第 9 章　一元函数积分学的计算

A组

1. 设函数 $f(x)$ 有连续导数，当 $x>0$ 时，满足 $f(\ln x)=\dfrac{1}{x^2}$，则$\int_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x=$（　　）.

(A) $\dfrac{3\mathrm{e}^{-2}-1}{2}$　　(B) $\dfrac{3\mathrm{e}^{2}-1}{2}$　　(C) $\dfrac{\mathrm{e}^{-2}+1}{2}$　　(D) $\dfrac{\mathrm{e}^{2}+1}{2}$

2. $\int \dfrac{1}{\sqrt{x(4-x)}}\mathrm{d}x=$ ________.

3. $\int \sin^3 x\cos^2 x\mathrm{d}x=$ ________.

4. $\int \dfrac{2x-6}{x^2-6x+13}\mathrm{d}x=$ ________.

5. $\int \dfrac{1}{\sin^2 x\cos^4 x}\mathrm{d}x=$ ________.

6. $\int \dfrac{\sin x-3\cos x}{\sin^3 x}\mathrm{d}x=$ ________.

7. $\int \dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=$ ________.

8. $\int \dfrac{1}{(1-x)\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x=$ ________.

9. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}=$ ________.

10. $\int \mathrm{e}^x\left(\dfrac{1-x}{1+x^2}\right)^2\mathrm{d}x=$ ________.

11. 设 $f(x)$ 连续，$\int \dfrac{1}{x}f(x)\mathrm{d}x=\sin x+C$，则$\int f(x)\mathrm{d}x=$ ________.

12. $\int \dfrac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x=$ ________.

13. $\int_0^3 \arcsin\sqrt{\dfrac{x}{1+x}}\mathrm{d}x=$ ________.

14. 已知 $f(x)$ 在$[0,1]$上有连续的导数，$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1$，$f(1)=0$，则$\int_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x=$ ________.

15. 设$\frac{\ln x}{x}$是$f(x)$的一个原函数，则$\int_1^e xf'(x)\mathrm{d}x=$________.

16. $\int_0^2 |x-x^2|\mathrm{d}x=$________.

17. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{3e^x\sin^2 x}{1+e^x}\mathrm{d}x=$________.

18. $\int_0^1 \frac{x}{e^x+e^{1-x}}\mathrm{d}x=$________.

19. 设$f(x)$连续，则$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t\right]=$________.

20. 设$f'(\ln x)=\begin{cases}1, & 0<x\leqslant 1,\\ x, & x>1,\end{cases}$且$f(0)=0$，则$f(x)=$________.

21. 求$\int_1^2 \frac{2x^2+x+1}{(2x-1)(2x^2+x-1)}\mathrm{d}x$.

22. 设$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{1+x}, & x\geqslant 0,\\ \frac{1}{1+e^x}, & x<0,\end{cases}$求$\int_0^2 f(x-1)\mathrm{d}x$.

23. 已知$f(x)$为连续函数，$\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t=1-\cos x$，求$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$的值.

24. 设$g(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，其中

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(x^2+1), & 0\leqslant x<1,\\ \frac{1}{3}(x-1), & 1\leqslant x\leqslant 2,\end{cases}$$

求$g(x)$，并判定其在$[0,2]$上的连续性与可导性.

25. 设函数$f(x)$在$[0,+\infty)$上可导，$f(0)=0$，且存在反函数$g(x)$. 若$\int_0^{f(x)} g(t)\mathrm{d}t+\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=xe^x-e^x+1$，求$f(x)$.

B组

1. 设$a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$，$b_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\mathrm{d}t$，则极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{na_n}{b_n}=$(　　).

(A)1　　(B)0　　(C)-1　　(D)∞

2. 设$f(x)$在区间$[a,b]$上具有一阶导数，且$f'(x)>0$，则$F(x)=\int_a^b |f(x)-f(t)|\mathrm{d}t$在开区间$(a,b)$内(　　).

(A) 严格单调增加　　(B) 严格单调减少

(C) 存在极大值点　　(D) 存在极小值点

3. 设函数 $f(x)=\int_0^1|x-t|\mathrm{d}t+\int_0^x\sqrt{x^2-t^2}\mathrm{d}t(0<x<+\infty)$，则 $f(x)$（　　）.

