac{1}{2}<\xi_1<x+\frac{1}{2},$$

$$f(x)=f(x)-f(0)=f'(\xi_2)\cdot x,\ 0<\xi_2<x<\frac{1}{2},$$

ξ_1,ξ_2 的取值如图 11-3(a) 所示. 则

$$f\left(x+\frac{1}{2}\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)-f(x)=f'(\xi_1)\cdot x-f'(\xi_2)\cdot x$$

$$=[f'(\xi_1)-f'(\xi_2)]\cdot x, \quad (*)$$

由 $f''(x)>0$，可知 $f'(x)$ 严格单调增加，即 $f'(\xi_1)>f'(\xi_2)$，于是（$*$）式大于0，由积分保号性知，$N-M>0$，即$N>M$.

又由 $f''(x)>0$，则 $f(x)$ 的图形是凹的，N 表示图11-3(b)中阴影部分的面积，即曲边三角形 ABC 的面积，P 表示 $\triangle ABC$ 的面积，显然 $N<P$（其严格证明见例11.4）.

综上，$M<N<P$，选(D).

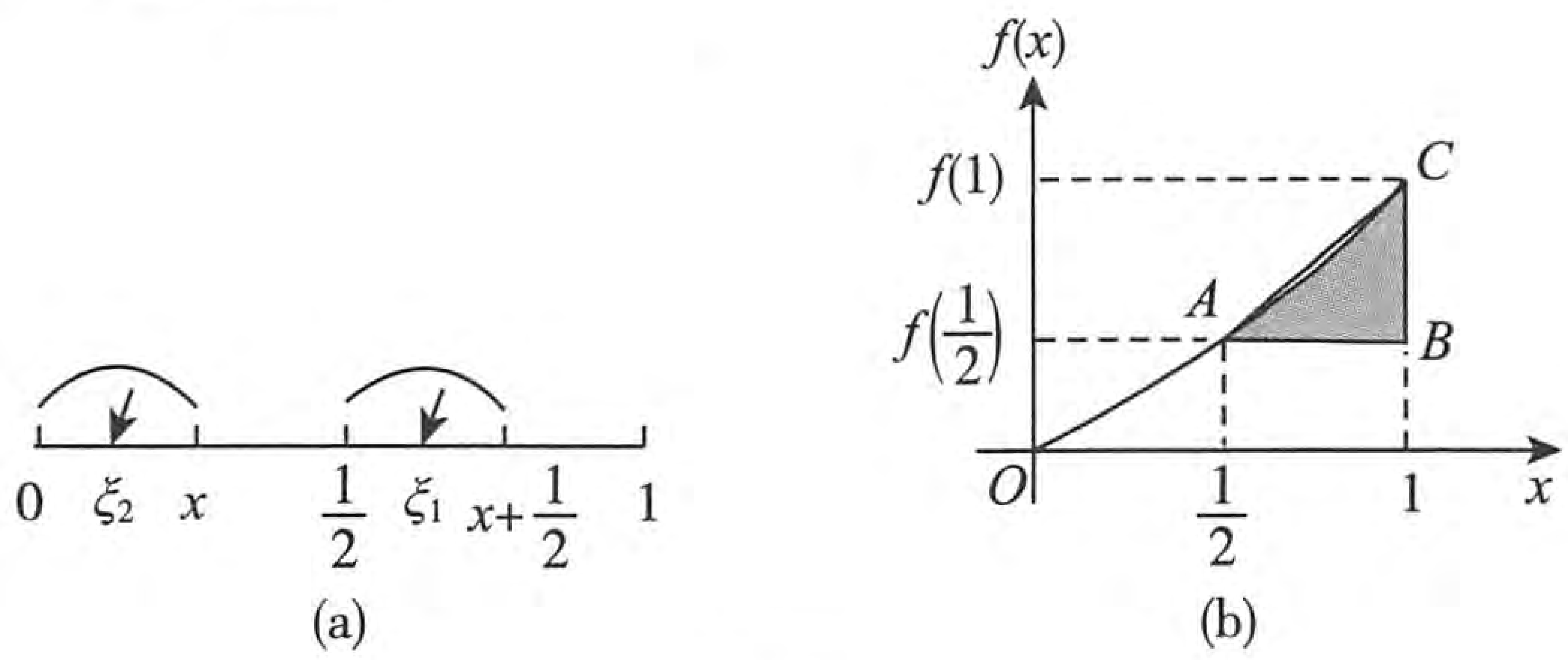


图 11-3

③ **用泰勒公式.**

将 $f(x)$ 展开成泰勒公式，再作不等式，进一步，用积分保号性. 此方法多用于所给条件为“$f(x)$ 二阶（或更高阶）可导”且题中有较简单函数值（甚至为0）的题目.

