第1讲 行列式

知识结构

- 定义、性质与定理
  - n 阶行列式的定义 — 以 n 个向量为邻边的 n 维图形的（有向）体积
  - 行列式的性质
    - 性质 1 — 行列互换，其值不变，即 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|$
    - 性质 2 — 某行（列）元素全为零，则行列式为零
    - 性质 3 — 两行（列）元素相等或对应成比例，则行列式为零
    - 性质 4 — 某行（列）元素均是两个元素之和，则可拆成两个行列式之和
    - 性质 5 — 两行（列）互换，行列式的值反号
    - 性质 6 — 某行（列）元素有公因子 k（$k\neq 0$），则 k 可提到行列式外面
    - 性质 7 — 某行（列）的 k 倍加到另一行（列），行列式的值不变
  - 行列式的展开定理
    - ①余子式 M_{ij}
    - ②代数余子式 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$
    - ③按某一行（列）展开的展开公式

      $$|\boldsymbol{A}|=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}\ (j=1,2,\cdots,n)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}\ (i=1,2,\cdots,n)$$
- 具体型行列式的计算：a_{ij} 已给出
  - 化为基本形行列式
    - ①主对角线行列式
    - ②副对角线行列式
    - ③拉普拉斯展开式
    - ④范德蒙德行列式
  - 加边法
  - 递推法（高阶→低阶）
    - ①建立递推公式，即建立 D_n 与 D_{n-1} 的关系
    - ② D_{n-1} 与 D_n 要有完全相同的元素分布规律，只是 D_{n-1} 比 D_n 低了一阶
  - 数学归纳法（低阶→高阶）
    - ①第一数学归纳法
    - ②第二数学归纳法

- 抽象型行列式的计算：a_{ij} 未给出
  - 用行列式的性质
  - 用矩阵知识
    - ①设 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$，$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为同阶方阵，则 $|\boldsymbol{C}|=|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|$
    - ②设 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为同阶方阵，则 $|\boldsymbol{C}|=|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$，作恒等变形，转化为矩阵乘积的行列式
    - ③设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，则 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$，$|(\boldsymbol{A}^*)^*|=||\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}|^{(n-1)^2}$
  - 用相似理论
    - ① $|\boldsymbol{A}|=\prod\limits_{i=1}^{n}\lambda_i$
    - ②若 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\boldsymbol{B}$，则 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$
- 综合题

一 定义、性质与定理

1. n 阶行列式的定义

n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 是由 n 个 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=[a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}]$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n}]$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_n=[a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{nn}]$ 组成的，其（运算规则的）结果是以这 n 个向量为邻边的 n 维图形的（有向）体积.

2. 行列式的性质

性质 1 行列互换，其值不变，即 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|$.

性质 2 行列式中某行（列）元素全为零，则行列式为零.

性质 3 行列式中的两行（列）元素相等或对应成比例，则行列式为零.

性质 4 行列式中某行（列）元素均是两个元素之和，则可拆成两个行列式之和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 5 行列式中两行（列）互换，行列式的值反号.

【注】上述运算称为“互换”性质.

性质 6 行列式中某行（列）元素有公因子 k（$k\neq 0$），则 k 可提到行列式外面，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

【注】上述等式从右到左的运算称为 **"倍乘"** 性质．

性质 7 行列式中某行（列）的 k 倍加到另一行（列），行列式的值不变．

【注】上述运算称为 **"倍加"** 性质．

3. 行列式的展开定理

（1）余子式．

在 n 阶行列式中，去掉元素 a_{ij} 所在的第 i 行、第 j 列元素，由剩下的元素按原来的位置与顺序组成的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}，即

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

（2）代数余子式．

余子式 M_{ij} 乘 $(-1)^{i+j}$ 后称为 a_{ij} 的代数余子式，记作 A_{ij}，即

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij},$$

显然也有 $M_{ij}=(-1)^{i+j}A_{ij}$.

（3）行列式按某一行（列）展开的展开公式．

行列式的值等于行列式的某行（列）元素分别乘其相应的代数余子式后再求和，即

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{cases} a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}\ (i=1,2,\cdots,n), \\ a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}\ (j=1,2,\cdots,n). \end{cases}$$

例 1.1 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -5 & 3 \\ 3 & 0 & a & b \\ 1 & -3 & 5 & 0 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -5 & 3 \\ 3 & 0 & a & b \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=$________.

【解】应填 $10(a-3)$.

