第 8 章　相似理论

A组

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶方阵，有 3 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}=$（　　）.

(A) $\begin{bmatrix}1&&\\&\frac{1}{2}&\\&&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$　(B) $\begin{bmatrix}3&&\\&6&\\&&2\end{bmatrix}$　(C) $\begin{bmatrix}2&&\\&3&\\&&6\end{bmatrix}$　(D) $\begin{bmatrix}6&&\\&3&\\&&2\end{bmatrix}$

2. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&2&-3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&4\\0&0&-3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}2&1&-5\\0&1&0\\1&1&-4\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}2&3&4\\0&1&-2\\5&1&-2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&-3\end{bmatrix}$，则在 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 中与 $\boldsymbol{\Lambda}$ 相似的矩阵有（　　）.

(A) $\boldsymbol{A},\boldsymbol{C}$　(B) $\boldsymbol{A},\boldsymbol{D}$　(C) $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$　(D) $\boldsymbol{B},\boldsymbol{D}$

3. 已知 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&6&0\\0&0&6\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_1$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 $\lambda=2$ 的特征向量，$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 $\lambda=6$ 的线性无关的特征向量，那么矩阵 $\boldsymbol{P}$ 不能是（　　）.

(A) $[\boldsymbol{\alpha}_1,-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$　(B) $[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3]$

(C) $[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2]$　(D) $[\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$

4. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵，$\boldsymbol{A}$ 可逆且 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则下列命题中：

①$\boldsymbol{AB}\sim\boldsymbol{BA}$；　②$\boldsymbol{A}^2\sim\boldsymbol{B}^2$；　③$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\sim\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$；　④$\boldsymbol{A}^{-1}\sim\boldsymbol{B}^{-1}$.

正确的个数为（　　）.

(A)1　(B)2　(C)3　(D)4

5. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&1\\a&4&b\\-3&-3&c\end{bmatrix}$，若 $\boldsymbol{A}$ 有二重特征值 $\lambda=2$，且 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化，则 $a+b+c=$ ________.

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵，$\boldsymbol{b}=[9,18,-18]^{\mathrm{T}}$，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有通解

$$k_1[-2,1,0]^{\mathrm{T}}+k_2[2,0,1]^{\mathrm{T}}+[1,2,-2]^{\mathrm{T}},$$

其中 k_1,k_2 是任意常数，求 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{A}^{100}$.

7. 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每行元素之和均为 0，又存在线性无关的向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$，使得 $\boldsymbol{A\alpha}=3\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A\beta}=3\boldsymbol{\alpha}$.

(1) 证明 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化；

(2) 当 $\boldsymbol{\alpha}=[0,-1,1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=[1,0,-1]^{\mathrm{T}}$ 时，求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

8. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&1&x\end{bmatrix}$ 的一个特征值为 1，求一个正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使 $(\boldsymbol{AQ})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AQ})$ 为对角矩阵.

9. 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&-2&0\\-2&1&-2\\0&-2&0\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&-2&-2\\-2&2&0\\-2&0&0\end{bmatrix},$$

问 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是否相似？并说明理由.

10. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为线性无关的 3 维列向量，且满足

$$\boldsymbol{A\alpha}_1=\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{2}{3}\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{A\alpha}_2=\frac{2}{3}\boldsymbol{\alpha}_2+\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{A\alpha}_3=-\frac{1}{6}\boldsymbol{\alpha}_3.$$

(1) 求矩阵 $\boldsymbol{B}$，使得 $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\boldsymbol{B}$；

(2) 证明 $\boldsymbol{A}$ 与(1) 中的 $\boldsymbol{B}$ 相似；

(3) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值并计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{A}^n$.

11. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&a&2\\5&b&3\\-1&1&-1\end{bmatrix}$，已知 $\lambda_1=1$ 与 $\lambda_2=-1$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，问 $\boldsymbol{A}$ 能否相似对角化？若不能相似对角化，则说明理由；若能相似对角化，则求一个可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵.

B组

1. 下列矩阵中不可相似对角化的是(　　).

(A) $\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&-3\end{bmatrix}$　　(B) $\begin{bmatrix}1&0&0\\1&2&0\\1&1&-3\end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix}1&1&1\\-1&-1&-1\\-2&-2&-2\end{bmatrix}$　　(D) $\begin{bmatrix}1&1&1\\2&2&2\\-3&-3&-3\end{bmatrix}$

2. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ 是 2 阶实矩阵，条件 ① $ad-bc<0$，② b,c 同号，③ $b=c$，④ b,c 异号，则①，②，③，④ 中是 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角矩阵的充分条件的所有序号为(　　).

(A)①③　　(B)②③④　　(C)③④　　(D)①②③

3. 设 $A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$，矩阵 B 相似于矩阵 A，记 $r(B-E)=r_1$，$r(B+E)=r_2$，$r(B+2E)=r_3$，则(　　).

(A)$r_1<r_2<r_3$　　(B)$r_2<r_1<r_3$

(C)$r_3<r_2<r_1$　　(D)$r_1<r_3<r_2$

4. 设 A，B 是 n 阶实对称可逆矩阵，则存在 n 阶可逆矩阵 P，使下列关系式

①$PA=B$；　②$P^{-1}ABP=BA$；　③$P^{-1}AP=B$；　④$P^{T}A^{2}P=B^{2}$.

成立的个数为(　　).

(A)1　(B)2　(C)3　(D)4

5. 设 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为线性无关的3维列向量，P 为3阶矩阵，且 $PA=[-\alpha_1,-2\alpha_2,-3\alpha_3]$，则 $|P-E|=$(　　).

