第9讲 二次型

知识结构

二次型及其标准形、规范形

- 二次型的矩阵表示及其秩 — $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，其中$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}$ 的秩称为二次型f的秩
- 线性变换 — $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$
- 二次型的标准形、规范形
  - 定义
    - ①标准形$d_1x_1^2+d_2x_2^2+\cdots+d_nx_n^2$
    - ②规范形$x_1^2+\cdots+x_p^2-x_{p+1}^2-\cdots-x_{p+q}^2$
  - 重要结论
    - ①任何二次型$f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$均可通过配方法（作可逆线性变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$）化成标准形$k_1y_1^2+k_2y_2^2+\cdots+k_ny_n^2$或规范形$y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_{p+q}^2$
    - ②任何二次型$f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$也可以通过正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$化成标准形$\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$
    - ③（惯性定理）无论选取什么样的可逆线性变换，将二次型化成标准形或规范形，其正项个数p，负项个数q都是不变的，p称为正惯性指数，q称为负惯性指数

配方法

- 含平方项 — 将某个变量的平方项及与其有关的混合项合并在一起，配成一个完全平方项．如法炮制，直到配完
- 不含平方项 — 创造平方项，如含有x_1x_2项，令$\begin{cases}x_1=y_1+y_2,\\x_2=y_1-y_2,\end{cases}$使$x_1x_2=y_1^2-y_2^2$，出现平方项，再按含平方项的方法配方
- 矩阵语言 — 对实对称矩阵$\boldsymbol{A}$，必存在可逆矩阵$\boldsymbol{C}$，使得$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{\Lambda}$，其中$\boldsymbol{\Lambda}$是对角矩阵

- 正交变换法
  - 基本步骤
    - ①在确定 A 是实对称矩阵的条件下，求 A 的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$
    - ②求 A 对应于特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的特征向量 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$
    - ③将 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 正交化（若需要的话）、单位化为 $\eta_1,\eta_2,\cdots\eta_n$
    - ④令 $Q=[\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n]$，则 Q 为正交矩阵，且 $Q^{-1}AQ=Q^TAQ=\Lambda$.
      于是 $f=x^TAx\xlongequal{x=Qy}(Qy)^TA(Qy)=y^TQ^TAQy=y^T\Lambda y$
  - 反求参数，A（或 f）
  - 最值问题 — A 的特征值大小排序为 $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n$
    - ① $\lambda_1x^Tx\leqslant x^TAx\leqslant\lambda_nx^Tx$
    - ②若 $x^Tx=1$，则 $f_{\min}=\lambda_1$，$f_{\max}=\lambda_n$
  - 几何应用（仅数学一）
    - ① $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 的符号为 3 正，$f(x_1,x_2,x_3)=1$ 为椭球面
    - ② $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 的符号为 2 正 1 负，$f(x_1,x_2,x_3)=1$ 为单叶双曲面
    - ③ $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 的符号为 1 正 2 负，$f(x_1,x_2,x_3)=1$ 为双叶双曲面
    - ④ $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 的符号为 2 正 1 零，$f(x_1,x_2,x_3)=1$ 为椭圆柱面
    - ⑤ $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 的符号为 1 正 1 负 1 零，$f(x_1,x_2,x_3)=1$ 为双曲柱面
- 实对称矩阵的合同
  - ①同阶实对称矩阵 A，B 合同的判定 . 用定义法；用正、负惯性指数；用传递性；用相似
  - ②已知 A，Λ（Λ 是对角矩阵），求可逆矩阵 C，使得 $C^TAC=\Lambda$
  - ③已知 A，B（B 不是对角矩阵），求可逆矩阵 C，使得 $C^TAC=B$
- 正定二次型
  - 前提 — $A=A^T$
  - 二次型 $f=x^TAx$ 正定的充要条件
    - ①对任意的 $x\neq 0$，有 $x^TAx>0$（定义）
    - ② A 的特征值 $\lambda_i>0\ (i=1,2,\cdots,n)$
    - ③ f 的正惯性指数 $p=n$
    - ④存在可逆矩阵 D，使得 $A=D^TD$
    - ⑤ A 与 E 合同
    - ⑥ A 的各阶顺序主子式均大于 0
  - 二次型 $f=x^TAx$ 正定的必要条件
    - ① $a_{ii}>0\ (i=1,2,\cdots,n)$
    - ② $|A|>0$
  - 重要结论
    - ①若 A 正定，则 A^{-1}，A^*，A^m（m 为正整数），kA（$k>0$），C^TAC（C 可逆）均正定
    - ②若 A，B 正定，则 $A+B$ 正定，$\begin{bmatrix}A & O\\ O & B\end{bmatrix}$ 正定
    - ③若 A，B 正定，则 AB 正定的充要条件是 $AB=BA$
    - ④若 A 正定且是正交矩阵，则 $A=E$

