第3讲 矩阵运算

知识结构

- 求 A^n
  - A 为方阵且 $r(A)=1$ — $A^n=[\mathrm{tr}(A)]^{n-1}A$
  - 试算 A^2（或 A^3），找规律
    - ①若 $A^2=kA$，则 $A^n=k^{n-1}A$
    - ②若 $A^2=kE$，则 $\begin{cases} A^{2n}=k^nE \\ A^{2n+1}=k^nA \end{cases}$
  - $A \overset{\text{分解}}{=\!=} B+C$
    - ①若 $A=B+C$，$BC=CB$，则 $A^n=B^n+nB^{n-1}C+\dfrac{n(n-1)}{2!}B^{n-2}C^2+\cdots+C^n$
    - ②在“①”的条件下，若 $B=E$，则 $A^n=E+nC+\dfrac{n(n-1)}{2!}C^2+\cdots+C^n$
    - ③在“①”的条件下，若 $BC=CB=O$，则 $A^n=B^n+C^n$
  - 用初等矩阵知识求 $P_1^mAP_2^n$ — 若 P_1，P_2 均为初等矩阵，m，n 为正整数，则 $P_1^mAP_2^n$ 表示先对 A 作了与 P_1 相同的初等行变换，且重复 m 次；再对 P_1^mA 作了与 P_2 相同的初等列变换，且重复 n 次
  - 用相似理论求 A^n
    - ①若 $A\sim B$，则 $A=PBP^{-1}$，$A^n=PB^nP^{-1}$
    - ②若 $A\sim\Lambda$，则 $A=P\Lambda P^{-1}$，$A^n=P\Lambda^nP^{-1}$
- 关于 A^*，A^{-1} 与初等矩阵
  - A^*
    - 定义 — $A^*=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$
    - 公式
      - ① $AA^*=A^*A=|A|E$
      - ② $|A^*|=|A|^{n-1}$
      - ③ $(A^{\mathrm{T}})^*=(A^*)^{\mathrm{T}}$
      - ④ $(kA)^*=k^{n-1}A^*$，$(-A)^*=(-1)^{n-1}A^*$
      - ⑤ $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*$
      - ⑥ $A^*=|A|A^{-1}$
      - ⑦ $(A^*)^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A=(A^{-1})^*$
      - ⑧ $(A^*)^*=|A|^{n-2}A$
      - ⑨ $|(A^*)^*|=|A|^{(n-1)^2}$
      - ⑩ $(AB)^*=B^*A^*$
    - 秩

- 关于 A^*, A^{-1} 与初等矩阵
  - A^{-1}
    - 定义 — 对于方阵 A，B，若 $AB=E$，则 A，B 互为逆矩阵，且 $A^{-1}=B$，$B^{-1}=A$，$AB=BA$
    - 性质
      - ① $(A^{-1})^{-1}=A$
      - ② $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$（穿脱原则）
      - ③ $k\neq 0$，$(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$
      - ④ $(A^{\mathrm{T}})^{-1}=(A^{-1})^{\mathrm{T}}$
      - ⑤ $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$
    - 求 A^{-1}
      - 具体型
        - $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$
        - $[A \mid E] \xrightarrow{\text{初等行变换}} [E \mid A^{-1}]$
      - 抽象型
        - 创造 $AB=E$，则 $A^{-1}=B$
        - 创造 $A=BC$，若 B，C 均可逆，则 $A^{-1}=C^{-1}B^{-1}$
  - 初等矩阵
    - 定义
      - 初等变换
        - 一个非零常数乘矩阵的某一行（列）
        - 互换矩阵中某两行（列）的位置
        - 矩阵的某一行（列）的 k 倍加到另一行（列）
      - 初等矩阵 — 由单位矩阵经过一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵
      - 矩阵等价 — A，B 均是 $m\times n$ 矩阵，若存在可逆矩阵 $P_{m\times m}$，$Q_{n\times n}$，使得 $PAQ=B$，则称 A，B 是等价矩阵，记作 $A\cong B$
    - 性质
      - ① $|E_{ij}|=-1$，$|E_{ij}(k)|=1$，$|E_i(k)|=k$
      - ② $E_{ij}^{\mathrm{T}}=E_{ij}$，$E_{ij}^{\mathrm{T}}(k)=E_{ji}(k)$，$E_i^{\mathrm{T}}(k)=E_i(k)$
      - ③ $E_{ij}^{-1}=E_{ij}$，$E_{ij}^{-1}(k)=E_{ij}(-k)$，$E_i^{-1}(k)=E_i\left(\frac{1}{k}\right)$
      - ④ $E_{ij}^*=|E_{ij}|E_{ij}^{-1}=-E_{ij}$，
        $E_{ij}^*(k)=|E_{ij}(k)|E_{ij}^{-1}(k)=E_{ij}(-k)$，
        $E_i^*(k)=|E_i(k)|E_i^{-1}(k)=kE_i\left(\frac{1}{k}\right)$
    - 左行右列定理 — 在矩阵 A 的左边乘初等矩阵 P，得 PA，相当于对 A 作了一次与 P 完全相同的初等行变换；在矩阵 A 的右边乘初等矩阵 P，得 AP，相当于对 A 作了一次与 P 完全相同的初等列变换
    - 应用
      - ①求 A^{-1}：
        $[A \mid E] \xrightarrow{\text{初等行变换}} [E \mid A^{-1}]$
        $\begin{bmatrix} A \\ \hdashline E \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{bmatrix} E \\ \hdashline A^{-1} \end{bmatrix}$
      - ②研究 $P_1^m A P_2^n=B$

分块矩阵

定义 — 用几条横线和纵线把一个矩阵分成若干小块，每一小块称为原矩阵的子块．把子块看作原矩阵的一个元素，就得到了分块矩阵

运算

①转置：$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}} & C^{\mathrm{T}} \\ B^{\mathrm{T}} & D^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$

