第12讲 一元函数积分学的应用（三）——物理应用与经济应用

知识结构

- 物理应用(微元法)(仅数学一、数学二)
  - 位移大小与总路程
    - 位移大小——$\int_{t_1}^{t_2} v(t)\mathrm{d}t$
    - 总路程——$\int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\mathrm{d}t$
  - 变力沿直线做功——$W=\int_a^b F(x)\mathrm{d}x$
  - 静水压力——$P=\rho g\int_a^b x[f(x)-h(x)]\mathrm{d}x$
  - 细杆质心——$\bar{x}=\dfrac{\int_a^b x\rho(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b \rho(x)\mathrm{d}x}$
- 经济应用(仅数学三)
  - 求平均量——$\bar{y}=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b y(x)\mathrm{d}x$
  - 求总量——$Q(t)=Q(t_0)+\int_{t_0}^{t} Q'(u)\mathrm{d}u, t>t_0$

一 物理应用(微元法)(仅数学一、数学二)

1. 位移大小与总路程

位移大小：

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)\mathrm{d}t,$$

总路程：

$$\int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\mathrm{d}t,$$

其中 $v(t)$ 为时间 t_1 到 t_2 上的速度函数.

例 12.1 质点以速度 $v=\dfrac{1}{(1+t^2)(1+t^\alpha)}(\alpha\geqslant 0)\mathrm{m/s}$ 作直线运动，当初速度 $v_0=1\ \mathrm{m/s}$ 时，质点所能走过的最远距离为________.

【解】 应填 $\dfrac{\pi}{4}$ m.

记速度函数 $v(t)=\dfrac{1}{(1+t^2)(1+t^\alpha)}$，则所求为

$$\int_0^{+\infty} v(t)\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+t^\alpha)},$$

令 $t=\dfrac{1}{x}$，得到 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+t^\alpha)}=\int_{+\infty}^{0}\frac{-x^\alpha\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$，又

$$\int_{+\infty}^{0}\frac{-x^\alpha\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}=\int_0^{+\infty}\frac{t^\alpha\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+t^\alpha)},$$

故质点所能走过的最远距离为

$$\begin{aligned}s&=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+t^\alpha)}=\int_0^{+\infty}\frac{t^\alpha\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+t^\alpha)}\\&=\frac{1}{2}\left[\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+t^\alpha)}+\int_0^{+\infty}\frac{t^\alpha\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+t^\alpha)}\right]\\&=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\frac{1}{2}\arctan t\Big|_0^{+\infty}\\&=\frac{\pi}{4}(\mathrm{m}).\end{aligned}$$

2. 变力沿直线做功

设方向沿 x 轴正向的力函数为 $F(x)(a\leqslant x\leqslant b)$，则物体沿 x 轴从点 a 移动到点 b 时，变力 $F(x)$ 所做的功（见图 12-1）为

$$W=\int_a^b F(x)\mathrm{d}x,$$

功的元素 $\mathrm{d}W=F(x)\mathrm{d}x$.

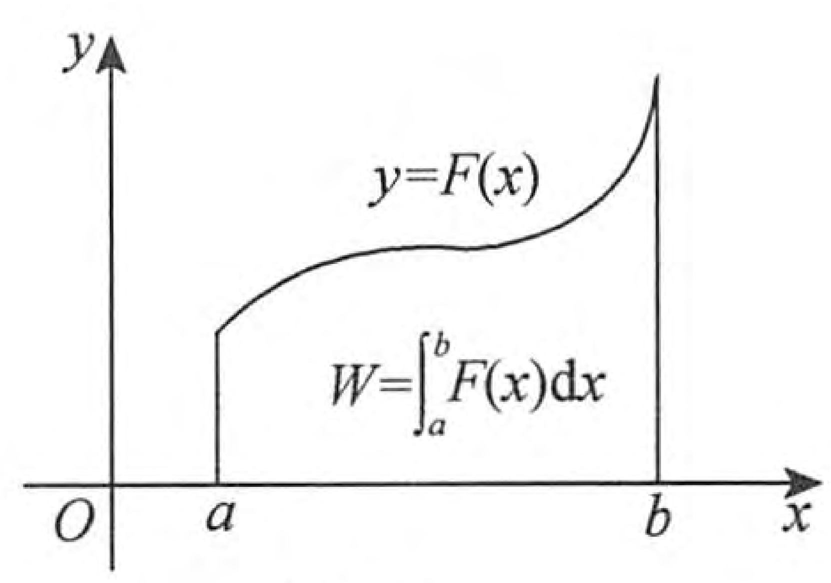


图 12-1

【注】常考抽水做功.

