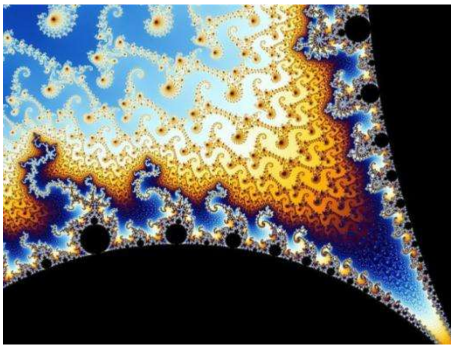
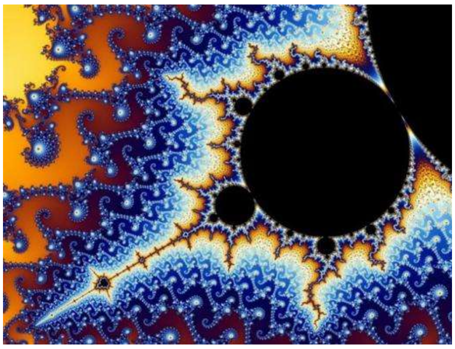
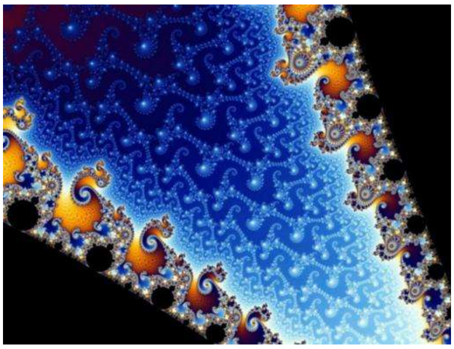
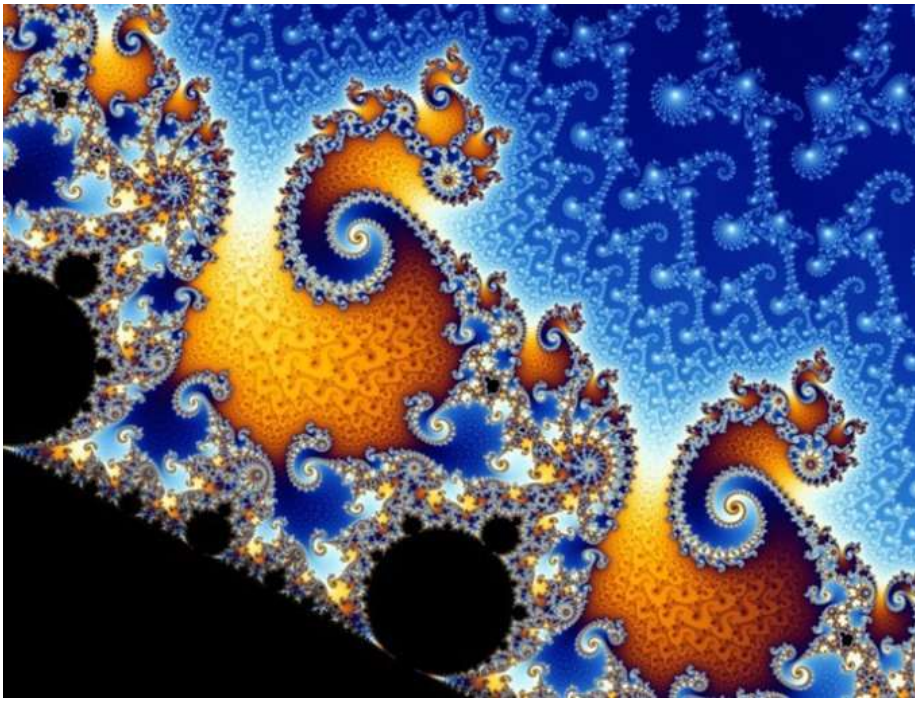
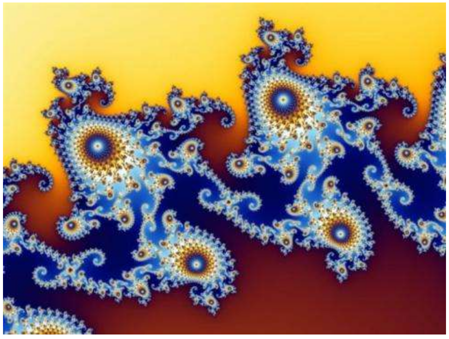
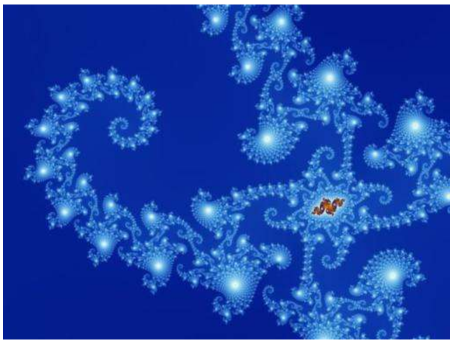
分形几何学

