关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

第5讲 一元函数微分学的应用（一）——几何应用

知识结构

- 研究对象
  - “祖孙三代”
    - $f(x)$
      - 具体
      - 抽象
      - $f_n(x)$（函数族）
      - $f_1\cdot f_2\cdot\cdots\cdot f_n$
    - $f'(x),\dfrac{\mathrm{d}[f(x)]}{\mathrm{d}(x^2)},f^{(n)}(x)$
    - $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$
  - 用极限定义函数——$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}g(n,x)$ 或 $f(x)=\lim\limits_{t\to x}g(t,x)$
  - 分段函数（含绝对值）
  - 参数方程
    - $x=x(t),y=y(t)$
    - $x=r(\theta)\cos\theta,y=r(\theta)\sin\theta$
  - 隐函数 $F(x,y)=0$
  - 微分方程的解 $y=y(x)$
  - 偏微分方程的解 $f(x,y)$
  - 级数的和函数 $S(x)=\sum a_nx^n$（仅数学一、数学三）
- 研究内容
  - 切线、法线、截距
  - 极值、单调性
    - 单调性的判别
    - 一阶可导点是极值点的必要条件
    - 判别极值的第一充分条件
    - 判别极值的第二充分条件
    - 判别极值的第三充分条件
  - 拐点、凹凸性
    - 凹凸性的定义
    - 拐点定义
    - 凹凸性与拐点的判别
      - 判别凹凸性的充分条件
      - 二阶可导点是拐点的必要条件
      - 判别拐点的第一充分条件
      - 判别拐点的第二充分条件
      - 判别拐点的第三充分条件

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研 客服微信：KYFT104 QQ群：118105451

研究内容
- 极值点与拐点的重要结论
- 渐近线
  - 铅直渐近线
  - 水平渐近线
  - 斜渐近线
- 最值(值域)
  - 求区间$[a,b]$上连续函数的最大值和最小值
  - 求区间(a,b)内连续函数的最值或者取值范围
- 曲率与曲率半径(仅数学一、数学二)

一 研究对象

1. "祖孙三代"

①$f(x)\begin{cases}具体,\\ 抽象,\\ f_n(x)(函数族),\\ f_1\cdot f_2\cdot\cdots\cdot f_n.\end{cases}$

②$f'(x),\dfrac{\mathrm{d}[f(x)]}{\mathrm{d}(x^2)},f^{(n)}(x)$.

③$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

2. 用极限定义函数

$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}g(n,x)$ 或 $f(x)=\lim\limits_{t\to x}g(t,x)$.

3. 分段函数(含绝对值)

4. 参数方程

①$\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t).\end{cases}$

②$\begin{cases}x=r(\theta)\cos\theta,\\ y=r(\theta)\sin\theta.\end{cases}$

5. 隐函数 $F(x,y)=0$

6. 微分方程的解 $y=y(x)$

7. 偏微分方程的解 $f(x,y)$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研 客服微信：KYFT104 QQ群：118105451

 关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

8. 级数的和函数 $S(x)=\sum a_n x^n$（仅数学一、数学三）

二 研究内容

1. 切线、法线、截距

设 $y=y(x)$ 可导且 $y'(x)\neq 0$，则相关结论见下表.

	切线	法线
斜率	$y'(x)$	$-\dfrac{1}{y'(x)}$
x 轴上的截距	$x-\dfrac{y}{y'(x)}$	$x+yy'(x)$
y 轴上的截距	$y-xy'(x)$	$y+\dfrac{x}{y'(x)}$
方程	$Y-y=y'(x)(X-x)$	$Y-y=-\dfrac{1}{y'(x)}(X-x)$

例 5.1 曲线 $\sin xy+\ln(y-x)=x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程为________.

【解】应填 $y=x+1$.

令 $f(x,y)=\sin xy+\ln(y-x)-x$，则

$$f'_x(0,1)=\left(y\cos xy+\frac{-1}{y-x}-1\right)\Big|_{(0,1)}=-1,$$

$$f'_y(0,1)=\left(x\cos xy+\frac{1}{y-x}\right)\Big|_{(0,1)}=1.$$

于是，$y'\Big|_{(0,1)}=-\dfrac{f'_x(0,1)}{f'_y(0,1)}=1$，故所求切线方程为 $y=x+1$.

例 5.2 曲线 $\begin{cases}x=\displaystyle\int_0^{1-t}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u,\\ y=t^2\ln(2-t^2)\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为________.

【解】应填 $2x-y=0$.

点 $(0,0)$ 对应于 $t=1$. 因为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=1}=\left[2t\ln(2-t^2)+t^2\cdot\frac{-2t}{2-t^2}\right]\Big|_{t=1}=-2,$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=1}=-\mathrm{e}^{-(1-t)^2}\Big|_{t=1}=-1,$$

所以切线斜率为

$$k=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{t=1}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}\Bigg|_{t=1}=2,$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

故所求切线方程为 $y=2x$，即 $2x-y=0$.

微信公众号：神灯考研 客服微信：KYFT104 QQ群：118105451

例 5.3 曲线 $r=1+\cos\theta$ 在点 $\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\pi}{4}\right)$ 处的直角坐标系下的切线方程为________.

【解】应填 $y=(1-\sqrt{2})x+1+\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\begin{cases}x=r\cos\theta=\cos\theta+\cos^2\theta,\\ y=r\sin\theta=\sin\theta+\sin\theta\cos\theta,\end{cases}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{\theta=\frac{\pi}{4}}=\left.\frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{4}}=\left.\frac{\cos\theta+\cos2\theta}{-\sin\theta-\sin2\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{4}}=1-\sqrt{2},$$

且 $x\Big|_{\theta=\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2},y\Big|_{\theta=\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}$，则切点为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\right)$，于是得切线方程为

$$y-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}=(1-\sqrt{2})\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\right),$$

整理得

$$y=(1-\sqrt{2})x+1+\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

例 5.4 设 $y=\tan^n x$ 在 $x=\frac{\pi}{4}$ 处的切线在 x 轴上的截距为 x_n，则 $\lim\limits_{n\to\infty}y(x_n)=$________.

【解】应填 e^{-1}.

