第10讲 一元函数积分学的应用（一）——几何应用

知识结构

- 研究对象
  - “祖孙三代”
    - $f(x)$
      - 具体
      - 抽象
      - $f_n(x)$（函数族）
      - $f_1 \cdot f_2 \cdot \cdots \cdot f_n$
    - $f'(x), \dfrac{\mathrm{d}[f(x)]}{\mathrm{d}(x^2)}, f^{(n)}(x)$
    - $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$
  - 用极限定义函数——$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} g(n,x)$ 或 $f(x)=\lim\limits_{t\to x} g(t,x)$
  - 分段函数（含绝对值）
  - 参数方程 $\begin{cases} x=x(t), y=y(t) \\ x=r(\theta)\cos\theta, y=r(\theta)\sin\theta \end{cases}$
  - 隐函数 $F(x,y)=0$
  - 微分方程的解 $y=y(x)$
  - 偏微分方程的解 $f(x,y)$
  - 级数的和函数 $S(x)=\sum a_n x^n$（仅数学一、数学三）
- 研究内容
  - 面积
  - 旋转体体积
  - 平均值
  - 平面曲线的弧长（仅数学一、数学二）
  - 旋转曲面的面积（侧面积）（仅数学一、数学二）
  - “平面上的曲边梯形”的形心坐标公式（仅数学一、数学二）
  - 平行截面面积为已知的立体体积（仅数学一、数学二）

一 研究对象

1. “祖孙三代”

① $f(x)\begin{cases}\text{具体},\\ \text{抽象},\\ f_n(x)(\text{函数族}),\\ f_1\cdot f_2\cdot\cdots\cdot f_n.\end{cases}$

② $f'(x),\dfrac{\mathrm{d}[f(x)]}{\mathrm{d}(x^2)},f^{(n)}(x)$.

③ $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

2. 用极限定义函数

$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}g(n,x)$ 或 $f(x)=\lim\limits_{t\to x}g(t,x)$.

3. 分段函数(含绝对值)

4. 参数方程

① $\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t).\end{cases}$

② $\begin{cases}x=r(\theta)\cos\theta,\\ y=r(\theta)\sin\theta.\end{cases}$

5. 隐函数 $F(x,y)=0$

6. 微分方程的解 $y=y(x)$

7. 偏微分方程的解 $f(x,y)$

8. 级数的和函数 $S(x)=\sum a_nx^n$(仅数学一、数学三)

二 研究内容

(1) 面积.

① 直角坐标系下的面积公式(见图 10-1)：$S=\int_a^b|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x$.

② 极坐标系下的面积公式（见图 10-2）：$S=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{2}\left|r_2^2(\theta)-r_1^2(\theta)\right|\mathrm{d}\theta$.

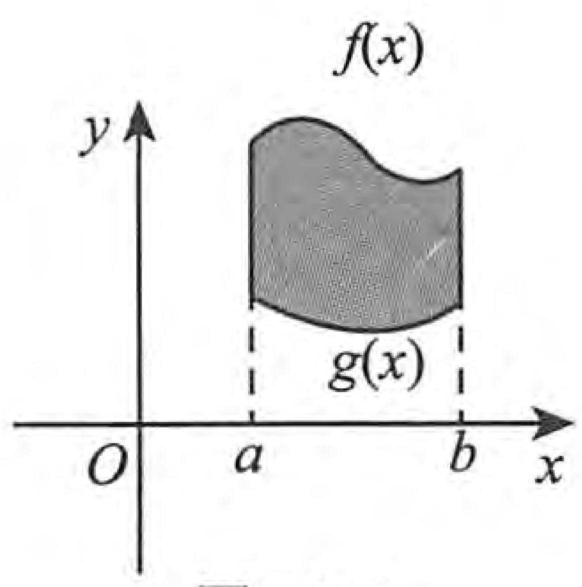


图 10-1

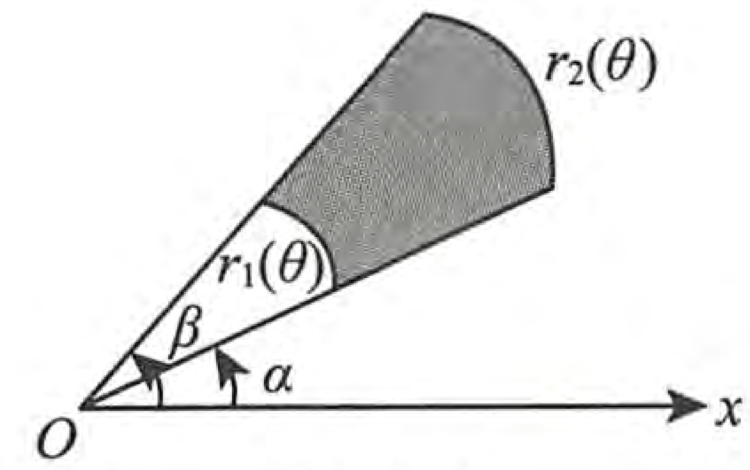


图 10-2

例 10.1 曲线 $r=1+\cos\theta$ 与其在点 $\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\pi}{4}\right)$ 处的切线及 x 轴所围图形面积为________.

【解】应填 $\frac{3}{8}(3+\sqrt{2})-\frac{3}{16}\pi$.

由例 5.3 可知，曲线 $r=1+\cos\theta$ 在点 $\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\pi}{4}\right)$ 处的直角坐标系下的切线方程为 $y=(1-\sqrt{2})x+1+\frac{\sqrt{2}}{2}$，切点为 $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\right)$，则所围图形如图 10-3 所示. 可知所求图形面积等于大三角形面积减去小曲边三角形面积. 接下来在两种坐标系下分别计算 $S_{大}$（见图 10-4），$S_{小}$（见图 10-5）.

