第7讲 特征值与特征向量

知识结构

- 特征值与特征向量的定义 —— $A\xi=\lambda\xi$，$\xi\neq 0$
- 用特征值命题
  - λ_0 是 A 的特征值 $\Leftrightarrow |\lambda_0 E-A|=0$；$\lambda_0$ 不是 A 的特征值 $\Leftrightarrow |\lambda_0 E-A|\neq 0$
  - λ_1，λ_2，…，λ_n 是 A 的 n 个特征值，则 $\begin{cases}|A|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n\\ \operatorname{tr}(A)=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n\end{cases}$
  - 重要结论
    - ①记住表格（见正文）
    - ②虽然 A^{T} 的特征值与 A 相同，但特征向量不再是 ξ，要单独计算才能得出
    - ③$f(x)$ 为多项式，若矩阵 A 满足 $f(A)=O$，λ 是 A 的任一特征值，则 λ 满足 $f(\lambda)=0$
- 用特征向量命题
  - $\xi(\neq 0)$ 是 A 的属于 λ_0 的特征向量 $\Leftrightarrow \xi$ 是 $(\lambda_0 E-A)x=0$ 的非零解
  - 重要结论
    - ① k 重特征值 λ 至多只有 k 个线性无关的特征向量
    - ② ξ_1，ξ_2 是 A 的属于不同特征值 λ_1，λ_2 的特征向量，则 ξ_1，ξ_2 线性无关
    - ③ ξ_1，ξ_2 是 A 的属于同一特征值 λ 的特征向量，则非零向量 $k_1\xi_1+k_2\xi_2$ 仍是 A 的属于特征值 λ 的特征向量
    - ④ ξ_1，ξ_2 是 A 的属于不同特征值 λ_1，λ_2 的特征向量，则当 $k_1\neq 0$，$k_2\neq 0$ 时，$k_1\xi_1+k_2\xi_2$ 不是 A 的任何特征值的特征向量
    - ⑤ n 阶矩阵 A，B 满足 $AB=BA$，且 A 有 n 个互不相同的特征值，则 A 的特征向量都是 B 的特征向量
- 用矩阵方程命题
  - $AB=O\Rightarrow A[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n]=[0,0,\cdots,0]$，即 $A\beta_i=0\beta_i\ (i=1,2,\cdots,n)$，若 β_i 均为非零列向量，则 β_i 为 A 的属于 $\lambda=0$ 的特征向量
  - $AB=C\Rightarrow A[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n]=[\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n]\xlongequal{\text{若}}[\lambda_1\beta_1,\lambda_2\beta_2,\cdots,\lambda_n\beta_n]$，即 $A\beta_i=\lambda_i\beta_i\ (i=1,2,\cdots,n)$，其中 $\gamma_i=\lambda_i\beta_i$，$\beta_i$ 为非零列向量，则 β_i 为 A 的属于 λ_i 的特征向量
  - $AP=PB$，P 可逆 $\Rightarrow P^{-1}AP=B\Rightarrow A\sim B\Rightarrow \lambda_A=\lambda_B$
  - A 的每行元素之和均为 $k\Rightarrow A\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}\Rightarrow k$ 是特征值，$\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}$ 是 A 的属于 k 的特征向量

一 特征值与特征向量的定义

设 A 是 n 阶矩阵，λ 是一个数，若存在 n 维非零列向量 ξ，使得

$$A\xi=\lambda\xi, \tag{①}$$

则称 λ 是 A 的特征值，ξ 是 A 的对应于特征值 λ 的特征向量.

【注】由①式，得

$$(\lambda E-A)\xi=\mathbf{0},$$

因 $\xi\neq\mathbf{0}$，故齐次方程组 $(\lambda E-A)x=\mathbf{0}$ 有非零解，于是

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}=0. \tag{②}$$

②式称为 A 的特征方程，是未知量 λ 的 n 次方程，有 n 个根（重根按照重数计），$\lambda E-A$ 称为特征矩阵，$|\lambda E-A|$ 称为特征多项式．求出 λ_i（$i=1,2,\cdots,n$）后，代回 $(\lambda E-A)x=\mathbf{0}$，得 $(\lambda_i E-A)x=\mathbf{0}$，求解此方程组，得出的非零解均为矩阵 A 的属于特征值 λ_i 的特征向量.

