第 6 章　向量组

A 组

1. 对于向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\1\\3\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\-2\\6\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\-1\\-3\\7\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\\a\end{bmatrix},$$

下列结论正确的是(　　).

(A) 当 $a\neq 5$ 时,$\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示

(B) 当 $a\neq 5$ 时,$\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示

(C) 当 $a=5$ 时,$\boldsymbol{\alpha}_1$ 不可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示

(D) 当 $a=5$ 时,$\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示

2. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\2\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\a\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}3\\1\\b\\6\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\2\end{bmatrix}$,其中 a,b 为任意实数,则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的极大线性无关组为(　　).

(A)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$　　(B)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$

(C)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$　　(D)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵,若满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$,其中 $\boldsymbol{E}$ 是 m 阶单位矩阵,则(　　).

(A)$\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关,$\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性无关

(B)$\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关,$\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性无关

(C)$\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关,$\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性无关

(D)$\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关,$\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性无关

4. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关,而向量组 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 线性无关,则(　　).

(A)$\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示　　(B)$\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示

(C)$\boldsymbol{\alpha}_5$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示　　(D)$\boldsymbol{\alpha}_5$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示

5. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,0,-1,2]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[2,-1,-2,6]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=[3,1,t,4]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=[4,-1,-5,10]^{\mathrm{T}}$,已知 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出,则 $t=$ ________.

6. 已知向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=[1,-1,2]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[0,3,1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=[3,0,7]^{\mathrm{T}}$$

与向量组

$$\boldsymbol{\beta}_1=[1,-2,2]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=[2,1,5]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_3=[x,3,3]^{\mathrm{T}}$$

等秩，则 $x=$ ________.

7. 与 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,2,3,-1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[0,1,1,2]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=[2,1,3,0]^{\mathrm{T}}$ 都正交的单位向量是________.

8. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,2,-3,1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[5,-5,a,11]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=[1,-3,6,3]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=[2,-1,3,a]^{\mathrm{T}}$. 求：

(1) 当 a 为何值时，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关；

(2) 当 a 为何值时，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关；

(3) 当 a 为何值时，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，并写出它的表出式.

9. 已知向量组 A：$\boldsymbol{\alpha}_1=[1,1,4]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[1,0,4]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=[1,2,a^2+3]^{\mathrm{T}}$ 和向量组 B：$\boldsymbol{\beta}_1=[1,1,a+3]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=[0,2,1-a]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_3=[1,3,a^2+3]^{\mathrm{T}}$. 若向量组 A 和向量组 B 等价，求常数 a 的值，并将 $\boldsymbol{\beta}_3$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

10. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s(s\geqslant 2)$ 线性无关，且

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{s-1}=\boldsymbol{\alpha}_{s-1}+\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_s=\boldsymbol{\alpha}_s+\boldsymbol{\alpha}_1.$$

讨论向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 的线性相关性.

11. 已知 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 是 n 维线性无关列向量组，若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，证明：$\boldsymbol{A}$ 是不可逆矩阵.

12. 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为 n 维非零列向量，且线性相关，$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=2$，若 $(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})^2=2\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$，求两个向量之间的线性关系.

13. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=[a_1,a_2,a_3]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[b_1,b_2,b_3]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=[c_1,c_2,c_3]^{\mathrm{T}}$，若三条直线

$$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1,\\ a_2x+b_2y=c_2,(a_i^2+b_i^2\neq 0,i=1,2,3)\\ a_3x+b_3y=c_3\end{cases}$$

相交于一点，问向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 之间应有什么样的线性关系？说明理由.

B组

1. 设向量组（Ⅰ）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，向量组（Ⅱ）$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性无关，且 $\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,\cdots,s)$ 不能由向量组（Ⅱ）$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性表出，$\boldsymbol{\beta}_j(j=1,2,\cdots,t)$ 也不能由向量组（Ⅰ）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出，则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$（　　）.

(A) 必线性相关　　(B) 必线性无关

(C) 可能线性相关，也可能线性无关　　(D) 以上都不正确

2. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为 3 维非零列向量，则下列结论：

① 如果 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关；

② 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 也线性相关；

③ 如果 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4)$，则 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出.

正确的个数为（　　）.