曼德勃罗特集

曼德勃罗特集是人类有史以来做出的最奇异、最瑰丽的几何图形，曾被称为“上帝的指纹”。 这个点集均出自公式：$Z_{n+1}=Z_n^{\ 2}+C$，对于非线性迭代公式 $Z_{n+1}=Z_n^{\ 2}+C$，所有使得无限迭代后的结果能保持有限数值的复数 C 的集合，构成曼德勃罗集。

这是一个迭代公式,式中的变量都是复数。这是一个大千世界,从他出发可以产生无穷无尽美丽图案,他是曼德勃罗特教授在二十世纪七十年代发现的。

你看上图中,有的地方像日冕,有的地方像燃烧的火焰,只要你计算的点足够多,不管你把图案放大多少倍,都能显示出更加复杂的局部。这些局部既与整体不同,又有某种相似的地方,好像梦幻般的图案具有无穷无尽的细节和自相似性。曼德勃罗特教授称此为"魔鬼的聚合物"。为此,曼德勃罗特在 1988 年获得了"科学为艺术大奖"。

图形是由美国数学家曼德勃罗特教授于 1975 年夏天一个寂静的夜晚，在冥思苦想之余翻看儿子的拉丁文字典是想到的，起拉丁文的原意是“产生无规则的碎片”。

分形几何学

分形几何学是一门以不规则几何形态为研究对象的几何学。相对于传统几何学的研究对象为整数维数，如，零维的点、一维的线、二维的面、三维的立体乃至四维的时空。分形几何学的研究对象为非负实数维数，如 $0.63, 1.58, 2.72, \log\frac{2}{3}$（参见康托尔集）。因为它的研究对象普遍存在于自然界中，因此分形几何学又被称为“大自然

的几何学”。

一个数学意义上分形的生成是基于一个不断迭代的方程式，即一种基于递归的反馈系统。分形有几种类型，可以分别依据表现出的精确自相似性、半自相似性和统计自相似性来定义。虽然分形是一个数学构造，它们同样可以在自然界中被找到，这使得它们被划入艺术作品的范畴。分形在医学、土力学、地震学和技术分析中都有应用。

简单的说，分形就是研究无限复杂具备自相似结构的几何学。是大自然复杂表面下的内在数学秩序。

由来

客观自然界中许多事物，具有自相似的“层次”结构，在理想情况下，甚至具有无穷层次。适当的放大或缩小事物的几何尺寸，整个结构并不改变。不少复杂的物理现象，背后就是反映着这类层次结构的分形几何学。

客观事物都有它自己的特征尺度，要用恰当的尺度去测量。用尺子来测量万里长城，嫌太短，而用来测量大肠杆菌，又嫌太长。还有的事物没有特征尺度，就必须同时考虑从小到大的许许多多尺度（或者叫标度），这就是“无标度性”的问题。

湍流是自然界中普遍现象，小至静室中缭绕的轻烟，大至木星大气中的涡流，都是十分紊乱的流体运动。流体宏观运动的能量，经过大、中、小、微等许多多度尺度上的旋涡，最后转化成分子尺度上的热运动，同时涉及大量不同尺度上的运动状态。要描述湍流现象就需要借助流体的“无标度性”，而湍流中高旋涡区域，就需要用到分形几何学。

在二十世纪七十年代，法国数学家曼德尔勃罗特在他的著作中探讨了英国的海岸线有多长？这个问题依赖于测量时所使用的尺度。

如果用公里作测量单位，从几米到几十米的一些曲折会被忽略；改用米来做单位，测得的总长度会增加，但是一些厘米量级以下的就不能反映出来。由于涨潮落潮使海岸线的水陆分界线具有各种层次的不规则性。海岸线在大小两个方向都有自然的限制，取不列颠岛外缘上几个突出的点，用直线把它们连起来，得到海岸线长度的一种下界。使用比这更长的尺度是没有意义的。还有海沙石的最小尺度是原子和分子，使用更小的尺度也是没有意义的。在这两个自然限度之间，存在着可以变化许多个数量级的“无标度”区，长度不是海岸线的定量特征，就要用分维。

数学家寇赫从一个正方形的“岛”出发，始终保持面积不变，把它的“海岸线”变成无限曲线，其长度也不断增加，并趋向于无穷大。以后可以看到，分维才是“寇赫岛”海岸线的确切特征量，即海岸线的分维均介于 1 到 2 之间。

