第7讲 一元函数微分学的应用（三）——物理应用与经济应用

知识结构

- 物理应用（仅数学一、数学二）——以“A 对 B 的变化率”为核心写 $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}B}$ 的表达式
- 经济应用（仅数学三）
  - 经济学中常见的函数
    - 需求函数
    - 供给函数
    - 成本函数
    - 收益（入）函数
    - 利润函数
  - 边际函数与边际分析
    - 边际成本
    - 边际收益
    - 边际利润
  - 弹性函数与弹性分析
    - 需求的价格弹性
    - 供给的价格弹性
    - 收益的价格弹性

一 物理应用（仅数学一、数学二）

以“A 对 B 的变化率”为核心，写出 $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}B}$ 的表达式，并依题意进行计算即可，常与相关变化率综合考查.

例 7.1 一容器的内表面是由曲线 $x=y+\sin y\left(0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$（单位：m）绕 y 轴旋转一周所得的旋转面（见图 7-1）. 现以 $\frac{\pi}{16}\ \mathrm{m^3/s}$ 的速率往容器中加水，则当水面高度为 $\frac{\pi}{4}$ m 时，水面上升的速率为________.

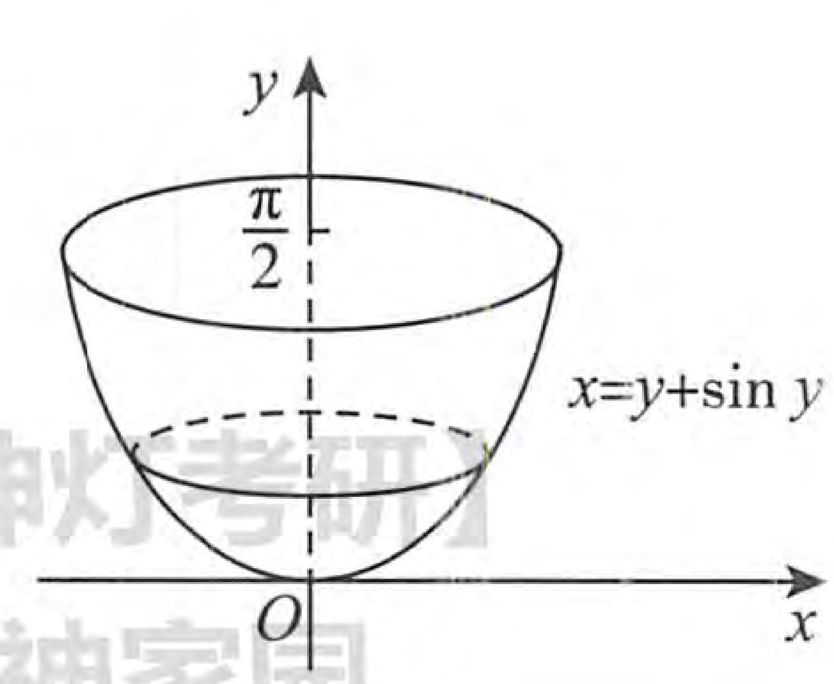

图 7-1

【解】应填 $\frac{1}{(\pi+2\sqrt{2})^2}$ m/s.

设加水 t s时水面的高度为 y m，则此时水的体积为

$$V=\pi\int_0^y x^2(u)\mathrm{d}u=\pi\int_0^y(u+\sin u)^2\mathrm{d}u,$$

故

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\pi(y+\sin y)^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},$$

又 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\frac{\pi}{16}$ m^3/s，于是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{(y+\sin y)^2}\cdot\frac{1}{16},$$

故

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{y=\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\cdot 16}=\frac{1}{(\pi+2\sqrt{2})^2}(\mathrm{m/s}).$$

二 经济应用（仅数学三）

1. 经济学中常见的函数

(1) 需求函数.

设某产品的需求量为 Q，价格为 p，则 $Q=Q(p)$ 称为**需求函数**，且 Q 一般为单调减少函数.