一 二次型及其标准形、规范形

1. 二次型的矩阵表示及其秩

含有 n 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的二次齐次函数

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

称为二次型．

当 $j>i$ 时，取 $a_{ji}=a_{ij}$，则 $2a_{ij}x_ix_j=a_{ij}x_ix_j+a_{ji}x_jx_i$，故上式可写成

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j.$$

当 a_{ij} 为实数时，f 称为实二次型．

对于二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$，其中 $a_{ij}=a_{ji}$，记

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

则二次型 f 可表示为

$$f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x},$$

其中 A 为 n 阶实对称矩阵，即 $A^{\mathrm{T}}=A$，A 称为二次型 f 的矩阵，A 的秩称为二次型 f 的秩．

例 9.1 设 A 为 n 阶实对称矩阵，$r(A)=n$，A_{ij} 是 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式（$i, j=1, 2, \cdots, n$），二次型

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{A_{ij}}{|A|}x_ix_j.$$

记 $\boldsymbol{x}=[x_1, x_2, \cdots, x_n]^{\mathrm{T}}$，把 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 写成矩阵形式，并证明二次型 $f(\boldsymbol{x})$ 的矩阵为 A^{-1}.

【解】因 $r(A)=n$，故 A 可逆，且 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$，又 $(A^{-1})^{\mathrm{T}}=(A^{\mathrm{T}})^{-1}=A^{-1}$，故 A^{-1} 是实对称矩阵，因而 A^* 是实对称矩阵，则二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的矩阵形式为

$$f(\boldsymbol{x}) = [x_1, x_2, \cdots, x_n]\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= [x_1, x_2, \cdots, x_n]\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

因此二次型 $f(\boldsymbol{x})$ 的矩阵为 A^{-1}.

2. 线性变换

对于 n 元二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，若令

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n, \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n, \\ \quad \cdots\cdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n, \end{cases} \tag{*}$$

记 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$，则（*）式可写为

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y},$$

（*）式称为**线性变换**. 若线性变换的系数矩阵 $\boldsymbol{C}$ 可逆，即 $|\boldsymbol{C}| \neq 0$，则称为**可逆线性变换**（见后面的配方法）；若 $\boldsymbol{C}$ 为正交矩阵，则称为**正交变换**（见后面的正交变换法）.

3. 二次型的标准形、规范形

（1）定义.

若二次型中只含有平方项，没有交叉项（即所有交叉项的系数全为零），即形如

$$d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \cdots + d_n x_n^2$$

的二次型称为**标准形**.

若标准形中，系数 $d_i\,(i=1, 2, \cdots, n)$ 的取值范围为 $\{1, -1, 0\}$，即形如 $x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2$ 的二次型称为**规范形**.

【注】标准形一般不唯一. 规范形在不考虑系数 d_i 的顺序时是唯一的. 考生在写规范形时，也不必在意 d_i 的顺序.

（2）重要结论.

①任何二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 均可通过配方法（作可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$）化成标准形 $k_1y_1^2 + k_2y_2^2 + \cdots + k_ny_n^2$ 或规范形 $y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_{p+q}^2$.

【注】此处 $\boldsymbol{C}$ 的列向量一般不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，$k_i\,(i=1, 2, \cdots, n)$ 一般也不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

②任何二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 也可以通过正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 化成标准形 $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$.

【注】此处 $\boldsymbol{Q}$ 的列向量均是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，$\lambda_i\,(i=1, 2, \cdots, n)$ 均是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

③（**惯性定理**）无论选取什么样的可逆线性变换，将二次型化成标准形或规范形，其正项个数 p，

负项个数 q 都是不变的，p 称为**正惯性指数**，q 称为**负惯性指数**．

【注】(1) $r(A)=p+q$.

(2) 符号差 $s=p-q$.

二 配方法

1. 含平方项

将某个变量的平方项及与其有关的混合项合并在一起，配成一个完全平方项．如法炮制，直到配完．

2. 不含平方项

创造平方项，如含有 x_1x_2 项，令

$$\begin{cases} x_1=y_1+y_2, \\ x_2=y_1-y_2, \end{cases}$$

使 $x_1x_2=y_1^2-y_2^2$，出现平方项，再按含平方项的方法配方．

3. 矩阵语言

对实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，必存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{\Lambda}$，其中 $\boldsymbol{\Lambda}$ 是对角矩阵．

【注】$\boldsymbol{\Lambda}$（标准形）不唯一，视 $\boldsymbol{C}$ 而定，且 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的主对角线元素往往不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值．

例 9.2　已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2+2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2，则 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的通解为________.

【解】应填 $\boldsymbol{x}=[k,-k,0]^{\mathrm{T}}$，$k$ 是任意常数．

二次型 f 的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1-a & 1+a & 0 \\ 1+a & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

由题可知，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2，从而 $|\boldsymbol{A}|=2\begin{vmatrix} 1-a & 1+a \\ 1+a & 1-a \end{vmatrix}=-8a=0$，解得 $a=0$，则

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2=(x_1+x_2)^2+2x_3^2.$$

由 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 得 $\begin{cases} x_1+x_2=0, \\ x_3=0, \end{cases}$ 解得 $\boldsymbol{x}=[k,-k,0]^{\mathrm{T}}$，$k$ 是任意常数．

例 9.3　二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3-x_2x_3$ 的负惯性指数 q 为________.

