Санкт-Петербургский Государственный Университет

Поляков Иван Михайлович

Отчёт по Лабораторной Работе № 2_1

Интервальное оценивание

Направление 01.04.02: «Прикладная математика и информатика»
Образовательная программа ВМ.5505.2021: «Математическое и информационное обеспечение экономической деятельности»

Преподаватель:
доктор технических наук,
профессор Буре Владимир Мансурович

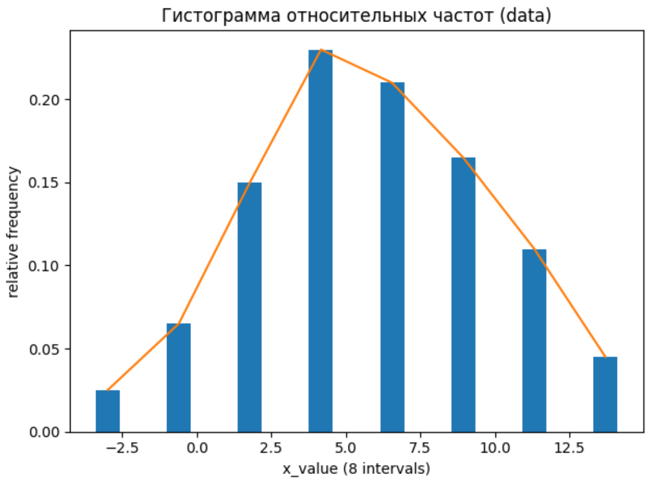
Санкт-Петербург
2022 г.

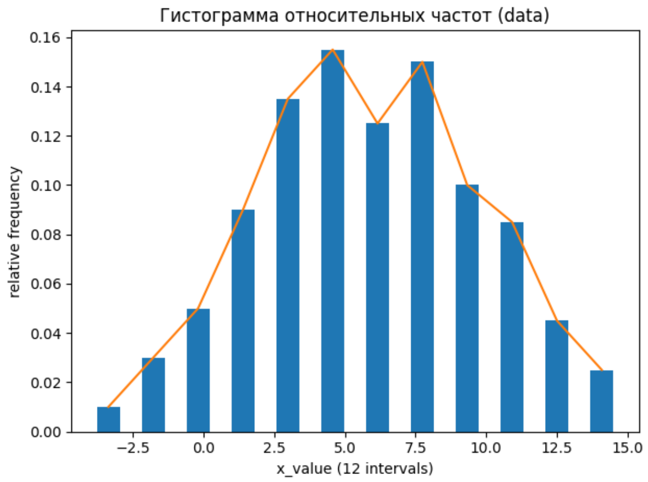
1 Постановка задачи

Вычислить интервальные оценки параметров распределения, определить доверительные интервалы для оценки неизвестных параметров нормального распределения: математического ожидания и дисперсии.

2 Ход работы

В ходе работы была сгенерирована генеральная совокупность («data») из 200 значений нормально распределённой случайной величины со случайными параметрами матиематического ожидания и стандартного отклонения (указаны в консольном выводе в конце файла). Для смоделированной генеральной совокупности были построены гистограмма и полигон относительных частот для 8 и 12 интервалов разбиения:





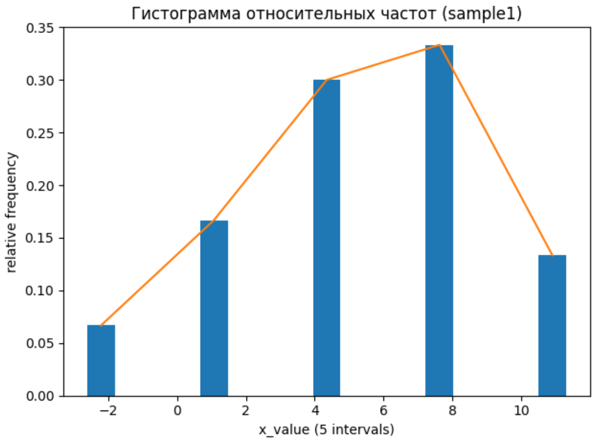
Также были вычислены дисперсия, стандартное отклонение и математическое ожидание полученной генеральной совокупности.