(2) 供给函数.

设某产品的供给量为 q，价格为 p，则 $q=q(p)$ 称为**供给函数**，且 q 一般为单调增加函数.

(3) 成本函数.

设生产产品的总投入为 C，它由固定成本 C_1（常量）和可变成本 $C_2(Q)$ 两部分组成，其中 Q 表示产量. 成本函数为 $C=C(Q)=C_1+C_2(Q)$. 称 $\frac{C}{Q}$ 为**平均成本**，记为 $\bar{C}$ 或 AC，即

$$AC=\bar{C}=\frac{C}{Q}=\frac{C_1}{Q}+\frac{C_2(Q)}{Q}.$$

(4) 收益(入)函数.

设产品售出后所得的收益为 R，则

$$R=R(Q)=pQ,$$

其中 p 是价格，Q 是销售量.

(5) 利润函数.

设收益扣除成本后的利润为 L，则

$$L=L(Q)=R(Q)-C(Q),$$

其中 Q 为销售量.

2. 边际函数与边际分析

在经济学中，若函数 $f(x)$ 可导，则称 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的**边际函数**. $f'(x_0)$ 称为 $f(x)$ 在 x_0

点的**边际值**,用边际函数来分析经济量的变化叫**边际分析**.

由 $\Delta y \approx \mathrm{d}y$,即 $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x$,取 $\Delta x=1$,得 $f(x_0+1)-f(x_0)\approx f'(x_0)$.

于是,边际值 $f'(x_0)$ 被解释为在 x_0 点,当 x 改变一个单位时,函数 $f(x)$ 近似(实际问题中,经常略去"近似"二字)改变 $|f'(x_0)|$ 个单位. $f'(x_0)$ 的符号反映自变量的改变与因变量的改变是同向还是反向.

(1) 边际成本.

设总成本函数为 $C=C(Q)$(Q 为产量),则**边际成本函数**(记为 MC)为 $MC=C'(Q)$.

(2) 边际收益.

设总收益函数为 $R=R(Q)$(Q 为销售量),则**边际收益函数**(记为 MR)为 $MR=R'(Q)$.

(3) 边际利润.

设利润函数为 $L=L(Q)$(Q 为销售量),则**边际利润函数**(记为 ML)为 $ML=L'(Q)$.

3. 弹性函数与弹性分析

在经济学中,把因变量对自变量变化的反应的灵敏度,称为**弹性**或**弹性系数**. 设函数 $y=f(x)$ 可导,称

$$\eta=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{y}\Big/\frac{\Delta x}{x}=\frac{x}{y}y'=\frac{x}{f(x)}f'(x)$$

为函数 $y=f(x)$ 的**弹性函数**,称

$$\eta\Big|_{x=x_0}=\frac{x_0}{f(x_0)}f'(x_0)$$

为函数 $f(x)$ 在 x_0 处的**(点)弹性**.

$\eta\Big|_{x=x_0}$ 表示在 x_0 处,当自变量 x 改变 1% 时,因变量 y 将改变 $\left|\eta\Big|_{x=x_0}\right|\%=\left|\frac{x_0}{f(x_0)}f'(x_0)\right|\%$. 其符号反映自变量 x 与因变量 y 的改变是同向还是反向.

用弹性函数来分析经济量的变化叫**弹性分析**.

(1) 需求的价格弹性.

$$\eta_d=\frac{EQ}{Ep}=\frac{p}{Q}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}p}=\frac{p}{Q(p)}Q'(p).$$

一般地,需求函数单调减少,故 $Q'(p)<0$,从而 $\eta_d<0$.

其经济意义:当价格为 p 时,若提价(降价)1%,则需求量将减少(增加)$|\eta_d|\%$.

【注】若题设要求 $\eta_d>0$,则取 $\eta_d=-\frac{p}{Q(p)}Q'(p)$.