【解】应填 1.

令
$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2, \\ x_2 = y_1 - y_2, \\ x_3 = y_3, \end{cases}$$
则
$$f = y_1^2 - y_2^2 + y_1y_3 + y_2y_3 - y_1y_3 + y_2y_3 = y_1^2 - y_2^2 + 2y_2y_3$$
$$= y_1^2 - (y_2 - y_3)^2 + y_3^2.$$

令$\begin{cases} z_1 = y_1, \\ z_2 = y_2 - y_3, \\ z_3 = y_3, \end{cases}$ 即$\begin{cases} y_1 = z_1, \\ y_2 = z_2 + z_3, \\ y_3 = z_3, \end{cases}$得二次型的规范形为
$$f \xlongequal{x=Cz} z_1^2 - z_2^2 + z_3^2.$$
故负惯性指数 q 为 1.

三 正交变换法

1. 基本步骤

对于 $f = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$.

（1）在确定 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵的条件下，求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$.

【注】若 $\boldsymbol{A}$ 不是实对称矩阵，令 $\boldsymbol{B} = \dfrac{1}{2}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$，即可将其变为实对称矩阵.

（2）求 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 的特征向量 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$.

（3）将 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 正交化（若需要的话）、单位化为 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n$.

（4）令 $\boldsymbol{Q} = [\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n]$，则 $\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵，且 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{\Lambda}$.

于是
$$f = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \xlongequal{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}} (\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{y}.$$

2. 反求参数，$\boldsymbol{A}$（或 f）

3. 最值问题

若 $\boldsymbol{A}$ 的特征值大小排序为 $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$，则

（1）$\lambda_1\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant \lambda_n\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$.

（2）若 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = 1$，则 $f_{\min} = \lambda_1$，$f_{\max} = \lambda_n$.

4. 几何应用（仅数学一）

二次曲面 $f(x_1, x_2, x_3)=1$ 的类型：

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 的符号	$f(x_1, x_2, x_3)=1$
3 正	椭球面
2 正 1 负	单叶双曲面
1 正 2 负	双叶双曲面
2 正 1 零	椭圆柱面
1 正 1 负 1 零	双曲柱面

例 9.4 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$，其中 $\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]$. 若 $\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{e}_1, -\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2]$，则 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为（　　）.

（A）$2y_1^2-y_2^2+y_3^2$　　（B）$2y_1^2+y_2^2-y_3^2$

（C）$2y_1^2-y_2^2-y_3^2$　　（D）$2y_1^2+y_2^2+y_3^2$

【解】应选（A）.

设二次型矩阵为 $\boldsymbol{A}$，则

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix},$$

则 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 分别是 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 2，1，-1 的特征向量. 于是 $-\boldsymbol{e}_3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 -1 的特征向量. 因此

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{e}_1, -\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2]^{-1}\boldsymbol{A}[\boldsymbol{e}_1, -\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2]=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix},$$

从而 f 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为 $2y_1^2-y_2^2+y_3^2$.

例 9.5 设二次型 $f(x_1, x_2)=x_1^2-4x_1x_2+4x_2^2$ 经正交变换 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\boldsymbol{Q}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}$ 化为二次型 $g(y_1, y_2)=ay_1^2+4y_1y_2+by_2^2$，其中 $a\geqslant b$.

（1）求 a，b 的值；

（2）求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$.

【解】（1）由题意知，二次型 $f(x_1, x_2)$ 与 $g(y_1, y_2)$ 的矩阵分别为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-2\\-2&4\end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}a&2\\2&b\end{bmatrix}.$$

由于 $\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵，且 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{B}$，于是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，因此 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{B})$，$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$，即

$$\begin{cases} a+b=5, \\ ab-4=0. \end{cases}$$

又 $a \geqslant b$，解得 $a=4$，$b=1$.

（2）由于 $|\lambda E-A|=|\lambda E-B|=\lambda(\lambda-5)$，因此矩阵 A，B 的特征值均为 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=5$.

矩阵 A 的属于特征值 $\lambda_1=0$ 的单位特征向量为 $\alpha_1=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$；

矩阵 A 的属于特征值 $\lambda_2=5$ 的单位特征向量为 $\alpha_2=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$.

令 $Q_1=[\alpha_1, \alpha_2]=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & -2\end{bmatrix}$，则 Q_1 为正交矩阵，且 $Q_1^{\mathrm{T}}AQ_1=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 5\end{bmatrix}$.

由（1）知 $B=\begin{bmatrix}4 & 2\\2 & 1\end{bmatrix}$.