②加法：$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1+B_1 & A_2+B_2 \\ A_3+B_3 & A_4+B_4 \end{bmatrix}$

③数乘：$k\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kA & kB \\ kC & kD \end{bmatrix}$

④乘法：$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AX+BZ & AY+BW \\ CX+DZ & CY+DW \end{bmatrix}$

⑤若 A，B 分别为 m，n 阶方阵，则分块对角矩阵的幂为$\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} A^k & O \\ O & B^k \end{bmatrix}$

⑥设 B 是 r 阶可逆矩阵，C 是 s 阶可逆矩阵，则以下矩阵可逆，且

$$\begin{bmatrix} B & O \\ D & C \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & O \\ -C^{-1}DB^{-1} & C^{-1} \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} B & D \\ O & C \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & -B^{-1}DC^{-1} \\ O & C^{-1} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} O & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -C^{-1}DB^{-1} & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} D & B \\ C & O \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & -B^{-1}DC^{-1} \end{bmatrix}$$

⑦主对角线分块矩阵 $A = \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{bmatrix}$，若 A_i（$i=1$，2，…，s）均可逆，则 A 可逆，且 $A^{-1} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{bmatrix}$；副对角线分块矩阵

$A = \begin{bmatrix} & & & A_1 \\ & & A_2 & \\ & \iddots & & \\ A_s & & & \end{bmatrix}$，若 A_i（$i=1$，2，…，s）均可逆，则 A 可逆，

且 $A^{-1} = \begin{bmatrix} & & & A_s^{-1} \\ & & \iddots & \\ & A_2^{-1} & & \\ A_1^{-1} & & & \end{bmatrix}$

- 分块矩阵
  - 运算
    - ⑧舒尔公式：$\begin{bmatrix} E_r & O \\ -CA^{-1} & E_{n-r} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A & B \\ O & D-CA^{-1}B \end{bmatrix}$
    - $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_r & -A^{-1}B \\ O & E_{n-r} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A & O \\ C & D-CA^{-1}B \end{bmatrix}$
    - $\begin{bmatrix} E_r & O \\ -CA^{-1} & E_{n-r} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_r & -A^{-1}B \\ O & E_{n-r} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A & O \\ O & D-CA^{-1}B \end{bmatrix}$
- 矩阵方程
  - 定义 — 含有未知矩阵的方程称为矩阵方程
  - 化简
    - 消公因式，即若 $CA=CB$，且 C 可逆，则 $A=B$
    - 提取公因式，即 $CA+CB=C(A+B)$
    - 移项，即将已知表达式与未知表达式分别移至方程的两边
    - 利用公式
  - 求解
    - 若 A 可逆或 B 可逆，或 A，B 均可逆，则分别可得解为 $X=A^{-1}B$，$X=BA^{-1}$，$X=A^{-1}CB^{-1}$
    - 若 A 不可逆，如 $AX=B$，则将 X 和 B 按列分块，得 $A[\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n]=[\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n]$，即 $A\xi_i=\beta_i$，$i=1, 2, \cdots, n$. 求解上述线性方程组，得解 ξ_i，从而得 $X=[\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n]$
    - 若无法化成上述几种形式，则应该设未知矩阵为 $X=(x_{ij})$，直接代入方程得到含未知量为 x_{ij} 的线性方程组，求得 X 的元素 x_{ij}，从而求得未知矩阵（即用待定元素法求 X）

一 求 A^n

由 $m\times n$ 个数 a_{ij}（$i=1, 2, \cdots, m$；$j=1, 2, \cdots, n$）排成的 m 行 n 列的矩形表格

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为一个 $m\times n$ 矩阵，简记为 A 或 $(a_{ij})_{m\times n}$. 当 $m=n$ 时，称 A 为 n 阶方阵.

1. A 为方阵且 $r(A)=1$

若 a_i，b_i（$i=1, 2, 3$）不全为 0，$A=\begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}[b_1, b_2, b_3]\xlongequal{\text{记}}\alpha\beta^{\mathrm{T}}$，则 $r(A)=1$，

$$A^n=(\alpha\beta^{\mathrm{T}})(\alpha\beta^{\mathrm{T}})\cdots(\alpha\beta^{\mathrm{T}})=\alpha(\beta^{\mathrm{T}}\alpha)(\beta^{\mathrm{T}}\alpha)\cdots(\beta^{\mathrm{T}}\alpha)\beta^{\mathrm{T}}$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{3}a_ib_i\right)^{n-1}A=[\operatorname{tr}(A)]^{n-1}A.$$

对于 m（$m>3$）阶方阵，若 $r(A)=1$，同样有$A^n=[\operatorname{tr}(A)]^{n-1}A$.

例 3.1 设 $A=\begin{bmatrix}2&6&-4\\-1&-3&2\\3&9&-6\end{bmatrix}$，则 $A^{10}=$______.

【解】应填 $(-7)^9\begin{bmatrix}2&6&-4\\-1&-3&2\\3&9&-6\end{bmatrix}$.

注意这种写法，第一列元素是原矩阵各行的比例，且使得其为恒等变形

由题可得 $A=\begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix}[1,3,-2]$，故

$A^n=[\operatorname{tr}(A)]^{n-1}A$

$$A^{10}=\begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix}\underbrace{[1,3,-2]\begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix}[1,3,-2]\cdots\begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix}}_{9个(-7)相乘}[1,3,-2]=(-7)^9A=(-7)^9\begin{bmatrix}2&6&-4\\-1&-3&2\\3&9&-6\end{bmatrix}.$$

2. 试算 A^2（或 A^3），找规律

（1）若 $A^2=kA$，则 $A^n=k^{n-1}A$.（本讲中“一”的“1”是这里的特殊情形）.

