第 4 章　一元函数微分学的计算

A组

1. 设 $f(x)=xe^{-x}$，则 $f^{(n)}(x)=(\quad)$.

(A) $(-1)^n(1+n)xe^{-x}$　　(B) $(-1)^n(1-n)xe^{-x}$

(C) $(-1)^n(x+n)e^{-x}$　　(D) $(-1)^n(x-n)e^{-x}$

2. 设 $y=\ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x^2}}$，则 $y''\Big|_{x=0}=$ ______.

3. 设函数 $f(x)=x^3+2x-4$，$g(x)=f[f(x)]$，则 $g'(0)=$ ______.

4. 设 $x=f(y)$ 是函数 $y=x+\ln x$ 的反函数，则 $\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}y^2}=$ ______.

5. 设 $y=y(x)$ 由方程 $\ln(x^2+y)=x^3y+\sin x$ 确定，则 $\mathrm{d}y\Big|_{x=0}=$ ______.

6. 设 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases}x=\arctan t,\\ 2y-ty^2+e^t=5\end{cases}$ 所确定，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$ ______.

7. 若 $f(x)=x^5e^{6x}$，则 $f^{(101)}(0)=$ ______.

8. 设 $y=f\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)$ 且 $f'(x)=\arctan x^2$，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0}=$ ______.

9. 设 $f'(\ln x)=x\ln x$，则 $f(x)$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(x)=$ ______.

10. 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=1+t^2,\\ y=\cos t\end{cases}$ 所确定，求：

(1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$；

(2) $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 和 $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

11. 设函数 $f(x)$ 二阶可导，$f'(0)=1$，$f''(0)=2$，且 $\begin{cases}x=f(t)-\pi,\\ y=f(e^{3t}-1),\end{cases}$ 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{t=0}$，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{t=0}$.

12. 已知 $u=g(\sin y)$，其中 $g'(v)$ 存在，$y=f(x)$ 由参数方程

$$\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=b\sin t\end{cases}\left(0<t<\frac{\pi}{2},a\neq0,b\neq0\right)$$

所确定，求 $\mathrm{d}u$.

13. 设函数 $f(x)$ 满足 $f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{3}{x}(x\neq0)$，求 $f'(x)(x\neq0)$.

B组

1. 设函数 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内二阶可导，$f(0)=3$，$f'(0)=f''(0)=\frac{1}{2}$，则 $\left.\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}\right|_{y=3}=$ (　　).

(A) -4　　(B) -2　　(C) $\frac{1}{3}$　　(D) $\frac{1}{2}$

2. 设函数 $f(x)=x^2 2^x$，则对于任意正整数 $n>1$，$f(x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)=$ (　　).

(A) $n(n-1)(\ln 2)^{n-2}$　　(B) $n(n-2)(\ln 2)^{n-1}$

(C) $n(n+1)(\ln 2)^{n-2}$　　(D) $n(n+2)(\ln 2)^{n-1}$

3. 设 $f(x)=(x-1)^n x^{2n}\sin\frac{\pi}{2}x$，则 $f^{(n)}(1)=$ (　　).

(A) $(n-1)!$　　(B) $n!$

(C) $n!+1$　　(D) $(n+1)!$

4. 已知可微函数 $y=y(x)$ 由方程 $y=-ye^x+2e^y\sin x-7x$ 所确定，则 $y''(0)=$ ________.

5. 设 $y=\frac{x^2}{1-x}\sqrt[3]{\frac{2+x}{(2-x)^2}}+\sin x$，则 $y'=$ ________.

6. 设 $f(x)=\frac{x}{2x^2-3x+1}$，则 $f^{(n)}(0)=$ ________.

7. 设 $f(x)=(x^2-3x+2)^n\cos\frac{\pi x^2}{16}$，则 $f^{(n)}(2)=$ ________.

8. 设 $\begin{cases}x=\tan t,\\ y=\frac{u(t)}{\cos t},\end{cases}$ 函数 $y=y(x)$ 满足 $(1+x^2)^2y''=y$，求 $\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}$.

9. 设 $u=f[\varphi(x)+y^2]$，其中 $y=y(x)$ 由方程 $y+e^y=x$ 确定，且 $f(x)$，$\varphi(x)$ 均有二阶导数，求 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ 和 $\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}$.

10. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{g(x)-e^{-x}}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 其中 $g(x)$ 有二阶连续导数，且 $g(0)=1$，$g'(0)=-1$.

(1) 求 $f'(x)$；

(2) 讨论 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续性.

C组

1. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}x\cos 2x\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}(x>0)$.

(1) 证明：$f(x)=\cos 2x\sin x$；

(2) 求 $f^{(20)}(x)$.

2. 设 n 为正整数，$f(x)=g'(x)$，$g(x)=\begin{cases}\frac{e^x-1}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ 求 $f^{(n)}(0)$.

3. 设 $y=\arcsin x$.

(1) 证明其满足方程 $(1-x^2)y^{(n+2)}-(2n+1)xy^{(n+1)}-n^2y^{(n)}=0(n\geqslant 0)$；

(2) 求 $y^{(n)}\Big|_{x=0}$.