矩阵 B 的属于特征值 $\lambda_1=0$ 的单位特征向量为 $\beta_1=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$；

矩阵 B 的属于特征值 $\lambda_2=5$ 的单位特征向量为 $\beta_2=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$.

令 $Q_2=[\beta_1, \beta_2]=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1 & 2\\-2 & 1\end{bmatrix}$，则 Q_2 为正交矩阵，且 $Q_2^{\mathrm{T}}BQ_2=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 5\end{bmatrix}$.

由于 $Q_1^{\mathrm{T}}AQ_1=Q_2^{\mathrm{T}}BQ_2=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 5\end{bmatrix}$，所以 $(Q_1Q_2^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}A(Q_1Q_2^{\mathrm{T}})=B$，故

$$Q=Q_1Q_2^{\mathrm{T}}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}4 & -3\\-3 & -4\end{bmatrix}$$

为所求矩阵 .

例 9.6 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3)=3x_1^2+4x_2^2+3x_3^2+2x_1x_3$.

（1）求正交变换 $x=Qy$ 将 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为标准形；

（2）证明：$\min\limits_{x\neq 0}\dfrac{f(x)}{x^{\mathrm{T}}x}=2$.

（1）**【解】** 二次型 $f(x_1, x_2, x_3)=3x_1^2+4x_2^2+3x_3^2+2x_1x_3$ 对应的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}3 & 0 & 1\\0 & 4 & 0\\1 & 0 & 3\end{bmatrix}.$$

由于 $|\lambda E-A|=(\lambda-2)(\lambda-4)^2$，因此 A 的特征值为 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=\lambda_3=4$.

当 $\lambda_1=2$ 时，解方程组 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量 $\xi_1=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$，单位化得 $\boldsymbol{\eta}_1=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$；

当 $\lambda_2=\lambda_3=4$ 时，解方程组 $(4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得 $\boldsymbol{A}$ 的两个正交特征向量 $\xi_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$，$\xi_3=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$，单位化得

$\boldsymbol{\eta}_2=\xi_2$，$\boldsymbol{\eta}_3=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$.

令 $\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3]=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&1&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵，且 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{bmatrix}$，因此在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形 $2y_1^2+4y_2^2+4y_3^2$.

（2）【证】由（1）知，在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下，

$$f(\boldsymbol{x})=2y_1^2+4y_2^2+4y_3^2\geqslant 2y_1^2+2y_2^2+2y_3^2=2\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}.$$

因此，当 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ 时，$\dfrac{f(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}\geqslant 2$，令 $\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{Q}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$，得 $\dfrac{f(\boldsymbol{x}_0)}{\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_0}=2$，故 $\min\limits_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}}\dfrac{f(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}=2$.

例 9.7 （仅数学一）设二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_2^2+2x_1x_3,$$

则 $f(x_1,x_2,x_3)=-1$ 在空间直角坐标系下表示的二次曲面为（　　）.

（A）单叶双曲面　　（B）双叶双曲面　　（C）椭球面　　（D）柱面

【解】应选（B）.

二次型矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$，由

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda&0&-1\\0&\lambda-1&0\\-1&0&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0,$$

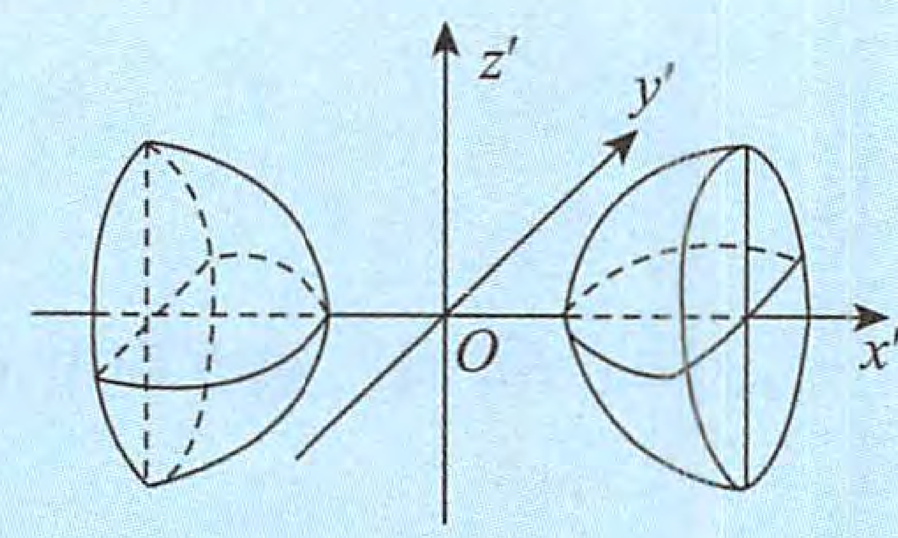
得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=-1$.