2倍加至　1倍加至

减去

$$\begin{vmatrix}2&1&0&-1\\-1&2&-5&3\\3&0&a&b\\1&-3&5&0\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}2&1&0&-1\\-1&2&-5&3\\3&0&a&b\\1&-1&1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&1&0&-1\\-1&2&-5&3\\3&0&a&b\\0&-2&4&0\end{vmatrix}$$

提出5　2倍加至

$$=\begin{vmatrix}0&0&0&-1\\5&5&-5&3\\3+2b&b&a&b\\0&-2&4&0\end{vmatrix}=(-1)\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}5&5&-5\\3+2b&b&a\\0&-2&4\end{vmatrix}=5\begin{vmatrix}1&1&-1\\3+2b&b&a\\0&-2&4\end{vmatrix}=5\begin{vmatrix}1&1&1\\3+2b&b&a+2b\\0&-2&0\end{vmatrix}$$

$$=10(a-3).$$

二 具体型行列式的计算：a_{ij} 已给出

1. 化为基本形行列式

所谓基本形行列式是指化至此行列式即可得到结果.

（1）主对角线行列式.

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\0&a_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}a_{ii}.$$

（2）副对角线行列式.

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1,n-1}&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2,n-1}&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\a_{n1}&0&\cdots&0&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&\cdots&0&a_{1n}\\0&\cdots&a_{2,n-1}&a_{2n}\\\vdots&&\vdots&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{n,n-1}&a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&\cdots&0&a_{1n}\\0&\cdots&a_{2,n-1}&0\\\vdots&&\vdots&\vdots\\a_{n1}&\cdots&0&0\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

（3）拉普拉斯展开式.

设 $\boldsymbol{A}$ 为 m 阶矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，则

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{B}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|,$$

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{C}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{C}\end{vmatrix}=(-1)^{mn}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|.$$

（4）范德蒙德行列式．

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j - x_i),\ n\geqslant 2.$$

【注】（1）若所给行列式就是基本形或接近基本形，直接套公式或经过简单处理化成基本形后套公式．

（2）简单处理的手段：

①按零元素多的行或列展开；

②用行列式的性质对差别最小的“对应位置元素”进行处理，尽可能多地化出零元素，再按此行或列展开；

③对于行和或列和相等的情形，将所有列加到第 1 列或将所有行加到第 1 行，提出公因式，再用②，等等．

（3）考生应在做题过程中多积累经验，熟能生巧．

例 1.2 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$ ________.

称为爪形行列式．其解法为斜爪消去竖爪或平爪．

【解】应填 x^4.

(-1)倍加至

(-1)倍加至

(-1)倍加至

1倍加至

1倍加至

1倍加至

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 0 & 0 & x & -x \\ 0 & x & 0 & -x \\ x & 0 & 0 & -x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{(*)} (-1)^{\frac{4(4-1)}{2}} \cdot x^4 = x^4.$$

【注】（*）处来自 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$.

例 1.3 设 $A = \begin{bmatrix} -a & -2 & -2 & -2 \\ -2 & a & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -b & -2 \\ -2 & -2 & -2 & b \end{bmatrix}$ $(ab \neq 0)$，E 为 4 阶单位矩阵，则 $|2E-A| =$ ________.

【解】应填 a^2b^2.

(-1)倍加至

(-1)倍加至

提出 a

提出 b

(-2)倍加至

$$|2E-A| = \begin{vmatrix} 2+a & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2-a & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2+b & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & 0 & 0 \\ 2 & 2-a & 2 & 2 \\ 0 & 0 & b & b \\ 2 & 2 & 2 & 2-b \end{vmatrix} = ab\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2-a & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2-b \end{vmatrix}$$

$$=ab\left|\begin{array}{cc:cc}1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 2-a & 0 & 0\\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2 & 2-b\end{array}\right| \xlongequal{(*)} ab\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 2-a\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 2-b\end{vmatrix}=a^2b^2.$$

【注】(*) 处来自 $\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$.

例 1.4 $\begin{vmatrix}a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\\ b+c & a+c & a+b\end{vmatrix}=$________.

【解】应填 $(a+b+c)(b-a)(c-b)(c-a)$.

