第2讲 数列极限

知识结构

- 数列极限的定义及使用
  - 定义
  - 使用
    - 是常数
    - 唯一性
    - 有界性
    - 保号性
    - 收敛的充要条件
- 数列极限的存在性与计算
  - 归结原则
  - 直接计算法
  - 定义法（“先斩后奏”）
  - 单调有界准则
    - 证什么
    - 怎么证
      - 用已知不等式
      - 题设给出条件来推证
  - 夹逼准则
    - 证什么
    - 怎么证
      - 用基本放缩方法
      - 题设给出条件来推证
  - 综合题总结
    - 用导数综合
    - 用积分综合
    - 用中值定理综合
    - 用方程（列）综合
    - 用区间（列）综合
    - 用极限综合

一 数列极限的定义及使用

1. 定义

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$，当 $n > N$ 时，有 $|x_n - A| < \varepsilon$.

2. 使用

当$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在时，

①**(是常数)** 常记$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，$A$ 是个常数.

②**(唯一性)** A 唯一.

③**(有界性)** $\{x_n\}$ 有界，即 $\exists M>0$，使 $|x_n|\leqslant M$.

④**(保号性)** 若 $A>0$，则 $n\to\infty$ 时，$x_n>0$；若 $n\to\infty$ 时，$x_n\geqslant 0$，则 $A\geqslant 0$.

⑤**(收敛的充要条件)** 所有子列 $\{x_{n_k}\}$ 均收敛于 A.

例 2.1 已知 $a_n=\sqrt[n]{n}-\dfrac{(-1)^n}{n}(n=1,2,\cdots)$，则$\{a_n\}$(　　).

(A) 有最大值，有最小值　　(B) 有最大值，没有最小值

(C) 没有最大值，有最小值　　(D) 没有最大值，没有最小值

【解】应选(A).

因$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$，$a_1=2>1$，$a_2=\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}<1$. 由于$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a_1)<0$，则 $\exists N_1>0$，当 $n>N_1$ 时，$a_n<a_1$. 由于$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a_2)>0$，则 $\exists N_2>0$，当 $n>N_2$ 时，$a_n>a_2$. 取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，当 $n>N$ 时，a_n 不可能是最大、最小值，而前有限项必存在最大、最小值.

【注】(1) 最值是比较出来的.
(2) 此题用保号性说明了 $n>N$ 后的项没有资格参与比较，故前有限项必有最大、最小值.

例 2.2 设正项数列$\{x_n\}$ 满足

$$x_{n+1}+\frac{1}{x_n}<2(n=1,2,\cdots),$$

证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并计算其值.

【证】由于 $x_n>0(n=1,2,\cdots)$，且

基本不等式 $\sqrt{ab}\leqslant\dfrac{a+b}{2}, a,b>0$

$$\sqrt{\frac{x_{n+1}}{x_n}}\leqslant\frac{1}{2}\left(x_{n+1}+\frac{1}{x_n}\right)<1(n=1,2,\cdots), \quad (*)$$

则 $x_{n+1}<x_n$，即$\{x_n\}$单调减少有下界，所以由单调有界准则知，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，记为 A，则 $A\geqslant 0$.

如果 $A=0$，则令 $n\to\infty$，对题设

$$x_{n+1}+\frac{1}{x_n}<2(n=1,2,\cdots)$$

两边取极限得 $+\infty\leqslant 2$，矛盾，所以 $A>0$.

令 $n\to\infty$ 对(*)式取极限得

$$\frac{1}{2}\left(A+\frac{1}{A}\right)=1,$$

即 $A=1$. 所以$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

二 数列极限的存在性与计算

1. 归结原则

设 $f(x)$ 在 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内有定义，则 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=A$ 存在 $\Leftrightarrow$ 对任何 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内以 x_0 为极限的数列 $\{x_n\}(x_n \neq x_0)$，极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$ 存在.

常考的是：若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则当 $\{x_n\}$ 以 x_0 为极限，且 $x_n \neq x_0$ 时，有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$.

如：① 当 $x \to 0$ 时，取 $x_n=\dfrac{1}{n}$，即若 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\dfrac{1}{n}\right)=A$.

② 当 $x \to +\infty$ 时，取 $x_n=n$，即若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)=A$.

③ 当 $x_n \to a$，且 $x_n \neq a$ 时，若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$.

例 2.3 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt[n]{n}-1)=$ ________.

【解】应填 0.

当 $x \to +\infty$ 时，$\sqrt[x]{x}-1=e^{\frac{1}{x}\ln x}-1 \sim \dfrac{1}{x}\ln x$，于是

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}(\sqrt[x]{x}-1)=\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x}\ln x=\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\ln x$$

$$\xlongequal{\text{令}\sqrt{x}=t} \lim_{t\to+\infty} \frac{2\ln t}{t} \xlongequal{\text{洛必达法则}} 2\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}=0.$$

由归结原则，$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt[n]{n}-1)=0$.