（2）若 $A^2=kE$，则$\begin{cases}A^{2n}=k^nE\ (若k=-1,则A^4=E),\\A^{2n+1}=k^nA.\end{cases}$

亦有可能试算 A^3，如 $A^3=kA$，这些次数不会太高.

例 3.2 设 $A=\begin{bmatrix}2&-3\\1&-2\end{bmatrix}$，则 $A^{11}=$______.

【解】应填$\begin{bmatrix}2&-3\\1&-2\end{bmatrix}$.

试算 A^2，找规律.

$$A^2=\begin{bmatrix}2&-3\\1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-3\\1&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=E,$$

则

$$A^{11}=(A^2)^5A=E^5A=A=\begin{bmatrix}2&-3\\1&-2\end{bmatrix}.$$

【注】(1) 对于 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，若 $a+d=0$，且 $a^2+bc=1$，则 $A^2=E$.

(2) 在第 8 讲会知道，满足 $A^2=E$ 的实矩阵 A 可相似对角化.

例 3.3 设 $A=\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$，则 $A^9=$________.

【解】应填 $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$.

试算 A^2，找规律.

$$A^2=\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}^2=\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}^2$$

$$=\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}=A,$$

故 $A^9=(A^2)^4A=A^4A=(A^2)^2A=A^2A=A^2=A=\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$.

【注】在第 8 讲会知道，满足 $A^2=A$ 的实矩阵 A 可相似对角化.

例 3.4 设 $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，则 $A^{13}=$________.

【解】应填$\begin{bmatrix}0&0&-1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$.

试算A^2，找规律．由于$A^2=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$，则$A^4=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=E$，故

$$A^{13}=(A^4)^3A=E^3A=A=\begin{bmatrix}0&0&-1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}.$$

3. $A\xlongequal{\text{分解}}B+C$

若$A=B+C$，$BC=CB$，则

$$A^n=(B+C)^n=B^n+nB^{n-1}C+\frac{n(n-1)}{2!}B^{n-2}C^2+\cdots+C^n.$$

(1) 若$B=E$，则$A^n=E+nC+\frac{n(n-1)}{2!}C^2+\cdots+C^n$.

(2) 若$BC=CB=O$，则$A^n=B^n+C^n$.

例 3.5　设$A=\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$，则$A^{10}=$________.

【解】应填$\begin{bmatrix}1&10&35\\0&1&10\\0&0&1\end{bmatrix}$.

记$A=E+B$，其中$B=\begin{bmatrix}0&1&-1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$，$B^2=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，$B^3=O$，则

$$A^{10}=(E+B)^{10}=E^{10}+10E^9B+\frac{10\times 9}{2}E^8B^2$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&10&-10\\0&0&10\\0&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&45\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&10&35\\0&1&10\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

【注】由例 8.6 知，A不可相似对角化，故不能用$A^n=P\Lambda^nP^{-1}$求A^n.

4. 用初等矩阵知识求 $P_1^m A P_2^n$

若 P_1，P_2 均为初等矩阵，m，n 为正整数，则$P_1^m A P_2^n$表示先对 A 作了与 P_1 相同的初等行变换，且重复 m 次；再对$P_1^m A$作了与 P_2 相同的初等列变换，且重复 n 次.

例 3.6 $\begin{bmatrix}1&0\\-1&1\end{bmatrix}^3\begin{bmatrix}1&2\\-1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}^5=$________.

【解】应填$\begin{bmatrix}2&1\\-3&-4\end{bmatrix}$.

记 $A=\begin{bmatrix}1&2\\-1&3\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&0\\-1&1\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$，则 B^3A 是将 A 的第 1 行的 -1 倍加到第 2 行，重复 3 次，故 $B^3A=\begin{bmatrix}1&2\\-4&-3\end{bmatrix}$，$B^3AC^5$ 是将 B^3A 的第 1 列与第 2 列互换，重复 5 次，即只互换 1 次，故

$$原式=B^3AC^5=\begin{bmatrix}2&1\\-3&-4\end{bmatrix}.$$

5. 用相似理论求 A^n

（1）若 $A\sim B$，即 $P^{-1}AP=B$，则 $A=PBP^{-1}$，$A^n=PB^nP^{-1}$.

（2）若 $A\sim\Lambda$，即 $P^{-1}AP=\Lambda$，则 $A=P\Lambda P^{-1}$，$A^n=P\Lambda^nP^{-1}$.

例 3.7 设 A，B，C 均是 3 阶矩阵，且满足 $AB=B^2-BC$，其中 $B=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}$，则 $A^{99}=$________.

【解】应填$\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$.

由 $|B|=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{vmatrix}=1\neq0$，知 B 可逆，且由 $AB=B^2-BC=B(B-C)$，得 $A=B(B-C)B^{-1}$，于是

$$A^{99}=B(B-C)B^{-1}B(B-C)B^{-1}\cdots B(B-C)B^{-1}=B(B-C)^{99}B^{-1}.$$

又易知
$$B^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix},\quad B-C=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{bmatrix},$$

故
$$A^{99}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{bmatrix}^{99}\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

二 关于 A^*，A^{-1} 与初等矩阵

1. A^*

（1）定义.

$$A^*=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{bmatrix},$$ 其中 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式，A^* 叫作 A 的伴随矩阵.

（2）公式.

设 A 为 n（$n\geqslant 2$）阶矩阵，其中⑤，⑥，⑦要求 A 可逆，则

① $AA^*=A^*A=|A|E$.

② $|A^*|=|A|^{n-1}$.

③ $(A^{\mathrm{T}})^*=(A^*)^{\mathrm{T}}$.

④ $(kA)^*=k^{n-1}A^*$，$(-A)^*=(-1)^{n-1}A^*$.

⑤ $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*$.

