第 14 章 二重积分

A组

1. 设 $I_1=\iint\limits_D \sin\sqrt{\frac{x+y}{4}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, I_2=\iint\limits_D \sin\frac{x+y}{4}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, I_3=\iint\limits_D \sin\left(\frac{x+y}{4}\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\mid (x-1)^2+(y-1)^2\leqslant 2\}$，则(　　).

(A) $I_1<I_2<I_3$　　(B) $I_3<I_2<I_1$

(C) $I_3<I_1<I_2$　　(D) $I_2<I_3<I_1$

2. 设平面区域 $D=\{(x,y)\mid (x-2)^2+(y-1)^2\leqslant 1\}$，比较 $I_1=\iint\limits_D (x+y)^2\mathrm{d}\sigma$ 与 $I_2=\iint\limits_D (x+y)^3\mathrm{d}\sigma$ 的大小，则有(　　).

(A) $I_1=I_2$　　(B) $I_1>I_2$　　(C) $I_1<I_2$　　(D) 不能比较

3. 设 $I=\iint\limits_D (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, J=\iint\limits_D \max\{x+y,1\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, K=\iint\limits_D \min\{x+y,1\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$，则 I,J,K 的大小关系为(　　).

(A) $I<J<K$　　(B) $K<I<J$　　(C) $K<J<I$　　(D) $J<I<K$

4. 设 $f(x,y)$ 为连续函数，$\int_{-\frac{1}{4}}^{0}\mathrm{d}x\int_{-\frac{1}{2}-\sqrt{x+\frac{1}{4}}}^{-\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_{0}^{2}\mathrm{d}x\int_{x-1}^{-\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}}f(x,y)\mathrm{d}y$ 交换积分次序后为(　　).

(A) $\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}y\int_{y^2+y}^{y+1}f(x,y)\mathrm{d}x$　　(B) $\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}y\int_{y+1}^{y^2+y}f(x,y)\mathrm{d}x$

(C) $\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\int_{y^2+y}^{y+1}f(x,y)\mathrm{d}x$　　(D) $\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\int_{y+1}^{y^2+y}f(x,y)\mathrm{d}x$

5. $\int_0^1 y^2\mathrm{d}y\int_1^y \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\mathrm{d}x=$(　　).

(A) $\frac{1}{6}(1-\sqrt{2})$　　(B) $\frac{1}{6}(\sqrt{2}-1)$

(C) $\frac{1}{3}(1-\sqrt{2})$　　(D) $\frac{1}{3}(\sqrt{2}-1)$

6. 设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$，则二重积分 $\iint\limits_D (\mathrm{e}^{\lambda x}-\mathrm{e}^{-\lambda y})\mathrm{d}\sigma\ (\lambda\neq 0)$ 的值(　　).

(A) 恒为零　　(B) 恒为负

(C) 恒为正　　(D) 当 $\lambda>0$ 时为正，当 $\lambda<0$ 时为负

7. 记双纽线 $(x^2+y^2)^2=2^2(x^2-y^2)$ 围成的平面区域为 D，则二重积分 $\iint\limits_D(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma=$ (　　).

(A) π　　(B) 2π　　(C) 3π　　(D) 4π

8. 设 $f(x)$ 是连续的正值函数，$I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\iint\limits_D f(x)f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant 1,0\leqslant x\leqslant y\}$，则 $I=$ (　　).

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

9. $\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1\sqrt{\mathrm{e}^{2x}-y^2}\mathrm{d}x+\int_1^{\mathrm{e}}\mathrm{d}y\int_{\ln y}^1\sqrt{\mathrm{e}^{2x}-y^2}\mathrm{d}x=$ (　　).

(A) $\frac{\pi}{8}(\mathrm{e}^2-1)$　　(B) $\frac{\pi}{8}(\mathrm{e}^2+1)$　　(C) $\frac{\pi}{4}(\mathrm{e}^2-1)$　　(D) $\frac{\pi}{4}(\mathrm{e}^2+1)$

10. 设 $f(x,y)$ 为连续函数，则 $I=\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^{\frac{x^2}{2}}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_2^{2\sqrt{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{8-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y=$ (　　).