先求 $y=\tan^n x$ 在点 $M\left(\frac{\pi}{4},1\right)$ 处的切线方程，由

$$y'\left(\frac{\pi}{4}\right)=n\tan^{n-1}x\cdot\sec^2x\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=2n,$$

得切线方程

$$y-1=2n\left(x-\frac{\pi}{4}\right).$$

在 x 轴上的截距为 $x_n=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2n}$，故

$$\lim_{n\to\infty}y(x_n)=\lim_{n\to\infty}\tan^n\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2n}\right)\xlongequal{1^\infty}\mathrm{e}^A,$$

其中

$$A=\lim_{n\to\infty}n\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2n}\right)-1\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2n}\right)-\tan\frac{\pi}{4}}{\frac{1}{n}}$$

$$=-\frac{1}{2}(\tan x)'\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2x}\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=-1.$$

故原极限 $=\mathrm{e}^{-1}$.

2. 极值、单调性

微信公众号【神灯考研】 考研人的精神家园

对于函数 $f(x)$，若存在点 x_0 的某个邻域，使得在该邻域内任意一点 x，均有

$$f(x)\leqslant f(x_0)（或 f(x)\geqslant f(x_0)）$$

成立，则称点 x_0 为 $f(x)$ 的**极大值点**（或**极小值点**），$f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的**极大值**（或**极小值**）.

微信公众号：神灯考研 客服微信：KYFT104 QQ群：118105451

 关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

(1) 单调性的判别.

设函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导.

① 如果在 (a,b) 内 $f'(x)\geqslant 0$，且等号仅在有限多个点处成立，那么函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加；

② 如果在 (a,b) 内 $f'(x)\leqslant 0$，且等号仅在有限多个点处成立，那么函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少.

(2) 一阶可导点是极值点的必要条件.

设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，且在点 x_0 处取得极值，则必有 $f'(x_0)=0$.

(3) 判别极值的第一充分条件.

设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续，且在 x_0 的某去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内可导.

① 若 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时，$f'(x)<0$，而 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得**极小值**；

② 若 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时，$f'(x)>0$，而 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得**极大值**；

③ 若 $f'(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0)$ 和 $(x_0,x_0+\delta)$ 内不变号，则点 x_0 不是极值点.

(4) 判别极值的第二充分条件.

设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处二阶可导，且 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)\neq 0$.

① 若 $f''(x_0)<0$，则 $f(x)$ 在 x_0 处取得**极大值**；

② 若 $f''(x_0)>0$，则 $f(x)$ 在 x_0 处取得**极小值**.

上述第二充分条件可以推广为第三充分条件.

(5) 判别极值的第三充分条件.

设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处 n 阶可导，且 $f^{(m)}(x_0)=0(m=1,2,\cdots,n-1)$，$f^{(n)}(x_0)\neq 0(n\geqslant 2)$，则

① 当 n 为偶数且 $f^{(n)}(x_0)<0$ 时，$f(x)$ 在 x_0 处取得**极大值**；

② 当 n 为偶数且 $f^{(n)}(x_0)>0$ 时，$f(x)$ 在 x_0 处取得**极小值**.

例 5.5 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}n\left[\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n-\mathrm{e}^x\right]$，求 $f(x)$ 的极值.

【解】 先考虑 $\lim\limits_{t\to+\infty}t\left[\left(1+\dfrac{x}{t}\right)^t-\mathrm{e}^x\right]$. 令 $r=\dfrac{1}{t}$，则

$$\lim_{t\to+\infty}t\left[\left(1+\frac{x}{t}\right)^t-\mathrm{e}^x\right]=\lim_{r\to0^+}\frac{(1+rx)^{\frac{1}{r}}-\mathrm{e}^x}{r}=\mathrm{e}^x\lim_{r\to0^+}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{r}\ln(1+rx)-x}-1}{r}$$

$$=\mathrm{e}^x\lim_{r\to0^+}\frac{\ln(1+rx)-rx}{r^2}=\mathrm{e}^x\lim_{r\to0^+}\frac{\frac{x}{1+rx}-x}{2r}=x\mathrm{e}^x\lim_{r\to0^+}\frac{-rx}{2r(1+rx)}$$

$$=-\frac{x^2}{2}\mathrm{e}^x,$$

故 $f(x)=-\dfrac{x^2}{2}\mathrm{e}^x$. 又 $f'(x)=-\left(\dfrac{x^2}{2}+x\right)\mathrm{e}^x$，令 $f'(x)=0$，得 $x=0$ 或 $x=-2$.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

又由于 $f''(x)=-\left(\dfrac{x^2}{2}+2x+1\right)\mathrm{e}^x$，$f''(0)=-1<0$，$f''(-2)=\mathrm{e}^{-2}>0$，从而函数 $f(x)$

微信公众号：神灯考研　客服微信：KYFT104　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】获取更多考研资源

的极大值为 $f(0)=0$,极小值为 $f(-2)=-2e^{-2}$.

例 5.6 设函数 $f(x)=\int_0^x \frac{(t+3)(t^2-1)}{e^{t^2}\sqrt{1+t^4}}dt$,则 $f(x)$( ).

(A) 有 1 个极大值点,2 个极小值点　　(B) 有 2 个极大值点,1 个极小值点

(C) 有 3 个极大值点,没有极小值点　　(D) 有 3 个极小值点,没有极大值点

【解】应选(A).

对 x 求导,可得 $f'(x)=\frac{(x+3)(x^2-1)}{e^{x^2}\sqrt{1+x^4}}$,令 $f'(x)=0$,得 $f'(x)$ 的 3 个零点 $x_1=-3$,$x_2=-1$,$x_3=1$,即为 $f(x)$ 的 3 个驻点.

当 x 从点 $x_1=-3$ 的左侧邻域经过 x_1 到其右侧邻域时,$f'(x)$ 由负变正,故点 $x_1=-3$ 为 $f(x)$ 的极小值点;

当 x 从点 $x_2=-1$ 的左侧邻域经过 x_2 到其右侧邻域时,$f'(x)$ 由正变负,故点 $x_2=-1$ 为 $f(x)$ 的极大值点;

当 x 从点 $x_3=1$ 的左侧邻域经过 x_3 到其右侧邻域时,$f'(x)$ 由负变正,故点 $x_3=1$ 为 $f(x)$ 的极小值点.

综上所述,$f(x)$ 有 1 个极大值点,2 个极小值点,选(A).

3. 拐点、凹凸性

(1) 凹凸性的定义.