⑥ $A^*=|A|A^{-1}$.

⑦ $(A^*)^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A=(A^{-1})^*$.

⑧ $(A^*)^*=|A|^{n-2}A$.

⑨ $|(A^*)^*|=|A|^{(n-1)^2}$.

⑩ $(AB)^*=B^*A^*$.

（3）秩（见第 4 讲）.

例 3.8 设 A，B 是 n（$n\geqslant 2$）阶方阵，$|A|=2$，$|B|=-3$，$|A+B|=5$，则 $\big||A|B^*+|B|A^*\big|=$ ______.

【解】应填 $5(-6)^{n-1}$.

$$\begin{aligned}||A|B^*+|B|A^*|&=||A||B|B^{-1}+|A||B|A^{-1}|=|A|^n|B|^n|A^{-1}+B^{-1}|\\&=|A|^n|B|^n|A^{-1}(E+AB^{-1})|=|A|^n|B|^n|A^{-1}(B+A)B^{-1}|\\&=|A|^n|B|^n|A^{-1}||A+B||B^{-1}|=|A|^{n-1}|B|^{n-1}|A+B|\\&=2^{n-1}\cdot(-3)^{n-1}\cdot 5=5(-6)^{n-1}.\end{aligned}$$

例 3.9 已知 3 阶行列式 $|A|$ 的元素 a_{ij} 均为实数，且 a_{ij} 不全为 0．若

$$a_{ij}=-A_{ij}\ (i,\ j=1,\ 2,\ 3),$$

其中 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式，则 $|A|=$________.

【解】应填 -1.

由 $A^{\mathrm T}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{21}&a_{31}\\a_{12}&a_{22}&a_{32}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{bmatrix}$，$A^*=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{bmatrix}$，$a_{ij}=-A_{ij}$，得 $A^*=-A^{\mathrm T}$. 于是 $|A^*|=|-A^{\mathrm T}|$，即 $|A|^{3-1}=(-1)^3|A|$，也即 $|A|^2=-|A|$，故

$$|A|(|A|+1)=0. \tag{*}$$

由 a_{ij} 不全为 0 知，存在 $a_{kj}\neq 0$，将行列式 $|A|$ 按第 k 行展开，得

$$|A|=a_{k1}A_{k1}+a_{k2}A_{k2}+a_{k3}A_{k3}=-a_{k1}^2-a_{k2}^2-a_{k3}^2<0,$$

故由（*）式知，$|A|=-1$.

2. A^{-1}

（1）定义．

对于方阵 A，B，若 $AB=E$，则 A，B 互为逆矩阵，且 $A^{-1}=B$，$B^{-1}=A$，$AB=BA$.

（2）性质．

①$(A^{-1})^{-1}=A$.

②$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$（穿脱原则）.

③$k\neq 0$，$(kA)^{-1}=\dfrac{1}{k}A^{-1}$.

④$(A^{\mathrm T})^{-1}=(A^{-1})^{\mathrm T}$.

⑤$|A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}$.

（3）求 A^{-1}.

①具体型．

（i）$A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*$.

（ii）$[A\ \vdots\ E]\xrightarrow{\text{初等行变换}}[E\ \vdots\ A^{-1}]$.

②抽象型.

（i）由题设式子恒等变形，创造 $AB=E$，则 $A^{-1}=B$.

（ii）由题设式子恒等变形，创造 $A=BC$，若 B，C 均可逆，则 $A^{-1}=C^{-1}B^{-1}$.

例 3.10 设 n 阶方阵 A 满足 $A^3-2A^2+3A-4E=O$，则 $(A-E)^{-1}=$________.

【解】应填 $\frac{1}{2}(A^2-A+2E)$.

由长除法，得

$$
\begin{array}{r@{\,}l}
 & A^2-A+2E \\
A-E \big) & \overline{A^3-2A^2+3A-4E} \\
 & \underline{A^3-A^2\qquad\qquad\quad} \\
 & -A^2+3A-4E \\
 & \underline{-A^2+A\qquad\quad} \\
 & 2A-4E \\
 & \underline{2A-2E} \\
 & -2E
\end{array}
$$

即

$$(A-E)(A^2-A+2E)-2E=O,$$

所以 $(A-E)\left[\frac{1}{2}(A^2-A+2E)\right]=E$，故

$$(A-E)^{-1}=\frac{1}{2}(A^2-A+2E).$$

例 3.11 设 $A=E+\alpha\beta^{\mathrm{T}}$，其中 $\alpha=[a_1,a_2,a_3]^{\mathrm{T}}$，$\beta=[b_1,b_2,b_3]^{\mathrm{T}}$，且 $\alpha^{\mathrm{T}}\beta=3$，则 $A^{-1}=$________.

【解】应填 $\begin{bmatrix} 1-\frac{1}{4}a_1b_1 & -\frac{1}{4}a_1b_2 & -\frac{1}{4}a_1b_3 \\ -\frac{1}{4}a_2b_1 & 1-\frac{1}{4}a_2b_2 & -\frac{1}{4}a_2b_3 \\ -\frac{1}{4}a_3b_1 & -\frac{1}{4}a_3b_2 & 1-\frac{1}{4}a_3b_3 \end{bmatrix}$.

由例3.1亦可直接得到 $B^2=3B$.