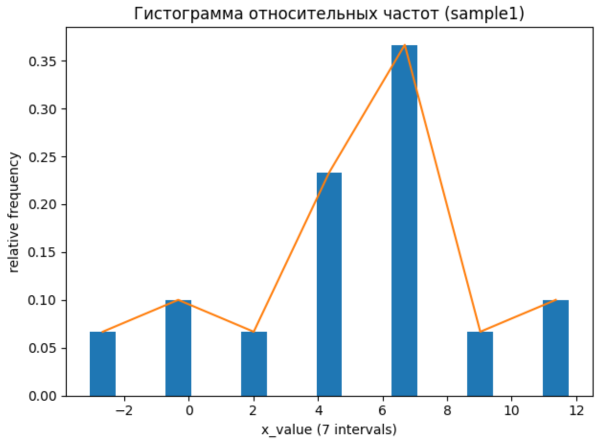
Найдены вероятности попадания случайной величины $X \in N(a, \sigma^2)$ в интервал $[5; 11]$ по следующей формуле:

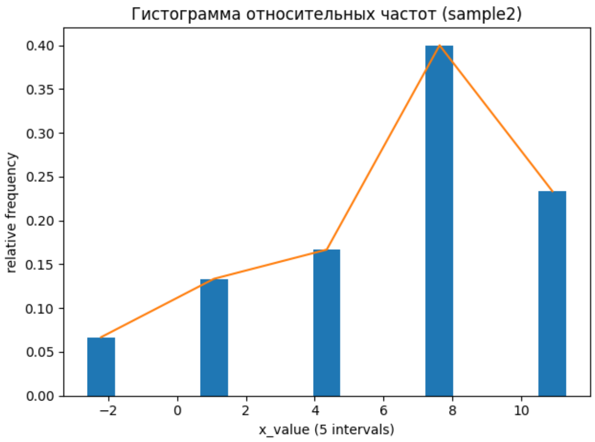
$$P\{5 < X < 11\} = F(11) - F(5), \tag{1}$$

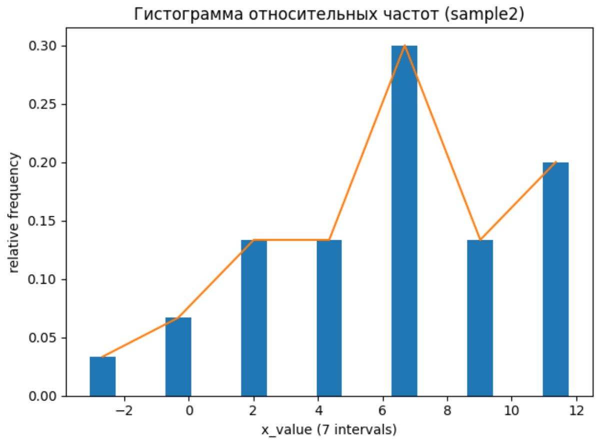
где $F(x)$ - функция Гаусса. Были получены 2 вероятности: одна вычислена по искомым значениям a и σ, а вторая - по полученным из генеральной совокупности. Абсолютная разность этих вероятностей отличается в 3ем знаке после запятой, что говорит о значительной близости результатов, и, как следствие, схожести полученных параметров с исходными.

Далее были сформированы 2 выборки («sample1» и «sample2») объёмом 30 элементов, которые были получены случайным отбором из генеральной совокупности. Для каждой выборки построены точечные оценки параметров распределения, а также были построены гистограммы относительных частот для 5 и 7 интервалов разбиения:









Наконец, для генеральной совокупности и 2х выборок были вычислены следующие доверительные интервалы (везде уровень значимости равен 5%):

- Доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания

$$\overline{x_0} - z_{table}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{x_0} + z_{table}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \tag{2}$$

  где z_{table} - квантиль нормального распределения.

- Доверительный интервал для оценки математического ожидания при неизвестном значении генерального среднеквадратического отклонения:

$$\overline{x_0} - t_{table}\frac{\tilde{S}}{\sqrt{n}} < a < \overline{x_0} + t_{table}\frac{\tilde{S}}{\sqrt{n}}, \tag{3}$$

  где t_{table} - квантиль расределения Стьюдента с $n-1$ степенью свободы.

