第 9 章 二次型

A组

1. 下列矩阵中，是正定矩阵的是（　　）.

(A)$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&0&1\\0&1&2\end{bmatrix}$　　(B)$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&1&-1\\1&5&0\\-1&0&-2\end{bmatrix}$

(C)$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&4&2\\0&2&1\end{bmatrix}$　　(D)$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&1&-1\\0&-1&5\end{bmatrix}$

2. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=x_1^2+5x_2^2+x_3^2-4x_1x_2+2x_2x_3$，则对任意 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，均有（　　）.

(A)$f(x_1,x_2,x_3)>0$　　(B)$f(x_1,x_2,x_3)\geqslant 0$

(C)$f(x_1,x_2,x_3)<0$　　(D)$f(x_1,x_2,x_3)\leqslant 0$

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行元素乘 2 得到矩阵 $\boldsymbol{B}$，再将矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的第 1 列元素乘 2 得到矩阵 $\boldsymbol{C}$，若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 与矩阵 $\boldsymbol{C}^{-1}$（　　）.

(A) 合同但不相似　　(B) 相似但不合同

(C) 合同且相似　　(D) 不合同也不相似

4. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的秩为 1，$\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 中各行元素之和为 3，则 f 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为________.

5. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2+x_3)^2+(x_1-x_2-2x_3)^2+(x_1-x_2+ax_3)^2$ 的秩等于 2，则 $a=$ ________.

6. 若二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+ax_2^2+x_3^2+2x_1x_2-2x_2x_3-2ax_1x_3$$

的正、负惯性指数都是 1，则 $a=$ ________.

7. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=k\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$，若 $\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵，则 k 的取值范围为________.

8. 已知 $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+cx_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$ 的秩为 2. 确定常数 c 的值，并求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$，化二次型 f 为标准形.

9. 设实对称矩阵 $A=\begin{bmatrix}0 & -1 & 4\\ -1 & 3 & -1\\ 4 & -1 & 0\end{bmatrix}$,求使得二次型 $f_1(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 与 $f_2(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}$ 都化为标准形的正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$,并写出它们的标准形.

10. 设 A 为 3 阶实对称矩阵,且有可逆矩阵 $P=\begin{bmatrix}1 & -1 & b\\ 1 & a & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$ 满足 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$,求:

(1) 二次型 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的规范形及二次型 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}$ 的标准形;

(2) $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}$.

B组

1. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$,则二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}(a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n)^2$ 的矩阵是(　　).

(A) A^2　　(B) $A+A^T$　　(C) A^TA　　(D) AA^T

2. 设 A 为 3 阶实对称矩阵,A_{ij} 是 A 中元素 a_{ij} 的代数余子式,$i,j=1,2,3$,$\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,x_3]^T$,$\boldsymbol{y}=[y_1,y_2,y_3]^T$,若 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 经正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 化为 $3y_1^2-2y_2^2+y_3^2$,则 $g(x_1,x_2,x_3)=\sum\limits_{i=1}^{3}\sum\limits_{j=1}^{3}\dfrac{A_{ij}}{|A|}x_ix_j$ 经可逆变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 可化为规范形(　　).

(A) $y_1^2+y_2^2+y_3^2$　　(B) $y_1^2+y_2^2-y_3^2$

(C) $-y_1^2+y_2^2-y_3^2$　　(D) $-y_1^2-y_2^2-y_3^2$

3. 设 A 为 3 阶实对称矩阵,$A^2+2A=O$,$r(A)=2$,且 $A+kE$ 为正定矩阵,其中 E 为 3 阶单位矩阵,则 k 应满足的条件是(　　).

(A) $k>0$　　(B) $k\geqslant 0$

(C) $k>2$　　(D) $k\geqslant 2$

4. 下列二次型中,是正定二次型的是(　　).

(A) $f_1(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_4)^2+(x_4-x_1)^2$

(B) $f_2(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2+(x_3+x_4)^2+(x_4+x_1)^2$

(C) $f_3(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1-x_2)^2+(x_2+x_3)^2+(x_3-x_4)^2+(x_4+x_1)^2$

(D) $f_4(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1-x_2)^2+(x_2+x_3)^2+(x_3+x_4)^2+(x_4+x_1)^2$

5. 设 3 阶矩阵 A 的列向量组为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$,行向量组为 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$,即 $A=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\ \boldsymbol{\beta}_2\\ \boldsymbol{\beta}_3\end{bmatrix}$,若 $B=[-\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3]$ 与 $C=\begin{bmatrix}-\boldsymbol{\beta}_1\\ \boldsymbol{\beta}_2\\ -\boldsymbol{\beta}_3\end{bmatrix}$ 均是对称矩阵,则 B 与 C(　　).

(A) 相似但不合同　　(B) 合同但不相似

(C) 不相似也不合同　　　　(D) 相似且合同

6. 实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的秩为 r，符号差为 s，且 f 和 $-f$ 对应的矩阵合同，则必有（　　）.

(A) r 是偶数，$s=1$　　　　(B) r 是奇数，$s=1$

(C) r 是偶数，$s=0$　　　　(D) r 是奇数，$s=0$

7. 设3阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和均为2，其主对角线元素之和为5，秩 $r(\boldsymbol{A})=2$，则二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 满足条件 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ 的最大值为（　　）.