上述常考的②

2. 直接计算法

例 2.4 已知 $\dfrac{a_n'(x)}{\cos x}=\sum\limits_{k=1}^{n}(k+1)\sin^k x$，$x \in \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$a_n(0)=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n(1)=$ ________.

【解】应填 $\dfrac{\sin^2 1}{1-\sin 1}$.

由于 $a_n'(x)=\cos x \cdot \sum\limits_{k=1}^{n}(k+1)\sin^k x$，故

$$a_n(1)-a_n(0)=\int_0^1 a_n'(x)\mathrm{d}x=\int_0^1[2\sin x+3\sin^2 x+\cdots+(n+1)\sin^n x]\mathrm{d}(\sin x)$$

$$=(\sin^2 x+\sin^3 x+\cdots+\sin^{n+1} x)\Big|_0^1=\sin^2 1+\sin^3 1+\cdots+\sin^{n+1} 1$$

$$=\sin^2 1(1+\sin 1+\cdots+\sin^{n-1} 1)=\sin^2 1 \cdot \frac{1-\sin^n 1}{1-\sin 1}.$$

由 $0 < \sin 1 < 1$，$a_n(1) = \dfrac{\sin^2 1}{1-\sin 1} \cdot (1-\sin^n 1)$，两边取极限，得 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n(1) = \dfrac{\sin^2 1}{1-\sin 1}$.

3. 定义法（"先斩后奏"）

构造 $|x_n - a|$，证 $|x_n - a| \to 0\ (n\to\infty) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

例 2.5 设 $f(x)$ 满足

①$a \leqslant f(x) \leqslant b, x \in [a,b]$；

② 对任给的 $x, y \in [a,b]$，有 $|f(x)-f(y)| \leqslant \dfrac{1}{2}|x-y|$.

又 $\{x_n\}$ 满足 $a \leqslant x_1 \leqslant b$，$x_{n+1} = \dfrac{1}{2}[x_n + f(x_n)]$.

(1) 证明 $f(x) = x$ 在 $[a,b]$ 上有唯一解 c；

(2) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$.

【证】(1) 先证 $f(x)$ 的连续性. $\forall x, x_0 \in [a,b]$，有 $0 \leqslant |f(x)-f(x_0)| \leqslant \dfrac{1}{2}|x-x_0|$，又

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{2}|x-x_0| = 0,$$

$\lim\limits_{x\to\cdot} |f(x)| = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\cdot} f(x) = 0$

故由夹逼准则知 $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)-f(x_0)| = 0$，即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$，即 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

再证 c 的存在性. 令 $F(x) = f(x) - x, x\in[a,b]$，则 $F(a) = f(a) - a \geqslant 0$，$F(b) = f(b) - b \leqslant 0$.

当 $F(a) = 0$ 时，可取 $c = a$；

当 $F(b) = 0$ 时，可取 $c = b$；

当 $F(a)F(b) \neq 0$ 时，即 $F(a)F(b) < 0$，由零点定理知，存在 $c \in (a,b)$，使得 $F(c) = 0$.

最后证 c 的唯一性. 若 c 不唯一，设 $d \in [a,b]$，且 $d \neq c$，使得 $F(d) = 0$，则由题设有

$$|f(c)-f(d)| \leqslant \frac{1}{2}|c-d|,$$

但 $f(c) = c, f(d) = d$，即 $|f(c)-f(d)| = |c-d|$，矛盾，于是 c 唯一.

(2)
$$\begin{aligned} x_{n+1} - c &= \frac{1}{2}[x_n + f(x_n)] - \frac{1}{2}[c + f(c)] \\ &= \frac{1}{2}(x_n - c) + \frac{1}{2}[f(x_n) - f(c)], \end{aligned}$$

从而
$$\begin{aligned} |x_{n+1} - c| &\leqslant \frac{1}{2}|x_n - c| + \frac{1}{2}|f(x_n) - f(c)| \\ &\leqslant \frac{1}{2}|x_n - c| + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}|x_n - c| \\ &= \frac{3}{4}|x_n - c|, \end{aligned}$$

故

$$0\leqslant|x_{n+1}-c|\leqslant\frac{3}{4}|x_n-c|\leqslant\left(\frac{3}{4}\right)^2|x_{n-1}-c|\leqslant\cdots\leqslant\left(\frac{3}{4}\right)^n|x_1-c|.$$

而 $\forall x_1\in[a,b]$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n|x_1-c|=0$，故由夹逼准则，有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=c$.

4. 单调有界准则

若 $\{x_n\}$ 单调增加(减少)且有上界(下界)，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$(存在).

(1) 证什么.

