

Санкт-Петербургский Государственный Университет

Поляков Иван Михайлович

Отчёт по Лабораторной Работе № 3_1

Критерии согласия Колмогорова и ω^2 для сложных гипотез

Направление 01.04.02: «Прикладная математика и информатика»
Образовательная программа ВМ.5505.2021: «Математическое и информационное
обеспечение экономической деятельности»

Преподаватель:
доктор технических наук,
профессор Буре Владимир Мансурович

Санкт-Петербург
2022 г.

1 Постановка задачи

В таблице ниже приводятся сведения об уровне среднегодовых цен на говядину из США на рынках Нью-Йорка:

Исходные данные:

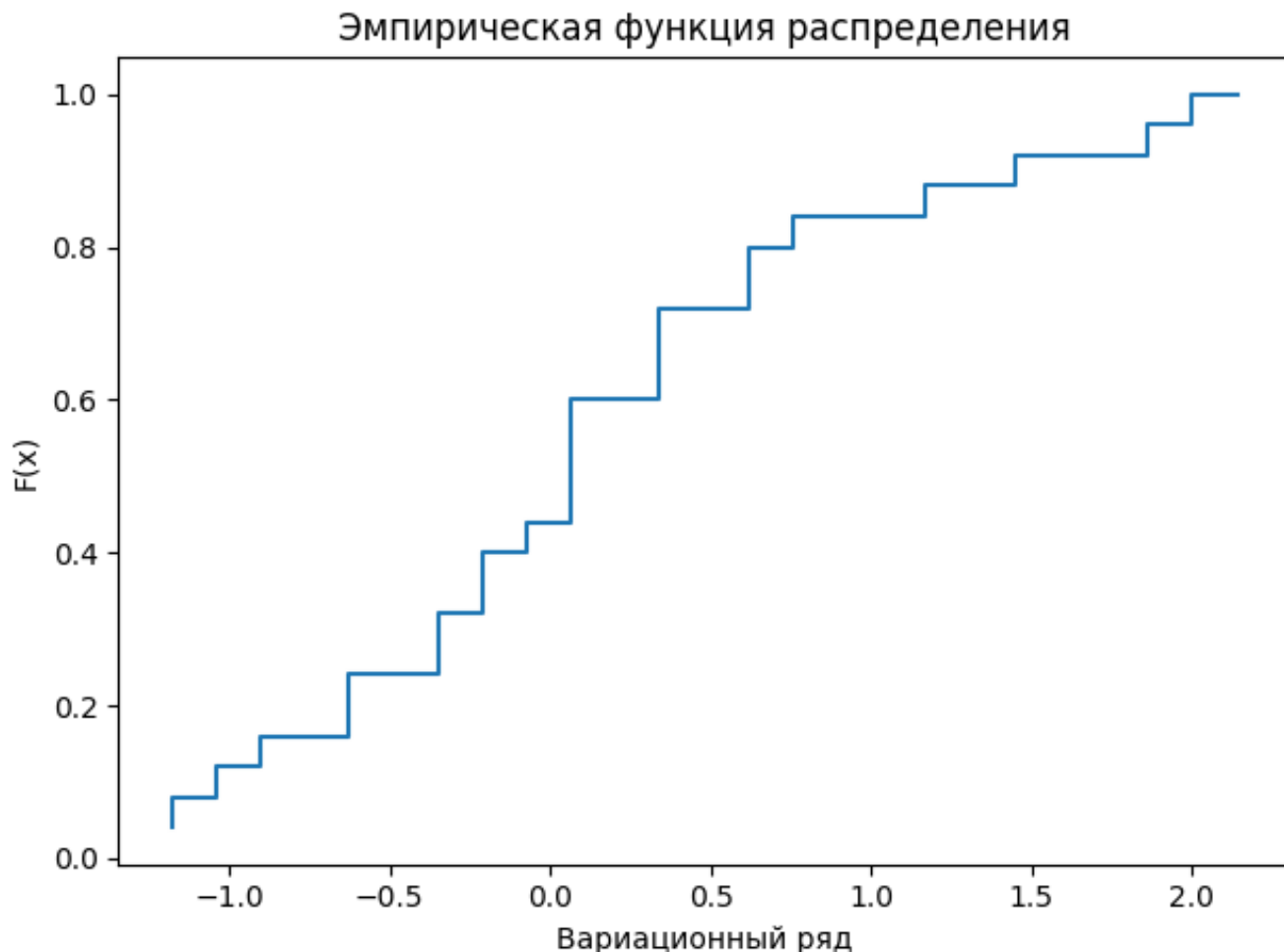
1970: 4.14
1971: 4.21
1972: 4.91
1973: 6.47
1974: 5.33
1975: 4.41
1976: 5.29
1977: 5.13
1978: 7.12
1979: 9.26
1980: 8.71
1981: 8.69
1982: 9.91
1983: 9.61
1984: 9.71
1985: 8.91
1986: 7.73
1987: 8.13
1988: 8.26
1989: 8.72
1990: 9.41
1991: 9.09
1992: 9.01
1993: 9.37
1994: 8.78
1995: 8.46
1996: 8.53
1997: 8.67

Необходимо проверить гипотезу о нормальном распределении на уровне значимости 5% и 10% первых разностей по критериям Колмогорова и ω^2 для сложных гипотез.

2 Ход работы

Изначально был изучен раздел 2.2.4 из книги Буре В.М., Парилина Е.М., Седаков А.А. «Методы прикладной статистики в R и Excel».

