

Appunti di Matematica Numerica

Andrea Bonifacio

July 1, 2020

1 Sistemi lineari

1.1 Introduzione

Un sistema lineare è un insieme di m equazioni lineari in n incognite x_j , ossia

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i$$

Si può riscrivere in forma compatta come

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

L'interesse sarà rivolto principalmente ai sistemi quadrati con matrice A non singolare.

Teorema 3.1

Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ non singolare, $\delta A \in \mathbb{R}^n$, $\delta \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ con $\|A\|\|A^{-1}\| < 1$ in una generica norma matriciale indotta $\|\cdot\|$. Detta \mathbf{x} la soluzione di $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e $\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}$ la soluzione del sistema perturbato

$$(A + \delta A)(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}) = \mathbf{b} + \delta \mathbf{b}$$

si ottiene la seguente stima dell'errore relativo

$$\frac{\|\delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \frac{K(A)}{1 - K(A)\|\delta A\|/\|A\|} \left(\frac{\|\delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \right)$$

1.2 Metodi diretti

Fattorizzazione LU

Si dice che una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ammette una fattorizzazione LU se esistono due matrici $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ triangolare inferiore con elementi diagonali unitari e una matrice $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ triangolare superiore tali che $A = LU$

Se A ammette una fattorizzazione LU , possiamo risolvere efficientemente $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con la risoluzione dei sistemi $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ e $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ mediante semplici sostituzioni in avanti/indietro.

Teorema 3.2

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ammette una unica fattorizzazione LU se e solo se $\det(A_k) \neq 0$, $k = 1, 2, \dots, n - 1$

La condizione necessaria e sufficiente affinché esista una sola fattorizzazione LU è che, detta A_k la sottomatrice estratta dalle prime k righe e colonne di A , $\det(A_k) \neq 0$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Inoltre due condizioni sufficienti affinché la matrice A ammetta una fattorizzazione LU sono:

1. La matrice è a dominanza diagonale stretta per righe/colonne
2. La matrice è definita simmetrica e positiva

Fattorizzazione di Cholesky

Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simmetrica e definita positiva, allora esiste una unica matrice H triangolare superiore e con elementi diagonali positivi tale che

$$A = H^T H$$

1.3 Metodi iterativi

Un metodo iterativo è un algoritmo che genera una successione di $\mathbf{x}^{(k)}$ che converge al vettore \mathbf{x} soluzione esatta di $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Teorema 3.7

La successione $\mathbf{x}^{(k)}$ generata da un metodo iterativo lineare converge a \mathbf{x} se e solo se $\rho(B) < 1$, dove B è la matrice associata all'algoritmo.

Di seguito saranno indicate con D , E e F rispettivamente la matrice formata dagli elementi diagonali di A , la matrice sottodiagonale formata dagli opposti degli elementi di A e la matrice sopradiagonale formata dagli opposti degli elementi di A , tali che $A = D - E - F$.

Metodo di Jacobi

Sia D definita come la matrice diagonale con gli elementi diagonali di A , si ottiene la matrice di iterazione associata come

$$B_J = I - D^{-1}A$$

Metodo di Gauss-Seidel Sia $D - E$ non singolare, il metodo di Gauss-Seidel è un algoritmo iterativo che genera la seguente matrice associata

$$B_{GS} = (D - E)^{-1}F$$

Parametro di rilassamento

Metodo JOR

Definito $\omega \in \mathbb{R}$ come parametro di rilassamento, si ottiene che

$$x_i^{k+1} = \omega x_{i,J}^{(k+1)} + (1 - \omega)x_i^{(k)}$$

ove x_i^{k+1} è la i -esima componente del vettore dato da una iterazione del metodo di Jacobi. La matrice associata al metodo JOR è

$$B(\omega) = \omega B_J + (1 - \omega)I$$

Metodo SOR

In analogia al metodo JOR, si può introdurre un parametro di rilassamento anche nel metodo di Gauss-Seidel, ottenendo una nuova matrice associata definita come