① 单调是证：x_{n+1} 与 x_n 的大小关系.

② 有界是证：$\exists M>0$，使得 $|x_n|\leqslant M$.

(2) 怎么证.

主要有两种证法.

① 用已知不等式.

a. $\forall x\geqslant 0,\sin x\leqslant x$，如考 $x_{n+1}=\sin x_n\leqslant x_n$，$\{x_n\}$ 单调减少；

b. $\forall x,\mathrm{e}^x\geqslant x+1$，如考 $x_{n+1}=\mathrm{e}^{x_n}-1\geqslant x_n$，$\{x_n\}$ 单调增加；

c. $\forall x>0,x-1\geqslant\ln x$，如考 $x_{n+1}=\ln x_n+1\leqslant x_n$，$\{x_n\}$ 单调减少；

d. $a,b>0,\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$，如考 $x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}\leqslant\frac{x_n+3-x_n}{2}=\frac{3}{2}$，$\{x_n\}$ 有上界.

② 题设给出条件来推证.

例 2.6 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0<x_n<\frac{\pi}{2}$，$\cos x_{n+1}-x_{n+1}=\cos x_n$，$n=1,2,\cdots$.

(1) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在并求其值；

(2) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n^2}$.

(1)【证】$\cos x_{n+1}-\cos x_n=x_{n+1}>0$，且 $0<x_n<\frac{\pi}{2}$，故有 $0<x_{n+1}<x_n$，于是 $\{x_n\}$ 单调减少且有下界，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n\xlongequal[\text{记为}]{\text{存在}}a$. 在 $\cos x_{n+1}-x_{n+1}=\cos x_n$ 两边取极限，有 $\cos a-a=\cos a$，得 $a=0$. 于是 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

(2)【解】$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\overbrace{1-\cos x_n}^{\sim\frac{1}{2}x_n^2}}{x_n^2}\cdot\frac{x_{n+1}}{1-\cos x_n}=\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{1-\cos x_{n+1}+x_{n+1}}=\frac{1}{2}$.

【注】这种命题将函数的具体性质与抽象理论相结合，较好地考查了考生的数学水平，还可进一步发挥：

(1) 将单通项 x_n 改成双通项 a_n 与 b_n.

设 $0<a_n<\frac{\pi}{2}$，$0<b_n<\frac{\pi}{2}$，$\cos a_n-a_n=\cos b_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$，则由 $\cos a_n-\cos b_n=a_n>0$，知 $0<a_n<b_n$，由夹逼准则，得 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos b_n}{b_n^2}\cdot\frac{a_n}{1-\cos b_n}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{1-\cos a_n+a_n}=\frac{1}{2}.$$

与上述例题如出一辙.

(2) 将函数 $\cos x$ 改成 e^x.

设 $x_n>0, e^{x_n}-x_n=e^{x_{n+1}}$（或更具迷惑性地写成 $\ln(e^{x_n}-x_n)=x_{n+1}$），则由 $e^{x_n}-e^{x_{n+1}}=x_n>0$，知 $x_n>x_{n+1}>0$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n \xlongequal[\text{记为}]{\text{存在}} a$，于是有 $e^a-e^a=a=0$，得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，且

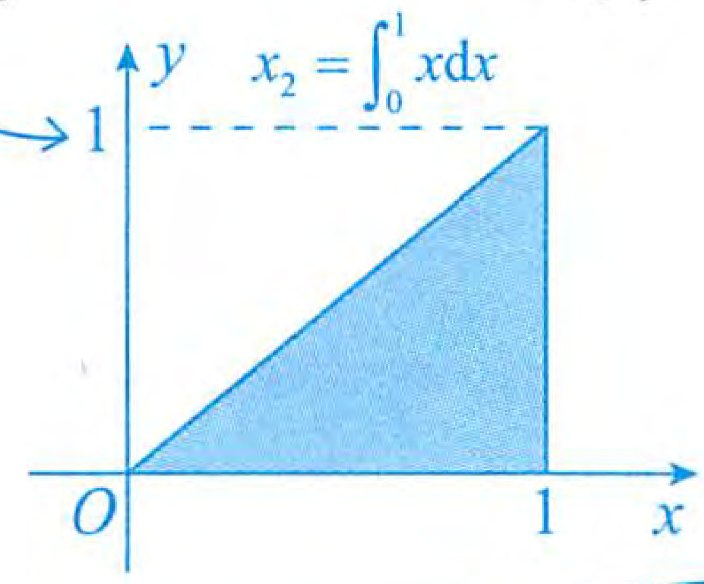
$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2}{x_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2}{\ln(e^{x_n}-x_n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2}{e^{x_n}-x_n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2}{\frac{1}{2}x_n^2}=2.$$