Перед проверкой гипотез необходимо провести предварительные вычисления над данными. Сначала были найдены первые разности изначальных данных. Затем из этих разностей были исключены все повторения, которые могли в дальнейшем повлиять на вычисления, а также полученная выборка была отсортирована. Полученный вариационный ряд с некоторыми характеристиками представлен в конце файла. График полученной эмпирической функции представлен ниже.



Дальнейшие вычисления по критериям производились в соответствии с алгоритмами, описывающие критерии.

2.1 Критерий Колмогорова

Алгоритм критерия согласия Колмогорова в случае сложной гипотезы о нормальности распределения генеральной совокупности

1. Выдвинуть нулевую гипотезу $H_0 : F_\xi(\cdot) = F_0(\cdot, \theta)$. Сформулировать альтернативную гипотезу $H_1 : F_\xi(\cdot) \neq F_0(\cdot, \theta)$;
2. Задать уровень значимости критерия α ;
3. Найти оценки $\hat{\theta} = (\bar{x}, s^2)$ неизвестных параметров распределения $\theta = (a, \sigma^2)$;
4. Вычислить значение исправленной формы статистики \tilde{D}_n^* следующим образом:

(а) По выборке $X_{[n]}$ построить эмпирическую функцию распределения $F_n(x)$ по формуле:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x < x_1, \\ \frac{1}{n}, & x_1 \leq x < x_2, \\ \vdots & \\ \frac{k}{n}, & x_k \leq x < x_{k+1}, \\ \vdots & \\ 1, & x \geq x_n \end{cases} \quad (1)$$

(b) Определить D_n^* по формуле

$$D_n^* = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{i}{n} - F_0(x_i), F_0(x_i) - \frac{i-1}{n} \right\} \quad (2)$$

(c) Вычислить значение исправленной формы модифицированной статистики Колмогорова по формуле

$$\tilde{D}_n^* = D_n^* \left(\sqrt{n} - 0.01 + \frac{0.85}{\sqrt{n}} \right) \quad (3)$$

5. Найти критическую область - интервал $(d_{1-\alpha}; \infty)$. Квантиль $d_{1-\alpha}$ можно найти из таблицы ниже

Модифицированная форма	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
$D_n^*(\sqrt{n} - 0.01 + \frac{0.85}{\sqrt{n}})$	0.775	0.819	0.895	0.955	1.035

6. Если численное значение статистики \tilde{D}_n^* попадает в интервал $(d_{1-\alpha}; \infty)$, то нулевая гипотеза H_0 отвергается, в противном случае нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу при уровне значимости приближённо равном α .

Результаты работы данного критерия при уровнях значимости $\alpha = 0.05$ и $\alpha = 0.1$ представлены в выводе в конце файла.

2.2 Критерий ω^2

Алгоритм критерия ω^2 в случае сложной гипотезы о нормальности распределения генеральной совокупности

1. Выдвинуть нулевую гипотезу $H_0 : F_\xi(\cdot) = F_0(\cdot, \theta)$. Сформулировать альтернативную гипотезу $H_1 : F_\xi(\cdot) \neq F_0(\cdot, \theta)$;
2. Задать уровень значимости критерия α ;
3. Найти оценки $\hat{\theta} = (\bar{x}, s^2)$ неизвестных параметров распределения $\theta = (a, \sigma^2)$;
4. Вычислить значение исправленной формы статистики $\hat{\omega}_n^2$ следующим образом:
 - (a) По выборке $X_{[n]}$ построить эмпирическую функцию распределения $F_n(x)$ по формуле (1)
 - (b) Определить ω_n^2 по формуле

$$\omega_n^2 = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^n \left(F_0(x_i) - \frac{2i-1}{2n} \right)^2 \quad (4)$$

(c) Вычислить значение исправленной формы модифицированной статистики ω^2 по формуле

$$\hat{\omega}_n^2 = \omega_n^2 \left(1 + \frac{0.5}{n} \right) \quad (5)$$

5. Найти критическую область - интервал $(w_{1-\alpha}; \infty)$. Квантиль $w_{1-\alpha}$ можно найти из таблицы ниже

Модифицированная форма	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
$\omega_n^2 \left(1 + \frac{0.5}{n}\right)$	0.091	0.104	0.126	0.148	0.178

6. Если численное значение статистики $\hat{\omega}_n^2$ попадает в интервал $(w_{1-\alpha}; \infty)$, то нулевая гипотеза H_0 отвергается, в противном случае нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу при уровне значимости приближённо равном α .

Результаты работы данного критерия представлены ниже.

Некоторые характеристики первых разностей:

Первые разности:

-1.18
-1.14
-0.92
-0.8
-0.59
-0.55
-0.32
-0.3
-0.16
-0.08
-0.02
0.07
0.1
0.13
0.14
0.36
0.4
0.46
0.69
0.7
0.88
1.22
1.56
1.99
2.14

Минимум : -1.18
Максимум : 2.14
Математическое ожидание : 0.19
Дисперсия : 0.79

Критерий Колмогорова

Гипотеза H_0 отвергается на уровне значимости 0.05,
так как значение 1.2384 попадает в интервал (0.895; +inf)

Гипотеза H_0 отвергается на уровне значимости 0.1,
так как значение 1.2384 попадает в интервал (0.819; +inf)

Критерий ω^2

Гипотеза H_0 отвергается на уровне значимости 0.05,
так как значение 0.346528 попадает в интервал (0.126; +inf)

Гипотеза H_0 отвергается на уровне значимости 0.1,
так как значение 0.346528 попадает в интервал $(0.104; +\infty)$