第4讲 矩阵的秩

知识结构

定义 —— A 中最大的不为零的子式的阶数称为矩阵 A 的秩

公式

① $0 \leqslant r(A_{m\times n}) \leqslant \min\{m, n\}$

② $r(kA)=r(A)\ (k\neq 0)$

③ $r(A)=r(PA)=r(AQ)=r(PAQ)$（P，Q 为可逆矩阵）

④设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times s$ 矩阵．若 $r(A)=n$（列满秩），则 $r(AB)=r(B)$；若 $r(B)=n$（行满秩），则 $r(AB)=r(A)$

⑤ $r(AB)\leqslant \min\{r(A), r(B)\}$

⑥ $r(A+B)\leqslant r([A, B])\leqslant r(A)+r(B)$

⑦ $r\left(\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}\right)=r\left(\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}\right)=r(A)+r(B)$

⑧ $r(A)+r(B)\leqslant r\left(\begin{bmatrix} A & O \\ C & B \end{bmatrix}\right)\leqslant r(A)+r(B)+r(C)$

⑨ $r(AB)\geqslant r(A)+r(B)-n$

⑩ $r(A)=r(A^{\mathrm{T}})=r(AA^{\mathrm{T}})=r(A^{\mathrm{T}}A)$

⑪ $r(A^*)=\begin{cases} n, & r(A)=n, \\ 1, & r(A)=n-1, \\ 0, & r(A)<n-1 \end{cases}$

⑫若 $A^2-(k_1+k_2)A+k_1k_2E=O$，$k_1\neq k_2$，则 $r(A-k_1E)+r(A-k_2E)=n$

⑬ $Ax=0$ 的基础解系所含向量的个数 $s=n-r(A)$

⑭方程组 $A_{m\times n}x=0$ 与 $B_{s\times n}x=0$ 同解 $\Leftrightarrow r(A)=r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}=r(B)$

⑮ $r(\mathrm{I})=r(\mathrm{II})=r(\mathrm{I}, \mathrm{II})\Leftrightarrow$ 向量组（Ⅰ）与向量组（Ⅱ）等价

⑯若 $A\sim\Lambda$，则 $n_i=n-r(\lambda_iE-A)$，其中 λ_i 是 n_i 重特征根

⑰若 $A\sim\Lambda$，则 $r(A)$ 等于非零特征值的个数，重根按重数算

一 定义

设 A 是 $m\times n$ 矩阵，A 中最大的不为零的子式的阶数称为矩阵 A 的秩，记为 $r(A)$．也可以这样定

义：若存在 k 阶子式不为零，而任意 $k+1$ 阶子式全为零（如果有的话），则 $r(A)=k$，且

$$r(A_{n\times n})=n \Leftrightarrow |A|\neq 0 \Leftrightarrow A \text{ 可逆}.$$

【注】用初等变换将 A 化为行阶梯形矩阵，阶梯数即为矩阵的秩.

二 公式

（1）设 A 是 $m\times n$ 矩阵，则 $0\leqslant r(A)\leqslant \min\{m, n\}$.

（2）设 A 是 $m\times n$ 矩阵，则 $r(kA)=r(A)\ (k\neq 0)$.

（3）设 A 是 $m\times n$ 矩阵，P，Q 分别是 m 阶、n 阶可逆矩阵，则

$$r(A)=r(PA)=r(AQ)=r(PAQ).$$

【注】①（3）表明初等变换不改变矩阵的秩.

②若 $r(AB)<r(A)$，B 为 n 阶矩阵，则 $r(B)<n$.

（4）设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times s$ 矩阵.

①若 $r(A)=n$（列满秩），则 $r(AB)=r(B)$.

②若 $r(B)=n$（行满秩），则 $r(AB)=r(A)$.

【注】证　由下面的公式（5）与公式（9），知

$$r(A)+r(B)-n\leqslant r(AB)\leqslant \min\{r(A), r(B)\}. \tag{*}$$

①当 $r(A)=n$ 时，由（*）式得

$$n+r(B)-n\leqslant r(AB)\leqslant r(B),$$

故有 $r(AB)=r(B)$.

②当 $r(B)=n$ 时，同样由（*）式可得

$$r(A)+n-n\leqslant r(AB)\leqslant r(A),$$

故有 $r(AB)=r(A)$.