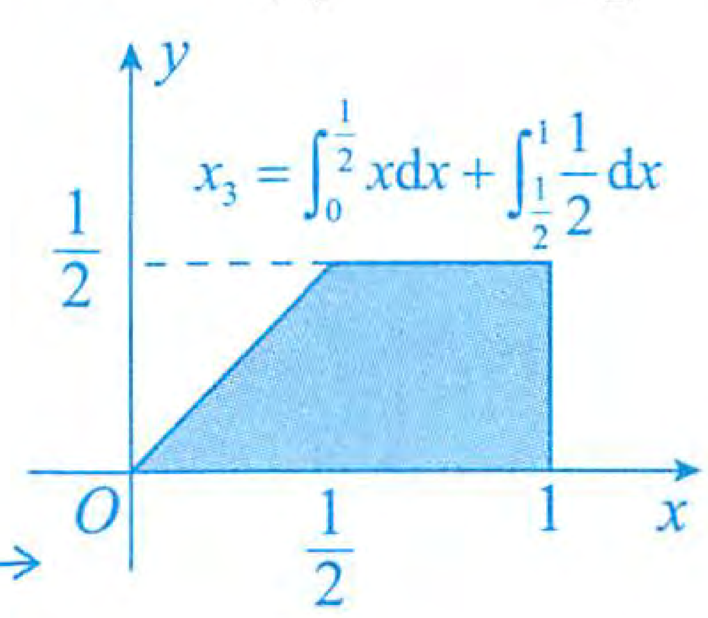
$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$

$e^x-x-1\sim\frac{1}{2}x^2\ (x\to0)$

例 2.7 设 $x_1=1, x_n=\int_0^1\min\{x,x_{n-1}\}dx, n=2,3,\cdots$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求其值.

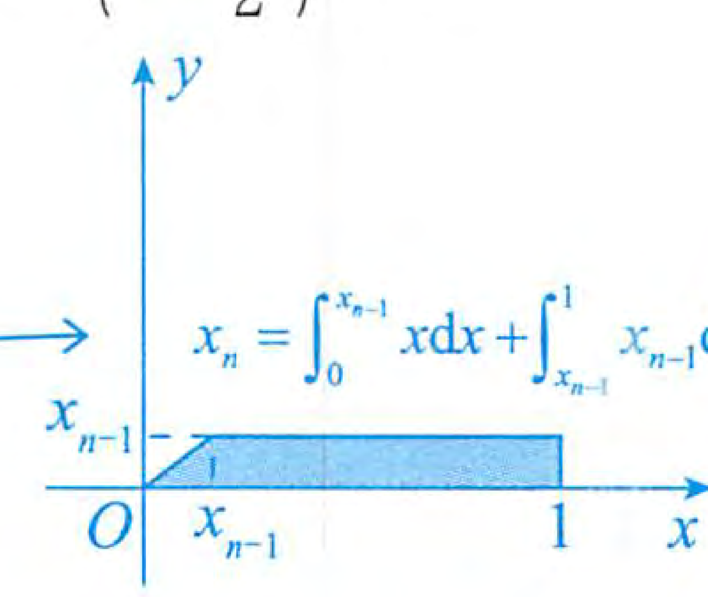
【证】 $x_2=\int_0^1\min\{x,x_1\}dx=\int_0^1\min\{x,1\}dx=\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}$，故 $0<x_2<1$.





$$x_3=\int_0^1\min\{x,x_2\}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\min\left\{x,\frac{1}{2}\right\}dx+\int_{\frac{1}{2}}^1\min\left\{x,\frac{1}{2}\right\}dx$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}x\,dx+\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{1}{2}dx=\frac{3}{8},$$



故 $0<x_3<1$. 设 $x_{n-1}\in(0,1)$，则

$$x_n=\int_0^1\min\{x,x_{n-1}\}dx$$

$$=\int_0^{x_{n-1}}\min\{x,x_{n-1}\}dx+\int_{x_{n-1}}^1\min\{x,x_{n-1}\}dx$$

$$=\int_0^{x_{n-1}}x\,dx+\int_{x_{n-1}}^1 x_{n-1}dx$$

$$=\frac{x_{n-1}^2}{2}+x_{n-1}(1-x_{n-1})=x_{n-1}-\frac{x_{n-1}^2}{2},$$

所以 $0<x_n<1$，$\{x_n\}$ 有界. 且 $x_n=x_{n-1}-\frac{x_{n-1}^2}{2}<x_{n-1}$，$\{x_n\}$ 单调减少，由单调有界准则知，

$\frac{x_{n-1}^2}{2}>0\Rightarrow x_{n-1}-\frac{x_{n-1}^2}{2}<1; x_{n-1}>x_{n-1}^2>\frac{x_{n-1}^2}{2}\Rightarrow x_{n-1}-\frac{x_{n-1}^2}{2}>0$

其极限存在.

