第 15 章　微分方程

A 组

1. 微分方程 $x\mathrm{d}y=(y-\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x(x>0)$ 满足 $y(1)=0$ 的特解是(　　).

(A) $\sqrt{x^2+y^2}+2y=x$　　(B) $\sqrt{x^2+y^2}+y=1$

(C) $\sqrt{x^2+y^2}-2y=x$　　(D) $\sqrt{x^2+y^2}-y=1$

2. 设以下 A,B,a,b 均为常数，则微分方程 $y''-3y'+2y=x\mathrm{e}^{2x}-2x+1$ 的特解形式为(　　).

(A)$x(ax+b)\mathrm{e}^{2x}+Ax+B$　　(B)$(ax+b)\mathrm{e}^{2x}+Ax+B$

(C)$x(ax+b)\mathrm{e}^{2x}+x(Ax+B)$　　(D)$(ax+b)\mathrm{e}^{2x}+x(Ax+B)$

3. 设 $y=\mathrm{e}^{2x}+(1+x)\mathrm{e}^{x}$ 是二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+\alpha y'+\beta y=\gamma\mathrm{e}^{x}$ 的一个特解，则该方程的通解为(　　).

(A)$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{2x}$　　(B)$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{2x}$

(C)$y=C_1\mathrm{e}^{x}+C_2\mathrm{e}^{2x}+x\mathrm{e}^{x}$　　(D)$y=C_1\mathrm{e}^{x}+C_2\mathrm{e}^{2x}+2x\mathrm{e}^{x}$

4. 以 $y=x$ 与 $y=x\mathrm{e}^{-2x}$ 为特解的最低阶常系数齐次线性微分方程为(　　).

(A)$y'''+2y''=0$　　(B)$y'''+4y''+4y'-4y=0$

(C)$y^{(4)}+2y'''=0$　　(D)$y^{(4)}+4y'''+4y''=0$

5. 设函数 $f(x)$ 二阶导数连续且满足方程

$$f(x)-1=\int_0^x f(1-t)\mathrm{d}t,$$

则 $f(x)=$(　　).

(A)$\cos x+\dfrac{1+\sin 1}{\cos 1}\sin x$　　(B)$\cos x-\dfrac{1+\sin 1}{\cos 1}\sin x$

(C)$\sin x+\dfrac{\cos 1}{1+\sin 1}\cos x$　　(D)$\sin x-\dfrac{\cos 1}{1+\sin 1}\cos x$

6. 微分方程 $3\mathrm{e}^{x}\tan y\mathrm{d}x+(1-\mathrm{e}^{x})\sec^2 y\mathrm{d}y=0$ 的通解是________.

7. 微分方程$(y^2+1)\mathrm{d}x=y(y-2x)\mathrm{d}y$ 的通解是________.

8. 已知某三阶常系数齐次线性微分方程有两个特解，分别为 $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$ 与 e^{x}，则该微分方程为________.

9. 设可导函数 $f(x)$ 满足 $f'(x)=f(\pi-x)$，且 $f(0)=1$，则 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=$ ________.

10. 设曲线 $y=y(x)$ 满足微分方程 $y'''-y'=0$，且该曲线在原点处有拐点并以 $y-2x=0$ 为切

线，则 $y(x) =$ ________.

11. 求 $xy''-y'\ln y'+y'\ln x=0$ 满足 $y(1)=2$ 和 $y'(1)=\mathrm{e}^2$ 的特解.

12. 求 $y''=\mathrm{e}^{2y}+\mathrm{e}^y$ 满足 $y(0)=0, y'(0)=2$ 的特解.

13. 求二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+\lambda y'=2x+1$ 的通解，其中 λ 为常数.

14. 设 $y(x)$ 是方程 $y^{(4)}-y''=0$ 的解，且当 $x\to 0$ 时，$y(x)$ 是 x 的 3 阶无穷小，求 $y(x)$.

15. 设函数 $f(x)$ 具有连续的一阶导数，且满足 $f(x)=\int_0^x (x^2-t^2)f'(t)\mathrm{d}t+x^2$，求 $f(x)$ 的表达式.

16. 已知曲线 $y=y(x)$ 经过点 $(1,\mathrm{e}^{-1})$，且点 (x,y) 处的切线在 y 轴上的截距为 xy，求该曲线方程的表达式.

17. 设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数，且 $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{f(u)}{u}=2$，又 $z=f(\mathrm{e}^y\cos x)$ 满足

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\mathrm{e}^{2y}z,$$

求 $f(u)$ 的表达式.