$$B(\omega) = (I - \omega D^{-1}E^{-1})[(1 - \omega)I + \omega D^{-1}F]$$

Condizioni di convergenza per metodi iterativi

1. Se A è a dominanza diagonale stretta per righe, allora sia Jacobi che Gauss-Seidel sono convergenti
2. Se A è simmetrica e definita positiva, allora il metodo di Gauss-Seidel è convergente
3. Se A è simmetrica e definita positiva allora il metodo JOR converge se e solo se $0 < \omega < \frac{2}{\rho(D^{-1}A)}$
4. Se A è simmetrica e definita positiva allora il metodo SOR converge se e solo se $0 < \omega < 2$

Metodi di Richardson

Definito residuo alla k -esima iterazione di un generico metodo iterativo $\mathbf{r}^{(k)} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k)}$ Si può quindi introdurre un parametro α , detto di accelerazione, per considerare

$$P(\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}) = \alpha_k \mathbf{r}^{(k)}, \quad k \geq 0$$

Preso $\alpha_k = \alpha$ costante, si può considerare il metodo di Richardson stazionario.

Metodo di Richardson stazionario

Sia $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ assegnato, $\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(0)}$, per $k = 0, 1, \dots$ si calcoli

$$\begin{aligned} P\mathbf{z}^{(k)} &= \mathbf{r}^{(k)} \\ \mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{x}^{(k)} + \alpha \mathbf{z}^{(k)} \\ \mathbf{r}^{(k+1)} &= \mathbf{r}^{(k)} - \alpha A\mathbf{z}^{(k)} \end{aligned}$$

da cui si ottiene la matrice associata $B = I - P^{-1}A$

Convergenza di Richardson stazionario

Sia P non singolare, allora il metodo di Richardson converge per ogni $\mathbf{x}^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ se e solo se

$$\frac{2\operatorname{Re}(\lambda_i)}{\alpha|\lambda_i|} > 1 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

dove λ_i sono gli autovalori di $P^{-1}A$

Metodo del gradiente

In caso di matrici simmetriche e definite positive, si può utilizzare un metodo di Richardson non stazionario, definito *metodo del gradiente*. Nella versione non preconditionata ($P = I$) si sceglie α_k tale che l'errore sia minimo, ossia

$$\|\mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{x}\|_A^2 = \min_{\alpha \in \mathbb{R}} \|\mathbf{x}^{(k)} + \alpha \mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{x}\|_A^2$$

Si ottiene dunque il seguente metodo

Metodo del gradiente (precondizionato)

Sia $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ assegnato, $\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(0)}$, per $k = 0, 1, \dots$ si calcoli

$$\begin{aligned} P\mathbf{z}^{(k)} &= \mathbf{r}^{(k)} \\ \alpha_k &= \frac{\mathbf{r}^{(k)T} \mathbf{z}^{(k)}}{A\mathbf{z}^{(k)T} \mathbf{z}^{(k)}} \\ \mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{z}^{(k)} \\ \mathbf{r}^{(k+1)} &= \mathbf{r}^{(k)} - \alpha_k A\mathbf{z}^{(k)} \end{aligned}$$

2 Risoluzione sistemi non lineari

Data una funzione $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ consideriamo il problema della ricerca di $\alpha \in [a, b]$ tale che $f(\alpha) = 0$, ossia lo zero della funzione.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = \alpha$$

Generalmente un metodo numerico per l'approssimazione si definisce

- *localmente convergente* se $\exists \delta > 0$ per cui si ottiene ogni $x^{(0)}$ tale che $|x^{(0)} - \alpha| < \delta$
- *globalmente convergente* se il limite vale $\forall x^{(0)} \in [a, b]$