记 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，则有 $A=A-\dfrac{A^2}{2}$，解得 $A=0$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

【注】本题计算 x_3 是为了使读者容易理解，事实上，由第一数学归纳法，x_3 的计算可以不写.

例 2.8 (1) 证明方程 $x=2\ln(1+x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有唯一实根 ξ；

(2) 对于(1)中的 ξ，任取 $x_1>\xi$，定义 $x_{n+1}=2\ln(1+x_n)$，$n=1,2,\cdots$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求其值.

【证】(1) 令 $F(x)=x-2\ln(1+x)$，$x>0$，则

$$F'(x)=1-\frac{2}{1+x}=\frac{x-1}{1+x},$$

令 $F'(x)=0$，得 $x=1$ 是唯一驻点，且当 $0<x<1$ 时，$F'(x)<0$；当 $x>1$ 时，$F'(x)>0$.

又

$$F(0)=0,F(1)=1-2\ln 2<0,$$

$$\lim_{x\to+\infty}[x-2\ln(1+x)]=+\infty>0,$$

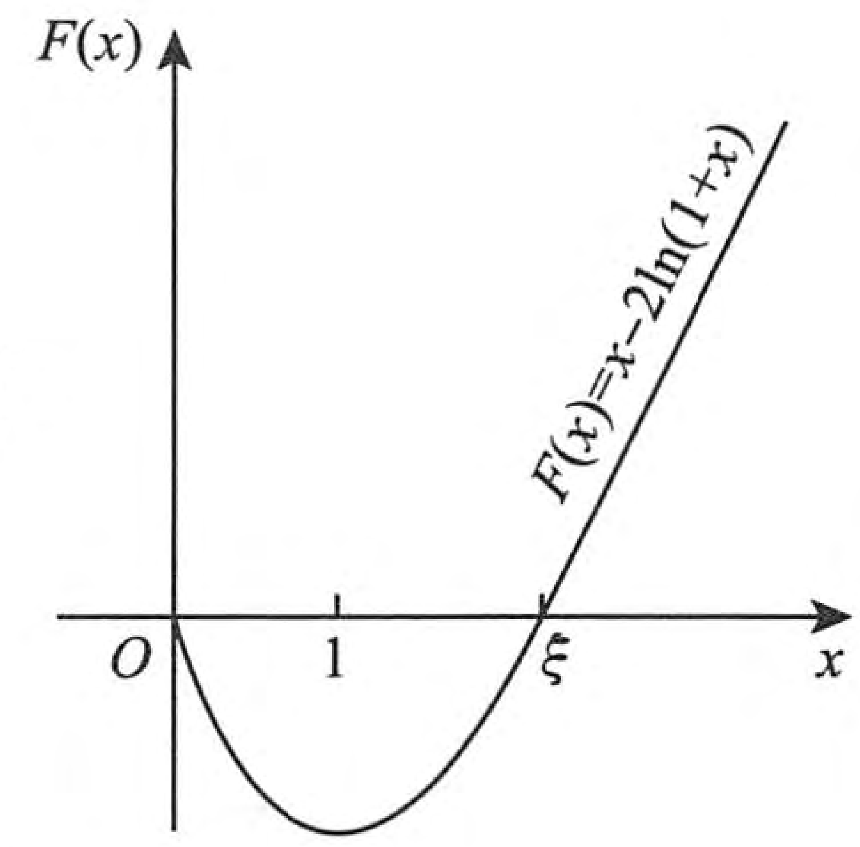


图 2-1

如图 2-1 所示，所以 $F(x)$ 在 $(0,1)$ 内无零点，在 $(1,+\infty)$ 内有唯一零点 ξ，故原方程在 $(0,+\infty)$ 内有唯一实根 ξ.

(2) 由 $x_1>\xi$，$F(x_1)>F(\xi)=0$，即

$$x_1>2\ln(1+x_1)=x_2>2\ln(1+\xi)=\xi,$$

即 $x_1>x_2>\xi$.

$x_1>\xi$，故 $2\ln(1+x_1)>2\ln(1+\xi)$

假设 $x_{n-1}>x_n>\xi$ 成立，则有

$$x_n>2\ln(1+x_n)=x_{n+1}>2\ln(1+\xi)=\xi,$$

即 $x_n>x_{n+1}>\xi$. 于是 $\{x_n\}$ 单调减少且有下界 ξ. $x_n>\xi$，故 $2\ln(1+x_n)>2\ln(1+\xi)$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，记为 a，在 $x_{n+1}=2\ln(1+x_n)$ 两边取极限，有 $a=2\ln(1+a)$，由(1)可知 $a=\xi$.

【注】读者可画出如图 2-2 所示的情形，加深理解.