令 $B=\alpha\beta^{\mathrm{T}}$，则 $B^2=(\alpha\beta^{\mathrm{T}})(\alpha\beta^{\mathrm{T}})=\alpha(\beta^{\mathrm{T}}\alpha)\beta^{\mathrm{T}}=3B$，这里 $\beta^{\mathrm{T}}\alpha=\alpha^{\mathrm{T}}\beta=3$，所以 $(A-E)^2=3(A-E)$，

即 $A^2-5A+4E=O$，故 $A\dfrac{5E-A}{4}=E$，得

$$A^{-1}=\frac{1}{4}(5E-A)=E-\frac{1}{4}\alpha\beta^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} 1-\frac{1}{4}a_1b_1 & -\frac{1}{4}a_1b_2 & -\frac{1}{4}a_1b_3 \\ -\frac{1}{4}a_2b_1 & 1-\frac{1}{4}a_2b_2 & -\frac{1}{4}a_2b_3 \\ -\frac{1}{4}a_3b_1 & -\frac{1}{4}a_3b_2 & 1-\frac{1}{4}a_3b_3 \end{bmatrix}.$$

例 3.12 设 A 为 n 阶非零矩阵，E 为 n 阶单位矩阵，若 $A^3=O$，则（　　）.

（A）$E-A$ 不可逆，$E+A$ 不可逆　　（B）$E-A$ 不可逆，$E+A$ 可逆

（C）$E-A$ 可逆，$E+A$ 可逆　　（D）$E-A$ 可逆，$E+A$ 不可逆

【解】应选（C）.

法一　因为 $A^3=O$，故 $E=E\pm A^3=(E\pm A)(E\mp A+A^2)$，即分别存在矩阵 $E-A+A^2$ 和 $E+A+A^2$，使得

$$(E+A)(E-A+A^2)=E,\ (E-A)(E+A+A^2)=E,$$

可知 $E-A$ 与 $E+A$ 都是可逆的，所以应选（C）.

法二　设 λ 是 A 的实特征值，由 $A^3=O$，得 $\lambda^3=0$，故 $\lambda=0$，所以 A 的实特征值只有 0，于是 $E-A$ 的实特征值只有 1，$E+A$ 的实特征值只有 1，故二者均可逆，应选（C）.

【注】法一是利用定义法，法二是说明 0 不是特征值.

3. 初等矩阵

（1）定义（$E_i(k)$，E_{ij}，$E_{ij}(k)$）.

①初等变换.

（i）一个非零常数乘矩阵的某一行（列）.

（ii）互换矩阵中某两行（列）的位置.

（iii）将矩阵的某一行（列）的 k 倍加到另一行（列）.

以上三种变换称为**矩阵的初等行（列）变换**，且分别称为倍乘、互换、倍加初等行（列）变换.

②初等矩阵.

由单位矩阵经过一次初等变换得到的矩阵称为**初等矩阵**.

定义：$E_i(k)$ $(k\neq 0)$ 表示单位矩阵 E 的第 i 行（或第 i 列）乘非零常数 k 所得的初等矩阵，称为**倍乘初等矩阵**.

定义：E_{ij} 表示单位矩阵 E 交换第 i 行与第 j 行（或交换第 i 列与第 j 列）所得的初等矩阵，称为**互换初等矩阵**.

定义：$E_{ij}(k)$ 表示单位矩阵 E 的第 j 行的 k 倍加到第 i 行（或第 i 列的 k 倍加到第 j 列）所得的初等矩阵，称为**倍加初等矩阵**.

【注】也有教材将 $E_{ij}(k)$ 表示为 E 的第 i 行的 k 倍加到第 j 行，故考研中所有初等变换的描述均用文字描述代替，以避免出现不同教材中不同的提法所带来的不同定义，考生掌握本质即可，不必纠结于此. 考试中为统一不引起歧义，通常以“P，Q”来表示.

③矩阵等价.

设 A，B 均是 $m\times n$ 矩阵，若存在可逆矩阵 $P_{m\times m}$，$Q_{n\times n}$，使得 $PAQ=B$，则称 A，B 是**等价矩阵**，记作 $A\cong B$.

设 A 是一个 $m\times n$ 矩阵，则 A 等价于形如 $\begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$ 的矩阵（E_r 中的 r 等于 $r(A)$），后者称为 A 的等价标准形. 等价标准形是唯一的，即若 $r(A)=r$，则存在可逆矩阵 P，Q，使得

$$PAQ=\begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix}.$$

【注】若 A，B 为同型矩阵，则 A 与 B 等价 $\Leftrightarrow r(A)=r(B)$.

（2）性质.

① $|E_{ij}|=-1$，$|E_{ij}(k)|=1$，$|E_i(k)|=k$.

② $E_{ij}^{\mathrm{T}}=E_{ij}$，$E_{ij}^{\mathrm{T}}(k)=E_{ji}(k)$，$E_i^{\mathrm{T}}(k)=E_i(k)$.

③ $E_{ij}^{-1}=E_{ij}$，$E_{ij}^{-1}(k)=E_{ij}(-k)$，$E_i^{-1}(k)=E_i\left(\dfrac{1}{k}\right)$.

④ $E_{ij}^{*}=|E_{ij}|E_{ij}^{-1}=-E_{ij}$，

$E_{ij}^{*}(k)=|E_{ij}(k)|E_{ij}^{-1}(k)=E_{ij}(-k)$，

$E_i^{*}(k)=|E_i(k)|E_i^{-1}(k)=kE_i\left(\dfrac{1}{k}\right)$.

（3）左行右列定理.

在矩阵 A 的左边乘初等矩阵 P，得 PA，相当于对 A 作了一次与 P 完全相同的初等行变换；在矩阵 A 的右边乘初等矩阵 P，得 AP，相当于对 A 作了一次与 P 完全相同的初等列变换.

（4）应用.

①求 A^{-1}.

$$[A \mid E]\xrightarrow{\text{初等行变换}}[E \mid A^{-1}]，\begin{bmatrix} A \\ \hdashline E \end{bmatrix}\xrightarrow{\text{初等列变换}}\begin{bmatrix} E \\ \hdashline A^{-1} \end{bmatrix}.$$

②研究 $P_1^mAP_2^n=B$.

例 3.13 设 A 是 3 阶可逆矩阵，交换 A 的第 1 列和第 2 列得到 B，A^*，B^* 分别是 A，B 的伴随矩阵，则 B^* 可由（　　）.