（5）设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times s$ 矩阵，则 $r(AB)\leqslant \min\{r(A), r(B)\}$.

（6）设 A，B 为同型矩阵，则 $r(A+B)\leqslant r([A, B])\leqslant r(A)+r(B)$.

（7）设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $s\times t$ 矩阵，则 $r\left(\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}\right)=r\left(\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}\right)=r(A)+r(B)$.

（8）设 A，B，C 均是 n 阶方阵，则 $r(A)+r(B)\leqslant r\left(\begin{bmatrix} A & O \\ C & B \end{bmatrix}\right)\leqslant r(A)+r(B)+r(C)$.

【注】证　$r(A)+r(B)=r([A, O])+r([O, B])$

$$=r\left(\begin{bmatrix}A & O\\ O & B\end{bmatrix}\right)\leqslant r\left(\begin{bmatrix}A & O\\ C & B\end{bmatrix}\right)$$

$$\leqslant r([A,\ O])+r([C,\ B])$$

$$\leqslant r(A)+r(B)+r(C).$$

(9) 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times s$ 矩阵，则 $r(AB)\geqslant r(A)+r(B)-n$.

(10) 设 A 是 $m\times n$ 实矩阵，则 $r(A)=r(A^{T})=r(AA^{T})=r(A^{T}A)$.

(11) 设 A 是 n 阶方阵，A^* 是 A 的伴随矩阵，则 $r(A^*)=\begin{cases}n, & r(A)=n,\\ 1, & r(A)=n-1,\\ 0, & r(A)<n-1.\end{cases}$

【注】对于上述结论有以下两点需考生注意.

①上述过程是可逆的，即

$$r(A)=n\Leftrightarrow r(A^*)=n,\ r(A)=n-1\Leftrightarrow r(A^*)=1,\ r(A)<n-1\Leftrightarrow r(A^*)=0.$$

考试也考过这些.

②进一步地，关于 $(A^*)^*$ 的结论，见下例.

设 A 为 $n(n>1)$ 阶方阵，证明：

(1) 当 $n=2$ 时，$(A^*)^*=A$；

(2) 当 $n>2$ 时，若 A 是可逆矩阵，则 $(A^*)^*=|A|^{n-2}A$；

(3) 当 $n>2$ 时，若 A 是不可逆矩阵，则 $(A^*)^*=O$.

证 (1) 设 $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$，则

$$A^*=\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix},\ (A^*)^*=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=A.$$

(2) 由 $A^*=|A|A^{-1}$，得 $(A^*)^*=|A^*|(A^*)^{-1}$，又 $|A^*|=|A|^{n-1}$，故

$$(A^*)^*=|A|^{n-1}(|A|A^{-1})^{-1}=|A|^{n-1}\frac{1}{|A|}A=|A|^{n-2}A.$$

(3) 此时 $r(A)<n$.

若 $r(A)<n-1$，则由上述结论知，此时 $A^*=O$，故 $(A^*)^*=O$；

若 $r(A)=n-1$，则由上述结论知，此时 $r(A^*)=1<n-1$，于是 $(A^*)^*=O$.

综上，此时 $(A^*)^*=O$.

(12) 设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2-(k_1+k_2)A+k_1k_2E=O$，$k_1\neq k_2$，则 $r(A-k_1E)+r(A-k_2E)=n$.

【注】(1) **证** 由 $A^2-(k_1+k_2)A+k_1k_2E=O$，得 $(A-k_1E)(A-k_2E)=O$，于是

$$r(A-k_1E)+r(A-k_2E)\leqslant n.$$

又 $r(A-k_1E)+r(A-k_2E)=r(k_1E-A)+r(A-k_2E)\geqslant r(k_1E-A+A-k_2E)$

$$=r[(k_1-k_2)E]$$

$$=r(E)=n.$$

$k_1\neq k_2$，故 $k_1-k_2\neq 0$

综上，$r(A-k_1E)+r(A-k_2E)=n$.

（2）设 A 为 n 阶方阵，则由上述结论可知

①若 $A^2=A$，则 $r(A)+r(A-E)=n$；

②若 $A^2=E$，则 $r(A+E)+r(A-E)=n$.

