第 6 章　一元函数微分学的应用（二）——中值定理、微分等式与微分不等式

A 组

1. 设函数 $f(x)=xe^{\frac{1}{1-x^2}}$，$-1<x<1$，则(　　).

(A) $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内有一个零点　　(B) $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内有两个零点

(C) $f'(x)$ 在 $(-1,1)$ 内有一个零点　　(D) $f'(x)$ 在 $(-1,1)$ 内有两个零点

2. 设 $f(x)$ 在 $[0,4]$ 上一阶可导且 $f'(x)\geqslant\frac{1}{4}$，$f(2)\geqslant 0$，则在下列区间上必有 $f(x)\geqslant\frac{1}{4}$ 成立的是(　　).

(A) $[0,1]$　　(B) $[1,2]$

(C) $[2,3]$　　(D) $[3,4]$

3. 若可导函数 $f(x)$ 满足 $f'(x)<2f(x)$，则当 $b>a>0$ 时，必有(　　).

(A) $b^2f(a)>a^2f(b)$　　(B) $b^2f(a)<a^2f(b)$

(C) $b^2f(\ln a)>a^2f(\ln b)$　　(D) $b^2f(\ln a)<a^2f(\ln b)$

4. 设 $f(x)$ 为可导函数，$a<b$. 若 $f(a)=f(b)=0$，$f'(a)\cdot f'(b)>0$，则方程 $f'(x)=0$ 在 (a,b) 内(　　).

(A) 至少有一个实根　　(B) 至多有一个实根

(C) 至少有两个实根　　(D) 至多有两个实根

5. 若方程 $3x^4+4x^3-12x^2+k=0$ 有四个不同的实根，则常数 k 的取值范围为________.

6. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内可导，且 $f(0)=f(2)=1$，$f(1)=-1$. 证明：

(1) 存在一点 $\xi\in(0,2)$，使得 $f'(\xi)=2\,024f(\xi)$；

(2) 存在两个不同的点 $\xi_1,\xi_2\in(0,2)$，使得 $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=0$.

7. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=a$，$f(b)=b$. 证明：

(1) 至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=a+b-\xi$；

(2) 至少存在一点 $\eta\in(a,b)$，使得 $f'(\eta)=1$；

(3) 存在两个不同的点 $\eta_1,\eta_2\in(a,b)$，使得 $f'(\eta_1)f'(\eta_2)=1$；

(4) 至少存在一点 $\xi_1\in(a,b)$，使得 $f'(\xi_1)+f(\xi_1)-\xi_1=1$.

8. 设 ξ_a 为函数 $f(x)=\arctan x$ 在区间 $[0,a]$ 上使用拉格朗日中值定理时的中值，求 $\lim\limits_{a\to0^+}\frac{\xi_a}{a}$.

9. 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且 $f'(x)\neq 0$，证明：$\exists\,\xi,\eta\in(a,b)$，使

$$\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\frac{e^b-e^a}{b-a}\cdot e^{-\eta}.$$

10. 设 k 是常数，讨论函数 $f(x)=(2x-3)\ln(2-x)-x+k$ 在它的定义域内的零点个数.

11. 讨论常数 a 的值，确定曲线 $y=ae^x$ 与 $y=1+x$ 的公共点的个数.

12. 设 $x>-2$，证明：$(x-2)e^{\frac{x-2}{2}}-xe^x+2e^{-2}<0$.

13. 证明：当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时，$\frac{\sin x}{x}>\sqrt[3]{\cos x}$ 成立.

B组

1. 已知 $f(x)$ 在$[a,b]$上二阶可导，且 $f(a)=f(b)=0$，又 $f(x)$ 满足方程 $f''(x)+\cos f'(x)=e^{f(x)}$，则在$(a,b)$内 $f(x)$(　　).

(A) 不小于0　　(B) 不大于0

(C) 恒为0　　(D) 恒不为0

2. 设 $f(x)=xe^{2x}-2x-\cos x$，则它的零点的个数(　　).

(A) 为零　　(B) 恰好1个　　(C) 恰好2个　　(D) 多于2个

3. 设函数 $f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & 2 & 0\\ 2 & x-1 & 2\\ 0 & 2 & x\end{vmatrix}$，则存在 $\xi\in(-2,4)$，使得 $f'(x)$ 在 $x=\xi$ 处的切线平行于直线(　　).

(A) $y+2=0$　　(B) $x-4=0$

(C) $2y+40x-7=0$　　(D) $2y-40x+7=0$

4. 设函数 $f(x)$ 在$[0,2]$上连续，在$(0,2)$内二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{f(x)}{\cos\pi x}=0$，$2\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(x)\mathrm{d}x=f(2)$. 证明：存在 $\xi\in(0,2)$，使得 $f''(\xi)=0$.