2.1 Ricerca geometrica delle radici

2.1.1 Metodi globalmente convergenti

Il metodo di bisezione

Un esempio di metodo globalmente convergente è il metodo di bisezione, che prende $f(a)f(b) < 0$, $a^{(0)} = a$, $b^{(0)} = b$, $x^{(0)} = \frac{a^{(0)} + b^{(0)}}{2}$

Posto $k \geq 0$, si pone

$$\begin{aligned} a^{(k+1)} &= a^{(k)}, & b^{(k+1)} &= x^{(k)} & \text{se } f(a^{(k)})f(x^{(k)}) < 0 \\ a^{(k+1)} &= x^{(k)}, & b^{(k+1)} &= b^{(k)} & \text{se } f(x^{(k)})f(b^{(k)}) < 0 \\ x^{(k+1)} &= \frac{a^{(k+1)} + b^{(k+1)}}{2} \end{aligned}$$

Il metodo è convergente di ordine 1 e si ha la stima dell'errore

$$|x^{(k)} - \alpha| \leq \frac{b - a}{2^{(k+1)}} \quad \forall k \geq 0$$

2.1.2 Metodi globalmente convergenti

Inoltre è possibile avvalersi di vari metodi localmente convergenti tali che, assegnato $x^{(0)} \in [a, b]$ si pone

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{q_k}, \quad k \geq 0$$

Sostituendo q_k , si ottengono i seguenti metodi localmente convergenti:

Metodo delle corde

$$q_k = q = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Metodo delle secanti

$$q_k = \frac{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})}{x^{(k)} - x^{(k-1)}}$$

Metodo di Newton

$$q_k = f'(x^{(k)})$$

3 Interpolazione polinomiale

Data una funzione $f \in C^k([a, b])$ con $k \geq 0$ è possibile approssimare la funzione mediante funzioni polinomiali più semplici, questo processo è definito interpolazione polinomiale.

3.1 Interpolazione lagrangiana

Dati $n+1$ punti distinti x_0, x_1, \dots, x_n e $n+1$ corrispondenti valori y_0, y_1, \dots, y_n esiste un unico polinomio $\Pi_n \in \mathbb{P}_n$ che interpola tali dati, ossia

$$\Pi_n(x_i) = y_i \quad \forall i = 0, \dots, n$$

Gli elementi della base di Lagrange associata ai nodi x_0, \dots, x_n sono i polinomi

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad i = 0, \dots, n$$

L'insieme $\{l_0, \dots, l_n\}$ è l'unica base di \mathbb{P}_n che soddisfa $l_i(x_j) = \delta_{ij}$, ove $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$ e $\delta_{ij} = 0$ altrimenti. Il polinomio interpolatore ammette la seguente forma

$$\Pi_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i l_i(x)$$

mentre, dati $n+1$ nodi distinti x_0, \dots, x_n si definisce polinomio nodale associato

$$\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i) \in \mathbb{P}_{n+1}$$

Il polinomio nodale è utile ad esempio per la stima dell'errore di interpolazione.

Errore di interpolazione

Sia $f \in C^{n+1}([a, b])$, e siano x_0, \dots, x_n $n+1$ nodi distinti in $[a, b]$. Allora, per ogni $x \in [a, b] \exists \xi = \xi(x) \in [a, b]$ tale che

$$E_n(x) = f(x) - \Pi_n f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x)$$

È inoltre possibile riscrivere i polinomi della base di Lagrange rispetto al polinomio nodale

$$l_i(x) = \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_i)\omega'_{n+1}(x_i)} \quad i = 0, \dots, n$$

Definita la norma dello spazio $C^0([a, b])$ come

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

Si può definire X la matrice con elementi x_{ij} dati da $x_{n,0}, \dots, x_{n,n}$ $n+1$ nodi. Data $f \in C^0([a, b])$ e associato alla $(n+1)$ -esima riga di X il polinomio $\Pi_n f \in \mathbb{P}_n$, allora l'errore di interpolazione si può calcolare come

$$E^{n,\infty}(X) = \|f - \Pi_n f\|_\infty$$

Si definisce costante di Lebesgue

$$\Lambda_n(X) = \max_{x \in [a, b]} \sum_{j=0}^n |l_{n,j}(x)|$$

La costante di Lebesgue generalmente cresce al crescere di n , ma nel caso particolare di nodi equispaziati si mostra che

$$\Lambda_n(X) \simeq \frac{2^{n+1}}{en \log n}$$

e questa espressione mostra come l'interpolazione su nodi equispaziati tenda a essere instabile per n grande.