（13）设 A 是 $m\times n$ 矩阵，则 $Ax=0$ 的基础解系所含向量的个数 $s=n-r(A)$.

（14）方程组 $A_{m\times n}x=0$ 与 $B_{s\times n}x=0$ 同解 $\Leftrightarrow r(A)=r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=r(B)$.

（15）设两个向量组：（Ⅰ）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，（Ⅱ）$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$，则 r(Ⅰ)$=r$(Ⅱ)$=r$(Ⅰ，Ⅱ)$\Leftrightarrow$ 向量组（Ⅰ）与向量组（Ⅱ）等价.

（16）若 $A\sim\Lambda$，则 $n_i=n-r(\lambda_iE-A)$，其中 λ_i 是 n_i 重特征根.

（17）若 $A\sim\Lambda$，则 $r(A)$ 等于非零特征值的个数，重根按重数算.

例 4.1 已知 $r(A_{3\times3})=2$，$r(AB)=1$，$B=\begin{bmatrix}1&3&a\\-1&-2&1\\2&6&-1\end{bmatrix}$，则 $a=$______.

【解】 应填 $-\dfrac{1}{2}$.

由题意知，$r(AB)<r(A)$，若 $r(B)=3$，则 $r(AB)=r(A)=2$，与已知矛盾，故 $r(B)<3$，则

$$B=\begin{bmatrix}1&3&a\\-1&-2&1\\2&6&-1\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{1倍加至}]{(-2)\text{倍加至}}\begin{bmatrix}1&3&a\\0&1&a+1\\0&0&-2a-1\end{bmatrix},$$

由于 $r(B)<3$，因此 $|B|=-2a-1=0$，故 $a=-\dfrac{1}{2}$.

例 4.2 设 A 是 3 阶矩阵，β_1,β_2,β_3 是互不相同的 3 维列向量，且都不是方程组 $Ax=0$ 的解，记 $B=[\beta_1,\beta_2,\beta_3]$，且满足 $r(AB)<r(A)$，$r(AB)<r(B)$，则 $r(AB)=$（　　）.

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

【解】 应选（B）.

已知 $\beta_i(i=1,2,3)$ 都不是 $Ax=0$ 的解，即 $AB\neq O$，则 $r(AB)\geqslant1$. 又 $r(AB)<r(A)$，则矩阵 B 不可逆（若 B 可逆，则 $r(AB)=r(A)$，这和 $r(AB)<r(A)$ 矛盾），即 $r(B)\leqslant2$，从而 $r(AB)<r(B)\leqslant2$，即 $r(AB)\leqslant1$，从而有 $r(AB)=1$.

【注】若 B 可逆，则有 $r(AB)=r(A)$. 但反之，若 $r(AB)=r(A)$，则不一定有 B 可逆. 如 $A=O$，则有 $r(AB)=r(A)$，B 可为任意矩阵.

例 4.3 设 $A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&a\\2&3&a&4\\3&5&1&9\end{bmatrix}$，若 $r(A^*)=1$，则 $a=$（　　）.

（A）1　　（B）3　　（C）1 或 3　　（D）无法确定

【解】应选（C）.

由 $r(A^*)=1$，得 $r(A)=3$，则 $|A|=0$，即

$$\begin{matrix}(-2)\text{倍加至}\\(-3)\text{倍加至}\end{matrix}\quad 0=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&a\\2&3&a&4\\3&5&1&9\end{vmatrix}\overset{(-1)\text{倍加至}}{=}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&a\\0&1&a-2&2\\0&2&-2&6\end{vmatrix}\quad(-2)\text{倍加至}$$

$$=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&a\\0&0&a-1&2-a\\0&0&0&6-2a\end{vmatrix}=(a-1)(6-2a),$$

解得 $a=1$ 或 $a=3$，经验算，此时均满足 $r(A)=3$，故选（C）.

例 4.4 设 A 是 5 阶方阵，且 $A^2=O$，则 $r(A^*)=$________.

【解】应填 0.

因为

$$A^2=AA=O,\ r(A)+r(A)\leqslant 5,\ r(A)\leqslant 2,$$

从而

$$A^*=O,\ r(A^*)=0.$$

例 4.5 设 $A=\begin{bmatrix}1&3&a\\-1&-2&1\\2&6&1\end{bmatrix}$，若 $Ax=0$ 的基础解系中只有 1 个解向量，则 $a=$________.