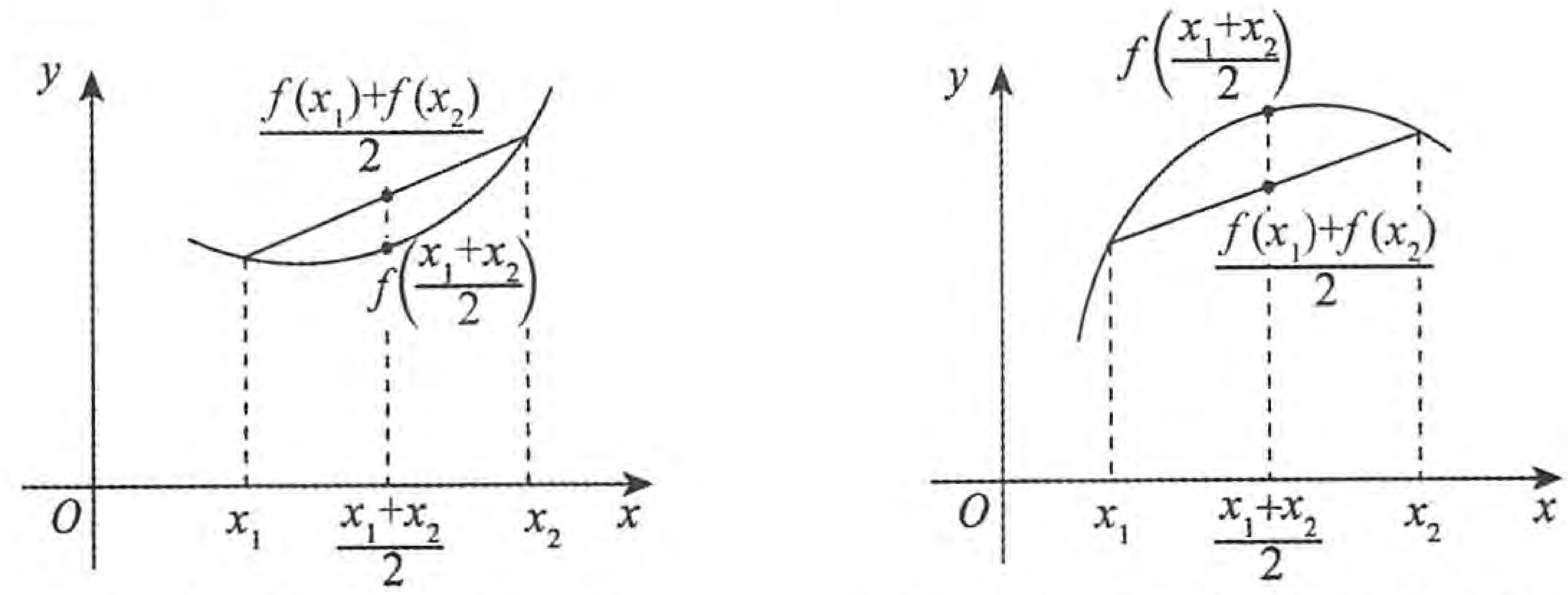
定义 1 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续.如果对 I 上任意不同两点 x_1,x_2,恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

则称 $y=f(x)$ 在 I 上的图形是**凹的**,如图 5-1(a) 所示;如果恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

则称 $y=f(x)$ 在 I 上的图形是**凸的**,如图 5-1(b) 所示.



图形上任意弧段位于弦的下方

$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$

(a)

图形上任意弧段位于弦的上方

$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}<f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$

(b)

图 5-1

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号:神灯考研　客服微信:KYFT104　QQ群:118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

【注】事实上，当图形为 凹(凸) 时，可以将 $f\left(\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2\right) \underset{(>)}{<} \frac{1}{2}f(x_1)+\frac{1}{2}f(x_2)$ 更一般地写为

$$f(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2) \underset{(>)}{<} \lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2),\text{其中 } 0<\lambda_1,\lambda_2<1,\lambda_1+\lambda_2=1.$$

定义 2 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，若对 (a,b) 内的任意 x 及 $x_0(x \neq x_0)$，均有

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0) \underset{(>)}{<} f(x), \tag{*}$$

则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是 凹(凸) 的.

【注】**(几何意义)** $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线方程，因此(*)式的几何意义如图 5-2 所示：若曲线 $y=f(x)(a<x<b)$ 在任意点处的切线(除该点外)总在曲线的下方(上方)，则该曲线是凹(凸)的.