（A）A^* 的第 1 列与第 2 列互换得到　　（B）A^* 的第 1 行与第 2 行互换得到

（C）$-A^*$ 的第 1 列与第 2 列互换得到　　（D）$-A^*$ 的第 1 行与第 2 行互换得到

【解】应选（D）.

交换 A 的第 1 列和第 2 列得到 B，即

$$B=AE_{12},$$

由第3讲的“二3（2）④”可知.

则 $$B^*=(AE_{12})^*=E_{12}^*A^*=-E_{12}A^*=E_{12}(-A^*),$$

故 B^* 可由 $-A^*$ 的第 1 行与第 2 行互换得到，应选（D）.

例 3.14 设 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13}-2a_{11} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23}-2a_{21} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33}-2a_{31} \end{bmatrix}$，且 $|A|=3$，则 $A^*B=$________.

【解】应填 $\begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

B 是由 A 的第 1 列的 -2 倍加到第 3 列，然后再互换第 1 列和第 2 列得到的，记

$$P_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ P_2=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

则 $B=AP_1P_2$，于是 $A^*B=A^*AP_1P_2=|A|P_1P_2=3P_1P_2=\begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

三 分块矩阵

1. 定义

用几条横线和纵线把一个矩阵分成若干小块，每一小块称为原矩阵的子块．把子块看作原矩阵的一个元素，就得到了分块矩阵.

如矩阵 A 按行分块：

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hline a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix},$$

其中 $A_i=[a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}]$（$i=1,2,\cdots,m$）是 A 的子块.

矩阵 B 按列分块：

$$B=\left[\begin{array}{c|c|c|c} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{array}\right]=[B_1,B_2,\cdots,B_n],$$

其中 $B_j=[b_{1j},b_{2j},\cdots,b_{mj}]^{\mathrm{T}}$（$j=1,2,\cdots,n$）是 B 的子块.

2. 运算

①转置：$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}} & C^{\mathrm{T}} \\ B^{\mathrm{T}} & D^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$.

【注】如 $[A \quad B]^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}} \\ B^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$.

②加法：同型，且分法一致，则$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_1+B_1 & A_2+B_2 \\ A_3+B_3 & A_4+B_4 \end{bmatrix}$.

③数乘：$k\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} kA & kB \\ kC & kD \end{bmatrix}$.

④乘法：$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} AX+BZ & AY+BW \\ CX+DZ & CY+DW \end{bmatrix}$，其中矩阵相乘、相加要满足相应的运算规律.

【注】对于④的运算要注意，分块矩阵相乘后，左边的仍在左边，右边的仍在右边.

⑤若 A，B 分别为 m，n 阶方阵，则分块对角矩阵的幂为

$$\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}^k=\begin{bmatrix} A^k & O \\ O & B^k \end{bmatrix}.$$

⑥已知 $A=\begin{bmatrix} B & O \\ D & C \end{bmatrix}$，其中 B 是 r 阶可逆矩阵，C 是 s 阶可逆矩阵，则 A 可逆，且

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} B^{-1} & O \\ -C^{-1}DB^{-1} & C^{-1} \end{bmatrix}.$$

【注】若

$$A_1=\begin{bmatrix} B & D \\ O & C \end{bmatrix},\ A_2=\begin{bmatrix} O & B \\ C & D \end{bmatrix},\ A_3=\begin{bmatrix} D & B \\ C & O \end{bmatrix},$$

其中 B，C 可逆，则有

$$A_1^{-1}=\begin{bmatrix} B^{-1} & -B^{-1}DC^{-1} \\ O & C^{-1} \end{bmatrix},\ A_2^{-1}=\begin{bmatrix} -C^{-1}DB^{-1} & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{bmatrix},\ A_3^{-1}=\begin{bmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & -B^{-1}DC^{-1} \end{bmatrix}.$$

⑦主对角线分块矩阵 $A=\begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{bmatrix}$，若 A_i $(i=1,2,\cdots,s)$ 均可逆，则 A 可逆，且

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{bmatrix}.$$

副对角线分块矩阵

$$A=\begin{bmatrix} & & & A_1 \\ & & A_2 & \\ & \therefore & & \\ A_s & & & \end{bmatrix},$$

若 A_i（$i=1,2,\cdots,s$）均可逆，则 A 可逆，且

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} & & & A_s^{-1} \\ & & \therefore & \\ & A_2^{-1} & & \\ A_1^{-1} & & & \end{bmatrix}.$$

⑧舒尔公式．

当 A 可逆时，

将分块矩阵的第一行的 $-CA^{-1}$ 倍加至第二行，使 C 处为 O.

（i）$\begin{bmatrix} E_r & O \\ -CA^{-1} & E_{n-r} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A & B \\ O & D-CA^{-1}B \end{bmatrix}$.

（ii）$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_r & -A^{-1}B \\ O & E_{n-r} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A & O \\ C & D-CA^{-1}B \end{bmatrix}$. 将分块矩阵的第一列的 $-A^{-1}B$ 倍加至第二列，使 B 处为 O.

（iii）$\begin{bmatrix} E_r & O \\ -CA^{-1} & E_{n-r} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_r & -A^{-1}B \\ O & E_{n-r} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A & O \\ O & D-CA^{-1}B \end{bmatrix}$. 综合使用上述(i),(ii)的手段.