(A) $\int_0^2\mathrm{d}y\int_{\sqrt{2y}}^{\sqrt{8-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$　　(B) $\int_0^2\mathrm{d}y\int_1^{\sqrt{8-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$

(C) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\sqrt{2y}}^{\sqrt{8-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$　　(D) $\int_0^2\mathrm{d}y\int_{\sqrt{2y}}^1 f(x,y)\mathrm{d}x$

11. 设函数 $f(x,y)$ 连续，则 $\int_{\frac{\sqrt{2}}{4}}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{4x}}^{2x}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_x^{\frac{1}{2x}}f(x,y)\mathrm{d}y=$ (　　).

(A) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan 2}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$　　(B) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan 2}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\mathrm{d}r$

(C) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan 2}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\mathrm{d}r$　　(D) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan 2}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$

12. 设函数 $f(x)=x\int_x^{\pi}\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2\mathrm{d}u$，则 $\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=$ (　　).

(A) $\frac{\pi}{6}$　　(B) $\frac{\pi}{4}$　　(C) $\frac{\pi}{3}$　　(D) $\frac{\pi}{2}$

13. 设 $f(t)$ 为连续函数，则累次积分 $\int_0^{2R}\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{2Ry-y^2}}f(x^2+y^2)\mathrm{d}x\,(R>0)$ 化为极坐标形式的累次积分为(　　).

(A) $\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2R\sin\theta}f(r^2)r\mathrm{d}r$　　(B) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2R\cos\theta}f(r^2)r\mathrm{d}r$

(C) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2R\sin\theta}f(r^2)r\mathrm{d}r$　　(D) $\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2R\cos\theta}f(r^2)r\mathrm{d}r$

14. 设 $D=\{(x,y)\mid 2(x-1)^2+3(y-2)^2\leqslant 6\}$，则 $\iint\limits_D(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ________.

15. 设平面区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant t^2,t>0\}$，则极限 $\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{1}{t^2}\iint\limits_D \mathrm{e}^{x^2-y^2}\cos(x+y)\mathrm{d}\sigma=$ ________.

16. 设 $f(x,y)$ 为连续函数，则 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_{1-\sqrt{2x-x^2}}^{2-x}f(x,y)\mathrm{d}y$ 交换积分次序后等于________.

17. 设 $f(x)$ 为连续函数，则二次积分 $\int_1^{\mathrm{e}}\mathrm{d}y\int_{\ln y}^1\frac{f(x)}{y}\mathrm{d}x$ 的定积分形式为________.

18. 计算$\iint\limits_{D} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$D$是由直线$y=x-4$与曲线$y^2=2x$所围成的区域.

19. 计算$I=\iint\limits_{D}(x^2+xy)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2x\}$.

20. 计算二重积分$\iint\limits_{D}(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant\sqrt{x^2+y^2}+x\}$.

21. 设$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 2\mathrm{e}\}$,计算$\iint\limits_{D}x\mid y-\mathrm{e}^x\mid\mathrm{d}\sigma$.

22. 计算$\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^b\mathrm{e}^{\max\{b^2x^2,a^2y^2\}}\mathrm{d}y$,其中$a,b>0$.

23. 设函数$f(x,y)$连续,且

$$f(x,y)=x+y\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中D是由$y=\dfrac{1}{x},x=1,y=2$所围成的区域,求$f(x,y)$.

B组

1. 设$D_t=\{(x,y)\mid -t\leqslant x\leqslant t,-t\leqslant y\leqslant t\}(t>0)$,$f(x)$为可导函数,且$f(0)=0$,$f'(0)\neq 0$,若当$t\to 0^+$时,函数$F(t)=\iint\limits_{D_t}f(x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$是$t^k$的同阶无穷小,则$k=$(　　).