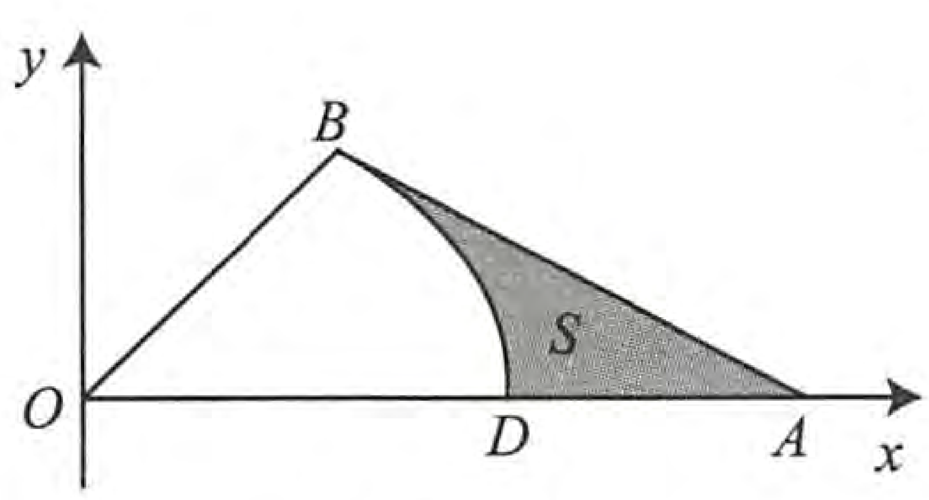


图 10-3

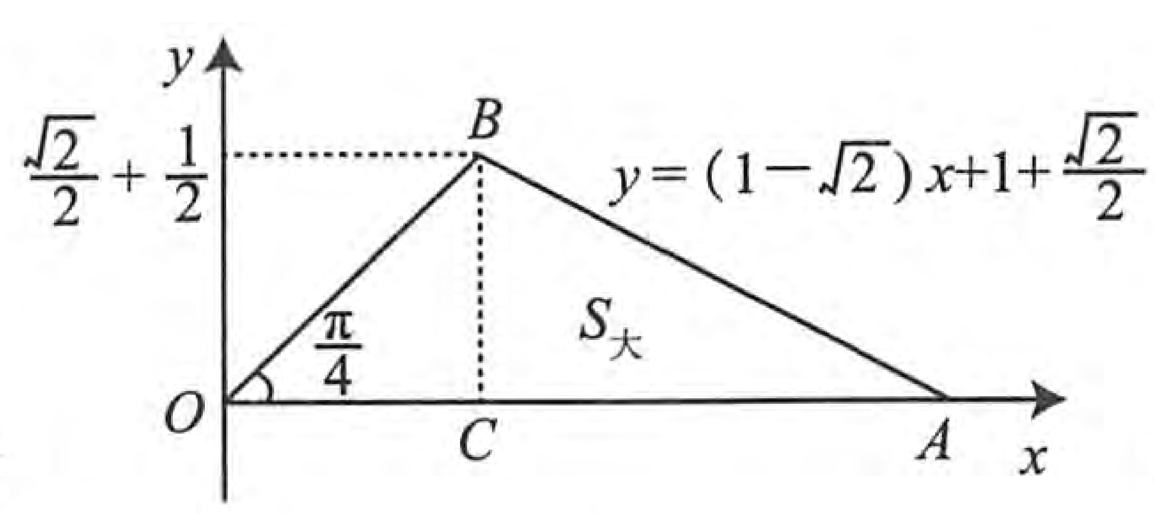


图 10-4

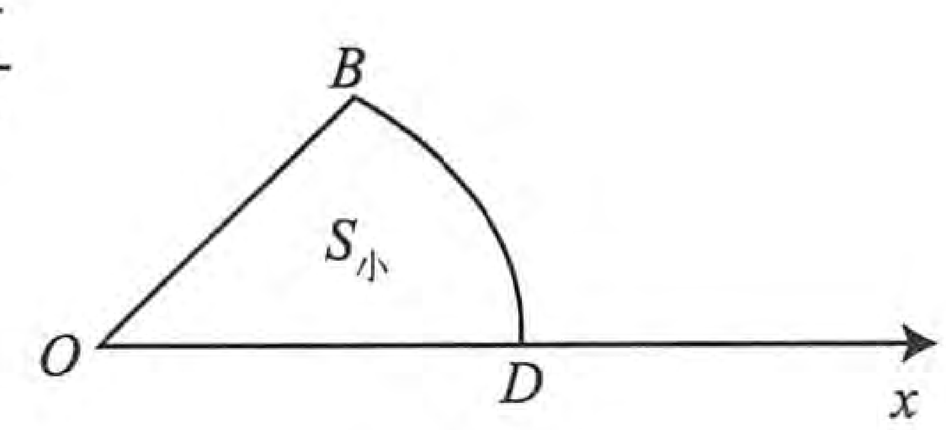


图 10-5

如图 10-4 所示，切线方程中令 $y=0$，得 $x=2+\frac{3\sqrt{2}}{2}$，即 A 点坐标为 $\left(2+\frac{3\sqrt{2}}{2},0\right)$，而 B 点坐标为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\right)$，作 BC 垂直于 x 轴交于点 C，故

$$
\begin{aligned}
S_{大}&=\frac{1}{2}\cdot|OA|\cdot|BC|\\
&=\frac{1}{2}\left(2+\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\right)\\
&=\frac{10+7\sqrt{2}}{8}.
\end{aligned}
$$

如图 10-5 所示，可得

$$S_{小}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}r^2\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\theta\mathrm{d}\theta+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}+\sin\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\left(\frac{1}{4}\theta+\frac{1}{8}\sin 2\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{1}{8}+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{3}{16}\pi.$$

故 $S=S_{大}-S_{小}=\frac{3}{8}(3+\sqrt{2})-\frac{3}{16}\pi$.

例 10.2 当 $x\geqslant 0$ 时，在曲线 $y=\mathrm{e}^{-2x}$ 上面作一个台阶曲线，台阶的宽度皆为1(见图 10-6). 则图中无穷多个阴影部分的面积之和$S=$ ________.

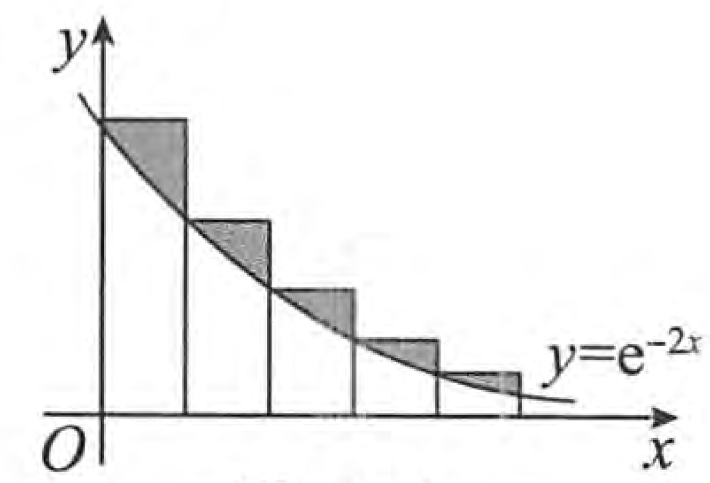


图 10-6

【解】 应填$\frac{\mathrm{e}^2+1}{2(\mathrm{e}^2-1)}$.

