결합확률과 조건부 확률 (Joint and Conditional probability)

- 서로 다른 여러 개의 사건(또는 그로 인해 발생하는 사건)이 순차적으로 일어나는 경우의 확률

  ex) 3개 중 1번째 경품이 당첨, 공정할 시 한 번의 기회 등

- 조건부 확률 (conditional probability)
  - 주어진 사건이 발생했다고 가정했을 때, 다른 한 사건이 발생할 확률

    ex) 친구를 부르는 형태(조건성) 등

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

B발생과 동시에 A 발생 / B 발생

⇒ 사건 B가 발생하는 경우에 사건 A가 발생할 확률.

조건부 독립

- 사건 A, B, C가 존재할 때, 다음 식을 만족한다면 "사건 C가 주어질 때 A와 B는 조건부 독립이다"

$$P(A|B, C) = P(A|C)$$

A|B와 C가 일어날 확률 (모두)

$$\frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)\cdot P(B)}{P(B)} = P(A)$$

곱 규칙

- $P(y, x) = P(x|y)\cdot P(y)$
  - $P(x, y)$: 사건 x, y가 모두 일어날 결합확률
  - $P(x|y)$: 사건 y가 이미 일어난 상황에서 x가 일어날 조건부확률
  - $P(y)$: 사건 y가 일어날 확률

독립사건의 곱 규칙

- 사건 x, y가 서로 영향을 끼치지 못하는 독립사건의 경우

$$P(x, y) = P(x)\cdot P(y) = P(x|y)\cdot P(y)$$

합 규칙

- $P(x) = \sum_y P(y, x) = \sum_y P(x|y)\cdot P(y)$
- 사건 x, y가 모두 일어날 결합확률에 대해, 모든 종류의 y에 대한 확률을 다 더하면 (y와는 상관없이) x가 일어날 확률이 됨

베이즈 정리

- 일반적으로 x, y의 결합확률과 y, x의 결합확률이 같으므로,

$$P(y, x) = P(x|y)\cdot P(y) = P(x, y) = P(y|x)\cdot P(x)$$

$$\Rightarrow \boxed{P(y|x) = \frac{P(x|y)\cdot P(y)}{P(x)}}$$

다변수 평균과 공분산

- $X_i = [x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{iN}]^T$

  ↳ vector x가 여러 특징에 대해 다른 값이 나올 수 있음

  * N: 벡터 X_i의 길이, n: 샘플 수

- 평균벡터: 각 원소별로 평균을 계산.

$$\Rightarrow \mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

- 공분산 ⇒ 벡터 X_i에 대한 공분산은 행렬의 형태
  - σ_{ij}: i번째 특징과 j번째 특징의 상호 변화 양상을 표현

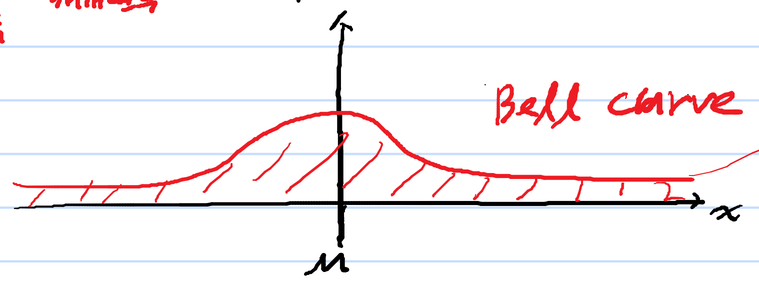
    행렬의 원소 / x_{*i} / x_{*j}

$$\underbrace{\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1N} \\ \sigma_{21} & \ddots & & \sigma_{2N} \\ \vdots & & & \vdots \\ \sigma_{N1} & \cdots & & \sigma_{NN} \end{bmatrix}}_{(N\times N)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{(X_i - \mu)}_{\substack{(N\times 1) \\ \text{열벡터}}} \underbrace{(X_i - \mu)^T}_{\substack{(1\times N) \\ \text{행벡터}}}$$

대표적인 확률분포의 종류

- 정규분포 (Normal Distribution)
  - Gaussian distribution ← 이러한 성질을 만족하도록 잘 만든 게 보통
  - 평균과 표준편차를 매개변수로 사용하여 모델링하는 확률분포 모형

$$\Rightarrow N(\underbrace{x}_{\text{확률 변수}}; \underbrace{\mu, \sigma^2}_{\text{매개변수}}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right) \quad \left(0 \le x \le 1,\ \int_0^n x_i = 1\right)$$



- 다변수 정규분포
  - 특징벡터가 N차원인 경우에는 평균벡터 μ와 공분산행렬 Σ를 사용하여 정규분포를 모델링함.

$$\Rightarrow N(X; \mu, \Sigma) = \frac{1}{\sqrt{|\Sigma|}\sqrt{(2\pi)^N}} \exp\left(-\frac{1}{2}(X-\mu)^T \Sigma^{-1} (X-\mu)\right)$$

$X \sim N(\mu, \Sigma)$

↳ X가 나올 확률(scalar)을 구함. ⇒ X는 이 정규분포를 따름.

베르누이 분포 (Bernoulli Distribution)

- 이산확률분포의 일종 (유한개)
- 확률변수가 0과 1 중 하나의 값만을 가지는 경우 ← "이진변수" (Binary)
- 성공확률(1값)은 P, 실패확률(0값)은 1−P로 표기

$$\Rightarrow Ber(x; P) = p^x (1-p)^{1-x}$$

이항분포 (Binomial Distribution)

- 성공확률 P인 베르누이 분포를 따르는 실험을 m번 수행할 때, 성공한 횟수의 확률분포

$$\Rightarrow B(x; m, P) = C_m^x P^x (1-P)^{m-x} = \boxed{\frac{m!}{x!(m-x)!} p^x (1-p)^{m-x}}$$