如图 12-2 所示，将容器中的水全部抽出所做的功为

$$W=\rho g\int_a^b xA(x)\mathrm{d}x,$$

其中 ρ 为水的密度，g 为重力加速度.

功的元素 $\mathrm{d}W=\rho gxA(x)\mathrm{d}x$ 为位于 x 处厚度为 $\mathrm{d}x$，水平截面面积为 $A(x)$ 的一层水被抽出（路程为 x）所做的功.

求解这类问题的关键是确定 x 处的水平截面面积 $A(x)$，其余的量都是固定的.

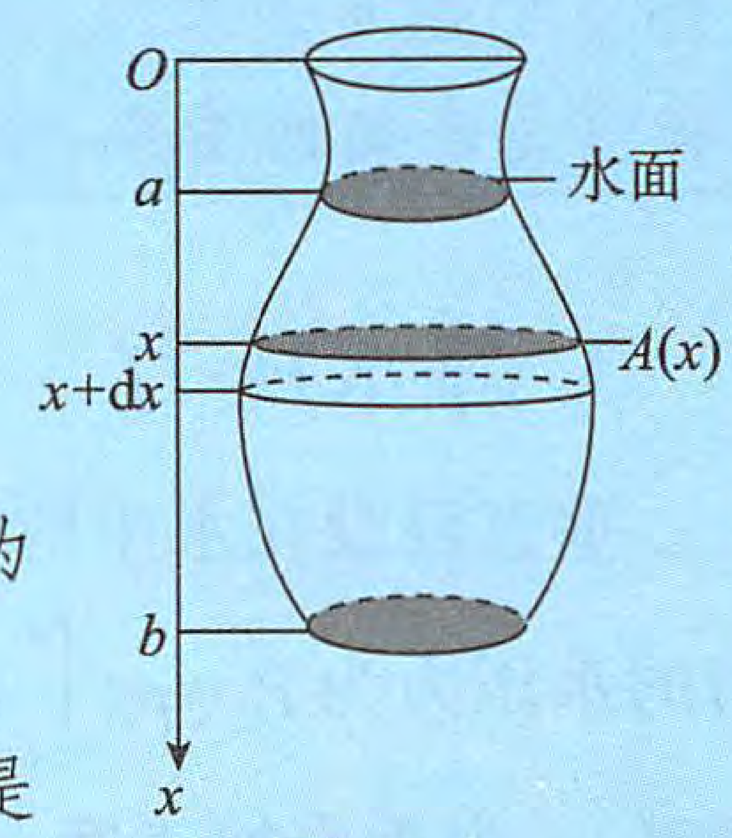


图 12-2

例 12.2 设曲线 $L:y=\tan x^2\left(0\leqslant x\leqslant\sqrt{\dfrac{\pi}{4}}\right)$.

(1) 求直线 $y=1$，曲线 L 以及 y 轴围成的平面图形绕 y 轴旋转一周所得到的旋转体体积 V；

(2) 记曲线 L 绕 y 轴旋转一周所得到的旋转曲面为 S，该旋转曲面作为容器盛满水（水的质量密度（单位体积水的重力）等于 1），如果将其中的水抽完，求外力做功 W.