【注】舒尔公式可以把一般分块矩阵 $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ 化成上三角形分块矩阵、下三角形分块矩阵或对角线分块矩阵．

例 3.15 设 A 为 n 阶可逆矩阵，α 为 n 维列向量．记分块矩阵 $Q=\begin{bmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 1 \end{bmatrix}$，则 Q 可逆的充分必要条件是（　　）．

（A）$\alpha^T A\alpha\neq 1$　　（B）$\alpha^T A\alpha\neq -1$　　（C）$\alpha^T A^{-1}\alpha\neq 1$　　（D）$\alpha^T A^{-1}\alpha\neq -1$

【解】应选（C）．

令 $P=\begin{bmatrix} E & 0 \\ -\alpha^T A^{-1} & 1 \end{bmatrix}$，则 舒尔公式(i).

将分块矩阵的第一行的 $\alpha^T A^{-1}$ 倍加至第二行

此矩阵的形状为 $\begin{bmatrix} \boxed{A} & \boxed{\alpha} \\ \boxed{0} & \square \end{bmatrix}_{n+1}$

$$PQ=\begin{bmatrix} E & 0 \\ -\alpha^T A^{-1} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A & \alpha \\ 0 & 1-\alpha^T A^{-1}\alpha \end{bmatrix}.$$

于是 $|PQ|=|A|(1-\alpha^{\mathrm{T}}A^{-1}\alpha)$，而 $|PQ|=|P||Q|$，且 $|P|=1\neq 0$，故

$$|Q|=|A|(1-\alpha^{\mathrm{T}}A^{-1}\alpha).$$

由此可知，$|Q|\neq 0$ 的充分必要条件为 $\alpha^{\mathrm{T}}A^{-1}\alpha\neq 1$，即矩阵 Q 可逆的充分必要条件是 $\alpha^{\mathrm{T}}A^{-1}\alpha\neq 1$. 选（C）.

【注】$|Q|$ 如何求出，是本题的难点.

例 3.16 设 A，B，C 均为 3 阶矩阵，A^*，B^* 分别为 A，B 的伴随矩阵. 若 $|A|=2$，$|B|=3$，则分块矩阵 $\begin{bmatrix} C & A \\ B & O \end{bmatrix}$ 的伴随矩阵为（　　）.

（A）$\begin{bmatrix} A^*CB^* & 2A^* \\ 3B^* & O \end{bmatrix}$　（B）$\begin{bmatrix} -A^*CB^* & 2B^* \\ 3A^* & O \end{bmatrix}$　（C）$\begin{bmatrix} O & -2A^* \\ -3B^* & A^*CB^* \end{bmatrix}$　（D）$\begin{bmatrix} O & -2B^* \\ -3A^* & A^*CB^* \end{bmatrix}$

【解】应选（D）.

因为 $\begin{vmatrix} C & A \\ B & O \end{vmatrix}=(-1)^{3\times 3}|A||B|=-6\neq 0$，所以

$$\begin{bmatrix} C & A \\ B & O \end{bmatrix}^*=\begin{vmatrix} C & A \\ B & O \end{vmatrix}\begin{bmatrix} C & A \\ B & O \end{bmatrix}^{-1}$$

由第3讲的“三2⑥注”可知.

$$=-|A||B|\begin{bmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} O & -|A|\underbrace{|B|B^{-1}}_{B^*} \\ -|B|\underbrace{|A|A^{-1}}_{A^*} & |A||B|A^{-1}CB^{-1} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} O & -2B^* \\ -3A^* & A^*CB^* \end{bmatrix}.$$

四 矩阵方程

1. 定义

含有未知矩阵的方程称为矩阵方程.

2. 化简

解矩阵方程，应先根据题设条件和矩阵的运算规则，将方程进行恒等变形，使方程化成 $AX=B$，$XA=B$ 或 $AXB=C$ 的形式，其化简手段如下.

（1）消公因式，即若 $CA=CB$，且 C 可逆，则 $A=B$.

（2）提取公因式，即 $CA+CB=C(A+B)$.

（3）移项，即将已知表达式与未知表达式分别移至方程的两边．

（4）利用公式．

① $AA^*=|A|E$，A 可逆时，$A^*=|A|A^{-1}$，$(A^*)^*=|A|^{n-2}A$（$n\geqslant 2$）．

② $A^2-E=(A+E)(A-E)=(A-E)(A+E)$，$A^3-E=(A-E)(A^2+A+E)$．

③ $A^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}=(BA)^{\mathrm{T}}$，$A$，$B$ 可逆时，$A^{-1}B^{-1}=(BA)^{-1}$，$A^*B^*=(BA)^*$．

④ A 可逆时，$(A^{-1})^*=(A^*)^{-1}$，$(A^{-1})^{\mathrm{T}}=(A^{\mathrm{T}})^{-1}$，$(A^*)^{\mathrm{T}}=(A^{\mathrm{T}})^*$．

3. 求解

（1）若 A 可逆或 B 可逆，或 A，B 均可逆，则分别可得解为 $X=A^{-1}B$，$X=BA^{-1}$，$X=A^{-1}CB^{-1}$．

（2）若 A 不可逆，如 $AX=B$，则将 X 和 B 按列分块，得

$$A[\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_n]=[\beta_1,\ \beta_2,\ \cdots,\ \beta_n]，\text{即 } A\xi_i=\beta_i，\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

求解上述线性方程组，得解 ξ_i，从而得 $X=[\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_n]$．

（3）若无法化成上述几种形式，则应该设未知矩阵为 $X=(x_{ij})$，直接代入方程得到含未知量为 x_{ij} 的线性方程组，求得 X 的元素 x_{ij}，从而求得未知矩阵（即用待定元素法求 X）．

例 3.17 设

$$A=\begin{bmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{bmatrix},$$

且满足 $A^*B\left(\frac{1}{2}A^*\right)^*=8A^{-1}B+16E$，求矩阵 B.

