第7章　特征值与特征向量

A组

1. 设 $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\x&y&z\\0&0&1\end{bmatrix}$，且 A 的特征值为 1,2,3，则有（　　）.

(A) $x=2,y=4,z=8$　　(B) $x=-1,y=4,z\in\mathbf{R}$

(C) $x=-2,y=2,z\in\mathbf{R}$　　(D) $x=-1,y=4,z=3$

2. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=[-1,1,a,4]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[-2,1,5,a]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=[a,2,10,1]^{\mathrm{T}}$ 是 4 阶方阵 A 的 3 个不同特征值对应的特征向量，则 a 的取值范围为（　　）.

(A) $a\neq 5$　　(B) $a\neq -4$　　(C) $a\neq -3$　　(D) $a\neq -3$ 且 $a\neq -4$

3. 设 n 阶矩阵 A 的元素全是 1，则 A 的 n 个特征值是________.

4. 设 $A=E+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$，其中 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 均为 n 维列向量，$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=3$，则 $|A+2E|=$ ________.

5. 设 A 是 3 阶矩阵，$|A|=3$，且满足 $|A^2+2A|=0$，$|2A^2+A|=0$，则 A^* 的特征值是________.

6. 设 A 是 3 阶矩阵，$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 是三个线性无关的 3 维列向量，满足 $A\boldsymbol{\xi}_i=\boldsymbol{\xi}_i$，$i=1,2,3$，则 $A=$ ________.

7. 设 $A=\begin{bmatrix}a&a&a\\a&a&a\\a&a&a\end{bmatrix}$，求 A 的特征值和全部特征向量.

8. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&0&-2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}=[1,k,-1]^{\mathrm{T}}$ 是 A 的伴随矩阵 A^* 对应于特征值 λ 的一个特征向量，求满足条件的常数 k.

9. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}0&0&1\\x&1&y\\1&0&0\end{bmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量，求 x 与 y 应满足的条件.

10. 设 A 为 n 阶矩阵，λ_1 和 λ_2 是 A 的两个不同的特征值，$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$ 是 A 的分别属于 λ_1 和 λ_2 的特征向量. 证明：$\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2$ 不是 A 的特征向量.

B组

1. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&a\end{bmatrix}$ 可逆，向量 $\boldsymbol{\alpha}=[1,b,1]^{\mathrm{T}}$ 是矩阵 A^* 对应于特征值 λ 的一个特征向量，$b>0$，则 (a,b,λ) 为（　　）.

(A) $\left(\frac{2}{3},\frac{5}{3},1\right)$　　(B) $\left(\frac{2}{3},\frac{5}{3},4\right)$

(C) $(2,1,1)$　　(D) $(2,2,4)$

2. 设矩阵 A 满足 $A^3-A^2=A-E$，则（　　）.

(A) $A+E$ 与 $A-E$ 都不可逆

(B) $A+E$ 与 $A-E$ 至少有一个可逆

(C) $A+E$ 与 $A-E$ 有且仅有一个可逆

(D) $A+E$ 与 $A-E$ 至多有一个可逆

3. 已知 A 是 3 阶矩阵，$r(A)=1$，则 $\lambda=0$（　　）.

(A) 必是 A 的二重特征值　　(B) 至少是 A 的二重特征值

(C) 至多是 A 的二重特征值　　(D) 是一重、二重、三重特征值都可能

4. 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是 3 维列向量，矩阵 $A=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$，若 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=1$，则 $|A^2+A+E|=$（　　）.

(A)0　　(B)1　　(C)2　　(D)3

5. 设 A 是 3 阶不可逆矩阵，B 是 3×2 矩阵，$r(B)=2$，且 $AB+3B=O$，则行列式 $|A+2E|=$（　　）.

(A)0　　(B)2　　(C)3　　(D)6

6. 已知 2 阶实对称矩阵 A 的秩 $r(A)=1$，$\lambda_1=\sqrt{2}$ 是其一个特征值，$\boldsymbol{\xi}_1=[1,-1]^{\mathrm{T}}$ 为对应于 λ_1 的特征向量，设 k 为任意常数，则非齐次线性方程组 $Ax=\boldsymbol{\xi}_1$ 的通解是（　　）.

(A) $k\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$　　(B) $k\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$

(C) $k\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$　　(D) $k\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$

7. 设 A 是 3 阶矩阵，有特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=-1,\lambda_3=2$. A^* 是 A 的伴随矩阵，E 是 3 阶单位矩阵，则 $\left||A|\begin{bmatrix}O&A^*\\-2E&A\end{bmatrix}\right|=$ ______.