4 Integrazione numerica

Definita una funzione integrabile nell'intervallo $[a, b]$ come $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Il calcolo dell'integrale di una funzione per via analitica può risultare molto complesso, pertanto si possono studiare le formule di quadratura, o di integrazione numerica.

4.1 Formule di quadratura

Generalmente si definisce una formula di integrazione numerica sostituendo a f una funzione f_n approssimata, dove $n \in \mathbb{N}$ è un numero associato alla approssimazione considerata.

$$I_n(f) = \int_a^b f_n(x) dx \quad n \geq 0$$

L'errore di quadratura sarà quindi

$$|E_n(f)| \leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)| dx \leq (b-a) \max_{x \in [a,b]} |f(x) - f_n(x)|$$

Ogni formula di quadratura interpolatoria si può scrivere come

$$I_n(f) = \sum_{i=0}^m w_i f(x_i)$$

Mentre il grado di esattezza si può definire come il più grande intero $r \geq 0$ tale che

$$I_n(p) = I(p) \quad \forall p \in \mathbb{P}_r$$

Le formule di quadratura si dicono composite se ottenute mediante interpolazione polinomiale composta della funzione integranda utilizzando m sotto-intervalli di $[a, b]$ di ampiezza $H = \frac{(b-a)}{m}$. In questo modo è possibile approssimare $I(f)$ in maniera arbitrariamente precisa per $m \rightarrow \infty$. Alcune formule di quadratura composite sono

Formula del punto medio composta

$$I_{0,m}(f) = H \sum_{i=0}^{m-1} f(x_i), \quad x_i = a + \frac{H}{2} + iH \quad i = 0, \dots, m-1$$

L'errore di quadratura si ottiene come $\exists \xi \in [a, b]$

$$E_{0,m}(f) = \frac{b-a}{24} H^2 f''(\xi)$$

Formula del trapezio composta

$$I_{1,m}(f) = H \left[\frac{1}{2} f(x_0) + \sum_{i=1}^{m-1} f(x_i) + \frac{1}{2} f(x_m) \right], \quad x_i = a + iH \quad i = 0, \dots, m$$

L'errore di quadratura si ottiene come $\exists \xi \in [a, b]$

$$E_{1,m}(f) = -\frac{b-a}{12} H^2 f''(\xi)$$

Formula di Cavalieri-Simpson composta

$$I_{2,m}(f) = \frac{H}{6} \left[f(x_0) + 2 \sum_{r=1}^{m-1} f(x_{2r}) + 4 \sum_{s=0}^{m-1} f(x_{2s+1}) + f(x_{2m}) \right], \quad x_i = a + i \frac{H}{2} \quad i = 0, \dots, 2m$$

L'errore di quadratura si ottiene come $\exists \xi \in [a, b]$

$$E_{2,m}(f) = -\frac{b-a}{180} \left(\frac{H}{2}\right)^4 f^{(4)}(\xi)$$

4.2 Formula di Newton-Cotes

Le formule trattate in precedenza non sono altro che casi particolari delle più generiche formule di Newton-Cotes che si scrivono come formule chiuse o aperte a seconda che nell'intervallo di integrazione siano compresi gli estremi. La formula chiusa si scrive come

$$I_n(f) = h \sum_{i=0}^n w_i f(x_i), \quad w_i = \int_0^n \phi_i(t) dt, \quad \phi_i(t) = \prod_{k=0, k \neq i}^n \frac{t-k}{i-k}, \quad i = 0, \dots, n$$