【解】(1) 如图 12-3 所示，由 $y=\tan x^2\left(0\leqslant x\leqslant\sqrt{\frac{\pi}{4}}\right)$，得到

$$x=\sqrt{\arctan y}\,(0\leqslant y\leqslant 1),$$

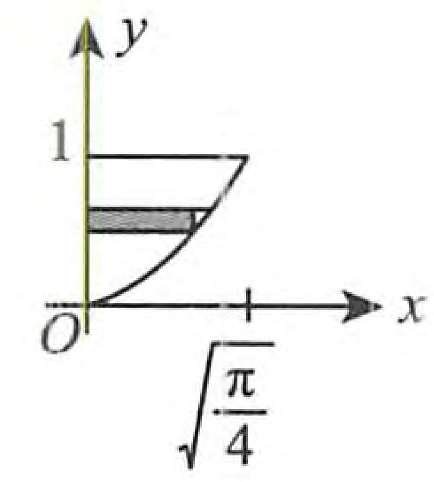


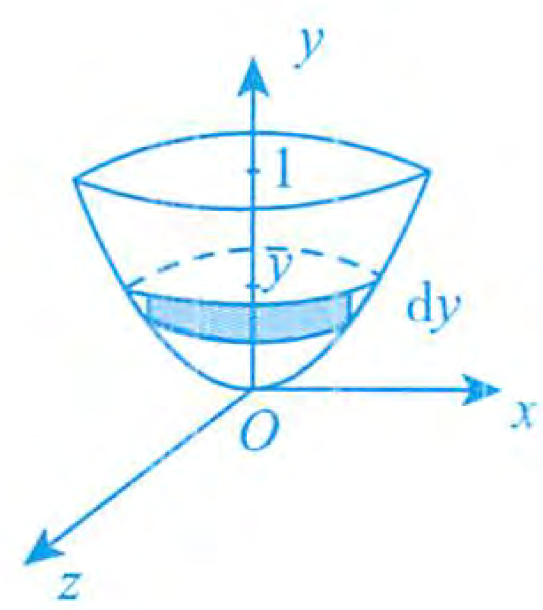
图 12-3

于是

$$V=\pi\int_0^1\arctan y\,\mathrm{d}y=\pi y\arctan y\Big|_0^1-\pi\int_0^1\frac{y}{1+y^2}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi}{2}\ln(1+y^2)\Big|_0^1=\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

(2) 用微元法. $\mathrm{d}W=\pi x^2\mathrm{d}y\cdot(1-y)=\pi\cdot\arctan y\mathrm{d}y\cdot(1-y)$，于是



$$W=\pi\int_0^1(1-y)\arctan y\,\mathrm{d}y=\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi}{2}\ln 2-\pi\int_0^1 y\arctan y\,\mathrm{d}y,\quad(*)$$

其中

$$\int_0^1 y\arctan y\,\mathrm{d}y=\frac{y^2}{2}\arctan y\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{y^2}{1+y^2}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+y^2}\right)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}(y-\arctan y)\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.$$

将上式计算结果代入($*$)式，得 $W=\frac{\pi}{2}(1-\ln 2)$.

【注】由 $y=\tan x^2$ 知，当 $x\geqslant 0$ 时，$y'=\sec^2x^2\cdot 2x\geqslant 0$，于是当 $0\leqslant x\leqslant\sqrt{\frac{\pi}{4}}$ 时 y 为单调增加函数，$y''=2\sec x^2\cdot\sec x^2\cdot\tan x^2\cdot 2x\cdot 2x+2\sec^2x^2>0$，说明当 $0\leqslant x\leqslant\sqrt{\frac{\pi}{4}}$ 时 y 的图形是凹的. 这些求导过程虽不一定要写在答卷上，但作为考生，一定要验算清楚才能画出正确的草图，保证做题的正确性.

3. 静水压力

垂直浸没在水中的平板 $ABCD$(见图 12-4) 的一侧受到的水压力为 $P=\rho g\int_a^b x[f(x)-h(x)]\mathrm{d}x$，其中 ρ 为水的密度，g 为重力加速度.

压力元素 $\mathrm{d}P=\rho gx[f(x)-h(x)]\mathrm{d}x$，即图中矩形条所受到的压力. x 表示水深，$f(x)-h(x)$ 是矩形条的宽度，$\mathrm{d}x$ 是矩形条的高度.