- Доверительный интервал для оценки дисперсии при неизвестном значении генерального среднего:

$$\frac{(n-1)\tilde{S}^2}{t_2} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)\tilde{S}^2}{t_1}, \tag{4}$$

  где t_1, t_2 - квантили распределения Пирсона $\tilde{\chi}^2$ с $n-1$ степенью свободы.

- Доверительный интервал для оценки среднеквадратичного отклонения при неизвестном значении генерального среднего

$$\frac{\sqrt{n-1}\tilde{S}}{\sqrt{t_2}} \leq \sigma \leq \frac{\sqrt{n-1}\tilde{S}}{\sqrt{t_1}}, \tag{5}$$

где t_1, t_2 - квантили распределения Пирсона $\tilde{\chi}^2$ с $n-1$ степенью свободы.

Добавочным заданием было нахождение доверительного интервала с уровнем значимости 5% для параметра p из распределения Бернулли, пользуясь интегральной предельной теоремой Муавра-Лапласа. Изначально была сгенерирована выборка из распределения Бернулли объёма 500 и выбрано значение $p = 0.3$. Далее, необходимо воспользоваться формулой, асимптотически описывающая доверительный интервал для вероятности p:

$$\left(\frac{m}{n} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sqrt{\frac{m}{n}\left(1-\frac{m}{n}\right)}}{\sqrt{n}}, \frac{m}{n} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sqrt{\frac{m}{n}\left(1-\frac{m}{n}\right)}}{\sqrt{n}}\right), \tag{6}$$

где m - число единиц, n - общее число испытаний, $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ - квантиль стандартного нормального распределения.

Все численные результаты, полученные в ходе выполнения работы, представлены ниже.

```
Параметры для формирования выборки:
a    : 6
sigma: 4

Вычисленные значения генеральной совокупности:
Дисперсия              : 15.7
Математическое ожидание: 5.8
Стандартное отклонение : 3.96

Значение вероятности F(11) - F(5) при
вычисленных a = 5.796 и sigma = 3.959 равно: -0.056283
Значение вероятности F(11) - F(5) при
данных a = 6 и sigma = 4 равно: -0.051005
Абсолютная разность: 0.005279

Точечные оценки параметров распределения для полученных 2х выборок:
                              sample1 | sample2
Среднее значение               : 5.01 | 6.09
Дисперсия                      : 16.3 | 15.9
Среднеквадратическое отклонение: 4.04 | 3.98

data
Доверительный интервал для оценки
мат. ожидания при известном СКО (уровень доверия = 0.95):
(5.25, 6.34)

data
Доверительный интервал для оценки
мат. ожидания при неизвестном СКО (уровень доверия = 0.95):
(5.24, 6.35)

data
Доверительный интервал для оценки
дисперсии при неизвестном значении генерального среднего (уровень доверия = 0.95):
[13.0, 19.3]

data
```

```
Доверительный интервал для оценки
генерального СКО (уровень доверия = 0.95):
[3.61, 4.39]

sample1
Доверительный интервал для оценки
мат. ожидания при известном СКО (уровень доверия = 0.95):
(3.56, 6.43)

sample1
Доверительный интервал для оценки
мат. ожидания при неизвестном СКО (уровень доверия = 0.95):
(3.5, 6.52)

sample1
Доверительный интервал для оценки
дисперсии при неизвестном значении генерального среднего (уровень доверия = 0.95):
[10.3, 29.5]

sample1
Доверительный интервал для оценки
генерального СКО (уровень доверия = 0.95):
[3.22, 5.43]

sample2
Доверительный интервал для оценки
мат. ожидания при известном СКО (уровень доверия = 0.95):
(4.66, 7.49)

sample2
Доверительный интервал для оценки
мат. ожидания при неизвестном СКО (уровень доверия = 0.95):
(4.6, 7.57)

sample2
Доверительный интервал для оценки
дисперсии при неизвестном значении генерального среднего (уровень доверия = 0.95):
[10.1, 28.7]

sample2
Доверительный интервал для оценки
генерального СКО (уровень доверия = 0.95):
[3.17, 5.36]

Распределение Бернулли
p = 0.3, q = 0.7
Доверительный интервал для оценки
параметра p в распределении Бернулли (уровень доверия = 0.95):
(0.262, 0.342)
```