在正交变换下 f 的标准形为 $y_1^2+y_2^2-y_3^2$，则 $f(x_1, x_2, x_3)=-1$ 写成 $-y_1^2-y_2^2+y_3^2=1$，表示双叶双曲面，故选（B）.

【注】这类题还可用给出图形的命题形式出现，如下题.

设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称矩阵，如果二次曲面方程

$$[x, y, z]\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=1$$



在正交变换下的标准方程的图形如图所示，则 $\boldsymbol{A}$ 的正特征值的个数为（　　）.

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

解　应选（B）.

所给图形是双叶双曲面，其标准方程是

$$\frac{(x')^2}{a^2}-\frac{(y')^2}{b^2}-\frac{(z')^2}{c^2}=1.$$

而矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的正特征值的个数就是标准方程中正项的个数，即选项（B）是正确的.

四　实对称矩阵的合同

（1）同阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 合同的判定.

①用定义法：$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 合同 $\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}$.

②用正、负惯性指数：$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 合同 $\Leftrightarrow p_A=p_B$，$q_A=q_B$（相同的正、负惯性指数）.

【注】事实上，$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的正、负特征值的个数分别对应相同.

③用传递性：$\boldsymbol{A}$ 合同于 $\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{C}$ 合同于 $\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{A}$ 合同于 $\boldsymbol{B}$.

④用相似：同阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 相似必合同.

（2）已知 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{\Lambda}$（$\boldsymbol{\Lambda}$ 是对角矩阵），求可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{\Lambda}$.

（3）已知 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$（$\boldsymbol{B}$ 不是对角矩阵），求可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}$.

例 9.8　设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$（　　）.

（A）合同且相似　　（B）合同，但不相似

（C）不合同，但相似　　（D）既不合同，也不相似

【解】应选（B）.

因为
$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&1&1\\1&\lambda-2&1\\1&1&\lambda-2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-3)^2,$$

所以矩阵 A 的特征值为3，3，0. 由题知，矩阵 B 的特征值为1，1，0，故矩阵 A 与 B 不相似，从而选项（A）和（C）错误.

由于矩阵 A 和 B 的正、负特征值的个数对应相同，故 A，B 合同，即选项（B）正确.

例 9.9 设 A 为3阶实对称矩阵，互换 A 的1，2行得到矩阵 B，再互换 B 的1，2列得到矩阵 C，则矩阵 A 与矩阵 C（　　）.

（A）合同但不相似　　（B）相似但不合同

（C）合同且相似　　（D）不合同也不相似

【解】应选（C）.

由题设互换 A 的1，2行得到矩阵 B，则有 $PA=B$，其中 $P=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$. 再互换 B 的1，2列得到矩阵 C，则有 $BP=C$，从而 $PAP=C$. 由于初等矩阵 $P=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ 满足 $P^{\mathrm{T}}=P$，$P^{-1}=P$，所以 $P^{-1}AP=C$，$P^{\mathrm{T}}AP=C$，即矩阵 A 与矩阵 C 合同且相似，故正确选项为（C）.

例 9.10 已知 $A=\begin{bmatrix}3&2&1\\2&2&1\\1&1&1\end{bmatrix}$，$\Lambda=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，求可逆矩阵 C，使得 $C^{\mathrm{T}}AC=\Lambda$.

【解】法一

$$\begin{aligned}f=x^{\mathrm{T}}Ax&=3x_1^2+2x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3\\&\xlongequal{(*)}(x_1^2+2x_1x_2+x_2^2+2x_1x_3+2x_2x_3+x_3^2)+(x_1^2+2x_1x_2+x_2^2)+x_1^2\\&=x_1^2+(x_1+x_2)^2+(x_1+x_2+x_3)^2\\&=2\left(\frac{x_1}{\sqrt{2}}\right)^2+3\left(\frac{x_1+x_2}{\sqrt{3}}\right)^2+(x_1+x_2+x_3)^2.\end{aligned}$$

令 $\begin{cases}y_1=\dfrac{x_1}{\sqrt{2}},\\ y_2=\dfrac{x_1+x_2}{\sqrt{3}},\\ y_3=x_1+x_2+x_3,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_1=\sqrt{2}y_1,\\ x_2=-\sqrt{2}y_1+\sqrt{3}y_2,\\ x_3=-\sqrt{3}y_2+y_3,\end{cases}$ 于是有 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{2}&0&0\\-\sqrt{2}&\sqrt{3}&0\\0&-\sqrt{3}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$，记 $x=Cy$，其中 $C=\begin{bmatrix}\sqrt{2}&0&0\\-\sqrt{2}&\sqrt{3}&0\\0&-\sqrt{3}&1\end{bmatrix}$，则 $f=x^{\mathrm{T}}Ax=(Cy)^{\mathrm{T}}A(Cy)=y^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}ACy=y^{\mathrm{T}}\Lambda y$，即可使 $C^{\mathrm{T}}AC=\Lambda$.