区间$[k,k+1](k=0,1,2,\cdots)$上的阴影面积为

矩形面积

$$\mathrm{e}^{-2k}-\int_k^{k+1}\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-2k}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\Big|_k^{k+1}=\mathrm{e}^{-2k}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2k-2}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2k}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\mathrm{e}^2}\right)\mathrm{e}^{-2k},$$

曲边梯形的面积

而$\sum\limits_{k=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-2k}=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-2}}$，故 $S=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\mathrm{e}^2}\right)\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-2}}=\frac{\mathrm{e}^2+1}{2\mathrm{e}^2}\cdot\frac{\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}^2-1}=\frac{\mathrm{e}^2+1}{2(\mathrm{e}^2-1)}$.

(2) 旋转体体积.

① 平面曲线绕定直线旋转.

设平面曲线 $L:y=f(x),a\leqslant x\leqslant b$，且 $f(x)$ 可导.

定直线 $L_0:Ax+By+C=0$，且过 L_0 的任一条垂线与 L 至多有一个交点，如图 10-7 所示，则 L 绕 L_0 旋转一周所得旋转体体积为

$$V=\frac{\pi}{(A^2+B^2)^{\frac{3}{2}}}\int_a^b[Ax+Bf(x)+C]^2\,|Af'(x)-B|\,\mathrm{d}x. \tag{a}$$

特别地，若 $A=C=0,B\neq 0$，则 L_0 为 $y=0$(x 轴)，如图 10-8 所示，L 绕 L_0 旋转一周所得旋转体体积为

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x. \tag{b}$$

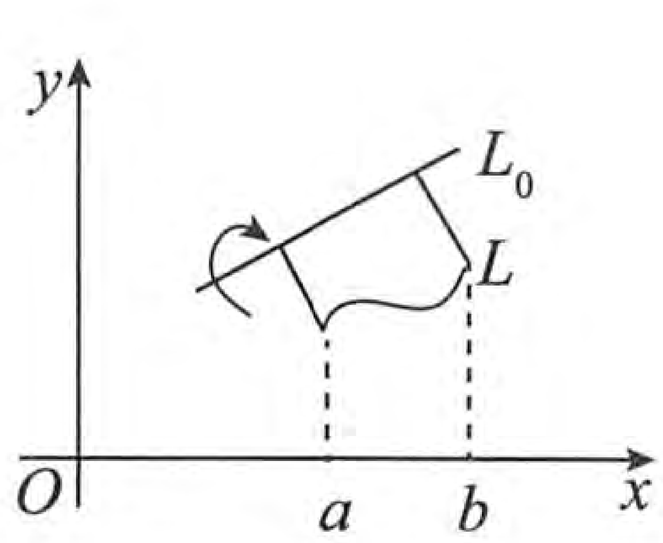


图 10-7

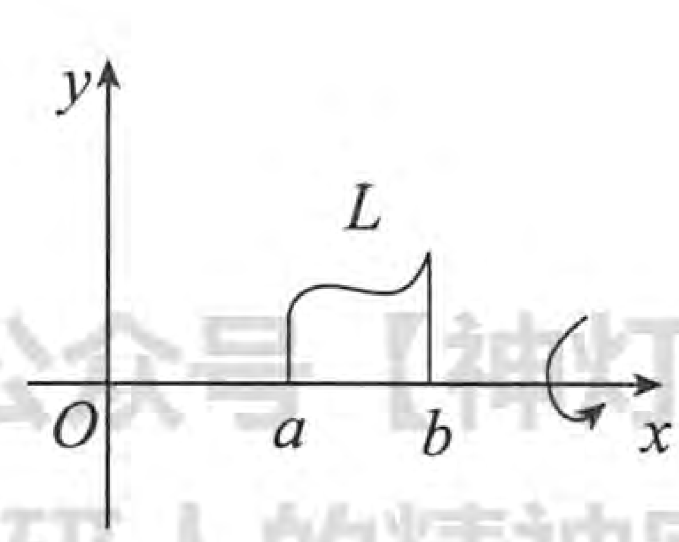


图 10-8

② 平面曲边梯形绕坐标轴旋转.

设平面曲边梯形 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant f(x),0\leqslant a\leqslant x\leqslant b\}$，且 $f(x)$ 连续，如图 10-9 所示，则 D 绕 y 轴旋转一周所得旋转体体积为

$$V=2\pi\int_a^b x\mid f(x)\mid \mathrm{d}x. \tag{c}$$

事实上，① 的公式(b) 就是 D 绕 x 轴旋转的情形，不重复写了.

③ 平面图形 $D=\{(r,\theta)\mid 0\leqslant r\leqslant r(\theta),\theta\in[\alpha,\beta]\subset[0,\pi]\}$，如图 10-10 所示，则 D 绕极轴旋转一周所得旋转体体积为

$$V=\frac{2}{3}\pi\int_\alpha^\beta r^3(\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta. \tag{d}$$

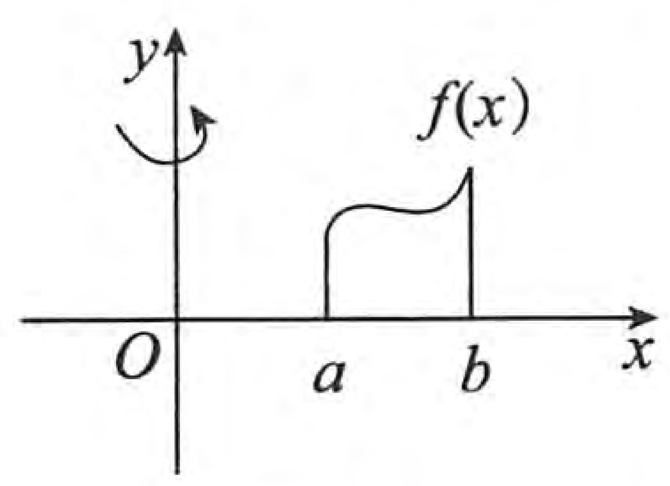


图 10-9

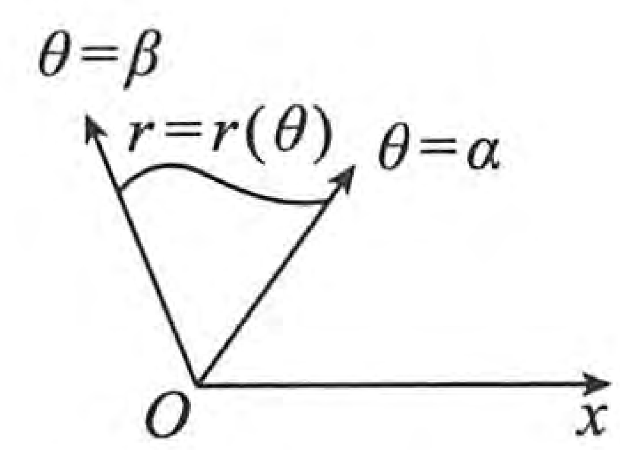


图 10-10

【注】上述公式(a),(b),(c),(d) 均可直接使用，不必证明.

