第 1 章　函数极限与连续

A 组

1. 设 $f(x)=u(x)+v(x)$，$g(x)=u(x)-v(x)$，并设 $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0}v(x)$ 都不存在，则下列结论正确的是(　　).

(A) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 必存在

(B) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 必不存在

(C) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 必不存在

(D) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 必存在

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\tan x}-1}{x^2}=$(　　).

(A)1　　(B)2　　(C)-1　　(D)-2

3. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x}{\arctan x}\right)^{\frac{1}{kx^2}}=\mathrm{e}$，则常数 k 的值为(　　).

(A) $\dfrac{1}{3}$　　(B) $\dfrac{2}{3}$　　(C) $\dfrac{3}{2}$　　(D) 2

4. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[3]{\cos 2x}}{x^a\ln(1+x)}=b\neq 0$，则(　　).

(A)$a=-\dfrac{2}{3}$，$b=-1$　　(B)$a=\dfrac{2}{3}$，$b=1$

(C)$a=-1$，$b=-\dfrac{2}{3}$　　(D)$a=1$，$b=\dfrac{2}{3}$

5. 若 $\lim\limits_{x\to -\infty}\left[\sqrt{x^2-x+1}-(ax+b)\right]=0$，则常数 a,b 的值分别为(　　).

(A)$1,\dfrac{1}{2}$　　(B)$1,-\dfrac{1}{2}$　　(C)$-1,\dfrac{1}{2}$　　(D)$-1,-\dfrac{1}{2}$

6. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)+\ln(1-2x)}{x^2}=4$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2}{x}=$(　　).

(A)2　　(B)4　　(C)6　　(D)8

7. 当 $x\to 0^+$ 时，下列无穷小量中，与 x 同阶的无穷小是(　　).

(A)$\sqrt{1+x}-1$　　(B)$\ln(1+x)-x$　　(C)$\cos(\sin x)-1$　　(D)x^x-1

8. 当 $x\to 0$ 时，下列无穷小量中，最高阶的无穷小是(　　).

(A) $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$　　(B) $1-\cos x$

(C) $\tan x-\sin x$　　(D) $e^x+e^{-x}-2$

9. 当 $x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+$ 时，$\pi-4\arccos\sqrt{2}x$ 与 $a\left(x-\frac{1}{2}\right)^b$ 为等价无穷小，则(　　).

(A) $a=4,b=2$　　(B) $a=-4,b=2$

(C) $a=8,b=1$　　(D) $a=-8,b=1$

10. 当 $x\to 0$ 时，$f(x)=\ln(1+x^2)-2\sqrt[3]{(e^x-1)^2}$ 是无穷小量 x^k 的同阶无穷小，则 $k=$(　　).

(A) 1　　(B) 2　　(C) $\frac{2}{3}$　　(D) $\frac{3}{2}$

11. 设 $f(x)=x^2-(\arcsin x)^2$，$g(x)=x^2-(\arctan x)^2$，若当 $x\to 0$ 时，函数 $f(x)$ 是 $kg(x)$ 的等价无穷小，则常数 $k=$(　　).

(A) -2　　(B) $-\frac{1}{2}$　　(C) 2　　(D) $\frac{1}{2}$

12. 当 $x\to 0$ 时，$f(x)=\ln(1+x^2)-\ln(1+\sin^2 x)$ 是 x 的 n 阶无穷小，则正整数 n 为(　　).

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

13. 设 $g(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant 0,\\ 2+x, & x>0,\end{cases}$ $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ -x-1, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $x=0$ 是 $g[f(x)]$ 的(　　).

(A) 连续点　　(B) 可去间断点　　(C) 跳跃间断点　　(D) 第二类间断点

14. 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-x}{1+x^{2n}}$，则 $f(x)$(　　).

(A) 不存在间断点　　(B) 存在间断点 $x=1$

(C) 存在间断点 $x=0$　　(D) 存在间断点 $x=-1$

15. 要使函数 $f(x)=\left(\frac{1+x2^x}{1+x3^x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ 在 $x=0$ 处连续，应补充定义 $f(0)=$(　　).