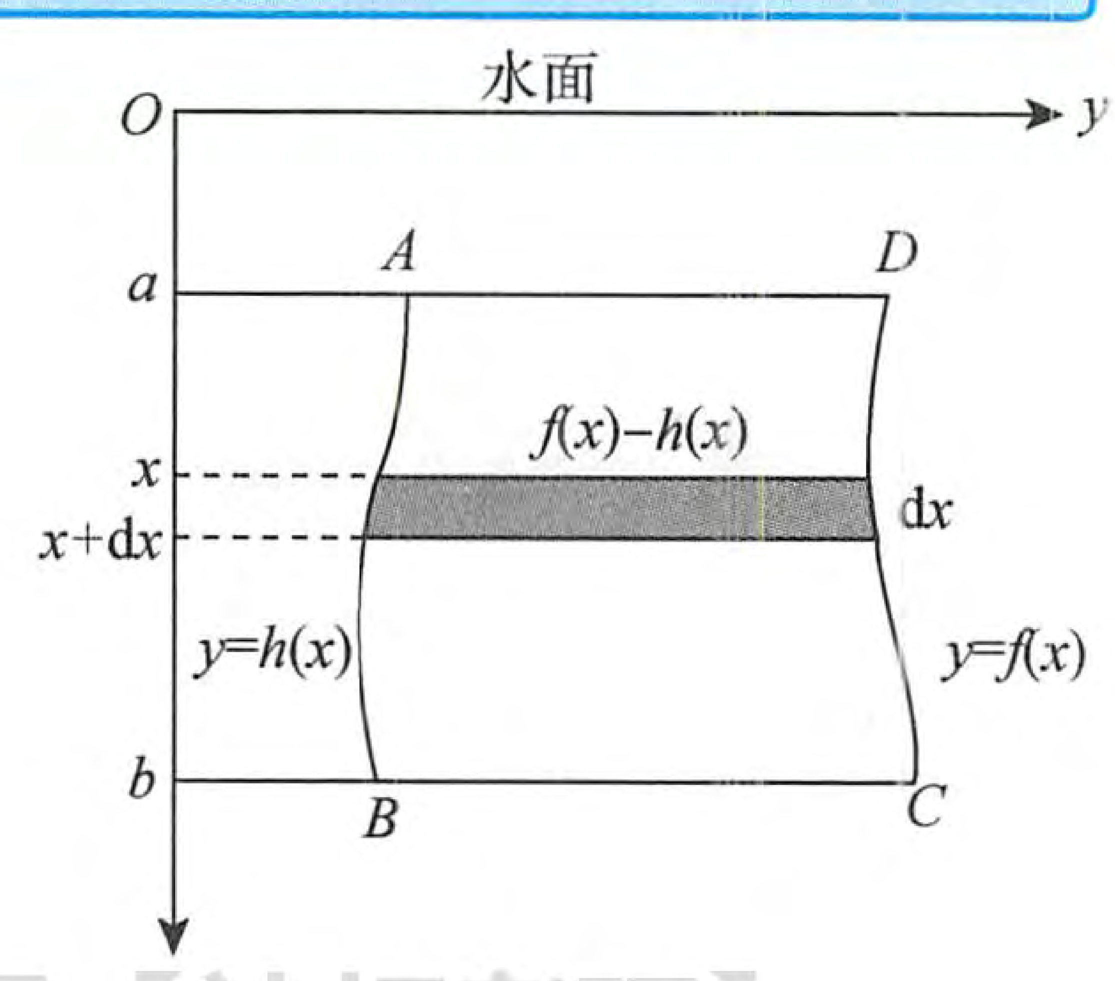


图 12-4

【注】水压力问题的特点：压强随水的深度的改变而改变. 求解这类问题的关键是确定水深 x 处的平板的宽度 $f(x)-h(x)$.

例 12.3 斜边长为 $2a$ 的等腰直角三角形平板铅直地沉没在水中，且斜边与水面相齐. 记重力加速度为 g，水的密度为 ρ，则该平板一侧所受的水压力为________.

【解】应填 $\frac{1}{3}a^3\rho g$.