例 11.8 设 $f(x)$ 二阶可导，且 $f''(x)\geqslant 0$，$u(t)$ 为任一连续函数，$a>0$. 证明：

$$\frac{1}{a}\int_0^a f[u(t)]\mathrm{d}t\geqslant f\left[\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\mathrm{d}t\right].$$

【证】由于 $f''(x)\geqslant 0$，则由泰勒公式，有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2 \text{（}\xi\text{ 介于 }x_0\text{ 与 }x\text{ 之间）}$$

$$\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0),$$

取 $x_0=\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\mathrm{d}t$，$x=u(t)$，代入上式，则有

$$f[u(t)]\geqslant f\left[\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\mathrm{d}t\right]+f'(x_0)[u(t)-x_0],$$

对上式两端从0到 a 积分，得

$$\int_0^a f[u(t)]\mathrm{d}t\geqslant af\left[\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\mathrm{d}t\right]+f'(x_0)\underbrace{\left[\int_0^a u(t)\mathrm{d}t-ax_0\right]}_{=0}=af\left[\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\mathrm{d}t\right],$$

亦即 $\frac{1}{a}\int_0^a f[u(t)]\mathrm{d}t\geqslant f\left[\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\right]\mathrm{d}t$.

④ **用积分法.**

例 11.9 设函数 $f(x)=\int_x^{x+1}\sin \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$. 证明：

(1) $f(x)=\frac{\cos \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}-\frac{\cos \mathrm{e}^{x+1}}{\mathrm{e}^{x+1}}-\int_{\mathrm{e}^x}^{\mathrm{e}^{x+1}}\frac{1}{u^2}\cos u\,\mathrm{d}u$;

(2) $\mathrm{e}^x|f(x)|\leqslant 2$.

【证】被积函数 $\sin e^t$ 比较复杂,无法积分,通过变量代换可将其变得简单些(此时积分区间的上、下限必然会变得复杂些),然后再做下去.

(1)
$$f(x)\xlongequal{\text{令 } e^t=u}\int_{e^x}^{e^{x+1}}\frac{1}{u}\sin u\,du=-\frac{1}{u}\cos u\Big|_{e^x}^{e^{x+1}}-\int_{e^x}^{e^{x+1}}\frac{1}{u^2}\cos u\,du$$
$$=\frac{\cos e^x}{e^x}-\frac{\cos e^{x+1}}{e^{x+1}}-\int_{e^x}^{e^{x+1}}\frac{1}{u^2}\cos u\,du.$$

(2)
$$|f(x)|\leqslant\left|\frac{\cos e^x}{e^x}\right|+\left|\frac{\cos e^{x+1}}{e^{x+1}}\right|+\int_{e^x}^{e^{x+1}}\left|\frac{\cos u}{u^2}\right|du$$
$$\leqslant\frac{1}{e^x}+\frac{1}{e^{x+1}}+\int_{e^x}^{e^{x+1}}\frac{1}{u^2}du=\frac{1}{e^x}+\frac{1}{e^{x+1}}-\frac{1}{e^{x+1}}+\frac{1}{e^x}=\frac{2}{e^x},$$

即 $e^x|f(x)|\leqslant 2$.

【注】利用常见不等关系处理被积函数,进一步用积分保号性.其中常见不等关系:$|\sin x|\leqslant 1$,$|\cos x|\leqslant 1$,$\sin x\leqslant x(x\geqslant 0)$,闭区间上的连续函数 $f(x)$ 有 $|f(x)|\leqslant M(\exists M>0)$,$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}(a,b>0)$ 等.

例 11.10 设 $|f(x)|\leqslant\pi$,$f'(x)\geqslant m>0(a\leqslant x\leqslant b)$,证明:$\left|\int_a^b\sin f(x)dx\right|\leqslant\frac{2}{m}$.

【证】当 $a\leqslant x\leqslant b$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 在$[a,b]$上严格单调增加,故其存在反函数.记 $t=f(x)$,其反函数记为 $x=g(t)$,又记 $\alpha=f(a)$,$\beta=f(b)$,由 $|f(x)|\leqslant\pi$,则 $-\pi\leqslant\alpha<\beta\leqslant\pi$,故

$$\int_a^b\sin f(x)dx=\int_\alpha^\beta\sin t\cdot g'(t)dt,$$

由于 $f'(x)\geqslant m>0$,故 $0<g'(t)=\frac{1}{f'(x)}\leqslant\frac{1}{m}$,则

$$\left|\int_a^b\sin f(x)dx\right|=\left|\int_\alpha^\beta\sin t\cdot g'(t)dt\right|\leqslant\left|\int_0^\pi\sin t\cdot g'(t)dt\right|\leqslant\frac{1}{m}\int_0^\pi\sin t\,dt=\frac{2}{m}.$$

【注】(1) 见到复合函数的积分 $\int_a^b\sin f(x)dx$,一般要想到换元法,令 $f(x)=t$,甚至有时(此题不用)令 $\sin f(x)=t$.这是考研的重要思路.

(2) 本题还考查了一个重要知识点:反函数的导数.考生需注意.