第 4 章　矩阵的秩

A组

1. 已知 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵，$r(\boldsymbol{A}) = r < \min\{m,n\}$，则 $\boldsymbol{A}$ 中(　　).

(A) 没有等于零的 $r-1$ 阶子式，至少有一个不为零的 r 阶子式

(B) 有不等于零的 r 阶子式，所有 $r+1$ 阶子式全为零

(C) 有等于零的 r 阶子式，没有不等于零的 $r+1$ 阶子式

(D) 所有 r 阶子式不等于零，所有 $r+1$ 阶子式全为零

2. 已知 $\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & t \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{P}$ 为 3 阶非零矩阵，且满足 $\boldsymbol{PQ} = \boldsymbol{O}$，则(　　).

(A) 当 $t = 6$ 时，$\boldsymbol{P}$ 的秩必为 1　　(B) 当 $t = 6$ 时，$\boldsymbol{P}$ 的秩必为 2

(C) 当 $t \neq 6$ 时，$\boldsymbol{P}$ 的秩必为 1　　(D) 当 $t \neq 6$ 时，$\boldsymbol{P}$ 的秩必为 2

3. 求矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a & 4 \\ 3 & 5 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ 的秩，其中 a,b 为参数.

4. 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & b & -3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b-1 & a & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$，已知 $r(\boldsymbol{AB}) < r(\boldsymbol{A})$，$r(\boldsymbol{AB}) < r(\boldsymbol{B})$，求 a，b 的值与 $r(\boldsymbol{AB})$.

5. 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n \times n}$，且 $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} = 0, i = 1,2,\cdots,n$，求 $r(\boldsymbol{A}^*)$ 及 $\boldsymbol{A}^*$ 的表示形式.

B组

1. 设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & a \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 满足 $\boldsymbol{AQA}^* = \boldsymbol{B}$，且 $r(\boldsymbol{Q}) = 2$，其中 $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$

的伴随矩阵，则 $a=$（　　）.

(A) -1　　(B) 1　　(C) -2　　(D) 2

2. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 是四个 4 阶矩阵，其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{D}$ 非零，$\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 可逆，且满足 $\boldsymbol{ABCD}=\boldsymbol{O}$，若 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})+r(\boldsymbol{C})+r(\boldsymbol{D})=r$，则 r 的取值范围是（　　）.

(A) $r<10$　　(B) $10\leqslant r\leqslant 12$　　(C) $12<r<16$　　(D) $r\geqslant 16$

3. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 3 阶矩阵，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&1\\3&4&a\\1&2&2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$，且 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{E}$，$r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=3$，则常数 $a=$（　　）.

(A) $\dfrac{7}{2}$　　(B) 7　　(C) $\dfrac{13}{2}$　　(D) 13

4. 设矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&3&0&0\\0&0&-1&2\\0&0&2&2\end{bmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则 $r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})+r(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})=$（　　）.

(A) 7　　(B) 6　　(C) 5　　(D) 4

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶方阵，有 3 个特征值分别为 0,1,1，且不相似于对角矩阵，则 $r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A})=$ ________.

6. 设有两个 n 维非零列向量 $\boldsymbol{\alpha}=[a_1,a_2,\cdots,a_n]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=[b_1,b_2,\cdots,b_n]^{\mathrm{T}}$.

(1) 计算 $\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$；

(2) 求矩阵 $\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$ 的秩 $r(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})$；

(3) 设 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵. 证明：$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\beta\alpha}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1$.

C组

1. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 都是 2 阶矩阵，$r\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{D}\end{bmatrix}\right)=2$，则行列式 $\begin{vmatrix}|\boldsymbol{A}|&|\boldsymbol{B}|\\|\boldsymbol{C}|&|\boldsymbol{D}|\end{vmatrix}=$（　　）.

(A) $|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{D}|$　　(B) $-|\boldsymbol{B}||\boldsymbol{C}|$　　(C) 1　　(D) 0