5. 设函数 $f(x)$ 在$[0,2]$上二阶可导，且 $f(0)=f(2)$. 证明：

(1) 存在一点 $\xi\in(0,2)$，使得 $f'(\xi)=\xi-1$；

(2) 存在一点 $\eta\in(0,2)$，使得 $\eta f''(\eta)+f'(\eta)-2\eta+1=0$.

6. 设函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上二阶可导，且 $f''(x)$ 在$[a,b]$上恒大于零或恒小于零，$f(a)=f(b)=0$. 证明：存在两个不同的点 $\xi_1,\xi_2\in(a,b)$，使得 $2[f'(\xi_i)]^2+f(\xi_i)f''(\xi_i)=0\,(i=1,2)$.

7. 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上二阶可导，且 $f'(a)=f'(b)=0$，证明存在 $\xi\in(a,b)$，使

$$|f''(\xi)|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

8. 讨论方程 $axe^x+b=0\,(a>0)$ 实根的情况.

9. 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，若实数 $x_0\in I$，且满足 $f(x_0)=x_0$，则称 x_0 为 $f(x)$ 在区间 I 上的一个不动点. 设函数 $f(x)=3x^2+\frac{1}{x^2}-\frac{18}{25}$，则 $f(x)$ 在区间$(0,+\infty)$上是否有不动点?若有，求出所有不动点；若没有，说明理由.

10. 设函数 $\varphi(x)$ 可导，且 $\varphi(0)=0,\varphi'(x)$ 单调减少，证明：$\forall x\in(0,1),\varphi(1)x<\varphi(x)<\varphi'(0)x$ 成立.

11. 当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，比较 $(\sin x)^{\cos x}$ 与 $(\cos x)^{\sin x}$ 的大小.

12. 设实数 $\rho\geqslant 1$，证明：不等式 $\dfrac{\rho-1}{\rho}a+\dfrac{1}{\rho}a^{1-\rho}b^{\rho}\geqslant b$ 对一切正实数 a,b 都成立.

13. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[1,3]$ 上具有三阶导数，且 $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_1^2 f(x+1)\mathrm{d}x,f'(2)=0$. 证明：存在 $\xi\in(1,3)$，使得 $f'''(\xi)=0$.

14. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，$|f'(x)|\leqslant\dfrac{1}{2},f'(x_0)=0,f''(x_0)=c\neq 0,x_0\in(a,b)$，且满足 $x_0=f(x_0)$.

(1) $\forall x_1\in[a,b],x_{n+1}=f(x_n)(n=1,2,\cdots)$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$；

(2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}-x_0}{(x_n-x_0)^2}$.

C组

1. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，$f(0)=0$，且存在常数 $k>0$，使得 $|f'(x)|\leqslant k|f(x)|$ 在 $[0,+\infty)$ 上成立，则在 $(0,+\infty)$ 内（　　）.

(A) 仅当 $0<k<1$ 时，$f(x)$ 恒为零

(B) 仅当 $k>1$ 时，$f(x)$ 恒不为零

(C) 当 $k=1$ 时，$f(x)$ 不恒为零

(D) k 为任意正常数时，$f(x)$ 均恒为零

2. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上存在二阶导数，$f(0)<0,f'(0)=a,f''(x)>0$. 证明：

(1) 无论 $a>0,a<0$ 还是 $a=0$，$f(x)$ 至多有两个零点，至少有一个零点；

(2) 若 $f(x)$ 恰有两个零点，则此两零点必反号.

3. 证明：$\cos\sqrt{2}x<-x^2+\sqrt{1+x^4}$，其中 $x\in\left(0,\dfrac{\sqrt{2}\pi}{4}\right)$.

4. 证明：当 $0<a<b<1$ 或 $1<a<b$ 时，$\dfrac{b^a}{a^b}<\dfrac{b}{a}$.

5. 设函数 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上二阶可导，且 $|f(x)|\leqslant 1$，又 $f^2(0)+[f'(0)]^2=4$. 证明：在 $(-2,2)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)+f''(\xi)=0$.

6. 设 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 内具有二阶导数，且 $|f(x)|\leqslant 1,0<|f''(x)|\leqslant 2(0\leqslant x<+\infty)$. 证明：

(1) $\forall h>0,|f'(x)|\leqslant\dfrac{2}{h}+h$；

(2) $|f'(x)|\leqslant 2\sqrt{2}$.

7. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界，且存在二阶导数. 证明：至少存在一点 $\xi\in(-\infty,+\infty)$ 使得 $f''(\xi)=0$.

8. 若用$\frac{2(x-1)}{x+1}$来近似 $\ln x$，证明：当 $x\in[1,2]$ 时，其误差不超过$\frac{1}{12}(x-1)^3$.

9. 设 $f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+\frac{h^2}{2!}f''(x_0)+\frac{h^3}{3!}f'''(x_0+\theta h)$，其中 $0<\theta<1$，$f^{(4)}(x)$ 连续且 $f^{(4)}(x_0)\neq 0$，求$\lim\limits_{h\to 0}\theta$.