例 7.1 求矩阵 $A=\begin{bmatrix}a & 1 & -1\\ 1 & a & -1\\ -1 & -1 & a\end{bmatrix}$ 的全部特征值和特征向量.

【解】由

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a & -1 & 1\\ -1 & \lambda-a & 1\\ 1 & 1 & \lambda-a\end{vmatrix}$$

1倍加至

$$=\begin{vmatrix}\lambda-a & -1 & 1\\ 0 & \lambda-a+1 & \lambda-a+1\\ 1 & 1 & \lambda-a\end{vmatrix}$$

提出$(\lambda-a+1)$

$$=(\lambda-a+1)\begin{vmatrix}\lambda-a & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & \lambda-a\end{vmatrix}$$

按此行展开

$$=(\lambda-a+1)\left(\begin{vmatrix}\lambda-a & 1\\ 1 & \lambda-a\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\lambda-a & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\right)$$

$$=(\lambda-a+1)[(\lambda-a)^2-1-(\lambda-a+1)]$$

因式分解

$$=(\lambda-a+1)[(\lambda-a+1)(\lambda-a-1)-(\lambda-a+1)]$$

$$=(\lambda-a+1)^2(\lambda-a-2),$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=a-1$，$\lambda_3=a+2$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=a-1$ 时，解方程组 $[(a-1)E-A]x=0$，得 A 的线性无关的特征向量 $\xi_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$，$\xi_2=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$，则对应于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=a-1$ 的全部特征向量为 $k_1\xi_1+k_2\xi_2$，其中 k_1，k_2 是不全为零的常数 .

当 $\lambda_3=a+2$ 时，解方程组 $[(a+2)E-A]x=0$，得 A 的特征向量 $\xi_3=\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}$，则对应于特征值 $\lambda_3=a+2$ 的全部特征向量为 $k_3\xi_3$，其中 k_3 为非零常数 .

二 用特征值命题

（1）λ_0 是 A 的特征值 $\Leftrightarrow |\lambda_0E-A|=0$（建方程求参数或证明行列式 $|\lambda_0E-A|=0$）；

λ_0 不是 A 的特征值 $\Leftrightarrow |\lambda_0E-A|\neq 0$（矩阵可逆，满秩）.

【注】这里常见的命题方法：若 $|aA+bE|=0$（或 $aA+bE$ 不可逆），$a\neq 0$，则 $-\dfrac{b}{a}$ 是 A 的特征值 .

$|bE-(-aA)|=(-a)^n\left|-\dfrac{b}{a}E-A\right|=0$，则 $\lambda_0=-\dfrac{b}{a}$

（2）若 λ_1，λ_2，…，λ_n 是 A 的 n 个特征值，则

$$\begin{cases}|A|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n,\\ \operatorname{tr}(A)=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n.\end{cases}$$

（3）重要结论 .

①记住下表 .

如 $f(A)=A^3+2A^2-A+5E$，
则 $f(\lambda)=\lambda^3+2\lambda^2-\lambda+5$

矩阵	A	kA	A^k	$f(A)$	A^{-1}	A^*	$P^{-1}AP\overset{记}{=\!=}B$	$P^{-1}f(A)P\overset{记}{=\!=}f(B)$
特征值	λ	$k\lambda$	λ^k	$f(\lambda)$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{\lvert A\rvert}{\lambda}$	λ	$f(\lambda)$
对应的特征向量	ξ	ξ	ξ	ξ	ξ	ξ	$P^{-1}\xi$	$P^{-1}\xi$

表中 λ 在分母上的，设 $\lambda\neq 0$.

【注】进一步地，当 $\lambda\neq 0$ 时，$af(A)\pm bA^{-1}\pm cA^*$ 的特征值为 $af(\lambda)\pm b\dfrac{1}{\lambda}\pm c\dfrac{|A|}{\lambda}$，特征向量仍为 ξ. 但 $f(A)$，A^{-1}，A^* 与 A^{T}，B 的线性组合无上述规律，因特征向量不同 .