(A)2　　(B)3　　(C)4　　(D)5

2. 设函数$f(x)$连续,

$$D_t=\{(x,y)\mid t^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4t^2\}(t>0),F(t)=\iint\limits_{D_t}\frac{(2x^2+1)f(x^2+y^2)}{x^2+y^2+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

则$F'(t)=$(　　).

(A)$2\pi[2f(4t^2)-f(t^2)]$　　(B)$2\pi[f(4t^2)-f(t^2)]$

(C)$2\pi[4tf(4t^2)-tf(t^2)]$　　(D)$2\pi[2tf(4t^2)-tf(t^2)]$

3. 设

$$I_1=\iint\limits_{D}(|x|+|y|)\mathrm{e}^{-|x|-|y|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,I_2=\iint\limits_{D}(x^2+y^2)\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$I_3=\iint\limits_{D}(x^3+y^3)\mathrm{e}^{-x^3-y^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中$D=\{(x,y)\mid |x|+|y|\leqslant 1\}$,则(　　).

(A)$I_1<I_2<I_3$　　(B)$I_2<I_3<I_1$

(C)$I_3<I_1<I_2$　　(D)$I_3<I_2<I_1$

4. 设$I_k=\iint\limits_{D_k}(4x^2+y^2-4)\mathrm{d}x\mathrm{d}y(k=1,2,3)$,其中$D_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4\}$,$D_2=\{(x,y)\mid 4x^2+y^2\leqslant 4\}$,$D_3=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$,则(　　).

(A)$I_1<I_2<I_3$　　(B)$I_3<I_2<I_1$

(C) $I_2 < I_3 < I_1$　　　　(D) $I_2 < I_1 < I_3$

5. $\int_0^1 dy\int_y^1\left(\frac{e^{x^2}}{x}-e^{y^2}\right)dx=$ ________.

6. 若 $y(x)=\int_0^x \arctan(u-1)^2 du$，则 $y(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的平均值为________.

7. 设平面区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$，则 $\iint\limits_D (x-2y)^2 dxdy=$ ________.

8. $\int_{-1}^1 dx\int_{|x|}^{\sqrt{2-x^2}}\frac{x+y}{1+x^2+y^2}dy=$ ________.

9. 设 $D_t=\{(x,y)\mid 2x^2+3y^2\leqslant 6t\}(t\geqslant 0)$，$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{1-xy}-1}{e^{xy}-1}, & xy\neq 0,\\ a, & xy=0\end{cases}$ 为连续函数，令 $F(t)=\iint\limits_{D_t} f(x,y)dxdy$，则 $F'_+(0)=$ ________.

10. 将直角坐标系中的累次积分 $I=\int_0^{\frac{8a}{5}}dx\int_{2a-\sqrt{4a^2-x^2}}^{\sqrt{2ax-x^2}}f(x,y)dy(a>0)$ 化为极坐标先 r 后 θ 次序的累次积分 $I=$ ________.

11. 设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4y, x^2+y^2\geqslant 2y\}$，则平面图形 D 的形心坐标为________.

12. 设 $I(a)=\iint\limits_D (x+y)dxdy$，其中 D 由直线 $x=a,x=0,y=a,y=-a$ 及曲线 $x^2+y^2=ax$ $(a>0)$ 所围成，计算 $I(a)$.

13. 设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1, x^2+y^2\leqslant 2y\}$，计算二重积分 $\iint\limits_D(\sqrt{x^2+y^2}+x)dxdy$.

14. 计算 $I=\iint\limits_{\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqslant 1}\sqrt[3]{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\,dxdy$.

15. 设平面区域 D 是由封闭曲线 $x^2+y^2=a(x+\sqrt{x^2+y^2})$ 所围成的有界闭区域，其中常数 $a>0$. 计算 $I=\iint\limits_D[x^2\ln(y+\sqrt{1+y^2})+x\sqrt{x^2+y^2}]d\sigma$.