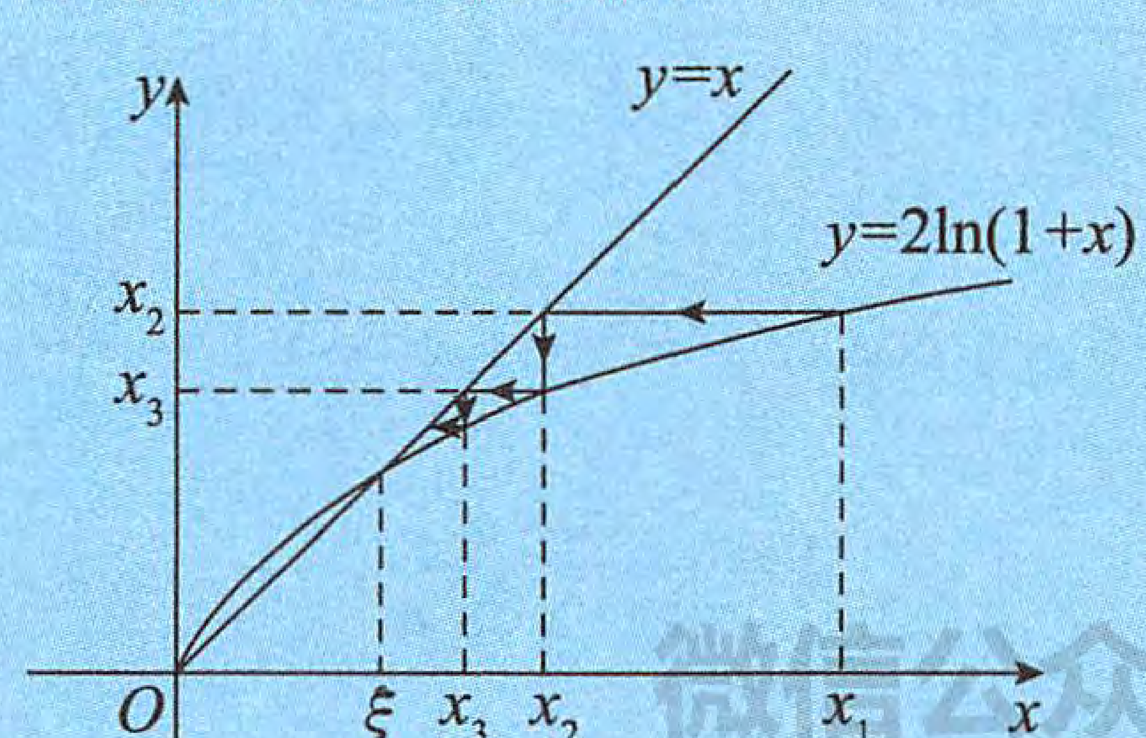


图 2-2

例 2.9 设 $f_n(x)=\cos x+\cos^2 x+\cdots+\cos^n x\ (n=1,2,\cdots)$.

(1) 证明：对于每个 n，方程 $f_n(x)=1$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{3}\right)$ 内有且仅有一个实根 x_n；

(2) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求其值.

方程列 $\{f_n(x)=1\}$：
$f_1(x)=1$，其根为 x_1；
$f_2(x)=1$，其根为 x_2；
……
$f_n(x)=1$，其根为 x_n；
……
这些根成为数列 $\{x_n\}$.

【证】(1) 设函数 $F_n(x)=f_n(x)-1\ (n=1,2,\cdots)$，则

$$F_n(0)=n-1\geqslant 0,$$

$$F_n\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\cos\frac{\pi}{3}\left(1-\cos^n\frac{\pi}{3}\right)}{1-\cos\frac{\pi}{3}}-1<\frac{\cos\frac{\pi}{3}}{1-\cos\frac{\pi}{3}}-1=0.$$

所以由零点定理知，$F_n(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{3}\right)$ 内至少有一个零点. 又因为

$$F_n'(x)=-\sin x(1+2\cos x+\cdots+n\cos^{n-1}x)<0,\ x\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right),$$

所以 $F_n(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{3}\right)$ 内严格单调减少，从而 $F_n(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{3}\right)$ 内有且仅有一个零点，即对于每个 n，方程 $f_n(x)=1$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{3}\right)$ 内有且仅有一个实根 x_n.

(2) 由(1)可知，显然 $x_1=0,\ x_2\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$. 由于 x_n 是方程 $f_n(x)=1$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{3}\right)$ 内的实根，则 $F_n(x_n)=0$，且当 $n\geqslant 2$ 时，有

$$\begin{aligned}F_n(x_{n-1})&=\cos x_{n-1}+\cos^2 x_{n-1}+\cdots+\cos^n x_{n-1}-1\\&=\cos^n x_{n-1}+\underbrace{F_{n-1}(x_{n-1})}_{=0}=\cos^n x_{n-1}>0.\end{aligned}$$

由(1)可知 $F_n(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{3}\right)$ 内严格单调减少，从而 $x_{n-1}<x_n$，即 $\{x_n\}$ 是单调增加数列，又由于 $0\leqslant x_n<\frac{\pi}{3}$，所以 $\{x_n\}$ 收敛. 记 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

记常数 $q=\cos x_2$，$0<q<1$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos^n x_2=\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$.