【解】

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{vmatrix}=4,$$

$(A^*)^*=|A|^{n-2}A$

$$\left(\frac{1}{2}A^*\right)^*=\left(\frac{1}{2}\right)^{3-1}(A^*)^*=\frac{1}{4}|A|^{3-2}A=\frac{1}{4}\cdot 4A=A,$$

故 $A^*B\left(\frac{1}{2}A^*\right)^*=4A^{-1}BA$，因此有

$$4A^{-1}BA=8A^{-1}B+16E,$$

即

$$A^{-1}B(A-2E)=4E=4A^{-1}A,$$

也即

$$B(A-2E)=4A.$$

由 $|A-2E|=-4$，知 $A-2E$ 可逆，且 $(A-2E)^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}$，于是

$$B=4A(A-2E)^{-1}=-2\begin{bmatrix}0&2&0\\0&0&2\\2&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-4&0\\0&0&-4\\-4&0&0\end{bmatrix}.$$

例 3.18 已知 a 是常数，且矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&a\\1&3&0\\2&7&-a\end{bmatrix}$ 可经初等列变换化为矩阵 $B=\begin{bmatrix}1&a&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{bmatrix}$.

声东击西

（1）求 a;

（2）求满足 $AP=B$ 的可逆矩阵 P.

【解】（1）对矩阵 A，B 分别施以初等行变换，得

$$A=\begin{bmatrix}1&2&a\\1&3&0\\2&7&-a\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{(−2)倍加至}]{\text{(−1)倍加至}}\begin{bmatrix}1&2&a\\0&1&-a\\0&3&-3a\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{(−3)倍加至}]{\text{(−2)倍加至}}\begin{bmatrix}1&0&3a\\0&1&-a\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix}1&a&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{1倍加至}}\begin{bmatrix}1&a&2\\0&1&1\\0&a+1&3\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{(−a−1)倍加至}]{\text{(−a)倍加至}}\begin{bmatrix}1&0&2-a\\0&1&1\\0&0&2-a\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{(−1)倍加至}}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&2-a\end{bmatrix}.$$

由题设知 $r(A)=r(B)$，故 $a=2$.

（2）由（1）知 $a=2$. 对矩阵 $[A \mid B]$ 施以初等行变换，得

故 $r(A)=r([A \mid B])$，于是 $AX=B$ 有解.

$$[A \mid B]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&2&2\\1&3&0&0&1&1\\2&7&-2&-1&1&1\end{array}\right]\xrightarrow[\text{(−2)倍加至}]{\text{(−1)倍加至}}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&2&2\\0&1&-2&-1&-1&-1\\0&3&-6&-3&-3&-3\end{array}\right]\xrightarrow[\text{(−3)倍加至}]{\text{(−2)倍加至}}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&6&3&4&4\\0&1&-2&-1&-1&-1\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right],$$

记 $B=[\beta_1,\beta_2,\beta_3]$，由于

$$A\begin{bmatrix}-6\\2\\1\end{bmatrix}=\mathbf{0},\quad A\begin{bmatrix}3\\-1\\0\end{bmatrix}=\beta_1,\quad A\begin{bmatrix}4\\-1\\0\end{bmatrix}=\beta_2,\quad A\begin{bmatrix}4\\-1\\0\end{bmatrix}=\beta_3,$$

故 $AX=B$ 的解为

$$X=\begin{bmatrix}3-6k_1&4-6k_2&4-6k_3\\-1+2k_1&-1+2k_2&-1+2k_3\\k_1&k_2&k_3\end{bmatrix},$$

其中 k_1，k_2，k_3 为任意常数.

由于 $|X|=k_3-k_2$，因此满足 $AP=B$ 的可逆矩阵为

$$P=\begin{bmatrix}3-6k_1&4-6k_2&4-6k_3\\-1+2k_1&-1+2k_2&-1+2k_3\\k_1&k_2&k_3\end{bmatrix},$$

其中 k_1，k_2，k_3 为任意常数，且 $k_2\neq k_3$.

【注】事实上，有如下定理：

设 A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 $m\times s$ 矩阵，则矩阵方程 $AX=B$ 有解的充分必要条件为

$$r(A)=r([A \mid B]).$$

将 X，B 按列分块：$X=[x_1,x_2,\cdots,x_s]$，$B=[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s]$.

$$\begin{aligned}AX=B\text{ 有解}&\Leftrightarrow A[x_1,x_2,\cdots,x_s]=[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s]\text{ 有解}\\&\Leftrightarrow Ax_i=\beta_i\ (i=1,2,\cdots,s)\text{ 有解}\\&\Leftrightarrow r(A)=r([A \mid \beta_i])\ (i=1,2,\cdots,s)\\&\overset{(*)}{\Leftrightarrow} r(A)=r([A \mid \beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s])\\&\Leftrightarrow r(A)=r([A \mid B]).\end{aligned}$$

其中（*）处的理解：从左至右是显然的，从右至左的思路如下：

$$\begin{cases}r(A)=r([A \mid \beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s]),\\ r(A)\leqslant r([A \mid \beta_i])\leqslant r([A \mid \beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s])\end{cases}\Rightarrow r(A)=r([A \mid \beta_i]),\ (i=1,2,\cdots,s).$$

上述定理在考研时可直接使用.

例 3.19 若 $A=\begin{bmatrix}1&-2\\0&1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$，求所有可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=B$.

【解】设可逆矩阵 $P=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$，其中 $ad-bc\neq 0$.

由 $P^{-1}AP=B$，得 $AP=PB$，即

$$\begin{bmatrix}1&-2\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix},$$

得

$$\begin{bmatrix}a-2c&b-2d\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&a+b\\c&c+d\end{bmatrix},$$

从而

$$\begin{cases}a-2c=a,\\b-2d=a+b,\\c=c,\\d=c+d,\end{cases}$$

解得 $a+2d=0$，$c=0$，b 为任意常数．故

$$P=\begin{bmatrix}-2k_1&k_2\\0&k_1\end{bmatrix},$$

其中 $k_1\neq 0$，k_2 为任意常数．