【注】(*) 处用的是先配 x_3，再配 x_2，最后配 x_1 的顺序，只要一次配齐一个 x_i，$i=1,2,3$，先配谁，后配谁，是没有限制的，以利于解题为原则即可.

法二　成对初等变换法．

$$[A \mid E]=\left[\begin{array}{ccc:ccc}3&2&1&1&0&0\\2&2&1&0&1&0\\1&1&1&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[\left(-\frac{2}{3}\right)\text{倍加至}]{\left(-\frac{2}{3}\right)\text{倍加至}}\left[\begin{array}{ccc:ccc}3&2&1&1&0&0\\0&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&1&0\\1&1&1&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}3&0&1&1&0&0\\0&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&1&0\\1&\frac{1}{3}&1&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[\left(-\frac{1}{3}\right)\text{倍加至}]{\left(-\frac{1}{3}\right)\text{倍加至}}\left[\begin{array}{ccc:ccc}3&0&1&1&0&0\\0&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&1&0\\0&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&0&1\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}3&0&0&1&0&0\\0&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&1&0\\0&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[\left(-\frac{1}{2}\right)\text{倍加至}]{\left(-\frac{1}{2}\right)\text{倍加至}}\left[\begin{array}{ccc:ccc}3&0&0&1&0&0\\0&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&1&0\\0&0&\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}&1\end{array}\right]$$

$$\to\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}&&\times\sqrt{2}\end{array}\\\left[\begin{array}{ccc:ccc}3&0&0&1&0&0\\0&\frac{2}{3}&0&-\frac{2}{3}&1&0\\0&0&\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}&1\end{array}\right]\begin{array}{l}\leftarrow\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\\\leftarrow\times\frac{3}{\sqrt{2}}\\\leftarrow\times\sqrt{2}\end{array}\\\begin{array}{ccc}&\times\frac{3}{\sqrt{2}}&\end{array}\end{array}\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}2&0&0&\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}&0&0\\0&3&0&-\sqrt{2}&\frac{3}{\sqrt{2}}&0\\0&0&1&0&-\frac{\sqrt{2}}{2}&\sqrt{2}\end{array}\right]=[\Lambda \mid C^{\mathrm{T}}],$$

故 $C=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}&-\sqrt{2}&0\\0&\frac{3}{\sqrt{2}}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\0&0&\sqrt{2}\end{bmatrix}$.

【注】"成对初等变换"的原理如下：

因 C 可逆，故 $C\xlongequal{\text{可写作}}E_1E_2\cdots E_k$，即 C 等于若干（k）个初等矩阵的乘积，于是 $C^{\mathrm{T}}AC=\Lambda$，即为 $E_k^{\mathrm{T}}\cdots E_2^{\mathrm{T}}E_1^{\mathrm{T}}AE_1E_2\cdots E_k=\Lambda$，而 $E_k^{\mathrm{T}}\cdots E_2^{\mathrm{T}}E_1^{\mathrm{T}}E=C^{\mathrm{T}}E=C^{\mathrm{T}}$，故通过初等行变换"$E_k^{\mathrm{T}}\cdots E_2^{\mathrm{T}}E_1^{\mathrm{T}}$"和初等列变换"$E_1E_2\cdots E_k$"将 A 化成 Λ 的同时，行变换"$E_k^{\mathrm{T}}\cdots E_2^{\mathrm{T}}E_1^{\mathrm{T}}$"将 E 化成 C^{T}，C^{T} 即可求出，写为 $[A \mid E]$

$\xrightarrow{\text{成对初等变换}}[A \mid C^{\mathrm{T}}]$，需要指出的是，成对初等变换是指用结合律写成 $E_k^{\mathrm{T}}\cdots[E_2^{\mathrm{T}}(E_1^{\mathrm{T}}AE_1)E_2]\cdots E_k$，即 E_i^{T} 与 E_i（$i=1,2,\cdots,k$）要连续操作，这种方法要比配方法或正交变换法简单些，供考生参考，本题亦可用常规的配方法或正交变换法并进一步换元得到．显然，这里所求的 C 不唯一．

例 9.11 已知实矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&2\\2&a\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}4&b\\3&1\end{bmatrix}$，$a$ 为正整数．若存在可逆矩阵 C，使得 $C^{\mathrm{T}}AC=B$．

（1）求 a，b 的值；

（2）求矩阵 C．

【解】（1）因 $A^{\mathrm{T}}=A$，故

$$B^{\mathrm{T}}=(C^{\mathrm{T}}AC)^{\mathrm{T}}=C^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}C=C^{\mathrm{T}}AC=B,$$

所以 B 为对称矩阵，$b=3$．

对于
$$f(x_1,x_2)=[x_1,x_2]\begin{bmatrix}2&2\\2&a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=2x_1^2+ax_2^2+4x_1x_2$$
$$=2(x_1+x_2)^2+(a-2)x_2^2;$$