例 10.3 曲线 $y=\mathrm{e}^x(0\leqslant x\leqslant 1)$ 绕直线 $y=x$ 旋转一周所得的旋转体的体积 $V=$ ________.

【解】应填 $\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}\left[\dfrac{1}{3}(\mathrm{e}-1)^3+\mathrm{e}^2-\dfrac{14}{3}\right]$.

如图 10-11 所示，L 为 $y=\mathrm{e}^x(0\leqslant x\leqslant 1)$，$L_0$ 为 $y=x$，即 $x-y=0$，故 $A=1,B=-1,C=0$. 于是由公式(a)，有

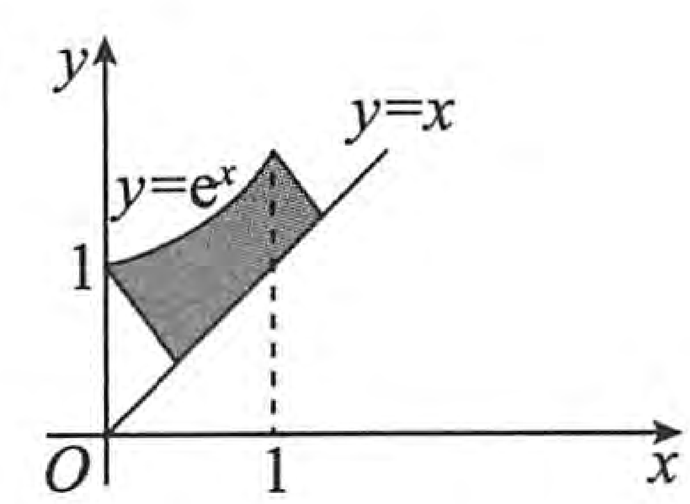


图 10-11

$$\begin{aligned}V&=\frac{\pi}{[1^2+(-1)^2]^{\frac{3}{2}}}\int_0^1(x-\mathrm{e}^x)^2(\mathrm{e}^x+1)\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_0^1(\mathrm{e}^x-x)^2(\mathrm{e}^x-1+2)\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left[\int_0^1(\mathrm{e}^x-x)^2\mathrm{d}(\mathrm{e}^x-x)+2\int_0^1(\mathrm{e}^{2x}-2x\mathrm{e}^x+x^2)\mathrm{d}x\right]\\&=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left[\frac{1}{3}(\mathrm{e}-1)^3-\frac{1}{3}+\mathrm{e}^2-\frac{13}{3}\right]\\&=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left[\frac{1}{3}(\mathrm{e}-1)^3+\mathrm{e}^2-\frac{14}{3}\right].\end{aligned}$$

例 10.4 已知函数 $f(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=2(y+1)$，且

$$f(y,y)=(y+1)^2-(2-y)\ln y,$$

求曲线 $f(x,y)=0$ 所围图形绕直线 $y=-1$ 旋转一周所得旋转体的体积.

【解】由 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=2(y+1)$，得

$$f(x,y)=(y+1)^2+\underline{g(x)}.$$

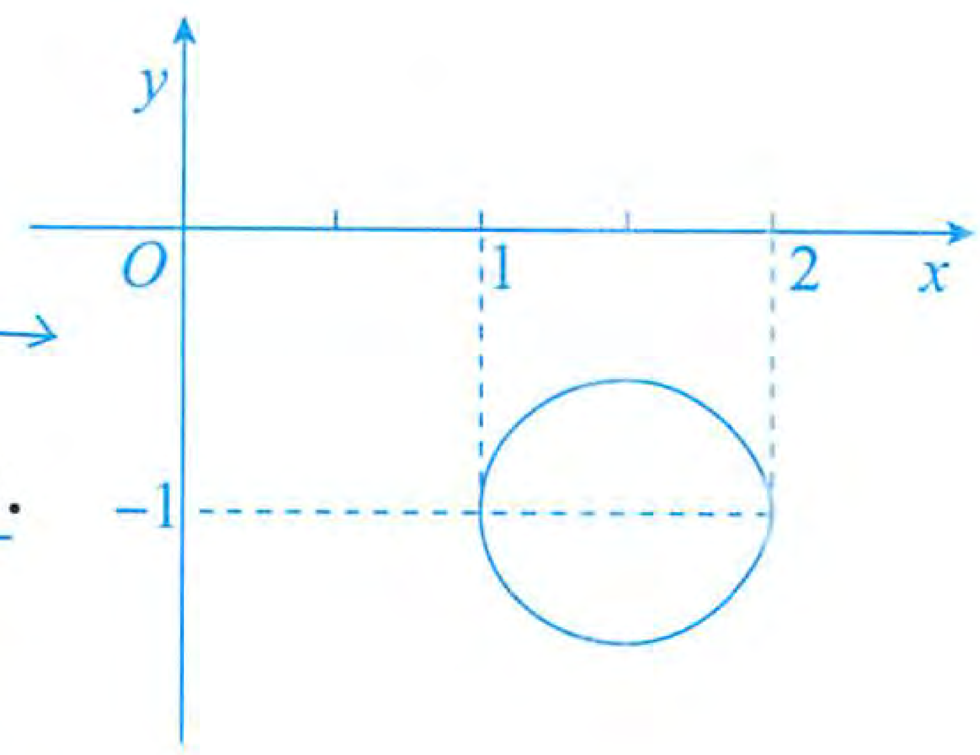
注意积分后不是加上任意常数 C，而是加上关于 x 的任意函数 $g(x)$

又 $f(y,y)=(y+1)^2-(2-y)\ln y$，得

$$g(y)=-(2-y)\ln y,$$

因此

$$f(x,y)=(y+1)^2-(2-x)\ln x.$$



于是，曲线 $f(x,y)=0$ 的方程为

$$(y+1)^2=(2-x)\ln x\,(\underline{1\leqslant x\leqslant 2}).$$

由 $(2-x)\ln x\geqslant 0$ 可得.

其所围图形绕直线 $y=-1$ 旋转一周所得旋转体的体积为

$$V=\pi\int_1^2 (y+1)^2\mathrm{d}x=\pi\int_1^2(2-x)\ln x\mathrm{d}x$$

$$=\pi\left[-\frac{1}{2}(2-x)^2\ln x+\frac{1}{4}x^2-2x+2\ln x\right]\Bigg|_1^2=\left(2\ln 2-\frac{5}{4}\right)\pi.$$

【注】求体积也可这样做：

$L:y=f(x)$ 满足 $[f(x)+1]^2=(2-x)\ln x$，$1\leqslant x\leqslant 2$. $L_0:y=-1$，即 $0\cdot x+1\cdot y+1=0$，故 $A=0,B=C=1$，则由公式(a)，有

$$V=\frac{\pi}{1}\int_1^2[f(x)+1]^2\mathrm{d}x.$$

其余过程同上解.