【解】应填 $\frac{1}{2}$.

由题意，有 $1=s=3-r(A)$，故 $r(A)=2$，则 $|A|=1-2a=0$，因此 $a=\frac{1}{2}$.

【注】亦可命制成“$Ax=0$ 的任一解均可由一个 3 维非零解向量 ξ 线性表示”，答案不变.

例 4.6 设 A，B 为 n 阶矩阵，记 $r(X)$ 为矩阵 X 的秩，$[X\quad Y]$ 表示分块矩阵，则（　　）.

（A）$r([A\quad AB])=r(A)$　　（B）$r([A\quad BA])=r(A)$

（C）$r([A \quad B])=\max\{r(A),\ r(B)\}$ （D）$r([A \quad B])=r([A^{\mathrm{T}} \quad B^{\mathrm{T}}])$

【解】应选（A）.

法一 一方面，A 是 $[A \quad AB]$ 的子矩阵，因此 $r([A \quad AB])\geqslant r(A)$.

另一方面，$[A \quad AB]$ 是 A 与 $[E \quad B]$ 的乘积，即 $[A \quad AB]=A[E \quad B]$，因此 $r([A \quad AB])\leqslant r(A)$，故 $r([A \quad AB])=r(A)$，选（A）.

法二 设 $C=AB$，则 C 的列向量可由 A 的列向量线性表示，故 $r([A \quad AB])=r([A \quad C])=r(A)$，选（A）.

【注】（1）在法一中，$[A \quad AB]=A[E \quad B]$，但是 $[A \quad BA]\neq[E \quad B]A$，因为不满足乘法规则.

（2）对于选项（B），（C），（D）可举出反例.

取 $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$，则 $BA=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$，从而 $r(A)=1$，$r([A \quad BA])=r\left(\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}\right)=2$，有 $r(A)\neq r([A \quad BA])$，知选项（B）错误；

取 $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$，则 $r(A)=r(B)=1$，而

$$r([A \quad B])=r\left(\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}\right)=2\neq\max\{r(A),\ r(B)\},$$

知选项（C）错误；

取 $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$，则 $r([A \quad B])=r\left(\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\right)=1$，而

$$r([A^{\mathrm{T}} \quad B^{\mathrm{T}}])=r\left(\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}\right)=2\neq r([A \quad B]),$$

知选项（D）也错误.

（3）①若 $A_{m\times n}B_{n\times s}=O$，将 B，O 按列分块，有

$$AB=A[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s]=[A\beta_1,A\beta_2,\cdots,A\beta_s]=[\mathbf{0},\mathbf{0},\cdots,\mathbf{0}],$$

则 $A\beta_i=\mathbf{0}$（$i=1,\ 2,\ \cdots,\ s$），故 β_i（$i=1,\ 2,\ \cdots,\ s$）是 $Ax=\mathbf{0}$ 的解.

②设矩阵 $A_{m\times n}$，$B_{n\times s}$，若 $AB=C$，则 C 是 $m\times s$ 矩阵. 将 B，C 按行分块，有

$$\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\vdots\\\beta_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\gamma_1\\\gamma_2\\\vdots\\\gamma_m\end{bmatrix},$$

则 $\gamma_i=a_{i1}\beta_1+a_{i2}\beta_2+\cdots+a_{in}\beta_n$（$i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$），故 C 的行向量是 B 的行向量的线性组合.

类似地，若 A，C 按列分块，则有

$$[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{bmatrix} = [\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_s],$$

则 $\xi_i=\alpha_1 b_{1i}+\alpha_2 b_{2i}+\cdots+\alpha_n b_{ni}$ $(i=1, 2, \cdots, s)$，故 C 的列向量是 A 的列向量的线性组合．

例 4.7 已知 n 阶矩阵 A，B，C 满足 $ABC=O$，E 为 n 阶单位矩阵，记矩阵 $\begin{bmatrix} O & A \\ BC & E \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} AB & C \\ O & E \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} E & AB \\ AB & O \end{bmatrix}$ 的秩分别为 r_1，r_2，r_3，则（　　）．