1倍加至

$$\begin{vmatrix}a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\\ b+c & a+c & a+b\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\\ a+b+c & a+b+c & a+b+c\end{vmatrix}$$

提出 $(a+b+c)$

$$=(a+b+c)\begin{vmatrix}a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$$ 互换

$$=(a+b+c)(-1)\begin{vmatrix}a & b & c\\ 1 & 1 & 1\\ a^2 & b^2 & c^2\end{vmatrix}$$ 互换

$$=(a+b+c)(-1)^2\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{(*)}(a+b+c)(b-a)(c-b)(c-a).$$

【注】(*) 处来自范德蒙德行列式.

2. 加边法

对于某些一开始不宜使用“互换”“倍乘”“倍加”性质的行列式，可以考虑使用加边法：n 阶行列式中添加一行、一列升至 $n+1$ 阶行列式. 若添加在第 1 列，且添加的是 $[1,0,\cdots,0]^{\mathrm{T}}$，则第 1 行其余元素可以任意添加，行列式值不变，即

$$D_n=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & * & * & \cdots & *\\ 0 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix},$$

其中 * 处元素可以任意添加. 观察原行列式元素的规律性，选择合适的元素填入 * 处，使行列式的计算更为简便.

例 1.5 设$\boldsymbol{\alpha}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{0}$，则$|\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{E}|=$________.

【解】 应填$1+\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2$.

法一

$$|\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}1+x_1^2 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n\\ x_2x_1 & 1+x_2^2 & \cdots & x_2x_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & 1+x_n^2\end{vmatrix}_n \xlongequal{(*)} \begin{vmatrix}1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ 0 & 1+x_1^2 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n\\ 0 & x_2x_1 & 1+x_2^2 & \cdots & x_2x_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & 1+x_n^2\end{vmatrix}_{n+1}\begin{array}{l} \\ (-x_1)\text{倍加至}\\ (-x_2)\text{倍加至}\\ \vdots\\ (-x_n)\text{倍加至}\end{array}$$

$$=\overset{x_n\text{倍加至},\ x_1\text{倍加至}\ \cdots}{\underset{x_2\text{倍加至}}{\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ -x_1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ -x_2 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -x_n & 0 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}_{n+1}}}=\begin{vmatrix}1+\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2 & x_1 & \cdots & x_n\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}_{n+1}=1+\sum_{i=1}^{n}x_i^2.$$

法二 由例 8.3 知，$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$的特征值为$\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2$，0，0，…，0，这里有$n-1$个特征值 0，于是$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{E}$的特征值为$1+\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2$，1，1，…，1，这里有$n-1$个特征值 1. 再由第 7 讲的“二（2）”知，$|\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{E}|=\left(1+\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2\right)\cdot1\cdot1\cdot\cdots\cdot1=1+\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2$.

【注】（*）处来自加边法.

3. 递推法（高阶→低阶）

（1）建立递推公式，即建立D_n与D_{n-1}的关系，有些复杂的题甚至要建立D_n，D_{n-1}与D_{n-2}的关系.

（2）D_{n-1}与D_n要有完全相同的元素分布规律，只是D_{n-1}比D_n低了一阶.

4. 数学归纳法（低阶→高阶）

涉及n阶行列式的证明型计算问题，即告知行列式计算结果，让考生证明之，可考虑数学归纳法.

（1）第一数学归纳法（适用于$F(D_n,D_{n-1})=0$）：

①验证$n=1$时，命题成立；

②假设$n=k(\geqslant2)$时，命题成立；

③证明$n=k+1$时，命题成立.

则命题对任意正整数n成立.

（2）第二数学归纳法（适用于$F(D_n,D_{n-1},D_{n-2})=0$）：

①验证$n=1$和$n=2$时，命题成立；

②假设$n<k$时，命题成立；

③证明 $n=k\ (\geqslant 3)$ 时，命题成立.

则命题对任意正整数 n 成立.

例 1.6 $D_n=\begin{vmatrix} b & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & b+a_1 \end{vmatrix}=$________.

【解】应填 $b^n+a_1b^{n-1}+a_2b^{n-2}+\cdots+a_{n-1}b+a_n$.

递推法.按第 1 列展开，得

$$D_n=b\begin{vmatrix} b & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_2 & b+a_1 \end{vmatrix}_{n-1}+(-1)^{n+1}a_n\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b & -1 \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$=bD_{n-1}+a_n.$$

下面做递推，得

$$\begin{aligned} D_n&=bD_{n-1}+a_n=b(bD_{n-2}+a_{n-1})+a_n=b^2D_{n-2}+a_{n-1}b+a_n \\ &=b^2(bD_{n-3}+a_{n-2})+a_{n-1}b+a_n \\ &=\cdots=b^{n-1}D_1+a_2b^{n-2}+\cdots+a_{n-1}b+a_n, \end{aligned}$$

其中 $D_1\xlongequal{(*)}b+a_1$，故 $D_n=b^n+a_1b^{n-1}+a_2b^{n-2}+\cdots+a_{n-1}b+a_n$.