例 10.5 设函数 $y=f(x)$ 满足微分方程 $y'+y=\dfrac{\mathrm{e}^{-x}\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$，且 $f(\pi)=0$，求曲线 $y=f(x)(x\geqslant 0)$ 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

【解】解题干给的一阶线性微分方程，有

$$y=\mathrm{e}^{-\int p\mathrm{d}x}\left(\int \mathrm{e}^{\int p\mathrm{d}x}q\mathrm{d}x+C\right)$$

$$=\mathrm{e}^{-x}\left(\int \mathrm{e}^{x}\frac{\mathrm{e}^{-x}\cos x}{2\sqrt{\sin x}}\mathrm{d}x+C\right)=\mathrm{e}^{-x}\left(\int\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}\mathrm{d}x+C\right)$$

$$=\mathrm{e}^{-x}\left[\int\frac{\mathrm{d}(\sin x)}{2\sqrt{\sin x}}+C\right]=\mathrm{e}^{-x}(\sqrt{\sin x}+C),$$

又 $f(\pi)=\mathrm{e}^{-\pi}\cdot C=0$，故 $C=0$，得

$$f(x)=\mathrm{e}^{-x}\sqrt{\sin x}\,(x\geqslant 0).$$

故旋转体体积为

$$V=\sum_{n=0}^{\infty}\pi\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\mathrm{e}^{-2x}\sin x\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\pi\left.\frac{\begin{vmatrix}(\mathrm{e}^{-2x})' & (\sin x)'\\ \mathrm{e}^{-2x} & \sin x\end{vmatrix}}{(-2)^2+1^2}\right|_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}$$

$$=\frac{\pi}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-2\sin x-\cos x)e^{-2x}\Big|_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}=\frac{\pi}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(e^{-4n\pi}\cdot e^{-2\pi}+e^{-4n\pi})$$

$$=\frac{\pi(1+e^{-2\pi})}{5}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-4n\pi}=\frac{\pi(1+e^{-2\pi})}{5}\cdot\frac{1}{1-e^{-4\pi}}=\frac{\pi}{5(1-e^{-2\pi})}.$$

例 10.6 曲线 $y=\sqrt{x}$ 与 $y=x$ 所围平面有界区域绕直线 $y=x$ 旋转一周所得旋转体的体积为________.

【解】应填$\frac{\sqrt{2}}{60}\pi$.

$L:y=\sqrt{x},0\leqslant x\leqslant 1.L_0:y=x$，即 $x-y=0$，故 $A=1,B=-1,C=0$. 于是由公式(a)，有

$$V=\frac{\pi}{[1^2+(-1)^2]^{\frac{3}{2}}}\int_0^1(x-\sqrt{x})^2\left|\frac{1}{2\sqrt{x}}-(-1)\right|dx$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_0^1(x-\sqrt{x})^2\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+1\right)dx$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_0^1\left(x^2-\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}}+\frac{\sqrt{x}}{2}\right)dx$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{60}\pi.$$

例 10.7 心形线 $r=2(1+\cos\theta)$ 和 $\theta=0,\theta=\frac{\pi}{2}$ 围成的图形绕极轴旋转一周所成旋转体的体积 $V=($　　$)$.

(A)20π　　(B)40π　　(C)80π　　(D)160π

【解】应选(A).

法一　由题设得所围平面图形如图 10-12 所示，又有

$$\begin{cases}x=2(1+\cos\theta)\cos\theta,\\ y=2(1+\cos\theta)\sin\theta,\end{cases}$$

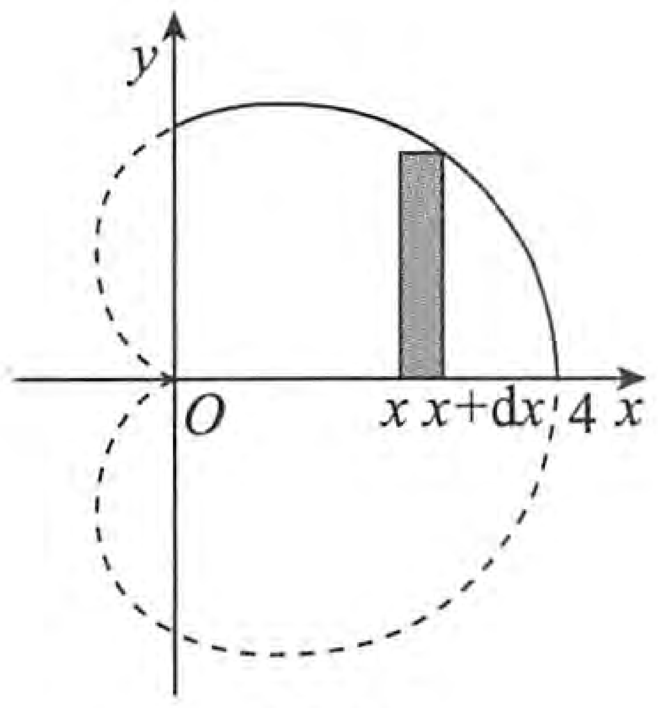


图 10-12

则旋转体的体积为

$$V=\int_0^4\pi y^2dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\pi\cdot 4(1+\cos\theta)^2\sin^2\theta\cdot 2(-\sin\theta-2\sin\theta\cos\theta)d\theta$$

$$=8\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos\theta)^2\sin^3\theta(1+2\cos\theta)d\theta$$

$$=20\pi.$$

法二　由公式(d)，有

$$V=\frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3(\theta)\sin\theta d\theta.$$

$$=\frac{16}{3}\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cdot(1+\cos\theta)^3\mathrm{d}\theta=-\frac{16}{3}\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos\theta)^3\mathrm{d}(1+\cos\theta)$$

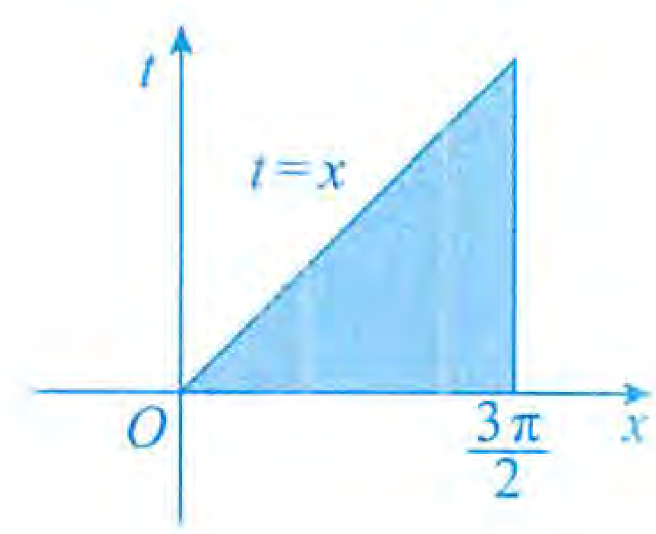
$$=-\frac{16}{3}\pi\cdot\frac{1}{4}(1+\cos\theta)^4\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=20\pi.$$

故选(A).