（A）$r_1 \leqslant r_2 \leqslant r_3$　　（B）$r_1 \leqslant r_3 \leqslant r_2$　　（C）$r_3 \leqslant r_1 \leqslant r_2$　　（D）$r_2 \leqslant r_1 \leqslant r_3$

【解】应选（B）．

$(-A)$倍加至 $\begin{bmatrix} O & A \\ BC & E \end{bmatrix}$

对于 $\begin{bmatrix} O & A \\ BC & E \end{bmatrix}$，将分块矩阵的第二行的 $-A$ 倍加至第一行，即

$$\begin{bmatrix} E & -A \\ O & E \end{bmatrix}\begin{bmatrix} O & A \\ BC & E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -ABC & O \\ BC & E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & O \\ BC & E \end{bmatrix},$$

其秩 $r_1=n$；

$(-C)$倍加至 $\begin{bmatrix} AB & C \\ O & E \end{bmatrix}$

对于 $\begin{bmatrix} AB & C \\ O & E \end{bmatrix}$，将分块矩阵的第二行的 $-C$ 倍加至第一行，即

$$\begin{bmatrix} E & -C \\ O & E \end{bmatrix}\begin{bmatrix} AB & C \\ O & E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AB & O \\ O & E \end{bmatrix},$$

其秩 $r_2=r(AB)+n$；

$(-AB)$倍加至 $\begin{bmatrix} E & AB \\ AB & O \end{bmatrix}$

对于 $\begin{bmatrix} E & AB \\ AB & O \end{bmatrix}$，先将分块矩阵第一行的 $-AB$ 倍加至第二行，即

$(-AB)$倍加至 $\begin{bmatrix} E & AB \\ O & -ABAB \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} E & O \\ -AB & E \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E & AB \\ AB & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & AB \\ O & -ABAB \end{bmatrix},$$

再将分块矩阵第一列的 $-AB$ 倍加至第二列，即

$$\begin{bmatrix} E & AB \\ O & -ABAB \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E & -AB \\ O & E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & O \\ O & -ABAB \end{bmatrix},$$

其秩 $r_3=r(-ABAB)+n$.

又由于

$$r(AB) \geqslant r(-ABAB) \geqslant 0,$$

于是 $r_2 \geqslant r_3 \geqslant r_1$，故选（B）．

例 4.8 设 $\boldsymbol{A}$ 是 4×3 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 3×4 的非零矩阵，且满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} t & 1 & 1 \\ 9 & t & 3 \\ 7t-18 & 7-2t & 1 \\ 9+t & 1+t & 4 \end{bmatrix},$$

则必有（　　）.

（A）当 $t=3$ 时，$r(\boldsymbol{B})=1$　　（B）当 $t\neq 3$ 时，$r(\boldsymbol{B})=1$

（C）当 $t=3$ 时，$r(\boldsymbol{B})=2$　　（D）当 $t\neq 3$ 时，$r(\boldsymbol{B})=2$

【解】应选（B）.

由题设 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，知 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leqslant 3$（3 是 $\boldsymbol{A}$ 的列数或 $\boldsymbol{B}$ 的行数）.

因 $\boldsymbol{B}$ 是非零矩阵，故 $r(\boldsymbol{B})\geqslant 1$，从而有 $1\leqslant r(\boldsymbol{B})\leqslant 3-r(\boldsymbol{A})$.

又

(−3)倍加至　(−4)倍加至　(−1)倍加至　2倍加至　(−1)倍加至

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} t & 1 & 1 \\ 9 & t & 3 \\ 7t-18 & 7-2t & 1 \\ 9+t & 1+t & 4 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} t & 1 & 1 \\ 9-3t & t-3 & 0 \\ 6t-18 & 6-2t & 0 \\ 9-3t & t-3 & 0 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} t & 1 & 1 \\ 9-3t & t-3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

当 $t=3$ 时，$r(\boldsymbol{A})=1$，故 $1\leqslant r(\boldsymbol{B})\leqslant 2$，$r(\boldsymbol{B})=1$ 或 $r(\boldsymbol{B})=2$，故（A），（C）不成立.

当 $t\neq 3$ 时，$r(\boldsymbol{A})=2$，故 $1\leqslant r(\boldsymbol{B})\leqslant 1$，得 $r(\boldsymbol{B})=1$.

故应选（B）.