(2) 供给的价格弹性.

$$\eta_s=\frac{Eq}{Ep}=\frac{p}{q}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}p}=\frac{p}{q(p)}q'(p).$$

一般地,供给函数单调增加,故 $q'(p)>0$,从而 $\eta_s>0$.

其经济意义：当价格为 p 时，若提价(降价)1%，则供给量将增加(减少)η_s%.

(3) 收益的价格弹性.

$$\eta_r=\frac{ER}{Ep}=\frac{p}{R}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}p}=\frac{p}{R(p)}R'(p).$$

一般地，收益函数单调增加，故 $R'(p)>0$，从而 $\eta_r>0$.

其经济意义：当价格为 p 时，若提价(降价)1%，则收益将增加(减少)η_r%.

例 7.2 设生产某商品的固定成本为 60 000 元，可变成本为 20 元 / 件，价格函数为 $p=60-\frac{Q}{1\ 000}$(p 是单价，单位：元；Q 是销量，单位：件). 已知产销平衡，求：

(1) 该商品的边际利润函数；

(2) 当 $p=50$ 元时的边际利润，并解释其经济意义；

(3) 使得利润最大的单价 p.

【解】(1) 成本函数 $C(Q)=60\ 000+20Q$，收益函数 $R(Q)=pQ=60Q-\frac{Q^2}{1\ 000}$，利润函数 $L(Q)=R(Q)-C(Q)=-\frac{Q^2}{1\ 000}+40Q-60\ 000$，故该商品的边际利润函数 $L'(Q)=-\frac{Q}{500}+40$.

(2) 当 $p=50$ 元时，销量 $Q=10\ 000$(件)，$L'(10\ 000)=20$(元).

其经济意义：销售第 10 001 件商品所得的利润为 20 元.

(3) 令 $L'(Q)=-\frac{Q}{500}+40=0$，得 $Q=20\ 000$(件)，且 $L''(20\ 000)<0$，故当 $Q=20\ 000$ 件时利润最大，此时 $p=40$(元).

例 7.3 设某商品需求量 Q 是价格 p 的单调减少函数：$Q=Q(p)$，其中需求弹性 $\eta=\frac{2p^2}{192-p^2}>0$.

(1) 设 $R=R(p)$ 为总收益函数，证明 $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}p}=Q(1-\eta)$；

(2) 求当 $p=6$ 时，总收益对价格的弹性，并说明其经济意义.

(1)【证】由题设得 $R(p)=pQ(p)$. 两边对 p 求导，得

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}p}=Q+p\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}p}=Q\left(1+\frac{p}{Q}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}p}\right)=Q(1-\eta).$$

(2)【解】$\frac{ER}{Ep}=\frac{p}{R}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}p}=\frac{p}{pQ}Q(1-\eta)=1-\eta=1-\frac{2p^2}{192-p^2}=\frac{192-3p^2}{192-p^2}$.

$$\left.\frac{ER}{Ep}\right|_{p=6}=\frac{192-3\times 6^2}{192-6^2}=\frac{7}{13}\approx 0.54.$$

其经济意义：当 $p=6$ 时，若价格上涨 1%，则总收益将增加 0.54%.

例 7.4 以 p_A, p_B 分别表示 A, B 两种商品的价格，设商品 A 的需求函数为

$$Q_A=500-p_A^2-p_Ap_B+2p_B^2,$$

则当 $p_A=10, p_B=20$ 时，商品 A 的需求量对自身价格的弹性 $\eta_{AA}(\eta_{AA}>0)$ 为________.

【解】应填 0.4.

根据弹性的定义，有

$$\eta_{AA}=-\frac{p_A}{Q_A}\cdot\frac{\partial Q_A}{\partial p_A}=-\frac{p_A}{Q_A}\cdot(-2p_A-p_B)=\frac{p_A(2p_A+p_B)}{500-p_A^2-p_Ap_B+2p_B^2},$$

故当 $p_A=10, p_B=20$ 时，$\eta_{AA}=0.4$.