(3) 平均值.

$$\overline{f}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

例 10.8 已知函数 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$ 上连续,在 $\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$ 内是函数 $\frac{\cos x}{2x-3\pi}$ 的一个原函数,且 $f(0)=0$,则 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$ 上的平均值为________.



【解】 应填 $\frac{1}{3\pi}$.

$f(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$ 上的平均值为

$$\overline{f}=\frac{2}{3\pi}\int_0^{\frac{3\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{3\pi}\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\left(\int_0^x\frac{\cos t}{2t-3\pi}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{3\pi}\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\mathrm{d}t\int_t^{\frac{3\pi}{2}}\frac{\cos t}{2t-3\pi}\mathrm{d}x=-\frac{1}{3\pi}\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\cos t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{3\pi}.$$

(4) 平面曲线的弧长.(仅数学一、数学二)

① 若平面光滑曲线由直角坐标方程 $y=y(x)(a\leqslant x\leqslant b)$ 给出,则

$$s=\int_a^b\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,\mathrm{d}x.$$

② 若平面光滑曲线由参数方程 $\begin{cases}x=x(t),\\y=y(t)\end{cases}(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$ 给出,则

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t.$$

③ 若平面光滑曲线由极坐标方程 $r=r(\theta)(\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$ 给出,则

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{[r(\theta)]^2+[r'(\theta)]^2}\,\mathrm{d}\theta.$$

例 10.9 设非负函数 $y(x)$ 是微分方程 $2yy'=\cos x$ 满足条件 $y(0)=0$ 的解,求曲线 $f_n(x)=n\int_0^{\frac{x}{n}}y(t)\mathrm{d}t(0\leqslant x\leqslant n\pi)$ 的弧长.

【解】 由 $2yy'=\cos x$ 分离变量,得 $2y\mathrm{d}y=\cos x\mathrm{d}x$,两边积分,得 $y^2=\sin x+C$,又 $y(0)=0$,有 $C=0$,且 $y(x)$ 非负,故 $y(x)=\sqrt{\sin x}$. 于是

$$f_n(x)=n\int_0^{\frac{x}{n}}\sqrt{\sin t}\,\mathrm{d}t,$$

$$f_n'(x)=\sqrt{\sin\frac{x}{n}}.$$

根据弧长计算公式,得

$$s_n=\int_0^{n\pi}\sqrt{1+[f_n'(x)]^2}\,dx=\int_0^{n\pi}\sqrt{1+\sin\frac{x}{n}}\,dx$$

$$=\int_0^{n\pi}\sqrt{\left(\sin\frac{x}{2n}+\cos\frac{x}{2n}\right)^2}\,dx=\int_0^{n\pi}\left(\sin\frac{x}{2n}+\cos\frac{x}{2n}\right)dx$$

$$\xlongequal{令\frac{x}{2n}=u}2n\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin u+\cos u)\,du=2n(1+1)=4n.$$

例 10.10 曲线 $r\theta=1$ 自 $\theta=\frac{3}{4}$ 至 $\theta=\frac{4}{3}$ 一段的弧长为________.

【解】 应填 $\frac{5}{12}+\ln\frac{3}{2}$.

由 $r\theta=1$,有 $r=\frac{1}{\theta}$,$r'=-\frac{1}{\theta^2}$,故

$$s=\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}}\sqrt{\frac{1}{\theta^2}+\frac{1}{\theta^4}}\,d\theta=\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}}\frac{1}{\theta^2}\sqrt{1+\theta^2}\,d\theta\xlongequal{\theta=\tan t}\int_{\arctan\frac{3}{4}}^{\arctan\frac{4}{3}}\frac{1}{\tan^2 t}\sqrt{1+\tan^2 t}\sec^2 t\,dt$$

$$=\int_{\arctan\frac{3}{4}}^{\arctan\frac{4}{3}}\frac{1}{\tan^2 t}\sec^3 t\,dt=\int_{\arctan\frac{3}{4}}^{\arctan\frac{4}{3}}\frac{1}{\sin^2 t\cos t}\,dt=\int_{\arctan\frac{3}{4}}^{\arctan\frac{4}{3}}(\sec t+\cot t\csc t)\,dt$$

$$=(\ln|\sec t+\tan t|-\csc t)\Big|_{\arctan\frac{3}{4}}^{\arctan\frac{4}{3}}=\frac{5}{12}+\ln\frac{3}{2}.$$

(5) 旋转曲面的面积(侧面积).(仅数学一、数学二)

① 曲线 $y=y(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的曲线弧段绕 x 轴旋转一周所得到的旋转曲面的面积

$$S=2\pi\int_a^b|y(x)|\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx.$$

② 曲线 $x=x(t)$,$y=y(t)$ $(\alpha\leqslant t\leqslant\beta,x'(t)\neq0)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上的曲线弧段绕 x 轴旋转一周所得到的旋转曲面的面积

$$S=2\pi\int_\alpha^\beta|y(t)|\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt.$$

③ 曲线 $r=r(\theta)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上的曲线弧段绕 x 轴旋转一周所得到的旋转曲面的面积

$$S=2\pi\int_\alpha^\beta|r(\theta)\sin\theta|\sqrt{[r(\theta)]^2+[r'(\theta)]^2}\,d\theta.$$

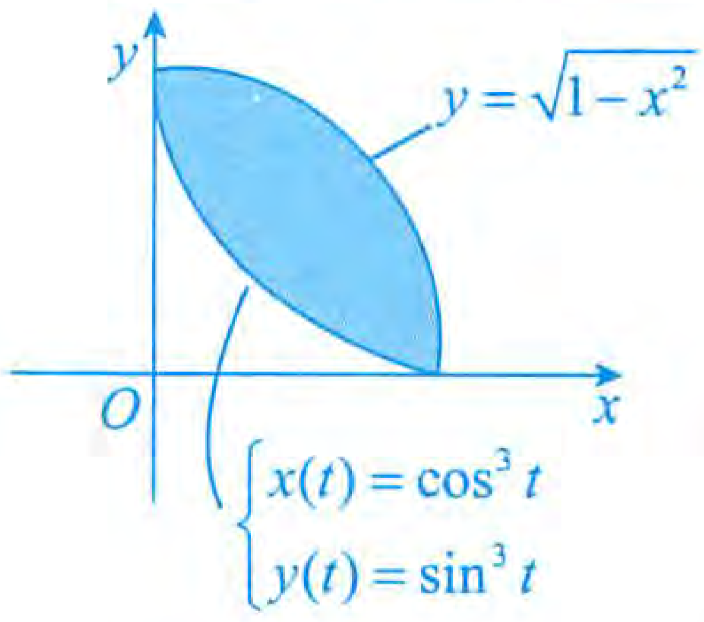
例 10.11 设 D 是由曲线 $y=\sqrt{1-x^2}\,(0\leqslant x\leqslant1)$ 与 $\begin{cases}x(t)=\cos^3 t,\\ y(t)=\sin^3 t\end{cases}\left(0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ 围成的平面区域,求 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积和表面积.