18. 设方程 $y'+P(x)y=x^2$，其中 $P(x)=\begin{cases}1, & x\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{x}, & x>1.\end{cases}$ 求在 $(-\infty,+\infty)$ 内的连续函数 $y=y(x)$，使之在 $(-\infty,+\infty)$ 内都满足方程，且满足初值条件 $y(0)=2$.

B组

1. 设以下 A,B,a,b 均为常数，则微分方程 $y''-4y'+5y=\mathrm{e}^{2x}\sin x-3x+2$ 的特解形式为（　　）.

(A) $(a\sin x+b\cos x)\mathrm{e}^{2x}+Ax+B$　　(B) $x(a\sin x+b\cos x)\mathrm{e}^{2x}+Ax+B$

(C) $(a\sin x+b\cos x)\mathrm{e}^{2x}+x(Ax+B)$　　(D) $x(a\sin x+b\cos x)\mathrm{e}^{2x}+x(Ax+B)$

2. 设 $p(x)$ 是 $[a,+\infty)$ 上的非负连续函数，若微分方程 $\mathrm{d}y+p(x)y\mathrm{d}x=0$ 的任一解均满足 $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=0$，则 $p(x)$ 必然满足（　　）.

(A) $\lim\limits_{x\to+\infty}p(x)=0$　　(B) $\lim\limits_{x\to+\infty}p(x)=+\infty$

(C) $\int_a^{+\infty}p(x)\mathrm{d}x$ 收敛　　(D) $\int_a^{+\infty}p(x)\mathrm{d}x$ 发散

3. 以 $\mathrm{e}^x\sin^2 x$ 为特解的最低阶常系数齐次线性微分方程为（　　）.

(A) $y'''-3y''+7y'-5y=0$　　(B) $y'''-y''+7y'-5y=0$

(C) $3y'''-y''+7y'-5y=0$　　(D) $y'''-3y''-5y'+7y=0$

4. 设函数 $y=y(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，$y(1)=1$，且当 $x\neq 0$ 时满足方程 $y'(x)=\dfrac{y(x)}{x}+x\int_0^1 y(x)\mathrm{d}x$，则 $\int_0^1 y(x)\mathrm{d}x=$ ________.

5. 微分方程 $(y^2-2x)\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=0$ 满足 $x=1$ 时 $y=2$ 的特解是 $y=$ ________.

6. 微分方程 $(1+\mathrm{e}^{-\frac{x}{y}})y\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y=0$ 的通解为________.

7. 微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{y}{2x}=\dfrac{1}{2y}\tan\dfrac{y^2}{x}$ 满足初始条件 $y(2)=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ 的特解是________.

8. 设 $y_1=xe^x+2e^{2x}$，$y_2=xe^x+3e^{-x}$，$y_3=xe^x-e^{2x}-e^{-x}$ 为某二阶常系数非齐次线性微分方程的三个特解，设该方程的 y'' 前的系数为 1，则该方程为________.

9. 已知 $y=f(x)$ 是微分方程 $xy'-y=\sqrt{2x-x^2}$ 满足初值条件 $f(1)=0$ 的特解，则 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=$________.

10. 设 $y_0=2xe^{-3x}$ 是二阶常系数齐次线性微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的一个解，函数 $y(x)$ 是该方程满足条件 $y(0)=2,y'(0)=-5$ 的解，则 $\int_0^{+\infty} y(x)\mathrm{d}x=$ ________.

11. 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{1-y}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2=0$ 满足条件 $y\Big|_{x=0}=0,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0}=2$ 的特解.

12. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内连续可导，且 $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-1}{x-1}=\frac{1}{3}$. 当 $x>0$ 时，曲线 $y=f(x)$ 上点 $(x,f(x))$ 处的切线在 y 轴上的截距等于 $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，求 $f(x)$.

13. 设 $y(x)$ 是微分方程 $y''+(x+1)y'+x^2y=e^x$ 满足 $y(0)=0,y'(0)=1$ 的解，并设 $\lim\limits_{x\to0}\frac{y(x)-x}{x^k}$ 存在且不为零，求正整数 k 和该极限值.

14. 设可微函数 $f(x)$ 满足方程 $f(x)=e^x+e^x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，求 $\int_{-\infty}^0 f(x)\mathrm{d}x$.