【注】(1)(*)处提醒考生注意，D_n 的元素分布规律应从右下角往左上看，写出 $D_k\ (k=1,2,\cdots,n-1,n)$ 供考生参考：

$$D_k=\begin{vmatrix} b & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b & -1 \\ a_k & a_{k-1} & a_{k-2} & \cdots & a_2 & \boxed{b+a_1} \end{vmatrix}.$$

异爪形行列式

事实上，选第 1 列展开是基于 D_n 的这种元素分布规律，若选第 n 列展开，余子式便不是 D_{n-1}，破坏了元素分布规律，无法建立递推公式.

(2)本题也可用第一数学归纳法做.由

$$D_1=b+a_1,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} b & -1 \\ a_2 & b+a_1 \end{vmatrix}=b^2+a_1b+a_2,$$

设
$$D_k=b^k+a_1b^{k-1}+\cdots+a_{k-1}b+a_k, \quad ①$$
现在来看 D_{k+1}. 将 D_{k+1} 按第 1 列展开，由上述解析，知
$$D_{k+1}=bD_k+a_{k+1}, \quad ②$$
将归纳假设①式代入②式，得
$$\begin{aligned}D_{k+1}&=b(b^k+a_1b^{k-1}+\cdots+a_{k-1}b+a_k)+a_{k+1}\\&=b^{k+1}+a_1b^k+\cdots+a_{k-1}b^2+a_kb+a_{k+1},\end{aligned}$$
因此①式对任何正整数 k 都成立，即得
$$D_n=b^n+a_1b^{n-1}+\cdots+a_{n-1}b+a_n.$$

例 1.7 证明：n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}2a&1&0&\cdots&0&0\\a^2&2a&1&\cdots&0&0\\0&a^2&2a&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&2a&1\\0&0&0&\cdots&a^2&2a\end{vmatrix}=(n+1)a^n.$$

【证】第二数学归纳法．

当 $n=1$ 时，$D_1=2a=(1+1)a^1$，命题成立．

当 $n=2$ 时，$D_2=\begin{vmatrix}2a&1\\a^2&2a\end{vmatrix}=4a^2-a^2=3a^2=(2+1)a^2$，命题成立．

假设 $n<k$ 时，命题成立，当 $n=k\,(\geqslant 3)$ 时，D_k 按第 1 列展开，得

$$\begin{aligned}D_k&=2aD_{k-1}+(-1)^{1+2}a^2\begin{vmatrix}1&0&0&\cdots&0&0\\a^2&2a&1&\cdots&0&0\\0&a^2&2a&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&2a&1\\0&0&0&\cdots&a^2&2a\end{vmatrix}_{k-1}\\&=2aD_{k-1}-a^2D_{k-2}\\&=2a(k-1+1)a^{k-1}-a^2(k-2+1)a^{k-2}=(k+1)a^k,\end{aligned}$$

得证，命题成立．

【注】一般来说，当命题直接要求计算行列式时，优先考虑递推法，如例 1.6. 当命题给出行列式的结果，要求证明之时，优先考虑数学归纳法，如例 1.7.

三 抽象型行列式的计算：a_{ij} 未给出

1. 用行列式的性质

用行列式的性质将所求行列式进一步化成已知行列式．

2. 用矩阵知识

（1）设 $C=AB$，A，B 为同阶方阵，则 $|C|=|AB|=|A|\,|B|$.

（2）设 $C=A+B$，A，B 为同阶方阵，则 $|C|=|A+B|$，但由于 $|A+B|$ 不一定等于 $|A|+|B|$，故需对 $|A+B|$ 作恒等变形，转化为矩阵乘积的行列式．这里的恒等变形一般是①由题设条件如 $E=AA^{\mathrm{T}}$，②用 $E=AA^{-1}$ 等．

（3）设 A 为 n 阶矩阵，则 $|A^*|=|A|^{n-1}$，$|(A^*)^*|=||A|^{n-2}A|=|A|^{(n-1)^2}$．更全面的公式总结在第 3 讲"二"处．

例 1.8 设 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$ 是 3 阶矩阵，且 $|A|=5$，若

$$B=[\alpha_1-3\alpha_2+2\alpha_3,\ \alpha_2-2\alpha_3,\ 2\alpha_2+\alpha_3],$$

则 $|B|=$________.