【解】 设 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积为 V,表面积为 S,则

$$V=\frac{2}{3}\pi-\int_0^1\pi y^2(t)\,d[x(t)]=\frac{2}{3}\pi-\boxed{\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}}\pi\sin^6 t(\cos^3 t)'\,dt$$

由换元法决定此上、下限,不必"下限值<上限值".

$$=\frac{2}{3}\pi+3\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 t)^3\cos^2 t\,d(\cos t)=\frac{2}{3}\pi-\frac{16}{105}\pi=\frac{18}{35}\pi,$$



由公式法② $dt>0$ 决定"下限值 < 上限值".

$$
\begin{aligned}
S&=2\pi+\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}}}2\pi y(t)\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t\\
&=2\pi+2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\sqrt{9\cos^4 t\sin^2 t+9\sin^4 t\cos^2 t}\,\mathrm{d}t\\
&=2\pi+6\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cos t\,\mathrm{d}t=\frac{16}{5}\pi.
\end{aligned}
$$

例 10.12 双纽线 $r^2=a^2\cos 2\theta\ (a>0)$ 绕极轴旋转一周所围成的旋转曲面面积 $S=$________.

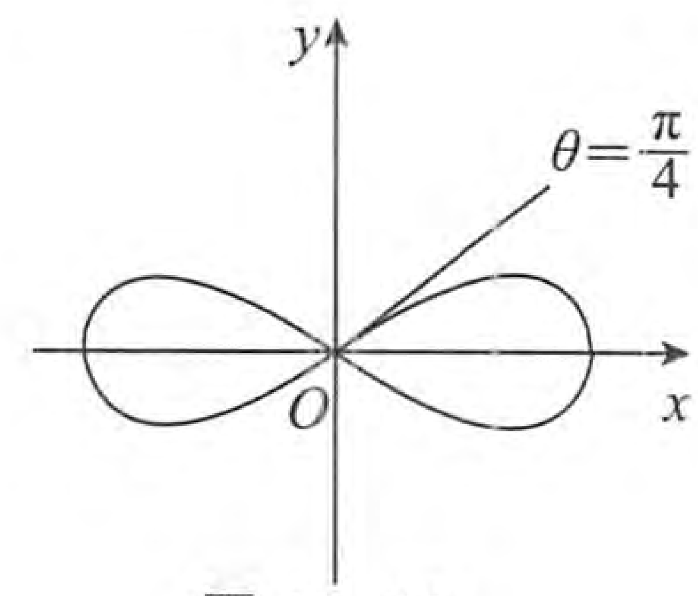


图 10-13

【解】 应填 $2\pi a^2(2-\sqrt{2})$.

如图 10-13 所示，由对称性知，只需计算第一象限的曲线绕 x 轴旋转一周的曲面面积，且 $r=a\sqrt{\cos 2\theta}$，于是

$$
\begin{aligned}
S&=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}2\pi r\sin\theta\cdot\sqrt{r^2+(r')^2}\,\mathrm{d}\theta\\
&=4\pi a\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\cos 2\theta}\cdot\sin\theta\sqrt{a^2\cos 2\theta+\left[\frac{a(-2\sin 2\theta)}{2\sqrt{\cos 2\theta}}\right]^2}\,\mathrm{d}\theta\\
&=4\pi a\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\cos 2\theta}\cdot\sin\theta\sqrt{a^2\cos 2\theta+\frac{a^2\sin^2 2\theta}{\cos 2\theta}}\,\mathrm{d}\theta\\
&=4\pi a\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\cos 2\theta}\cdot\sin\theta\cdot\frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}}\mathrm{d}\theta\\
&=4\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta=2\pi a^2(2-\sqrt{2}).
\end{aligned}
$$

(6)"平面上的曲边梯形"的形心坐标公式.（仅数学一、数学二）

设 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant f(x),a\leqslant x\leqslant b\}$，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，如图 10-14 所示. D 的形心坐标 $\bar{x},\bar{y}$ 的计算公式：

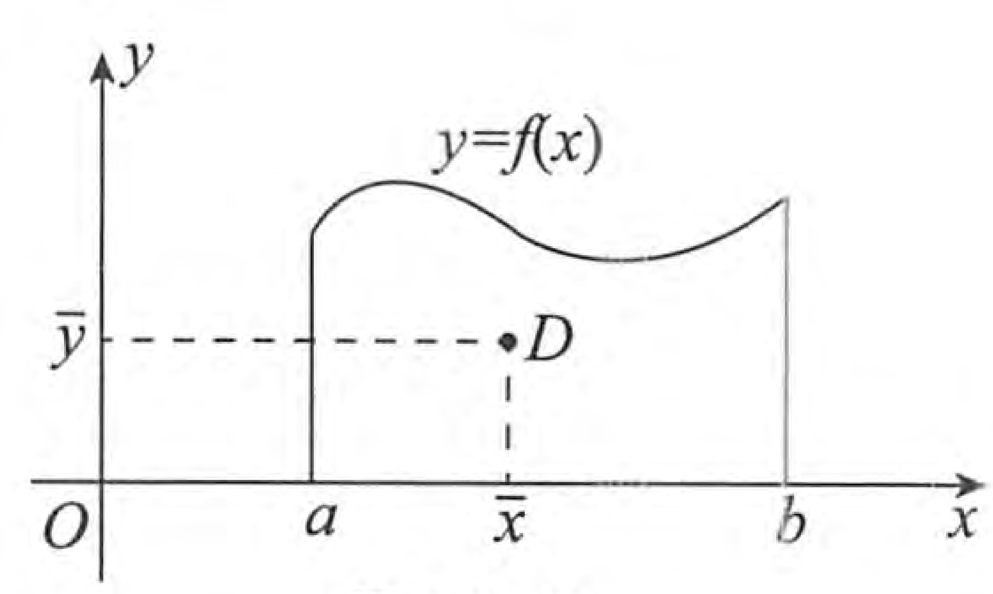


图 10-14

$$
\bar{x}=\frac{\iint\limits_D x\,\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma}=\frac{\int_a^b\mathrm{d}x\int_0^{f(x)}x\,\mathrm{d}y}{\int_a^b\mathrm{d}x\int_0^{f(x)}\mathrm{d}y}=\frac{\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x};
$$

$$
\bar{y}=\frac{\iint\limits_D y\,\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma}=\frac{\int_a^b\mathrm{d}x\int_0^{f(x)}y\,\mathrm{d}y}{\int_a^b\mathrm{d}x\int_0^{f(x)}\mathrm{d}y}=\frac{\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}.
$$

【注】 若考题为求质量均匀分布的平面薄片的质心，也就是平面 D 的形心问题. 公式如上.