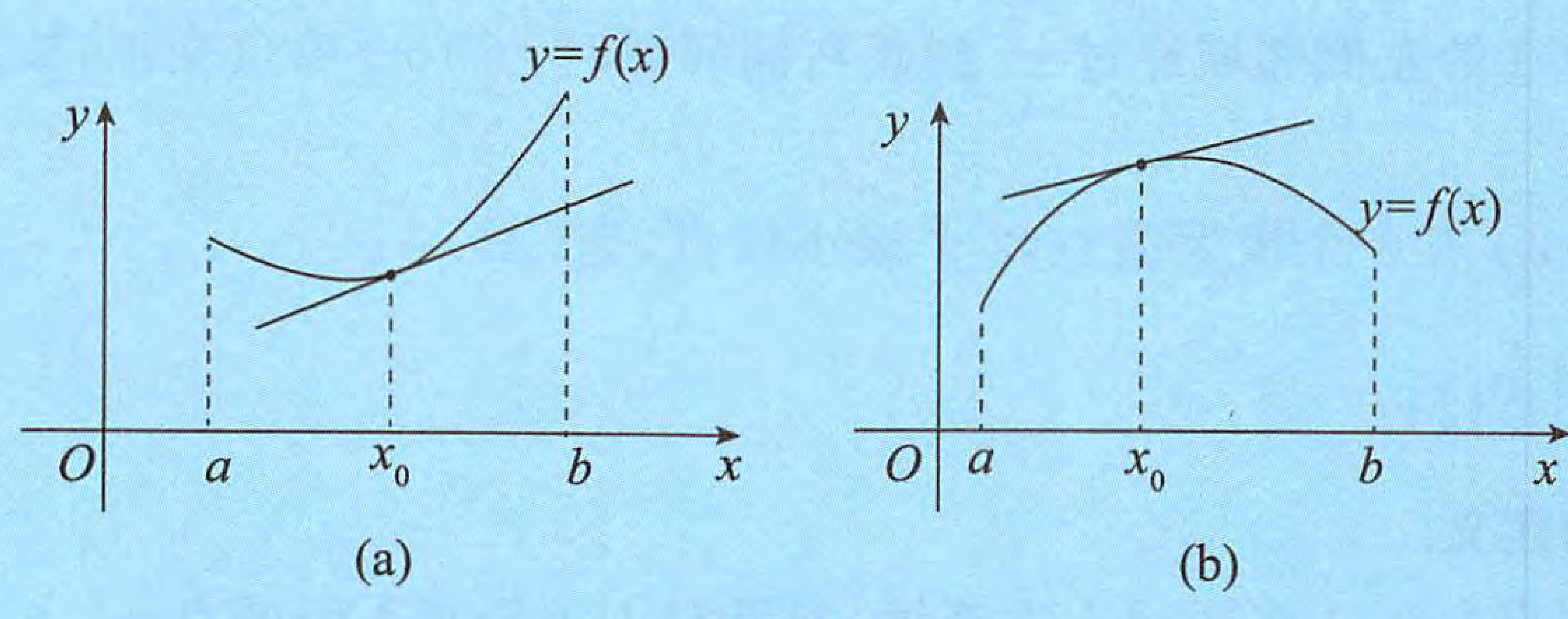


图 5-2

(2) 拐点定义.

连续曲线的凹弧与凸弧的分界点称为该曲线的**拐点**.

(3) 凹凸性与拐点的判别.

① 判别凹凸性的充分条件.

设函数 $f(x)$ 在 I 上二阶可导.

a. 若在 I 上 $f''(x)>0$，则 $f(x)$ 在 I 上的图形是凹的；

b. 若在 I 上 $f''(x)<0$，则 $f(x)$ 在 I 上的图形是凸的.

② 二阶可导点是拐点的必要条件.

设 $f''(x_0)$ 存在，且点 $(x_0,f(x_0))$ 为曲线上的拐点，则 $f''(x_0)=0$.

【注】事实上，若点 $(x_0,f(x_0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 上的拐点，则只有以下两种情况：

(1) $f''(x_0)=0$，如 $y=x^3$ 在 $(0,0)$ 处的情形，如图 5-3(a) 所示.

(2) $f''(x_0)$ 不存在，如 $y=\sqrt[3]{x}$ 在 $(0,0)$ 处的情形，如图 5-3(b) 所示.

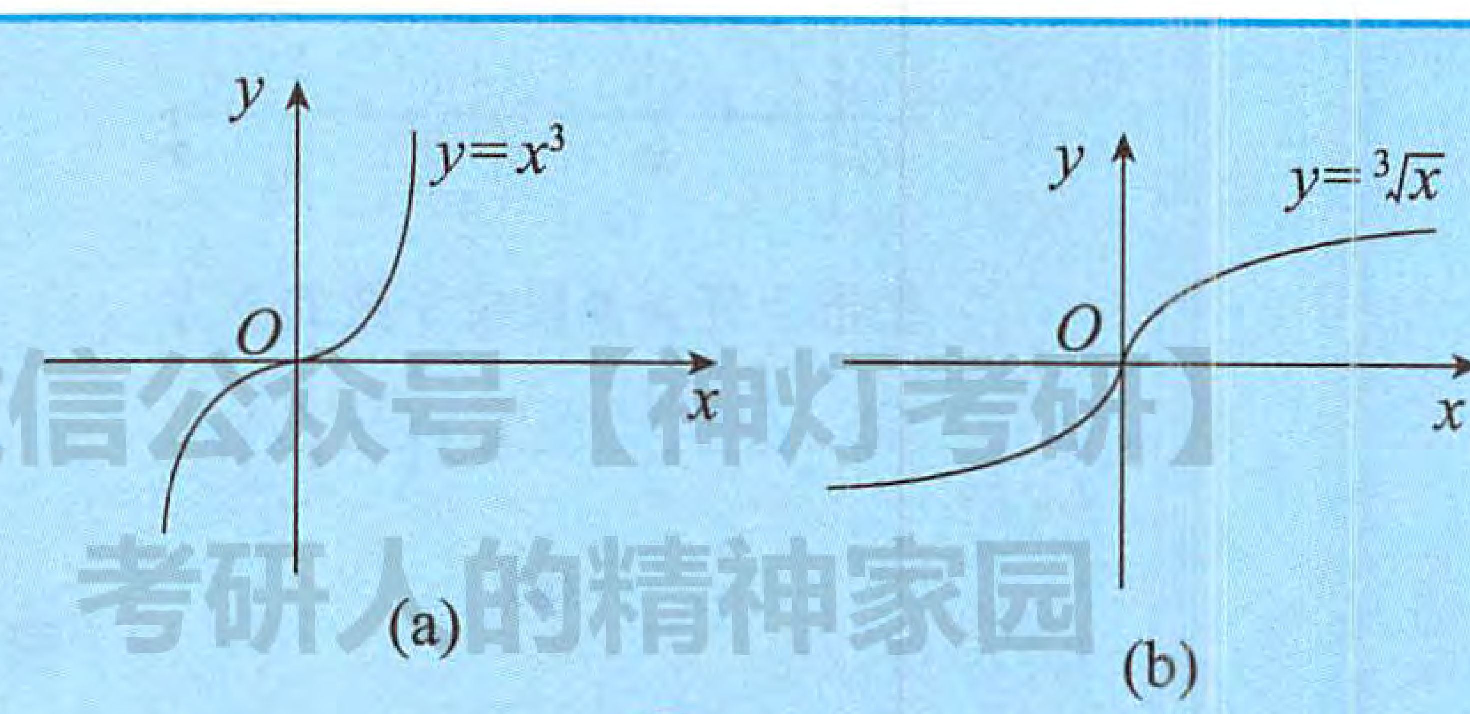


图 5-3

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　客服微信：KYFT104　QQ群：118105451

③ 判别拐点的第一充分条件.

设 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续,在点 $x=x_0$ 的某去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内二阶导数存在,且在该点的左右邻域内 $f''(x)$ 变号(无论是由正变负,还是由负变正),则点 $(x_0,f(x_0))$ 为曲线上的**拐点**.

④ 判别拐点的第二充分条件.

设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处三阶可导,且 $f''(x_0)=0$,$f'''(x_0)\neq 0$,则 $(x_0,f(x_0))$ 为曲线上的**拐点**.

⑤ 判别拐点的第三充分条件.