对于
$$g(y_1,y_2)=[y_1,y_2]\begin{bmatrix}4&3\\3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}=4y_1^2+y_2^2+6y_1y_2$$
$$=4\left(y_1+\frac{3}{4}y_2\right)^2-\frac{5}{4}y_2^2.$$

由题设可知 A 与 B 合同，记 p_A，q_A，p_B，q_B 分别为二次型 f，g 的正、负惯性指数，故 $p_A=p_B$，$q_A=q_B$，于是 $a-2<0$，即 $a<2$，又 a 为正整数，故 $a=1$．

综上所述，$a=1$，$b=3$．

（2）由（1）得
$$f(x_1,x_2)=2(x_1+x_2)^2-x_2^2,$$

令 $\begin{cases}z_1=x_1+x_2,\\z_2=x_2,\end{cases}$ 即 $\begin{bmatrix}z_1\\z_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=C_1\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$，则 $f(x_1,x_2)=2z_1^2-z_2^2$；

对于
$$g(y_1,y_2)=4\left(y_1+\frac{3}{4}y_2\right)^2-\frac{5}{4}y_2^2,$$

令 $\begin{cases}z_1=\sqrt{2}y_1+\dfrac{3\sqrt{2}}{4}y_2,\\z_2=\dfrac{\sqrt{5}}{2}y_2,\end{cases}$ 即 $\begin{bmatrix}z_1\\z_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{2}&\dfrac{3\sqrt{2}}{4}\\0&\dfrac{\sqrt{5}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}=C_2\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}$，则 $g(y_1,y_2)=2z_1^2-z_2^2$．

于是有 $C_1\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=C_2\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}$，故 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=C_1^{-1}C_2\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}=C\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}$，即

$$C=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\sqrt{2}&\dfrac{3\sqrt{2}}{4}\\0&\dfrac{\sqrt{5}}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{2}&\dfrac{3\sqrt{2}}{4}\\0&\dfrac{\sqrt{5}}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{2}&\dfrac{3\sqrt{2}-2\sqrt{5}}{4}\\0&\dfrac{\sqrt{5}}{2}\end{bmatrix},$$

则 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{B}$.

五 正定二次型

n 元二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$. 若对任意的 $\boldsymbol{x}=[x_1, x_2, \cdots, x_n]^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{0}$，均有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}>0$，则称 f 为**正定二次型**，称二次型的对应矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为**正定矩阵**.

1. 前提

$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$（$\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵）.

2. 二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$ 正定的充要条件

n 元二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$ 正定

$\Leftrightarrow$ 对任意的 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}>0$（定义）

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_i>0$（$i=1, 2, \cdots, n$）

$\Leftrightarrow$ f 的正惯性指数 $p=n$

$\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{D}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}$

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 合同

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子式均大于 0.

3. 二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$ 正定的必要条件

（1）$a_{ii}>0$（$i=1, 2, \cdots, n$）.

（2）$|\boldsymbol{A}|>0$.

4. 重要结论

（1）若 $\boldsymbol{A}$ 正定，则 $\boldsymbol{A}^{-1}$，$\boldsymbol{A}^*$，$\boldsymbol{A}^m$（m 为正整数），$k\boldsymbol{A}$（$k>0$），$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}$（$\boldsymbol{C}$ 可逆）均正定.

（2）若 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 正定，则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 正定，$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{bmatrix}$ 正定.

（3）若 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 正定，则 $\boldsymbol{AB}$ 正定的充要条件是 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

【注】**证** 必要性. 由 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{AB}$ 都正定，知 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}$，$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{AB}$，又由 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{BA}$，故 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

充分性. 因 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都正定，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{AB}$，得 $\boldsymbol{AB}$ 为实对称矩阵.

又由 A，B 正定，知存在可逆矩阵 P_1，P_2 使得 $A=P_1^{\mathrm{T}}P_1$，$B=P_2^{\mathrm{T}}P_2$，于是

$$\begin{aligned}AB&=(P_1^{\mathrm{T}}P_1)(P_2^{\mathrm{T}}P_2)=P_2^{-1}(P_2P_1^{\mathrm{T}})(P_1P_2^{\mathrm{T}})P_2\\&=P_2^{-1}(P_1P_2^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}(P_1P_2^{\mathrm{T}})P_2=P_2^{-1}CP_2,\end{aligned}$$

记 $C=(P_1P_2^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}(P_1P_2^{\mathrm{T}})$，$P_1P_2^{\mathrm{T}}$ 可逆，故 C 为正定矩阵，其特征值全大于 0. AB 与 C 相似，故 AB 的特征值也全大于 0，所以 AB 正定.

（4）若 A 正定且是正交矩阵，则 $A=E$.

【注】**证** 由 A 正定，知 A 的特征值均为正实数. 又 A 是正交矩阵，所以 A 的实特征值只可能为 ±1，故 A 的特征值全为 1. 又因为 A 为实对称矩阵，故存在正交矩阵 P，使得 $P^{\mathrm{T}}AP=E$，于是有

$$A=PEP^{\mathrm{T}}=E.$$

例 9.12 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+2x_2+x_3)^2+[-x_1+(a-4)x_2+2x_3]^2+(2x_1+x_2+ax_3)^2$ 正定，则参数 a 的取值范围是（　　）.