例 10.13 设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上非负，$f''(x)>0$，且 $f(0)=0$. 有一块质量均匀分布的平板 D，其占据的区域是曲线 $y=f(x)$ 与直线 $x=a$ 以及 x 轴围成的平面图形. 用 $\bar{x}$ 表示平板 D 的质心的横坐标. 证明：$\bar{x}>\frac{2}{3}a$（见图 10-15）.

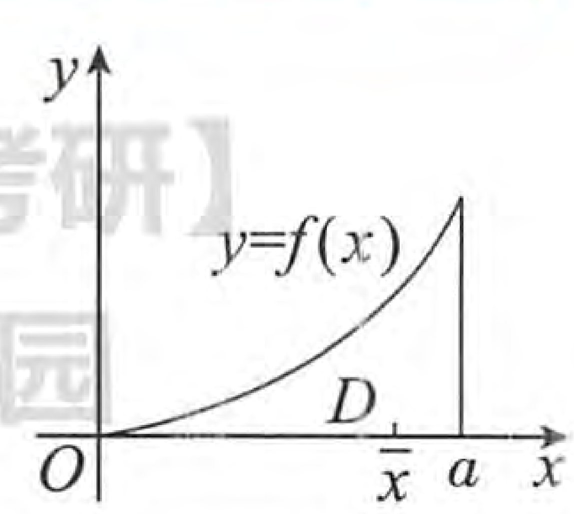


图 10-15

【证】由 $\overline{x}=\dfrac{\int_0^a xf(x)\mathrm{d}x}{\int_0^a f(x)\mathrm{d}x}>\dfrac{2}{3}a$，将 a 变量化为 x，令 $F(x)=\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t-\dfrac{2x}{3}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则有 $F(0)=0$. 又对任意 $x\in(0,a)$，有

$$F'(x)=xf(x)-\frac{2}{3}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\frac{2}{3}xf(x)$$
$$=\frac{1}{3}xf(x)-\frac{2}{3}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t,$$
$$F''(x)=\frac{1}{3}f(x)+\frac{1}{3}xf'(x)-\frac{2}{3}f(x)=\frac{1}{3}xf'(x)-\frac{1}{3}f(x)$$
$$=\frac{1}{3}x[f'(x)-f'(\xi)](0<\xi<x).$$

因为 $f''(x)>0$，所以 $f'(x)>f'(\xi)$，于是 $F''(x)>0$，从而 $F'(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上单调增加，因此当 $0<x\leqslant a$ 时，有 $F'(x)>F'(0)=0$.

故 $F(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上单调增加，$F(a)>F(0)=0$. 所以有

$$\int_0^a xf(x)\mathrm{d}x-\frac{2a}{3}\int_0^a f(x)\mathrm{d}x>0,\text{即 }\overline{x}>\frac{2a}{3}.$$

(7) 平行截面面积为已知的立体体积.（仅数学一、数学二）

在区间 $[a,b]$ 上，垂直于 x 轴的平面截立体 Ω 所得到的截面面积为 x 的连续函数 $S(x)$，则 Ω 的体积为

$$V=\int_a^b S(x)\mathrm{d}x.$$

例 10.14 曲线 $y=\sqrt{x}$ 与 $y=x$ 所围平面有界区域绕直线 $y=x$ 旋转一周所得旋转体的体积为________.

【解】应填 $\dfrac{\sqrt{2}}{60}\pi$.

在例 10.6 中，我们用了一种方法求此问题. 这里，我们再从“平行截面面积为已知的立体体积”角度，提供第二种方法进行求解.

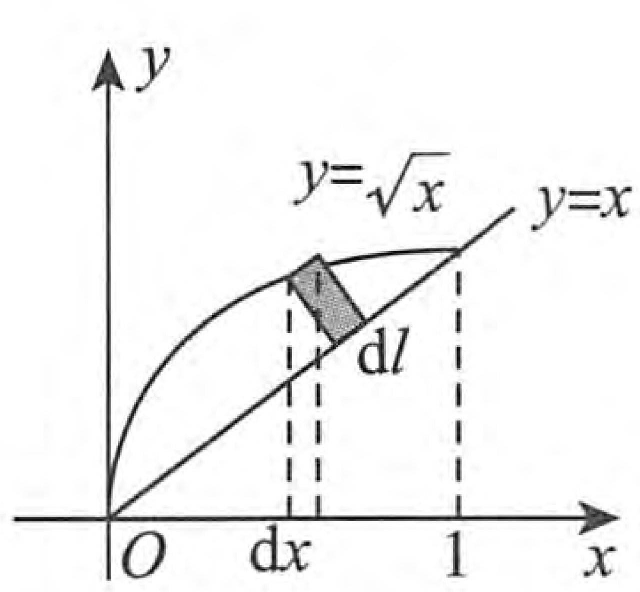


图 10-16

$y=\sqrt{x}$ 与 $y=x$ 交于点 $(0,0)$，$(1,1)$，如图 10-16 所示. $\mathrm{d}l=\sqrt{2}\,\mathrm{d}x$，曲线 $y=\sqrt{x}$ 上的点到 $y=x$ 的距离为 $r=\dfrac{\sqrt{x}-x}{\sqrt{2}}$，故垂直于 x 轴的平面截该旋转体所得的截面面积为 $S(x)=\sqrt{2}\pi\left(\dfrac{\sqrt{x}-x}{\sqrt{2}}\right)^2$. 因此，旋转体体积为

$$V=\int_0^1\sqrt{2}\pi\left(\frac{\sqrt{x}-x}{\sqrt{2}}\right)^2\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\pi}{\sqrt{2}}(x-2x^{\frac{3}{2}}+x^2)\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2}}{60}\pi.$$

【注】事实上，$V=\int_a^b S(x)\mathrm{d}x$ 就是 $V=\int_a^b \pi f^2(x)\mathrm{d}x$ 的一般化.