(A) $\frac{\ln 2}{\ln 3}$　　(B) $\ln\frac{2}{3}$　　(C) $\frac{2}{3}$　　(D) $e^{\frac{2}{3}}$

16. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1-4x^2\sin x}-1}{x\ln(1+2x^2)}=$ ________.

17. 极限 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{5x-1}-\sqrt{2x+5}}{x^2-4}=$ ________.

18. 极限 $\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{\cos x\ln(x-3)}{\ln(e^x-e^3)}=$ ________.

19. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)=$ ________.

20. 极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+e^{\frac{1}{x}})^{\ln(1+x)}=$ ________.

21. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+f(x)}-1}{x-\tan x}=2$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x-\sin x}=$ ________.

22. 当 $x\to 0^+$ 时，$\sqrt{1+\tan\sqrt{x}}-\sqrt{1+\sin\sqrt{x}}$ 是 x 的 k 阶无穷小，则 $k=$ ________.

23. 已知 $f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{x^{-2}}, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$ ________.

24. 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

25. 求极限$\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2-5x}-\sqrt{x^2+7}+\dfrac{\sin^4 x}{\sqrt{x}}\right)$.

26. 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1-\dfrac{x}{2}}{e^{x^2}-1}$.

27. 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+\ln(1-x)-1}{x-\arctan x}$.

28. 求极限$\lim\limits_{x\to\infty}x^2(a^{\frac{1}{x}}+a^{-\frac{1}{x}}-2)$，$a>0$且$a\neq 1$.

29. 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\cot x-\dfrac{1}{x}\right)$.

30. 求极限$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

31. 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{1+3x^4}+\cos 4x-2}{\sqrt[3]{1-x^2}-1}$.

32. 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{1-e^{-x}}-\dfrac{1}{x}\right)$.

33. 求极限$\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\ln\left(\frac{\ln x-1}{\ln x+1}\right)}$.

34. 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{a}{x}-\left(\dfrac{1}{x^2}-a^2\right)\ln(1+ax)\right]$，$a\neq 0$.

35. 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin^2 x+e^x)-x}{\ln(x^2+e^{2x})-2x}$.

36. 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$，$a_i>0$，且$a_i\neq 1$，$i=1,2,\cdots,n$，$n\geqslant 2$.

37. 当$x\to 0$时，$\sin x(\cos x-4)+3x$为x的几阶无穷小？

38. 确定函数$f(x)=\dfrac{2x(x-1)}{|x|x^2-|x|}$的间断点，并判定其类型.

39. 求函数$f(x)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$的连续区间、间断点，并判别间断点的类型.

40. 设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{ax}-x^2-ax-1}{2x\arctan x-\ln(1+x^2)}, & x<0,\\ 1, & x=0,\\ \dfrac{e^{ax}-ax-1}{ax\ln(1+x)}, & x>0,\end{cases}$问：当常数$a(a\neq 0)$为何值时，

(1)$x=0$是函数$f(x)$的连续点？

(2)$x=0$是函数$f(x)$的可去间断点？

(3)$x=0$是函数$f(x)$的跳跃间断点？

B组

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x t\sin(x-t)^3\mathrm{d}t}{x\int_0^x \sin(x-t)^3\mathrm{d}t}=$（　　）.

(A) $\dfrac{1}{2}$　　(B) $\dfrac{1}{3}$　　(C) $\dfrac{1}{4}$　　(D) $\dfrac{1}{5}$

2. 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x=0$ 的某去心邻域内有定义，并且当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 与 $g(x)$ 都为 x 的同阶无穷小，则当 $x\to 0$ 时（　　）.