8. 已知 A,B 为 3 阶相似矩阵，$\lambda_1=1,\lambda_2=2$ 为 A 的两个特征值，$|B|=2$，则行列式 $\begin{vmatrix}(A+E)^{-1}&O\\O&(2B)^*\end{vmatrix}=$ ______.

9. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 3 阶相似矩阵，且 $|2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=0,\lambda_1=1,\lambda_2=-1$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的两个特征值，则行列式 $|\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{AB}|=$ ________.

10. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称矩阵，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个互不相同的特征值，$\boldsymbol{\xi}_1$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 λ_1 的一个单位特征向量，则矩阵 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{\xi}_1\boldsymbol{\xi}_1^{\mathrm{T}}$ 的特征值是________.

11. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 2 阶实对称矩阵，有特征值 $\lambda_1=4,\lambda_2=-1,\boldsymbol{\xi}_1=[-2,1]^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 对应于 λ_1 的特征向量，$\boldsymbol{\beta}=[3,1]^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{A\beta}=$ ________.

12. 已知 $\boldsymbol{B}$ 是 n 阶矩阵，满足 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{E}$，求 $\boldsymbol{B}$ 的特征值的取值范围.

13. 已知 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每行元素之和为 a，求 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值. 当 k 是正整数时，求 $\boldsymbol{A}^k$ 的每行元素之和.

14. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵，$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的三个不同的特征值，$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 是三个对应的特征向量. 证明：向量组 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2),\boldsymbol{A}^2(\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}_3)$ 线性无关的充要条件是 $\lambda_2\lambda_3\neq0$.

15. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，有 $\boldsymbol{A\xi}=\lambda\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}=\mu\boldsymbol{\eta}$，其中 λ,μ 是实数，且 $\lambda\neq\mu$，$\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}$ 是 n 维非零列向量. 证明：$\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}$ 正交.

16. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的三个不同的特征值，对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$，令 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

(1) 证明 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A\beta},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}$ 线性无关；

(2) 若 $\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{A\beta}$，求秩 $r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$ 及行列式 $|\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|$.

17. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵，$\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，对应的特征向量分别是

$$\boldsymbol{\xi}_1=[2,2,-1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_2=[-1,2,2]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_3=[2,-1,2]^{\mathrm{T}},$$

且 $\boldsymbol{\beta}=[1,2,3]^{\mathrm{T}}$. 求：

(1) $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\xi}_1$；

(2) $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\beta}$.

18. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称矩阵，其特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=\lambda_3=1$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同的特征向量，且 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{\alpha}_2$.

(1) 证明 $\boldsymbol{A\alpha}_1=\boldsymbol{0}$；

(2) 求线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\alpha}_2$ 的通解.

C组

1. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均是 n 阶非零矩阵，已知 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B}$，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}$. 则下列 3 个说法

①0 未必是 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的特征值；

②1 必是 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的特征值；

③ 若 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 1 的特征向量，则 $\boldsymbol{\alpha}$ 必是 $\boldsymbol{B}$ 的属于特征值 0 的特征向量.

正确的个数为(　　).

(A)0　　(B)1　　(C)2　　(D)3

2. 若任一 n 维非零列向量都是 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，证明 $\boldsymbol{A}$ 是数量矩阵.

3. 已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=a$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

(1) 当 $a=0$ 时，求行列式 $|\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}|$ 的值；

(2) 当 $a=2$ 时，求行列式 $|\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}|$ 的值.

4. (1) 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的互异特征值，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的分别对应于这些特征值的特征向量，证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关；

(2) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，$|\boldsymbol{B}|\neq 0$，若方程 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{B}|=0$ 的全部根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 互异，$\boldsymbol{\alpha}_i$ 分别是方程组 $(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的非零解，$i=1,2,\cdots,n$. 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关.

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，λ,μ 是实数，$\boldsymbol{\xi}$ 是 n 维非零列向量.

(1) 若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}=\lambda\boldsymbol{\xi}$，求 $\boldsymbol{A}^2$ 的一个特征值及对应的特征向量；

(2) 若 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\xi}=\mu\boldsymbol{\xi}$，问 $\boldsymbol{\xi}$ 是否必是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量?并说明理由；

(3) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且有 $\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\xi}=\lambda\boldsymbol{\xi}$，$\boldsymbol{A}^5\boldsymbol{\xi}=\mu\boldsymbol{\xi}$，证明 $\boldsymbol{\xi}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，并指出其对应的特征值.