(A) 仅有最小值　　(B) 仅有最大值

(C) 既有最小值又有最大值　　(D) 既无最小值又无最大值

4. $\int_0^1\arctan\sqrt{\frac{x}{1-x}}\mathrm{d}x=$ ________.

5. $\int_0^{+\infty}\frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x^3}}\mathrm{d}x=$ ________.

6. $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(\mathrm{e}x)}{1+x^2}\mathrm{d}x=$ ________.

7. $\int_{-2}^2\max\left\{x^2,\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right\}\mathrm{d}x=$ ________.

8. 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内连续，且对任意正值 a 与 b，积分 $\int_a^{ab}f(x)\mathrm{d}x$ 的值与 a 无关，且 $f(1)=1$，则 $f(x)=$ ________.

9. 求 $\int\frac{1+x^2+x^4}{x^3(1+x^2)}\ln(1+x^2)\mathrm{d}x$.

10. 求不定积分 $\int\frac{1}{x^3}\arcsin\frac{1}{x}\mathrm{d}x$.

11. 已知 $\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}(0\leqslant t\leqslant\pi)$，求 $\int_0^{\pi a}y^3\mathrm{d}x$.

12. 求 $\int_{\mathrm{e}^{\frac{1}{4}}}^{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{\ln x(1-\ln x)}}$.

13. 求 $I=\int_0^{\ln 2}\frac{x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x+\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1}\mathrm{d}x$.

14. 求 $I=\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$，其中 $f(x)=\int_1^{\sqrt{x}}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$.

15. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，且 $f(x)=x+\int_0^\pi f(x)\sin^5x\mathrm{d}x$，求 $\int_0^\pi f(x)\cos^4x\mathrm{d}x$.

16. 设 $f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(1+\cos\frac{x}{n}+\cos\frac{2x}{n}+\cdots+\cos\frac{n-1}{n}x\right), & x>0,\\ 1, & x=0,\\ f(-x), & x<0.\end{cases}$

(1) 求 $f'(0)$；

(2) 求 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的最大值.

17. 设 $f(x)=\min\{(x-k)^2,(x-k-2)^2\}$，$k$ 为任意实数，$g(k)=\int_0^1f(x)\mathrm{d}x$. 求 $g(k)$ 在 $-1\leqslant k\leqslant 1$ 上的最值.

18. 设 $\lambda\in\mathbf{R}$，证明：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+(\tan x)^\lambda}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+(\cot x)^\lambda}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$.

19. 证明：$\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

C组

1. 设可导函数 $y=f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上的值域是 $[0,+\infty)$，$f(0)=0$，$f'(x)>0$，$x=\varphi(y)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数. 记 $I=\int_0^a f(x)\mathrm{d}x+\int_0^b \varphi(y)\mathrm{d}y$，常数 $a,b>0$，若 $a<\varphi(b)$，则(　　).

(A) $I>ab$　　　　(B) $I<ab$

(C) $I=ab$　　　　(D) I 与 ab 的大小关系不确定

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-1}^{2}(\arctan nx)^3\mathrm{d}x=$ ________.

3. 设 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}x$（$n$ 为非负整数），证明：

(1) $I_n+I_{n-2}=\dfrac{1}{n-1}(n\geqslant 2)$，并由此求 I_n；

(2) $\dfrac{1}{2(n+1)}<I_n<\dfrac{1}{2(n-1)}(n\geqslant 2)$.

4. 求 $I_n=\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\mathrm{d}x$.

5. 求 $\int_{e^{-2n\pi}}^{1}\left|\left[\cos\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)\right]'\right|\ln\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$（$n$ 为正整数）.

6. 设 n 为正整数，$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin 2nx}{\sin x}\mathrm{d}x$.

(1) 证明：$I_n-I_{n-1}=(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{2}{2n-1}(n\geqslant 2)$；

(2) 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin 6x}{\sin x}\mathrm{d}x$.

7. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的导数，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin nx\mathrm{d}x=0$.