②虽然 A^{T} 的特征值与 A 相同，但特征向量不再是 ξ，要单独计算才能得出．

① $|\lambda E-A|=|(\lambda E-A)^{\mathrm{T}}|=|\lambda E-A^{\mathrm{T}}|$，故特征值相同；
② 但 $(\lambda E-A)x=0$ 与 $(\lambda E-A^{\mathrm{T}})x=0$ 不是同解方程组，故特征向量不同．

【注】A^{T} 和 A 属于不同特征值的特征向量正交．

证 设 A 有特征值 λ_1，对应的特征向量为 α；A^{T} 有特征值 λ_2，对应的特征向量为 β，且 $\lambda_1\neq\lambda_2$，则 $A\alpha=\lambda_1\alpha$，$A^{\mathrm{T}}\beta=\lambda_2\beta$，

$$\lambda_1\lambda_2\alpha^{\mathrm{T}}\beta=\lambda_1\alpha^{\mathrm{T}}\lambda_2\beta=\lambda_1\alpha^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}\beta=\lambda_1(A\alpha)^{\mathrm{T}}\beta=\lambda_1(\lambda_1\alpha)^{\mathrm{T}}\beta=\lambda_1^2\alpha^{\mathrm{T}}\beta,$$

即 $\lambda_1(\lambda_2-\lambda_1)\alpha^{\mathrm{T}}\beta=0$.

同理可得 $\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2)\beta^{\mathrm{T}}\alpha=0$，其中 $\beta^{\mathrm{T}}\alpha=\alpha^{\mathrm{T}}\beta$. 两式相加得

$$(\lambda_1-\lambda_2)^2\alpha^{\mathrm{T}}\beta=0,$$

由于 $\lambda_1\neq\lambda_2$，故 $\alpha^{\mathrm{T}}\beta=0$，即 α，β 正交．

③$f(x)$ 为多项式，若矩阵 A 满足 $f(A)=O$，λ 是 A 的任一特征值，则 λ 满足 $f(\lambda)=0$.

【注】解得的 λ 的值只代表范围，如 $A^2=E$，则 $\lambda^2=1$，$\lambda=\pm1$，只能说 A 的特征值的取值范围是 $\{1,-1\}$，即 A 的特征值可能全为 1，可能为 1 和 -1，也可能全为 -1，如

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

都满足 $A^2=E$. 故考生一定不要因为 $\lambda^2=1$，就武断地说 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=-1$. 这是典型的错误．

例 7.2 设 A 是 3 阶矩阵，$|A|=3$，且满足 $|A^2+2A|=0$，$|2A^2+A|=0$，则 $A_{11}+A_{22}+A_{33}=$ ________.

【解】应填 $-\dfrac{13}{2}$.

由题设知，$|A^2+2A|=|A(A+2E)|=|A||A+2E|=0$，因 $|A|=3\neq0$，则 $|A+2E|=0$，故 A 有特征值 $\lambda_1=-2$.

又 $|2A^2+A|=|A(2A+E)|=8|A|\left|A+\dfrac{1}{2}E\right|=0$，即 $\left|A+\dfrac{1}{2}E\right|=0$，得 A 有特征值 $\lambda_2=-\dfrac{1}{2}$.

因 $|A|=3=\lambda_1\lambda_2\lambda_3$，故 $\lambda_3=3$.

设 ξ 为 A 的特征向量，由本讲"二（3）"的"①"知，$A^*\xi=\dfrac{|A|}{\lambda}\xi$，即 A^* 的特征值为 $\dfrac{|A|}{\lambda}$，故 A^* 有特征值 $\mu_1=-\dfrac{3}{2}$，$\mu_2=-6$，$\mu_3=1$，由第 2 讲的"三"知，

$$A_{11}+A_{22}+A_{33}=\mathrm{tr}\left(A^*\right)=\mu_1+\mu_2+\mu_3=-\frac{3}{2}-6+1=-\frac{13}{2}.$$

例 7.3 设 $A=\begin{bmatrix}1&2\\5&4\end{bmatrix}$, $P=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$, $B=P^{-1}A^{100}P$, 则 $B+E$ 的全部线性无关的特征向量为（　　）.

（A）$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}7\\5\end{bmatrix}$　　（B）$\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}-3\\5\end{bmatrix}$　　（C）$\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}$　　（D）$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$

【解】应选（B）.

设 A 的特征向量为 α，因 $B=P^{-1}f(A)P$，故由本讲“二（3）”的“①”知，$P^{-1}\alpha$ 是 B 的特征向量，从而也是 $B+E$ 的特征向量.

由于 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2\\-5&\lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-6)$，故 A 的特征值为 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=6$. 容易求得 A 的对应于特征值 $\lambda_1=-1$ 与 $\lambda_2=6$ 的线性无关的特征向量分别为 $\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}$.