16. 设平面区域 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\, x^2+y^2\leqslant 8, y\geqslant\frac{x^2}{2}\right\}$，计算 $I=\iint\limits_D[(x-1)^2+y^2]d\sigma$.

17. 计算二重积分 $\iint\limits_D\sqrt{1-x^2}[\sin(xy)+xy^2]dxdy$，其中 D 是由曲线 $y=2-x^2(x\leqslant 1)$ 与直线 $y=-x,x=1$ 所围成的闭区域.

18. 计算二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$，其中 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y+1}{x^2+y^2+1}, & x^2+y^2\leqslant 2,\\ x^2+y+1, & x^2+y^2>2,\end{cases}$ D 是由直线 $y=x,y=-x$ 及 $x=\sqrt{2}$ 围成的闭区域.

19. 设 $f(x,y)=\max\{\sqrt{x^2+y^2},1\}$，$D=\{(x,y)\mid |x|\leqslant y\leqslant 1\}$. 求 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$.

20. 计算二重积分 $\iint\limits_D|\sin(x-y)|dxdy$，其中 D 是由直线 $y=x,y=2\pi$ 及 $x=0$ 围成的闭区域.

21. 计算二重积分$\iint\limits_{D}|x^2+y^2-2x|\mathrm{d}\sigma$,其中$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$.

22. 求$\begin{cases}x=t-\sin t,\\ y=1-\cos t\end{cases}(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$,$y=0$所围平面图形$D$的形心纵坐标.

C组

1. 设$D=\{(x,y)\mid 1<x\leqslant \mathrm{e},1<y\leqslant \mathrm{e}\}$,记

$$I_1=\iint\limits_{D}[x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}]\sin(\ln y)\mathrm{d}\sigma,$$

$$I_2=\iint\limits_{D}[y\ln(y+\sqrt{1+y^2})-\sqrt{1+y^2}]\sin(\ln y)\mathrm{d}\sigma,$$

则(　　).

(A)$I_1>I_2$　　(B)$I_1<I_2$

(C)$I_1=I_2$　　(D)无法判断I_1与I_2的大小关系

2. 设D_1是中心在点$(0,1)$处,边长为2且平行于坐标轴的正方形区域,D_2,D_3分别为D_1的内切圆区域与外接圆区域,并设

$$f(x,y)=(2y-x^2-y^2)\mathrm{e}^{-x^2-y^2},$$

对于

$$I_1=\iint\limits_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}\sigma,I_2=\iint\limits_{D_2}f(x,y)\mathrm{d}\sigma,I_3=\iint\limits_{D_3}f(x,y)\mathrm{d}\sigma,$$

其大小顺序是(　　).

(A)$I_1<I_2<I_3$　　(B)$I_2<I_1<I_3$

(C)$I_3<I_2<I_1$　　(D)$I_3<I_1<I_2$

3. 计算二重积分$\iint\limits_{D}\left|x^2+y^2-\sqrt{2}(x+y)\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$D$:$x^2+y^2\leqslant 4$.

4. 设$F(x,y)=\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}$在$D=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d\}$上连续,求

$$I=\iint\limits_{D}F(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\text{(用 }f(x,y)\text{ 的函数值表示)},$$

并证明:$I\leqslant 2(M-m)$,其中M和m分别是$f(x,y)$在D上的最大值和最小值.

5. 设$f(x,y)$在$\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d\}$上连续,$g(x,y)=\int_a^x\mathrm{d}u\int_c^y f(u,v)\mathrm{d}v$,证明:

$$g''_{xy}=g''_{yx}=f(x,y)(a<x<b,c<y<d).$$

6. 设函数$f(x)$为$[0,1]$上的连续函数,且$0\leqslant f(x)<1$,证明不等式:

$$\int_0^1\frac{f(x)}{1-f(x)}\mathrm{d}x\geqslant\frac{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}{1-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}.$$