（A）$a=2$　　（B）$a=-7$　　（C）$a>0$　　（D）a 为任意实数

【解】应选（D）.

法一 由于 $f(x_1,x_2,x_3)$ 是平方和，故 $f(x_1,x_2,x_3)\geqslant 0$.

$$f(x_1,x_2,x_3)=0\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=0,\\-x_1+(a-4)x_2+2x_3=0,\\2x_1+x_2+ax_3=0,\end{cases}\qquad(*)$$

方程组（*）的系数行列式

1倍加至　(−2)倍加至

$$\begin{vmatrix}1&2&1\\-1&a-4&2\\2&1&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&1\\0&a-2&3\\0&-3&a-2\end{vmatrix}=(a-2)^2+9>0,$$

故对任意实数 a，方程组（*）有唯一零解，即对任意的 $x=[x_1,x_2,x_3]^{\mathrm{T}}\neq\mathbf{0}$，有 $f(x_1,x_2,x_3)>0$，f 正定，故选（D）.

法二

$$\begin{aligned}&f(x_1,x_2,x_3)\\&=[x_1+2x_2+x_3,\ -x_1+(a-4)x_2+2x_3,\ 2x_1+x_2+ax_3]\begin{bmatrix}x_1+2x_2+x_3\\-x_1+(a-4)x_2+2x_3\\2x_1+x_2+ax_3\end{bmatrix}\\&=[x_1,x_2,x_3]\begin{bmatrix}1&-1&2\\2&a-4&1\\1&2&a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&1\\-1&a-4&2\\2&1&a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\\&\xlongequal{\text{记}}x^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}Bx=x^{\mathrm{T}}Ax,\end{aligned}$$

其中 $A=B^{\mathrm{T}}B$. 由

$$|\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}1&2&1\\-1&a-4&2\\2&1&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&1\\0&a-2&3\\0&-3&a-2\end{vmatrix}=(a-2)^2+9>0,$$

1倍加至

(−2)倍加至

故对任意实数 a，$\boldsymbol{B}$ 都是可逆矩阵，从而 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵，即对任意实数 a，f 正定，故选（D）.

法三 令 $\begin{cases}y_1=x_1+2x_2+x_3,\\y_2=-x_1+(a-4)x_2+2x_3,\\y_3=2x_1+x_2+ax_3,\end{cases}$ 若 $\begin{vmatrix}1&2&1\\-1&a-4&2\\2&1&a\end{vmatrix}\neq 0$，则存在可逆线性变换，使得 $f=y_1^2+y_2^2+y_3^2$，此时 f 正定.

又由法一得，

$$\begin{vmatrix}1&2&1\\-1&a-4&2\\2&1&a\end{vmatrix}=(a-2)^2+9>0,$$

故 f 正定，应选（D）.

【注】对于本题，直接写出二次型的对应矩阵，利用各阶顺序主子式都大于零来判别是困难的.

例 9.13 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a&1&-1\\1&a&-1\\-1&-1&a\end{bmatrix}$.

（1）求正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵；

（2）求正定矩阵 $\boldsymbol{C}$，使 $\boldsymbol{C}^2=(a+3)\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

【解】（1）由例 7.1 知，$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=a-1$，$\lambda_3=a+2$，对应于 $\lambda_1=\lambda_2=a-1$ 的线性无关的特征向量为 $\xi_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$，$\xi_2=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$，施密特正交单位化得 $\boldsymbol{\eta}_1=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\eta}_2=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{6}}{6}\\\frac{\sqrt{6}}{6}\\\frac{\sqrt{6}}{3}\end{bmatrix}$. 对应于 $\lambda_3=a+2$ 的特征向量为 $\xi_3=\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}$，单位化得 $\boldsymbol{\eta}_3=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{3}\\-\frac{\sqrt{3}}{3}\\\frac{\sqrt{3}}{3}\end{bmatrix}$.

令 $P=[\eta_1, \eta_2, \eta_3]=\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$，则 $P^{\mathrm{T}}AP=\begin{bmatrix} a-1 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a+2 \end{bmatrix}$，故 P 为所求正交矩阵.

（2）由（1）知，$(a+3)E-A=(a+3)E-P\begin{bmatrix} a-1 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a+2 \end{bmatrix}P^{\mathrm{T}}=P\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}P^{\mathrm{T}}$.

令 $C=P\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}P^{\mathrm{T}}$，则 $C^2=(a+3)E-A$. 故所求正定矩阵是

$$C=\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix}.$$

【注】设 A 是 n 阶正定矩阵，则存在 n 阶正定矩阵 B，使得 $A=B^k$，其中 k 为正整数.