15. 求微分方程 $\begin{cases} y''+y=x, & x\leqslant\frac{\pi}{2}, \\ y''+4y=0, & x>\frac{\pi}{2} \end{cases}$ 满足条件 $y\Big|_{x=0}=0$，$y'\Big|_{x=0}=0$ 且在 $x=\frac{\pi}{2}$ 处可导的特解.

16. 用变量代换 $x=\tan t\left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$ 将微分方程

$$(1+x^2)^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+2x(1+x^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

化为以 $y=y(t)$ 为未知函数的微分方程，并求原方程满足初始条件 $y\Big|_{x=0}=y'\Big|_{x=0}=1$ 的特解.

17. 设 $f(x)$ 为可导的正值偶函数，且 $f(x)$ 不为常值函数，$f(0)=1$. 已知对于 x 轴上的任意闭区间 $[a,b]$，以 $[a,b]$ 为底边，以曲线 $y=f(x)$ 为曲边的曲边梯形的面积在数值上总等于曲线 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的弧长，求函数 $f(x)$ 的解析式.

18. 位于上半平面且图形是凹的曲线 $y=y(x)$ 在点 $(0,1)$ 处的切线斜率为 0，在点 $(2,2)$ 处的切线斜率为 1. 已知曲线上任一点处的曲率半径与 $\sqrt{y}$ 及 $1+(y')^2$ 的乘积成正比，求该曲线方程.

19. 设 $y_1(x)=x(1-2x)$，$y_2(x)=2x(1-x)$，$y_3(x)=x(e^x-2x)$ 是微分方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$$

的 3 个解，其中 $p(x),q(x),f(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 内的连续函数，求此微分方程及其通解.

20. 已知二阶微分方程 $y''+ay'+by=ce^x$ 有特解 $y=e^{-x}(1+xe^{2x})$，求此微分方程的通解.

21. (1) 设 $y(1)=-\frac{1}{6}$，$y'(1)=0$. 计算变限积分

$$\int_1^x[t^2y''(t)+4(t+1)y'(t)+2y(t)]\mathrm{d}t,$$

使得结果中不含 $y''(x)$，也不含积分号；

(2) 求微分方程

$$x^2y''(x)+4(x+1)y'(x)+2y(x)=\frac{2}{x^3},x\in(0,+\infty)$$

满足初始条件 $y(1)=-\frac{1}{6},y'(1)=0$ 的特解.

22. 设函数 $f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且满足方程

$$f(t)=\mathrm{e}^{-4\pi t^2}-\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4t^2} f\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}\sigma,$$

求 $f(t)$ 的表达式.

23. 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的二阶可导函数，满足关系式 $f(x)+2f'(x+\pi)=\sin x$，求 $f(x)$.

24. 设定义在 $(0,+\infty)$ 内的函数 $y=f(x)$ 满足微分方程 $xy''+3y'=3$，且有 $f(1)=3$，$\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{5}{2}$. 求：

(1) 函数 $y=f(x)$ 的表达式；

(2) 函数 $y=f(x)$ 的单调区间与极值；

(3) 曲线 $y=f(x)$ 在 $x\geqslant 1$ 的部分绕其斜渐近线旋转一周所得的旋转体的体积 V.

25. 设 $a>0$，函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续有界，证明：微分方程 $y'+ay=f(x)$ 的解在 $[0,+\infty)$ 上有界.

C组

1. 设 $p(x),q(x),f(x)$ 均是 x 的已知连续函数，$y_1(x),y_2(x),y_3(x)$ 分别是非齐次微分方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的3个线性无关的解，C_1,C_2 是两个任意常数，则该非齐次微分方程对应的齐次微分方程的通解是(　　).

(A) $C_1y_1+(C_2-C_1)y_2+(1-C_2)y_3$

(B) $(C_1-C_2)y_1+(C_2-1)y_2+(1-C_1)y_3$

(C) $(C_1+C_2)y_1+(C_1-C_2)y_2+(1-C_1)y_3$

(D) $C_1y_1+C_2y_2+(1-C_1-C_2)y_3$

2. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\frac{x^2}{a^2+k}+\frac{y^2}{b^2+k}=1(x,y>0)$ 确定，其中参数 $|a|\neq|b|,k>0$，则 $y=y(x)$ 满足微分方程(　　).