(A) $\dfrac{1}{5}$　　　　(B) $\dfrac{1}{2}$

(C) 2　　　　(D) 3

8. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2+kx_3)^2+(x_3+x_1)^2$ 的秩为2，则该二次型经正交变换所得的标准形为________.

9. 设 $\boldsymbol{A}$ 为4阶实对称矩阵，且 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$. 若 $\boldsymbol{A}$ 的秩为3，则二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 在正交变换下的标准形为________.

10. 若 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2ax_1x_2-2x_1x_3+x_2^2+4x_2x_3+5x_3^2$ 的规范形为 $y_1^2+y_2^2+y_3^2$，则 a 的取值范围为________.

11. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}a\\1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$，若二次型 $f(x_1,x_2)=\sum\limits_{i=1}^{2}(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{x})^2$ 正定，其中 $(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{x})$ 表示向量 $\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{x}$ 的内积，则 a 的取值范围是________.

12. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&2&-1\\0&-1&-4\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-5\end{bmatrix}$，若存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{\Lambda}$，则 $\boldsymbol{C}=$________.

13. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$ 的正惯性指数为________.

14. 设 $\boldsymbol{A}$ 是3阶实对称矩阵，$\lambda_1=\lambda_2=3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值，$\boldsymbol{\alpha}_1=[1,1,0]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[2,1,1]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=[1,-1,2]^{\mathrm{T}}$ 都是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值3的特征向量. 又设二次型 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的符号差为2，则矩阵 $\boldsymbol{A}=$________.

15. 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为3维实单位列向量，求：

(1) 齐次线性方程组 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解；

(2) 矩阵方程 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}_{3\times3}$ 的全部解；

(3) 二次型 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x}$ 的秩与正惯性指数.

16. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$（$\boldsymbol{A}$ 是3阶实对称矩阵）经正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 化为标准形 $2y_1^2-y_2^2-y_3^2$. 又设 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$，其中 $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，$\boldsymbol{\alpha}=[1,1,-1]^{\mathrm{T}}$.

(1) 求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$；

(2) 求 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的表达式；

(3) 用配方法将 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形，写出标准形和配方法对应的可逆线性变换.

17. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&2&0\\8&2&0\\0&a&6\end{bmatrix}$ 可相似对角化.

(1) 求常数 a 的值；

(2) 求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$,使得二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 化为标准形,并写出标准形.

18. 已知 $f(x,y)=x^2+4xy+y^2$,求正交变换 $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}$ 中的矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得

$$f(x,y)=2u^2+2\sqrt{3}uv.$$

19. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&k&1\\0&0&1&2\end{bmatrix}$,已知 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值为 3.

(1) 求 k;

(2) 求矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $(\boldsymbol{AP})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AP})$ 为对角矩阵.

20. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 m 阶实对称矩阵且正定,$\boldsymbol{B}$ 为 $m\times n$ 实矩阵,$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的转置矩阵. 证明:$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB}$ 为正定矩阵的充分必要条件是 $r(\boldsymbol{B})=n$.

21. (1) 设 n 元实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$,其中 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,且满足

$$\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n,$$

证明:对任意 n 维列向量 $\boldsymbol{x}$,有

$$\lambda_1\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\leqslant\lambda_n\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x};$$

(2) 设 $f(x_1,x_2,x_3)=[x_1,x_2,x_3]\begin{bmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$,当 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ 时,求 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的最大值.

C组

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵,$\lambda=5$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值,对应的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1=[1,-1,2]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\xi}_2=[1,2,1]^{\mathrm{T}}$,则二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 在 $\boldsymbol{x}_0=[1,5,0]^{\mathrm{T}}$ 的值 $f(1,5,0)=\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0\mid_{\boldsymbol{x}_0=[1,5,0]^{\mathrm{T}}}=$ ________.

2. (1) 设二次型 $f(x,y,z)=2x^2+y^2-4xy-4yz$,用正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 将其化为标准形,并写出 $\boldsymbol{Q}$;

(2) 求函数 $g(x,y,z)=\dfrac{2x^2+y^2-4xy-4yz}{x^2+y^2+z^2}(x^2+y^2+z^2\neq0)$ 的最大值,并求出一个最大值点.

3. 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=[x_1,x_2,x_3]\begin{bmatrix}1&-4&6\\0&a&-12\\0&0&b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$ 的规范形为 z_1^2.

(1) 求常数 a,b 的值;

(2) 求一个正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$,将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形.

4. (1) 设 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+6x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$,用可逆线性变换将 f 化为标准形,求出所作的可逆线性变换,并说明二次型的对应矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵;

(2) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 6 \end{bmatrix}$，求可逆矩阵 D，使 $A = D^{T}D$.

5. 设方阵 A_1 与 B_1 合同，A_2 与 B_2 合同，证明：$\begin{bmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{bmatrix}$与$\begin{bmatrix} B_1 & \\ & B_2 \end{bmatrix}$合同.

6. 设 A 与 B 均为正交矩阵，并且 $|A|+|B|=0$. 证明：$A+B$ 不可逆.