如图 12-5 所示，该平板一侧所受的水压力为

$$P=\int_0^a 2\rho g(a-y)y\,\mathrm{d}y=2\rho g\int_0^a(ay-y^2)\,\mathrm{d}y=2\rho g\left(\frac{a^3}{2}-\frac{a^3}{3}\right)=\frac{1}{3}a^3\rho g.$$

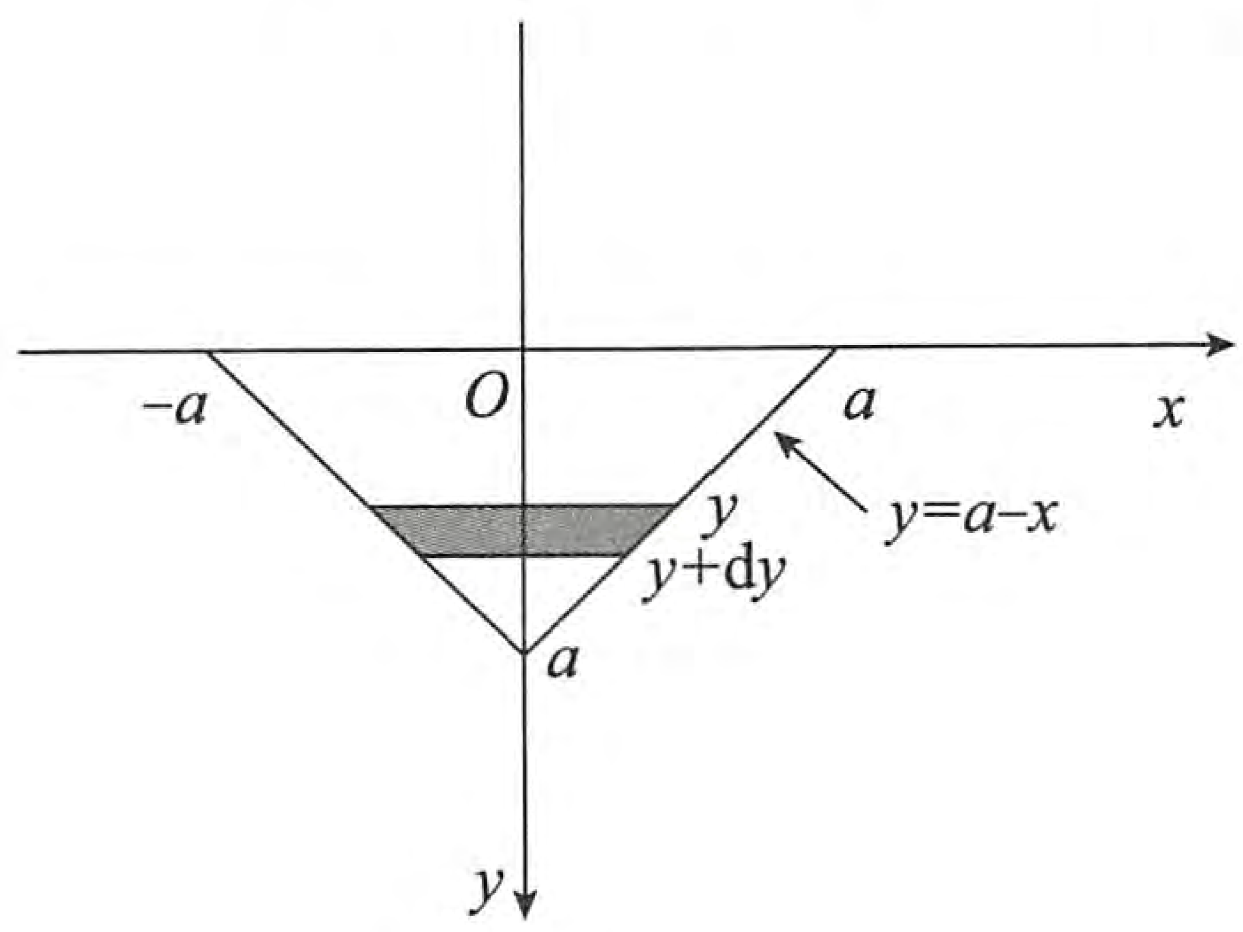


图 12-5

4. 细杆质心

设直线段上的线密度为 $\rho(x)$ 的细直杆（见图 12-6），则其质心为

$$\bar{x}=\frac{\int_a^b x\rho(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b \rho(x)\,\mathrm{d}x}.$$