设 $f(x)$ 在 x_0 处 n 阶可导,且 $f^{(m)}(x_0)=0(m=2,\cdots,n-1)$,$f^{(n)}(x_0)\neq 0(n\geqslant 3)$,则当 n 为奇数时,$(x_0,f(x_0))$ 为曲线上的**拐点**.

例 5.7 设 $f(x)$,$g(x)$ 二阶可导,$y=f'(x)$ 与 $y=g''(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图形分别如图 5-4(a),(b) 所示,曲线 $y=f(x)$ 和曲线 $y=g(x)$ 的拐点个数分别为 m,n,则( ).

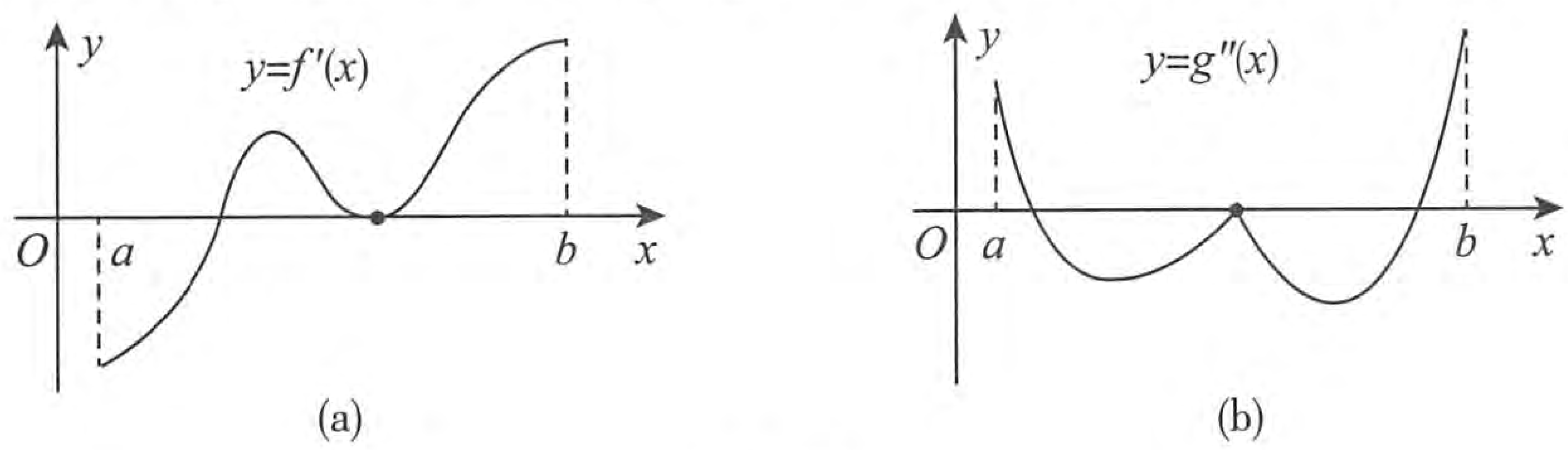


图 5-4

(A)$m=2,n=2$　　(B)$m=2,n=3$

(C)$m=3,n=2$　　(D)$m=3,n=3$

【解】 应选(A).

由于 $f(x)$,$g(x)$ 二阶可导,则在拐点处有 $f''(x)=0$,$g''(x)=0$,且在点 x 处左、右两侧邻域二阶导数变号. 由此可知,如图 5-5(a) 所示,在点 x_1 处,$f''(x_1)=0$,且 $f''(x)$ 在点 x_1 处左、右两侧邻域变号($f'(x)$ 单调性相反);同理,点 x_2 亦满足,故 $m=2$.

如图 5-5(b) 所示,在点 x_3 处,$g''(x_3)=0$,且在点 x_3 处左、右两侧邻域 $g''(x)$ 变号;同理,点 x_4 亦满足. 在点 x_5 处虽有 $g''(x_5)=0$,但点 x_5 左、右两侧邻域 $g''(x)$ 不变号,故不是拐点,故 $n=2$.

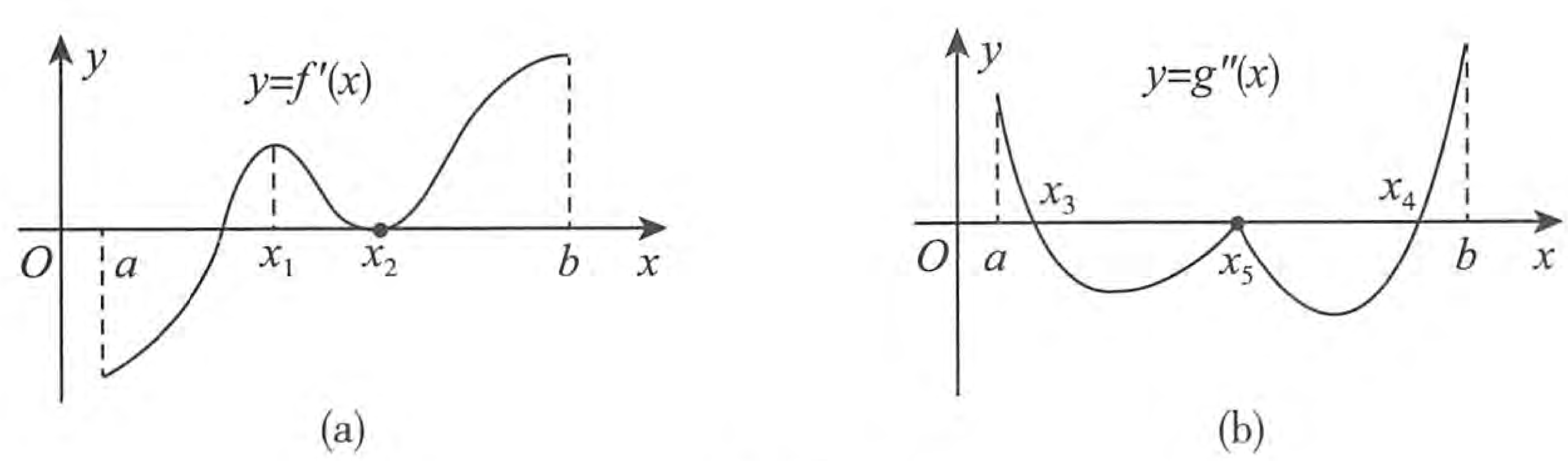


图 5-5

微信公众号【神灯考研】 考研人的精神家园

例 5.8 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+x^4\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 则( ).