(A)0　　(B)1　　(C)2　　(D)3

3. 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\4\\3\end{bmatrix}$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}_3=\begin{bmatrix}1\\-1\\a\end{bmatrix}$. 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示，则 $a=($　　$)$.

(A)3　　(B) -3　　(C)2　　(D) -2

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$r(\boldsymbol{A})=n-1$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的三个互不相同的解，则(　　).

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关

5. 已知

$$\boldsymbol{\alpha}_1=[1+\lambda,1,1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[1,1+\lambda,1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=[1,1,1+\lambda]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=[0,\lambda,\lambda^2]^{\mathrm{T}}.$$

问 λ 取何值时，

(1) $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，且表达式唯一；

(2) $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，但表达式不唯一；

(3) $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出.

6. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,1,1,2]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[3,a+4,2a+5,a+7]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=[4,6,8,10]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=[2,3,2a+3,5]^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{\beta}=[0,1,3,b]^{\mathrm{T}}$. 求：

(1) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩及一个极大线性无关组；

(2) a,b 满足何种条件时，$\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示；

(3) a,b 满足何种条件时，任意的 4 维非零列向量 $\boldsymbol{\xi}$ 均可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\beta}$ 线性表示.

7. 已知线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4=a_{15},\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+a_{24}x_4=a_{25},\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+a_{34}x_4=a_{35},\\a_{41}x_1+a_{42}x_2+a_{43}x_3+a_{44}x_4=a_{45}\end{cases}$$

的通解为 $[2,1,0,1]^{\mathrm{T}}+k[1,-1,2,0]^{\mathrm{T}}$（$k$ 为任意常数）. 记 $\boldsymbol{\alpha}_j=[a_{1j},a_{2j},a_{3j},a_{4j}]^{\mathrm{T}},j=1,2,\cdots,5$. 问：

(1) $\boldsymbol{\alpha}_4$ 能否由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$ 线性表出，说明理由；

(2) $\boldsymbol{\alpha}_4$ 能否由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，说明理由.

8. 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s+1}(s>1)$ 线性无关，$\boldsymbol{\beta}_i=\boldsymbol{\alpha}_i+t\boldsymbol{\alpha}_{i+1},i=1,2,\cdots,s$. 证明：向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性无关.

9. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶正定矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为 n 维非零列向量，且满足 $\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}_j=0(i\neq j;i,j=1,2,\cdots,n)$. 证明：向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关.

10. 设 $\boldsymbol{\alpha}_i=[a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}]^{\mathrm{T}}(i=1,2,\cdots,s;s<n)$ 为 n 维列向量，且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，已知 $\boldsymbol{\beta}$ 是线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\\qquad\cdots\cdots\\a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=0\end{cases}$$

的非零解，证明向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}$ 线性无关.

11. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3×3 矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均是 3 维列向量，且线性无关，已知

$$A\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,A\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,A\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2.$$

(1) 证明 $A\boldsymbol{\alpha}_1,A\boldsymbol{\alpha}_2,A\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关；

(2) 求 $|A|$.

12. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出，且表达式的系数全不为零. 证明：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}$ 中任意 s 个向量均线性无关.

13. (1) 设向量组 A 可由向量组 B 线性表示，且 $r(A)=r(B)$，证明：向量组 A 与向量组 B 等价；

(2) 设有向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,-2,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[1,0,2]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=[1,2,a]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_1=[1,2,4]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=[1,0,b]^{\mathrm{T}}$，问：当 a,b 为何值时，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 等价？并写出此时 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示的表示式.

C组

1. 设 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 满足 $\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，对任意的 n 维向量 $\boldsymbol{\beta}$，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+a\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_2+b\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，则参数 a,b 应满足条件(　　).

(A) $a=b$　　　　(B) $a=-b$

(C) $a=2b$　　　　(D) $a=-2b$

2. 设 3 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关.

(1) 证明：存在 3 维非零向量 $\boldsymbol{\xi}$，使得 $\boldsymbol{\xi}$ 既可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表出，也可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性表出；

(2) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,-2,3]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[2,1,1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_1=[-2,1,4]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=[-5,-3,5]^{\mathrm{T}}$，求既可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表出，也可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性表出的所有非零列向量 $\boldsymbol{\xi}$.