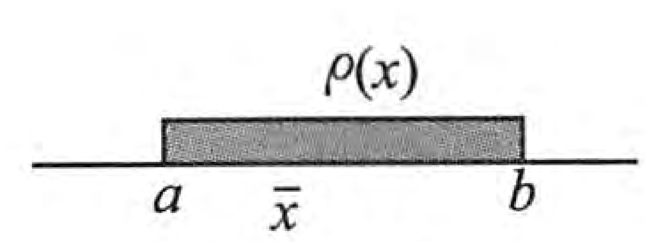


图 12-6

例 12.4 设 L 是位于 x 轴的区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的质杆，已知 L 上任一点 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 处的线密度为 $\rho(x)=1+\sin x$，则该质杆的质心坐标 $\bar{x}=$________.

【解】应填 $\frac{2}{\pi}$.

$$\bar{x}=\frac{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\rho(x)\,\mathrm{d}x}{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho(x)\,\mathrm{d}x}=\frac{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x(1+\sin x)\,\mathrm{d}x}{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\sin x)\,\mathrm{d}x}=\frac{2}{\pi}.$$

二 经济应用（仅数学三）

1. 求平均量

$$\bar{y}=\frac{1}{b-a}\int_a^b y(x)\,\mathrm{d}x.$$

例 12.5 设某公司在 t 时刻的资产为 $f(t)$，从 0 时刻到 t 时刻的平均资产等于 $\frac{f(t)}{t}-t$，假设 $f(t)$ 连续且 $f(0)=0$，则 $f(t)=$ ________.

【解】应填 $-2(1+t)+2e^t$.

依题设，有 $\frac{f(t)}{t}-t=\frac{1}{t}\int_0^t f(t)dt$，即 $f(t)-t^2=\int_0^t f(t)dt$，等式两边求导，得

$$f'(t)-2t=f(t),$$

即

$$f'(t)-f(t)=2t,$$

则

$$f(t)=e^{-\int(-1)dt}\left[\int 2te^{\int(-1)dt}dt+C\right]=e^t\left(\int 2t\cdot e^{-t}dt+C\right)$$

$$=e^t[-2(1+t)e^{-t}+C]=-2(1+t)+Ce^t.$$

由 $f(0)=-2+C=0$，故 $C=2$，得

$$f(t)=-2(1+t)+2e^t.$$

2. 求总量

$$Q(t)=Q(t_0)+\int_{t_0}^t Q'(u)du, t>t_0.$$

例 12.6 已知生产某产品的边际成本为 $C'(x)=x^2-4x+6$(单位:元 / 件)，边际收益为 $R'(x)=105-2x$，其中 x 为产量. 已知没有产品时没有收益，且固定成本为 100 元. 若生产的产品都会售出，求产量为多少时，利润最大，并求出最大利润.

【解】利润函数为 $L(x)=R(x)-C(x)$. 又

$$L'(x)=R'(x)-C'(x)=105-2x-(x^2-4x+6)$$

$$=(11-x)(9+x),$$

令 $L'(x)=0$，得 $x=11$(因 $x>0$，故 $x=-9$ 舍去)，且有

$$L''(x)=2-2x, L''(11)=-20<0,$$

故 $x=11$ 为 $L(x)$ 唯一的极大值点，即为最大值点，于是当产量为 11 件时，利润最大.

由题设，$R(0)=0$，$C(0)=100$，于是

$$L_{\max}=L(11)=L(0)+\int_0^{11}L'(x)dx=R(0)-C(0)+\int_0^{11}[R'(x)-C'(x)]dx$$

$$=-100+\int_0^{11}(99+2x-x^2)dx$$

$$=-100+\left(99x+x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{11}=\frac{1\,999}{3}(\text{元}).$$