由于 $P^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}$，故

$$P^{-1}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix},\quad P^{-1}\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\5\end{bmatrix}.$$

于是，$B+E$ 的全部线性无关的特征向量为 $\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}-3\\5\end{bmatrix}$.

三 用特征向量命题

（1）$\xi\,(\neq 0)$ 是 A 的属于 λ_0 的特征向量 $\Leftrightarrow$ ξ 是 $(\lambda_0E-A)x=0$ 的非零解.

（2）重要结论.

① k 重特征值 λ 至多只有 k 个线性无关的特征向量.

②若 ξ_1，ξ_2 是 A 的属于不同特征值 λ_1，λ_2 的特征向量，则 ξ_1，ξ_2 线性无关.

矩阵 A $\begin{cases}\lambda_1\neq\lambda_2\Rightarrow\xi_1,\ \xi_2\text{线性无关}\\ \lambda_1=\lambda_2\Rightarrow\xi_1,\ \xi_2\text{可能}\begin{cases}\text{线性相关}\\ \text{线性无关}\end{cases}\end{cases}$

③若 ξ_1，ξ_2 是 A 的属于同一特征值 λ 的特征向量，则非零向量 $k_1\xi_1+k_2\xi_2$ 仍是 A 的属于特征值 λ 的特征向量.（常考其中一个系数（如 k_2）等于 0 的情形）

④若 ξ_1，ξ_2 是 A 的属于不同特征值 λ_1，λ_2 的特征向量，则当 $k_1\neq 0$，$k_2\neq 0$ 时，$k_1\xi_1+k_2\xi_2$ 不是 A 的任何特征值的特征向量.（常考 $k_1=k_2=1$ 的情形）

【注】证　反证法. 假设 $k_1\xi_1+k_2\xi_2$ 是 A 的特征向量，则存在数 λ，有

$$A(k_1\xi_1+k_2\xi_2)=\lambda(k_1\xi_1+k_2\xi_2),$$

即

$$k_1A\xi_1+k_2A\xi_2=k_1\lambda\xi_1+k_2\lambda\xi_2,$$

也即 $$k_1\lambda_1\xi_1+k_2\lambda_2\xi_2=k_1\lambda\xi_1+k_2\lambda\xi_2,$$
移项，得 $$k_1(\lambda_1-\lambda)\xi_1+k_2(\lambda_2-\lambda)\xi_2=\mathbf{0}.$$
由于 ξ_1，ξ_2 线性无关，则

$$\begin{cases}k_1(\lambda_1-\lambda)=0,\\ k_2(\lambda_2-\lambda)=0.\end{cases}$$

又 $k_1\neq 0$，$k_2\neq 0$，则 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$，与 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 矛盾，故 $k_1\xi_1+k_2\xi_2$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的任何特征值的特征向量．

⑤设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，且 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互不相同的特征值，则 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量都是 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量．

【注】证　设 $\boldsymbol{\alpha}(\neq\mathbf{0})$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ 对应的特征向量，则有 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$，由于 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则
$$\boldsymbol{AB\alpha}=\boldsymbol{BA\alpha}=\lambda\boldsymbol{B\alpha},$$
则 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B\alpha})=\lambda(\boldsymbol{B\alpha})$．

若 $\boldsymbol{B\alpha}\neq\mathbf{0}$，则 $\boldsymbol{B\alpha}$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，由于 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全是单根，故 λ 所对应的特征向量均线性相关，所以 $\boldsymbol{B\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关，即存在数 $\mu\neq 0$ 使得 $\boldsymbol{B\alpha}=\mu\boldsymbol{\alpha}$. 这说明 $\boldsymbol{\alpha}$ 也是 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量．

若 $\boldsymbol{B\alpha}=\mathbf{0}$，则有 $\boldsymbol{B\alpha}=0\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\alpha}$ 也是 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量．

例 7.4　已知 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_1$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 $\lambda=1$ 的特征向量，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 $\lambda=3$ 的线性无关的特征向量，则矩阵 $\boldsymbol{P}$ 不可以是（　　）．

（A）$[\boldsymbol{\alpha}_1,\ -2\boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3]$　　（B）$[\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3]$

（C）$[\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_2]$　　（D）$[\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3]$