(A)$f''(0)>0$ 且 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内的图形是凹的

微信公众号:神灯考研　客服微信:KYFT104　QQ群:118105451

 关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

(B) $f''(0)<0$ 且 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内的图形是凸的

(C) $f''(0)>0$ 但 $f(x)$ 在 $x=0$ 的任意邻域内的图形均无凹凸性

(D) $f''(0)<0$ 但 $f(x)$ 在 $x=0$ 的任意邻域内的图形均无凹凸性

【解】应选(C).

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}+4x^3\sin\dfrac{1}{x}-x^2\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

$$f''(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}-\sin\dfrac{1}{x}+12x^2\sin\dfrac{1}{x}-6x\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ \dfrac{1}{2}, & x=0,\end{cases}$$

满足 $f''(0)=\dfrac{1}{2}>0$，但由于$\lim\limits_{x\to 0}\left(12x^2\sin\dfrac{1}{x}-6x\cos\dfrac{1}{x}\right)=0$，所以在 $x=0$ 的较小去心邻域内，$f''(x)$ 与$\dfrac{1}{2}-\sin\dfrac{1}{x}$ 的符号一致(有正也有负). 例如，取点 $x_n=\dfrac{1}{n\pi+\dfrac{\pi}{2}}$，则当 n 为奇数时，由$\dfrac{1}{2}-\sin\dfrac{1}{x_n}=\dfrac{3}{2}$，可知 $f''(x_n)>0$；当 n 为偶数时，由$\dfrac{1}{2}-\sin\dfrac{1}{x_n}=-\dfrac{1}{2}$，可知 $f''(x_n)<0$. 因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 的任意邻域内的图形均不存在凹凸性. 应选(C).

例 5.9 设函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有二阶导数，则(　　).

(A) 当 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内单调增加时，$f'(x_0)>0$

(B) 当 $f'(x_0)>0$ 时，$f(x)$ 在 x_0 的某邻域内单调增加

(C) 当曲线 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内是凹的时，$f''(x_0)>0$

(D) 当 $f''(x_0)>0$ 时，$f(x)$ 在 x_0 的某邻域内的图形是凹的

【解】应选(B).

对于选项(A)，取 $f(x)=x^3$，$x_0=0$，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的某邻域内单调增加，但 $f'(x_0)=0$，排除(A)；

对于选项(B)，由于 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有二阶导数，故 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处一阶导数连续，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)=f'(x_0)>0$. 由局部保号性知，存在 $\delta>0$，当 $x\in U(x_0,\delta)$ 时，有 $f'(x)>0$，于是，$f(x)$ 在 x_0 的某邻域内单调增加，选择(B)；

对于选项(C)，取 $f(x)=x^4$，$x_0=0$，则曲线 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的某邻域内是凹的，但 $f''(x_0)=0$，排除(C)；

对于选项(D)，例 5.8 已经给出了反例，排除(D).

4. 极值点与拐点的重要结论

微信公众号【神灯考研】 考研人的精神家园

以下结论均可直接使用，不必证明.

① 曲线的可导点不同时为极值点和拐点. 不可导点可同时为极值点和拐点.

② 设多项式函数 $f(x)=(x-a)^n g(x)(n>1)$，且 $g(a)\neq 0$，则当 n 为偶数时，$x=a$ 是

微信公众号：神灯考研 客服微信：KYFT104 QQ群：118105451

$f(x)$ 的极值点;当 n 为奇数时,点 $(a,0)$ 是 $f(x)$ 的拐点.

③ 设多项式函数 $f(x)=(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\cdots(x-a_k)^{n_k}$,其中 n_i 是正整数,a_i 是实数且 a_i 两两不等,$i=1,2,\cdots,k$.

记 k_1 为 $n_i=1$ 的个数,k_2 为 $n_i>1$ 且 n_i 为偶数的个数,k_3 为 $n_i>1$ 且 n_i 为奇数的个数,则 $f(x)$ 的极值点个数为 $k_1+2k_2+k_3-1$,拐点个数为 $k_1+2k_2+3k_3-2$.

例 5.10 设 $f(x)=|x(1-x)|$,则(　　).

(A) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点,但点 $(0,0)$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(B) $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点,但点 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(C) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点,且点 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(D) $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点,且点 $(0,0)$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

【解】应选(C).

因为 $f(x)=|x(1-x)|\geqslant 0$,$f(0)=0$,所以 $x=0$ 是极值点,因而选项(B)与(D)不正确,而在点 $x=0$ 的邻域内:

当 $x<0$ 时,$f(x)=-x(1-x)=x^2-x$,$f'(x)=2x-1$,$f''(x)=2>0$;

当 $x>0$ 时,$f(x)=x(1-x)=x-x^2$,$f'(x)=1-2x$,$f''(x)=-2<0$.

所以点 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.选项(C)正确.

【注】由例 5.10 可看出,不可导点可同时为极值点和拐点.

例 5.11 设 $f(x)$ 与 $h(x)$ 在 $x=x_0$ 的某邻域内可导,$F(x)=\int_{x_0}^{x}f(t)\mathrm{d}t$,$H(x)=\int_{x_0}^{x}h(t)\mathrm{d}t$,又设 $f(x_0)h(x_0)<0$,$G(x)=F(x)H(x)$,则(　　).

(A) $x=x_0$ 是 $G(x)$ 的极大值点,$(x_0,G(x_0))$ 是 $G(x)$ 的拐点

(B) $x=x_0$ 是 $G(x)$ 的极小值点,$(x_0,G(x_0))$ 是 $G(x)$ 的拐点

(C) $x=x_0$ 是 $G(x)$ 的极大值点,$(x_0,G(x_0))$ 不是 $G(x)$ 的拐点

(D) $x=x_0$ 是 $G(x)$ 的极小值点,$(x_0,G(x_0))$ 不是 $G(x)$ 的拐点

【解】应选(C).

$$G(x)=F(x)H(x),G'(x)=F'(x)H(x)+F(x)H'(x),G'(x_0)=0.$$

$$G''(x)=F''(x)H(x)+2F'(x)H'(x)+F(x)H''(x),$$

$$G''(x_0)=2F'(x_0)H'(x_0)=2f(x_0)h(x_0)<0.$$

故 $x=x_0$ 是 $G(x)$ 的极大值点.由"二 4.①"结论知,曲线的可导点不同时为极值点和拐点,故 $(x_0,G(x_0))$ 不是 $G(x)$ 的拐点.故选(C).