(A) $f(x)-g(x)$ 必是 x 的同阶无穷小

(B) $f(x)-g(x)$ 必是 x 的高阶无穷小

(C) $f[g(x)]$ 必是 x 的同阶无穷小

(D) $f[g(x)]$ 必是 x 的高阶无穷小

3. 设 $\alpha(x)=\int_0^{\sqrt{x}}\dfrac{\ln(1+t)}{1+t^4}\mathrm{d}t$，$\beta(x)=\int_0^{\tan x}(1+t)^{\frac{1}{t}}\mathrm{d}t$，则当 $x\to 0^+$ 时，$\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的（　　）.

(A) 等价无穷小　　(B) 同阶但非等价的无穷小

(C) 低阶无穷小　　(D) 高阶无穷小

4. 当 $x\to 0$ 时，$f(x)=x-\sin x+\int_0^x t^2e^{t^2}\mathrm{d}t$ 是 x 的 k 阶无穷小，则 $k=$（　　）.

(A)3　　(B)4　　(C)5　　(D)6

5. 设函数 $f(x)$ 连续，$f(0)=1$，且当 $x\to 0$ 时，$\int_0^{x-\tan x}f(t)\mathrm{d}t$ 与 $(1+\sin^a x)^b-1$ 为等价无穷小，则（　　）.

(A) $a=3, b=\dfrac{1}{3}$　　(B) $a=3, b=-\dfrac{1}{3}$

(C) $a=1, b=\dfrac{1}{3}$　　(D) $a=1, b=-\dfrac{1}{3}$

6. 当 $x\to\pi$ 时，若有 $\sqrt[4]{\sin\dfrac{x}{2}}-1\sim a(x-\pi)^b$，则 a,b 的值分别为（　　）.

(A) $-\dfrac{1}{32},2$　　(B) $\dfrac{1}{32},2$　　(C) $-\dfrac{1}{8},1$　　(D) $\dfrac{1}{8},1$

7. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\left[-\dfrac{f(x)}{x^3}+\dfrac{\sin x^3}{x^4}\right]=5$，则当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 x 的（　　）.

(A) 等价无穷小量　　(B) 同阶但不等价的无穷小量

(C) 高阶无穷小量　　(D) 低阶无穷小量

8. 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上都有定义，且 $x=x_1$ 是 $f(x)$ 的唯一间断点，$x=x_2$ 是 $g(x)$ 的唯一间断点. 则（　　）.

(A) 当 $x_1=x_2$ 时，$f(x)+g(x)$ 必有唯一的间断点 $x=x_1$

(B) 当 $x_1\neq x_2$ 时，$f(x)+g(x)$ 必有两个间断点 $x=x_1$ 与 $x=x_2$

(C) 当 $x_1 = x_2$ 时，$f(x)g(x)$ 必有唯一间断点 $x = x_1$

(D) 当 $x_1 \neq x_2$ 时，$f(x)g(x)$ 必有两个间断点 $x = x_1$ 与 $x = x_2$

9. 设函数 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^{n+3}}{\sqrt{3^{2n} + x^{2n}}}(-\infty < x < +\infty)$，则 $f(x)$ 在区间$(1, +\infty)$上(　　).

(A) 连续　　(B) 有一个可去间断点

(C) 有一个跳跃间断点　　(D) 有一个第二类间断点

10. 设

$$f(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{2^x + e^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}, & x \neq 0, \\ \sqrt{2e}, & x = 0. \end{cases}$$

记 $I_1 = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$，$I_2 = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$，$I_3 = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$，则(　　).

(A) $I_1 < I_3 < I_2$　　(B) $I_2 < I_3 < I_1$

(C) $I_2 < I_1 < I_3$　　(D) $I_1 < I_2 < I_3$

11. 当 $x \to 0$ 时，$x - \sin x\cos x\cos 2x$ 与 cx^k 为等价无穷小，则 $c =$ ________，$k =$ ________.

12. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_{\sin x}^{x} \sqrt{3 + t^2}\,dt}{x(e^{x^2} - 1)} =$ ________.

13. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}} =$ ________.

14. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^{\frac{2}{x}} - e^2}{x} =$ ________.

15. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} =$ ________.

16. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e + \dfrac{e}{2}x}{x^2} =$ ________.

17. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^x - (\tan x)^x}{x(\sqrt{1 + 3\sin^2 x} - 1)}$.

18. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^{\frac{2}{x}} - e^2[1 - \ln(1+x)]}{x}$.

19. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0} \int_0^x \dfrac{\sin 2t}{\sqrt{4+t^2}\int_0^x(\sqrt{t+1} - 1)\,dt}\,dt$.

20. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + 1} - xe^{\frac{1}{x}})$.

21. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 + \dfrac{1}{2}x^2 - \sqrt{1+x^2}}{(\cos x - e^{\frac{x^2}{2}})\sin \dfrac{x^2}{2}}$.

22. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^3}\left[\left(\dfrac{2 + \cos x}{3}\right)^x - 1\right]$.

23. 求极限 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x - x^x}{1 - x + \ln x}$.

24. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}}$.

25. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x})$.

26. 设 $\alpha\geqslant 5$ 且为常数，则 k 为何值时，极限

$$I=\lim_{x\to+\infty}[(x^\alpha+8x^4+2)^k-x]$$

存在，并求此极限值.

27. 求函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+2}-x^{-n}}{x^n+x^{-n}}$ 的间断点，并指出其类型.

28. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}\arctan\dfrac{1}{1+x}}{x^2+e^{nx}}$，求 $f(x)$ 的间断点，并判定其类型.

C组

1. 下列命题正确的是（　　）.

(A) 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)$ 必存在

(B) 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 不存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)$ 必不存在

(C) 设 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$，$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$，则必有 $\lim\limits_{x\to x_0}f[g(x)]=A$

(D) 设 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$，$\lim\limits_{u\to\infty}f(u)=A$，则必有 $\lim\limits_{x\to x_0}f[g(x)]=A$

2. 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2+nx(1-x)\sin^2\pi x}{1+n\sin^2\pi x}$，则 $f(x)$（　　）.

(A) 处处连续

(B) 只有第一类间断点

(C) 只有第二类间断点

(D) 既有第一类间断点，又有第二类间断点

3. 设函数 $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}(x>0)$，存在常数 A,B，使得当 $x\to 0^+$ 时，恒有

$$f(x)=e+Ax+Bx^2+o(x^2),$$

则常数 A,B 的值分别为（　　）.

(A) $\dfrac{e}{2},\dfrac{11}{24}e$　　(B) $-\dfrac{e}{2},\dfrac{11}{24}e$

(C) $\dfrac{e}{2},-\dfrac{11}{24}e$　　(D) $-\dfrac{e}{2},-\dfrac{11}{24}e$

4. 设函数 $f(x)=\dfrac{\ln(1+x^3)}{\arcsin x-x}$，$g(x)=\dfrac{\dfrac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}$，则 $\lim\limits_{x\to0^-}f[g(x)]=$________.

5. 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\cos^n\dfrac{1}{n^x}(0<x<+\infty)$，则 $f(x)$ 在其间断点处的值等于________.

6. 记 $f(x)=27x^3+5x^2-2$ 的反函数为 f^{-1}，求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f^{-1}(27x)-f^{-1}(x)}{\sqrt[3]{x}}$.

7. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(\tan x)-\sin(\sin x)}{x-\sin x}$.

8. 计算极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2+x+1}-\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}\,\dfrac{\ln(x+e^x)}{x}\right]$.

9. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u}{\sin x\int_0^1\tan(xt)^2\mathrm{d}t}$.

10. 已知极限 $I=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a}{x^2}+\dfrac{b}{x^4}+\dfrac{c}{x^5}\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t\right)=1$，求常数 a,b,c.

11. 确定常数 A,B,C 的值，使 $e^x(1+Bx+Cx^2)=1+Ax+o(x^3)(x\to 0)$.

12. 设 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)$ 满足 $f'(x)=\dfrac{1}{x^2+f^2(x)}$，且 $f(0)=1$，证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在.