(A) $(a^2-b^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\left(x+y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y\right)$

(B) $(a^2-b^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\left(x-y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y\right)$

(C) $(a^2+b^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\left(x+y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y\right)$

(D) $(a^2+b^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\left(x-y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y\right)$

3. 求微分方程$\dfrac{d^2y}{dx^2}+(x+\sin y)\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3=0$满足初值条件$y(0)=0,y'(0)=\dfrac{2}{3}$的特解.

4. 适当选取函数$\varphi(x)$，作变量代换$y=\varphi(x)u$，将y关于x的微分方程$\dfrac{d^2y}{dx^2}+x\dfrac{dy}{dx}+\left(\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{1}{2}\right)y=0$化为$u$关于$x$的二阶常系数齐次线性微分方程$\dfrac{d^2u}{dx^2}+\lambda u=0$，求$\varphi(x)$及常数$\lambda$，并求原方程满足$y(0)=1,y'(0)=0$的特解.

5. 设$f(x)$具有一阶连续导数，且满足$x=\int_0^x f(t)dt+\int_0^x tf(t-x)dt$，求$f(x)$的表达式.

6. 设微分方程$xy'+2y=2(e^x-1)$.

(1) 求上述微分方程的通解，并求使$\lim\limits_{x\to0}y(x)$存在的解(将该解记为$y_0(x)$)，以及极限值$\lim\limits_{x\to0}y_0(x)$；

(2) 补充定义使$y_0(x)$在$x=0$处连续，求$y_0'(0)$，并证明无论$x\neq0$还是$x=0$，$y_0'(x)$均连续，并写出$y_0'(x)$的表达式.

7. 设$\varphi(x)$是以2π为周期的连续函数，且$\Phi'(x)=\varphi(x)$，$\Phi(0)=0$.

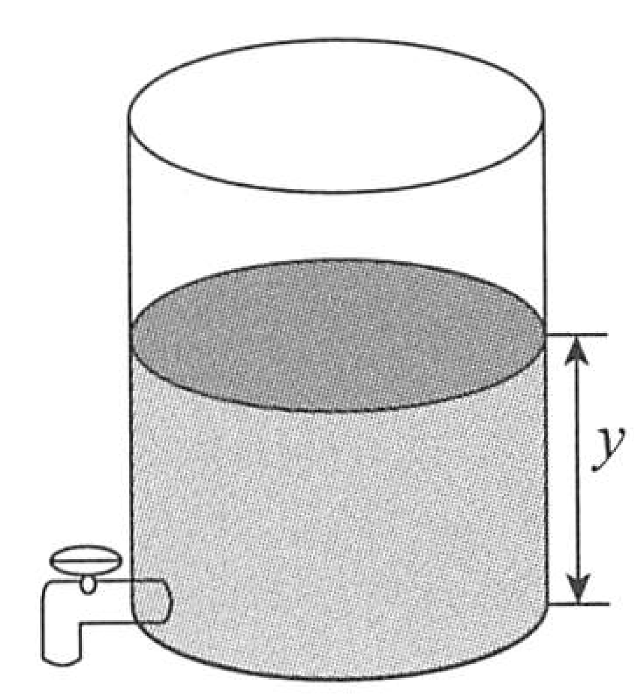
(1) 求方程$y'+y\sin x=\varphi(x)e^{\cos x}$的通解；

(2)(1) 中方程是否有以2π为周期的解？若有，请写出所需条件，若没有，请说明理由.

8. 求一条凹曲线，已知其上任意一点处的曲率$k=\dfrac{1}{2y^2\,|\cos\alpha|}$，其中$\alpha$为该曲线在相应点处的切线的倾斜角，且该曲线在点$(1,1)$处的切线为水平方向.

9. 一长为l(米)、线密度为ρ(千克/米)的链条，两端各系一个质量为m(千克)的物体A与B. 开始时，仅A下垂，其余部分平置于桌面上，假设物体、链条与桌面的摩擦均略而不计. 问从开始算起经过多少时间，链条全部从桌面上滑下？

10. 如图所示，正圆柱形水桶中装满水，当打开水桶底部的水龙头时，随着水的流出，水面高度y逐渐下降. 当水面高度y较大时，水的流出速率较快；当水面高度y越来越小时，流出速率也越来越小. 设水面高度y的下降速率与y的平方根成正比，即



$$\frac{dy}{dt}=-k\sqrt{y},$$

其中k为正的比例常数.

(1) 求水面高度y对于时间t的函数关系；

(2) 设$k=\dfrac{1}{10}$，当$t=0$时，$y=9$，问需要多长时间水桶中的水才能流光(t的单位是min，y的单位是m)？