Mentre la formula aperta

$$I_n(f) = h \sum_{i=0}^n w_i f(x_i), \quad w_i = \int_{-1}^{n+1} \phi_i(t) dt, \quad \phi_i(t) = \prod_{k=0, k \neq i}^n \frac{t-k}{i-k}, \quad i = 0, \dots, n$$

Per le formule sia aperte che chiuse l'errore di quadratura varia nelle costanti M_n e K_n che saranno rispettivamente negative o positive a seconda che la formula sia aperta o chiusa.

Per n pari $\exists \xi \in [a, b]$:

$$E_n(f) = \frac{M_n}{(n+2)!} h^{n+3} f^{(n+2)}(\xi)$$

Per n pari $\exists \eta \in [a, b]$:

$$E_n(f) = \frac{M_n}{(n+1)!} h^{n+2} f^{(n+1)}(\eta)$$

Il grado di esattezza è quindi $n+1$ per n pari e n per n dispari.

4.3 Formule di quadratura Gaussiane (da sistemare)

La relazione fra ordine di convergenza e grado di esattezza mette in mostra l'interesse di determinare le formule di quadratura a grado di esattezza massimo.

Condizione necessaria e sufficiente affinché $I_n(f)$ abbia grado di esattezza pari a $r = n + k$ con $k > 0$ è che siano soddisfatte le seguenti condizioni

- $I_n(f)$ sia una formula interpolatoria
- il polinomio nodale $\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$ soddisfi la seguente proprietà di ortogonalità

$$\int_{-1}^1 \omega_{n+1}(x)p(x)w(x)dx = 0, \quad \forall p \in \mathbb{P}_{k-1}$$

Il grado massimo di esattezza di una formula di quadratura a $n + 1$ nodi è $2n + 1$

5 Equazioni differenziali ordinarie

5.1 Introduzione

Dato un intervallo $I \subset \mathbb{R}$, $t_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$ e una funzione $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, il relativo problema di Cauchy consiste nel trovare una funzione reale $y \in C^1(I)$ tale che

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in I \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

In generale una equazione del tipo $y'(t) = f(t, y(t))$ si dice equazione differenziale ordinaria.

5.2 Metodi a un passo

Nei metodi a un passo per la risoluzione di sistemi di equazioni differenziali ordinarie la soluzione numerica u_{n+1} è assegnata a partire dal valore al passo precedente u_n , dopo aver fissato un istante di tempo $h > 0$

I metodi a un passo più noti sono

Metodo di Eulero esplicito

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + hf(t_n, u_n), & n \geq 0 \\ u_0 = y_0 \end{cases}$$

Metodo di Eulero Implicito

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + hf(t_{n+1}, u_{n+1}), & n \geq 0 \\ u_0 = y_0 \end{cases}$$

Metodo di Crank-Nicholson

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}[f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1})], & n \geq 0 \\ u_0 = y_0 \end{cases}$$

Metodo di Heun

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}[f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, hf(t_n, u_n))], & n \geq 0 \\ u_0 = y_0 \end{cases}$$

Un metodo è esplicito se si può calcolare u_{n+1} tramite una formula esplicita a partire dai valori $u_k, k \leq n$. Il generico metodo ad un passo esplicito si scrive come

$$u_{n+1} = u_n + h\Phi(t_n, u_n; h), \quad 0 \leq n < N_h, \quad u_0 = y_0$$

dove $\Phi(\cdot, \cdot; \cdot)$ è la funzione di incremento, che permette di definire l'errore di troncamento locale $\tau_{n+1}(h)$ come

$$y_{n+1} = y_n + h(\Phi(t_n, y_n; h) + \tau_{n+1})$$

Mentre il valore massimo di τ_{n+1} si definisce errore di troncamento globale $\tau(h) = \max_{0 \leq n < N_h} |\tau_{n+1}(h)|$.