注意到 $0<x_2<x_n<\frac{\pi}{3}\ (n>2)$，所以 $0<\cos x_n<\cos x_2<1$，于是由夹逼准则，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos^n x_n=0$，且 $a\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right]$. 又 $0<x_2<x_n<\frac{\pi}{3}\Rightarrow 0<x_2\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}x_n\leqslant\frac{\pi}{3}\Rightarrow 0<a\leqslant\frac{\pi}{3}$

$$1=f_n(x_n)=\cos x_n+\cos^2 x_n+\cdots+\cos^n x_n=\frac{\cos x_n(1-\cos^n x_n)}{1-\cos x_n},$$

令 $n\to\infty$，得

$$1=\frac{\cos a}{1-\cos a},$$

解得 $\cos a=\frac{1}{2}$，因此 $a=\frac{\pi}{3}$，即

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{\pi}{3}.$$

【注】当 $0<q<1$ 且 q 为常数时，必有 $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$. 若 q 不是常数，即使 $0<q<1$，也未必有 $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$，如 $q=1-\dfrac{1}{n}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n=e^{\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\left(-\frac{1}{n}\right)}=e^{-1}\neq 0$.

例 2.10 (1) 证明方程 $\tan x=x$ 在 $\left(n\pi,n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内存在实根 ξ_n，$n=1,2,3,\cdots$；

(2) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\xi_{n+1}-\xi_n)$.

区间列 $\left(n\pi,n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$：在 $\left(\pi,\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内的根为 ξ_1；在 $\left(2\pi,2\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内的根为 ξ_2；……；在 $\left(n\pi,n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内的根为 ξ_n；……. 这些根成为数列 $\{\xi_n\}$.

(1)【证】令 $f(x)=\tan x-x$，$x\in\left[n\pi,n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$，$n=1,2,3,\cdots$，$y=\tan x$ 的图像如图 2-3 所示. 因

$$f(n\pi)=\tan n\pi-n\pi=-n\pi<0,$$

$$\lim_{x\to\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)^-}(\tan x-x)=+\infty>0,$$

故存在 $x_n\in\left(n\pi,n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$，使得 $f(x_n)>0$. 由零点定理知，存在

$$\xi_n\in(n\pi,x_n)\subset\left(n\pi,n\pi+\frac{\pi}{2}\right),$$

使得 $f(\xi_n)=0$.

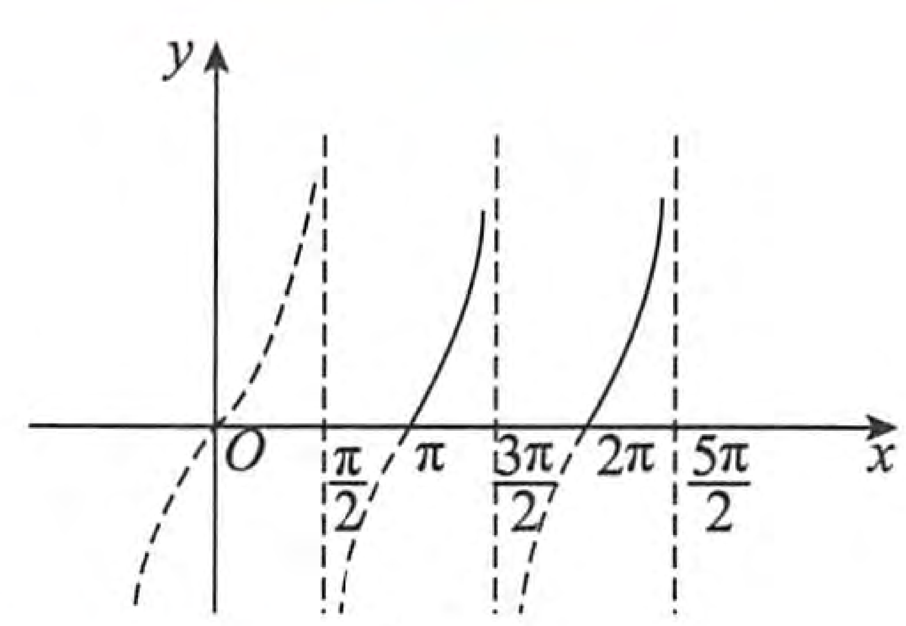


图 2-3

(2)【解】当 $n\to\infty$ 时，由于 $\xi_n\in\left(n\pi,n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=+\infty$，且 $\dfrac{\pi}{2}<\xi_{n+1}-\xi_n<\dfrac{3}{2}\pi$，有界，又