(A)6　(B)-6　(C)24　(D)-24

6. 已知 A 为2阶方阵，可逆矩阵 $P=[\alpha,\beta]$ 使得 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}$，$Q=[\beta,\alpha]$，则 $Q^{-1}A^{*}Q=$ ________.

7. 已知3阶实对称矩阵 A 有特征值 $\lambda_1=3$，其对应的特征向量为 $\xi_1=[-3,1,1]^{T}$，且 $r(A)=1$，则 $A=$ ________.

8. 若 A 为 $n(n\geqslant 2)$ 阶实对称矩阵，且满足 $E-2A+A^{2}-2A^{3}=O$，其中 E 为 n 阶单位矩阵，则 $A=$ ________.

9. 设矩阵 $Q=\begin{bmatrix}1&1&-1\\-1&0&3\\0&1&1\end{bmatrix}$，$D=\begin{bmatrix}1&&\\&-1&\\&&2\end{bmatrix}$，$AQ=QD$，$E$ 是3阶单位矩阵，则 $A^{3}-3A^{2}+5E=$ ________.

10. 设 A 是 n 阶矩阵，满足 $A^{2}=A$，且 $r(A)=r(0<r\leqslant n)$. 证明：

$$A\sim\begin{bmatrix}E_r&O\\O&O\end{bmatrix},$$

其中 E_r 是 r 阶单位矩阵.

11. 设向量 $\alpha=[1,1,1]^{T}$，$\beta=[1,2,3]^{T}$，$A=\alpha\beta^{T}$，$B=\beta\alpha^{T}$.

(1) 证明矩阵 A 与 B 相似；

(2) 求一个可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP=B$.

12. 设3阶实对称矩阵 A 的各行元素之和均为3，向量 $\alpha_1=[-1,2,-1]^{T}$，$\alpha_2=[0,-1,1]^{T}$ 是方程组 $Ax=0$ 的两个解.

(1) 求 A 的特征值和对应的特征向量；

(2) 求正交矩阵 Q 和对角矩阵 Λ，使得 $Q^{T}AQ=\Lambda$.

13. 设 n 阶实对称矩阵 A 满足

$$A^{4}+6A^{3}+9A^{2}-6A-10E=O,$$

求 A^{k}，k 为任意正整数.

14. 已知 A 是3阶实对称矩阵，且 $\mathrm{tr}(A)=-6$，$AB=C$，其中

$$B=\begin{bmatrix}1&1\\2&-1\\1&1\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}0&-12\\0&12\\0&-12\end{bmatrix},$$

求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

15. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}8&-2&-2\\-2&5&-4\\-2&-4&5\end{bmatrix}$,求一个实对称矩阵 $\boldsymbol{B}$,使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^2$.

16. 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$,已知 $\boldsymbol{A}^2=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,-3\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3]$,记 $\boldsymbol{A}^{100}=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]$,将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 写成 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性组合.

17. 设 $\begin{cases}x_n=x_{n-1}+2y_{n-1},\\y_n=4x_{n-1}+3y_{n-1}\end{cases}(n=1,2,3,\cdots)$,且 $x_0=2,y_0=1$,求 x_{100}.

18. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{bmatrix},\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}$,且 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}$,求 $\boldsymbol{M}$ 的特征值与特征向量.

19. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶方阵,$\boldsymbol{\alpha}$ 是 3 维列向量.若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关,且满足 $\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\alpha}-2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{A\alpha}+2\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$,求:

(1)$\boldsymbol{A}$ 的特征值;

(2)$\boldsymbol{A}$ 的特征向量(用 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 表示).

20. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 3 维列向量,$\boldsymbol{\alpha}_1\neq\boldsymbol{0}$,且满足

$$\boldsymbol{A\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{A\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3.$$

(1) 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关;

(2) 判断 $\boldsymbol{A}$ 能否相似于对角矩阵,说明理由.

C组

1. 已知 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=1,\boldsymbol{\xi}_1=[0,1,1]^{\mathrm{T}}$ 为对应于 $\lambda_1=-1$ 的特征向量,$\boldsymbol{\alpha}$ 是 3 维列向量.记 W_1:$\boldsymbol{\alpha}$ 是对应于 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的特征向量;W_2:$\boldsymbol{\alpha}$ 非零且与 $\boldsymbol{\xi}_1$ 正交,则 W_1 是 W_2 的(　　).

(A) 充分非必要条件　　(B) 必要非充分条件

(C) 充要条件　　(D) 既非充分也非必要条件

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶方阵,$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 相似于矩阵 $\begin{bmatrix}2&0&3\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$,其中 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的转置,$\boldsymbol{E}$ 表示 3 阶单位矩阵.若

$$r(5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=k+r(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}),$$

则 k 等于(　　).

(A)-3　　(B)3　　(C)-2　　(D)2

3. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵,$\boldsymbol{A}$ 有 n 个互不相同的特征值,且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.证明:$\boldsymbol{B}$ 相似于对角矩阵.

4. 设$A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&1&2\end{bmatrix}$,矩阵$B$满足$AB=A-B$,求可逆矩阵$P$,使$P^{-1}AP$与$P^{-1}BP$均为对角矩阵，并写出这两个对角矩阵.

5. 设矩阵$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}$可逆,3 阶矩阵$B$满足

$$BA=\begin{bmatrix}2a_{11}&a_{11}+a_{12}&a_{11}+a_{13}\\2a_{21}&a_{21}+a_{22}&a_{21}+a_{23}\\2a_{31}&a_{31}+a_{32}&a_{31}+a_{33}\end{bmatrix},$$

证明:矩阵B可相似对角化,并求一个可逆矩阵P(用A的元素表示) 及对角矩阵Λ,使$P^{-1}BP=\Lambda$.