这些自然现象，特别是物理现象和分形有着密切的关系，银河系中的若断若续的星体分布，就具有分维的吸引子。多孔介质中的流体运动和它产生的渗流模型，都是分形的研究对象。这些促使数学家进一步的研究，从而产生了分形几何学。

电子计算机图形显示协助了人们推开分形几何的大门。这座具有无穷层次结构的宏伟建筑，每一个角落里都存在无限嵌套的迷宫和回廊，促使数学家和科学家深入研究。

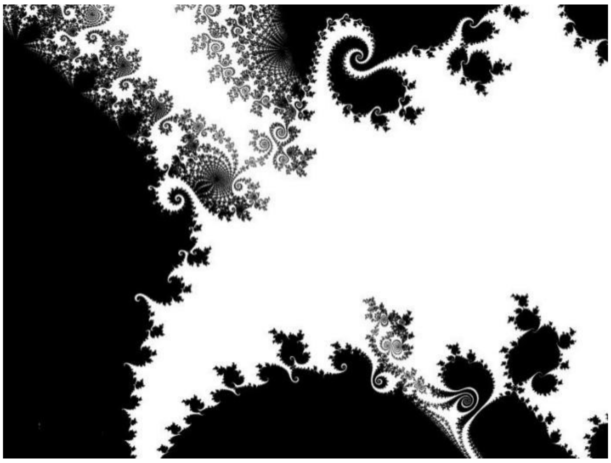
法国数学家曼德尔勃罗特这位计算机和数学兼通的人物，对分形几何产生了重大的推动作用。他在 1975、1977 和 1982 年先后用法文和英文出版了三本书，特别是《分形——形、机遇和维数》以及《自然界中的分形几何学》，开创了新的数学分支——分形几何学。

内容

1. 基本思想

分形几何学的基本思想是：客观事物具有自相似的层次结构，局部与整体在形态、功能、信息、时间、空间等方面具有统计意义上的相似性，称为自相似性。例如，一块磁铁中的每一部分都像整体一样具有南北两极，不断分割下去，每一部分都具有和整体磁铁相同的磁场。这种自相似的层次结构，适当的放大或缩小几何尺寸，整个结构不变。

2. 维数



维数是几何对象的一个重要特征量，它是几何对象中一个点的位置所需的独立坐标数目。在欧氏空间中，人们习惯把空间看成三维的，平面或球面看成二维，而把直线或曲线看成一维。也可以稍加推广，认为点是零维的，还可以引入高维空间，对于更抽象或更复杂的对象，只要每个局部可以和欧氏空间对应，也容易确定维数。但通常人们习惯于整数的维数。

3.　分形理论

分形理论认为维数也可以是分数，这类维数是物理学家在研究混沌吸引子等理论时需要引入的重要概念。为了定量地描述客观事物的“非规则”程度，1919 年，数学家从测度的角度引入了维数概念，将维数从整数扩大到分数，从而突破了一般拓扑集维数为整数的界限。

4.　分维

维数和测量有着密切的关系，下面我们举例说明一下分维的概念。

当我们画一根直线，如果我们用 0 维的点来量它，其结果为无穷大，因为直线中包含无穷多个点；如果我们用一块平面来量它，其结果是 0，因为直线中不包含平面。那么，用怎样的尺度来量它才会得到有限值哪？看来只有用与其同维数的小线段来量它才会得到有限值，而这里直线的维数为 1（大于 0、小于 2）。

对于我们上面提到的“寇赫岛”曲线，其整体是一条无限长的线折叠而成，显然，用小直线段量，其结果是无穷大，而用平面量，其结果是 0（此曲线中不包含平面），那么只有找一个与“寇赫岛”曲线维数相同的尺子量它才会得到有限值，而这个维数显然大于 1、小于 2，那么只能是小数了，所以存在分维。经过计算“寇赫岛”曲线的维数是 1.2618……

应用领域

分形几何学已在自然界与物理学中得到了应用。如在显微镜下观察落入溶液中的一粒花粉，会看见它不间断地作无规则运动（布朗运动），这是花粉在大量液体分子的无规则碰撞（每秒钟多达十亿亿次）下表现的平均行为。布朗粒子的轨迹，由各种尺寸的折线连成。只要有足够的分辨率，就可以发现原以为是直线段的部分，其实由大量更小尺度的折线连成。这是一种处处连续，但又处处无导数的曲线。这种布朗粒子轨迹的分维是 2，大大高于它的拓扑维数 1。

在某些电化学反应中，电极附近沉积的固态物质，以不规则的树枝形状向外增长。受到污染的一些流水中，粘在藻类植物上的颗粒和胶状物，不断因新的沉积而生长，成为带有许多须须毛毛的枝条状，就可以用分维。