【解】应填 25.

法一 利用行列式的性质．

(−2)倍加至

$$|B|=|\alpha_1-3\alpha_2+2\alpha_3,\ \alpha_2-2\alpha_3,\ 2\alpha_2+\alpha_3|$$

$$=|\alpha_1-3\alpha_2+2\alpha_3,\ \alpha_2-2\alpha_3,\ 5\alpha_3|$$

提出5

(−2)倍加至

$$=5|\alpha_1-3\alpha_2+2\alpha_3,\ \alpha_2-2\alpha_3,\ \alpha_3|$$

2倍加至

$$=5|\alpha_1-3\alpha_2,\ \alpha_2,\ \alpha_3|$$

3倍加至

$$=5|\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3|=5|A|$$

$$=5\times5=25.$$

法二

$$B=[\alpha_1-3\alpha_2+2\alpha_3,\ \alpha_2-2\alpha_3,\ 2\alpha_2+\alpha_3]$$

$$=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]\begin{bmatrix}1&0&0\\-3&1&2\\2&-2&1\end{bmatrix},$$

故

$$|B|=|A|\begin{vmatrix}1&0&0\\-3&1&2\\2&-2&1\end{vmatrix}=5\times5=25.$$

例 1.9 已知 n 阶行列式 $|A|=3$，将 $|A|$ 中的每一列减去其余各列得到的行列式记为 $|B|$，则 $|B|=$________.

【解】 应填 $3(2-n)2^{n-1}$.

将 A 按列分块，记 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]$，则有

$$|B|=\left|\alpha_1-\sum_{i\neq 1}\alpha_i,\alpha_2-\sum_{i\neq 2}\alpha_i,\cdots,\alpha_n-\sum_{i\neq n}\alpha_i\right|$$

1倍加至　1倍加至　提出 $(2-n)$

$$=|\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n|\begin{vmatrix}1&-1&\cdots&-1\\-1&1&\cdots&-1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\-1&-1&\cdots&1\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}1-(n-1)&-1&\cdots&-1\\1-(n-1)&1&\cdots&-1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1-(n-1)&-1&\cdots&1\end{vmatrix}$$

1倍加至　1倍加至

$$=3(2-n)\begin{vmatrix}1&-1&\cdots&-1\\1&1&\cdots&-1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&-1&\cdots&1\end{vmatrix}=3(2-n)\begin{vmatrix}1&0&\cdots&0\\1&2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&0&\cdots&2\end{vmatrix}$$

1倍加至　1倍加至

$$=3(2-n)2^{n-1}.$$

例 1.10 设 A 是 n 阶正交矩阵，其中 E 是 n 阶单位矩阵，$|A|=-1$，则 $|A+E|=$________.

【解】 应填 0.

法一 由 A 是正交矩阵，则 $AA^{\mathrm{T}}=E$，得

$$|A+E|=|A+AA^{\mathrm{T}}|=|A(E+A^{\mathrm{T}})|=|A||E+A^{\mathrm{T}}|$$
$$=|A||(E+A)^{\mathrm{T}}|=|A||E+A|,$$

故

$$(1-|A|)|E+A|=0,$$

又 $|A|=-1$，$1-|A|=2\neq 0$，于是 $|A+E|=0$.

法二 由例 8.13 知 A 必有特征值 -1，故 $A+E$ 必有特征值 0，由第 7 讲的“二（2）”知，$|A+E|=0$.

例 1.11 设 A 是 n 阶矩阵，$|A|=1$，则 $|(2A)^*|=$________.

【解】 应填 2^{n^2-n}.

$(kA)^*=k^{n-1}A^*$

$$|(2A)^*|=|2^{n-1}A^*|$$

$|kA|=k^n|A|$

$$=(2^{n-1})^n|A^*|=(2^{n-1})^n|A|^{n-1}$$
$$=2^{n^2-n}.$$

3. 用相似理论

（1）$|A|=\prod\limits_{i=1}^{n}\lambda_i$.

（2）若 A 相似于 B，则 $|A|=|B|$.

例 1.12 设 3 阶矩阵 A 有特征值 -1，2，3，A^* 是 A 的伴随矩阵，则 $|A+2A^*|=$________.