例 5.12 曲线 $y=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 的一个拐点是(　　).

(A) $(1,0)$　　(B) $(2,0)$　　(C) $(3,0)$　　(D) $(4,0)$

微信公众号【神灯考研】 考研人的精神家园

【解】应选(C).

令 $$y=f(x)=(x-3)^3(x-1)(x-2)^2(x-4)^4=(x-3)^3g(x),$$

显然 $g(3)\neq 0$,且 $n=3$ 是奇数,由"二 4.②"可知,点 $(3,0)$ 是 $f(x)$ 的一个拐点,故选(C).

微信公众号:神灯考研　客服微信:KYFT104　QQ群:118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

【注】(1) 由"二 4.③"可知，$k_1=1, k_2=2, k_3=1$，故 $y=f(x)$ 的拐点个数为 $1+2\times2+3\times1-2=6$.

(2) 本题的常规解法是：因为 $x=3$ 是方程 $(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4=0$ 的三重根，所以它是方程 $y''=0$ 的单根，从而函数 $y=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 的二阶导数在点 $x=3$ 的两侧附近改变正负号，故点 $(3,0)$ 是曲线 $y=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 的一个拐点.

例 5.13 曲线 $f(x)=(x-1)^2(x-3)^3$ 的拐点个数为(　　).

(A)0　　(B)1　　(C)2　　(D)3

【解】应选(D).

由"二 4.③"可知，$k_1=0, k_2=1, k_3=1$，则拐点个数为 $k_1+2k_2+3k_3-2=3$.

【注】(1) 本题的常规解法是：由

$$f'(x)=2(x-1)(x-3)^3+3(x-1)^2(x-3)^2$$
$$=(x-1)(x-3)^2(5x-9),$$

易知 $f''(x)$ 中必含一次因式 $x-3$. 另由 $f'(1)=f'\left(\frac{9}{5}\right)=f'(3)=0$，知必存在 $x_1\in\left(1,\frac{9}{5}\right)$，$x_2\in\left(\frac{9}{5},3\right)$，使得 $f''(x_1)=f''(x_2)=0$，故可令

$$f''(x)=k(x-x_1)(x-x_2)(x-3),$$

其中 k 是不为 0 的常数. 由于 $f''(x)$ 在 $x=x_1, x=x_2, x=3$ 两侧都异号，因此该曲线共有 3 个拐点.

(2) 曲线 $y=(x-1)^2(x-3)^2$ 的极值点个数与拐点个数分别为(　　).

(A)3,2　　(B)2,3　　(C)3,4　　(D)4,3

解　应选(A).

由"二 4.③"可知，$k_1=0, k_2=2, k_3=0$，于是极值点个数为 $0+2\times2+0-1=3$，拐点个数为 $0+2\times2+3\times0-2=2$. 可直接得出答案.

5. 渐近线

(1) 铅直渐近线.

若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\infty$（或 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\infty$），则 $x=x_0$ 为一条铅直渐近线.

【注】此处的 x_0 一般是函数的无定义点或定义区间的端点.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

(2) 水平渐近线.

若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=y_1$，则 $y=y_1$ 为一条水平渐近线；

若 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=y_2$，则 $y=y_2$ 为一条水平渐近线；

微信公众号：神灯考研　客服微信：KYFT104　QQ群：118105451

若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=y_0$,则 $y=y_0$ 为一条水平渐近线.

(3) 斜渐近线.

若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k_1\neq 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-k_1x]=b_1$,则 $y=k_1x+b_1$ 是曲线 $y=f(x)$ 的一条斜渐近线;

若 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k_2\neq 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-k_2x]=b_2$,则 $y=k_2x+b_2$ 是曲线 $y=f(x)$ 的一条斜渐近线;

若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k\neq 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-kx]=\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-kx]=b$,则 $y=kx+b$ 是曲线 $y=f(x)$ 的一条斜渐近线.

例 5.14 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导,且 $f(1)=1$, $2xf'(x)+f(x)+3x=0$,求曲线 $y=f(x)$ 的渐近线.

【解】 由 $2xf'(x)+f(x)+3x=0$,得一阶线性微分方程 $f'(x)+\dfrac{1}{2x}f(x)=-\dfrac{3}{2}$,解得

$$f(x)=e^{-\int\frac{1}{2x}dx}\left[\int\left(-\frac{3}{2}\right)e^{\int\frac{1}{2x}dx}dx+C\right]=\frac{1}{\sqrt{x}}(-x^{\frac{3}{2}}+C),$$

又 $f(1)=1$,则 $C=2$. 故

$$f(x)=\frac{2-x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}.$$

因为 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2-x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}=+\infty$,故 $x=0$ 是曲线 $y=f(x)$ 的一条铅直渐近线;又

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2-x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-x^{\frac{3}{2}}}{x\sqrt{x}}=-1,$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(-x)]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2-x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}+x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}=0,$$

故 $y=-x$ 是曲线 $y=f(x)$ 的一条斜渐近线.

6. 最值(值域)

(1) 求区间 $[a,b]$ 上连续函数 $f(x)$ 的最大值 M 和最小值 m.

① 求出 $f(x)$ 在 (a,b) 内的可疑点 —— 驻点与不可导点,并求出这些可疑点处的函数值;

② 求出端点处的函数值 $f(a)$ 和 $f(b)$;

③ 比较以上所求得的所有函数值,其中最大者为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值 M,最小者为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值 m.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号:神灯考研 客服微信:KYFT104 QQ群:118105451

 关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

【注】有时这类问题也可命制为"求连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的值域 $[m,M]$".

(2) 求区间 (a,b) 内连续函数 $f(x)$ 的最值或者取值范围.

① 求出 $f(x)$ 在 (a,b) 内的可疑点 —— 驻点与不可导点，并求出这些可疑点处的函数值；

② 求 (a,b) 两端的单侧极限：若 a,b 为有限常数，则求 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$；若 a 为 $-\infty$，则求 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$；若 b 为 $+\infty$，则求 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$. 记以上所求左端极限为 A，右端极限为 B；

③ 比较 ①，② 所得结果，确定最值或取值范围.