【解】应选（D）．

若 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}a_1&&\\&a_2&\\&&a_3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3]$，则有 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P\Lambda}$，即

$$\boldsymbol{A}[\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3]\begin{bmatrix}a_1&&\\&a_2&\\&&a_3\end{bmatrix},$$

即 $$[\boldsymbol{A\alpha}_1,\ \boldsymbol{A\alpha}_2,\ \boldsymbol{A\alpha}_3]=[a_1\boldsymbol{\alpha}_1,\ a_2\boldsymbol{\alpha}_2,\ a_3\boldsymbol{\alpha}_3].$$

由此，$\boldsymbol{\alpha}_i$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 $a_i(i=1,\ 2,\ 3)$ 的特征向量，又因矩阵 $\boldsymbol{P}$ 可逆，因此，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关．

若 $\boldsymbol{\alpha}$ 是属于特征值 λ 的特征向量，则 $-2\boldsymbol{\alpha}$ 仍是属于特征值 λ 的特征向量，故（A）正确．

若 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 是属于特征值 λ 的特征向量，则 $k_1\boldsymbol{\alpha}+k_2\boldsymbol{\beta}$（$k_1$，$k_2$ 不同时为零）仍是属于特征值 λ 的特征向量．本题中，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 是属于 $\lambda=3$ 的线性无关的特征向量，故 $\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3$ 仍是属于 $\lambda=3$ 的特征向量，并且 $\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，故（B）正确．

关于（C），因为 $\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 均是 $\lambda=3$ 的特征向量，所以 $\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 谁在前谁在后均正确，即（C）正确．

由于 α_1, α_2 是不同特征值的特征向量，因此 $\alpha_1+\alpha_2$, $\alpha_1-\alpha_2$ 不再是矩阵 A 的特征向量，故(D)不正确.

例 7.5 设 A 为 3 阶矩阵，P 为 3 阶可逆矩阵，且 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$. 若 $P=[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$，$Q=[\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2, \alpha_3]$，则 $Q^{-1}AQ=$（　　）.

(A) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$　(B) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$　(C) $\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$　(D) $\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

【解】应选（B）.

由 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$，知矩阵 A 可相似对角化，因而其相似变换矩阵 P 的列向量 α_1, α_2, α_3 是 A 的分别属于特征值 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=2$ 的特征向量. 由于 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 是 A 的二重特征值，因此 $\alpha_1+\alpha_2$ 仍是 A 的属于特征值 1 的特征向量，即 $A(\alpha_1+\alpha_2)=1(\alpha_1+\alpha_2)$，从而有

$$Q^{-1}AQ=[\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2, \alpha_3]^{-1}A[\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2, \alpha_3]=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}.$$

应选（B）.

四 用矩阵方程命题

（1）$AB=O\Rightarrow A[\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n]=[0, 0, \cdots, 0]$，即 $A\beta_i=0\beta_i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$，若 β_i 均为非零列向量，则 β_i 为 A 的属于 $\lambda=0$ 的特征向量.

（2）$AB=C\Rightarrow A[\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n]=[\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n]\xlongequal{若}[\lambda_1\beta_1, \lambda_2\beta_2, \cdots, \lambda_n\beta_n]$，即 $A\beta_i=\lambda_i\beta_i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$，其中 $\gamma_i=\lambda_i\beta_i$，$\beta_i$ 为非零列向量，则 β_i 为 A 的属于 λ_i 的特征向量.

（3）$AP=PB$，P 可逆 $\Rightarrow P^{-1}AP=B\Rightarrow A\sim B\Rightarrow\lambda_A=\lambda_B$.

（4）A 的每行元素之和均为 $k\Rightarrow A\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}\Rightarrow k$ 是特征值，$\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}$ 是 A 的属于 k 的特征向量.

例 7.6 设向量组 α, $A\alpha$, $A^2\alpha$ 线性无关，其中 A 为 3 阶矩阵，α 为 3 维非零列向量，且 $A^3\alpha=3A\alpha-2A^2\alpha$，则 A 的特征值为________.

【解】应填 0, 1, -3.

令 $P=[\alpha, A\alpha, A^2\alpha]$，因为 α, $A\alpha$, $A^2\alpha$ 线性无关，所以 P 可逆，且

$$AP=[A\alpha,\ A^2\alpha,\ A^3\alpha]=[A\alpha,\ A^2\alpha,\ 3A\alpha-2A^2\alpha]=[\alpha,\ A\alpha,\ A^2\alpha]\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-2\end{bmatrix}=PB,$$

其中 $B=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-2\end{bmatrix}$，则 $A=PBP^{-1}$，即 A 与 B 相似，从而 A，B 有相同的特征值．又

按此行展开

$$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda&0&0\\-1&\lambda&-3\\0&-1&\lambda+2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)(\lambda+3),$$

知 B 的特征值为 0，1，-3，故 A 的特征值为 0，1，-3.