自然界中更大的尺度上也存在分形对象。一枝粗干可以分出不规则的枝杈，每个枝杈继续分为细杈……，至少有十几次分支的层次，可以用分形几何学去测量。

有人研究了某些云彩边界的几何性质，发现存在从 1 公里到 1000 公里的无标度区。小于 1 公里的云朵，更受地形概貌影响，大于 1000 公里时，地球曲率开始起作用。大小两端都受到一定特征尺度的限制，中间有三个数量级的无标度区，这已足够了。分形存在于这中间区域。

近几年在流体力学不稳定性、光学双稳定器件、化学震荡反映等试验中，都实际测得了混沌吸引子，并从实验数据中计算出它们的分维。学会从实验数据测算分维是最近的一大进展。分形几何学在物理学、生物学上的应用也正在成为有充实内容的研究领域。

意义

上世纪 80 年代初开始的“分形热”经久不息。分形作为一种新的概念和方法，正在许多领域开展应用探索。美国物理学大师约翰·惠勒说过：今后谁不熟悉分形，谁就不能被称为科学上的文化人。由此可见分形的重要性。 中国著名学者周海中教授认为：分形几何不仅展示了数学之美，也揭示了世界的本质，还改变了人们理解自然奥秘的方式；可以说分形几何是真正描述大自然的几何学，对它的研究也极大地拓展了人类的认知疆域。

分形几何学作为当今世界十分风靡和活跃的新理论、新学科，它的出现，使人们重新审视这个世界：世界是非线性的，分形无处不在。分形几何学不仅让人们感悟到科学与艺术的融合，数学与艺术审美的统一，而且还有其深刻的科学方法论意义。

例子

1. cantor 三分集

1883 年，德国数学家康托(G.Cantor)提出了如今广为人知的三分康托集，或称康托尔集。三分康托集是很容易构造的，然而，它却显示出许多最典型的分形特征。它是从单位区间出发，再由这个区间不断地去掉部分子区间的过程。

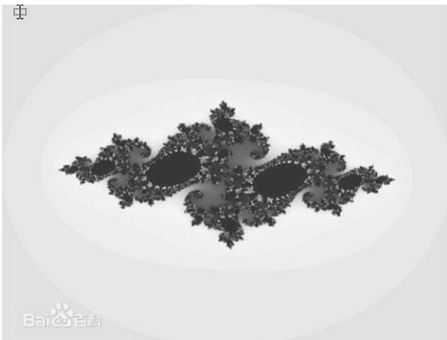
其详细构造过程是：第一步，把闭区间$[0,1]$平均分为三段，去掉中间的$\frac{1}{3}$部分段，则只剩下两个闭区间$\left[0,\frac{1}{3}\right]$和$\left[\frac{2}{3},1\right]$。第二步，再将剩下的两个闭区间各自平均分为三段，同样去掉中间的区间段，这时剩下四段闭区间：$\left[0,\frac{1}{9}\right]$，$\left[\frac{2}{9},\frac{1}{3}\right]$，$\left[\frac{2}{3},\frac{7}{9}\right]$和$\left[\frac{8}{9},1\right]$。第三步，重复删除每个小区间中间的$\frac{1}{3}$段。如此不断的分割下去， 最后剩下的各个小区间段就构成了三分康托集。 三分康托集的豪斯多夫维是0.6309。

2. Koch 曲线

1904 年，瑞典数学家柯赫构造了 “Koch 曲线”几何图形。Koch 曲线大于一维，具有无限的长度，但是又小于二维。它和三分康托集一样，是一个典型的分形。根据分形的次数不同，生成的 Koch 曲线也有很多种，比如三次 Koch 曲线，四次 Koch 曲线等。下面以三次 Koch 曲线为例，介绍 Koch 曲线的构造方法，其它的可依此类推。

三次 Koch 曲线的构造过程主要分为三大步骤：第一步，给定一个初始图形——一条线段；第二步，将这条线段中间的$\frac{1}{3}$处向外折起；第三步，按照第二步的方法不断的把各段线段中间的$\frac{1}{3}$处向外折起。这样无限的进行下去，最终即可构造出 Koch 曲线。

3. Julia 集



Julia 集是由法国数学家 Gaston Julia 和 Pierre Faton 在发展了复变函数迭代的基础理论后获得的。Julia 集也是一个典型的分形，只是在表达上相当复杂，难以用古典的数学方法描述。

朱利亚集合由一个复变函数$f(z)=z^2+c$生成，其中c为常数。尽管这个复变函数看起来很简单，然而它却能够生成很复杂的分形图形。

右图为朱利亚集合生成的图形，由于c可以是任意值，所以当c取不同的值时，制出的图形也不相同。

内容参考自网络

孙振兴 – 整理与 2018 年 10 月 27 日