【注】(1) 这类问题有时没有最大值、最小值.
(2) **重要结论.** 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导且 $x=x_0\in(a,b)$ 是 $f(x)$ 在 (a,b) 内的唯一极值点且为极大(小)值点，则 $x=x_0$ 也是 $f(x)$ 在 (a,b) 内的最大(小)值点.

例 5.15 设 $f'(x)$ 在区间 $[0,4]$ 上连续，曲线 $y=f'(x)$ 与直线 $x=0,x=4,y=0$ 围成如图 5-6 所示的三个区域，其面积分别为 $S_1=3,S_2=4,S_3=2$，且 $f(0)=1$，则 $f(x)$ 在 $[0,4]$ 上的最大值与最小值分别为(　　).

(A) $2,-3$　　(B) $4,-3$

(C) $2,-2$　　(D) $4,-2$

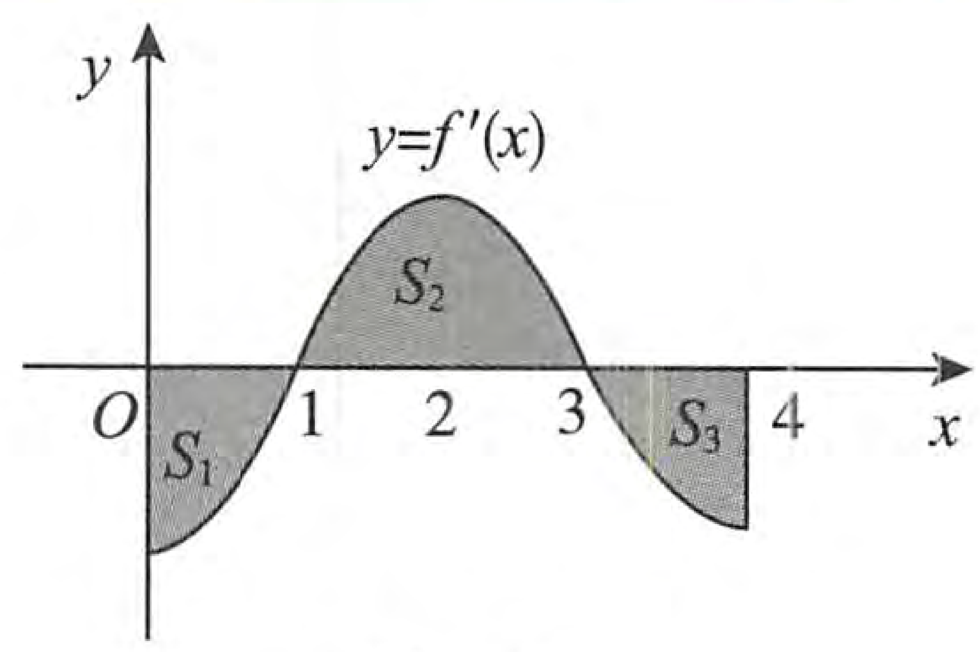


图 5-6

【解】应选(C).

由图 5-6 可知，$f'(1)=f'(3)=0$，即函数 $f(x)$ 在区间 $(0,4)$ 内有两个驻点 $x=1$ 和 $x=3$，故 $f(x)$ 在 $[0,4]$ 上的最大值和最小值只能在 $f(0),f(1),f(3),f(4)$ 中取得.

由 $f(0)=1$，有

$$f(1)=f(0)+\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x=1+(-3)=-2,$$

$$f(3)=f(1)+\int_1^3 f'(x)\mathrm{d}x=-2+4=2,$$

$$f(4)=f(3)+\int_3^4 f'(x)\mathrm{d}x=2+(-2)=0.$$

故最大值为 $f(3)=2$，最小值为 $f(1)=-2$，应选(C).

例 5.16 设 $y=y(x)$ 满足 $y'+y=\mathrm{e}^{-x}\cos x$，且 $y(0)=0$，求 $y(x^2)$ 的值域.

【解】$y=\mathrm{e}^{-\int \mathrm{d}x}\left(\int \mathrm{e}^{\int \mathrm{d}x}\mathrm{e}^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x+C\right)=\mathrm{e}^{-x}(\sin x+C)$，由 $y(0)=0$，知 $C=0$，故 $y(x)=\mathrm{e}^{-x}\sin x$. 于是 $y(x^2)=\mathrm{e}^{-x^2}\sin x^2$，其在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且为偶函数. 令 $x^2=t$，$g(t)=\mathrm{e}^{-t}\sin t\,(t\geqslant 0)$，则 $g(t)$ 的值域与 $y(x^2)$ 的值域相同.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

因为 $g'(t)=\mathrm{e}^{-t}(\cos t-\sin t)$，故 $g(t)$ 的驻点为 $t_k=k\pi+\dfrac{\pi}{4}(k=0,1,2,\cdots)$，于是

$$g(t_k)=\mathrm{e}^{-\left(k\pi+\frac{\pi}{4}\right)}\sin\left(k\pi+\frac{\pi}{4}\right)=(-1)^k\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\mathrm{e}^{-\left(k\pi+\frac{\pi}{4}\right)},$$

微信公众号：神灯考研　客服微信：KYFT104　QQ群：118105451

其中 $g(t_0),g(t_2),g(t_4),\cdots$ 为正数,最大值为 $g(t_0)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$;$g(t_1),g(t_3),\cdots$ 为负数,最小值为 $g(t_1)=-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{5}{4}\pi}$.

故 $g(t)$ 的值域为 $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{5}{4}\pi},\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}\right]$,从而函数 $y(x^2)$ 的值域为 $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{5}{4}\pi},\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}\right]$.

【注】定义在某区间上的连续函数 $y(x)$,若有最大值 M 和最小值 m,则 $y(x)$ 的值域是 $[m,M]$.

7. 曲率与曲率半径(仅数学一、数学二)

曲率 $k=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}$,曲率半径 $R=\frac{1}{k}$.

例 5.17 设 $y=f(x)$ 是由方程 $\int_0^y e^{-t^2}dt=2y-\ln(1+x)$ 所确定的二阶可导函数,则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,0)$ 处的曲率半径为________.

【解】应填 $2\sqrt{2}$.

由例 4.4 知 $f'(0)=y'\big|_{x=0}=1,f''(0)=y''\big|_{x=0}=-1$.

故曲率 $k=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$,曲率半径 $R=\frac{1}{k}=2\sqrt{2}$.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研 客服微信：KYFT104 QQ群：118105451