由 $a<y<b,c<x<d\Rightarrow a-d<y-x<b-c$，于是，当 $(n+1)\pi<\xi_{n+1}<(n+1)\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$n\pi<\xi_n<n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 时，有 $\dfrac{\pi}{2}=(n+1)\pi-\left(n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)<\xi_{n+1}-\xi_n<(n+1)\pi+\dfrac{\pi}{2}-n\pi=\dfrac{3}{2}\pi$.

$$\tan(\xi_{n+1}-\xi_n)=\frac{\tan\xi_{n+1}-\tan\xi_n}{1+\tan\xi_{n+1}\cdot\tan\xi_n}\xlongequal{\text{由(1)}}\frac{\xi_{n+1}-\xi_n}{1+\xi_{n+1}\cdot\xi_n},$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\tan(\xi_{n+1}-\xi_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\xi_{n+1}-\xi_n}{1+\xi_{n+1}\xi_n}=0$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}(\xi_{n+1}-\xi_n)=\pi$.

$\xi_{n+1}-\xi_n$ 有界，$\dfrac{1}{1+\xi_{n+1}\xi_n}\to 0$，有界乘无穷小仍是无穷小.

5. 夹逼准则

若 ①$y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$；②$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. 这里 ① 中无须验证等号；② 中 a 可为 $0,c(c\neq 0)$ 或 ∞.

(1) 证什么.

① 对 x_n 放缩：$y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$.

② 取极限.

(2) 怎么证.

主要有两种证法：

① 用基本放缩方法.

$$\begin{cases}n\cdot u_{\min}\leqslant u_1+u_2+\cdots+u_n\leqslant n\cdot u_{\max},\\ \text{当 } u_i\geqslant 0 \text{ 时，} 1\cdot u_{\max}\leqslant u_1+u_2+\cdots+u_n\leqslant n\cdot u_{\max}.\end{cases}$$

② 题设给出条件来推证.

例 2.11 (1) 当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，证明 $\sin x>\frac{2}{\pi}x$；

(2) 设数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 满足 $x_{n+1}=\sin x_n$，$y_{n+1}=y_n^2$，$n=1,2,3,\cdots$，$x_1=y_1=\frac{1}{2}$，当 $n\to\infty$ 时，证明 y_n 是比 x_n 高阶的无穷小量.

【证】(1) 设 $f(x)=\sin x-\frac{2x}{\pi}$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则

$$f'(x)=\cos x-\frac{2}{\pi},f''(x)=-\sin x<0,$$

所以曲线 $f(x)=\sin x-\frac{2x}{\pi}$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内是凸的，又 $f(0)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$，所以 $f(x)=\sin x-\frac{2x}{\pi}>0$，即

$$\sin x>\frac{2x}{\pi}.$$

(2) 首先，$x_{n+1}=\sin x_n<x_n$，$x_n>0$，由单调有界准则，知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\xlongequal[\text{记为}]{\text{存在}}a$，于是 $a=\sin a$，得 $a=0$.

$y_{n+1}=y_n^2<y_n$，$0<y_n\leqslant\frac{1}{2}<1$，由单调有界准则，知 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n\xlongequal[\text{记为}]{\text{存在}}b$，于是 $b=b^2$，得 $b=0$.（因保号性，舍去 $b=1$）

又由(1)，当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，有 $\sin x>\frac{2}{\pi}x$，且 $y_{n+1}=y_n^2=y_n\cdot y_n\leqslant\frac{1}{2}y_n$，于是

$$0<\frac{y_{n+1}}{x_{n+1}}=\frac{y_n^2}{\sin x_n}<\frac{\frac{1}{2}y_n}{\frac{2x_n}{\pi}}=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{y_n}{x_n}<\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\cdot\frac{y_{n-1}}{x_{n-1}}<\cdots<\left(\frac{\pi}{4}\right)^n\cdot\frac{y_1}{x_1}=\left(\frac{\pi}{4}\right)^n.$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{4}\right)^n=0$，由夹逼准则，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}}{x_{n+1}}=0$，故 y_n 是比 x_n 高阶的无穷小量.

考生应熟悉 $a_{n+1}<ka_n<k^2a_{n-1}<\cdots<k^na_1$
这种连续放缩方法（压缩映射）

6. 综合题总结

数列极限的存在性与计算问题可与很多经典知识综合，故常作为压轴题出现在试卷中，考生应多作总结，看看这些综合的点在哪里，打通它们，建立知识结构，便有思路了，比如可作如下总结.

① 用导数综合.
② 用积分综合.
③ 用中值定理综合.
④ 用方程(列)综合.
⑤ 用区间(列)综合.
⑥ 用极限综合.