Un metodo a un passo si dice consistente se $\lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = 0$ e si dice consistente di ordine $p > 0$ se

$$\tau(h) = \mathcal{O}(h^p) \quad h \rightarrow 0$$

È definito zero-stabile un metodo numerico in cui esistono una costante $h_0 > 0$ e una costante $C > 0$ indipendente da $h \in (0, h_0]$ tali che

$$|z_n^{(h)} - u_n^{(h)}| \leq C\varepsilon, \quad 0 \leq n \leq N_h \quad \forall h \in (0, h_0], \forall \varepsilon > 0$$

dove $z_n^{(h)}, u_n^{(h)}$ sono le soluzioni dello schema perturbato

$$\begin{cases} z_{n+1}^{(h)} = z_n^{(h)} + h[\Phi(t_n, z_n^{(h)}; h) + \delta_{n+1}], & 0 \leq n < N_h \\ z_0 = y_0 + \delta_0 \end{cases}$$

con $|\delta_k| \leq \varepsilon, 0 \leq k < N_h$.

5.3 Assoluta stabilità

Un metodo numerico per l'approssimazione si dice assolutamente stabile se esiste $h_0 > 0$ tale che per ogni $h < h_0$ si abbia

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = 0$$

La regione di assoluta stabilità è definita come

$$\mathcal{A} = \left\{ z = h\lambda \in \mathbb{C} : \lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = 0 \right\}$$

5.4 Metodi multistep

Un metodo è definito a $p+1$ passi se u_{n+1} dipende dai $p+1$ valori precedenti $u_{n-j}, j = 0, \dots, p$.

Un esempio è il metodo di Adams-Bashforth, ottenuto a partire dalla formulazione seguente

$$y_{n+1} = y_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt$$

I metodi più noti sono i metodi di Adams-Bashforth(AB), Adams-Moulton(AM) e Backwards Differentiation Formula (BDF)

Metodo	Schema	Passi	Ordine
AB2	$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}[3f_n - f_{n-1}]$	2	2
AB3	$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{12}[23f_n - 16f_{n-1} + 5f_{n-2}]$	3	3
AM2	$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{12}[5f_{n+1} + 8f_n - f_{n-1}]$	2	3
AM3	$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{24}[9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}]$	3	4
BDF3	$u_{n+1} = \frac{18}{11}u_n - \frac{9}{11}u_{n-1} + \frac{2}{11}u_{n-2} + \frac{6h}{11}f_{n+1}$	2	2

Tutti questi metodi sono detti metodi a più passi lineari e si generalizzano come

$$u_{n+1} = \sum_{j=0}^p a_j u_{n-j} + h \sum_{j=0}^p b_j f_{n-j} + hb_{-1}f_{n+1}, \quad n = p, p+1, \dots, N_h - 1$$

I metodi lineari si dicono consistenti se sono verificate

1. $\sum_{j=0}^p a_j = 1$
2. $-\sum_{j=0}^p j a_j + \sum_{j=-1}^p b_j = 1$

Per un metodo multistep lineare la zero-stabilità coincide con la condizione delle radici, ossia

$$\begin{cases} |r_j| \leq 1 & j = 0, \dots, p \\ |r_j| = 1 & \text{solo se } \rho'(r_j) \neq 0 \end{cases}$$

Inoltre un metodo multistep è convergente (di ordine q) se e solo se

$$|y_j - u_j| = \mathcal{O}(h^q), \quad j = 0, \dots, p$$

5.5 Metodi Runge-Kutta

Un metodo di Runge-Kutta a $s \geq 1$ stadi si scrive

$$u_{n+1} = u_n + h \sum_{i=1}^s b_i K_i$$

dove K_i si definisce

$$K_i = f \left(t_n + c_i h, u_n + h \sum_{j=1}^s a_{ij} K_j \right), \quad i = 1, \dots, s$$