例 7.7 设 A，P 均为 3 阶矩阵，$P=[\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3]$，其中 γ_1，γ_2，γ_3 为 3 维列向量且线性无关，若 $A[\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3]=[\gamma_3,\ \gamma_2,\ \gamma_1]$，求矩阵 A 的特征值与特征向量．

【解】 $A[\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3]=[\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3]\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$，令 $B=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$，则 $AP=PB$，得 $P^{-1}AP=B$，故 $A\sim B$.

对于矩阵 $B=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$，由

按此列展开

$$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda&0&-1\\0&\lambda-1&0\\-1&0&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2-1)=(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0,$$

得矩阵 B 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=-1$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时，由 $(E-B)x=0$，即

$$\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},$$

解得基础解系 $\xi_1=[1,\ 0,\ 1]^{\mathrm{T}}$，$\xi_2=[0,\ 1,\ 0]^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_3=-1$ 时，由 $(-E-B)x=0$，即

$$\begin{bmatrix}-1&0&-1\\0&-2&0\\-1&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},$$

解得基础解系 $\xi_3=[1,\ 0,\ -1]^{\mathrm{T}}$.

因为 $P^{-1}AP=B$，所以 A 与 B 的特征值相同，且 A 的相应的特征向量为 $P\xi_i\ (i=1,\ 2,\ 3)$．故 A 属于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的特征向量为

$$\eta_1=P\xi_1=[\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3]\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}=\gamma_1+\gamma_3,$$

$$\eta_2=P\xi_2=[\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3]\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\gamma_2,$$

A 属于特征值 $\lambda_3=-1$ 的特征向量为

$$\eta_3=P\xi_3=[\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3]\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}=\gamma_1-\gamma_3.$$

综上，A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=-1$，对应于 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的全部特征向量是 $k_1(\gamma_1+\gamma_3)+k_2\gamma_2$，$k_1$，$k_2$ 不全为 0，对应于 $\lambda_3=-1$ 的全部特征向量是 $k_3(\gamma_1-\gamma_3)$，$k_3\neq 0$.

例 7.8　设 A，B，C 均是 3 阶矩阵，且满足 $AB=-2B$，$CA^{\mathrm{T}}=2C$，其中

$$B=\begin{bmatrix}1&2&3\\-1&1&0\\2&-1&1\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}1&-2&1\\-2&4&-2\\-1&2&-1\end{bmatrix}.$$

求矩阵 A 的特征值与特征向量.

【解】由题设条件：① $AB=-2B$，将 B 按列分块，设 $B=[\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3]$，则有 $A[\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3]=-2[\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3]$，即 $A\beta_i=-2\beta_i$，$i=1,\ 2,\ 3$，故 β_i ($i=1,\ 2,\ 3$) 是 A 的属于 $\lambda=-2$ 的特征向量. 又因 β_1，β_2 线性无关，$\beta_3=\beta_1+\beta_2$，故 β_1，β_2 是 A 的属于 $\lambda=-2$ 的线性无关的特征向量.

② $CA^{\mathrm{T}}=2C$，两边取转置得 $AC^{\mathrm{T}}=2C^{\mathrm{T}}$，将 C^{T} 按列分块，设 $C^{\mathrm{T}}=[\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3]$，则有

$$A[\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3]=2[\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3]，即 A\alpha_i=2\alpha_i，i=1,\ 2,\ 3,$$

故 α_i ($i=1,\ 2,\ 3$) 是 A 的属于 $\lambda=2$ 的特征向量. 因 α_1，α_2，α_3 互成比例，故 α_1 是 A 的属于特征值 $\lambda=2$ 的特征向量.

综上，A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-2$，$\lambda_3=2$，对应于 $\lambda_1=\lambda_2=-2$ 的全部特征向量是 $k_1\beta_1+k_2\beta_2$，k_1，k_2 不全为 0，对应于 $\lambda_3=2$ 的全部特征向量是 $k_3\alpha_1$，$k_3\neq 0$.