第 2 章　数列极限

A 组

1. 极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{(-1)^n}=$(　　).

(A)1　　(B)-1　　(C)e　　(D)e^{-1}

2. 极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right]^n=$(　　).

(A)e　　(B)e^{-1}　　(C)1　　(D)2

3. 已知数列$\{a_n\}$单调，下列结论正确的是(　　).

(A) $\lim\limits_{n\to\infty}(e^{a_n}-1)$存在　　(B) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+a_n^2}$存在

(C) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin a_n$存在　　(D) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1-a_n^2}$存在

4. 设a,b均为大于 1 的实数，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}}}{b^{\frac{1}{n}}-b^{\frac{1}{n+1}}}=$(　　).

(A)$\ln\dfrac{a}{b}$　　(B)$\dfrac{\ln a}{\ln b}$　　(C)$\dfrac{b\ln a}{a\ln b}$　　(D)$\dfrac{a\ln a}{b\ln b}$

5. 设$\{x_n\}$与$\{y_n\}$均无界，$\{z_n\}$有界，则(　　).

(A)$\{x_n+y_n\}$必无界　　(B)$\{x_ny_n\}$必无界

(C)$\{x_n+z_n\}$必无界　　(D)$\{x_nz_n\}$必无界

6. 设$x_n=1+\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+2+3}+\cdots+\dfrac{1}{1+2+3+\cdots+n}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=$________.

7. 设$x>0$，n为正整数，记$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left[x^{\frac{1}{nx}}-x^{\frac{1}{(n+1)x}}\right]$，则$f'(x)=$________.

8. 设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，$x_1,x_2,\cdots,x_n$是$[a,b]$上的一个点列，求$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}e^{f(x_k)}}$.

9. 设$x_1>0$，$x_{n+1}=\ln(x_n+1)(n=1,2,\cdots)$.

(1) 证明数列$\{x_n\}$极限存在，并求此极限；

(2) 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{x_n}-\dfrac{1}{x_{n+1}}\right)$；

(3) 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_n}{x_{n+1}}\right)^{\frac{1}{x_n}}$.

B组

1. 已知数列$\{x_n\}$满足$x_{n+2}-\frac{4}{3}x_{n+1}+\frac{1}{3}x_n=0,n=1,2,3,\cdots$，且$x_1=1,x_2=2$，则$\{x_n\}$收敛于(　　).

(A)1　　(B)-1　　(C)$\frac{5}{2}$　　(D)$-\frac{5}{2}$

2. 设$x_n=\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=$________.

3. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1}\right),a>0$.

4. 设$a_1=1,a_2=2$，当$n\geqslant 3$时，$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$，证明：

(1) $\frac{3}{2}a_{n-1}<a_n<2a_{n-1}$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=0$.

5. (1) 设$f(x)=x+\ln(2-x)$，求$f(x)$的最大值；

(2) 设$x_1=\ln 2,x_n=\sum\limits_{i=1}^{n-1}\ln(2-x_i),n=2,3,\cdots$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在并求其极限值.

6. 设$f_0(x)$是$[0,+\infty)$上连续的严格单调增加函数，函数$f_1(x)=\frac{\int_0^x f_0(t)\mathrm{d}t}{x}$.

(1) 补充定义$f_1(x)$在$x=0$处的值，使得补充定义后的函数(仍记为$f_1(x)$)在$[0,+\infty)$上连续；

(2) 在(1)的条件下，证明$f_1(x)<f_0(x)(x>0)$，且$f_1(x)$也是$[0,+\infty)$上连续的严格单调增加函数；

(3) 令$f_n(x)=\frac{\int_0^x f_{n-1}(t)\mathrm{d}t}{x},n=1,2,3,\cdots$，证明：对任意的$x>0$，极限$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$存在.

7. 设数列$\{x_n\}$满足$0<x_1<1,\ln(1+x_n)=\mathrm{e}^{x_{n+1}}-1(n=1,2,\cdots)$. 证明：

(1) 当$0<x<1$时，$\ln(1+x)<x<\mathrm{e}^x-1$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，并求该极限.

8. 设$f(x)$具有一阶连续导数，且$0\leqslant f'(x)\leqslant\frac{1}{1+x^2}$，又$x_1=a,x_{n+1}=f(x_n)(n=1,2,\cdots)$. 证明：数列$\{x_n\}$收敛，且其极限是方程$x=f(x)$的唯一根.

C组

1. 设比值极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\right|=\dfrac{1}{2}$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

2. 设 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$ 上连续，满足 $0\leqslant f(x)\leqslant x, x\in[0,+\infty)$，设 $a_1\geqslant 0, a_{n+1}=f(a_n)$ $(n=1,2,\cdots)$，证明：

(1) $\{a_n\}$ 为收敛数列；

(2) 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=t$，则有 $f(t)=t$；

(3) 若条件改为 $0\leqslant f(x)<x, x\in(0,+\infty)$，则(2) 中的 $t=0$.

3. 设当 $a\leqslant x\leqslant b$ 时，$a\leqslant f(x)\leqslant b$，并设存在常数 k，$0\leqslant k<1$，对于$[a,b]$上的任意两点 x_1 与 x_2，都有 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant k|x_1-x_2|$. 证明：

(1) 存在唯一的 $\xi\in[a,b]$ 使 $f(\xi)=\xi$；

(2) 对于任意给定的 $x_1\in[a,b]$，定义 $x_{n+1}=f(x_n), n=1,2,\cdots$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$.

4. 设 $F(x,y)=\dfrac{f(y-x)}{2x}$，$F(1,y)=\dfrac{y^2}{2}-y+5$，$x_0>0$，$x_1=F(x_0,2x_0)$，$\cdots$，$x_{n+1}=F(x_n,2x_n)$，$n=1,2,\cdots$. 证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求该极限.