【解】应填 44.

由于 $|A|=(-1)\times2\times3=-6$，故 A^* 的特征值为 $\dfrac{|A|}{\lambda}$（λ为 A 的特征值），即 6，-3，-2，则 $2A^*$ 的特征值为 12，-6，-4，$A+2A^*$ 的特征值为 11，-4，-1，故 $|A+2A^*|=11\times(-4)\times(-1)=44$.

例 1.13 设 A 是 4 阶矩阵，A^* 是 A 的伴随矩阵，A^* 的特征值为 1，-1，-2，4，则 $|A^3+2A^2-A-3E|=$________.

【解】应填 $-\dfrac{253}{8}$.

由于 $|A^*|=1\times(-1)\times(-2)\times4=8\neq0$，可知 A^* 可逆，于是 A 可逆. 又 $|A^*|=|A|^{n-1}=|A|^3=8$，得 $|A|=2$. 故 A 的特征值 $\lambda_A=\dfrac{|A|}{\lambda_{A^*}}$，即为 2，$-2$，$-1$，$\dfrac{1}{2}$.

见第7讲的“二（3）①”中的表格：$f(A)$的特征值为$f(\lambda)$

设 $f(A)=A^3+2A^2-A-3E$，则 $f(A)$ 的特征值为

$$f(2)=2^3+2\times2^2-2-3=11,$$
$$f(-2)=(-2)^3+2\times(-2)^2+2-3=-1,$$
$$f(-1)=-1+2+1-3=-1,$$
$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^3+2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}-3=-\frac{23}{8},$$

故

$$|A^3+2A^2-A-3E|=f(2)\cdot f(-2)\cdot f(-1)\cdot f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{253}{8}.$$

四 综合题

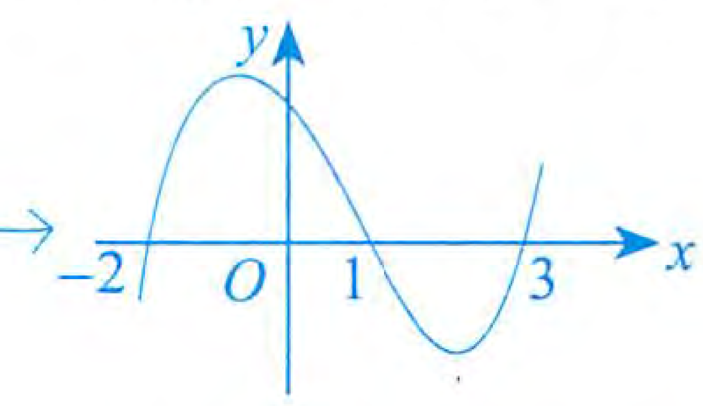
以行列式的形式给出函数后，可与高等数学知识结合命制综合题.

例 1.14 设 $f(x)=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&3&9&27\\1&-2&4&-8\\1&x&x^2&x^3\end{vmatrix}$，则 $f(x)$ 与 x 轴所围封闭图形的面积为________.

【解】应填 $\dfrac{1\,265}{2}$.

$$f(x)=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&3&9&27\\1&-2&4&-8\\1&x&x^2&x^3\end{vmatrix}\xlongequal{\text{转置}}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&3&-2&x\\1&9&4&x^2\\1&27&-8&x^3\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{(*)}(3-1)(-2-1)(x-1)(-2-3)(x-3)(x+2)$$
$$=30(x-1)(x-3)(x+2)$$
$$=30(x^3-2x^2-5x+6),$$



故 $f(x)=0$ 的所有根为 1，3，-2.

当 $x<-2$ 时，$f(x)<0$；当 $-2<x<1$ 时，$f(x)>0$；当 $1<x<3$ 时，$f(x)<0$；当 $x>3$ 时，$f(x)>0$. 故 $f(x)$ 与 x 轴所围封闭图形的面积为

$$S=\int_{-2}^{1}f(x)\mathrm{d}x-\int_{1}^{3}f(x)\mathrm{d}x$$
$$=30\int_{-2}^{1}(x^3-2x^2-5x+6)\mathrm{d}x-30\int_{1}^{3}(x^3-2x^2-5x+6)\mathrm{d}x$$
$$=30\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+6x\right)\Bigg|_{-2}^{1}-30\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+6x\right)\Bigg|_{1}^{3}$$
$$=\frac{1\,265}{2}.$$

【注】(*) 处来自范德蒙德行列式.